



JOSÉ MARIA RODRIGUES

GEOMETRIA ANALÍTICA COM ENFOQUE
VETORIAL NO ENSINO MÉDIO

CAMPINAS
2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

JOSÉ MARIA RODRIGUES

GEOMETRIA ANALÍTICA COM ENFOQUE VETORIAL NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Roberto Andreani

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO JOSÉ MARIA RODRIGUES, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ROBERTO ANDREANI.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in blue ink is written over a horizontal line. The signature is stylized and appears to be "R. Andreani".

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R618g Rodrigues, José Maria, 1956-
Geometria analítica com enfoque vetorial no ensino médio / José Maria Rodrigues. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Roberto Andreani.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Vetores. 2. Geometria analítica. 3. Educação matemática. I. Andreani, Roberto, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analytical geometry with vector focus on high school

Palavras-chave em inglês:

Vectors

Analytical geometry

Mathematics education

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Roberto Andreani [Orientador]

Pedro José Catuogno

Valeriano Antunes de Oliveira

Data de defesa: 08-05-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 08 de maio de 2015 e
aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof.(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI



Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof.(a). Dr(a). VALERIANO ANTUNES DE OLIVEIRA

Abstract

The Analytical Geometry is taught in different ways in Brazilian Schools, as a result of numerous reforms of state educational programs. In some places the presentation of the Analytical Geometry is done by a vectorial treatment, whereas in other this does not occur. In these places, the vectors are restricted to the universe of Physics. Our proposal, despite having no innovation merit, is aligned to the wishes of numerous professionals of mathematics, considering the possibility to repatriate the vectors to the mathematics domain in High School.

Keywords: Vectors, Analytical Geometry, Mathematics Education

Resumo

A Geometria Analítica é ministrada de diferentes modos nas escolas do Brasil, resultado de inúmeras reformas nos programas estaduais de ensino. Em alguns lugares a apresentação da Geometria Analítica se faz com tratamento vetorial, o que não ocorre em outras localidades. Nessas localidades, os vetores ficaram restritos ao universo da Física. Nossa proposta, apesar de não ter o mérito da inovação, se alinha ao desejo de inúmeros profissionais da matemática, considera a possibilidade de repatriar os vetores para o domínio da matemática no Ensino Médio.

Palavras-chave: Vetores, Geometria Analítica, Educação Matemática.

Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xiii
1 Introdução	1
1.1 Contextualização Histórica	1
1.2 Descrição do trabalho	2
1.3 Organização do trabalho	3
2 Vetores	5
2.1 Introdução	5
2.2 Grandezas Escalares e Vetoriais	5
2.3 Orientação Espacial	5
2.4 Conceito de Vetor	7
2.5 Representação de vetores	8
2.6 Operações com Vetores: Método Geométrico	8
2.6.1 Adição de vetores: regra do polígono	9
2.6.2 Módulo do vetor soma	10
2.6.3 Adição de vetores: regra do paralelogramo	11
2.6.4 Produto de um vetor por um número real	16
2.6.5 Subtração de Vetores	16
2.7 Plano Cartesiano	18
2.8 Coordenadas no plano e segmentos orientados	23
2.9 Equipolência de segmentos orientados	24
2.10 Módulo de um vetor	25
2.11 Vetor unitário	26
2.12 Vetores no Plano Cartesiano	26
2.13 Operações com vetores: Método Algébrico	30
2.14 Distância entre dois pontos	34
2.15 Perpendicularismo	35
2.16 Produto escalar	36
2.17 Ângulo entre vetores	42
2.18 Projeção de vetores	46

3	Equações da reta no plano	51
3.1	Introdução	51
3.2	Equação paramétrica da reta	51
3.3	Equação cartesiana da reta	54
3.4	Equação reduzida da reta	55
3.5	Sistemas de equações lineares	57
3.6	Paralelismo e perpendicularismo entre retas	58
3.7	Desigualdades Lineares	62
3.8	Ângulo entre retas	69
3.9	Distância de um ponto a uma reta	71
3.10	Área de triângulo	74
3.11	Área de um polígono	77
4	O Círculo	81
4.1	Introdução	81
4.2	Lugar Geométrico	81
4.3	A equação reduzida do círculo	81
4.4	A equação normal do círculo	84
4.5	Reconhecimento do círculo	86
4.6	Posições relativas entre reta e círculo	86
5	As Cônicas	95
5.1	Introdução	95
5.2	Elipse	95
5.3	Parábola	100
5.4	Hipérbole	103
5.5	Rotação e translação de eixos	105
5.6	Translação de eixos	105
5.7	Rotação de eixos	109
5.8	Equação geral do segundo grau	115
6	Números Complexos	121
6.1	Contextualização Histórica	121
6.2	Plano complexo	125
6.3	Módulo e complexo conjugado	127
6.4	Números complexos na fórmula polar	134
6.5	Fórmulas do produto e do quociente	135
6.6	Fórmula de De Moivre	137
6.7	Raízes de um número complexo	138
6.8	Aplicações de Raízes da unidade	139
7	Considerações Finais	143
	Referências	145

Aos professores de todos os tempos e lugares; sem a herança cultural, por eles revivida e modificada, o mundo estaria condenado à barbárie.

Agradecimentos

Aos queridos professores do Imecc pela dedicação e carinho. Dentre eles, um agradecimento especial ao meu orientador - Prof.Dr. Roberto Andreani. Sem sua orientação competente e segura, este trabalho não teria êxito.

À minha querida esposa Prof(a) Maria Alice Colevati Rodrigues, sempre presente.

Ao Prof.MSc. Eduardo Wagner, da Fundação Getúlio Vargas/RJ. Suas aulas de Geometria Analítica, disponibilizadas no *site* do IMPA, foram inspiração - *da mais alta qualidade* - para nosso trabalho.

Ao querido Prof.Dr. Alberto Oliva, da Universidade Federal do Rio de Janeiro. A contextualização histórica do século XVII, que deu um *colorido especial* a esta dissertação, foi inspirada fortemente em livros de sua autoria; conforme referências.

Aos colegas da turma, pela riqueza e alegria do convívio.

Ao aluno do Imecc, Charles Henrique Martins Sobrinho, por todo apoio na formatação do texto.

A CAPES pelo incentivo financeiro, estímulo relevante para melhoria do ensino no país.

Lista de Ilustrações

2.1	Feixe de retas paralelas.	6
2.2	Feixe de retas paralelas, definidas pelo ângulo θ e pela reta de referência r	6
2.3	Dois sentidos para uma mesma direção.	7
2.4	Conjunto de segmentos orientados equipolentes.	7
2.5	Segmento orientado \overrightarrow{AB}	8
2.6	Representação dos vetores \vec{u} e \vec{v}	9
2.7	Representação dos vetores \vec{u} e \vec{v}	9
2.8	Representação do vetor soma \vec{s}	10
2.9	O vetor soma \vec{s} com valor máximo.	10
2.10	O vetor soma \vec{s} com valor mínimo.	11
2.11	A ordem dos <i>vetores parcela</i> não altera o resultado.	11
2.12	Paralelogramo formado após a superposição das figuras.	12
2.13	Vetores parcela com mesma origem.	12
2.14	Paralelogramo associado aos vetores.	13
2.15	Representação do vetor soma \vec{s}	13
2.16	Ângulos entre vetores no paralelogramo.	14
2.17	Representação dos vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	14
2.18	Determinação gráfica do vetor soma \vec{s}_1	15
2.19	Determinação gráfica do vetor soma \vec{s}_2	15
2.20	Triângulo Retângulo.	15
2.21	Representação do vetor diferença \vec{d}	16
2.22	Representação do vetor diferença \vec{d}	17
2.23	Representação gráfica do vetor \vec{a}	17
2.24	Representação gráfica do vetor $2 \cdot \vec{a}$	18
2.25	Representação gráfica do vetor $-3 \cdot \vec{a}$	18
2.26	Representação do Caso I.	19
2.27	Representação do Caso II.	21
2.28	Representação do Caso III.	22
2.29	Representação de pares ordenados por setas.	23
2.30	Segmentos equipolentes no Plano Cartesiano.	24
2.31	Segmentos equipolentes no Plano Cartesiano.	25
2.32	Igualdade de vetores em coordenadas.	27
2.33	Representante canônico OP , do vetor AB	28

2.34	Decomposição do vetor \vec{v} na base ortonormal.	30
2.35	Os três paralelogramos possíveis.	31
2.36	Um quadrilátero qualquer.	33
2.37	Distância entre dois pontos.	34
2.38	Vetores perpendiculares, \vec{OA} e \vec{OB}	35
2.39	Vetores perpendiculares, \vec{u} e \vec{v}	36
2.40	Bloco submetido a uma força resultante e constante \vec{F}	37
2.41	Bloco submetido a uma força resultante horizontal de módulo 1, 0N.	39
2.42	Bloco submetido a uma força \vec{F} , a qual forma um ângulo θ com relação ao deslocamento \vec{d}	41
2.43	Representantes canônicos dos vetores dados \vec{AB} e \vec{CD}	42
2.44	Segmentos orientados \vec{BA} e \vec{CD} são equipolentes.	44
2.45	Segmentos orientados \vec{BA} e \vec{BC}	45
2.46	Projeção do vetor \vec{u} na direção do vetor \vec{v}	46
2.47	Projeção do vetor \vec{u} na direção do vetor \vec{v}	47
2.48	Triângulo ABC , conforme enunciado.	48
2.49	No triângulo ABC , vetores \vec{BA} e \vec{BC}	49
3.1	Reta r , passando pelo ponto A e na mesma direção do vetor \vec{v}	51
3.2	Reta r , passando pelo ponto $A = (2, 1)$ e na mesma direção do vetor $\vec{v} = (3, 4)$	54
3.3	Feixe de retas concorrentes no ponto $P = (3, 2)$	56
3.4	Duas retas perpendiculares quaisquer: r e r'	59
3.5	Duas retas paralelas a r e r' , passando pela origem do sistema de coordenadas.	59
3.6	Retas r e t , desenhadas no plano cartesiano.	60
3.7	Semiplanos H^+ e H^- , determinados por uma reta.	63
3.8	Polígono de soluções.	66
3.9	Polígono de soluções.	68
3.10	Ângulos entre duas retas concorrentes.	70
3.11	Ângulo formado pelas diagonais do paralelogramo.	70
3.12	Distância do ponto P à reta r	71
3.13	Representação no plano cartesiano dos dados do problema.	73
3.14	A altura é a distância do vértice à base.	74
3.15	Uma translação leva o triângulo $A_1A_2A_3$ para a posição PQO	75
3.16	Triângulo retângulo, adequadamente encaixado no 1° quadrante.	76
3.17	Polígono convexo qualquer.	78
3.18	Semiplanos determinados pela reta.	79
3.19	Polígono de soluções, a intersecção dos 4 semiplanos apresentados.	80
4.1	Círculo $\mathcal{E}=(C, r)$ de centro $C = (a, b)$ e raio r	82
4.2	Triângulo Retângulo, conforme enunciado do problema.	83
4.3	Identificação do lugar geométrico.	85
4.4	Duas trajetórias: uma reta para o ciclista A e um círculo para o B	87
4.5	Dados do problema	90

4.6	Do enunciado do problema, $\overline{PA} = \overline{AB}$	91
4.7	Por simetria, duas retas são possíveis.	92
4.8	Confirmando o cálculo das distâncias; <i>software GeoGebra</i>	93
5.1	Elipse centrada na origem.	96
5.2	Elipse como círculo achatado.	98
5.3	Elipse do exemplo.	100
5.4	Parábola \mathcal{P}	101
5.5	Parábola do enunciado.	102
5.6	Hipérbole.	103
5.7	Hipérbole do exemplo.	105
5.8	Translação de eixos.	106
5.9	Translação de eixos do exemplo.	106
5.10	Translação de eixos do exemplo.	108
5.11	Rotação de eixos.	109
5.12	Cônica identificada, após rotação dos eixos.	112
5.13	Cônica identificada, após rotação e translação dos eixos.	115
5.14	Um par de retas concorrentes.	116
5.15	Uma única reta.	117
6.1	A imagem de N sofre rotação segundo arco de 180° , quando N é multiplicado por -1 .123	
6.2	A imagem de N sofre rotação segundo arco de 180° , quando N é multiplicado por $i \cdot i$.123	
6.3	Plano complexo ou de Argand-Gauss.	124
6.4	Número complexo como vetor.	125
6.5	Soma de números complexos.	126
6.6	Subtração de números complexos.	126
6.7	Adição de complexos.	127
6.8	Exemplos de complexos e seus respectivos conjugados.	127
6.9	Círculo \mathcal{E} e reta r	131
6.10	Círculo \mathcal{E} de centro $C = (-2, 5)$ e raio $r = 2$	133
6.11	Os dois círculos do item b).	134
6.12	Coordenadas polares do complexo z , θ e $ z $	134
6.13	A interpretação geométrica do produto de dois complexos.	136

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização Histórica

Do século XVII

O século XVII representou um marco para a história da ciência. Os homens que nele viveram, educados na *cultura renascentista*, encontraram soluções *engenhosas* para os problemas de um novo tempo. Dentre eles, dois se destacaram pela eloquência ou talento científico : *Francis Bacon* e *René Descartes*. Cada um, a sua maneira, apresentou planos para o estabelecimento de uma nova ciência. Isto é, uma ciência melhor fundamentada e com capacidade para inovar. Ambos almejavam *o conhecimento científico construído em bases sólidas*, como advogava Montaigne: “Apenas uma verdade é suficiente para afugentar a dúvida, exorcizar o fantasma do ceticismo e provar que o edifício do conhecimento pode ser construído com solidez”. Bacon e Descartes, apresentaram as *bases* para uma nova arquitetura científica. De acordo com OLIVA[11, 12], os modelos que se seguem:

Francis Bacon e o Empirismo

Modelo *from the bottom up* (de baixo para cima)

Para Bacon, defensor eloquente do empirismo, todo conhecimento autêntico provém da experiência. Deve, portanto, ser obtido dos particulares para o geral. Modelo conhecido como *from the bottom up* (de baixo para cima). O modelo considera a existência de uma *base rochosa*, composta pelo registro fiel dos fatos e pela constatação de casos particulares. Partindo deste **alicerce**, vai ascendendo - por etapas - até chegar ao topo, à teoria. Isto é, ao universal indutivamente obtido.

René Descartes e o Racionalismo

Modelo *from the top down* (de cima para baixo)

O racionalismo adota o modelo *from the top down* (de cima para baixo) entendido como a trajetória *do mais geral para o menos geral*. Para Descartes, pela *intuitus mentis* (intuição racional) se chega ao autoevidente, e a partir dele, pela *illatio* (inferência dedutiva), podem-se derivar outras verdades, normalmente menos gerais. Como a dedução não oferece riscos inferenciais, a pretensão de Descartes de alcançar a *veram et certam scientiam* (o conhecimento verdadeiro e certo) depende crucialmente de poder estabelecer algo como autoevidente. Conquistado esse tipo inabalável de **alicerce**, o conhecimento desponta imune a dúvidas e a questionamentos céticos.

Da Geometria Analítica

A Geometria Analítica moderna foi inventada de forma independente e quase simultânea por dois homens: Pierre de Fermat e René de Descartes. A obra de Fermat, *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos) apareceu em 1629, é considerada o marco zero da Geometria Analítica. A Geometria de Descartes nasce, como vimos, em uma época que buscou a reconstrução do conhecimento. Sua Geometria não foi apresentada como obra isolada, a - *La Géométrie* - surge em 1637, como apêndice de seu tratado: *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, isto é, o famoso *Discurso do Método*[5]. O fato que possibilitou esta invenção foi o grau de desenvolvimento em que se encontrava a Álgebra simbólica na época. Como sabemos, a geometria analítica faz uma *conexão* entre a geometria tradicional - Geometria Euclidiana - e a Álgebra. Ela permite soluções algébricas de problemas geométricos e, ao contrário, interpretações geométricas de fatos algébricos. Na geometria analítica vamos operar, portanto, com essa dualidade.

1.2 Descrição do trabalho

Nosso trabalho defende a apresentação da Geometria Analítica com tratamento vetorial, a partir do ensino médio. Quais são - *segundo nosso entendimento* - os benefícios desta proposta? Relaciono alguns:

- i) Os vetores são objetos de fácil manipulação e *frequentemente produzem*, quando corretamente aplicados, soluções muito rápidas e elegantes para os problemas;
- ii) As equações da reta, em suas distintas formas, são facilmente encontradas e justificadas;
- iii) Os vetores são um conteúdo propedêutico ao estudo dos números complexos.

Observação 1.2.1. Na elaboração deste trabalho, pela abrangência dos temas, foi possível estabelecer um roteiro de ensino *de praticamente um ano letivo*. Isto justifica a extensão do texto.

1.3 Organização do trabalho

Para facilitar o entendimento deste texto, apresento - em linhas gerais - o percurso adotado na sua elaboração. Nosso objetivo foi organizar o conteúdo *Geometria Analítica*, no Ensino Médio, com tratamento vetorial. Após concisa introdução histórica, de acordo com OLIVA [11, 12], dedicamos o segundo capítulo ao estudo dos *vetores*. Este capítulo pode ser dividido em duas partes: Operações com Vetores-Método Geométrico, conforme PIQUEIRA [13] ou Operações com Vetores-Método Algébrico, de acordo com MUNIZ NETO [10]. No segundo capítulo, antes da definição de produto escalar, apresento um breve histórico sobre o conceito físico *de trabalho de uma força*. Este texto, inspirado em BARRETO [2], qualifica a definição de produto escalar. Trata-se de um conteúdo extra, o qual o professor poderá utilizar ou não. Com este alicerce estabelecido, caminhamos para a determinação das equações da reta no terceiro capítulo. Iniciamos, como era de se esperar, pela equação paramétrica. De acordo do REIS [14], foi possível deduzir a equação cartesiana da reta e a equação reduzida. Essas equações podem nos dar informações preciosas, assunto amplamente debatido neste capítulo.

No quarto capítulo, após a definição de *Lugar Geométrico*, são apresentadas as equações do círculo; isto é, a equação reduzida e a equação normal. Posições relativas entre círculo e reta são exploradas através de exemplos.

O quinto capítulo é dedicado ao estudo das Cônicas, são apresentadas suas equações canônicas. Conforme REIS [14], muitos exemplos foram mostrados, envolvendo translações e rotações dos eixos coordenados.

No sexto capítulo abordamos os Números Complexos, de acordo com ELON [8]. O aparecimento dos números complexos é apresentado com contextualização histórica, conforme SAMPAIO [15]. Destacamos neste capítulo a representação geométrica dos números complexos no plano.

