

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Teorema de Pappus*

João Jorge Fernandes Chaves

Rio de Janeiro

2013

João Jorge Fernandes Chaves

*Teorema de Pappus*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Programa de Pós-graduação em Matemática  
PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a  
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

**Orientador: Silas Fantin**  
**Doutor em Matemática – USP**

Rio de Janeiro  
2013

Chaves, João Jorge Fernandes

Teorema de Pappus / João Jorge Fernandes Chaves – 2013

77.p

1. Matemática 2. Álgebra. I. Título

CDU 536.21

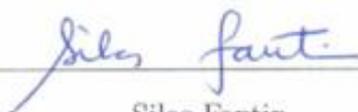
João Jorge Fernandes Chaves

*Teorema do Pappus*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 11 de abril de 2013

**BANCA EXAMINADORA**



---

Silas Fantin

Doutor em Matemática - USP



---

Leonardo Tadeu Silves Martins

Doutor em Matemática - UFF



---

Victor Augusto Giraldo

Doutor em Matemática - UFRJ

## Dedicatória

A minha amada esposa Lúdia e aos meus dois lindos e maravilhosos filhos Marcela e João Lucas, pela paciência, apoio afetivo e incentivo. Aos meus pais, Alberto e Maria que, mesmo nas dificuldades, sempre priorizaram os estudos de seus filhos.

## Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso do programa de Pós-graduação em matemática PROFMAT da UNIRIO são apresentadas duas demonstrações do Teorema de Pappus. A primeira por geometria sintética, via o Teorema de Menelau, e a segunda algébrica, via o Teorema de Bézout.

Esse trabalho foi desenvolvido em conjunto com o trabalho do professor João Carlos Cataldo cujo tema é o Teorema do Hexágono de Pascal. Em ambos há pré-requisitos comuns e o Teorema de Pappus pode ser entendido como um caso particular do Teorema do Hexágono de Pascal.

Houve uma grande preocupação com o uso de uma linguagem adequada a alunos do ensino médio. Ao final do trabalho há uma proposta de algumas atividades que podem ser aplicadas a esses alunos.

Tanto ao longo do desenvolvimento do trabalho quanto nas atividades propostas ao final, foi usado o software gratuito Geogebra.

**Palavras-chaves:** Pappus, Pascal, Menelau, Bézout,

## Abstract

This course conclusion paperwork for the Master Program in Mathematics from PROFMAT UNIRIO presents two proofs of Pappus's theorem. The first for synthetic geometry, by Menelau's Theorem, and the second algebraic, by the Bézout's Theorem.

This paper was developed in conjunction with João Carlos Cataldo's paperwork whose theme is Pappus's hexagon theorem. In both papers there are common prerequisites and Pappus's theorem can be understood as a particular case of Pappus's Hexagon Theorem.

There was concern with the use of appropriate language to high school students. At the end of the paper there is a proposal of some activities that can be applied to these students.

During the development of the paper and at the proposed activities, we used the free software GeoGebra.

Keywords: Pappus, Pascal, Menelau, Bézout,

## Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me dado saúde para que eu pudesse alcançar mais esse objetivo, e também a todos que, de alguma forma, contribuíram para que esse trabalho se concretizasse.

Ao meu grande amigo e irmão João Carlos Cataldo pelo incentivo e ajuda durante todo o curso;

Aos professores da UNIRIO pelo carinho e acolhimento durante esses dois longos anos.

Ao professor Silas Fantin pelo companheirismo e dedicação durante todo o curso e também no trabalho final.

Aos meus irmãos Cláudio e Claudionor por terem tido a paciência de ouvir meus lamentos e pelas orientações dadas.

Em especial, a minha linda esposa Lídia e queridos filhos Marcela e João Lucas pelo apoio e compreensão nas minhas ausências em muitos eventos e finais de semana.

Aos meus colegas professores que me ajudaram, em especial Francisco Linhares e Thales do Couto, que por muitas vezes me substituíram nas escolas em que trabalho.

A minha amada e pioneira turma de mestrado que simplesmente foi maravilhosa.

Ao grande e eterno amigo Eduardo Vicente pelo reencontro e fortalecimento desta verdadeira amizade.

A CAPES, pelo suporte financeiro, que permitiu a realização deste trabalho

## Sumário

INTRODUÇÃO .....	10
CAPÍTULO 1 .....	12
1.1-TEOREMA DE MENELAU .....	13
1.2 RAZÃO DE DIVISÃO DE UM SEGMENTO ORIENTADO.....	15
1.3 - TEOREMA DE MENELAU NA FORMA COMPLETA .....	17
1.4 TEOREMA DE PAPPUS.....	20
CAPÍTULO 2.....	26
2.1 DEFINIÇÕES INICIAIS.....	26
2.2 INTERSEÇÃO DE CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS .....	30
2.3 RESULTANTE DE DOIS POLINÔMIOS DE DUAS VARIÁVEIS .....	35
2.4 POLINÔMIOS IRREDUTÍVEIS.....	39
2.5 LEMAS PRINCIPAIS.....	43
2.6 TEOREMA DE BÉZOUT .....	51
CAPÍTULO 3.....	54
3.1 TEOREMA DE PAPPUS.....	54
3.2 UM PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DAS CÔNICAS .....	59
CAPÍTULO 4.....	63
4.1 ATIVIDADE 1 .....	63
4.2 ATIVIDADE 2.....	65
4.3 ATIVIDADE 3.....	65
4.4 ATIVIDADE 4.....	66
4.5 ATIVIDADE 5.....	66
CAPÍTULO 5 .....	67
5.1. SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1 .....	67
5.2. SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2 .....	68
5.3. SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 3 .....	70
5.4 SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 4 .....	71
5.5. SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 5 .....	73
SUGESTÕES PARA SALA DE AULA.....	75
CONCLUSÃO .....	76
BIBLIOGRAFIA.....	77

## INTRODUÇÃO

*- Gatinho de Cheshire (...)*  
*Poderia me dizer, por favor, que caminho devo tomar para ir embora daqui?*  
*- Isso depende muito de para onde quer ir - respondeu o Gato.*  
*- Para mim, acho que tanto faz... - disse a Alice.*  
*- Nesse caso, qualquer caminho serve - afirmou o Gato de Cheshire.*

Os recorrentes ajustes curriculares das escolas brasileiras reduziram e compartimentaram o ensino da matemática. A ciência da razão precisa entrelaçar, através da Lógica, a Aritmética com a Álgebra e a Geometria. Não se podem formar técnicos especialistas em apenas uma dessas três áreas da Matemática para o ensino básico. É preciso ver o todo, interligado na Matemática e levar sua linguagem e seu modo dedutivo para as outras ciências. O resultado que se deve buscar é de formar jovens criativos que adquiram familiaridade com as ciências em uma visão holística do mundo.

Quando se ensina um conteúdo com enfoques diferentes, o pensamento lógico e dedutivo fica mais aprofundado o que possibilita aumentar o entendimento do assunto ensinado. Há muito tempo é comum o uso de materiais concretos para ajudar a compreensão de conceitos matemáticos e hoje a tecnologia digital pode ser usada com esse mesmo propósito. Com a disponibilidade desse instrumento é fácil pesquisar informações relevantes e, usando programas computacionais específicos, criar conjecturas, fazer inferências e descobrir alguns resultados para depois demonstrá-los. Isso sem dúvida pode melhorar a capacidade de abstração do estudante, o que é valioso para o bom entendimento dessa ciência.

Esse trabalho entremeia conceitos de Geometria e Álgebra com o suporte de material digital disponível. O texto está escrito de acordo com os conteúdos do ensino básico e com uma linguagem apropriada a essa etapa. Todavia, as ideias são construídas com o rigor necessário ao ensino dessa ciência. Seu desenvolvimento reúne personagens e fatos históricos para situar no tempo a evolução do conhecimento matemático que é um verdadeiro patrimônio da humanidade. O objetivo principal é demonstrar o teorema de Pappus que é dotado de um forte apelo geométrico, através de um caminho essencialmente algébrico.

A partir da Geometria Analítica de Descartes, define-se uma curva plana como sendo o conjunto solução de uma equação polinomial de duas variáveis com coeficientes reais. Esse conjunto será o ingrediente fundamental para desenvolver o estudo do **Teorema de Pappus**:

Sejam as retas coplanares distintas  $u$  e  $v$  com dois conjuntos de três pontos distintos  $\{A, C, E\} \subset u$  e  $\{D, F, B\} \subset v$ . Então os pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  que são respectivamente as intersecções das retas  $AB$  e  $DE$ ,  $BC$  e  $EF$ ,  $CD$  e  $AF$  são colineares.

O primeiro capítulo apresenta os pré-requisitos geométricos acompanhados de uma demonstração básica dos Teoremas de Pappus, a luz do Teorema de Menelau de Alexandria. Essa demonstração pode ser apreciada com facilidade por alunos do ensino básico, pois envolve apenas conhecimentos do Teorema de Tales das retas paralelas ou de semelhança de triângulos.

O segundo capítulo disserta sobre os pré-requisitos algébricos voltados para o estudo da interseção das curvas algébricas planas, feito pelo método da resultante de dois polinômios de duas variáveis reais. Nele se discute uma demonstração do Teorema de Bézout, dirigida aos alunos do ensino médio. Nessa versão mais simples mostra como estimar o número de pontos de interseção de duas curvas planas dadas.

O terceiro capítulo consiste na demonstração do Teorema de Pappus por um caminho algébrico, e a citação do Teorema do Hexágono de Pascal, que em um caso particular, é equivalente ao teorema de Pappus. Discute também como o teorema de Pascal pode ser usado para se fazer uma construção geométrica das cônicas, através de recursos digitais como o Programa Computacional Geogebra.

O quarto capítulo, propõe algumas atividades que podem ser aplicadas em sala de aula e estão relacionadas com a abordagem desenvolvida neste trabalho. Depois seguem as soluções dessas atividades no capítulo cinco.

## CAPÍTULO 1

O presente capítulo reúne alguns pré-requisitos geométricos mais relevantes ao desenvolvimento desse trabalho, permanecendo, sempre que possível, os conceitos da geometria Euclidiana, embora em alguns pontos seja necessária a introdução de novos conceitos.

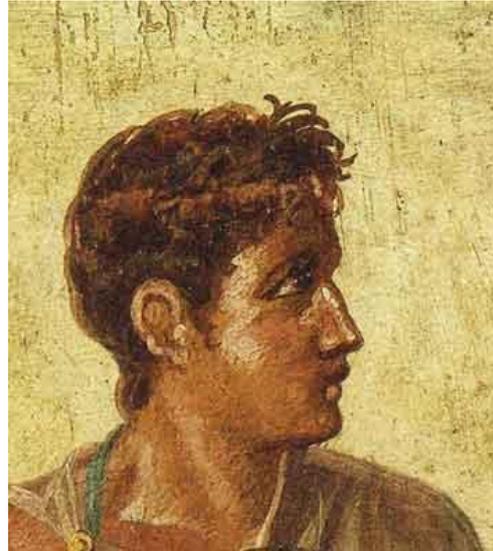
A História da Matemática vem sendo escrita a milênios, do Egito antigo e Babilônia até os dias atuais. A Matemática vem evoluindo com o aprimoramento e desenvolvimento de novas técnicas, fazendo como que a mesma esteja em constante expansão em suas diversas subáreas de atuação. Situar as descobertas no tempo com a investigação das dificuldades existentes em cada época pode ajudar a compreender melhor algumas estruturas e conceitos que foram evoluindo. O que está construído resulta de muito trabalho e esforço, muitas vezes na tentativa de resolver problemas, propostos na época, que são os motores propulsores do processo de criação.

Para chegar ao foco principal desse trabalho, que é de apresentar a demonstração do Teorema de Pappus, perpassam outros matemáticos que escreveram importantes páginas dessa história. Foram os pré-requisitos criados para levar a matemática até o estudo das curvas algébricas que são usadas nessa demonstração.

A obra de Euclides de Alexandria (325 a.C. – 265 a.C.) foi a primeira que atingiu um alto grau de sofisticação. Ele introduziu o método axiomático e não se sabe se sua obra tinha um motivo didático ou se era para reunir o conhecimento da época. Entretanto sabe-se que de fato ele alcançou esses dois objetivos com treze livros intitulados Os Elementos. Esses livros continham Aritmética, Álgebra e Geometria com grande rigor. Depois da Bíblia esse foi o livro que teve o maior número de publicações em diferentes idiomas e o mais estudado até os nossos tempos.



Euclides



Menelau

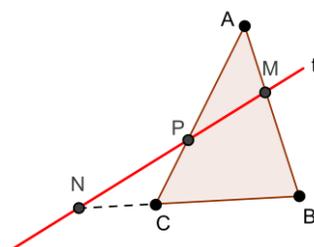
Através de comentários de historiadores gregos e árabes sabe-se que Menelau de Alexandria (70 d.C. – 130d.C) escreveu uma coleção de seis livros sobre “*Cordas no Círculo*”, um livro de “*Elementos da Geometria*” e uma série de trabalhos em geometria e astronomia, todos perdidos. O único livro de Menelau que sobreviveu aos tempos foi o “*Sphaerica*”, um tratado escrito em três volumes sobre geometria e trigonometria esférica, do qual chegou até o nosso tempo uma tradução árabe. No volume III ele menciona o teorema que é pré-requisito para esse trabalho porque pode ser aplicado na resolução de problemas de pontos colineares.

### 1.1-TEOREMA DE MENELAU

O Teorema de Menelau com a forma do ensino básico pode ser enunciado do seguinte modo:

**Teorema de Menelau - versão 1:** *Se uma reta  $t$  qualquer intersecta as três retas suportes dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  de um triângulo  $ABC$  nos pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$ ,*

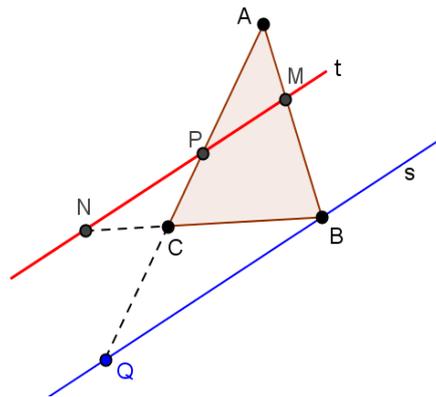
*respectivamente, então:* 
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1$$



### Demonstração:

Há pelo menos dois modos simples de se demonstrar esse teorema no ensino básico. Pelo teorema do feixe de retas paralelas de Tales ou por semelhança de triângulos. Aqui será apresentado o primeiro método.

Considere a reta  $s$ ,  $s//t$ , que passa pelo vértice  $B$  e intersecta o prolongamento do lado  $\overline{AC}$  em  $Q$ . Observe o desenho abaixo.



As paralelas  $t$  e  $s$  dividem as transversais  $\overline{AQ}$  e  $\overline{AB}$  em segmentos proporcionais.

(i) Das transversais  $\overline{AB}$  e  $\overline{AQ}$  resulta:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} = 1$$

(ii) Das transversais  $\overline{QP}$  e  $\overline{BN}$

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \Rightarrow \frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = 1$$

Multiplicando os termos das últimas igualdades representadas em (i) e (ii) temos:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = 1 \quad \blacksquare$$

Para mostrar que esse teorema é recíproco e justificar a sua forma completa, é necessário introduzir um conceito que é hoje estudado no ensino médio. A noção de segmento orientado e a definição de razão em que um ponto divide esse segmento orientado.

## 1.2 RAZÃO DE DIVISÃO DE UM SEGMENTO ORIENTADO

Antes de tudo, representa-se o segmento orientado de origem  $A$  e extremidade  $B$ , com  $A \neq B$ , por  $\overrightarrow{AB}$ . O comprimento do segmento  $\overrightarrow{AB}$  é a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  e será denotado por  $|\overrightarrow{AB}|$ . A razão em que um ponto  $P$  divide  $\overrightarrow{AB}$ ,  $P \neq B$  que está situado sobre a reta suporte do segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$ , será indicada por  $r(PAB)$  ou  $r_{AB}$ . Essa razão é um número real tal que:

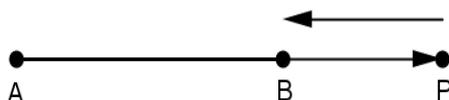
$$|r_{AB}| = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$$

e tem as seguintes condições:

(1ª) a razão é positiva,  $r_{AB} > 0$ , se  $\overrightarrow{AP}$  e  $\overrightarrow{PB}$  têm o mesmo sentido, isto é,  $P$  é um ponto interior ao segmento  $\overrightarrow{AB}$ , conforme a figura abaixo.



(2ª) a razão é negativa,  $r_{AB} < 0$ , se  $\overrightarrow{AP}$  e  $\overrightarrow{PB}$  têm sentidos opostos, isto é,  $P$  é um ponto externo ao segmento  $\overrightarrow{AB}$ , conforme o desenho.



(3ª) a razão é nula,  $r_{AB} = 0$ , se  $P = A$ , isto é,  $|\overrightarrow{AP}| = 0$ .

Desse modo, quando  $P$  é um ponto qualquer, da reta suporte do segmento  $\overrightarrow{AB}$ , pode-se escrever a equação

$$\overrightarrow{AP} = r_{AB} \cdot \overrightarrow{PB} \quad (I)$$

Substituindo  $r_{AB} = t$  se  $t \neq 0$  obtemos  $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{t} \cdot \overrightarrow{AP}$ . Além disso, para todo  $P \neq A$  vale que:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} \quad \therefore \quad \overrightarrow{AP} + \frac{1}{t} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \quad \therefore \quad \frac{t+1}{t} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \quad \therefore$$

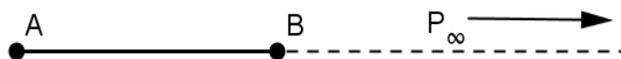
$$\overrightarrow{AP} = \frac{t}{t+1} \cdot \overrightarrow{AB}, \quad t \neq -1, \quad (II)$$

Note que se na equação (I) for substituído a razão  $t = -1$ , obtém-se o seguinte resultado:  
 $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PB} \quad \therefore \quad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = 0 \quad \therefore \quad \overrightarrow{AB} = \vec{0}$  o que é uma contradição, visto que  $A \neq B$ .

Agora, considerando-se que as coordenadas de  $A$ ,  $B$  e  $P$  nessa reta são respectivamente  $a, b$  e  $x$ . Da equação (II) pode-se escrever que:

$$x - a = \frac{t}{t+1} \cdot (b - a) \quad \therefore \quad x = a + \frac{t}{t+1} \cdot (b - a), \quad \text{para } t \neq -1.$$

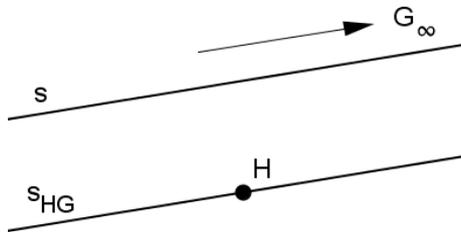
Se  $Q(x)$  é um ponto de coordenada  $x$ , na reta suporte do segmento  $\overline{AB}$ , e a razão em que o ponto  $Q$  divide esse segmento, conforme definido anteriormente, é o número  $t$  que se aproxima de  $-1$  (representa-se  $t \rightarrow -1$ ), então  $|x|$  tende para infinito ( $|x| \rightarrow \infty$ ) na expressão  $x = a + \frac{t}{t+1} \cdot (b - a)$ . Assim, convencionou-se que  $t = -1$  está associado a um ponto no infinito o que será representado por  $P_\infty$ . Além disso, como  $|\overrightarrow{AB}|$  é finito e não nulo resulta que  $|\overrightarrow{AP_\infty}| = |\overrightarrow{P_\infty B}|$ .



Defina a função  $r: \overline{AB} \rightarrow R$  que associa a cada ponto  $P$  da reta  $\overline{AB}$  um número real  $r(PAB) = t$ . Essa função é sobrejetiva porque dado um número real  $t$  qualquer existe um ponto  $P(x)$ , cuja coordenada  $x$  é obtida pela expressão  $x = a + \frac{t}{t+1} \cdot (b - a)$ . Além disso, se  $r(PAB) = r(P'AB) = t$  então  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP'}$ , isto é,  $P = P'$  o que prova que essa função é injetiva. Com isso, concluímos que a função definida é bijetiva.

Por convenção, duas retas paralelas têm um ponto comum no infinito; assim, uma reta do infinito, com a notação  $l_\infty$ , é o conjunto de todos os pontos, de um plano,

no infinito. Se  $G$  é um ponto do infinito ( $G_\infty$ ) de uma reta  $s$  e  $H \notin s \cap l_\infty$ , indicaremos  $s_{GH}$  a reta paralela à reta  $s$  que passa pelo ponto  $H$ .



Dado um triângulo  $ABC$ , admita no decorrer do trabalho que os lados orientados estão na ordem  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{CA}$ .

### 1.3 - TEOREMA DE MENELAU NA FORMA COMPLETA

**Teorema de Menelau:** Considere um triângulo  $ABC$  cujos lados  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{CA}$  têm retas suportes  $s_{AB}, s_{BC}$  e  $s_{CA}$ . Se  $M \in s_{AB}, N \in s_{BC}$  e  $P \in s_{CA}$  então:

$$M, N \text{ e } P \text{ são colineares se, e somente se } r(MAB) \cdot r(NBC) \cdot r(PCA) = -1.$$

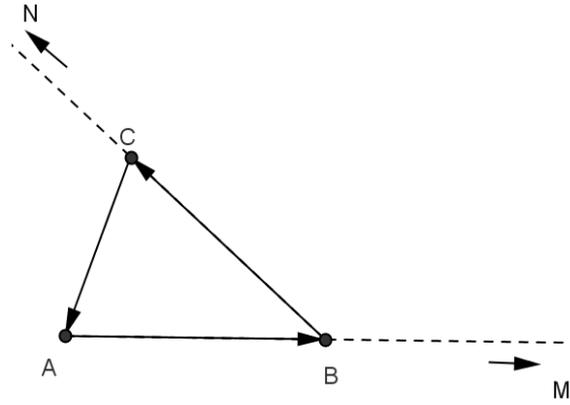
#### Demonstração:

A demonstração será separada em três passos.