Nas considerações finais, reafirmo minha crença na melhoria do Ensino Médio. Espero que este trabalho ajude os professores nesta caminhada.

Capítulo 2

Vetores

2.1 Introdução

Como destacado no *Currículo do Estado de São Paulo*[6] , ensinar é fazer escolhas: é preciso construir *mapas e escalas*. O currículo é como um mapa que representa o inesgotável território do conhecimento, recoberto por disciplinas. Cada disciplina, por sua vez, é como um mapa de uma região, elaborado a partir de determinada perspectiva. Um mapa não pode registrar tudo aquilo que existe no território; para construí-lo , é preciso tomar decisões, estabelecendo o que é ou não *relevante*. Dessa forma, vamos iniciar o mapeamento da **Geometria Analítica** colocando, como **norte**, o conceito de **vetor**.

2.2 Grandezas Escalares e Vetoriais

Existem grandezas que ficam perfeitamente caracterizadas por um número real acompanhado de sua unidade; são as denominadas *grandezas escalares*, exemplos: massa, comprimento, energia e temperatura. De modo distinto, outras grandezas necessitam, além do número real, também de uma orientação espacial. Imagine um indivíduo que está a 2 metros de um precipício, se ele deslocar 3 metros cairá nele? A resposta pode ser sim ou não, dependendo do sentido do deslocamento. Como o deslocamento, existem muitas grandezas que, para ficarem perfeitamente caracterizadas, precisam de uma orientação espacial. São as *grandezas vetoriais*, por incorporarem ao lado dos números, os conceitos de direção e sentido. Exemplos: velocidade, força, campo elétrico, etc.

2.3 Orientação Espacial

Para especificar a orientação espacial de uma grandeza vetorial, deve-se determinar sua direção e sentido.

Direção

Pode-se definir direção como o que existe em comum entre as retas paralelas de um feixe. Logo, se duas retas são paralelas, têm a mesma direção.

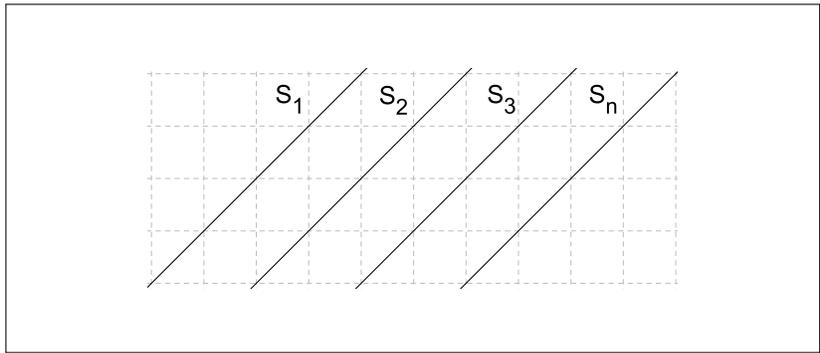


Figura 2.1: Feixe de retas paralelas.

A direção também pode ser caracterizada através de um ângulo formado com uma reta r de referência.

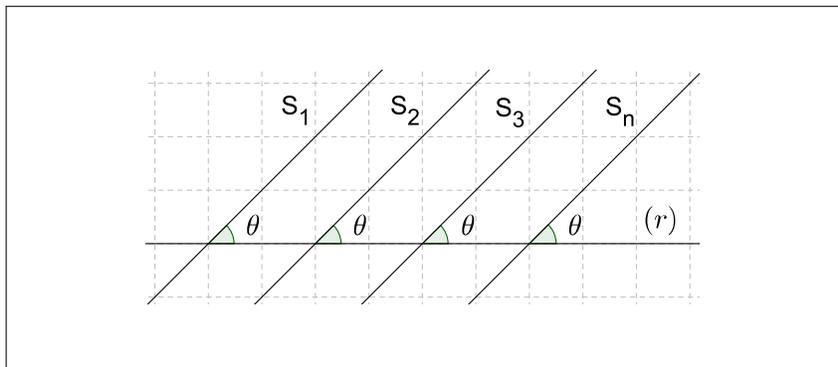


Figura 2.2: Feixe de retas paralelas, definidas pelo ângulo θ e pela reta de referência r .

Se uma reta s_1 forma com r um ângulo θ , todas as retas s_2, s_3, \dots, s_n , paralelas a s_1 , formarão com r ângulos também de medida θ . Assim, a direção de s_1 (e de suas paralelas) é caracterizada pelo ângulo θ , desde que se especifique a reta de referência em relação à qual θ é medido.

Sentido

Pode-se definir sentido como uma das maneiras possíveis de orientar uma dada direção. Note-se que o sentido está sempre associado à uma dada direção e que para cada direção existem dois sentidos possíveis.

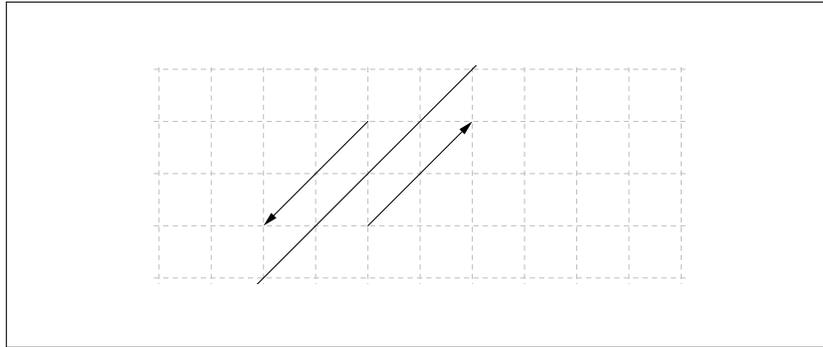


Figura 2.3: Dois sentidos para uma mesma direção.

Por exemplo, quando se diz que um corpo se move verticalmente para cima, o termo *verticalmente* define a direção, e a expressão *para cima* determina qual dos dois sentidos possíveis (para cima ou para baixo) está associado à direção dada.

2.4 Conceito de Vetor

Operar com grandezas vetoriais requer a utilização de uma álgebra diferente daquela aprendida no primeiro grau, trata-se da *Álgebra Vetorial*. Na álgebra comum, opera-se com uma entidade matemática denominada **número**. Na álgebra vetorial, opera-se com **vetor**.

Para conceituar **vetor**, faremos - de acordo com PIQUEIRA[13] - uma analogia com o processo que leva ao conceito de número. Imagine conjuntos que são constituídos de elementos diferentes: um conjunto de três carros, um conjunto de três bolas e um de três livros. Apesar dos elementos serem diferentes entre si, à quantidade de elementos de cada conjunto, associa-se um *ente matemático abstrato* denominado **número**. No caso, o número 3.

Imagine agora uma coleção de *segmentos orientados* todos com a mesma medida, a mesma direção e o mesmo sentido.

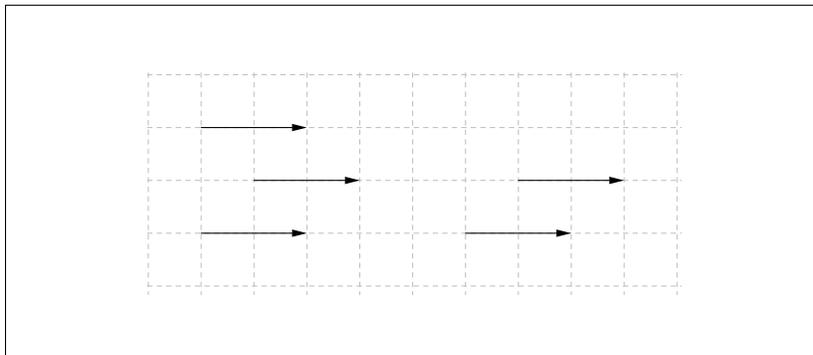


Figura 2.4: Conjunto de segmentos orientados equipolentes.

Para indicar que todos eles têm a mesma medida, a mesma direção e o mesmo sentido, diz-se que são *equipolentes*. Apesar dos pontos que constituem um dos segmentos serem distintos dos que constituem outro, todos os segmentos têm algo em comum: uma quantidade (correspondente à medida) e uma orientação espacial (dada pela direção e sentido). Assim, aquilo que os segmentos orientados têm em comum é a *equipolência*. À esta equipolência, associa-se um *ente matemático abstrato* denominado **vetor** que não é simplesmente um número, pois não representa apenas uma quantidade, mas também a orientação espacial. Por isto, todo vetor é caracterizado por um número (sempre não negativo), denominado módulo, por uma direção e por um sentido.

2.5 Representação de vetores

Graficamente, um vetor costuma ser representado por um dos segmentos orientados aos quais é associado.

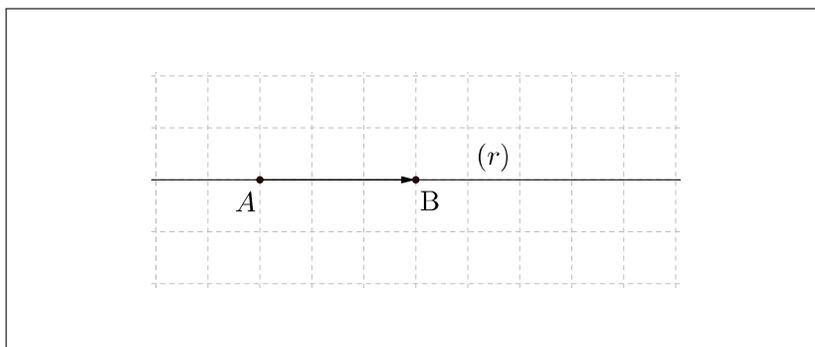


Figura 2.5: Segmento orientado \overrightarrow{AB} .

Na figura, a reta que contém o segmento orientado - *representativo do vetor* - determina sua direção. A orientação do segmento (ponta da seta na figura) determina o sentido, e a medida do segmento determina (numa escala) o módulo do vetor.

O ponto A é denominado origem do segmento orientado que representa o vetor, e o ponto B é sua extremidade. Atenção: o segmento desenhado não é um vetor, mas apenas sua representação.

Simbolicamente, o vetor pode ser representado de várias formas; considere o vetor \vec{v} com origem em A e extremidade em B , ele pode ser representado por: \vec{v} , \overrightarrow{AB} , v , V , \vec{V} .

2.6 Operações com Vetores: Método Geométrico

Apesar de muitas operações com *vetores* receberem os mesmos nomes que as operações com *números*, o mecanismo da operação vetorial é basicamente diferente da operação numérica, pois não envolve apenas quantidades, mas também orientações espaciais.

2.6.1 Adição de vetores: regra do polígono

Sejam os vetores \vec{u} e \vec{v} representados na figura que se segue.

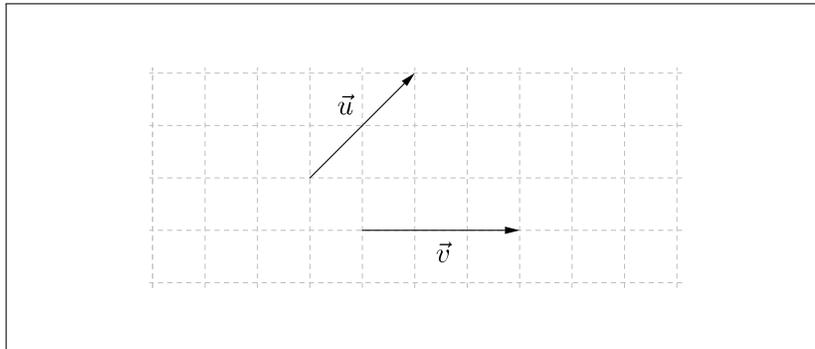


Figura 2.6: Representação dos vetores \vec{u} e \vec{v} .

O vetor soma \vec{s} é dado por:

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$

Para encontrar \vec{s} , pela regra do polígono, usa-se o seguinte processo:

- i) desenhar o segmento representativo do 1º *vetor parcela* \vec{u} usando como origem um ponto qualquer do plano.
- ii) desenhar em seguida o segmento representativo do 2º *vetor parcela* \vec{v} , de maneira que sua origem coincida com a extremidade do 1º *vetor parcela* \vec{u} .

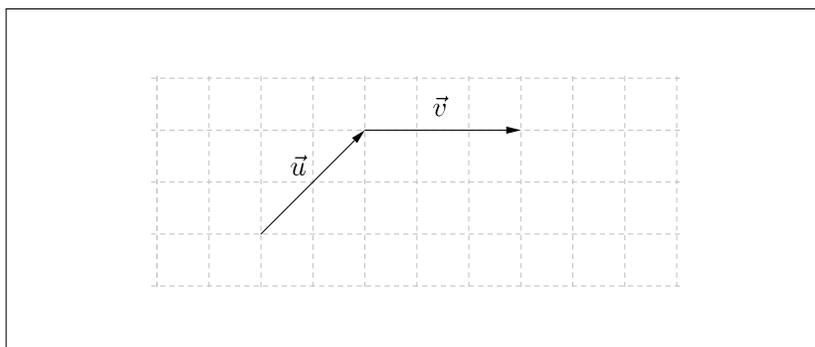


Figura 2.7: Representação dos vetores \vec{u} e \vec{v} .

- iii) o vetor soma \vec{s} será representado pelo segmento orientado cuja origem coincide com a origem do 1º *vetor parcela* \vec{u} e cuja extremidade coincide com a extremidade do 2º *vetor parcela* \vec{v} .

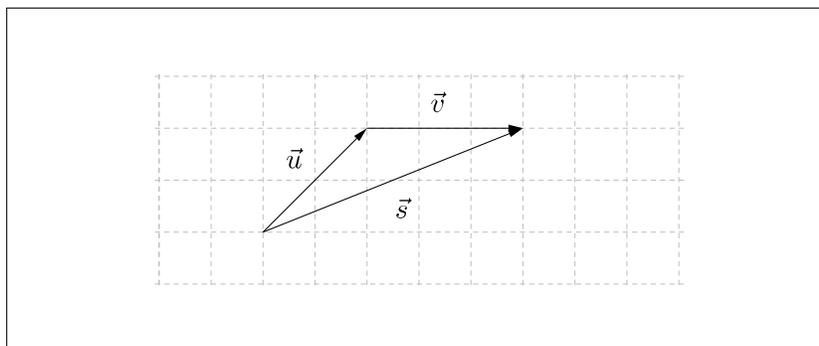


Figura 2.8: Representação do vetor soma \vec{s} .

O procedimento pode ser generalizado para a adição de mais de dois vetores, lembrando-se sempre que a origem de cada novo vetor a ser incluído deve coincidir com a extremidade do anterior e que, ao se transportar um segmento para formar o polígono, a equipolência deve ser conservada.

2.6.2 Módulo do vetor soma

A adição de vetores distingue-se da adição de números por tratar-se de um processo gráfico.

Se não forem conhecidas as direções e sentidos de dois vetores \vec{u} e \vec{v} não se poderá determinar $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ e, conseqüentemente, o seu módulo $||\vec{s}||$.

No entanto é possível estabelecer o intervalo de valores em que $||\vec{s}||$ se situa:

- i) $||\vec{s}||$ tem valor máximo quando \vec{u} e \vec{v} têm direções e sentidos coincidentes.

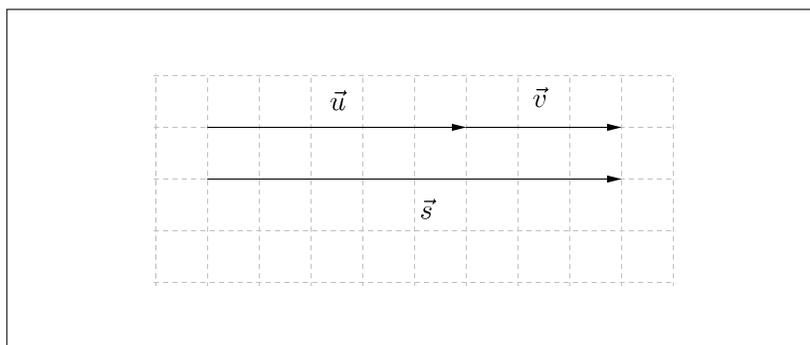


Figura 2.9: O vetor soma \vec{s} com valor máximo.

Neste caso, $||\vec{s}|| = ||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.

- ii) $||\vec{s}||$ tem valor mínimo quando \vec{u} e \vec{v} têm mesma direção mas sentidos opostos.

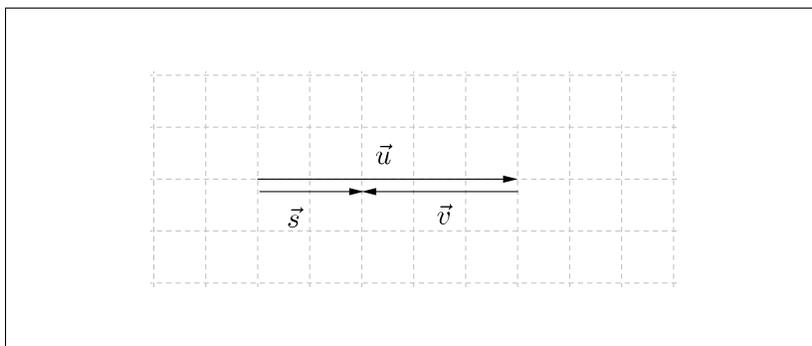


Figura 2.10: O vetor soma \vec{s} com valor mínimo.

Neste caso, $\|\vec{s}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$.

Quaisquer outras direções e sentidos que \vec{u} e \vec{v} tenham, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ estará sempre entre $\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$ e $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Ou seja:

$$\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Relação conhecida como *Desigualdade Triangular*.

2.6.3 Adição de vetores: regra do paralelogramo

Se efetuarmos a adição de \vec{u} e \vec{v} na ordem inversa, o vetor soma será idêntico ao obtido na adição original.

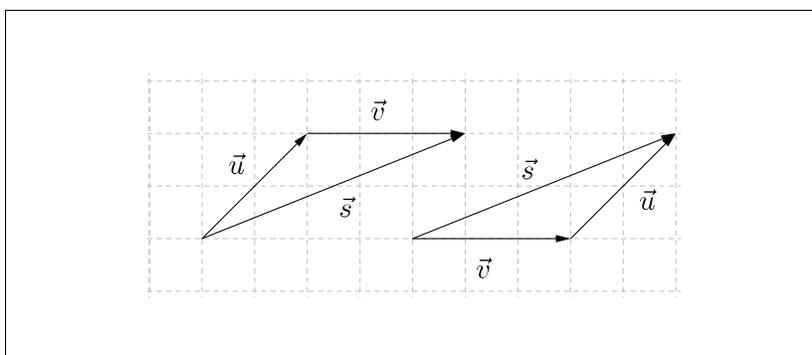


Figura 2.11: A ordem dos *vetores parcela* não altera o resultado.