**1º passo:** Dois pontos estão no infinito, digamos  $M$  e  $N$ , então:

$$r(MAB) \cdot r(NBC) \cdot r(PCA) = -1 \Leftrightarrow (-1) \cdot (-1) \cdot r(PCA) = -1 \Leftrightarrow$$

$$r(PCA) = -1 \Leftrightarrow M, N, P \in l_\infty, \text{ ou seja, } M, N \text{ e } P \text{ são colineares.}$$

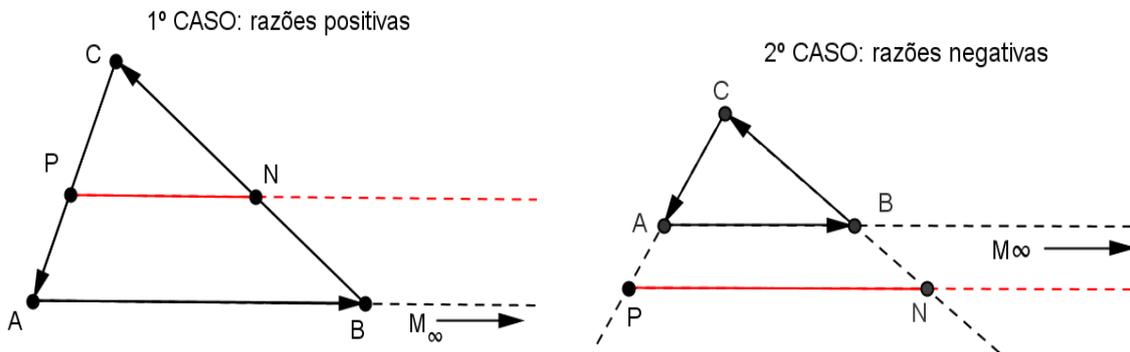


**2º passo:** Apenas um ponto está no infinito; digamos  $M \in l_\infty \Rightarrow r(MAB) = -1$ .

Logo, as outras razões têm o mesmo sinal e  $r(NBC) \cdot r(PCA) = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CP}} \Leftrightarrow \overline{NP} \parallel \overline{AB}.$$

Observe as duas situações possíveis abaixo:



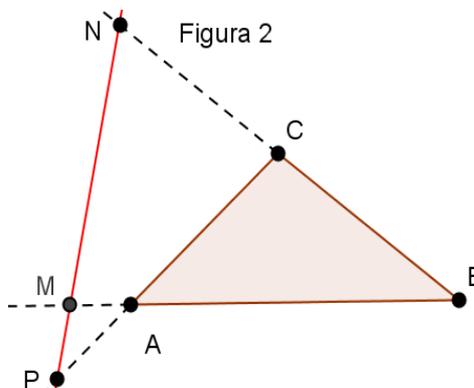
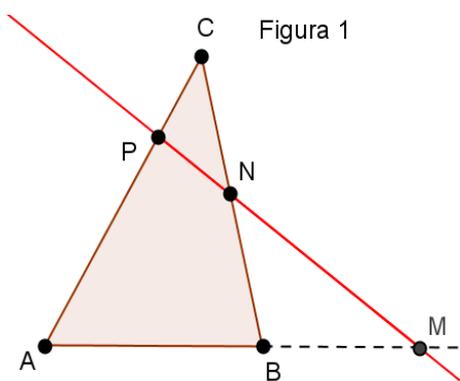
Nos dois casos a reta  $l_{PN}$  intersecta a reta  $l_{AB}$  no ponto  $M_\infty$ , então os três pontos  $M_\infty$ ,  $N$  e  $P$  são colineares.

**3º passo:** Os três pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  não estão em  $l_\infty$ . Então primeiramente vamos provar que se os três pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  são colineares então o produto das razões é  $(-1)$ .

Já foi provado na seção **1.2** que se os três pontos são colineares, então vale a igualdade:

$$|r(MAB) \cdot r(NBC) \cdot r(PCA)| = |r(MAB)| \cdot |r(NBC)| \cdot |r(PCA)| = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1.$$

Além disso, uma reta transversal que não passa por um vértice intersecta dois lados e o prolongamento de um deles, ou os prolongamentos dos três lados, conforme sugerem as figuras abaixo.

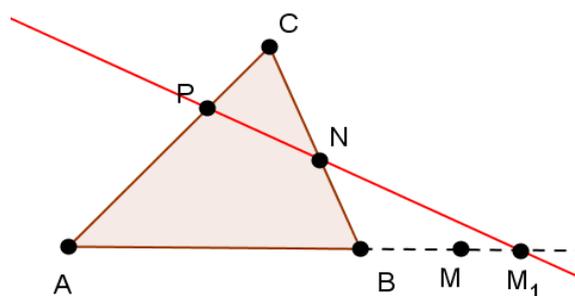


Na figura 1 a reta transversal intersecta apenas o prolongamento de um lado. Logo, apenas a razão  $r(MAB)$  é negativa, então o produto das três é  $(-1)$ .

Na figura 2 a reta transversal intersecta os prolongamentos dos três lados, então as três razões são negativas, logo o produto é  $(-1)$ . Isso finaliza a demonstração da condição necessária.

Agora falta demonstrar que: se o produto das razões é  $-1$ , então os três pontos são colineares.

Sejam  $M \in t_{AB}$ ,  $N \in t_{BC}$ ,  $P \in t_{CA}$  e  $M_1$  o ponto de intersecção das retas  $t_{AB}$  e  $t_{PN}$ .



Observe a figura acima.

(I) Por hipótese, o produto das razões é  $(-1)$ :  $r(MAB) \cdot r(NBC) \cdot r(PAC) = -1$ .

(II) Pela condição necessária demonstrada anteriormente se  $P$ ,  $N$  e  $M_1$  são colineares, então  $r(M_1AB).r(NBC).r(PCA) = -1$ .

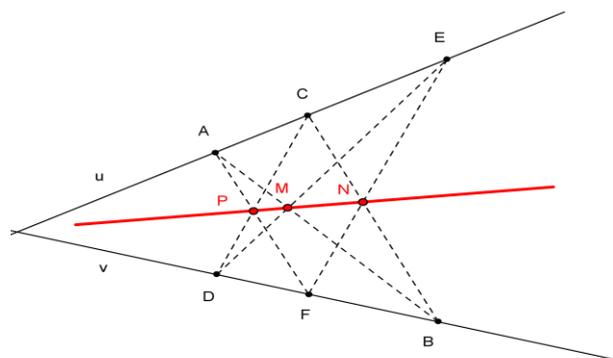
De (I) e (II) resulta  $r(MAB) = r(M_1AB)$  que é equivalente a  $M = M_1$  porque essa relação é bijetiva. Com isso, concluímos que  $M$ ,  $N$  e  $P$  são colineares e isso finaliza a demonstração da condição suficiente. ■

#### 1.4 TEOREMA DE PAPPUS

Com o declínio de estudos de geometria e com os novos desenvolvimentos limitando-se à astronomia, trigonometria e álgebra, Pappus foi o último geômetra grego (290d.C e 350d.C.) de importância. Sua fama reside em sua extensa obra denominada “*The Collection*”, na qual ele reuniu uma lista de importantes obras antigas, algumas atualmente perdidas. Nesse compêndio, ele acrescentou inúmeras explicações e ampliações. Essa obra contém oito livros que abordam os seguintes tópicos: cônicas, geometria plana, mecânica, linhas retas tangentes a certas curvas, entre outros. O trabalho de Pappus é tido como a base da geometria projetiva moderna. A ele se deve o teorema que será apresentado a seguir que pode ser tratado como um caso particular do Teorema do Hexagrama de Pascal, que está citado no final desse capítulo.

**Teorema de Pappus :** *Sejam as retas coplanares distintas  $u$  e  $v$  com dois conjuntos de três pontos distintos  $\{A, C, E\} \subset u$  e  $\{B, D, F\} \subset v$ . Então os pontos de intersecção  $l_{AB} \cap l_{DE} = M$ ,  $l_{BC} \cap l_{EF} = N$  e  $l_{CD} \cap l_{AF} = P$  são colineares.*

Observe a figura abaixo que ilustra o teorema



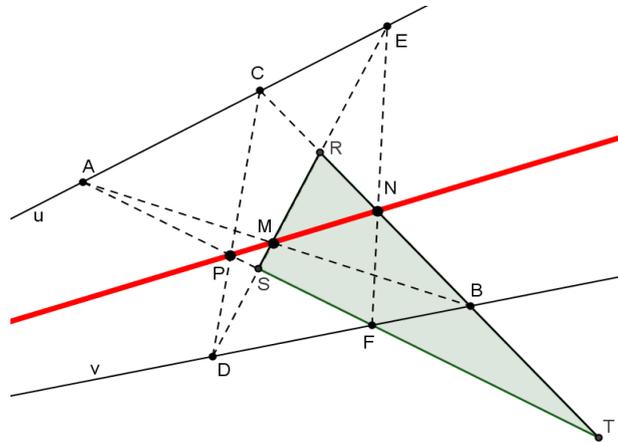
Esse teorema pode ser enunciado do seguinte modo: Considere o hexágono  $ABCDEF$  com os vértices não consecutivos  $A, C$  e  $E$  pertencentes a uma reta, e os vértices  $B, D$  e  $F$  sobre outra concorrente com a primeira. Se os pares de lados opostos  $(AB, DE)$ ,  $(BC, EF)$ ,  $(CD, AF)$  são concorrentes respectivamente em  $M, N$  e  $P$ , então esses pontos são colineares.

**Demonstração:**

Para demonstrar esse teorema será usado o teorema de Menelau dividindo-o em dois passos.

**1º passo**

Observe a figura abaixo.



$ABCDEF$  é um hexágono não convexo e seus lados opostos são:  $(AB, DE)$ ,  $(BC, EF)$  e  $(CD, AF)$ .

Sejam as retas suportes dos três lados não consecutivos  $l_{BC}$ ,  $l_{DE}$  e  $l_{FA}$  tais que os pontos  $l_{BC} \cap l_{DE} = R$ ,  $l_{DE} \cap l_{FA} = S$  e  $l_{FA} \cap l_{BC} = T$  determinam um triângulo  $RST$ . Aplicando o teorema de Menelau cinco vezes ao triângulo  $RST$ , encontra-se:

(1º) Com a transversal  $u$  :  $r(ERS).r(AST).r(CTR) = -1$

(2º) Com a transversal  $v$  :  $r(DRS).r(FST).r(BTR) = -1$

(3º) Com a transversal  $l_{AB}$  :  $r(MRS).r(AST).r(BTR) = -1$

(4º) Com a transversal  $l_{CD}$  :  $r(DRS).r(PST).r(CTR) = -1$

(5º) Com a transversal  $l_{EF}$  :  $r(ERS).r(FST).r(NTR) = -1$

Multiplicando todos os termos das cinco igualdades se obtém:

$$(r(ERS))^2 \cdot (r(AST))^2 \cdot (r(CTR))^2 \cdot (r(DRS))^2 \cdot (r(FST))^2 \cdot (r(BTR))^2 \cdot r(MRS) \cdot r(PST) \cdot r(NTR) = -1 \quad \Leftrightarrow$$

$$(-1)^2 \cdot (-1)^2 \cdot r(MRS) \cdot r(PST) \cdot r(NTR) = -1 \quad \Leftrightarrow$$

$$r(MRS) \cdot r(PST) \cdot r(NTR) = -1,$$

então pelo teorema de Menelau os três pontos M, N e P são colineares.

## 2º passo

Considere agora que as retas suportes dos lados não consecutivos  $l_{BC}$ ,  $l_{DE}$  e  $l_{FA}$  determinam três pontos R, S e T colineares. Lembrando que

$$l_{BC} \cap l_{DE} = R, \quad l_{DE} \cap l_{FA} = S \quad e \quad l_{FA} \cap l_{BC} = T,$$

seja  $x$  a reta que passa pelos pontos R e S ( $R \neq S$ ), então  $T \in x$  por hipótese.

Observe que  $l_{BC} \cap l_{DE} = R$ ,  $l_{DE} \cap l_{FA} = S$  logo R e S pertencem a  $l_{DE}$  e também a  $x$ , então  $l_{DE} = x$ . Como

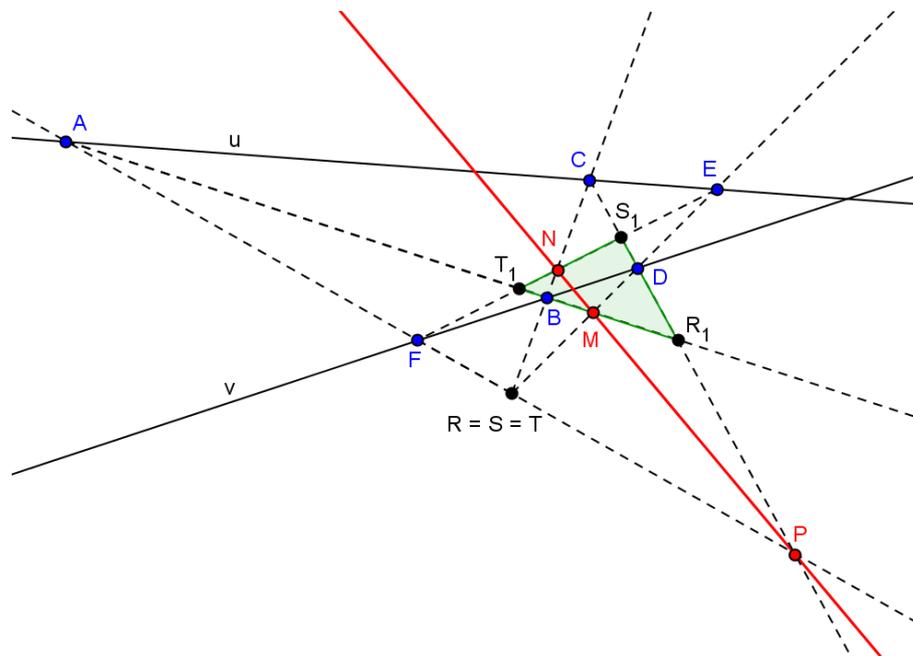
$$l_{BC} \cap x = R, \quad x \cap l_{FA} = S \quad e \quad l_{FA} \cap l_{BC} \cap x = T \quad \therefore R = S,$$

o que é uma contradição, pois  $R \neq S$ . Consequentemente:

$$R = S = l_{BC} \cap l_{DE} \cap l_{FA} \quad \therefore R = S = T.$$

Considere então as interseções das outras três retas suportes dos lados do “hexágono”

$$ABCDEF: R_1 = l_{AB} \cap l_{CD}, S_1 = l_{CD} \cap l_{EF} \text{ e } T_1 = l_{EF} \cap l_{AB}.$$



Se  $R_1, S_1$  e  $T_1$  formam um triângulo conforme a figura anterior, a demonstração que os pontos  $M = l_{AB} \cap l_{DE}$ ,  $N = l_{BC} \cap l_{EF}$  e  $P = l_{CD} \cap l_{AF}$  são colineares é análoga à feita no 1º passo. Por outro lado, se  $R_1, S_1$  e  $T_1$  são colineares, então

$$l_{R_1S_1} = l_{CD}, l_{R_1T_1} = l_{AB} \text{ e } l_{S_1T_1} = l_{EF},$$

isso acarreta que  $C, D, A, B, E$  e  $F$  são colineares. Isso é uma contradição da hipótese inicial porque os dois conjuntos de três pontos  $\{A, C, E\}$  e  $\{B, D, F\}$  estão em duas retas distintas, portanto essa última condição não pode ocorrer. Isso conclui a demonstração.

■

## TEOREMA DO HEXAGRAMA DE PASCAL NA CIRCUNFERÊNCIA

Merece ser mencionado o trabalho de Blaise Pascal (1623 – 1662), matemático, físico, teólogo e escritor de origem francesa, nasceu em Clermont-Ferrand, região de Auvergne, na França, em 19 de junho de 1623. Pascal aos doze anos começou a trabalhar em Geometria, chegando a descobrir que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.



Pascal

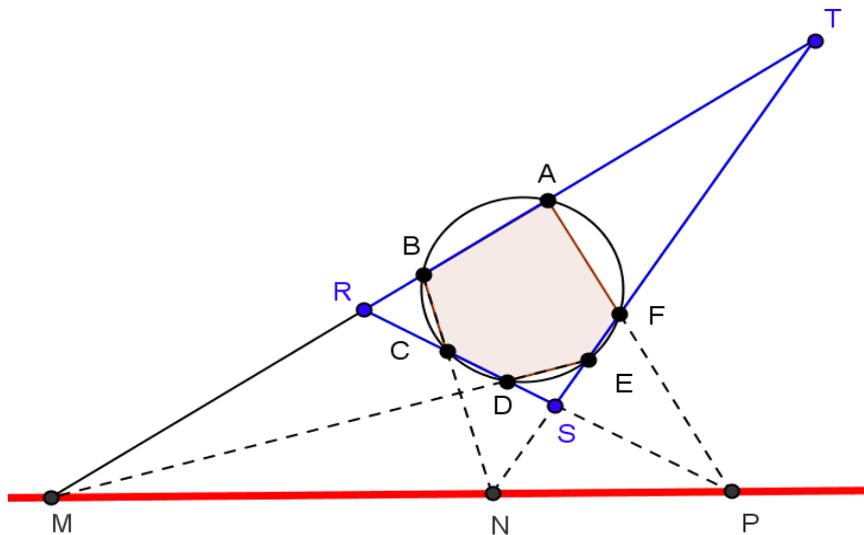
Seu pai Etienne Pascal, frequentava reuniões na casa do Padre franciscano Marin Mersenne, filósofo e físico francês, onde se discutia religião e outros assuntos, como: Filosofia, Física, Matemática, com a participação de personalidades importantes. Foi com aproximadamente quatorze anos que Pascal começou a acompanhar seu pai nessas reuniões e aos dezesseis anos apresentou o ensaio sobre

as cônicas, baseado nos estudos de Girard Desargues que também participava dos encontros promovidos na casa de Mersenne. Ainda aos dezesseis anos apresentou vários teoremas de Geometria Projetiva, entre os quais constava o teorema conhecido na literatura matemática como Teorema do Hexagrama de Pascal. Esse teorema está citado abaixo e o teorema de Pappus pode ser tratado como um caso particular dele.

## TEOREMA DO HEXÁGRAMA DE PASCAL

*Teorema do Hexágono de Pascal na circunferência. Considere um hexágono  $ABCDEF$  convexo (pode não ser convexo) inscrito numa circunferência. Se os pares de retas que são suportes dos lados opostos  $\{l_{AB}, l_{DE}\}, \{l_{BC}, l_{EF}\}, \{l_{CD}, l_{AF}\}$  se intersectam em três pontos respectivamente  $M, N$  e  $P$ , no infinito ou não, então eles são colineares.*

Observe a figura abaixo que ilustra esse teorema.



**Comentário:** A demonstração do teorema do Hexágono de Pascal na circunferência, com enfoque no ensino fundamental, é similar à apresentada no teorema do Pappus e pode ser vista no trabalho de conclusão de curso do PROFMAT – UNIRIO de João Carlos Cataldo.

## CAPÍTULO 2

Na Grécia antiga Apolônio ( $\pm 262$  a – 190 a.C.) escreveu um conjunto de oito livros sobre as curvas planas que podem ser obtidas intersectando-se um cone de duas folhas por um plano. Essas curvas são denominadas cônicas. Elas têm propriedades geométricas impressionantes que podem ser usadas na física e aplicadas em diversos ramos da engenharia, arquitetura e astronomia. Coube a Pierre de Fermat (1601-1665) e a René Descartes (1596-1650) a descoberta de que as seções cônicas podem ser expressas por equações do segundo grau nas coordenadas  $(x, y)$ . O primeiro escritor a colocar o estudo algébrico das cônicas em algo que se pode chamar de uma base moderna foi Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hôpital (1661-1704).

### 2.1 DEFINIÇÕES INICIAIS

Nesse capítulo serão apresentadas algumas notações e conceitos algébricos que são importantes para a compreensão do trabalho. Os resultados mais relevantes serão demonstrados ou indicaremos a fonte para buscar a sua prova.

Denomina-se polinômio de duas variáveis  $x$  e  $y$  sobre  $R$ , isto é, quando  $x$  e  $y$  percorrem o conjunto dos números reais, a adição de termos algébricos do tipo  $ax^i y^j$ ,  $a \in R$  e com expoentes  $i$  e  $j$  naturais. Por exemplo  $x^2 + xy^2 - 4x^3 y^2 - 6$  é um polinômio, porém  $x^{-3} + 2xy - 5x^3 y$  não é um polinômio porque o expoente do primeiro termo ( $x^{-3}$ ) não é um número natural. A função  $f: R^2 \rightarrow R$  definida por  $f(x, y) = z$  é denominada função polinomial de duas variáveis reais. O polinômio que define essa função será denotado por  $f$  ou  $f(x, y)$ , embora sejam conceitos distintos.

O grau do monômio  $ax^i y^j$ , para  $a \neq 0$ , é a soma dos expoentes das variáveis  $x$  e  $y$ , isto é,  $i + j$ . Com isso, o grau do polinômio é definido pelo maior grau de todos os seus monômios e o grau de um polinômio  $f$  será denotado por  $\partial f$ . Com essa notação pode-se escrever que se  $h(x, y) = 2x - 3x^2 y^2 + 6xy^2$ , o grau do polinômio  $h$  é  $\partial h = \text{máx}\{1, 4, 3\} \Rightarrow \partial h = 4$ .