Portanto, pode-se escrever:

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Superpondo-se as figuras correspondentes a $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{v} + \vec{u}$, será formado um paralelogramo.

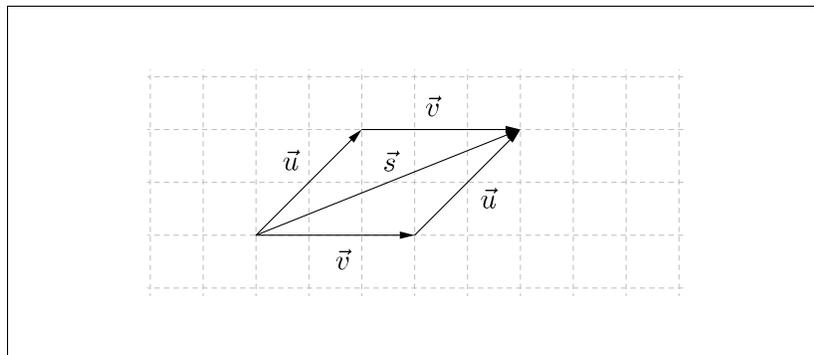


Figura 2.12: Paralelogramo formado após a superposição das figuras.

Assim, o vetor soma também pode ser obtido seguindo-se o procedimento descrito a seguir:

i) representar os vetores parcela com as origens coincidentes;

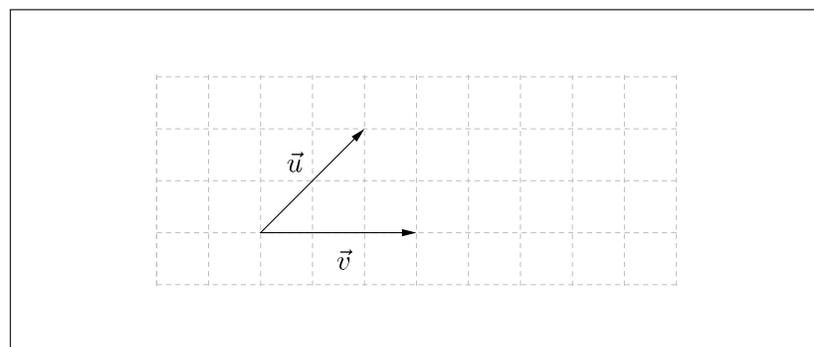


Figura 2.13: Vetores parcela com mesma origem.

ii) construir um paralelogramo com base nesta figura inicial;

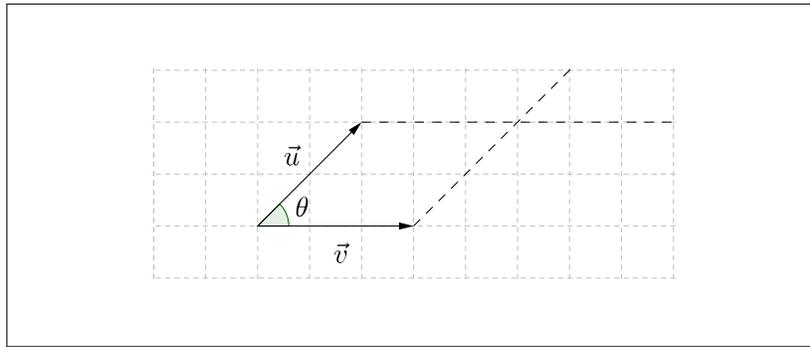


Figura 2.14: Paralelogramo associado aos vetores.

- iii) traçar a diagonal que passa pelas origens coincidentes e orientá-la de maneira que sua origem coincida com a origem comum. Assim, será obtido um segmento orientado que representa o vetor soma \vec{s} .

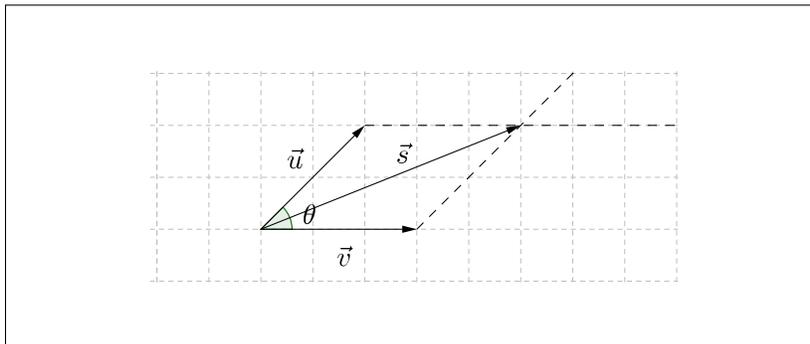


Figura 2.15: Representação do vetor soma \vec{s} .

Conhecendo-se o ângulo θ formado pelos vetores parcelas, vale a relação:

$$\|\vec{s}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

Os ângulos α e β que \vec{s} , \vec{v} e \vec{u} formam entre si podem também ser relacionados por:

$$\frac{\|\vec{s}\|}{\text{sen}\theta} = \frac{\|\vec{u}\|}{\text{sen}\alpha} = \frac{\|\vec{v}\|}{\text{sen}\beta}$$

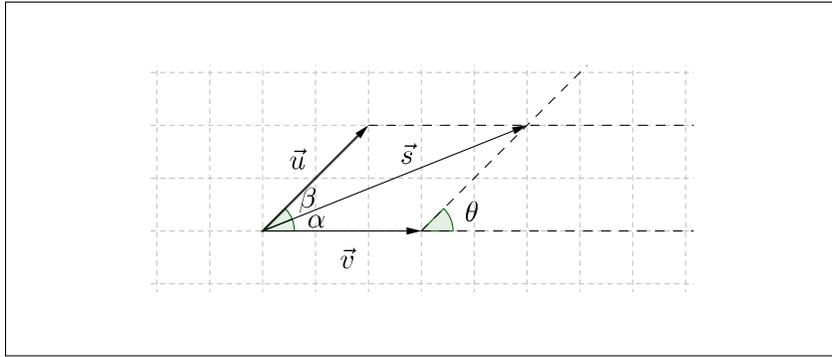


Figura 2.16: Ângulos entre vetores no paralelogramo.

Exemplo 2.6.1. Dados os vetores representados na figura a seguir:

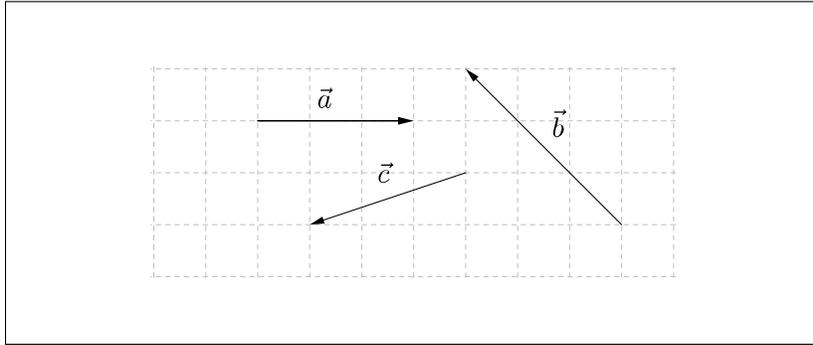


Figura 2.17: Representação dos vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

Pede-se:

- obtenha graficamente o vetor soma $\vec{s}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
- obtenha graficamente o vetor soma $\vec{s}_2 = \vec{b} + \vec{c} + \vec{a}$.
- calcule os módulos dos vetores \vec{s}_1 e \vec{s}_2 .

Resolução:

- Para efetuar a operação indicada pelo método poligonal, deve-se desenhar os vetores parcela de tal forma que a origem de \vec{b} coincida com a extremidade do vetor \vec{a} e a origem de \vec{c} coincida com a extremidade de \vec{b} . O vetor \vec{s}_1 será o vetor representado pelo segmento orientado que tem origem coincidente com a origem do primeiro vetor (no caso \vec{a}) e extremidade coincidente com a extremidade do último vetor (no caso \vec{c}).

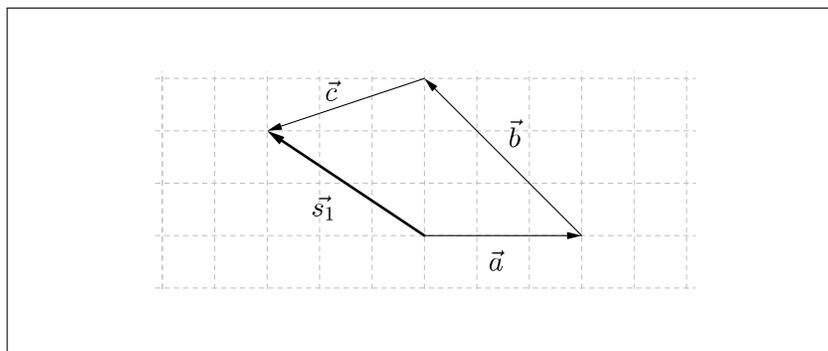


Figura 2.18: Determinação gráfica do vetor soma \vec{s}_1 .

b) O vetor \vec{s}_2 fica representado pelo segmento orientado que tem origem coincidente com a origem do primeiro vetor (no caso, \vec{b}) e extremidade coincidente com a extremidade do último vetor (no caso, \vec{a}).

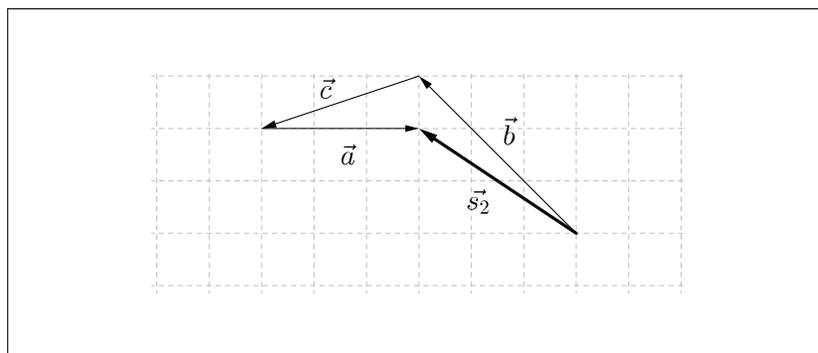


Figura 2.19: Determinação gráfica do vetor soma \vec{s}_2 .

Observação 2.6.2. A inspeção das resoluções apresentadas nos itens a) e b) mostra que $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 = \vec{s}$, pois a *adição vetorial é comutativa*.

c) Como $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 = \vec{s}$, basta determinar o módulo do vetor \vec{s} . Para obter o módulo de \vec{s} , observe-se o triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento que representa \vec{s} .

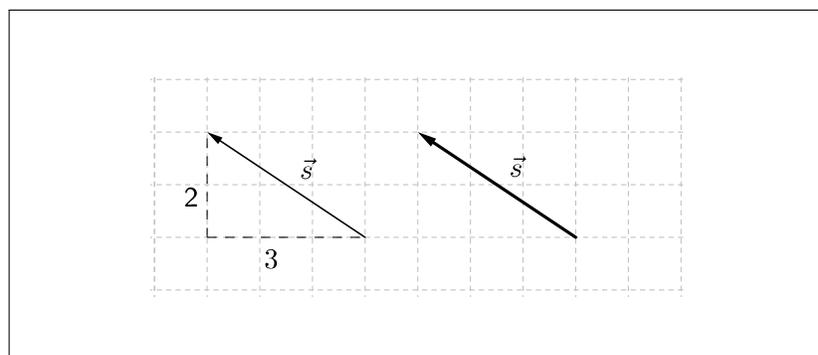


Figura 2.20: Triângulo Retângulo.

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo da figura (2.20), tem-se:

$$\|\vec{s}\|^2 = 2^2 + 3^2$$

$$\|\vec{s}\|^2 = 13$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{13}$$

2.6.4 Produto de um vetor por um número real

Multiplicando-se um vetor \vec{v} por um número k , não nulo, obtém-se como produto um vetor \vec{w} com as seguintes características:

- i) a direção do vetor produto \vec{w} será a mesma do vetor \vec{v} , qualquer que seja o valor de k , não nulo.
- ii) o sentido de \vec{w} será o mesmo de \vec{v} se k for um número positivo. Se k for negativo, \vec{w} e \vec{v} terão sentidos contrários.
- iii) o módulo de \vec{w} será igual ao produto do valor absoluto de k pelo módulo de \vec{v} :

$$\|\vec{w}\| = |k| \cdot \|\vec{v}\|$$

2.6.5 Subtração de Vetores

Para subtrair o vetor \vec{u} do vetor \vec{v} , achando o vetor diferença \vec{d} :

$$\vec{d} = \vec{v} - \vec{u}$$

basta adicionar ao vetor \vec{v} o oposto do vetor \vec{u} , isto é:

$$\vec{d} = \vec{v} + (-\vec{u})$$

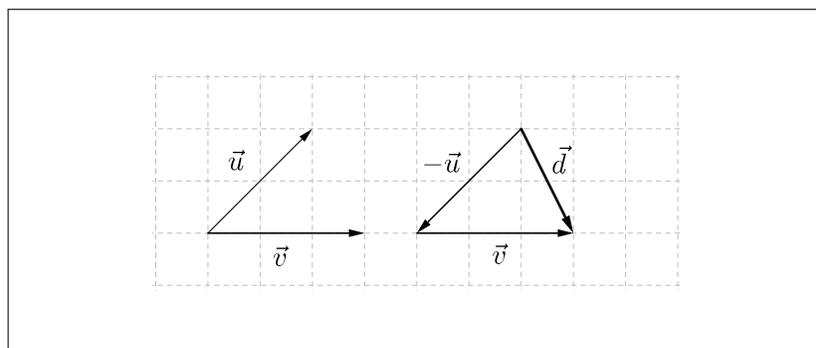


Figura 2.21: Representação do vetor diferença \vec{d} .

O vetor \vec{d} também pode ser obtido colocando-se os vetores \vec{v} e \vec{u} com origem comum. Neste caso, o vetor \vec{d} será representado por um segmento orientado com origem na extremidade de \vec{u} e extremidade coincidindo com a extremidade de \vec{v} . Observe na figura que se segue, $\vec{u} + \vec{d} = \vec{v}$, ou seja, $\vec{d} = \vec{v} - \vec{u}$.

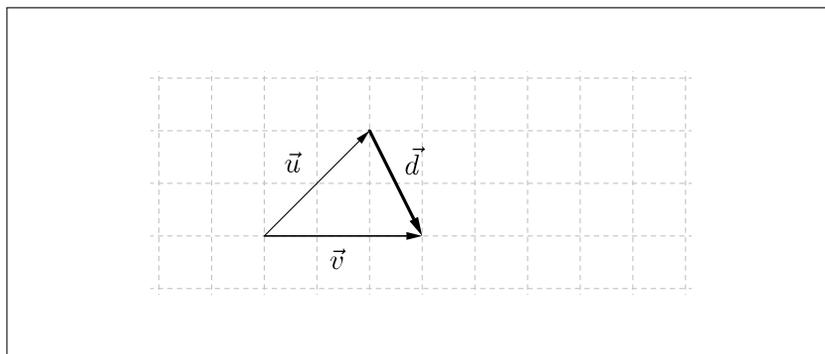


Figura 2.22: Representação do vetor diferença \vec{d} .

Exemplo 2.6.3. Dado o vetor \vec{a} representado na figura a seguir, obtenha os vetores:

- a) $\vec{x} = 2 \cdot \vec{a}$
- b) $\vec{y} = -3 \cdot \vec{a}$
- c) $\vec{z} = 0 \cdot \vec{a}$

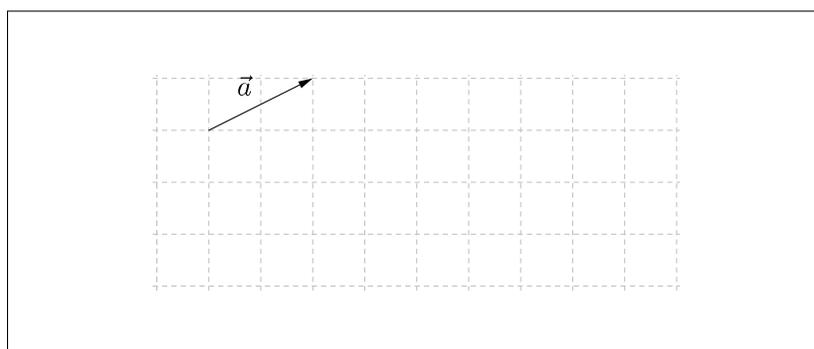


Figura 2.23: Representação gráfica do vetor \vec{a} .

Resolução:

- a) Para se obter o vetor $2 \cdot \vec{a}$, traça-se uma paralela ao vetor \vec{a} , pois $2 \cdot \vec{a}$ e \vec{a} têm a mesma direção. Em seguida, determina-se sobre tal paralela um segmento de comprimento duas vezes maior que o segmento que representa \vec{a} , orientando-o no mesmo sentido de \vec{a} .

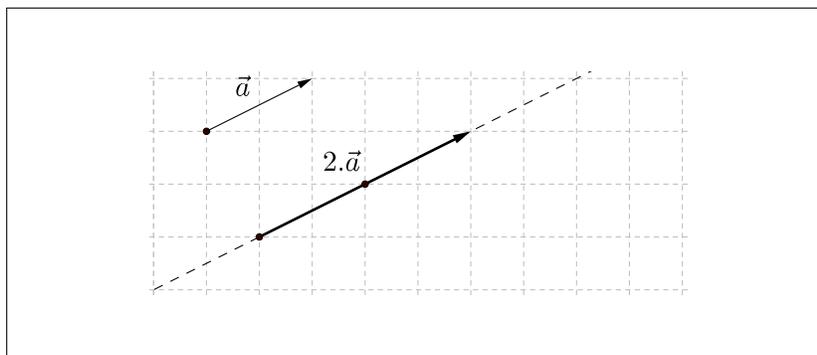


Figura 2.24: Representação gráfica do vetor $2 \cdot \vec{a}$.

b) Para se obter o vetor $-3 \cdot \vec{a}$, traça-se uma paralela ao vetor \vec{a} , pois $-3 \cdot \vec{a}$ e \vec{a} têm a mesma direção. Em seguida, determina-se sobre tal paralela um segmento de comprimento três vezes maior que o segmento que representa \vec{a} , orientando-o no sentido contrário a \vec{a} .

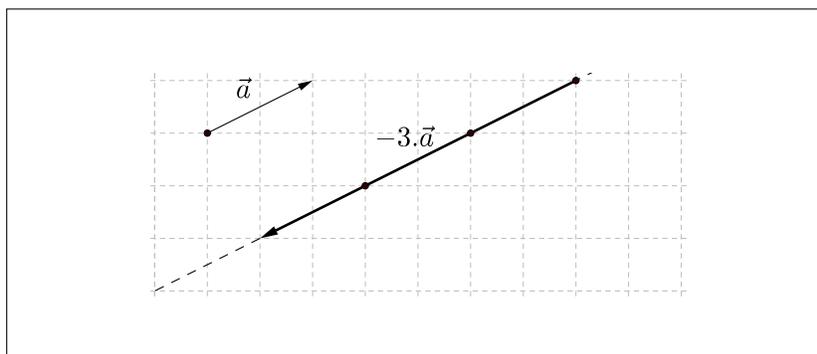


Figura 2.25: Representação gráfica do vetor $-3 \cdot \vec{a}$.

c) O vetor $0 \cdot \vec{a}$ é o vetor nulo: tem módulo nulo, direção e sentido indeterminados.

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

2.7 Plano Cartesiano

Um sistema de eixos ortogonais num plano Π (qualquer) é um par de eixos, eixo OX e eixo OY , com mesma unidade de medida, que se intersectam perpendicularmente na origem comum O . Fixados esses eixos OX e OY , o plano fica munido de um **sistema de coordenadas Cartesianas** OXY . Em outras palavras, temos um **plano Cartesiano**.

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano Π e os pares ordenados de números reais do conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

De fato, ao ponto $P \in \Pi$ fizemos corresponder o par ordenado (x, y) , onde x é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OX que passa por P e y é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OY que passa por P .

Reciprocamente, ao par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associamos o ponto P do plano Π dado pela intersecção da perpendicular ao eixo OX que passa pelo ponto deste eixo de coordenada x com a perpendicular ao eixo OY que passa pelo ponto deste eixo de coordenada y .

Proposição 2.7.1. São dados um real $t \in (0, 1)$ e, no plano Cartesiano, os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Se $P = (x_P, y_P)$ é o ponto sobre o segmento AB tal que $\overline{AP} = t \cdot \overline{AB}$, então

$$x_P = (1 - t) \cdot x_A + t \cdot x_B \quad \text{e} \quad y_P = (1 - t) \cdot y_A + t \cdot y_B$$

Demonstração:

Caso I : a reta AB não é paralela a OX e nem a OY .

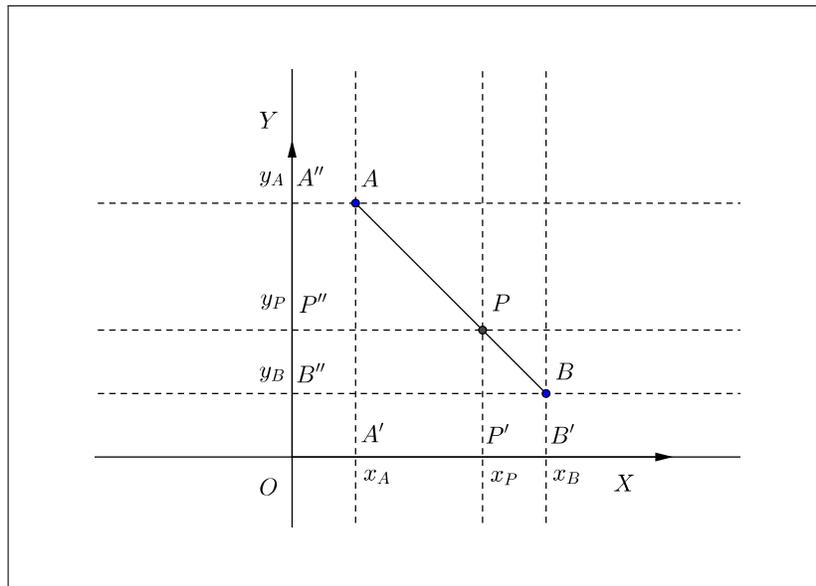


Figura 2.26: Representação do Caso I.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $x_A < x_B$. Considere, conforme figura (2.26), A' , P' e B' as projeções ortogonais respectivamente de A , P e B sobre o eixo das abscissas. Aplicando o *teorema de Thales* às transversais do feixe de retas paralelas AA' , PP' e BB' , temos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'B'}} = t$$

Considerando que $A' = (x_A, 0)$, $P' = (x_P, 0)$ e $B' = (x_B, 0)$

Segue,

$$\overline{A'P'} = x_P - x_A$$

$$\overline{A'B'} = x_B - x_A$$

Assim,

$$\frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'B'}} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} = t$$

Portanto:

$$x_P = (1 - t) \cdot x_A + t \cdot x_B$$

Por analogia, vamos aplicar o *teorema de Thales* às transversais do feixe de retas paralelas AA'' , PP'' e BB'' . Lembrando que, conforme figura (2.26), A'' , P'' e B'' são as projeções ortogonais respectivamente de A , P e B sobre o eixo das ordenadas.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A''P''}}{\overline{A''B''}} = t$$

Considerando que $A'' = (0, y_A)$, $P'' = (0, y_P)$ e $B'' = (0, y_B)$

Segue,

$$\overline{A''P''} = y_P - y_A$$

$$\overline{A''B''} = y_B - y_A$$

Assim,

$$\frac{\overline{A''P''}}{\overline{A''B''}} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_A} = t$$

Portanto:

$$y_P = (1 - t) \cdot y_A + t \cdot y_B$$

Caso II : a reta AB é paralela ao eixo OX .

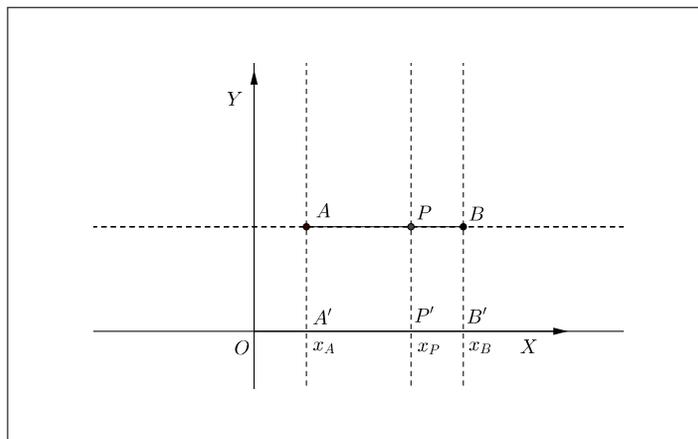


Figura 2.27: Representação do Caso II.

Neste caso só existe o primeiro feixe de retas paralelas AA' , PP' e BB' e então:

$$\frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'B'}} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} = t$$

Portanto:

$$x_P = (1 - t) \cdot x_A + t \cdot x_B$$

A coordenada $y_P = y_A = y_B$, pois consideramos - neste caso - a reta AB paralela ao eixo OX . Note que a fórmula da proposição (2.7.1) apresenta o mesmo resultado, basta fazer $y_A = y_B$. Assim, temos:

$$y_P = (1 - t) \cdot y_A + t \cdot y_B = (1 - t) \cdot y_B + t \cdot y_B = y_B$$

Logo,

$$y_P = y_A = y_B$$

Caso III : a reta AB é paralela ao eixo OY .

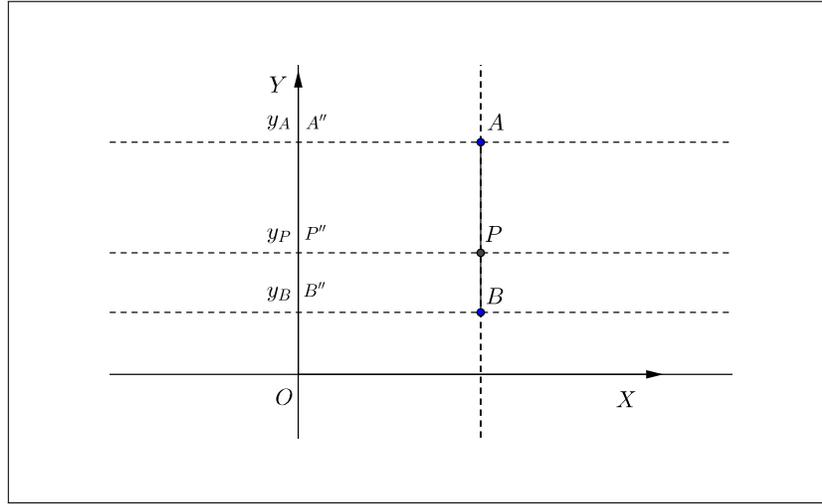


Figura 2.28: Representação do Caso III.

Neste caso só existe o feixe de retas paralelas AA'' , PP'' e BB'' e então:

$$\frac{\overline{A''P''}}{\overline{A''B''}} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_A} = t$$

Portanto:

$$y_P = (1 - t) \cdot y_A + t \cdot y_B$$

De modo semelhante ao caso II,

A coordenada $x_P = x_A = x_B$, pois consideramos - neste caso - a reta AB paralela ao eixo OY . Note que a fórmula da proposição (2.7.1) apresenta o mesmo resultado, basta fazer $x_A = x_B$. Assim, temos:

$$x_P = (1 - t) \cdot x_A + t \cdot x_B = (1 - t) \cdot x_B + t \cdot x_B = x_B$$

Logo:

$$x_P = x_A = x_B$$

Corolário 2.7.2. Dados os pontos A e B no plano Cartesiano, as coordenadas do ponto médio M do segmento AB são as médias aritméticas das coordenadas respectivas de A e B . Mais precisamente, se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, então $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

Demonstração:

Sendo M o ponto médio de AB , temos $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$. Portanto, basta fazer $t = \frac{1}{2}$ na proposição (2.7.1).

Observação 2.7.3. Nas notações da proposição (2.7.1), é sugestivo escrever

$$P = (1 - t) \cdot A + B$$

como abreviação das duas relações. Em particular, vamos abreviar as coordenadas do ponto médio M do segmento AB escrevendo $M = \frac{A + B}{2}$

2.8 Coordenadas no plano e segmentos orientados

Consideramos na seção anterior um par ordenado de números reais, (x, y) , representando um ponto P no plano, isto é, $P = (x, y)$. Deste modo, para cada ponto do plano associamos um par ordenado e, a cada par ordenado (x, y) , um ponto no plano.

A partir de agora, daremos aos pares ordenados outra interpretação: vamos identificá-los com um segmento orientado (seta).

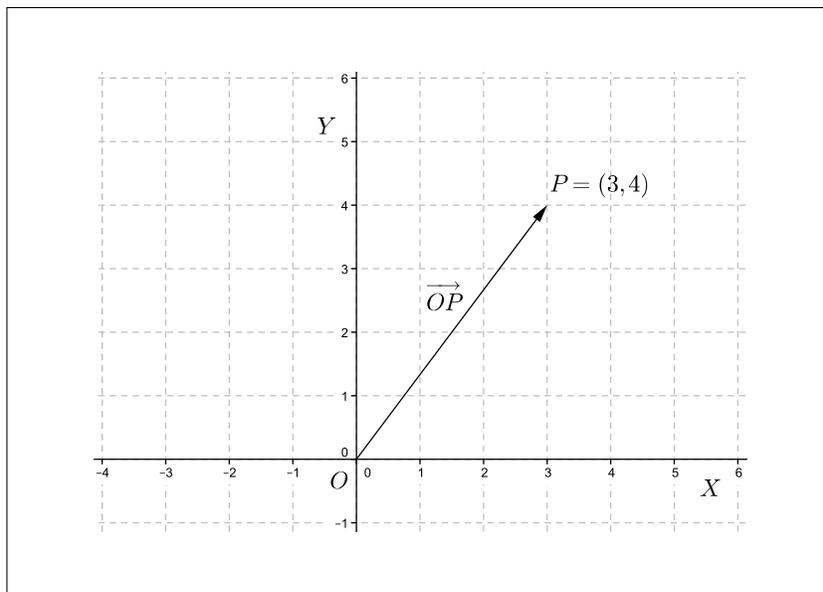


Figura 2.29: Representação de pares ordenados por setas.

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, além do ponto podemos também fazer corresponder ao par (x, y) uma seta, como mostra a Figura (2.29). Assim, um par ordenado $(x, y) \neq (0, 0)$ pode ser representado graficamente por um ponto ou por uma seta. Quando utilizamos seta para representar (x, y) , podemos associar a este par ordenado direção, sentido e módulo. A direção e o sentido do par

(x, y) são, respectivamente, a direção e o sentido da seta que o representa. O módulo do par (x, y) é o número

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

que é o comprimento da seta.

Como estudado, um objeto para o qual é possível associar os conceitos de direção, sentido e módulo é chamado um vetor. Assim, um par ordenado é um vetor. Por exemplo,

$$\vec{v} = (3, 4)$$

é um vetor. A direção deste vetor é a direção da seta da Figura (2.29), ou seja, é a direção da reta definida pelos pontos $O = (0, 0)$ e $P = (3, 4)$. O sentido de \vec{v} é o de O para P e o módulo de \vec{v} é o comprimento da seta \overrightarrow{OP} , ou seja:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Inversamente, uma seta no plano, como na Figura (2.29), pode ser perfeitamente caracterizada por um par ordenado. O ponto P da Figura (2.29) também pode ser identificado por uma seta de origem O até ele, seta \overrightarrow{OP} . Assim, identificamos **Ponto, Par Ordenado e Vetor** como uma coisa só.

$$P = (x, y) = \vec{v} = \overrightarrow{OP}$$

Observação 2.8.1. *A explicação que apresentamos, embora intuitiva e de forte apelo didático, precisa ser melhor fundamentada. O assunto será retomado na seção 2.12.*

2.9 Equipolência de segmentos orientados

Vamos agora construir outra seta \overrightarrow{AB} com a seguinte propriedade, ela é paralela à anterior, tem mesmo sentido e mesmo tamanho.

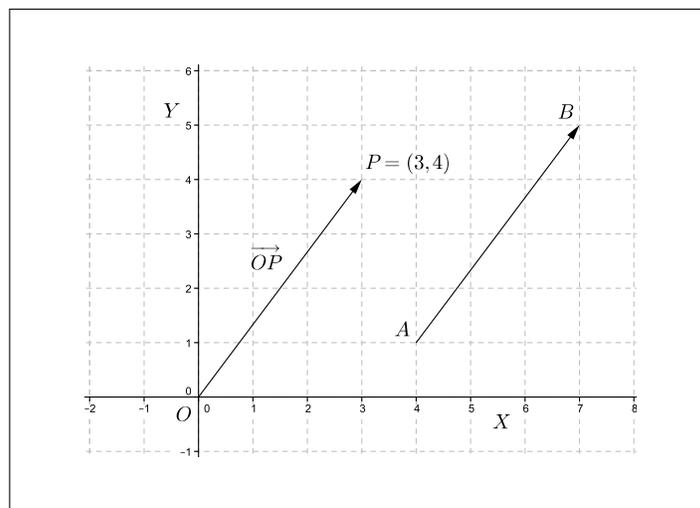


Figura 2.30: Segmentos equipolentes no Plano Cartesiano.

Dois segmentos orientados são definidos como equipolentes quando tiverem essa mesma propriedade. Se \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{AB} são segmentos orientados equipolentes, então representam o mesmo vetor. Observe com atenção a figura, note que desenhamos duas setas que têm a mesma direção, o mesmo sentido e mesmo módulo.

Definição 2.9.1. Dizemos que os segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{OP} são equipolentes, e escrevemos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, quando satisfazem às seguintes três propriedades:

- i) têm o mesmo comprimento,
- ii) são paralelos ou colineares,
- iii) têm o mesmo sentido.

2.10 Módulo de um vetor

Definição 2.10.1. A norma ou módulo do vetor \vec{v} é o número $\|\vec{v}\|$ dado pelo comprimento de um segmento orientado representante de \vec{v} .

Observação 2.10.2. a) A norma ou módulo de um vetor não depende da escolha do segmento orientado representante. Assim, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $AB = CD$ e portanto, $d(A, B) = d(C, D) = \|\vec{v}\|$.

b) Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

c) Se $P = (x, y)$ é o ponto tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, então

$$\|\vec{v}\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

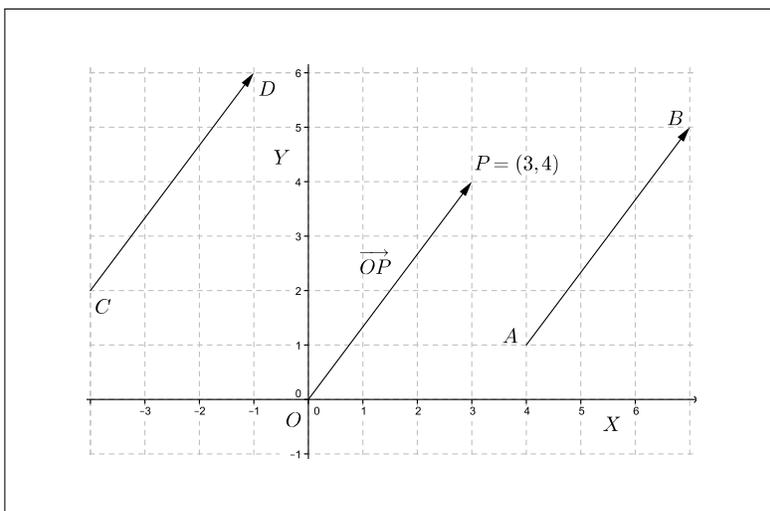


Figura 2.31: Segmentos equipolentes no Plano Cartesiano.

Neste caso,

$$\|\vec{v}\|^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\|\vec{v}\| = 5$$

2.11 Vetor unitário

Um vetor de módulo 1 é denominado vetor unitário. Esses vetores são úteis para especificar uma direção quando o comprimento não for relevante para o problema em consideração. Podemos obter um vetor unitário numa direção desejada escolhendo qualquer vetor não nulo \vec{v} nessa direção e multiplicando pelo recíproco de seu comprimento. Por exemplo, se \vec{v} for um vetor de comprimento 2 em \mathbb{R}^2 , então $\frac{1}{2} \cdot \vec{v}$ é um vetor unitário de mesma direção e sentido de \vec{v} . Mas geralmente, se \vec{v} for um vetor não nulo qualquer em \mathbb{R}^2 , então:

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

2.12 Vetores no Plano Cartesiano

Definição 2.12.1. Chama-se *vetor* determinado por um segmento orientado \overrightarrow{AB} , o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a \overrightarrow{AB} .