As ideias de Descartes e Fermat possibilitaram descrever as cônicas e suas degenerações através de polinômios de grau dois com duas variáveis.

**Definição:**

Uma curva algébrica plana é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas cartesianas satisfazem a uma equação do tipo

$$f(x, y) = 0,$$

Onde  $f$  é um polinômio não constante; isto é, a curva algébrica plana é o conjunto dos zeros do polinômio de duas variáveis reais e será representada por  $Z(f)$ :

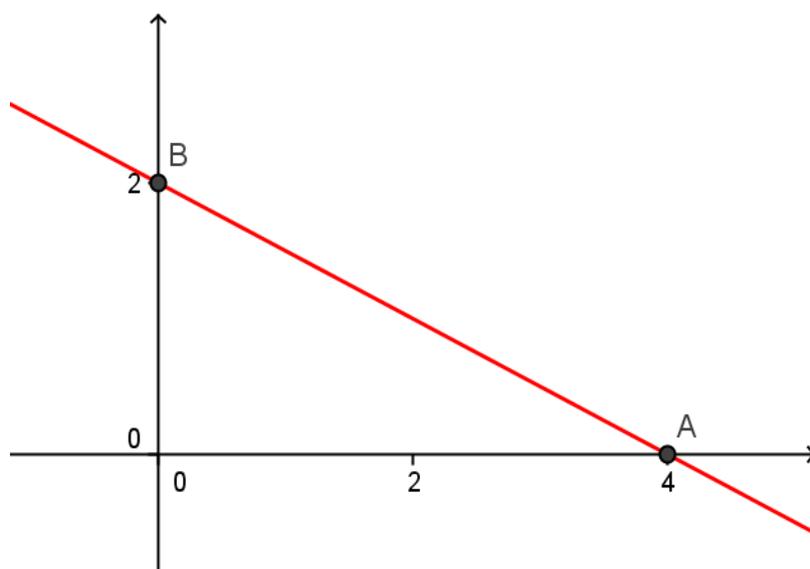
$$Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$$

Esse conjunto é também denominado traço real do polinômio ou simplesmente traço e o grau da curva é o grau do polinômio; assim, curvas de graus 1, 2 ou 3 são chamadas retas, cônicas ou cúbicas, respectivamente.

Algumas curvas algébricas planas são estudadas no ensino médio nas suas formas mais simples. A seguir apresentamos essas curvas definidas pelos conjuntos dos zeros de polinômios de grau 1 e 2.

**A reta**

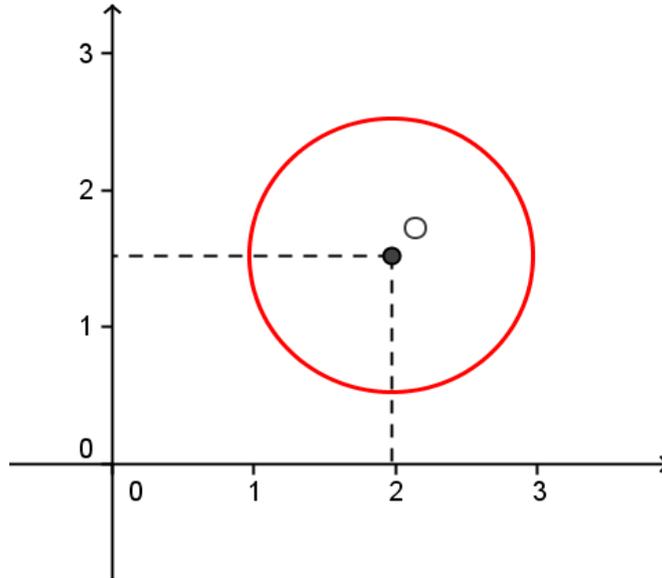
Dado  $f(x, y) = ax + by + c$  com  $a$  e  $b$  reais não simultaneamente nulos, o traço de  $f$  é uma reta:  $Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by + c = 0\}$ .



### A circunferência

Dado  $g(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$  com  $a$  e  $b$  reais quaisquer e  $r$  um número real positivo, o traço de  $g$  é uma circunferência:

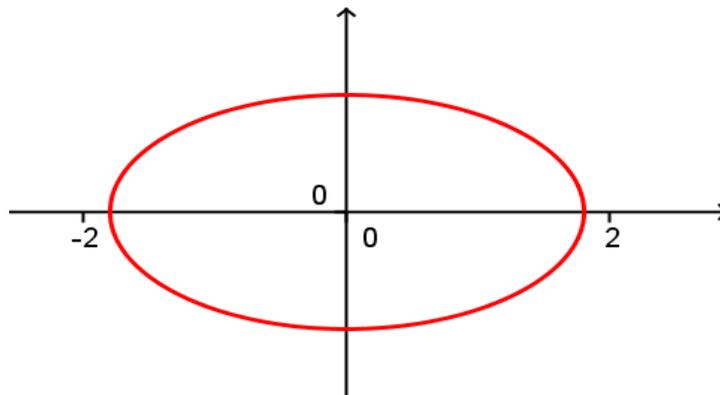
$$Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0\}.$$



### A elipse

Dado  $h(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$  com  $a$  e  $b$  reais não nulos,  $a \neq b$ , o traço de  $h$  é uma elipse:

$$Z(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\}.$$

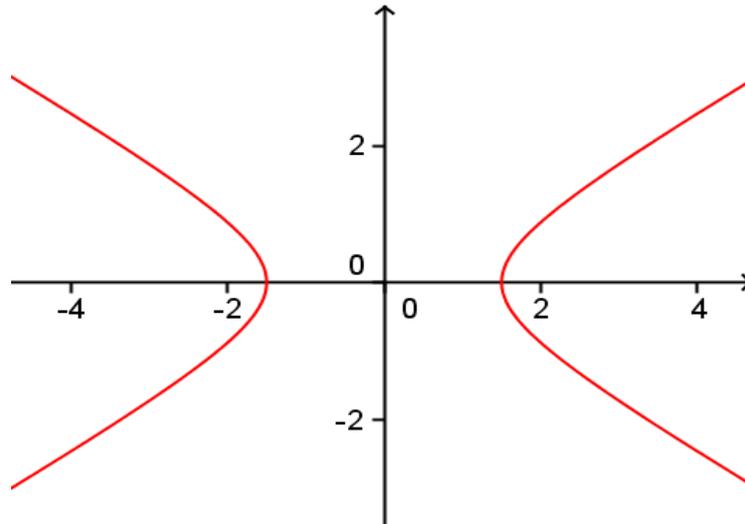


### A hipérbole

Seja  $i(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$  com  $a$  e  $b$  reais não nulos,  $a \neq b$ , o traço de  $i$  é uma

hipérbole:

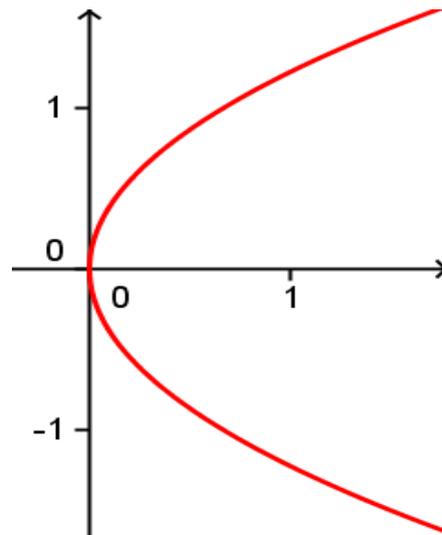
$$Z(i) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\}.$$



### A parábola

Seja  $j(x, y) = y^2 - ax$  com  $a$  real não nulo, o traço de  $j$  é uma parábola:

$$Z(j) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 = ax\}.$$



## 2.2 INTERSEÇÃO DE CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS

*Pode-se escrever um polinômio  $f(x, y)$  de dois modos:*

*com a variável  $y$ , e coeficientes dependentes de  $x$ ,  $f \in (R[x])[y]$ ; ou com a variável  $x$  e coeficientes em  $R[y]$ ,  $f \in (R[y])[x]$ .*

### **Exemplo:**

Se  $f(x, y) = -xy^2 + xy + 8y^2 - 5y + 4$ , têm-se os seguintes modos:

#### **Primeiro modo:**

se  $f \in (R[x])[y]$ ,  $f(x, y) = a_0(x) \cdot y^2 + a_1(x) \cdot y + a_2(x)$ , ou seja,

$f(x, y) = (8-x) \cdot y^2 + (x-5) \cdot y + (4)$  e seus coeficientes são  $a_0(x) = 8-x$ ,  $a_1(x) = x-5$  e  $a_2(x) = 4$ .

#### **Segundo modo:**

se  $f \in (R[y])[x]$ ,  $f(x, y) = b_0(y) \cdot x + b_1(y)$ , ou seja,

$f(x, y) = (-y^2 + y) \cdot x + (8y^2 - 5y + 4)$  e seus coeficientes são  $b_0(y) = -y^2 + y$  e  $b_1(y) = 8y^2 - 5y + 4$ .

Segundo J. Stillwell a resolução de um sistema de equações lineares foi desenvolvida na China por volta de 200 anos a. C.. A técnica de eliminar uma variável de dois polinômios para resolver sistemas de equações não lineares foi desenvolvida na Europa no século XVII motivado pelo estudo da interseção de curvas algébricas.

Para determinar a interseção de uma reta  $Z(f) = \{(x, y) \in R^2; x - y + 3 = 0\}$  com uma hipérbole  $Z(g) = \{(x, y) \in R^2; 2x^2 - y^2 - 7 = 0\}$  é preciso resolver o sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x^2 - y^2 - 7 = 0 \end{cases}$$

É claro que é possível achar o valor de  $y$  na primeira equação e eliminá-lo substituído esse valor na segunda equação. Entretanto aqui será usada outra técnica um pouco diferente. Em primeiro lugar vamos escrever os dois polinômios com variáveis  $y$  e coeficientes dependentes de  $x$ .

$$S_1 \begin{cases} (0) \cdot y^2 + (-1) \cdot y + (x+3) = 0 \\ (-1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (2x^2 - 7) = 0 \end{cases}$$

Se  $y = k$  é uma das soluções da primeira equação, multiplicando essa equação por  $y$  obtém-se outra equação que também possui a solução  $y = k$ . Com isso forma-se um novo sistema de três equações ( $S_2$ ) cujo conjunto solução contém o do sistema  $S_1$ .

$$S_2 \begin{cases} (0) \cdot y^2 + (-1) \cdot y + (x+3) = 0 \\ (-1) \cdot y^2 + (x+3) \cdot y + (0) = 0 \\ (-1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (2x^2 - 7) = 0 \end{cases}$$

Pode-se ainda escrever  $S_2$  na forma matricial o que resulta em

$$S_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & x+3 \\ -1 & x+3 & 0 \\ -1 & 0 & 2x^2 - 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^2 \\ y^1 \\ y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com a substituição de  $y^0$ ,  $y^1$  e  $y^2$  por  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , respectivamente, obtém-se um sistema linear homogêneo de incógnitas  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ . Como  $y$  deve percorrer o conjunto de todos os números reais, o sistema linear homogêneo  $S_3$  deve ser indeterminado, caso contrário teria apenas a solução trivial o que corresponderia obter somente  $y = 0$ . A condição para que isso ocorra, isto é, o sistema linear homogêneo tenha infinitas soluções é o determinante da matriz dos coeficientes ser igual à zero. Logo,

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & x+3 \\ -1 & x+3 & 0 \\ -1 & 0 & 2x^2 - 7 \end{bmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante de ordem três, pelo desenvolvimento de Laplace aplicado a primeira coluna, encontra-se a equação:

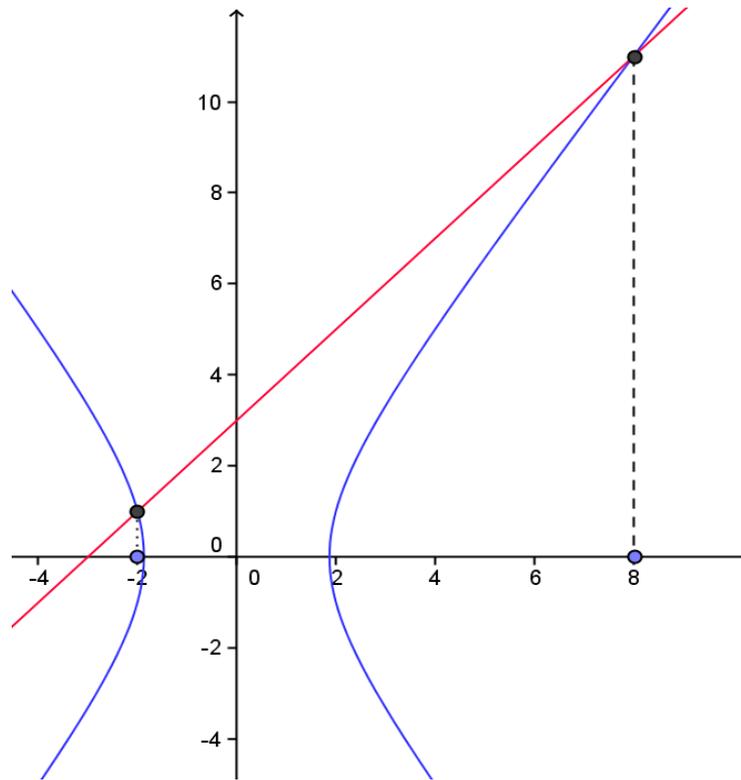
$$(-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot [-(2x^2 - 7)] + (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot [-(x+3)^2] = 0 \quad \therefore \quad -2x^2 + 7 + x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 - 6x - 16 = 0 \quad \therefore \quad x = 8 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Essa técnica funciona como um método de eliminação de uma das variáveis, que no caso foi  $y$ , para calcular a outra. Com a substituição dos valores de  $x$  na equação  $x - y + 3 = 0$  determina-se a solução do sistema  $S_1$ , isto é, os pontos de interseção das duas curvas:

$$Z(f) \cap Z(g) = \{(8, 11), (-2, 1)\},$$

conforme ilustra a figura abaixo.



O número de pontos de interseção de duas curvas  $Z(f)$  e  $Z(g)$  é representado por:  $\#(Z(f) \cap Z(g))$ . Cabe agora ao leitor a seguinte pergunta: é possível determinar esse número sem resolver o sistema formado pelas equações que definem as curvas? Com o propósito de responder a essa questão, convido o leitor a pensar na interseção dos traços dos polinômios  $f$  e  $g$ ,

$$f(x, y) = y^2 - x \quad e \quad g(x, y) = x^2 - 2x + y^2,$$

Então é preciso resolver o sistema:

$$S_1 \begin{cases} -x + y^2 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

Escrevendo os polinômios com a variável  $y$  e coeficientes dependentes de  $x$  encontra-se

$$S_4 \begin{cases} (1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (-x) = 0 & (E_1) \\ (1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (x^2 - 2x) = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Multiplicando-se as equações  $E_1$  e  $E_2$  por  $y$  obtemos um sistema que pode ser interpretado como linear homogêneo de quatro incógnitas.

$$S_5 \begin{cases} (1) \cdot y^3 + (0) \cdot y^2 + (-x) \cdot y + (0) = 0 & (E_1) \cdot y \\ (0) \cdot y^3 + (1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (-x) = 0 & (E_1) \\ (1) \cdot y^3 + (0) \cdot y^2 + (x^2 - 2x) \cdot y + (0) = 0 & (E_2) \cdot y \\ (0) \cdot y^3 + (1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (x^2 - 2x) = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \\ 1 & 0 & x^2 - 2x & -x \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^3 \\ y^2 \\ y^1 \\ y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como  $y$  deve percorrer o conjunto dos números reais, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \\ 1 & 0 & x^2 - 2x & -x \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 2x \end{bmatrix} = 0$$

e este determinante resolvido pelo método de Laplace resulta em

$$(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & x^2 - 2x & -x \\ 1 & 0 & x^2 - 2x \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \\ 1 & 0 & x^2 - 2x \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore$$

$$(x^2 - 2x)^2 + x(x^2 - 2x) + x^2 + x(x^2 - 2x) = 0.$$

Fatorando o polinômio do primeiro membro da equação obtém-se:

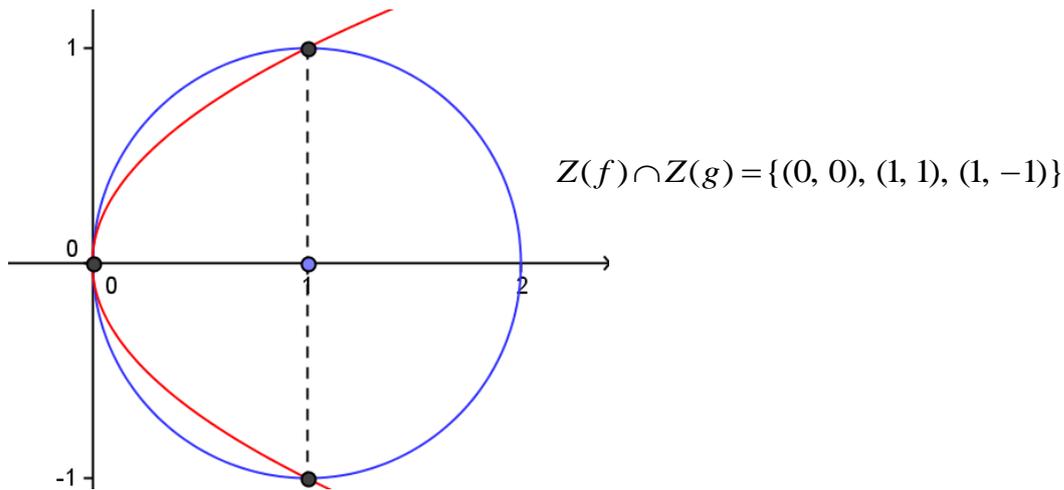
$$(x^2 - 2x) \cdot [(x^2 - 2x) + x + x] + x^2 = 0 \quad \therefore (x^2 - 2x) \cdot [x^2] + x^2 = 0$$

e colocando  $x^2$  em evidência resulta

$$x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \therefore x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Note que calcular os valores de  $x$  eliminando  $y$  tem um significado geométrico. É o mesmo que projetar ortogonalmente os pontos de interseção das curvas no eixo das

abscissas. É razoável pensar que são dois pontos de interseção porque obtivemos dois valores reais de  $x$ . Entretanto é necessário tomar cuidado com essa conclusão, porque podem ocorrer outros pontos pertencentes às retas verticais cujas equações são  $x = 0$  e  $x = 1$ . Nesse caso, apenas com a projeção ortogonal dos pontos de  $Z(f) \cap Z(g)$  sobre o eixo  $x$  não se saberia determinar a cardinalidade do conjunto interseção.



Para contornar esse problema pode-se ainda projetar sobre o eixo  $y$  resolvendo de algum modo o sistema para calcular  $y$ . É o que será feito a seguir.

Os mesmos polinômios  $f(x, y) = y^2 - x$  e  $g(x, y) = x^2 - 2x + y^2$ , com a variável  $x$  e coeficientes dependentes de  $y$  formam agora outro sistema com equações  $(e_1)$  e  $(e_2)$ :

$$S_2 \begin{cases} (0) \cdot x^2 + (-1) \cdot x + (y^2) = 0 & (e_1) \\ (1) \cdot x^2 + (-2) \cdot x + (y^2) = 0 & (e_2) \end{cases}$$

De modo análogo, ao que foi feito antes, multiplica-se a primeira equação  $(e_1)$  por  $x$  para recair em um sistema que se interpreta como linear homogêneo de três variáveis.

$$S_3 \begin{cases} (-1) \cdot x^2 + (y^2) \cdot x + (0) = 0 & (e_1) \cdot x \\ (0) \cdot x^2 + (-1) \cdot x + (y^2) = 0 & (e_1) \\ (1) \cdot x^2 + (-2) \cdot x + (y^2) = 0 & (e_2) \end{cases}$$

O sistema  $(S_3)$  pode ser escrito na forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} -1 & y^2 & 0 \\ 0 & -1 & y^2 \\ 1 & -2 & y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como  $x$  deve percorrer o conjunto dos números reais, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo,

$$\det \begin{bmatrix} -1 & y^2 & 0 \\ 0 & -1 & y^2 \\ 1 & -2 & y^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \therefore \quad y^2 + y^4 - 2y^2 = 0 \quad \therefore \quad y^2(y^2 - 1) = 0 \quad \therefore$$

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad y = 1 \quad \text{ou} \quad y = -1$$

Esses valores indicam que há três pontos de projeção no eixo  $y$ . Entretanto foram encontrados dois pontos de projeção no eixo  $x$ . Portanto, o conjunto interseção das curvas é constituído por três pontos dos quais há dois que pertencem a uma reta perpendicular ao eixo  $x$ . De fato, sobre a reta  $x = 1$  conforme mostra o gráfico anterior.

Para calcular os pontos de interseção de duas curvas o método é o de selecionar, uma das variáveis, digamos  $x$ , para figurar nos coeficientes, isto é, considerar  $f$  e  $g$  como polinômios na variável  $y$ , e coeficientes em  $R[x]$ . Com isso procura-se determinar os valores de  $x_0$  para os quais  $f(x_0, y)$  e  $g(x_0, y)$  admitem uma raiz comum. Geometricamente isso equivale a encontrar as projeções sobre o eixo dos  $x$  dos pontos de  $Z(f) \cap Z(g)$ , isto é, os pontos  $x_0$  para os quais a equação  $f(x_0, y) = g(x_0, y)$  admite uma raiz. Este processo, típico da chamada Teoria de Eliminação, repousa sobre o estudo da Resultante de Polinômios cuja definição será feita a seguir motivada nos exemplos anteriores.