Um mesmo vetor \overrightarrow{AB} é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, que são chamados representantes desse vetor, e que são todos equipolentes entre si. Assim, vetor é um ente abstrato que tem representação em qualquer lugar do plano.

Retomando uma questão em aberto da seção 2.8, conforme observação (2.8.1):

Naquela seção nós identificamos **Ponto, Par Ordenado e Vetor** como uma coisa só, isto é:

$$P = (x, y) = \vec{v} = \overrightarrow{OP}$$

A explicação que apresentamos, embora intuitiva e de forte apelo didático, precisava de melhor fundamento.

De acordo com MUNIZ NETO[10], este fundamento encontra-se no seguinte **Lema**:

Lema 2.12.1. Se $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ e $D = (x_D, y_D)$ em um dado sistema Cartesiano, então:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow x_B - x_A = x_D - x_C \quad \text{e} \quad y_B - y_A = y_D - y_C$$

Demonstração:

Sabemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se e só se o quadrilátero $ABDC$, com os vértices percorridos nessa ordem, for um paralelogramo. Mas sabemos que tal ocorre se as diagonais AD e BC têm um mesmo ponto médio M . Por outro lado, sabemos do Corolário (2.7.2) que isso ocorre se e só se:

$$\frac{A + D}{2} = \frac{B + C}{2}, \text{ logo}$$

$$x_A + x_D = x_B + x_C \quad \text{e} \quad y_A + y_D = y_B + y_C$$

Portanto:

$$x_B - x_A = x_D - x_C \quad \text{e} \quad y_B - y_A = y_D - y_C$$

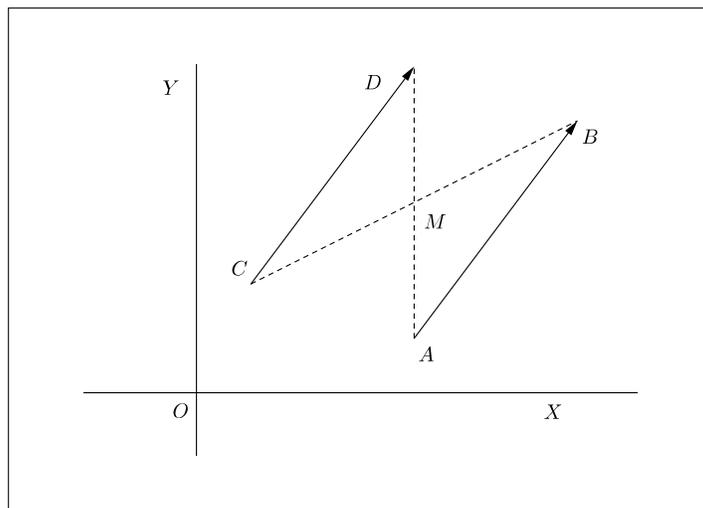


Figura 2.32: Igualdade de vetores em coordenadas.

O Lema assegura em particular que, fixado um sistema Cartesiano OXY , todo vetor \vec{v} do mesmo admite um único representante da forma \overrightarrow{OP} . De fato, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, com $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, então o Lema garante que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, com $P = (x_B - x_A, y_B - y_A)$; de outro modo,

$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Por outro lado, se $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2}$, para certos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, então novamente o Lema garante que

$$(x_1 - 0, y_1 - 0) = (x_2 - 0, y_2 - 0), \text{ isto é, } P_1 = P_2.$$

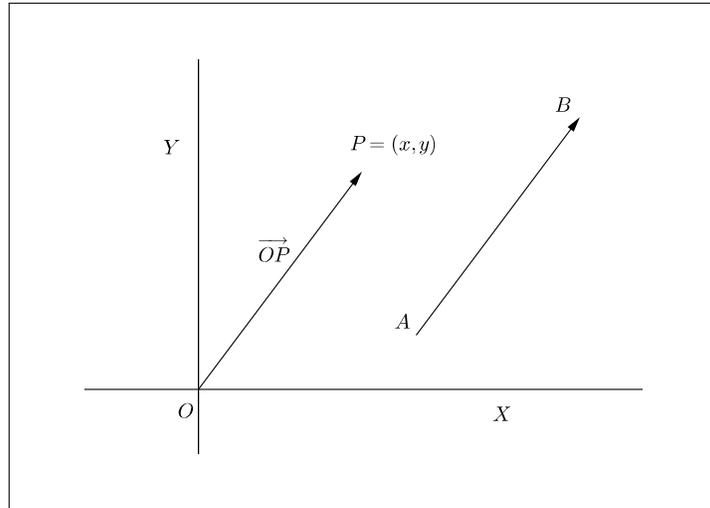


Figura 2.33: Representante canônico OP , do vetor AB .

Portanto, ao utilizarmos vetores há uma enorme vantagem na escolha de um sistema Cartesiano no plano: uma vez fixado um tal sistema, todo vetor passa a admitir um representante canônico, cuja extremidade inicial coincide com a origem do sistema Cartesiano em questão. Nesse sentido, se $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, com $P = (x, y)$, convencionamos denotar

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = P = (x, y)$$

Observação 2.12.2. Pelo exposto, podemos adotar - sem receio - a incrível notação do matemático **Hermann Grassmann**. Isto é, vamos substituir o vetor \overrightarrow{OA} somente pela letra A e o vetor \overrightarrow{OB} pela letra B .

Considerando a Regra do Polígono, para soma de vetores:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

Essa relação fica mais simples, ao adotarmos a notação de Grassmann,

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Portanto, as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} são determinadas por simples diferença entre as extremidades do segmento orientado, isto é, $B - A$.

Observação 2.12.3. Em 1832, **Giusto Bellavitis** publicou um trabalho onde é apresentado o conceito de equipolência entre segmentos que é, basicamente, a noção de vetor que conhecemos e que foi formalizada em 1844 por **Hermann Grassmann** no seu *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (Teoria de Extensão Liner, um novo ramo da Matemática).

Como corolário da discussão acima, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.12.4. Se $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ e $k \in \mathbb{R}$ (em um sistema cartesiano), então:

- i) $\vec{u} + \vec{v} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- ii) $\vec{u} - \vec{v} = (x, y) - (x', y') = (x - x', y - y')$.
- iii) $k \cdot \vec{u} = k \cdot (x, y) = (k \cdot x, k \cdot y)$.

Demonstração:

- i) Denote por O a origem do sistema Cartesiano em questão e sejam $U = (x, y)$, $V = (x', y')$. Sendo $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OS}$ com $S = (x_S, y_S)$ e considerando a Regra do Polígono, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{US} &= \overrightarrow{OS} \\ \vec{u} + \overrightarrow{US} &= \vec{u} + \vec{v} \\ \overrightarrow{US} &= \vec{v} \\ \overrightarrow{US} &= \overrightarrow{OV} \end{aligned}$$

e, daí, o Lema (2.12.1) garante que

$$\begin{aligned} (x_S - x, y_S - y) &= (x' - 0, y' - 0) \\ (x_S - x, y_S - y) &= (x', y') \\ x_S - x &= x' \quad \text{e} \quad y_S - y = y' \\ x_S &= x + x' \quad \text{e} \quad y_S = y + y' \end{aligned}$$

Assim temos: $S = (x + x', y + y')$ e $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OS} = (x + x', y + y')$.

- ii) A prova deste item é análoga à do item (i).
- iii) Finalmente, esta relação decorre da aplicação reiterada de i).

A proposição (2.12.4) tem uma consequência interessante e útil, que indicamos a seguir. Fixado no plano um sistema Cartesiano denotamos

$$\vec{i} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{j} = (0, 1)$$

e dizemos que os vetores \vec{i} e \vec{j} formam a base canônica do sistema Cartesiano em questão. Fixado então um vetor $\vec{v} = (x, y)$, segue da proposição que:

$$\vec{v} = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Em resumo, todo vetor pode ser escrito como uma soma de múltiplos dos vetores da base canônica, sendo os coeficientes as coordenadas da extremidade do representante canônico do vetor. Sendo $\vec{v} = (x, y)$, a fórmula

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

é denominada a **fórmula de expansão ortonormal** de \vec{v} na base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

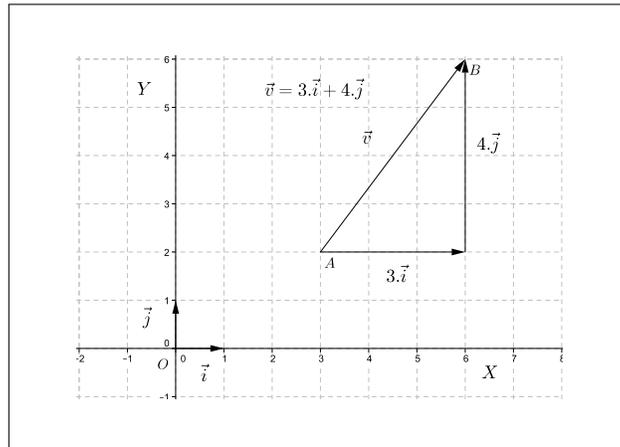


Figura 2.34: Decomposição do vetor \vec{v} na base ortonormal.

2.13 Operações com vetores: Método Algébrico

Como destacado na seção (1.3), podemos realizar operações com os vetores sob o ponto de vista geométrico ou algébrico. Vamos agora trabalhar algebricamente com os vetores, lembrando a necessidade de se respeitar as regras operatórias da proposição (2.12.4), ou seja:

Adição:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

Subtração:

$$(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y')$$

Multiplicação de um vetor por um número $k \in \mathbb{R}$:

$$k \cdot (x, y) = (k \cdot x, k \cdot y)$$

Exemplo 2.13.1 (DELGADO[4],p.49). Dados os pontos $A = (1, 1)$, $B = (3, 4)$ e $C = (4, 2)$, determine os possíveis pontos D tais que A, B, C e D sejam os vértices de um paralelogramo.

Resolução: Este é um problema clássico de geometria analítica e a palavra *vetores* não aparece em seu enunciado. Mesmo assim, podemos utilizar a ferramenta *vetores*, dado que conhecemos as propriedades operatórias. Antes segue um lembrete útil:

Um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos. Dado o quadrilátero $ABCD$, usando congruência de triângulos, prova-se que as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) *O quadrilátero é um paralelogramo;*
- b) *Seus lados opostos são congruentes;*
- c) *Seus ângulos opostos são congruentes;*
- d) *Dois dos seus lados opostos são congruentes e paralelos;*
- e) *Suas diagonais se intersectam no ponto médio de ambas.*

Fazendo um simples esboço, vide figura, é possível constatar a existência de três possibilidades para o ponto D , a saber: D , D' e D'' . Este problema admite a construção de três paralelogramos: $ABDC$, $ABCD'$ e $ACBD''$.

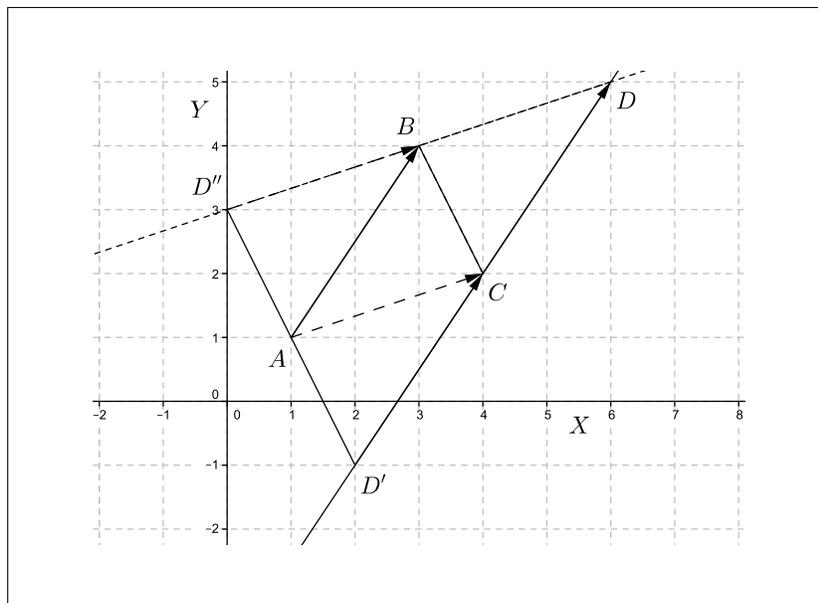


Figura 2.35: Os três paralelogramos possíveis.

Para o *primeiro* paralelogramo $ABDC$, duas setas podem ser construídas, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} . São setas paralelas, tem mesmo tamanho e mesmo sentido. Assim, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são representações do mesmo vetor. As coordenadas podem ser obtidas pela diferença entre as extremidades.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

$$B - A = D - C$$

$$D = B + C - A$$

$$D = (3, 4) + (4, 2) - (1, 1)$$

$$D = (6, 5)$$

Para o *segundo* paralelogramo $ABCD'$, duas setas podem ser construídas, \overrightarrow{AB} e $\overrightarrow{D'C}$. São setas paralelas, tem mesmo tamanho e mesmo sentido. Assim, \overrightarrow{AB} e $\overrightarrow{D'C}$ são representações do mesmo vetor. Do mesmo modo, as coordenadas podem ser obtidas pela diferença entre as extremidades.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C}$$

$$B - A = C - D'$$

$$D' = A + C - B$$

$$D' = (1, 1) + (4, 2) - (3, 4)$$

$$D' = (2, -1)$$

Para o *terceiro* paralelogramo $ACBD''$, duas setas podem ser construídas, \overrightarrow{AC} e $\overrightarrow{D''B}$. São setas paralelas, tem mesmo tamanho e mesmo sentido. Assim, \overrightarrow{AC} e $\overrightarrow{D''B}$ são representações do mesmo vetor. Do mesmo modo, as coordenadas podem ser obtidas pela diferença entre as extremidades.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{D''B}$$

$$C - A = B - D''$$

$$D'' = A + B - C$$

$$D'' = (1, 1) + (3, 4) - (4, 2)$$

$$D'' = (0, 3)$$

Por utilizar vetores, foi possível encontrar as três soluções de maneira muito rápida.

Exemplo 2.13.2 (DELGADO[4],p.29). Demonstre que em qualquer quadrilátero os pontos médios dos lados são os vértices de um paralelogramo.

Resolução:

Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer e sejam X , Y , Z e W os pontos médios dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente.

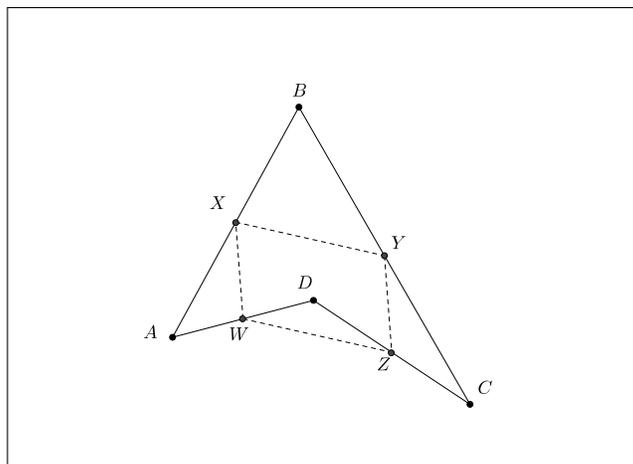


Figura 2.36: Um quadrilátero qualquer.

Sabendo que $XYZW$ é um paralelogramo, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{WZ}$$

Da Figura (2.36), seguem as relações:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{XB} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}; \\ \overrightarrow{BY} &= \overrightarrow{YC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}; \\ \overrightarrow{DZ} &= \overrightarrow{ZC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DC}; \\ \overrightarrow{AW} &= \overrightarrow{WD} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BY} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

De modo análogo,

$$\overrightarrow{WZ} = \overrightarrow{WD} + \overrightarrow{DZ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{WZ}$$

2.14 Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos fica perfeitamente determinada após definição do módulo de um vetor. Assim, a distância entre dois pontos quaisquer do plano, $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, denotada $d(A, B)$, é o módulo do vetor \overrightarrow{AB} .

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

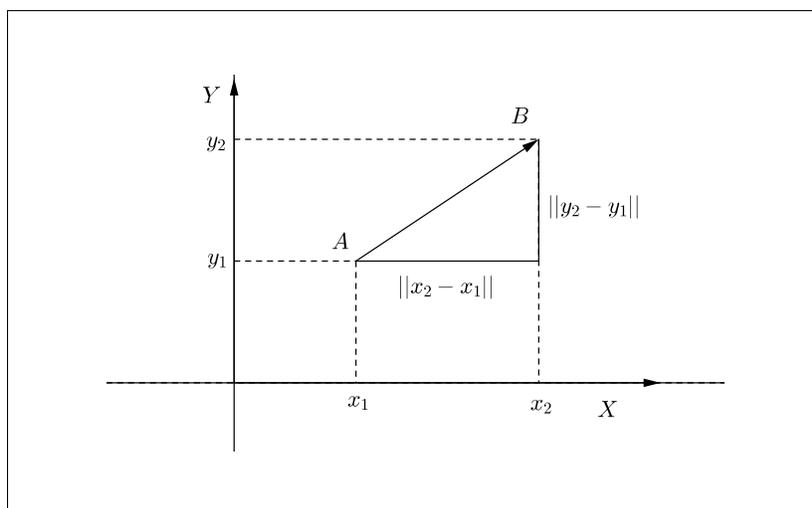


Figura 2.37: Distância entre dois pontos.

$$d(A, B) = \sqrt{\|x_2 - x_1\|^2 + \|y_2 - y_1\|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2.15 Perpendicularismo

Para estudar o perpendicularismo entre vetores não é necessário tomar um vetor em posição geral. Como vimos, os *vetores* são entes abstratos, podemos encontrar um representante posicionado em qualquer lugar do plano. Basta desenhar duas cópias videdignas, isto é, dois segmentos orientados equipolentes aos vetores dados com origem em O .

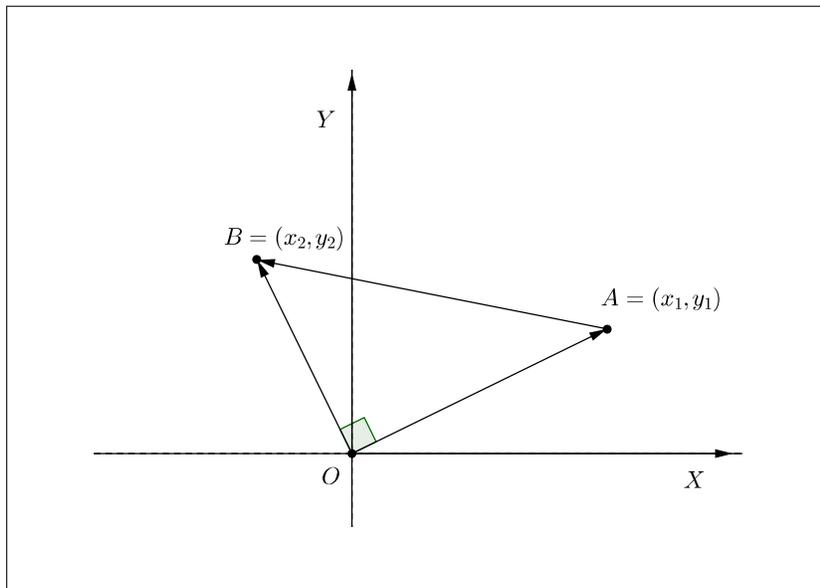


Figura 2.38: Vetores perpendiculares, \vec{OA} e \vec{OB} .

Pergunta: Qual a condição necessária e suficiente para que os vetores \vec{OA} e \vec{OB} sejam perpendiculares?

Resposta: Aplicando a relação de Pitágoras no triângulo OAB ,

$$\|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2 \cdot y_1 \cdot y_2 + y_1^2$$

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

Essa relação representa a condição de perpendicularismo para os vetores dados. O produto das abscissas mais o produto das ordenadas deve dar resultado zero.

Exemplo 2.15.1. Dados dois vetores $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (-4, 3)$, verificar se são perpendiculares.

Resolução: São perpendiculares, pois as coordenadas satisfazem a relação obtida. Isto é:

$$3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = -12 + 12 = 0$$

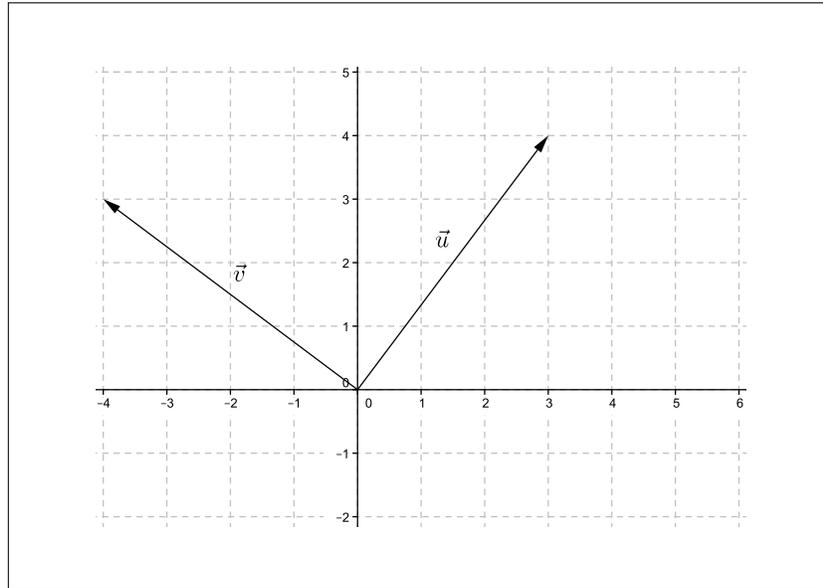


Figura 2.39: Vetores perpendiculares, \vec{u} e \vec{v} .

2.16 Produto escalar

Nosso propósito nessa seção é definir o *Produto Escalar* entre vetores. Antes porém, vamos buscar na - *física* - as motivações para uma definição oportuna e útil. De acordo com BARRETO[2], o que se segue:

No século XVIII, com o aparecimento da máquina a vapor - de James Watt - uma mudança importante vai alterar o olhar científico, a saber: o carvão depositado na máquina gera calor para aquecer a água, cujo vapor produz movimento. Essa *mágica* movimentou a ciência da época, pois havia uma relação de conversão entre um fenômeno (queima de carvão) e outro (movimento). Algo estava se convertendo, se transformando, a *energia*. As experiências indicavam que *energia* é algo que se convertia de uma forma em outra, mas que conservava sua quantidade nessa conversão. Entre 1842 e 1847, a hipótese da conservação da *energia* foi anunciada publicamente por quatro cientistas da Europa: Mayer, Colding, Helmholtz e Joule. Assim, Joule e seus contemporâneos foram estimulados a pensar num novo conceito que contemplasse as transformações tecnológicas, para as quais a linguagem das leis de Newton não estava adequada. Newton apresentou seus enunciados em um mundo movido pela tração animal, pelo vento ou pelo aproveitamento direto dos

deslocamentos de água; agora, era preciso reinterpretar suas leis. Os teoremas da *energia cinética* e do *impulso* são, em última análise, maneiras diferentes de expressar o essencial da segunda lei de Newton. Em vez de afirmar que a força resultante produz uma aceleração, o teorema da energia cinética - apresentado a seguir - diz que o trabalho da força resultante produz variação na energia cinética do corpo.

Teorema da energia Cinética

Imagine um corpo num plano liso (praticamente nulo qualquer atrito) e horizontal submetido à ação de uma força resultante constante, conforme a Figura 2.40. Sabemos, de acordo com a segunda lei de Newton, que o corpo terá uma aceleração na mesma direção e no mesmo sentido dessa força.

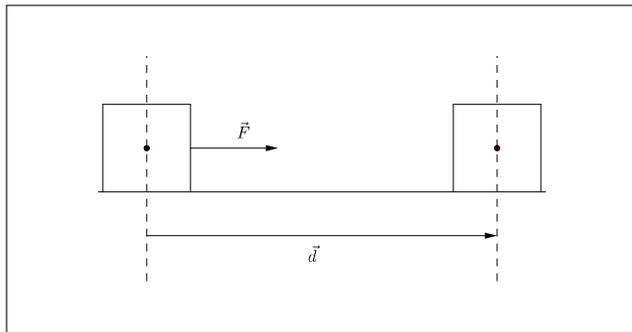


Figura 2.40: Bloco submetido a uma força resultante e constante \vec{F} .

Partindo da segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Considerando que o vetor força \vec{F} atua no sentido do vetor deslocamento \vec{d} , fica mais simples trabalhar com os módulos das grandezas vetoriais. Multiplicando os membros da igualdade acima pelo deslocamento \vec{d} , na direção da força \vec{F} , temos:

$$\|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| = m \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{d}\|$$

O produto $\|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\|$ é definido como o trabalho (\mathcal{W}) da força constante que age na direção e no sentido do deslocamento. *Trabalho de uma força* é uma grandeza escalar medida em *Joule*.

Como $\mathcal{W} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\|$, temos que:

$$\mathcal{W} = m \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{d}\|$$

Por ser um MRUV - *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado* - a equação de Torricelli pode ser aplicada:

$$||\vec{v}||^2 = ||\vec{v}_0||^2 + 2 \cdot ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{d}||$$

$$||\vec{v}||^2 - ||\vec{v}_0||^2 = 2 \cdot ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{d}||$$

$$2 \cdot ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{d}|| = ||\vec{v}||^2 - ||\vec{v}_0||^2$$

$$||\vec{d}|| = \frac{||\vec{v}||^2 - ||\vec{v}_0||^2}{2 \cdot ||\vec{a}||}$$

Se,

$$\mathcal{W} = m \cdot ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{d}||$$

então, após a substituição de $||\vec{d}||$, temos:

$$\mathcal{W} = m \cdot ||\vec{a}|| \cdot \frac{||\vec{v}||^2 - ||\vec{v}_0||^2}{2 \cdot ||\vec{a}||}$$

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} m ||\vec{v}||^2 - \frac{1}{2} m ||\vec{v}_0||^2$$

De um lado da igualdade, o trabalho de uma força; do outro, a variação da energia cinética do bloco. Assim, temos:

$$Ec = \frac{1}{2} m ||\vec{v}||^2 \Rightarrow \text{energia cinética do corpo no fim do movimento.}$$

$$Ec_0 = \frac{1}{2} m ||\vec{v}_0||^2 \Rightarrow \text{energia cinética do corpo no início do movimento.}$$

Logo, segue o *Teorema da energia cinética*:

$$\mathcal{W} = Ec - Ec_0$$

É oportuno lembrar que na segunda lei de Newton, \vec{F} é a força resultante, não equilibrada. Portanto, o trabalho \mathcal{W} ao qual nos referimos é o trabalho da força resultante. O trabalho da força resultante corresponde à soma dos trabalhos de todas as forças que agem no corpo. Por isso, podemos escrever:

$$\Sigma \mathcal{W} = \mathcal{W}_{\mathcal{R}} = \Delta Ec$$

Observação 2.16.1. Embora tenhamos demonstrado o Teorema da Energia Cinética com base em uma situação simples e particular, sua aplicação é geral, estendendo-se ao cálculo do trabalho total das forças constantes ou variáveis, conservativas ou não.

Teorema 2.16.2 (Teorema da Energia Cinética). O trabalho da força resultante sobre um corpo, corresponde à variação da sua energia cinética.

$$\Sigma W = W_R = \Delta Ec$$

Exemplo 2.16.3. Considere um corpo de um quilograma inicialmente em repouso numa superfície plana, horizontal e bem polida; de modo que seja praticamente nulo qualquer atrito. Uma força horizontal de módulo 1,0 N, passa a agir sobre o corpo e o coloca em movimento. Inicialmente em repouso, o corpo passará a se mover aceleradamente no sentido da força e terá, após o percurso de um metro, certa velocidade. A segunda lei de Newton permite-nos calcular a aceleração do corpo:

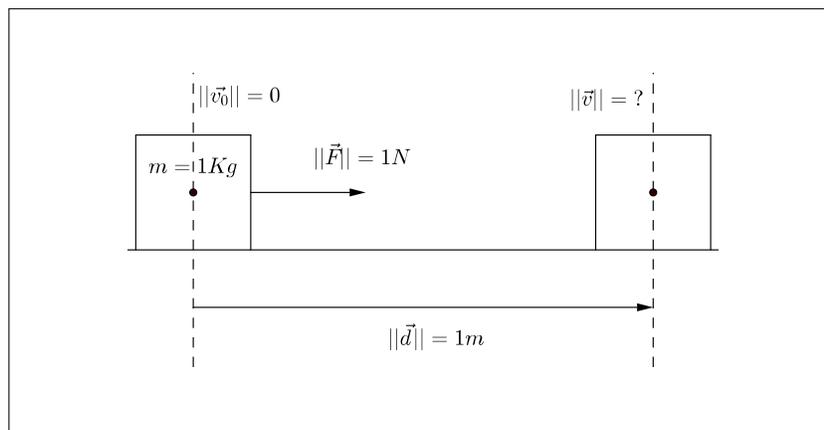


Figura 2.41: Bloco submetido a uma força resultante horizontal de módulo 1,0N.

Inicialmente em repouso, o corpo passará a se mover aceleradamente no sentido da força e terá, após o percurso de um metro, certa velocidade. A segunda lei de Newton permite-nos calcular a aceleração do corpo:

$$\|\vec{F}\| = m \cdot \|\vec{a}\|$$

$$1 = 1 \cdot \|\vec{a}\|$$

$$\|\vec{a}\| = 1 \text{ m/s}^2$$

Para determinar a velocidade do corpo ao fim de um metro de percurso, agora que temos a aceleração, podemos utilizar a equação de Torricelli:

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}_0\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{d}\|$$

$$\|\vec{v}_0\| = 0$$

$$\|\vec{a}\| = 1 \text{ m/s}^2$$

$$\|\vec{d}\| = 1 \text{ m}$$

$$\|\vec{v}\|^2 = 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

Podemos dizer que o bloco adquiriu um tipo de energia associada ao seu movimento, ou seja, o corpo adquiriu energia cinética, que pode se calculada pela expressão:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \|\vec{v}\|^2$$

Nesse caso,

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \text{ Joule}$$

Portanto, um Joule é a energia cinética adquirida por um corpo que recebe a ação de uma força de um Newton num percurso de um metro. Pode-se dizer também que a força realizou um trabalho de um Joule, ou seja, que um Joule é o trabalho realizado por uma força de um Newton, num deslocamento de um metro (na mesma direção da força).

$$\mathcal{W} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\|$$

$$\mathcal{W} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ Joule}$$

Energia cinética adquirida pelo corpo.

Pensamos até aqui no trabalho de uma força constante e na mesma direção do deslocamento. Quando a força e o deslocamento têm direções diferentes, o trabalho é calculado pelo produto entre as intensidades do vetor deslocamento e da projeção da força na direção do deslocamento. Em outros termos:

$$\mathcal{W} = \|\vec{F}\| \cdot \cos\theta \cdot \|\vec{d}\|$$

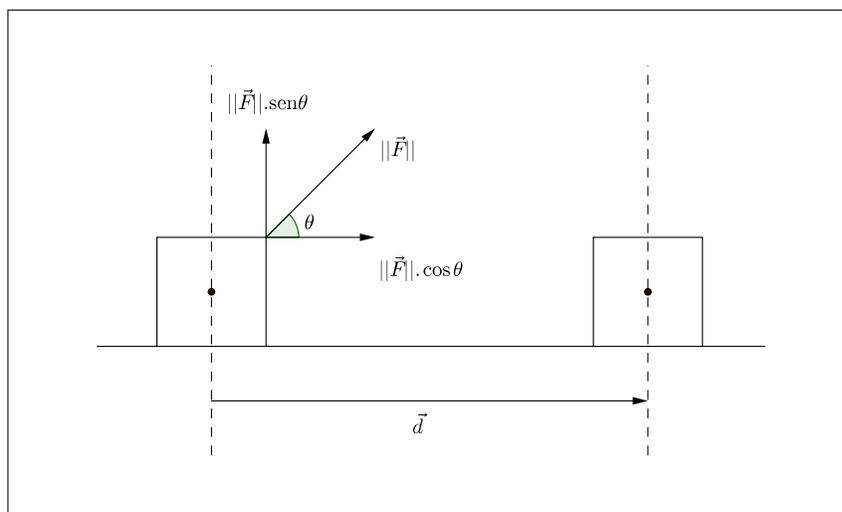


Figura 2.42: Bloco submetido a uma força \vec{F} , a qual forma um ângulo θ com relação ao deslocamento \vec{d} .

Definição 2.16.4. O produto escalar de dois vetores \vec{u} e \vec{v} do plano, não nulos, é o número real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, calculado pela expressão a seguir:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

Onde: θ é o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , sendo $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$ os respectivos módulos.

Com a definição apresentada, o trabalho realizado por uma força \vec{F} num deslocamento \vec{d} pode ser enunciado de forma compacta, a saber:

$$\mathcal{W} = \langle \vec{F}, \vec{d} \rangle = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos\theta$$

Exemplo 2.16.5. Um carrinho é puxado uma distância de 100 m ao longo de um caminho horizontal por uma força \vec{F} constante e de módulo 70 N. A alça do carrinho é mantida a um ângulo de 35° em relação a horizontal. Encontre o trabalho feito pela força \vec{F} .

Resolução:

Se \vec{F} e \vec{d} são os vetores força e deslocamento, então o trabalho realizado \mathcal{W} é:

$$\mathcal{W} = \langle \vec{F}, \vec{d} \rangle = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos 35^\circ$$

$$\mathcal{W} = (70) \cdot (100) \cdot \cos 35^\circ$$

$$\mathcal{W} \cong 5734 \text{ Joules.}$$

2.17 Ângulo entre vetores

Problema 2.17.1. Dados dois vetores quaisquer, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} , como encontrar o ângulo formado entre eles?

Resolução:

Primeiro passo: Encontrar os representantes canônicos de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} , respectivamente \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} . Em outras palavras, encontrar os segmentos equipolentes respectivamente a \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} , com suas origens posicionadas na origem do sistema de coordenadas $O = (0, 0)$.

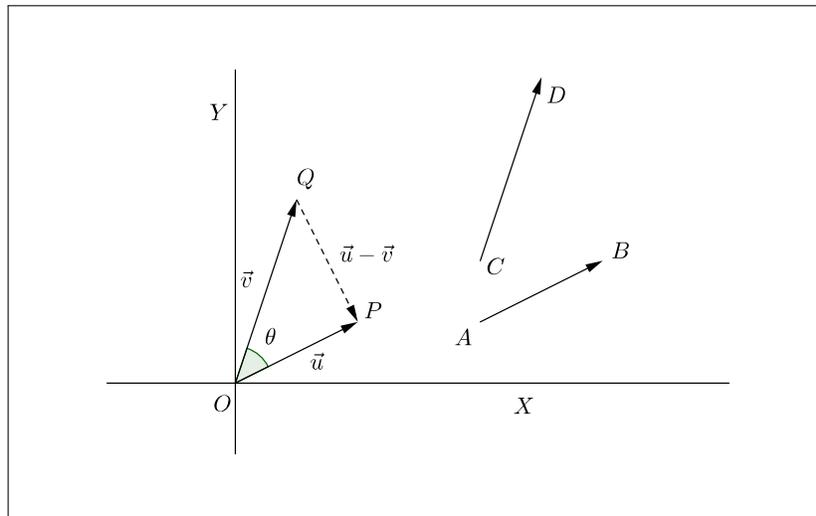


Figura 2.43: Representantes canônicos dos vetores dados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} .

Considerando as coordenadas dos pontos A e B ,

$$A = (a_1, a_2)$$

$$B = (b_1, b_2)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (\alpha, \beta)$$

Agora considere as coordenadas dos pontos C e D ,

$$C = (c_1, c_2)$$

$$D = (d_1, d_2)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{CD} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = (\gamma, \delta)$$

Segundo passo: Aplicar o teorema dos cossenos para o triângulo OPQ .