### 2.3 RESULTANTE DE DOIS POLINÔMIOS DE DUAS VARIÁVEIS

**Definição:** *Considere*

$$f(x, y) = a_0(x) \cdot y^m + a_1(x) \cdot y^{m-1} + \dots + a_m(x) \quad e$$

$$g(x, y) = b_0(x) \cdot y^n + b_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + b_n(x),$$

*Denomina-se resultante de  $f$  e  $g$  o determinante da matriz de ordem  $(m + n)$  com  $n$  linhas formadas pelos coeficientes de  $f$  seguidas por  $m$  linhas formadas pelos coeficientes de  $g$ , subentendendo-se que os espaços em branco são preenchidos com zeros.*

$$R_{f,g} = \det \left[ \begin{array}{cccccccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & - & - & - & \dots & - \\ - & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & - & - & \dots & - \\ - & - & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & - & \dots & - \\ \vdots & \dots & \vdots \\ - & - & - & - & - & a_0 & a_1 & - & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & - & - & - & \dots & - \\ - & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & - & - & \dots & - \\ - & - & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & - & \dots & - \\ \vdots & \dots & \vdots \\ - & - & - & - & - & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ linhas} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ m \text{ linhas} \end{array}$$

Resolver a equação, resultante igual à zero, corresponde a eliminar  $y$  no sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

A resultante de  $f$  e  $g$  também pode ser calculada tomando-se os polinômios com variável  $x$  e seus respectivos coeficientes pertencentes a  $R[y]$ . Nesse caso  $R_{f,g} = 0$  elimina o  $x$  no sistema.

### Exemplo 1:

Se  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  e  $g(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6$ , tomando-se os polinômios  $f, g \in (R[x])[y]$ , tem-se:

$$f(x, y) = 1 \cdot y^2 + 0 \cdot y + (x^2 - 1) \quad e \quad g(x, y) = 2 \cdot y^2 + 0 \cdot y + (3x^2 - 6)$$

$$R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 1 \\ 2 & 0 & 3x^2 - 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3x^2 - 6 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse determinante por Laplace encontra-se:

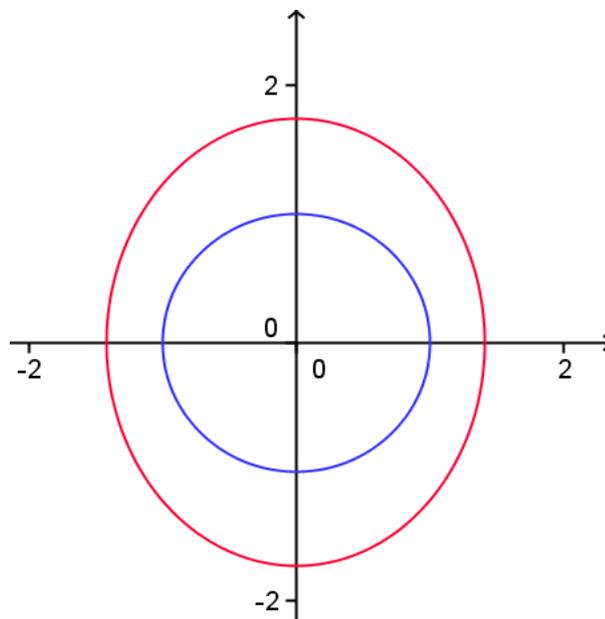
$$R_{f,g} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x^2 - 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3x^2 - 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 - 1 \\ 0 & 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} \quad \therefore$$

$$R_{f,g} = \left[ (3x^2 - 6)^2 - 2(x^2 - 1)(3x^2 - 6) \right] + \left[ 4(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)(3x^2 - 6) \right] \quad \therefore$$

$$R_{f,g} = \left[ (3x^2 - 6)^2 - 4(x^2 - 1)(3x^2 - 6) + 4(x^2 - 1)^2 \right] = \left[ (3x^2 - 6) - 2(x^2 - 1) \right]^2 = [x^2 - 4]^2$$

Para calcular a interseção dessa circunferência  $Z(f)$  com a elipse  $Z(g)$  basta resolver a equação  $R_{f,g} = 0 \quad \therefore \quad x^2 - 4 = 0 \quad \therefore \quad x = \pm 2$  e substituir na equação

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \therefore \quad 4 + y^2 - 1 = 0 \quad \therefore \quad y^2 = -3$ . Este último resultado é impossível no conjunto dos números reais. Logo, as curvas não têm ponto comum conforme se pode observar no gráfico desenhado abaixo,  $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$ .



### Exemplo 2:

Agora, outro exemplo é calcular a resultante dos polinômios

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$  e  $g(x, y) = xy - 1$ , considerando  $f, g \in (R[x])[y]$ , ou seja,

$$R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^2 - 4 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{bmatrix}. \text{ Resolvendo este determinante encontra-se:}$$

$$R_{f,g} = 1 + x^2(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 + 1.$$

Para determinar os pontos de interseção dessas cônicas resolve-se a equação

$$R_{f,g} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Como esses dois últimos valores são positivos,  $x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ .

Logo,  $x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ,  $x_2 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $x_3 = -\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  e  $x_4 = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

Para calcular os correspondentes valores de  $y$  substitui-se cada valor de  $x$  na equação

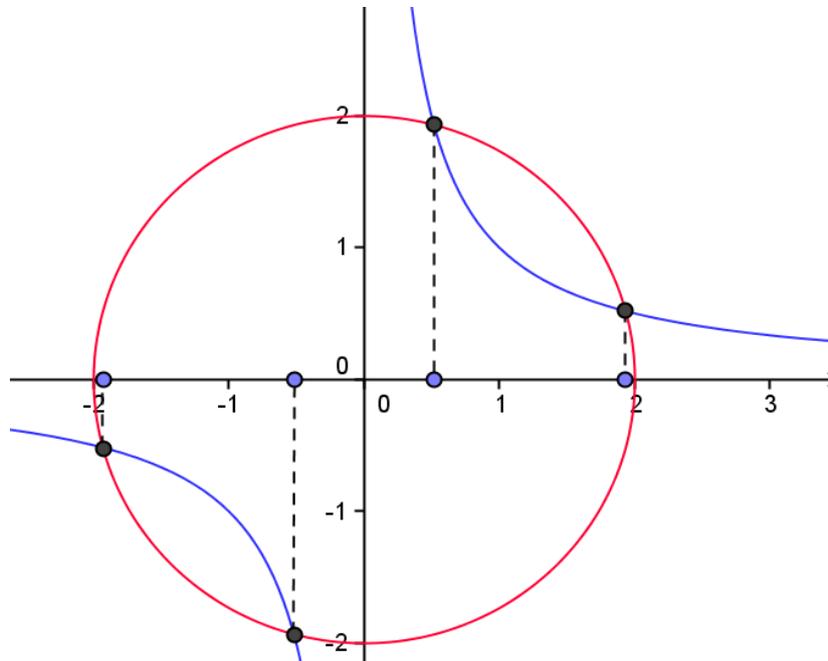
$$g(x, y) = 0 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}.$$

$$x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \Rightarrow y_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Analogamente, obtém-se:  $y_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ,  $y_3 = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $y_4 = -\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Então, o

conjunto de pontos de interseção da circunferência  $Z(f)$  com a hipérbole  $Z(g)$  é

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$  como pode ser visto no gráfico abaixo.



Os resultados que serão apresentados a seguir revelam a importância do estudo da resultante de dois polinômios.

## 2.4 POLINÔMIOS IRREDUTÍVEIS

**Definição:** Considere  $R$  o conjunto dos números reais e  $R[x]$  o conjunto dos polinômios de coeficientes reais com a variável  $x \in R$  ou na indeterminada  $x \in R$ . Diz-se que  $f \in R[x]$  com  $\partial f \geq 1$  é irredutível sobre  $R$  quando para qualquer fatoração  $f = g \cdot h$  com  $g \in R[x]$  e  $h \in R[x]$  exatamente um desses polinômios é constante, isto é,  $g(x) = a$  ou  $h(x) = b$  com  $a \in R$  e  $b \in R$ .

A mesma definição vale para o conjunto dos números complexos  $C$ .

Uma observação importante é que todo polinômio de grau 1 é irredutível em  $R$  e em  $C$ .

Note que dado  $f(x) = 2x - 6 \in R[x]$  podemos escrever

$$f(x) = 2 \cdot (x - 3) \quad \text{ou} \quad f(x) = 12 \cdot \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad f(x) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}x - 3\sqrt{2})$$
 seja como

for um dos fatores é uma constante real. Admita que os dois fatores não fossem constantes, então teriam graus maiores do que ou iguais a 1, e daí o grau de  $f$  seria no mínimo 2. Isso é uma contradição porque  $f$  tem grau 1.

Se  $f(x) = 2x - 6 \in C[x]$  além das fatorações anteriores poderíamos escrever produtos com coeficientes imaginários do tipo:

$$f(x) = 2i \cdot (-ix + 3i) \quad \text{ou} \quad f(x) = (1+i)((1-i)x - 3(1-i))$$
 onde  $i$  representa a unidade

imaginária do conjunto  $C$  dos números complexos.

Por outro lado polinômios do segundo grau nem sempre são irredutíveis em  $R$ , todavia são sempre redutíveis em  $C$ . De fato, o teorema fundamental da álgebra (teorema de Gauss) garante que qualquer polinômio de grau  $n$  em  $C[x]$  tem  $n$  raízes complexas e então pode ser decomposto em um produto de fatores do primeiro grau e coeficientes complexos.

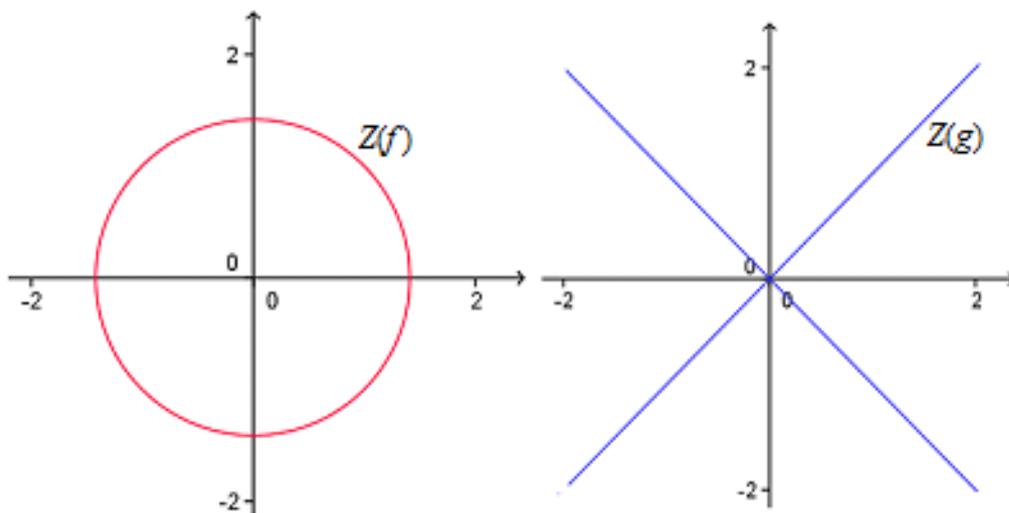
$f(x) = ax^2 + bx + c \in R[x]$  com coeficientes  $a, b, c \in R$  nem sempre pode ser fatorado em  $R[x]$ . Se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  esse polinômio não tem raízes em  $R$  por isso não é possível a sua fatoração com fatores do primeiro grau em  $R[x]$ ; assim,

$f(x) = x^2 - 2x + 5$  é irredutível em  $R[x]$  porque  $\Delta = -16$ . Porém, é redutível em  $C$  pois  $f(x) = (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))$ .

Agora,  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  pode ser fatorado em  $R[x]$  e conseqüentemente em  $C[x]$  porque  $\Delta \geq 0$ :  $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ .

Considerando  $R[x, y]$  o conjunto dos polinômios de duas variáveis reais  $x$  e  $y$  valem os mesmos conceitos anteriores. Desse modo  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$  é irredutível em  $R[x, y]$  e  $g(x, y) = x^2 - y^2$  é redutível, porque  $g(x, y) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ .

As curvas definidas por esses polinômios  $Z(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 2 = 0\}$  e  $Z(g) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$  podem ser vistas nos desenhos abaixo.

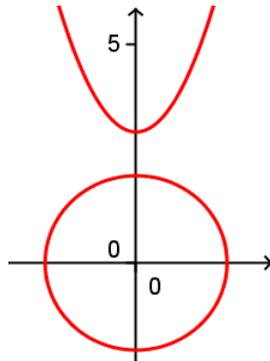


Uma curva  $\Omega$  definida por um polinômio redutível em  $R[x, y]$  pode apresentar dois ramos separados ou não. De fato se essa curva é o conjunto dos zeros do polinômio cuja fatoração é  $h_1(x, y) \cdot h_2(x, y)$  então  $h_1(x, y) \cdot h_2(x, y) = 0$  se, e somente se,  $h_1(x, y) = 0$  ou  $h_2(x, y) = 0$ ; assim, a curva  $\Omega$  é a união dos conjuntos  $\{(x, y) \in R^2; h_1(x, y) = 0\}$  e  $\{(x, y) \in R^2; h_2(x, y) = 0\}$  e estes conjuntos por si só são curvas.

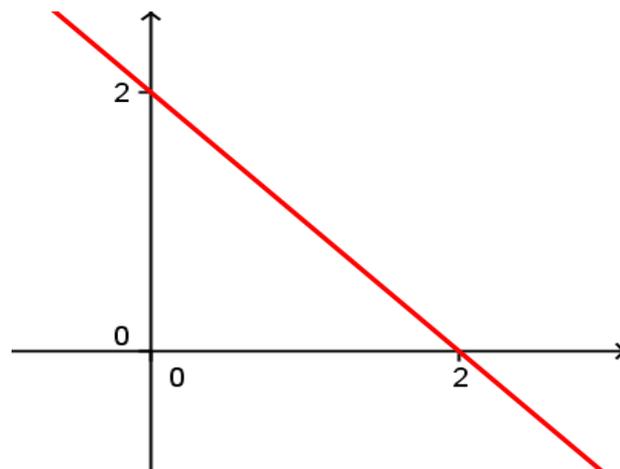
Examine os casos seguintes:

**1º caso:**  $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - x^2y - x^2 - y^3 + 3y^2 + 4y - 12$  cuja fatoração é

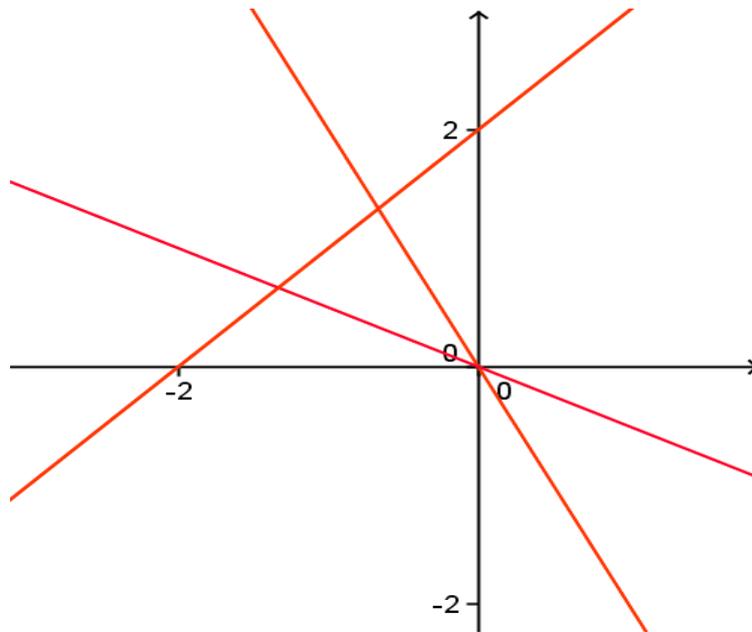
$f(x, y) = (x^2 - y + 3)(x^2 + y^2 - 4)$  define a curva  $f(x, y) = 0$ , ou seja, todos os pontos do  $\mathbb{R}^2$  tais que  $x^2 - y + 3 = 0$  ou  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ . Observe a curva  $Z(f)$  abaixo que tem dois ramos.



**2º caso:**  $g(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4$  cuja fatoração é  $g(x, y) = (x + y - 2)^2$  tem traço real  $Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y - 2)^2 = 0\}$  e apenas um ramo.



**3º caso:** se um polinômio  $h = l_1 l_2 l_3$  é o produto de três polinômios do primeiro grau  $l_1(x, y) = 2x + y$ ,  $l_2(x, y) = x + 2y$  e  $l_3(x, y) = x - y + 2$ , então o polinômio  $h$  é do terceiro grau e  $Z(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; h(x, y) = 0\}$  é uma curva de três ramos definidos pelas retas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  que são os zeros dos polinômios  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$ , conforme o desenho dado abaixo.



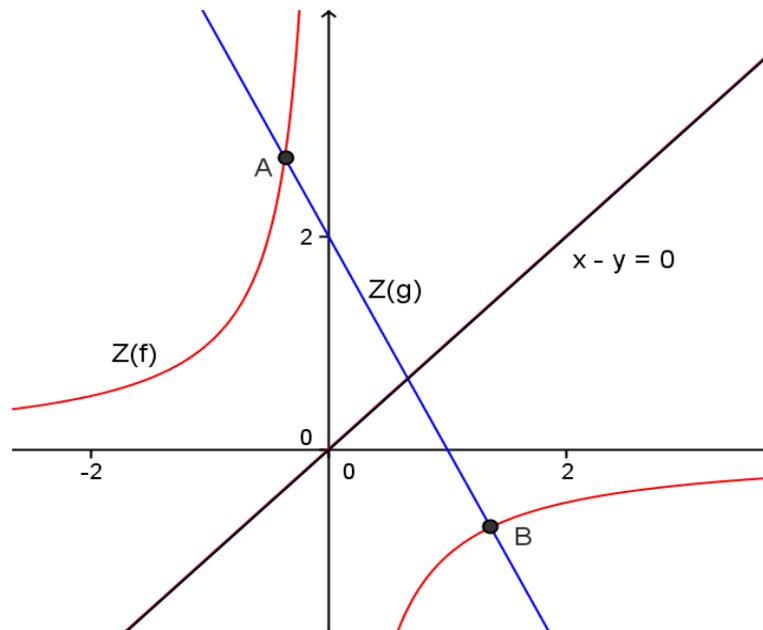
As curvas cônicas definidas por polinômios irredutíveis são a elipse (diz-se que a circunferência é uma degeneração da elipse), a hipérbole e a parábola. Embora seja irredutível o polinômio que define a hipérbole, ela é uma curva de dois ramos.

Considere que  $f$  e  $g$  tenham um fator comum, digamos  $h$  com grau  $\partial h \geq 1$ , o sistema que determina a interseção das curvas equivale a:

$$\begin{cases} f(x, y) = h(x, y) \cdot f_1(x, y) = 0 \\ g(x, y) = h(x, y) \cdot g_1(x, y) = 0 \end{cases}$$

Todos os pontos  $(x_0, y_0)$  tais que  $h(x_0, y_0) = 0$  são soluções desse sistema. Logo a interseção  $Z(f) \cap Z(g)$  tem infinitos pontos.

Observe a interseção das curvas traçadas abaixo.



Nesse gráfico

$$Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y - xy^2 + x - y = 0\} \text{ e}$$

$$Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y = 0\}$$

cujos respectivos polinômios são redutíveis, a saber:

$f(x, y) = (x - y)(xy + 1)$  e  $g(x, y) = (x - y)(2x + y - 2)$ , então  $Z(f) \cap Z(g)$  é um conjunto de infinitos pontos pois é formado pelos pontos A, B e todos os pontos  $(x, y)$  tais que  $x - y = 0$ .

## 2.5 LEMAS PRINCIPAIS

Um lema é um resultado preliminar que é usado como um passo intermediário para demonstrar um resultado mais relevante da teoria.

Os lemas seguintes, aliados ao estudo da resultante de dois polinômios, são os ingredientes fundamentais para a demonstração do Teorema de Bézout em sua versão mais simples, que revela como se estima o número de pontos de interseção de duas curvas algébricas planas.

A estrutura do conjunto dos números inteiros  $Z$  é apresentada aos estudantes bem cedo. Já nos primeiras séries do ensino básico mostra-se que esse conjunto é munido da operação de adição com as propriedades: comutativa, associativa, elemento neutro e elemento inverso; e da operação de multiplicação que apresenta as propriedades: comutativa, associativa e elemento neutro. Ainda vale a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Logo depois se apresenta o conjunto dos números racionais  $Q = \left\{ \frac{a}{b}; a \in Z \text{ e } b \in Z, b \neq 0 \right\}$  com as mesmas propriedades, para adição e multiplicação, com o acréscimo que todo número racional, não nulo, tem um inverso multiplicativo; em seguida apresenta-se o conjunto dos números reais  $R$  que herda todas as propriedades dos números racionais.

O conjunto dos polinômios na indeterminada  $x$  e coeficientes reais, indicado por  $R[x]$ , copia a mesma estrutura de  $Z$ . Assim é natural que se defina o conjunto denotado por  $R(x)$  cujos elementos são frações de polinômios, de modo análogo à definição de  $Q$ :

$$R(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)}; p(x) \in R[x], q(x) \in R[x] \text{ e } q(x) \neq 0 \right\}$$

Note que  $R[x] \subset R(x)$ , basta fazer  $q(x) = 1$ , o que é análogo à  $Z \subset Q$ .