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

$$2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (\alpha, \beta) - (\gamma, \delta) = (\alpha - \gamma, \beta - \delta)$$

$$2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - [(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2]$$

$$2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - [\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \gamma + \gamma^2 + \beta^2 - 2 \cdot \beta \cdot \delta + \delta^2]$$

$$2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \gamma - \gamma^2 - \beta^2 + 2 \cdot \beta \cdot \delta - \delta^2$$

$$2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = 2 \cdot \alpha \cdot \gamma + 2 \cdot \beta \cdot \delta$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \delta$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \delta$$

Este último resultado, considerando sua importância, será destacado no Teorema a seguir:

Teorema 2.17.2. Se $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ e $\vec{v} = (\gamma, \delta)$, então o produto escalar de \vec{u} e \vec{v} é o número $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, dado por:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \delta$$

Assim, o produto escalar fica determinado por duas expressões:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \delta$$

Portanto,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

ou

$$\cos\theta = \frac{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \delta}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Lembrete:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Exemplo 2.17.3 (ITA/98). Considere o paralelogramo $ABCD$ onde $A = (0, 0)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (-3, -4)$. Os ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:

- a) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e $D = (-2, -5)$
- b) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e $D = (-1, -5)$
- c) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e $D = (-2, -6)$
- d) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e $D = (-2, -6)$
- e) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e $D = (-2, -5)$

Resolução:

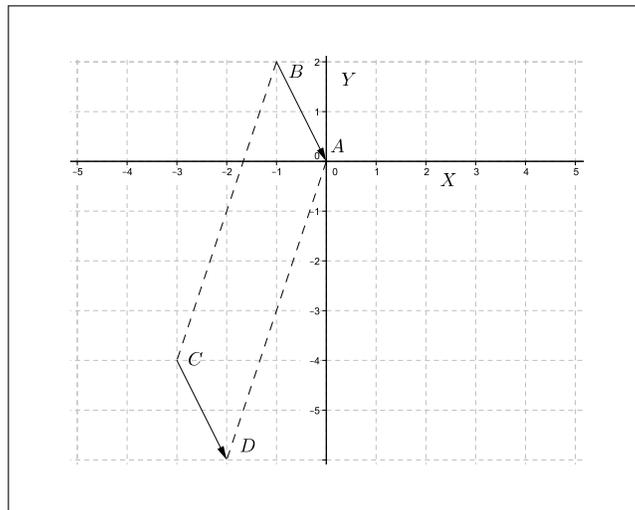


Figura 2.44: Segmentos orientados \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{CD} são equipolentes.

Os segmentos orientados \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{CD} são equipolentes, logo:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

$$A - B = D - C$$

Chamando as coordenadas do ponto $D = (x, y)$, temos:

$$D = (x, y) = A - B + C$$

$$D = (x, y) = (0, 0) - (-1, 2) + (-3, -4)$$

Assim,

$$D = (-2, -6)$$

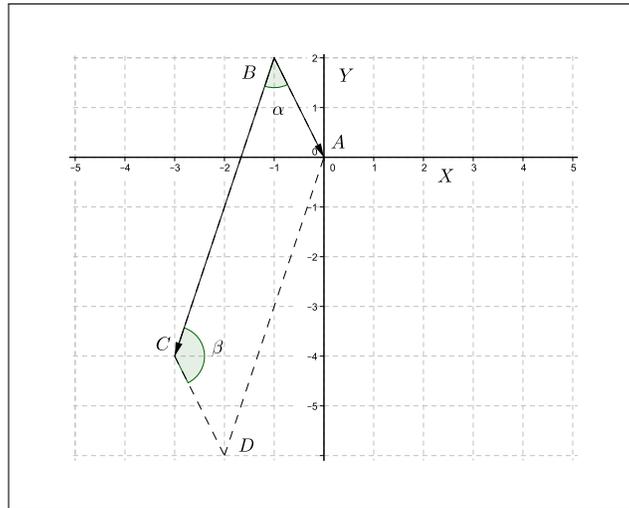


Figura 2.45: Segmentos orientados \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} .

Considerando os segmentos orientados marcados na figura, \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} , temos:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (0, 0) - (-1, 2) = (1, -2)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-3, -4) - (-1, 2) = (-2, -6)$$

Portanto:

$$\cos\alpha = \frac{(1) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-6)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}}$$

$$\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{200}}$$

$$\cos\alpha = \frac{10}{10\sqrt{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim,

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

No paralelogramo $ABCD$, $\alpha + \beta = \pi$

Logo, os ângulos do paralelogramo são $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

Resposta: Alternativa d.

2.18 Projeção de vetores

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores não nulos e P a projeção ortogonal do ponto (x_1, y_1) sobre a reta definida por $(0, 0)$ e (x_2, y_2) .

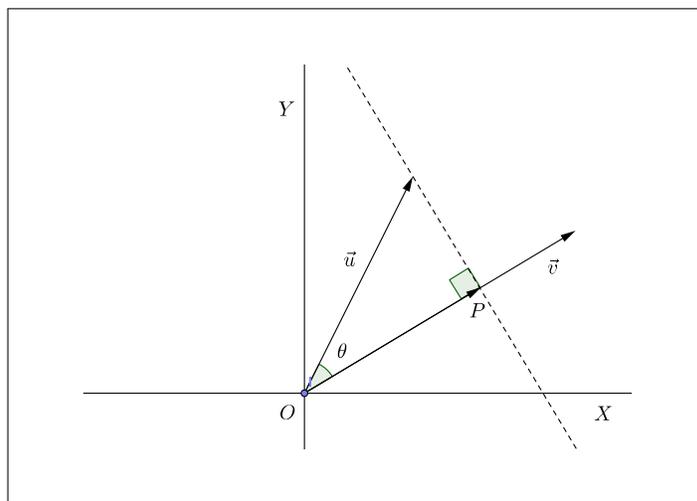


Figura 2.46: Projeção do vetor \vec{u} na direção do vetor \vec{v} .

Se o ângulo θ entre os vetores \vec{u} e \vec{v} for menor que 90° , como é o caso da figura (2.46) então:

$$\vec{OP} = \|\vec{OP}\| \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

e, como

$$||\vec{OP}\rangle = ||\vec{u}\rangle \cdot \cos\theta$$

temos

$$\vec{OP} = ||\vec{u}\rangle \cdot \cos\theta \cdot \frac{\vec{v}}{||\vec{v}\rangle}$$

Considerando que,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{u}\rangle \cdot ||\vec{v}\rangle}$$

Encontramos,

$$\vec{OP} = ||\vec{u}\rangle \cdot \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{u}\rangle \cdot ||\vec{v}\rangle} \cdot \frac{\vec{v}}{||\vec{v}\rangle}$$

De outra forma, após simplificações:

$$\vec{OP} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{v}\rangle^2} \cdot \vec{v}$$

No caso do ângulo θ entre os vetores \vec{u} e \vec{v} ser maior que 90° , conforme Figura 2.47, com um procedimento análogo ao anterior, podemos mostrar que a relação continua válida.

$$\vec{OP} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{v}\rangle^2} \cdot \vec{v}$$

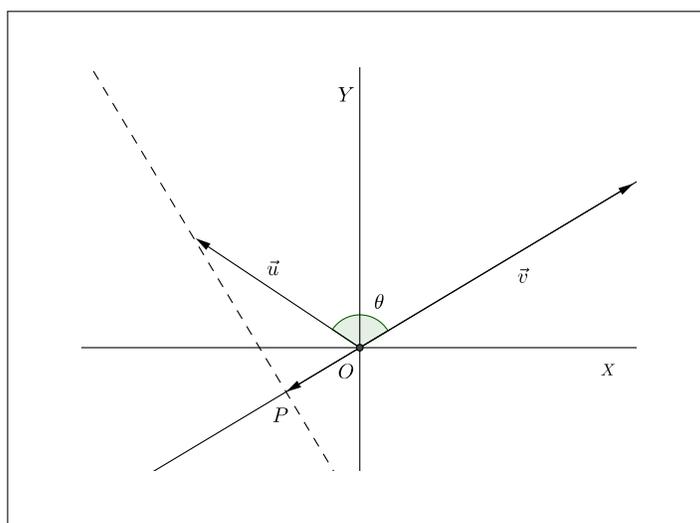


Figura 2.47: Projeção do vetor \vec{u} na direção do vetor \vec{v} .

Observe também que, se $\theta = 90^\circ$, então $\overrightarrow{OP} = \vec{0}$, mas mesmo assim a fórmula

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

continua válida.

Portanto, independentemente do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , o vetor \overrightarrow{OP} , é dado por:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

Este vetor é chamado projeção de \vec{u} sobre \vec{v} e será indicado por $Proj_{\vec{v}}^{\vec{u}}$

Assim,

$$Proj_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

Exemplo 2.18.1 (REIS[14],p.36). Dado um triângulo cujos vértices são $A = (3, 3)$, $B = (0, 1)$, e $C = (1, 6)$:

- Mostre que este triângulo é retângulo em A .
- Calcule a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC .
- Determine o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A .

Resolução:

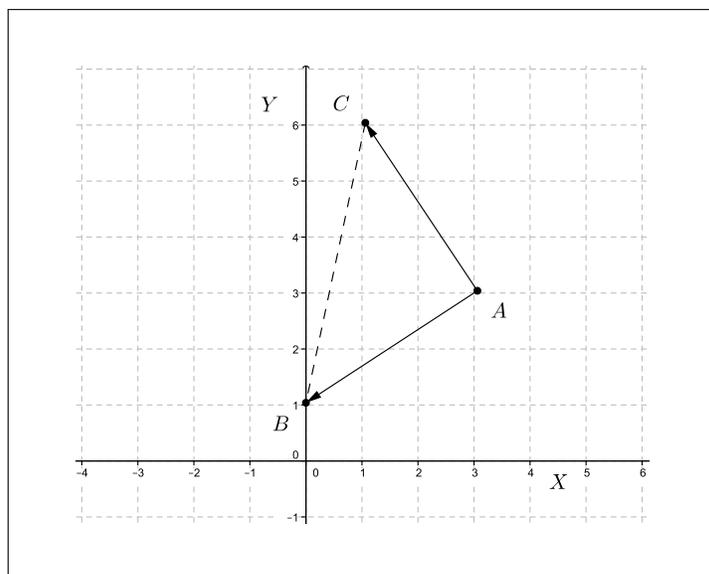


Figura 2.48: Triângulo ABC , conforme enunciado.

a) Basta verificar que

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0.$$

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1) - (3, 3) = (-3, -2)$ e

$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 6) - (3, 3) = (-2, 3)$, temos:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = (-3) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3) = 0.$$

b) A projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é o módulo do vetor $Proj_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA}$.

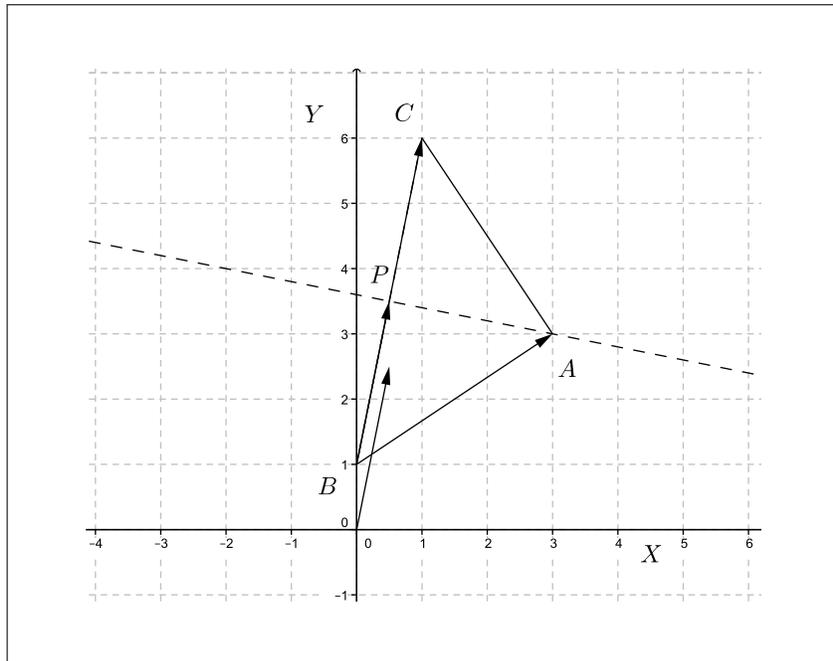


Figura 2.49: No triângulo ABC , vetores \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} .

Sendo $\overrightarrow{BA} = A - B = (3, 3) - (0, 1) = (3, 2)$ e

$\overrightarrow{BC} = C - B = (1, 6) - (0, 1) = (1, 5)$, temos:

$$Proj_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA} = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{13}{26} \cdot (1, 5) = \frac{1}{2} \cdot (1, 5).$$

Logo, a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é

$$\|Proj_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA}\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26}$$

Seja $P = (x, y)$ o pé da altura relativa ao vértice A . Então:

$$\overrightarrow{BP} = Proj_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA}$$

ou

$$(x, y) - (0, 1) = \frac{1}{2} \cdot (1, 5)$$

$$(x, y) = (0, 1) + \frac{1}{2} \cdot (1, 5)$$

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Capítulo 3

Equações da reta no plano

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas as equações que representam uma reta no plano. Pelas propriedades geométricas da reta, serão deduzidas três tipos de equação: paramétrica, cartesiana e reduzida (ou afim). Cada uma delas tem suas vantagens, podem nos dar informações preciosas. Informações que serão exploradas quando tratarmos de: paralelismo e perpendicularismo entre retas, desigualdades lineares e ângulos entre retas.

3.2 Equação paramétrica da reta

Seja $\vec{v} = (a', b')$ um vetor não-nulo e $A = (x_0, y_0)$ um ponto do plano. Da Geometria Euclidiana sabemos que existe uma única reta r com a direção de \vec{v} e que contém A . Dizer que r tem a mesma direção de \vec{v} significa dizer que dois pontos quaisquer de r determinam um vetor com a mesma direção de \vec{v} , de acordo com REIS[14].

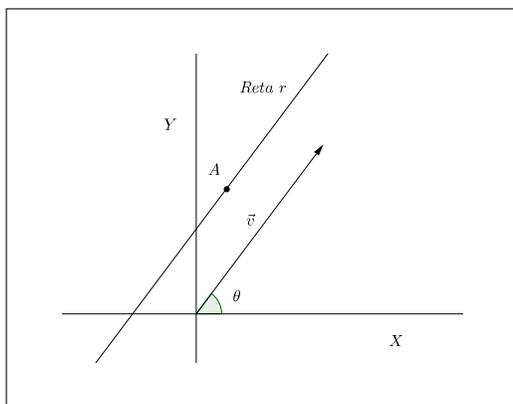


Figura 3.1: Reta r , passando pelo ponto A e na mesma direção do vetor \vec{v} .

Assim, um ponto $P = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}$$

Para algum número real t .

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t \cdot \vec{v}$$

$$P = A + t \cdot \vec{v}$$

Conhecida como equação vetorial da reta, pois é determinada pelo vetor diretor \vec{v} e por um ponto A .

Colocando a equação vetorial em coordenadas,

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (a', b')$$

Essa equação é equivalente ao sistema de equações abaixo,

$$\begin{cases} x = x_0 + a' \cdot t \\ y = y_0 + b' \cdot t \end{cases}$$

Chamadas equações paramétricas da reta.

Exemplo 3.2.1 (REIS[14],p.41). Uma partícula está animada de um movimento tal que, no instante t , ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (2 + 3 \cdot t, 1 + 4 \cdot t)$$

- Determine sua posição nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.
- Determine o instante no qual a partícula atinge o ponto $P = (11, 13)$.
- A partícula passa pelo ponto $Q = (5, 6)$?
- Descreva sua trajetória.

Resolução:

a) Como a posição da partícula é dada em função do tempo por

$$(x, y) = (2 + 3 \cdot t, 1 + 4 \cdot t)$$

suas posições nos instantes $t = 0, t = 1$ e $t = 2$. são, respectivamente,

$$(x, y) = (2 + 3 \cdot 0, 1 + 4 \cdot 0) = (2, 1)$$

$$(x, y) = (2 + 3 \cdot 1, 1 + 4 \cdot 1) = (5, 5)$$

$$(x, y) = (2 + 3 \cdot 2, 1 + 4 \cdot 2) = (8, 9)$$

b) Basta determinar t de modo que $(2 + 3 \cdot t, 1 + 4 \cdot t) = (11, 13)$

$$\begin{cases} 2 + 3 \cdot t = 11 \\ 1 + 4 \cdot t = 13 \end{cases}$$

Logo, $t = 3$, pois ambas as equações acima admitem esta solução.

c) Para que a partícula passe pelo ponto $Q = (5, 6)$ é necessário que para algum valor de t se tenha

$$(2 + 3 \cdot t, 1 + 4 \cdot t) = (5, 6)$$

o que não ocorre, pois as equações

$$\begin{cases} 2 + 3 \cdot t = 5 \\ 1 + 4 \cdot t = 6 \end{cases}$$

são incompatíveis, isto é, não admitem solução comum.

d) A equação

$$(x, y) = (2 + 3 \cdot t, 1 + 4 \cdot t)$$

é equivalente a

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot t \\ y = 1 + 4 \cdot t \end{cases}$$

Que são equações paramétricas da reta paralela ao vetor $\vec{v} = (3, 4)$ e que contém o ponto $A = (2, 1)$. Logo, esta reta r é a trajetória da partícula.

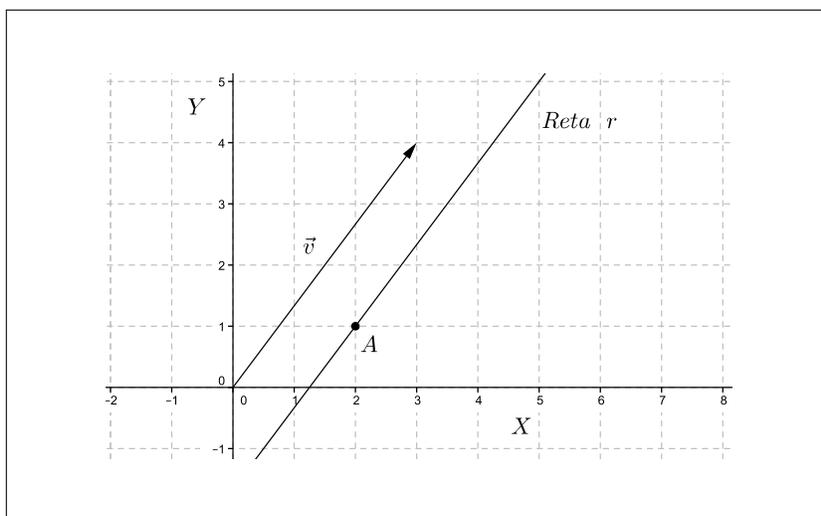


Figura 3.2: Reta r , passando pelo ponto $A = (2, 1)$ e na mesma direção do vetor $\vec{v} = (3, 4)$.

3.3 Equação cartesiana da reta

Das equações paramétricas para a equação cartesiana da reta, na sua forma geral.

$$\begin{cases} x = x_0 + a' \cdot t \\ y = y_0 + b' \cdot t \end{cases}$$

Podemos eliminar o parâmetro t destas equações efetuando as seguintes operações: multiplicando a primeira equação por b' e a segunda por a' , encontramos

$$\begin{cases} b' \cdot x = b' \cdot x_0 + b' \cdot a' \cdot t & (1) \\ a' \cdot y = a' \cdot y_0 + a' \cdot b' \cdot t & (2) \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1), temos:

$$b' \cdot x - a' \cdot y = b' \cdot x_0 - a' \cdot y_0$$

Atentai leitor amigo, o segundo membro desta equação é constante.