O produto de dois números racionais é zero se, e somente se, pelo menos um deles é zero e o mesmo ocorre em  $R(x)$ :  $\forall f, g \in R(x) / \{0\}, f \cdot g \neq 0$ . Por isso dizemos que  $R(x)$  dotado das operações de adição e multiplicação constitui um *domínio ou domínio de integridade*. Além disso, esse domínio é chamado *domínio de fatoração única ou domínio fatorial* porque todo elemento não nulo e não invertível de  $R(x)$  se escreve de forma única, a menos da ordem de seus fatores, como um produto de elementos irredutíveis de  $R(x)$ .

Considere a função  $\delta: R[y]/\{0\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  que associa a cada polinômio o seu grau  $\partial f$ . Essa função, aliada às propriedades do conjunto  $R(x)$ , define uma estrutura algébrica  $(R(x)[y], \delta)$  denominada *domínio euclidiano* no qual existe um algoritmo similar ao algoritmo de Euclides. Por tudo isso, dados  $f, g \in R(x)[y]$  sem fatores comuns, existem  $p, q \in R(x)[y]$  que satisfazem a relação:

$$p \cdot f + q \cdot g = 1.$$

**Lema I.** *Sejam  $f, g \in R[x, y]$  (polinômios de duas variáveis reais  $x$  e  $y$ ) sem fatores irredutíveis em comum. Então existe uma relação*

$$a \cdot f + b \cdot g = c(x)$$

*onde  $a, b \in R[x, y]$ , porém,  $c \in R[x]$  é um polinômio não nulo apenas na variável  $x$ . Resultado análogo vale trocando  $x$  por  $y$ .*

**Demonstração:**

Como  $f, g \in R[x][y] \subset R(x)[y]$ , podemos considerar  $f, g$  como elementos de  $R(x)[y]$ . Visto que  $f, g$  não tem fator comum em  $R[x][y]$ , também não admitem fator comum em  $R(x)[y]$  que é um domínio euclidiano, assim existe uma relação

$$pf + qg = 1 \text{ em } R(x)[y].$$

Eliminando os denominadores de  $p$  e  $q$  obtemos a relação prometida. ■

Se  $p(x) \in R[x]$  é um polinômio, não constante, de uma variável  $x$  real e coeficientes reais sabe-se, pelo teorema fundamental da álgebra de **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), que a equação  $p(x) = 0$  tem no máximo um número finito de soluções reais. Mais precisamente, esse número é menor do que ou igual a  $\partial p$  (grau de  $p$ ). O próximo lema é uma versão análoga a esse resultado para polinômios de duas variáveis reais.

**Lema II.** *A interseção de duas curvas algébricas planas  $C_1 = Z(f)$  e  $C_2 = Z(g)$  sem componentes em comum é finita.*

**Demonstração:**

Sejam  $f, g \in R[x, y]$  polinômios não constantes sem fator comum. Pelo lema (I) existem polinômios  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R[x, y]$  que satisfazem as relações:

$$\begin{cases} a_1(x, y) \cdot f(x, y) + b_1(x, y) \cdot g(x, y) = c_1(x) \\ a_2(x, y) \cdot f(x, y) + b_2(x, y) \cdot g(x, y) = c_2(y) \end{cases}$$

onde  $c_1(x) \in R[x]$  e  $c_2(y) \in R[y]$  são polinômios não nulos nas variáveis  $x$  e  $y$ , respectivamente. Quando  $(x_0, y_0)$  é solução do sistema  $f(x, y) = g(x, y) = 0$ , isto é, ponto de interseção das curvas de  $Z(f)$  e  $Z(g)$ ,  $x_0$  é uma raiz de  $c_1(x) = 0$  e  $y_0$  é uma raiz de  $c_2(y) = 0$  porque substituindo  $(x_0, y_0)$  nas relações obtém-se

$$\begin{cases} a_1(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) + b_1(x_0, y_0) \cdot g(x_0, y_0) = c_1(x_0) \\ a_2(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) + b_2(x_0, y_0) \cdot g(x_0, y_0) = c_2(y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(x_0) = 0 \\ c_2(y_0) = 0 \end{cases}$$

e, pelo teorema de Gauss, isso ocorre em um número finito de valores reais de  $x_0$  e de  $y_0$ . ■

**Lema III.** Escolhido um sistema de eixos conveniente, escreve-se os polinômios  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  de variável  $y$ , com coeficientes em  $R[x]$ , para calcular a resultante  $R_{f,g}$  que é um polinômio na variável  $x$ . O grau desse polinômio é no máximo igual a  $\partial f \cdot \partial g$ .

### Demonstração:

Escrevendo  $f, g$  como polinômios em  $(R[x])[y]$ , segue que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0(x) \cdot y^m + a_1(x) \cdot y^{m-1} + \dots + a_m(x) \\ g(x, y) &= b_0(x) \cdot y^n + b_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + b_n(x) \end{aligned}$$

onde  $a_i(x)$  e  $b_j(x)$  são polinômios que têm grau máximo, respectivamente,  $i$  e  $j$ , visto que  $\partial f = m$  e  $\partial g = n$ . Afirmamos que a resultante  $R_{f,g}$  é uma soma de termos do tipo:

$$\pm a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_n} \text{ com } i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_n = mn$$

De fato: por definição,  $R_{f,g} = \det(C_{ij})$  com  $i$  e  $j$  inteiros que variam de 1 até  $m+n$ .

$$\text{Para } 1 \leq i \leq m, \quad c_{ij} = \begin{cases} a_{j-i}, & \text{se } i \leq j \leq i+n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Para } m+1 \leq i \leq m+n, \quad c_{ij} = \begin{cases} b_{m+j-i}, & \text{se } i-m \leq j \leq i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma,

$$R_{f,g} = \det(C_{ij}) = \sum_k (\pm c_{1k_1} \cdot c_{2k_2} \cdot \dots \cdot c_{mk_m} \cdot c_{m+1k_{m+1}} \cdot c_{m+2k_{m+2}} \cdot \dots \cdot c_{m+nk_{m+n}}),$$

ou seja, uma soma de termos com  $m + n$  elementos da matriz  $(C_{ij})$  onde

$$\{k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_{m+n}\} = \{1, 2, 3, \dots, m+n-1, m+n\}$$

e esses produtos dos elementos de  $(C_{ij})$  valem zero ou

$$\pm a_{k_1-1} \cdot a_{k_2-2} \cdot \dots \cdot a_{k_m-m} \cdot b_{m+k_{m+1}-(m+1)} \cdot b_{m+k_{m+2}-(m+2)} \cdot \dots \cdot b_{m+k_{m+n}-(m+n)}.$$

A soma  $S$  dos índices destes termos corresponde ao maior grau possível do polinômio resultante e vale:

$$S = (k_1 - 1) + (k_2 - 2) + \dots + (k_m - m) + (k_{m+1} - 1) + (k_{m+2} - 2) + \dots + (k_{m+n} - n)$$

$$S = \sum_{p=1}^{m+n} k_p - (1 + 2 + \dots + m) - (1 + 2 + \dots + n)$$

Lembrando que  $k_p$  é um número natural que varia de 1 até  $m + n$ , a parcela  $\sum_{p=1}^{m+n} k_p$  de  $S$

corresponde a soma de todos os números naturais de 1 até  $m + n$ . Assim temos

$$S = \frac{(1+m+n)(m+n)}{2} - \frac{(1+m)m}{2} - \frac{(1+n)n}{2} = mn.$$

Deste modo, concluímos que:

$$\text{grau}(R_{f,g}(x)) \leq \partial f \cdot \partial g = m \cdot n \quad \blacksquare$$

**Lema IV.** *Sejam  $f, g$  dois polinômios em  $R[x]$  de grau  $\geq 1$ , onde  $\partial f = n$  e  $\partial g = m$ .*

*São equivalentes:*

(1)  $R_{f,g} = 0$

(2) *Existem polinômios não nulos  $f_1, g_1 \in R[x]$  tais que  $f_1 \cdot g = g_1 \cdot f$  onde  $\partial f_1 \leq (n - 1)$  e  $\partial g_1 \leq (m - 1)$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  com  $a_0 \neq 0$  e  $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$  com  $b_0 \neq 0$  dois polinômios em  $R[x]$  de grau  $\geq 1$

Encontrar  $f_1 = \alpha_1 \cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \cdot x + \alpha_n$  e  $g_1 = \beta_1 \cdot x^{m-1} + \dots + \beta_{m-1} \cdot x + \beta_m$  não nulos tais que  $f_1 \cdot g = g_1 \cdot f$  é equivalente a obter uma solução não trivial, em  $R$ , de um sistema linear homogêneo com  $n + m$  equações nas incógnitas  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m$ . Basta igualar os coeficientes dos termos de mesmo grau:

$$\begin{cases} a_0\beta_1 - b_0\alpha_1 = 0 \\ a_1\beta_1 + a_0\beta_2 - b_1\alpha_1 - b_0\alpha_2 = 0 \\ a_2\beta_1 + a_1\beta_2 + a_0\beta_3 - b_2\alpha_1 - b_1\alpha_2 - b_0\alpha_3 = 0 \\ \dots \\ a_n\beta_m - b_m\alpha_n = 0 \end{cases}$$

Observe que a matriz dos coeficientes desse sistema é:

$$M = \begin{bmatrix} a_0 & - & - & \dots & - & -b_0 & - & - & \dots & - \\ a_1 & a_0 & & \dots & - & -b_1 & -b_0 & - & \dots & - \\ \vdots & a_1 & a_0 & \dots & - & \vdots & -b_1 & -b_0 & \dots & - \\ a_n & \vdots & a_1 & \dots & - & -b_m & \vdots & -b_1 & \dots & - \\ - & a_n & \vdots & & - & - & -b_m & \vdots & \dots & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ - & - & - & \dots & a_0 & - & - & - & \dots & -b_0 \\ - & - & - & \dots & a_1 & - & - & - & \dots & -b_1 \\ - & - & - & \dots & \vdots & - & - & \vdots & \dots & \vdots \\ - & - & - & \dots & a_n & - & - & \dots & \dots & -b_m \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ colunas}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ colunas}}$

Essa matriz corresponde a  $(-1)$  vezes  $n$  colunas da transposta da matriz que define a resultante. Pelo teorema de Cramer um sistema linear homogêneo tem solução não trivial se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes é nulo, nesse caso,  $\det M = 0$ . Da teoria dos determinantes sabe-se que:

- matrizes transpostas têm determinantes iguais;
- quando se multiplica uma fila qualquer da matriz quadrada por um número, seu determinante fica multiplicado por esse número.

Logo, usando as propriedades acima se obtém:

$$R_{f,g} = (-1)^n \cdot \det(M^T) = (-1)^n \cdot \det M = (-1)^n \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

**Lema V.** *Sejam  $f, g$  dois polinômios em  $R[x]$  de grau  $\geq 1$ . São equivalentes:*

(1)  $R_{f,g} = 0$

(2)  $f$  e  $g$  possuem um fator comum de grau  $\geq 1$  em  $R[x]$

**Demonstração:**

(1)  $\Rightarrow$  (2):

Como  $R_{f,g} = 0$ , pelo Lema IV, existem  $f_1, g_1 \in R[x]$  tais que  $f_1 g = g_1 f$  onde  $\partial f_1 \leq (n-1)$  e  $\partial g_1 \leq (m-1)$ . Como  $R[x]$  é domínio fatorial, todos os fatores irredutíveis de grau  $\geq 1$  de  $f$  aparecem no produto  $f_1 \cdot g$ , todavia nem todos podem aparecer em  $f_1$ , pois por hipótese,  $\partial f_1 < \partial f$ , assim, pelo menos um dos fatores irredutíveis de grau  $\geq 1$  de  $f$  aparece em  $g$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1):

Seja  $h \in R[x]$  um fator comum de  $f$  e  $g$  com grau  $\geq 1$ . Temos

$$f = h \cdot f_1 \text{ com } f_1 \in R[x] \text{ e } \partial f_1 < \partial f$$

$$g = h \cdot g_1 \text{ com } g_1 \in R[x] \text{ e } \partial g_1 < \partial g$$

Claramente, temos que

$$f_1 \cdot g = f_1 \cdot h \cdot g_1 = g_1 \cdot f$$

Segue novamente do Lema IV, que  $R_{f,g} = 0$ .  $\blacksquare$

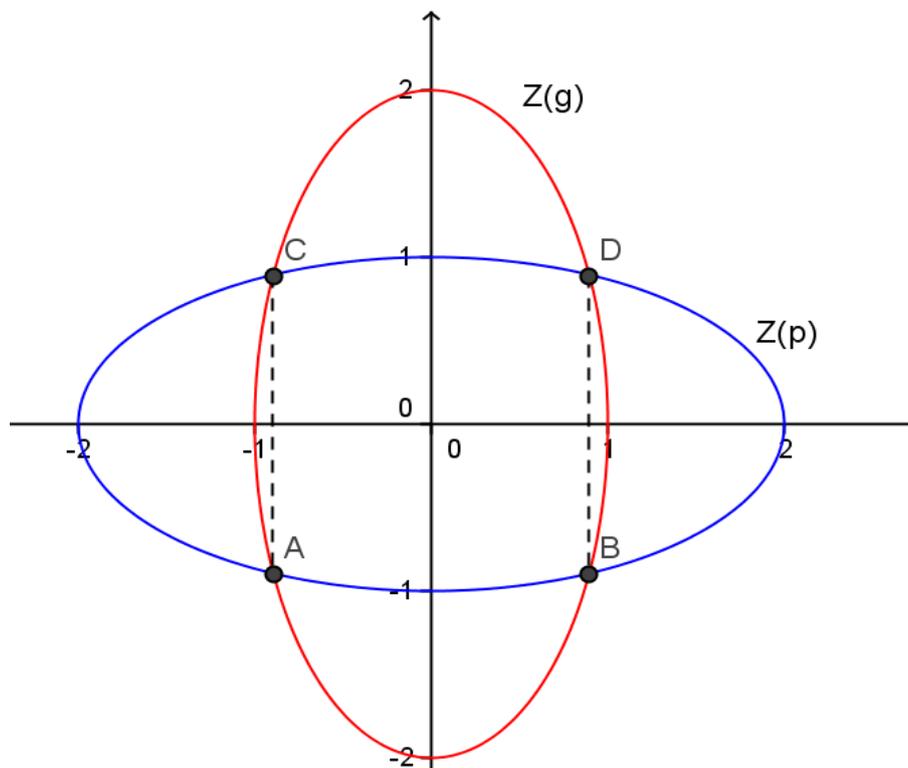
**Observação:**

Seja  $S$  o conjunto das retas que passam por pelo menos dois pontos de  $Z(f) \cap Z(g) = \Gamma_1$ . Se  $\#(\Gamma_1) = \eta$ , então da análise combinatória sabe-se que  $\#(S) \leq C_\eta^2 = \frac{\eta(\eta-1)}{2}$ , isto é,  $S$  também é finito. Como o conjunto dos números reais  $R$  é infinito, escolha  $m \in R$  que não é coeficiente angular de nenhuma reta do conjunto  $S$ . Se  $S$  contém pelo menos uma reta vertical, aplica-se uma transformação

$(x, y) \rightarrow (x - \frac{y}{m}, y)$  aos pontos das curvas  $Z(f)$  e  $Z(g)$ , desalinhando todos os pontos de  $\Gamma_1$  da direção vertical. Considere dois pontos  $A_1(x_1, y_1)$  e  $A_2(x_2, y_2)$  de  $\Gamma_1$ , interseção de  $Z(f)$  com  $Z(g)$ , que pela transformação aplicada correspondem respectivamente a  $B_1(x_1 - \frac{y_1}{m}, y_1)$  e  $B_2(x_2 - \frac{y_2}{m}, y_2)$ ,  $y_1 \neq y_2$ , pertencentes ao conjunto  $\Gamma_2$ , interseção das novas curvas obtidas. Suponha que  $B_1$  e  $B_2$  estejam alinhados na mesma reta vertical, então  $x_1 - \frac{y_1}{m} = x_2 - \frac{y_2}{m}$  e isso resulta em  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  o que é uma contradição porque nenhuma reta de  $S$  pode ter coeficiente angular  $m$ . Essa transformação define uma correspondência biunívoca entre os conjuntos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , logo  $\#(\Gamma_1) = \#(\Gamma_2)$ . Conclui-se que é sempre possível determinar o número de pontos de interseção de duas curvas através de uma projeção sobre o eixo  $x$ . ■

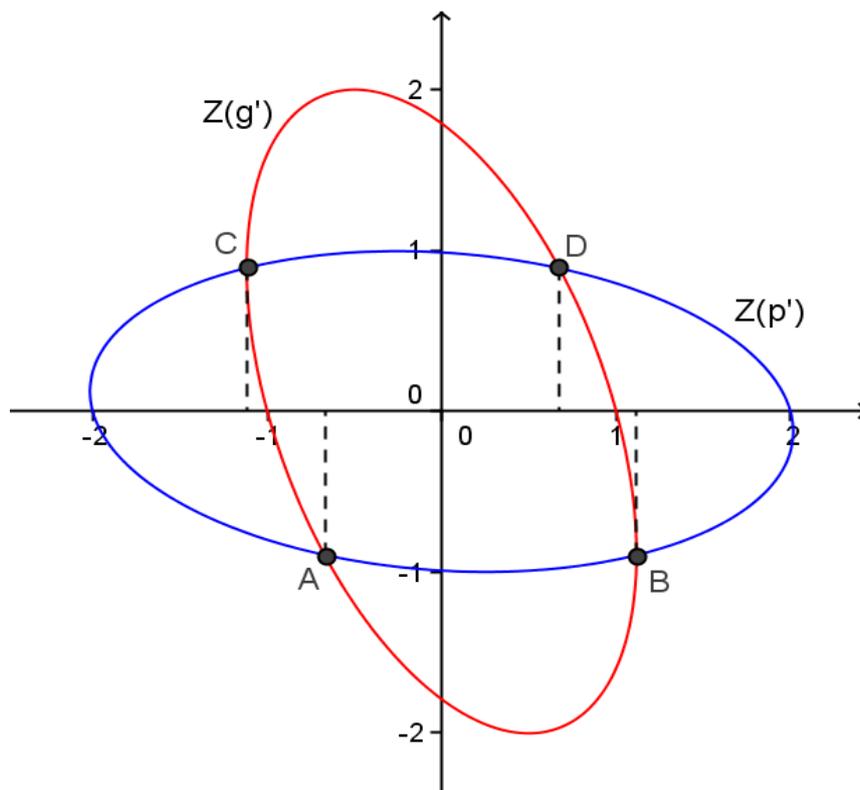
As figuras abaixo exemplificam o que ocorre quando se aplica uma transformação do tipo  $(x, y) \rightarrow (x - \frac{y}{m}, y)$ .

$$Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 - 4 = 0\} \text{ e } Z(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 - 4 = 0\}$$



$Z(g) \cap Z(p) = \{A, B, C, D\}$  onde  $A$  e  $C$  têm a mesma abscissa e as de  $B$  e  $D$  são iguais também. Com a transformação  $(x, y) \rightarrow (x - \frac{y}{2}, y)$  obtém-se as novas curvas:

$$Z(g') = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4(x + \frac{y}{2})^2 + y^2 - 4 = 0\} \text{ e } Z(p') = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + \frac{y}{2})^2 + 4y^2 - 4 = 0\}$$



$Z(g') \cap Z(p') = \{A, B, C, D\}$  onde  $A, B, C$  e  $D$  têm abscissas diferentes.

## 2.6 TEOREMA DE BÉZOUT

Foi o matemático Frances Étienne Bézout (1739 – 1783), autor de um dos livros de matemática mais utilizados de sua época, os seis volumes de Cours de Mathématique. Nascido na França, em março de 1739, em uma família de Magistrados distritais, Bézout preferiu os números à política, convencendo seu pai a lhe permitir estudar matemática ao invés de direito. Foi muito influenciado pelo trabalho de Leonahrd Euler, e suas habilidades foram reconhecidas pela Académie Royale des Sciences.



### **Bézout**

Ele é bem conhecido por seu trabalho sobre o uso de determinantes na eliminação algébrica. Outros trabalhos que ele publicou sobre a teoria das equações foram reunidos em *Théorie Générale des Algébriques* em 1779. Este inclui um resultado conhecido hoje por teorema de Bézout, um importante resultado da matemática que revela como estimar o número de pontos de interseção de duas curvas planas. Após sua morte em 1783 uma estátua foi erguida em Nemours, cidade de seu nascimento, uma pequena homenagem para um grande matemático.

**Teorema de Bézout**      *Sejam  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  dois polinômios em  $R[x, y]$  de graus  $n, m \geq 1$  sem fator comum em  $R[x, y]$ . Então*

$$\# (Z(f) \cap Z(g)) \leq n \cdot m$$

#### **Demonstração:**

Se  $(x, y) \in R^2$  é tal que  $f(x, y) = g(x, y) = 0$  então segue do Lema (ii) que existe somente um número finito de ordenadas possíveis para um ponto de  $R^2$  da interseção das curvas determinadas por  $f$  e por  $g$ . Consequentemente, para uma ordenada fixa  $y_0 \in R$  existem no máximo  $n$  pontos em  $R^2$  da curva determinada por  $f(x, y)$  com esta ordenada  $y_0$ , a saber os pontos  $(x, y_0)$  tais que  $x$  seja uma raiz de  $f(x, y_0) = 0$

Pela observação anterior é possível obter um sistema de coordenadas onde pontos distintos de interseção têm ordenadas distintas. Escrevemos então

$$f(x, y) = a_0x^n + a_1(y)x^{n-1} + \dots + a_n(y) \text{ com } a_0 \neq 0$$

$$g(x, y) = b_0x^m + b_1(y)x^{m-1} + \dots + b_m(y) \text{ com } b_0 \neq 0$$

Desta forma, a resultante é um elemento de  $R[y]$ . Denotaremos esta resultante por:

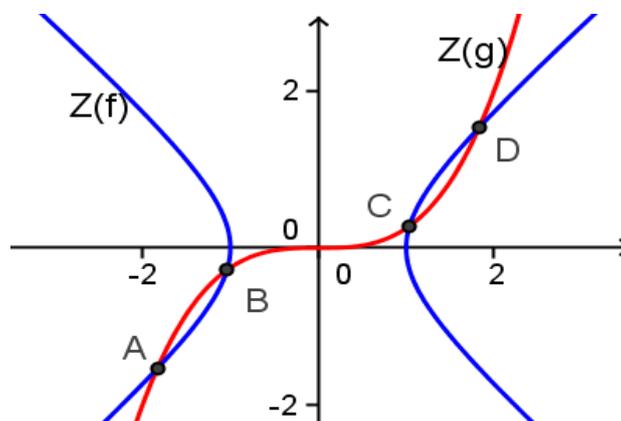
$$R_{f,g}(y)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \#(Z(f) \cap Z(g)) &= \# \{ y_0 \in R; f(x, y_0) \text{ e } g(x, y_0) \text{ tem uma raiz comum em } R \} \\ &\leq \# \left\{ y_0 \in R; f(x, y_0) \text{ e } g(x, y_0) \text{ tem um fator} \right. \\ &\quad \left. \text{comum de grau } \geq 1 \text{ em } R[x] \right\} \\ &= \# \{ y_0 \in R; R_{f(x, y_0), g(x, y_0)} = 0 \} - \text{ pelo lema (v)} \\ &= \# \{ y_0 \in R; R_{f,g}(y_0) = 0 \} \\ &\leq \text{ grau } R_{f,g}(y) - \text{ o número de raízes é menor ou igual ao grau} \\ &\leq n \cdot m - \text{ pelo Lema (III)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Exemplo:**

Como as curvas algébricas planas  $Z(f) = \{(x, y) \in R^2; x^2 - y^2 - 1 = 0\}$  e  $Z(g) = \{(x, y) \in R^2; x^3 - 4y = 0\}$  não têm componente comum, então o teorema de Bézout garante  $\#(Z(f) \cap Z(g)) \leq 2 \cdot 3 = 6$ . De fato, observe na figura abaixo que mostra a interseção da cônica  $Z(f)$  com a cúbica  $Z(g)$  igual a um conjunto de quatro pontos:  $Z(f) \cap Z(g) = \{A, B, C, D\}$ .



## CAPÍTULO 3

Neste capítulo, será apresentado o resultado central do trabalho, que é o Teorema de Pappus, por uma via algébrica utilizando o Teorema de Bezout.

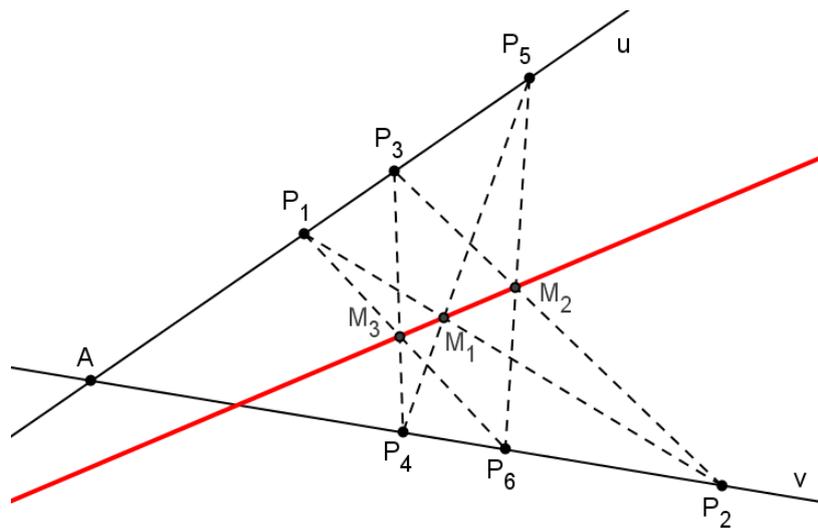
### 3.1 TEOREMA DE PAPPUS

Na geometria grega encontramos o manancial do assunto, no que se refere a forma e ao conteúdo. É inestimável a importância desse legado notável para toda a geometria subsequente.

A contribuição mais importante de Pappus de Alexandria para o conhecimento das cônicas foram os seus resultados sobre foco, diretriz e excentricidade. Ele unifica a definição das três curvas, que variam de acordo com o valor da excentricidade. Sua obra acabou sendo o réquiem da geometria grega, pois, após Pappus, a geometria grega deixou de ser uma disciplina brilhante, apenas sua memória foi preservada por escritores menos criativos e comentadores. De certa forma o trabalho de Pappus inicia a chamada Geometria Projetiva e o teorema, que leva o seu nome e foi demonstrado no capítulo 1 por geometria, pode ser visto como uma consequência do teorema de Pascal.

**Teorema de Pappus.** Sejam  $u$  e  $v$  duas retas concorrentes com três pontos distintos  $P_1, P_3$  e  $P_5$  pertencentes a  $u$  e outros três diferentes  $P_2, P_4$  e  $P_6$  na reta  $v$ . Seja  $L_i = P_i P_{i+1}$  a reta definida pelos pontos  $P_i$  e  $P_{i+1}$  com  $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$  sendo  $P_7 = P_1$ . Se  $L_1 \cap L_4, L_2 \cap L_5$  e  $L_3 \cap L_6$  são respectivamente os pontos  $M_1, M_2$  e  $M_3$ , então esses pontos são colineares.

A figura desenhada a seguir ilustra esse teorema.



**Demonstração:**

Escolha um sistema de coordenadas em  $R^2$ .

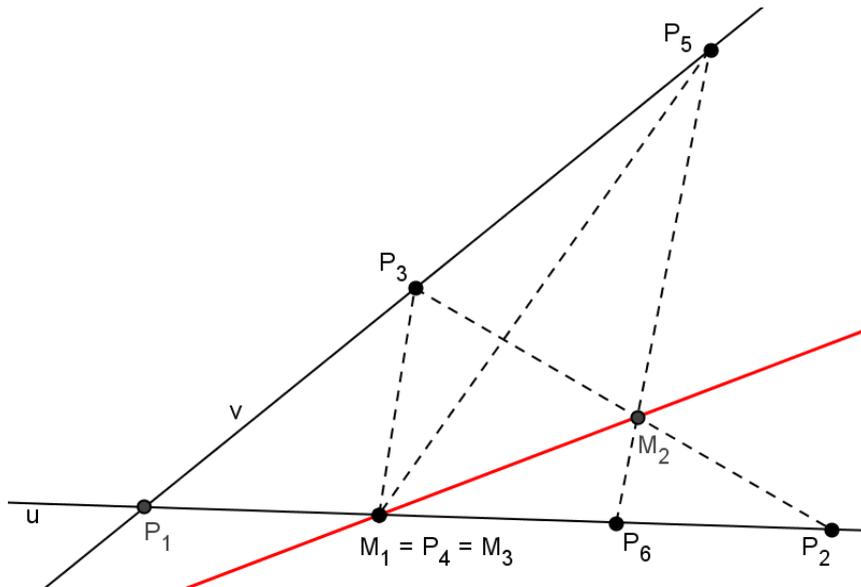
Sejam  $h_1(x, y) = 0$ ,  $h_2(x, y) = 0$  e  $l_i(x, y) = 0$  as equações das retas  $u$ ,  $v$  e  $L_i$ , respectivamente. Vamos demonstrar em dois passos.

**1º passo**

Se  $P_1$  é o ponto de interseção das retas  $u$  e  $v$ ,  $L_1 = P_1P_2$  e  $L_6 = P_1P_6$  coincidem com a reta  $v$ . Logo,

$$M_1 = L_1 \cap L_4 = v \cap L_4 = P_4 \text{ e } M_3 = L_3 \cap L_6 = L_3 \cap v = P_4 \Rightarrow M_1 = P_4 = M_3$$

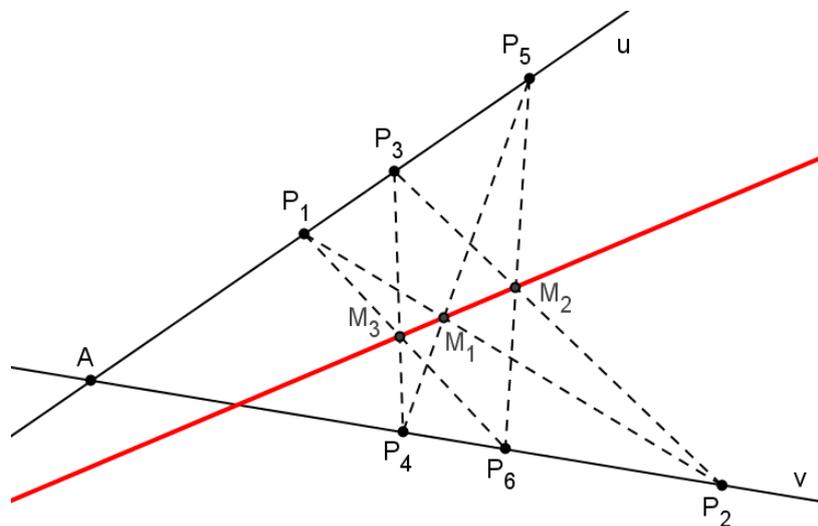
Portanto, uma reta que passa por  $P_4$  e  $M_2$  tem os três pontos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  colineares.



Analogamente, pode-se demonstrar que os três pontos são colineares quando  $P_i = u \cap v, \forall i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

### 2º passo

Tome um ponto  $A = u \cap v$ , diferente de  $P_1, P_2, \dots, P_6$  cujas coordenadas são  $(\alpha, \beta)$ , conforme sugere a figura abaixo.



$A \notin L_1$ , porque se  $A \in L_1$ , então  $P_1$  e  $A$  seriam os pontos de intersecção de  $L_1$  e  $u$ , contrariando o teorema de Bézout que garante que só pode haver, no máximo, um ponto de intersecção entre os gráficos desses dois polinômios de primeiro grau.

Analogamente,  $A \notin L_i, i \in \{2, \dots, 6\}$ .

Agora, considere o polinômio  $g = l_1 l_3 l_5 + \mu l_2 l_4 l_6$ ,  $\mu \in R^*$  que tem grau  $\leq 3$ , visto que  $l_i$  tem grau 1 para todo  $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ . De outro modo, os pontos  $P_1, P_2$  e  $M_1$  são pontos de interseção da curva determinada por  $g$  indicada por  $V(g)$  e a reta  $L_1$ , isto é,

$\#(Z(g) \cap L_1) = 3 \leq \text{grau}(g) \cdot \text{grau}(L_1) = \text{grau}(g) \cdot 1$ , logo  $\text{grau}(g) = 3$  ou  $l_1(x, y)$  divide  $g(x, y)$ . Entretanto se  $l_1(x, y)$  divide  $g(x, y)$ , dividiria  $\mu l_2 l_4 l_6$  o que é um absurdo. Conclui-se que  $\text{grau}(g) = 3$ .

Escolha  $\mu$  de modo que  $A \in Z(g)$ .

$A = (\alpha, \beta) \Rightarrow \mu = -\frac{l_1(\alpha, \beta) \cdot l_3(\alpha, \beta) \cdot l_5(\alpha, \beta)}{l_2(\alpha, \beta) \cdot l_4(\alpha, \beta) \cdot l_6(\alpha, \beta)}$ , dessa forma  $\mu \in R^*$ , porque  $A \notin L_i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$  conforme demonstrado antes. Assim, os sete pontos  $P_1, P_2, \dots, P_6$  e  $A$  estão na intersecção  $Z(h_1, h_2) \cap Z(g)$ .

Como  $P_1, P_3, P_5$  e  $A \in Z(g)$  e por hipótese também pertencem à reta  $u = Z(h_1)$ , pelo teorema de Bézout  $h_1$  divide  $g$ , ou seja, existe um polinômio  $h(x, y)$ , de grau dois,  $h \in R[x, y]$ , tal que,  $g = h \cdot h_1$ . O mesmo ocorre com  $h_2$  porque  $P_2, P_4, P_6$  e  $A \in v = Z(h_2)$  e também pertencem a  $Z(g)$ , então pelo teorema de Bézout  $h_2$  divide  $g$ , ou seja, existe um polinômio  $f$ , de grau dois,  $f(x, y) \in R[x, y]$ , tal que  $g = f \cdot h_2$ . Logo,  $g(x, y) = h(x, y) \cdot h_1(x, y) = f(x, y) \cdot h_2(x, y) \Rightarrow h_1(x, y) = \delta h_2(x, y)$ , com  $\delta \in R$ , ou  $h_1$  divide  $f$ . Se  $h_1(x, y) = \delta h_2(x, y)$ , então  $u = v$ , o que contraria a hipótese das retas  $u$  e  $v$  serem distintas, logo existe  $h_3(x, y)$ , de grau igual a um, tal que  $f(x, y) = h_1(x, y) \cdot h_3(x, y)$ , com  $h_3 \in R[x, y]$ . Portanto,

$$g(x, y) = h_1(x, y) \cdot h_2(x, y) \cdot h_3(x, y) \text{ e } Z(g) = Z(h_1) \cup Z(h_2) \cup Z(h_3).$$

Para provar que  $M_1, M_2$  e  $M_3$  pertencem a  $Z(h_3)$ , suponha que  $M_1 \in Z(h_1) \cup Z(h_2)$ , então os cinco pontos distintos  $P_1, P_2, P_4, P_5$  e  $M_1$  são da intersecção de  $Z(l_1 l_4)$  com  $Z(h_1 h_2)$  porém,  $l_1(x, y) \cdot l_4(x, y)$  bem como  $h_1(x, y) \cdot h_2(x, y)$  são

polinômios de grau 2 e pelo teorema de Bézout :  $\#(Z(l_1l_4) \cap Z(h_1h_2)) \leq 4$ . Devido a essa contradição  $M_1$  não pode estar nas retas  $u = Z(h_1)$  e  $v = Z(h_2)$ , logo  $M_1 \in Z(h_3)$ .

Analogamente, podemos demonstrar que  $M_2$  e  $M_3$  pertencem a  $Z(h_3)$ .

Portanto, os pontos  $M_1, M_2$  e  $M_3$  são colineares. ■

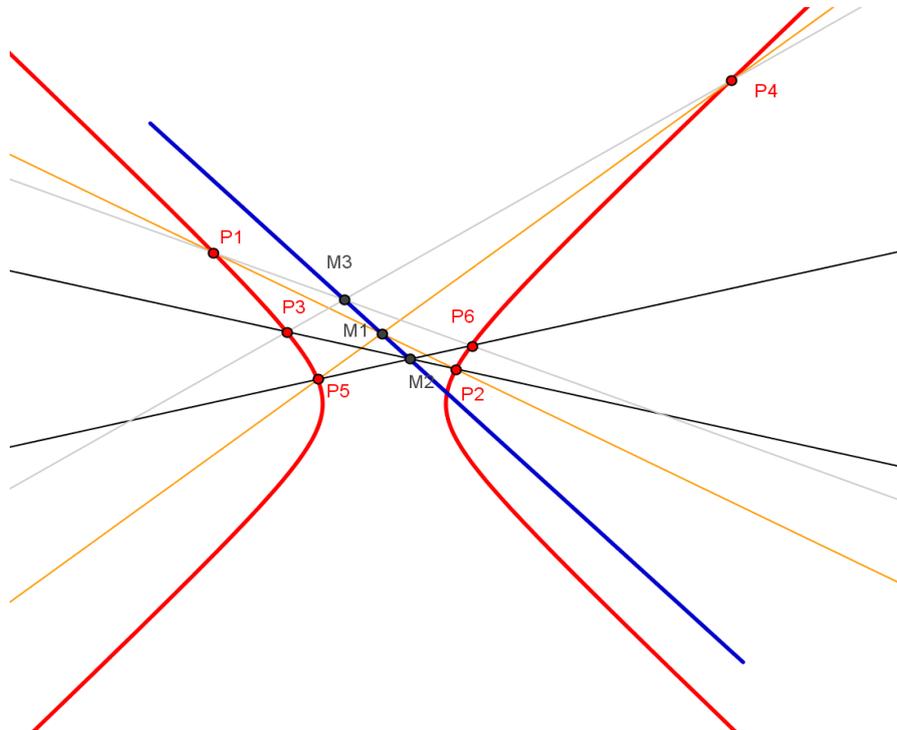
## TEOREMA DO HEXÁGONO DE PASCAL

Neste capítulo, vamos citar mais uma vez o Teorema do Hexágono de Pascal, agora de forma mais completa, cuja demonstração à luz do Teorema de Bezout pode ser vista no trabalho de conclusão de curso do PROFMAT – UNIRIO de João Carlos Cataldo.

**“Os pontos de interseções determinados pelos prolongamentos dos lados opostos de um hexágono inscrito em uma cônica irredutível qualquer estão sempre alinhados”**. Isso é válido também para as degenerações das cônicas. Por isso, o teorema de Pappus, foco central desse trabalho, é um caso particular do teorema de Pascal que corresponde a degeneração de uma hipérbole. Pascal surpreendeu a comunidade matemática da época, pois esse fato foge um pouco a intuição geométrica. De maneira mais precisa, o teorema diz o seguinte:

*Teorema do hexágono de Pascal.*      *Sejam  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$  pontos distintos sobre uma cônica irredutível  $\Omega$ . Se os pares de retas  $(P_1P_2, P_4P_5), (P_2P_3, P_5P_6)$  e  $(P_3P_4, P_6P_1)$  intersectam-se respectivamente nos pontos  $M_1, M_2$  e  $M_3$ , então esses três pontos são colineares.*

A figura abaixo ilustra o resultado do teorema quando os pontos estão sobre uma hipérbole



### 3.2 UM PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DAS CÔNICAS

É possível construir uma única cônica que passa por cinco pontos três a três não colineares. Um fato bem conhecido é que dois pontos distintos determinam uma única reta, porém por um ponto passam infinitas retas, e essas afirmações são postulados da geometria euclidiana. Na geometria analítica a reta tem uma equação da forma  $f(x, y) = ax + by + c = 0$  com pelo menos um dos coeficientes  $a$  ou  $b$  não nulo. De fato, dividindo-se essa equação por  $a$  ou  $b$  obtém-se  $x + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a}$  ou  $\frac{a}{b}x + y = \frac{c}{b}$   
 $\Rightarrow x + b_1y = c_1$  ou  $a_2x + y = c_2$ . Isso reduz a equação apenas a dois parâmetros. Para calculá-los são suficientes dois pontos distintos da reta e o problema recai em um sistema do primeiro grau.

Sabe-se também que dados três pontos não colineares existe uma única circunferência que passa por eles. Recorrendo a geometria de Euclides, traçam-se as mediatrizes de dois lados do triângulo definido por esses pontos; assim, obtém-se o centro da circunferência circunscrita que é denominado Circuncentro. Por outro lado a equação da circunferência estudada na geometria analítica é

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \therefore \quad x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \text{ na qual } m = -2a, n = -2b \text{ e}$$

$p = a^2 + b^2 - r^2$ , então dados três pontos o problema de determinar a circunferência se reduz a resolver um sistema de três equações e três incógnitas do primeiro grau.

Agora é natural que se faça a seguinte pergunta: quantos pontos distintos são suficientes para determinar uma única cônica? Bem, sob o ponto de vista da geometria analítica a equação geral das cônicas é:

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ , com pelo menos um dos três parâmetros  $a, b$  ou  $c$  diferente de zero. Dividindo-se essa equação por um deles, digamos por  $a \neq 0$ , obtém-se:

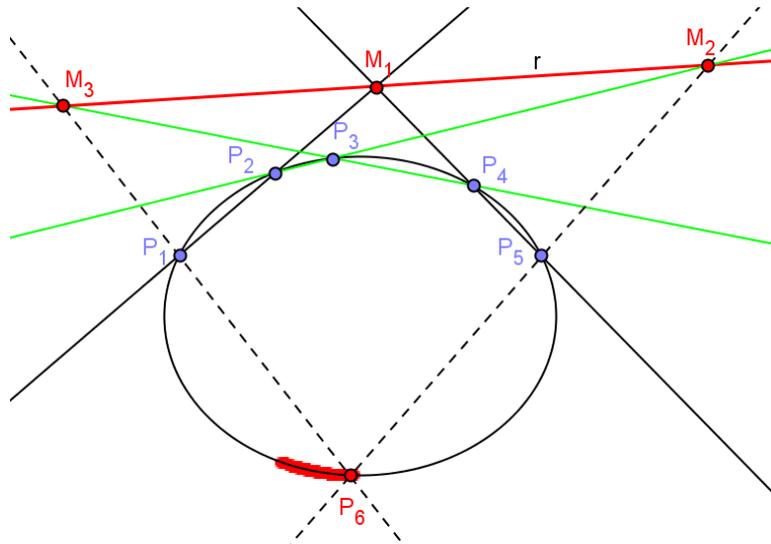
$$x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}y + \frac{f}{a} = 0 \quad \therefore \quad x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

que é uma nova equação com cinco parâmetros. Então dados ao menos cinco pontos distintos pode-se determinar a equação de uma cônica irredutível ou degenerada que passa por eles. Para tanto basta resolver o sistema que se obtém por substituição dos pontos na equação.

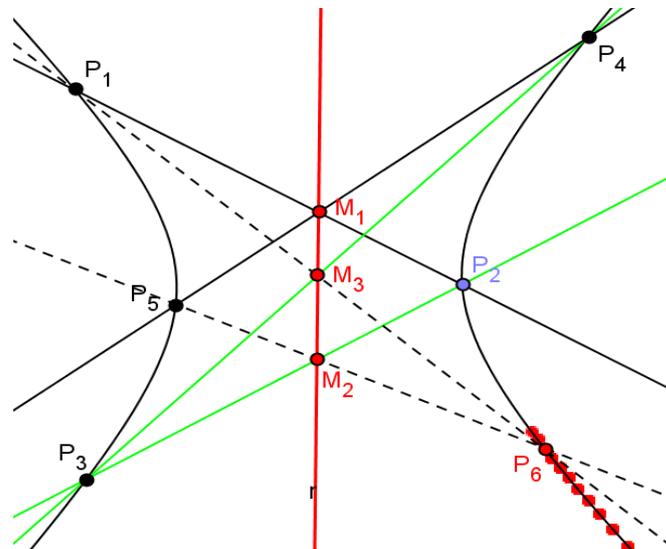
Usando o teorema de Pascal pode-se construir a cônica que passa por cinco pontos desde que três pontos quaisquer desses cinco nunca sejam colineares.

Dados  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ , para obter outro ponto  $P_6$  qualquer da curva, basta determinar um ponto  $M_1$  de interseção das retas  $P_1P_2$  e  $P_4P_5$ , e traçar uma reta ( $r$ ) qualquer que passe por  $M_1$ . Considere  $M_2 = P_2P_3 \cap r$  e  $M_3 = P_3P_4 \cap r$ , então o ponto  $P_6$  da cônica fica determinado pela interseção das retas  $M_3P_1$  e  $M_2P_5$ . Observe as cônicas construídas abaixo.

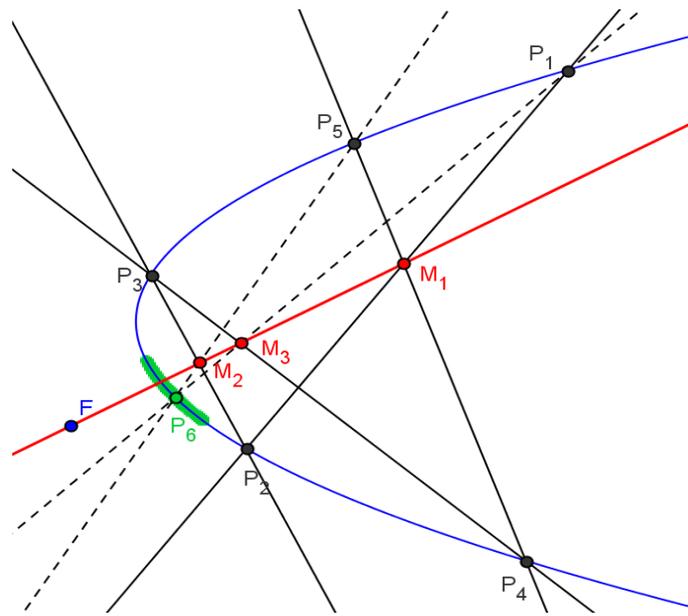
## A elipse



## A hipérbole

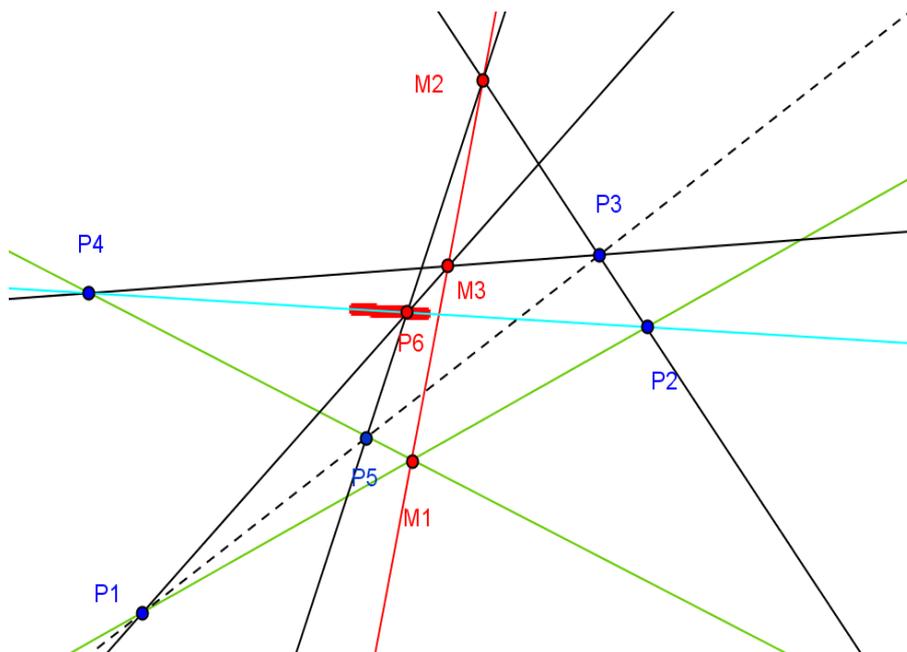


## A parábola



Considere agora 5 pontos dados, sendo 3 deles colineares ( $P_1, P_3$  e  $P_5$ ). Procedendo-se de maneira análoga as construções anteriores, pelo teorema de Pappus o sexto ponto ( $P_6$ ) pertence a reta determinada pelos outros dois pontos ( $P_2$  e  $P_4$ ). A figura abaixo, ilustra essa situação.

## Duas retas concorrentes (degeneração da hipérbole)



## CAPÍTULO 4

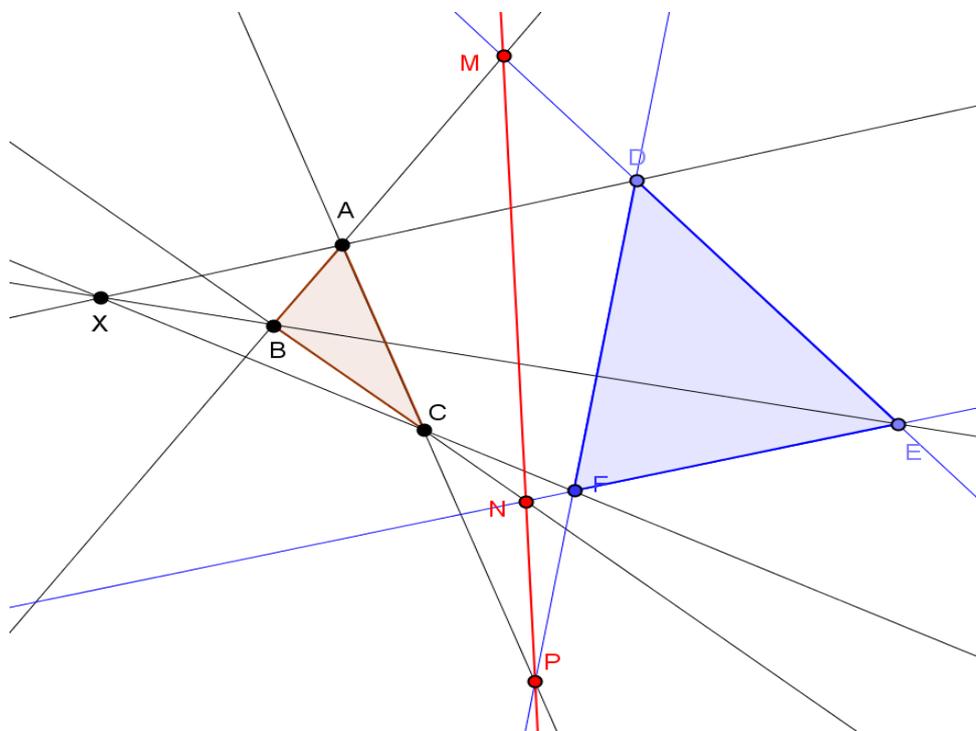
As atividades constituem uma sugestão de trabalho para as classes da terceira série do ensino médio, embora algumas possam ser aplicadas em outras séries.

### 4.1 ATIVIDADE 1

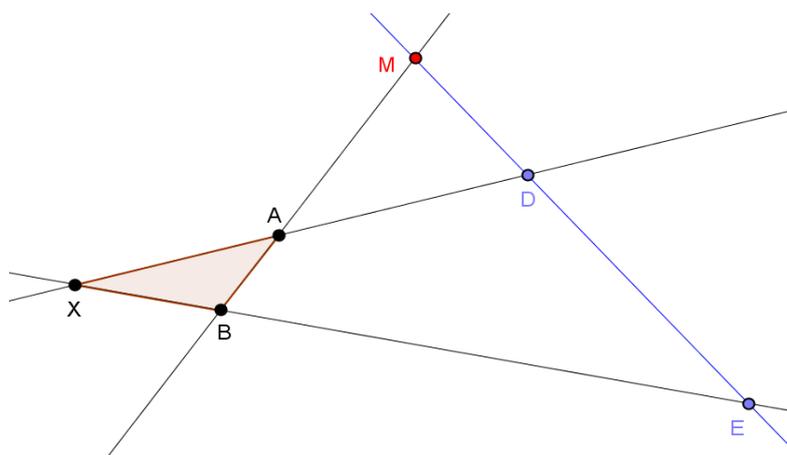
Quando dois triângulos distintos ABC e DEF podem ser postos em correspondência de forma que os pares de vértices correspondentes (A, D), (B, E) e (C, F) são ligados por retas que concorrem em um único ponto X, diz-se que esses triângulos estão em perspectiva em relação ao ponto X de concorrência. As retas suportes dos pares de lados correspondentes (AB, DE), (BC, EF) e (CA, FA) intersectam-se em três pontos M, N e P colineares.

Para demonstrar que os três pontos são colineares basta aplicar do teorema de Menelau em três vezes. Complete a demonstração fazendo o 3º passo para calcular o produto

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA}.$$



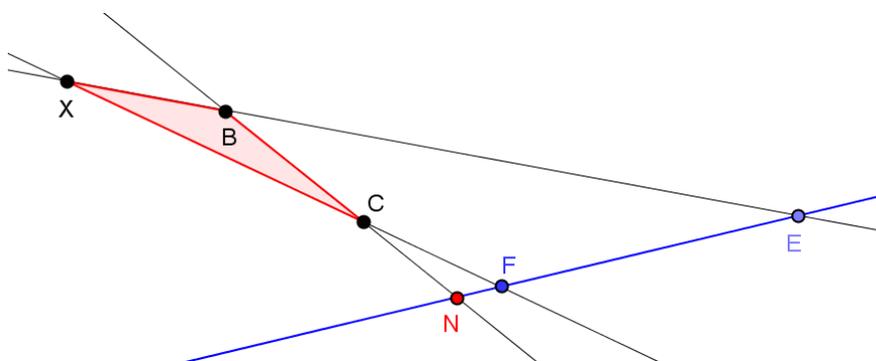
1º passo



Observe o triângulo ABX e a reta que intersecta o prolongamento de seus lados nos pontos M, E e D. Pelo teorema de Menelau, vale a igualdade:

$$r(MAB) \cdot r(EBX) \cdot r(DXA) = -1 \quad \text{logo} \quad \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BE}{EX} \cdot \frac{XD}{DA} = -1 \quad \text{logo} \quad \frac{AM}{MB} = -\frac{DA}{XD} \cdot \frac{EX}{BE}$$

2º passo



Observe o triângulo BCX e a reta que intersecta seus lados nos pontos N, F e E. Pelo teorema de Menelau, resulta que:

$$r(NBC) \cdot r(FCX) \cdot r(EXB) = -1 \quad \text{logo} \quad \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CF}{FX} \cdot \frac{XE}{EB} = -1 \quad \text{logo} \quad \frac{BN}{NC} = -\frac{EB}{XE} \cdot \frac{FX}{CF}$$

Complete a demonstração fazendo o 3º passo para calcular o produto  $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA}$ .

## 4.2 ATIVIDADE 2

Dados os pontos  $A(2,0), B(0,6), C(3,0), D(0,3), E(5,0)$  e  $F(0,1)$ . Considere as intersecções das retas  $l_{AB} \cap l_{DE} = M, l_{BC} \cap l_{EF} = N$  e  $l_{CD} \cap l_{AF} = P$ .

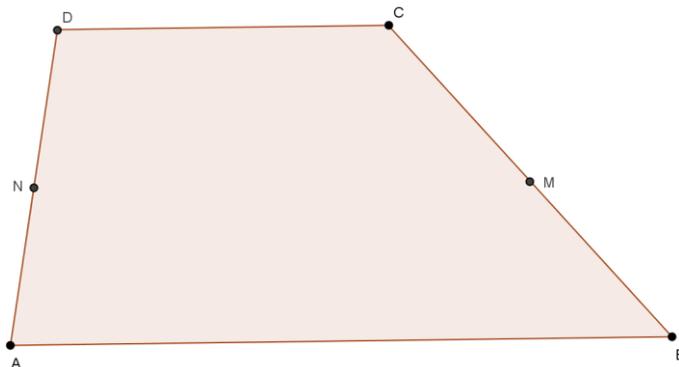
1º) Demonstre que  $M, N$  e  $P$  são colineares usando os conhecimentos da geometria analítica.

2º) Construa essa figura no Geogebra e verifique a colinearidade.

3º) No Geogebra fixe os pontos  $A, B, C, D,$  e  $E$  para deslizar sobre o eixo  $y$  o ponto  $F$ . Verifique que os pontos  $M, N$  e  $P$  continuam colineares.

## 4.3 ATIVIDADE 3

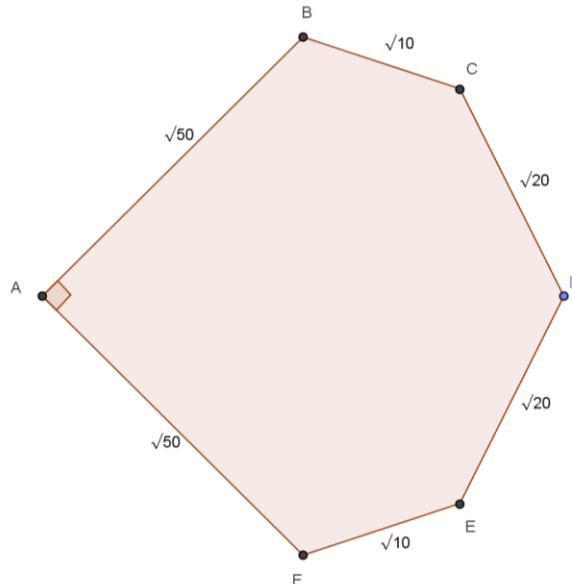
A figura abaixo representa um trapézio  $ABCD$  sendo  $M$  e  $N$  pontos médios dos lados oblíquos.



Traçam-se segmentos de reta  $\overline{AM}, \overline{AC}, \overline{NB}, \overline{NC}, \overline{DM}$  e  $\overline{DB}$ . Em seguida marcam-se os sete pontos de intersecção entre esses segmentos que estão no interior do trapézio. Escolhendo-se ao acaso três desses sete pontos, determine a probabilidade deles serem vértices de um triângulo.

#### 4.4 ATIVIDADE 4

O hexágono  $ABCDEF$  desenhado abaixo pode ser inscrito em uma circunferência



Sejam  $P, Q$  e  $R$ , respectivamente, os pontos de intersecção dos pares de semirretas  $(AB, ED)$ ,  $(BC, EF)$  e  $(AF, CD)$ . Ligando-se os pontos  $A, P, Q$  e  $R$  obtém-se um novo polígono de área  $S$ . Calcule o valor de  $S$ .

#### 4.5 ATIVIDADE 5

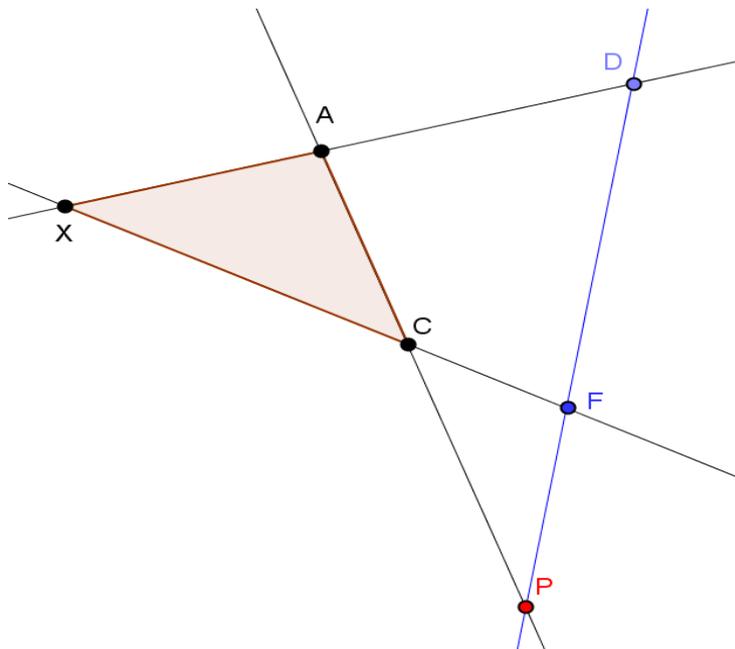
Considere os pontos  $A = (2, 1)$ ,  $B = (5/2, -1)$ ,  $C = (4, 5)$ ,  $D = (13/2, -5)$  e  $E = (10, 9)$

- 1º) usando o teorema de Pascal, trace a cônica definida por esses pontos.
- 2º) Na barra de ferramenta do Geogebra, ative na janela sete a ferramenta cônica definida por cinco pontos. Em seguida clique nesses pontos para traçar a curva e obter a sua equação. Determine os vértices e os focos dessa cônica.

## CAPÍTULO 5

### 5.1. SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1

3º passo



No triângulo  $CAX$  desenhado acima a reta  $l_{DF}$  intersecta os lados  $CA$ ,  $AX$  e  $XC$  respectivamente em  $P$ ,  $D$  e  $F$ . Então, pelo teorema de Menelau, tem-se:

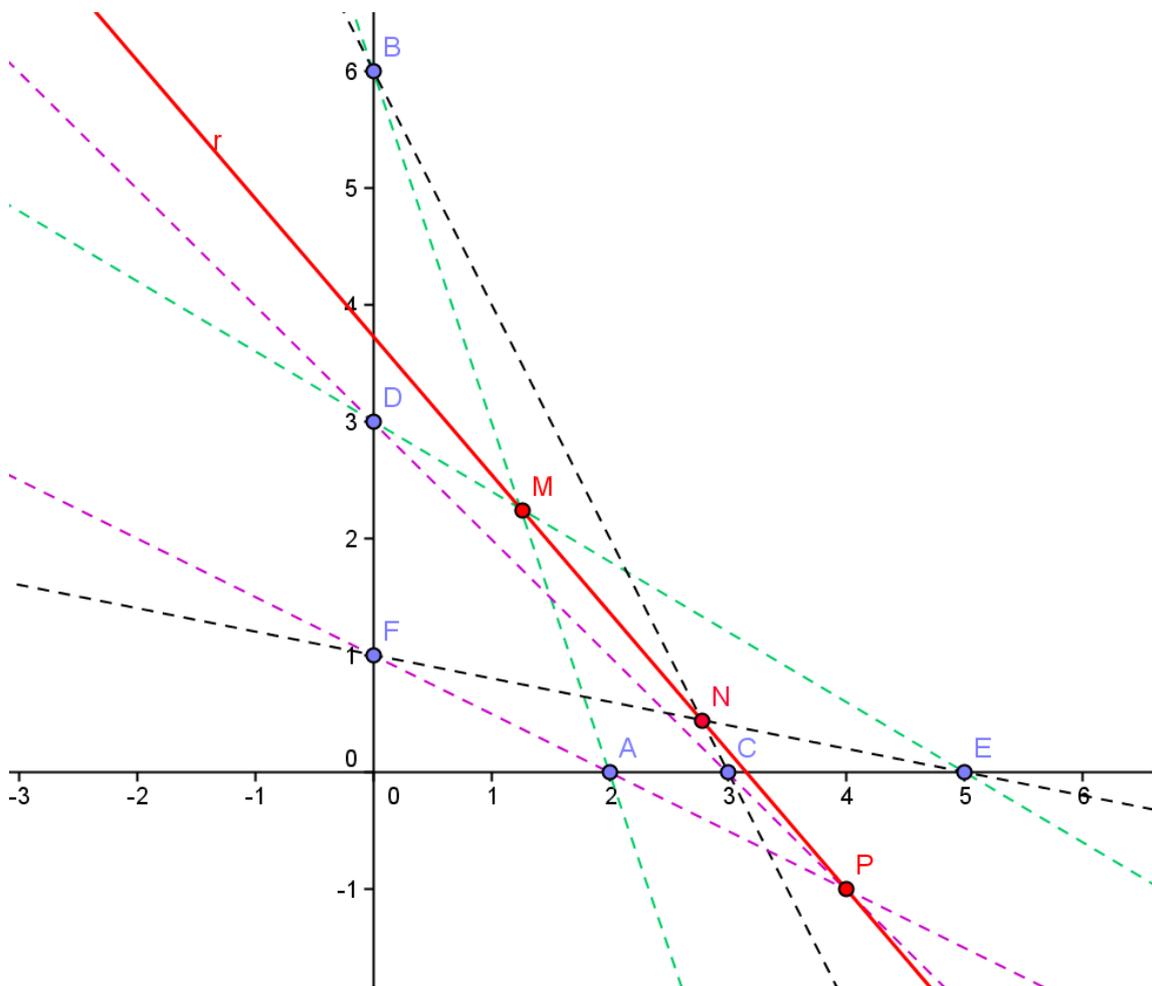
$$r(PCA) \cdot r(DAX) \cdot r(FXC) = -1 \quad \text{logo} \quad \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AD}{DX} \cdot \frac{XF}{FC} = -1 \quad \text{logo} \quad \frac{CP}{PA} = -\frac{DX}{AD} \cdot \frac{FC}{XF}$$

Substituindo-se os valores encontrados no produto  $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA}$

$$\text{Encontra-se: } \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \left(-\frac{DA}{XD} \cdot \frac{EX}{BE}\right) \cdot \left(-\frac{EB}{XE} \cdot \frac{FX}{CF}\right) \cdot \left(-\frac{DX}{AD} \cdot \frac{FC}{XF}\right) = -1$$

Logo, pelo teorema de Menelau os pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  que dividem os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  do triângulo  $ABC$  são colineares.

## 5.2. SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2



Primeiro vamos determinar as intersecções das retas

$$l_{AB} : \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \quad (E_1)$$

$$l_{DE} : \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1 \quad (E_2)$$

$$(E_1) - \frac{1}{2} \cdot (E_2) \quad \therefore \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{10} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{5}{4}$$

Substituindo na equação  $(E_2)$  obtém-se:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore \quad y = \frac{9}{4}$$

$$\text{Logo, } M = \left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$l_{BC} : \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1 \quad (E_3)$$

$$l_{EF} : \frac{x}{5} + \frac{y}{1} = 1 \quad (E_4)$$

$$(E_3) - \frac{1}{6} \cdot (E_4) \quad \therefore \quad \frac{x}{3} + \frac{x}{30} = 1 - \frac{1}{6} \quad \therefore \quad x = \frac{25}{9}$$

Substituindo equação  $(E_4)$  obtém-se:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{25}{9} + y = 1 \quad \therefore \quad y = \frac{4}{9}$$

$$\text{Logo, } N = \left( \frac{25}{9}, \frac{4}{9} \right)$$

$$l_{CD} : \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \quad (E_5)$$

$$l_{AF} : \frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1 \quad (E_6)$$

$$(E_5) - \frac{1}{3} \cdot (E_6) \quad \therefore \quad \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1 - \frac{1}{3} \quad \therefore \quad x = 4$$

Substituindo em  $(E_6)$  temos:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 + y = 1 \quad \therefore \quad y = -1$$

$$\text{Logo, } P = (4, -1)$$

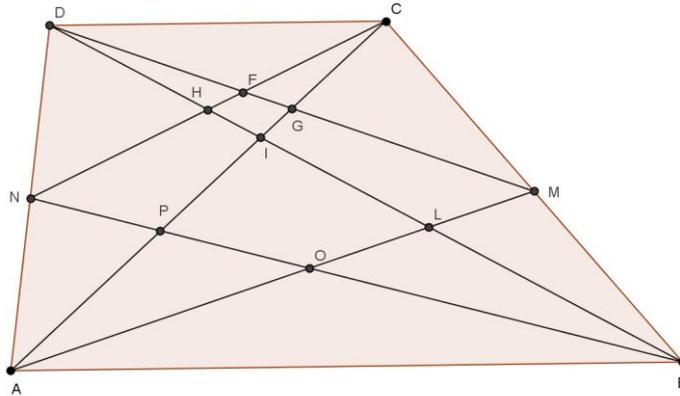
Agora vamos provar que  $M, N$  e  $P$  são colineares usando a condição de alinhamento de três pontos, isto é, mostrar que  $\Delta = 0$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 5/4 & 9/4 & 1 \\ 25/9 & 4/9 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 9 + \frac{20}{36} - \frac{25}{9} + \frac{5}{4} - \frac{225}{36} - \frac{16}{9} = 0 \quad \therefore \quad \Delta = 0.$$

Logo, os pontos  $M, N$  e  $P$  pertencem a mesma reta.

### 5.3. SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 3

Observe os seis segmentos de reta e as sete possíveis intersecções.



Os três pontos P, I e G pertencem a diagonal AC, os outros três H, I e L pertencem a outra diagonal BD. Pelo teorema de Pappus, os pontos F, I e O também são colineares. Escolher 3 pontos em um conjunto de 7 pontos, sem estabelecer nenhuma ordem nessa escolha, é formar subconjuntos de 3 elementos de um conjunto de 7 elementos. O número desses subconjuntos é igual ao número de combinações simples dos 7 pontos tomados 3 a 3 que é:  $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ .

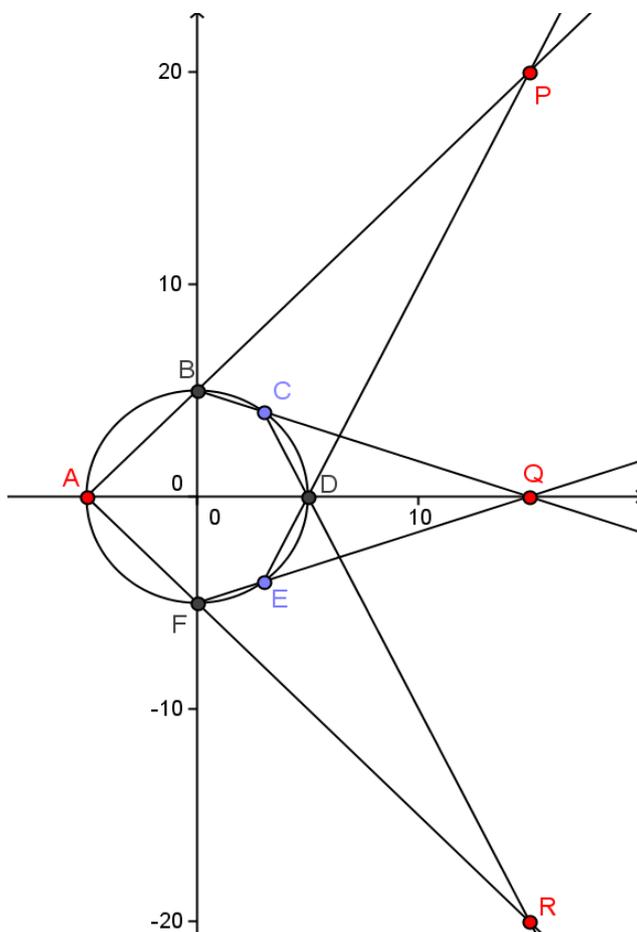
Desses subconjuntos 3 não formam triângulos: {P, I, G}, {H, I, L} e {F, I, O}; assim, o número total de triângulos é:  $35 - 3 = 32$ . Então, a probabilidade de se escolher um triângulo é  $p = 32/35$ .

## 5.4 SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 4

Como o hexágono está inscrito e o ângulo interno  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $BF = 2r$  é o diâmetro da circunferência e pelo teorema de Pitágoras tem-se:

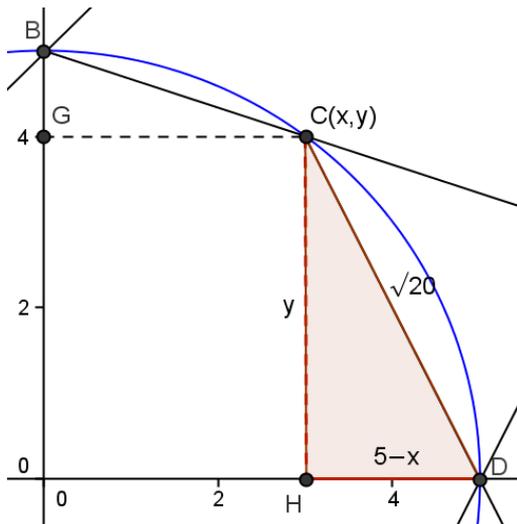
$$(2r)^2 = (\sqrt{50})^2 + (\sqrt{50})^2 \quad \therefore \quad r = 5$$

Para aproveitar a simetria do polígono escolhe-se o sistema de eixos cartesianos com BF contido no eixo das ordenadas e AD contido no eixo das abscissas.



Pelo teorema do hexágono de Pascal, os pontos de interseção dos lados opostos, do hexágono inscrito, são colineares. Logo P, Q e R pertencem a um lado do polígono de área S que, naturalmente, é um triângulo.

Os pontos C e E são simétricos em relação ao eixo dos x. Para determinar suas coordenadas, examine o polígono formado no 1º quadrante que está desenhado abaixo.



Sejam  $C = (x, y)$  e o triângulo retângulo CDH desenhado na figura ao lado. C pertence à circunferência (equação I) e vale o teorema de Pitágoras (equação II), no sistema abaixo.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (5-x)^2 + y^2 = (\sqrt{20})^2 \end{cases} \therefore$$

$$x^2 - (5-x)^2 = 25 - 20 \quad \therefore \quad x = 3 \text{ e } y = 4 \quad \therefore \quad C = (3, 4) \text{ e } E = (3, -4)$$

O ponto P é a intersecção das retas AB e DE, portanto é a solução do sistema:

$$\begin{cases} \overline{AB} : y = x + 5 \\ \overline{DE} : \frac{y - 0}{x - 5} = \frac{0 - (-4)}{5 - 3} \end{cases} \therefore y = 2x - 10 \quad \therefore \quad x + 5 = 2x - 10 \quad \therefore \quad x = 15 \text{ e } y = 20.$$

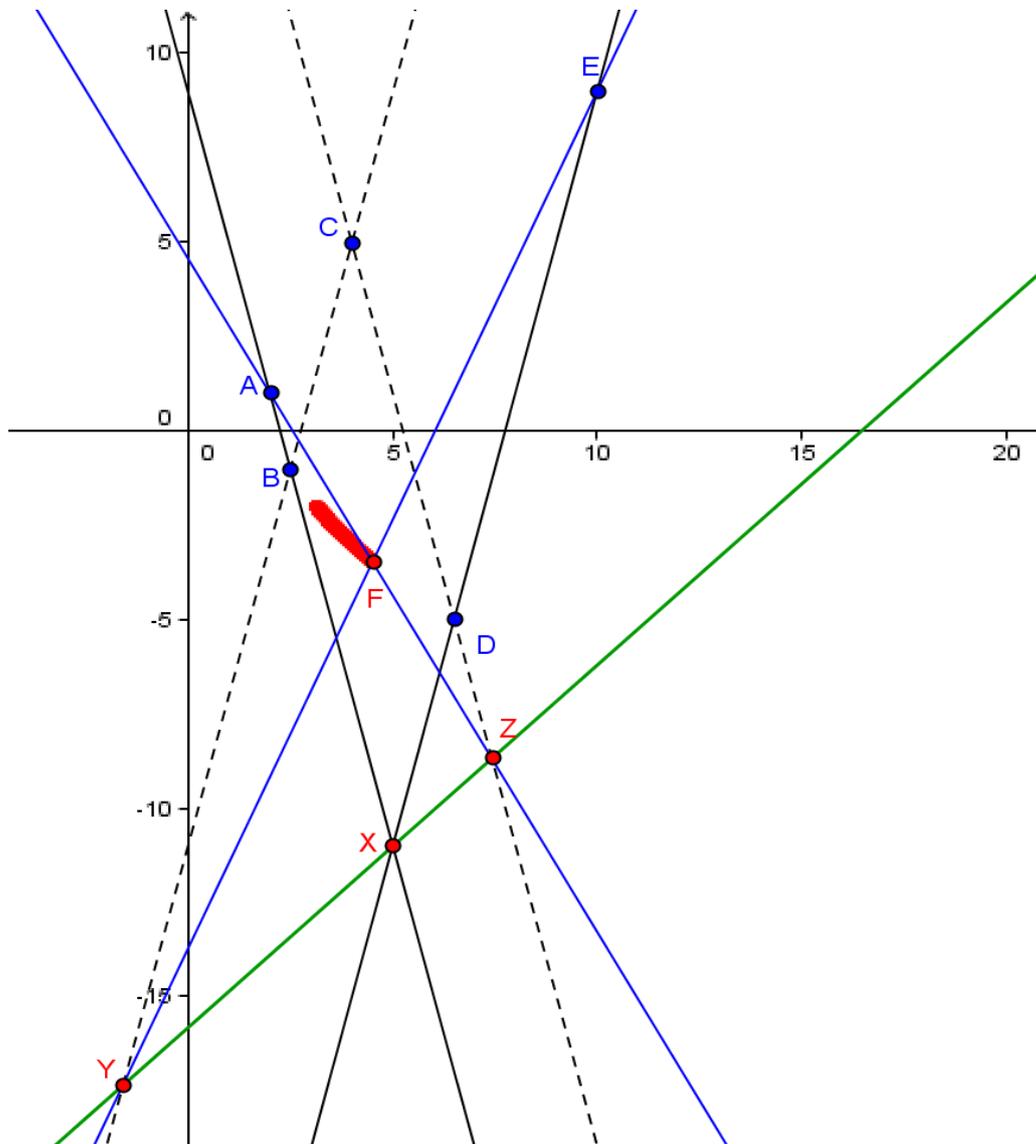
Logo,  $P = (15, 20)$  e  $R = (15, -20)$ .

O hexágono é simétrico em relação ao eixo das abscissas,  $\overline{PQ} = \overline{QR}$  e a área S do triângulo APR é:

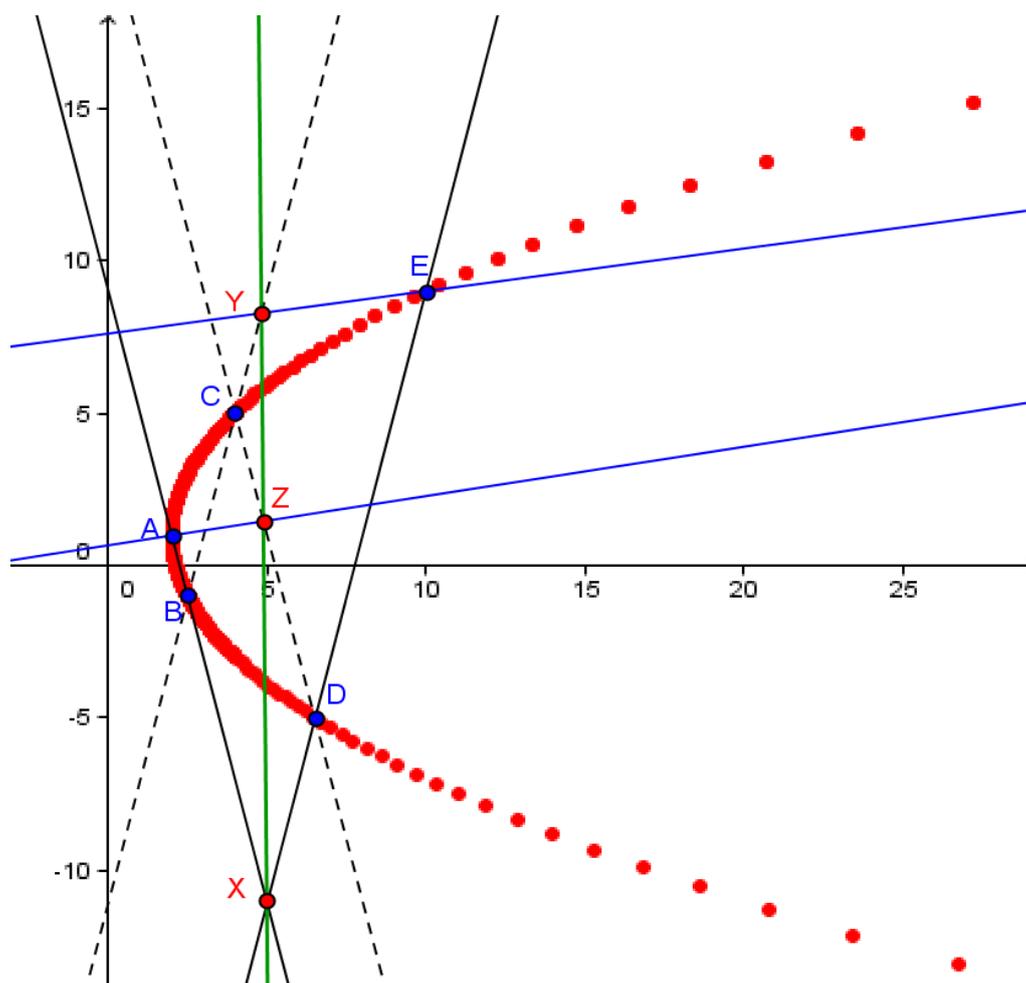
$$S = \frac{\overline{PR} \cdot \overline{AQ}}{2} = \frac{40 \cdot 20}{2} = 400$$

## 5.5. SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 5

1º) Basta digitar os pontos e proceder conforme descrito em 4.4.1, habilitar o rastro do sexto ponto F determinado e animar esse ponto. Desse modo a curva será traçada conforme as figuras desenhadas abaixo.



## A parábola



2º) Depois do procedimento concluído aparece na janela de álgebra do Geogebra a equação da cônica que é  $-y^2 + 8x + 2y = 17$ . Para determinar o vértice basta reduzir essa equação a forma  $Y^2 = a \cdot X$ . Então

$-y^2 + 8x + 2y = 17 \quad \therefore \quad y^2 - 2y + 1 = 8x - 16 \quad \therefore \quad (y-1)^2 = 8(x-2)$ . Logo, o vértice dessa parábola é  $(2, 1)$ . O foco é  $F = (2 + a/4, 1)$ , isto é,  $F = (4, 1)$ .

## SUGESTÕES PARA SALA DE AULA

Conscientes da limitada atenção dada ao ensino de geometria no Brasil, oferecemos com essa dissertação uma pequena contribuição para ampliar esse ensino. Algumas abordagens que fizemos e as atividades sugerem possíveis ampliações e métodos exemplificados a seguir:

- Sempre que possível, propor o problema antes de desenvolver a teoria, é uma estratégia que pode despertar a curiosidade do aluno.
- Escrever com precisão e clareza usando o objeto geométrico para facilitar a compreensão.
- Usar os meios digitais oferecidos como o software de geometria dinâmica para facilitar o entendimento do resultado aonde se quer chegar.
- Usar programas computacionais de geometria dinâmica com o propósito de compreender os problemas, fazer inferências e conjecturas para depois prová-las.
- Valorizar todas as respostas dando igual ênfase ao conhecimento e a criatividade mesmo que essa não conduza ao resultado correto.
- Trabalhar com as atividades sugeridas nesse trabalho ou outras, valorizando sempre a aula de exercícios.
- Rever e aprofundar os conhecimentos adquiridos nas séries anteriores sempre que for solicitado como pré-requisito.
- Procurar contextualizar e interdisciplinar os conteúdos ensinados com o rigor matemático necessário e apenas quando tenha um verdadeiro sentido.

## CONCLUSÃO

Esse trabalho tem como foco principal apresentar a demonstração do Teorema de Pappus. Também foram feitas referências ao teorema do Hexágono de Pascal, pois este contempla o teorema de Pappus como uma de suas particularidades. Como todo bom problema de matemática, não possui apenas um método de demonstração, nessa dissertação foi feita no capítulo 1 uma abordagem via geometria sintética e em seguida, nos capítulos 2 e 3, foram tomados os caminhos da geometria analítica e da álgebra, procurando sempre dar um tratamento adequado aos primeiros níveis escolares.

Não se deve ensinar tudo ao mesmo tempo, mesmo porque a construção de todo conhecimento da humanidade não seu deu dessa forma. O ensino deve ser processado aos poucos, como a construção de um edifício. Primeiro construímos a base com os fatos mais elementares, porém nunca abrindo mão do rigor matemático, e depois os andares acima vão sendo construídos sem desvalorizar o que já foi feito. Foi com essa visão que elaboramos esses capítulos. Eles não se destinam a uma única série, pelo contrário, podem ser aplicados em varias séries entre o ensino básico e médio.

O ensino das geometrias sintética e analítica vem pouco a pouco diminuindo, sendo deixado de lado nos currículos da escola brasileira. O estudante deixa de ter contato com um importante ramo da matemática, suas técnicas e seus belíssimos resultados. De certa forma isso é uma escolha, conforme disse o gato de Cheshire, tudo depende para onde queremos ir. De fato, é até surpreendente que nossa escola, com seus métodos de ensino, não tenham ainda estrangulado o sagrado desejo de aprender. É preciso estimular o aprendizado por vários caminhos acessíveis e construir sólidos alicerces para o ensino e a pesquisa.

Se o processo de modernização do ensino se estende aos ramos de todas as disciplinas e há um grande esforço no sentido de melhorar seus aprendizados, no ensino da Geometria e da Álgebra o rompimento com os moldes tradicionais precisa ser definitivo. Desejamos que a uma Geometria inerte suceda uma ciência dinâmica que ganhe vida com o uso dos instrumentos digitais disponíveis e a partir disso use o método dedutivo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] - Boyer, Carl B. *História da Matemática*, tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- [2] - Garcia, Arnaldo e Lequain, Yves - *Elementos de Álgebra* - Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 2012.
- [3] - Vainsencher, Israel - *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, IMPA, Rio de Janeiro - 2002
- [4] - Barros, Abdênago e Andrade, Plácido – *Introdução à Geometria Projetiva* – SBM Textos Universitários, Rio de Janeiro 2010.
- [5] - Roque, Tatiana e Pitombeira de Carvalho, João Bosco – *Tópicos de História da Matemática* – SBM Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro 2012.
- [6] - Gonçalves, Zózimo Menna – *Curso de Geometria Analítica*, Editora Científica, Rio de Janeiro 1969.
- [7] - Bortolossi, Humberto - *O Método da Área* - II Bienal SBM Universidade Federal da Bahia outubro de 2004.
- [8] - Morgado, Augusto Cesar e Wagner, Eduardo e Jorge, Miguel – *Geometria II*, Livraria Francisco Alves, Rio de Janeiro 1974.
- [9] - Monteiro de Castro, Luciano – *Introdução à Geometria Projetiva*, revista *Eureka!* 8
- [10] - Muniz Neto, Antônio Caminha – *Como Fermat e Bézout podem salvar o dia*, revista *Eureka!* 11.
- [11] - Ávila, Geraldo – *Euclides, Geometria e Fundamentos* – Revista do Professor de Matemática 45, SBM.
- [12] - Nunes de Andrade, Lenimar – *Construção de Cônicas e o Teorema de Pascal* - Revista do Professor de Matemática 45, SBM.