Chamando esta constante de c' , obtemos a equação,

$$b' \cdot x - a' \cdot y = \underbrace{b' \cdot x_0 - a' \cdot y_0}_{c'}$$

$$b' \cdot x - a' \cdot y = c'$$

que é chamada equação cartesiana da reta r .

Equação que pode ser reescrita com outros coeficientes; A , B e C .

$$A \cdot x + B \cdot y = C$$

Relacionando as duas últimas equações:

$$A = b'$$

$$B = -a'$$

$$C = c'$$

Observação 3.3.1. O vetor $\vec{n} = (A, B)$, formado pelos parâmetros A e B , é normal à reta $A \cdot x + B \cdot y = C$.

Para confirmar, apresentamos o produto escalar entre o vetor diretor da reta $\vec{v} = (a', b')$ e o vetor normal $\vec{n} = (A, B)$, que deve resultar zero.

$$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = a' \cdot A + b' \cdot B$$

$$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = (-B) \cdot A + A \cdot B$$

$$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = -A \cdot B + A \cdot B$$

$$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0$$

Portanto, o vetor $\vec{n} = (A, B)$ é normal à reta de equação $A \cdot x + B \cdot y = C$; os vetores \vec{n} e \vec{v} são ortogonais.

3.4 Equação reduzida da reta

Das equações paramétricas para a equação cartesiana da reta, na sua forma geral.

$$\begin{cases} x = x_0 + a' \cdot t \\ y = y_0 + b' \cdot t \end{cases}$$

Podemos eliminar o parâmetro t destas equações efetuando as seguintes operações: multiplicando a primeira equação por b' e a segunda por a' , encontramos

$$\begin{cases} b' \cdot x = b' \cdot x_0 + b' \cdot a' \cdot t & (1) \\ a' \cdot y = a' \cdot y_0 + a' \cdot b' \cdot t & (2) \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1), temos:

$$b' \cdot x - a' \cdot y = b' \cdot x_0 - a' \cdot y_0$$

$$b' \cdot x - b' \cdot x_0 = a' \cdot y - a' \cdot y_0$$

$$b' \cdot (x - x_0) = a' \cdot (y - y_0)$$

$$a' \cdot (y - y_0) = b' \cdot (x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{b'}{a'} \cdot (x - x_0)$$

Considerando que,

$$\frac{b'}{a'} = \tan \theta = m$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Esta equação representa um conjunto de infinitas retas que passam por (x_0, y_0) , contidas no plano cartesiano. Só não pertence a esse conjunto a reta $x = x_0$, vertical com o eixo x, que não tem coeficiente angular. Portanto, a equação completa do feixe é:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \text{ ou } x = x_0$$

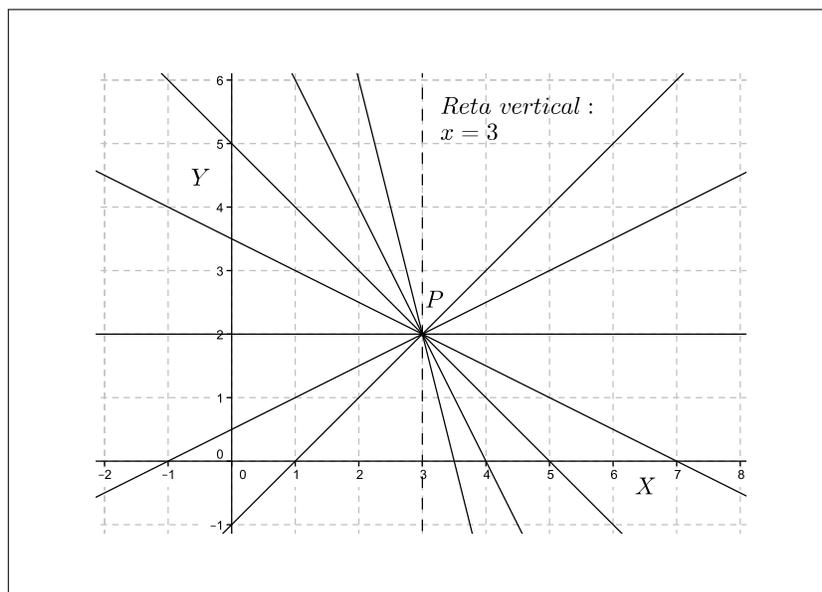


Figura 3.3: Feixe de retas concorrentes no ponto $P = (3, 2)$.

Exemplo 3.4.1. Feixe de retas passando pelo ponto $P = (3, 2)$, definidas pela equação:

$$y - 2 = m \cdot (x - 3).$$

Devemos adicionar ao feixe a reta vertical $x = 3$, não definida pela expressão anterior.

Após algum algebrismo, chega-se à equação cartesiana da reta na forma reduzida,

$$y - y_0 = m \cdot x - m \cdot x_0$$

$$y = m \cdot x + \underbrace{y_0 - m \cdot x_0}_q$$

$$y = m \cdot x + q$$

3.5 Sistemas de equações lineares

Fica acordado que, ao escrevermos a equação de uma reta $ax + by = c$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Isto é, os coeficientes a e b não são simultaneamente nulos.

Uma solução do sistema linear

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

é um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas x e y satisfazem as duas equações. O sistema se diz *determinado*, *impossível* ou *indeterminado* quando admite uma única solução, nenhuma solução ou infinitas soluções respectivamente. Cada equação do sistema tem como soluções as coordenadas (x, y) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é determinado, impossível ou indeterminado, conforme as retas r_1 e r_2 , representadas pelas duas equações, sejam concorrentes, sejam paralelas ou sejam coincidentes respectivamente. São três as possibilidades:

(i) O sistema possui solução única.

Nesse caso, as duas retas se intersectam num único ponto. Isto ocorre se as retas possuírem inclinações distintas ou, em outras palavras, se os coeficientes de x e y não forem proporcionais.

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

(ii) O sistema não possui solução.

Nesse caso, as duas retas são paralelas e distintas. Isto ocorre se as retas possuírem a mesma inclinação, mas cruzarem o eixo y em ponto distintos.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

(iii) O sistema possui infinitas soluções.

Nesse caso, as duas retas coincidem. Isto ocorre se as retas possuírem a mesma inclinação e cruzarem o eixo y no mesmo ponto ou, em outras palavras, se os coeficientes e os termos constantes forem proporcionais. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

3.6 Paralelismo e perpendicularismo entre retas

As retas, como vimos, podem ser apresentadas de diferentes maneiras. O estudo do paralelismo ou perpendicularismo entre retas fica muito simples quando consideramos as retas na forma reduzida.

$$y = m \cdot x + q$$

Condição de paralelismo Dadas duas retas r e r' distintas, na forma reduzida

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + q \\ y &= m' \cdot x + q' \end{aligned}$$

Serão paralelas se, e somente se, $m = m'$. **Condição de perpendicularismo**

Dadas duas retas r e r' distintas, na forma reduzida

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + q \\ y &= m' \cdot x + q' \end{aligned}$$

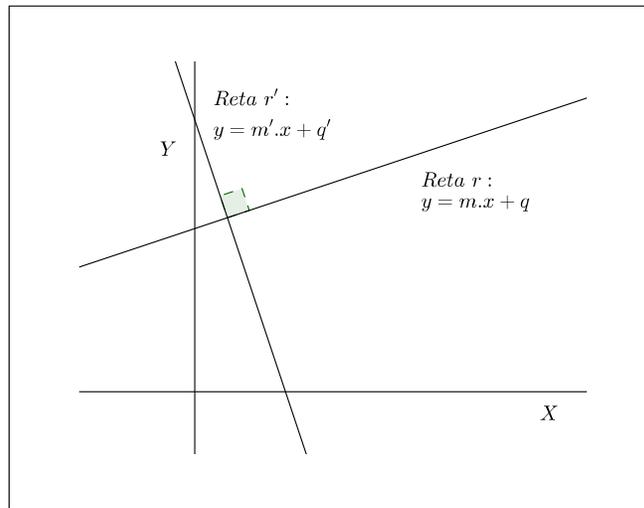


Figura 3.4: Duas retas perpendiculares quaisquer: r e r' .

Considere duas outras retas, respectivamente paralelas a r e r' e passando pela origem,

$$y = m \cdot x$$

$$y = m' \cdot x$$

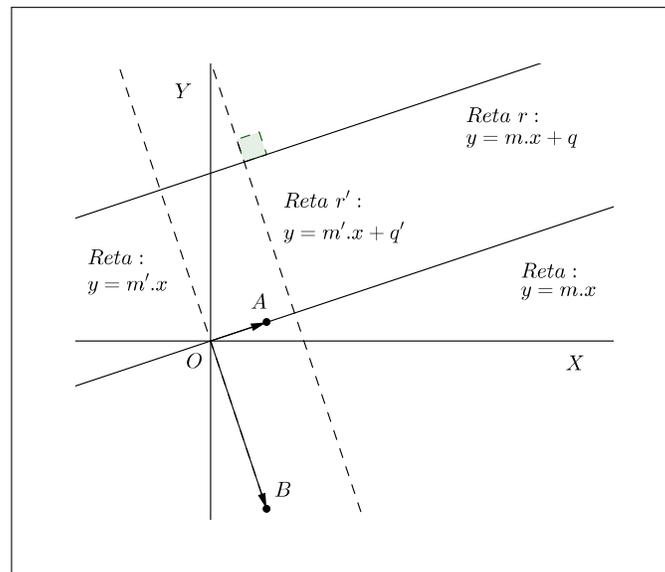


Figura 3.5: Duas retas paralelas a r e r' , passando pela origem do sistema de coordenadas.

É possível identificar dois pontos interessantes nessas retas,

$$A = (1, m)$$

$$B = (1, m')$$

Se O é a origem do sistema de coordenadas, dois vetores podem visualizados: \vec{OA} e \vec{OB}

$$\vec{OA} = A = (1, m)$$

$$\vec{OB} = B = (1, m')$$

Da condição de perpendicularismo, o produto escalar dos vetores \vec{OA} e \vec{OB} deve resultar zero.

$$\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 1 \cdot 1 + m \cdot m' = 0$$

Portanto,

$$m \cdot m' = -1$$

Assim, encontramos uma justificativa elegante para um resultado conhecido.

Exemplo 3.6.1 (FGV/99). No plano cartesiano, considere a reta (r) de equação $2x - y + 3 = 0$. Seja (t) a reta perpendicular a (r), passando pelo ponto $P = (-1, 5)$.

- Obter o ponto de intersecção da reta (t) com o eixo das abscissas.
- Qual o ponto da reta (r) mais próximo de P ?

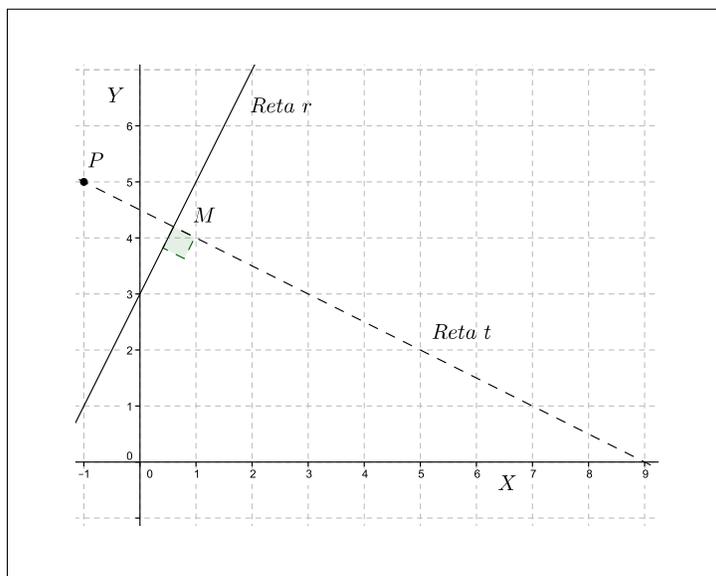


Figura 3.6: Retas r e t , desenhadas no plano cartesiano.

Resolução:

a) Considerando que a reta (t) é perpendicular à reta (r), temos:

$$m_t \cdot m_r = -1$$

A equação da reta (r), ao ser colocada na forma reduzida, fornece a sua declividade:

$$2x - y + 3 = 0$$

$$y = 2x + 3$$

Assim,

$$m_r = 2$$

e da relação de perpendicularismo,

$$m_t \cdot m_r = -1$$

$$m_t = -\frac{1}{2}$$

Agora vamos determinar a equação da reta (t), considerando que passa pelo ponto $P = (-1, 5)$ e tem declividade $m_t = -\frac{1}{2}$.

$$y - 5 = -\frac{1}{2} \cdot (x + 1)$$

Para simplificar, vamos multiplicar os dois lados por -2 ,

$$-2y + 10 = x + 1$$

Assim, a reta (t) tem a seguinte equação (na forma cartesiana):

$$x + 2y = 9$$

Para se obter a intersecção de (t) com o eixo das abscissas, fazemos $y = 0$:

$$x = 9.$$

Portanto, a intersecção pedida é $(9, 0)$.

b) O ponto de (r) mais próximo de P é o pé (M) da perpendicular traçada por P à reta (r).

Ou seja, o ponto M é a intersecção da reta (t) com a reta (r).

Para obter M , basta resolver o sistema com as equações de r e t .

$$\begin{cases} y = 2x + 3 & (r) \\ x + 2y = 9 & (t) \end{cases}$$

Por simples substituição,

$$x + 2 \cdot (2x + 3) = 9$$

$$x + 4x + 6 = 9$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5}$$

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2 \cdot \frac{3}{5} + 3 = \frac{21}{5}$$

portanto, o ponto pedido tem as seguintes coordenadas: $M = \left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$

3.7 Desigualdades Lineares

Como não podemos *reinventar a roda*, esta seção foi fortemente inspirada em LIMA[7].

Dada uma reta, contida em um plano Π , ela o decompõe em duas regiões denominadas semiplanos. Por exemplo, uma reta r representada pela equação $ax + by = c$, determina dois semiplanos: H^- e H^+ . O semiplano H^- fica perfeitamente caracterizado pela desigualdade $ax + by \leq c$ e, de modo semelhante, o semiplano H^+ pela desigualdade $ax + by \geq c$.

Assim,

$$H^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by \leq c\}$$

$$H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by \geq c\}$$

Agora um problema prático:

Problema 3.7.1. Como identificar os semiplanos $ax+by \leq c$ e $ax+by \geq c$, que foram determinados pela reta r de equação: $ax + by = c$?

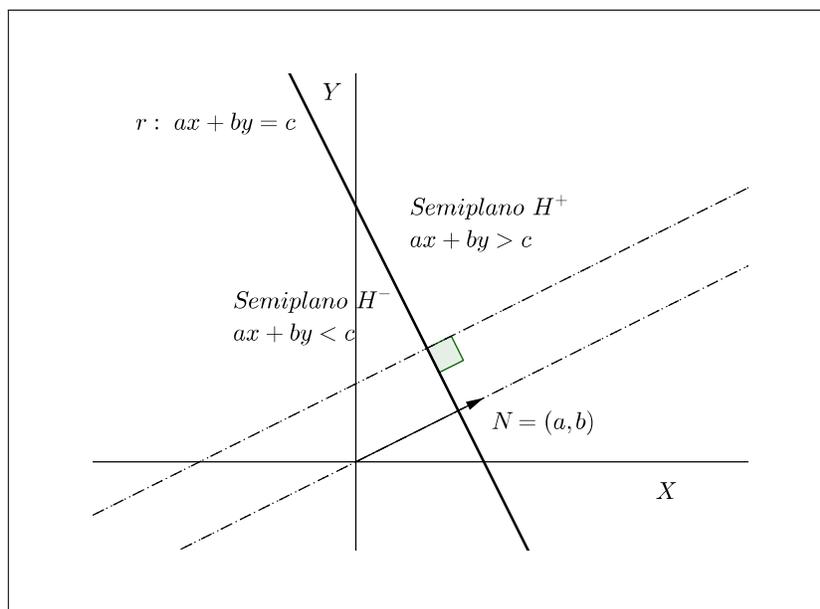


Figura 3.7: Semiplanos H^+ e H^- , determinados por uma reta.

Considerando a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x, y) = ax + by$, a reta $ax + by = c$ é a linha de nível c da função φ . Como $\varphi(0, 0) = 0$, a origem está no nível zero de φ . Agora, como $\varphi(a, b) = a^2 + b^2 > 0$, o ponto $N = (a, b)$ está no nível positivo $c = a^2 + b^2$. Logo, quando percorrermos a reta ON , no sentido de O para N , os níveis c das retas $ax + by = c$ vão crescendo. Em outras palavras, os valores de c aumentam no sentido do vetor normal $\vec{n} = N = (a, b)$. Isto nos permite distinguir os semiplanos H^- e H^+ .

Analisamos agora as soluções de um sistema de desigualdades lineares. Antes de continuar, um lembrete: sempre é possível escrever qualquer desigualdade linear sob a forma $ax + by \leq c$, multiplicando - se for preciso - ambos os membros por -1 .

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ a_3x + b_3y \leq c_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$

Uma solução do sistema de desigualdades lineares apresentado é o ponto $P = (x, y)$ cujas coordenadas (x, y) satisfazem todas as desigualdades do sistema. Isto equivale a dizer que o ponto

P pertence a todos os semiplanos $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, definidos por essas desigualdades. Assim, o conjunto das soluções do sistema acima é a intersecção $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \dots \cap H_n$ desses semiplanos.

Os sistemas de desigualdades lineares aparecem nos problemas de maximização ou minimização de funções lineares, isto é, do tipo $\varphi(x, y) = ax + by$. Nesses problemas, conhecidos como problemas de Programação Linear, as variáveis x e y ficam sujeitas a um conjunto de restrições, expressas na forma de um sistema de desigualdades lineares.

Num problema de Programação Linear tem-se um sistema de desigualdades lineares

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ a_3x + b_3y \leq c_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$

Os pontos $P = (x, y)$ que são soluções deste sistema chamam-se *pontos viáveis*. Eles formam um conjunto convexo $V \subset \mathbb{R}^2$, o *conjunto de viabilidade*. Dada uma função linear $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = ax + by$; devemos encontrar entre os pontos $P = (x, y) \in V$, aquele (ou aqueles) para os quais o valor de $\varphi(x, y) = ax + by$ é o maior ou menor possível. Sabemos que as linhas de nível da função $\varphi(x, y) = ax + by$ são retas perpendiculares ao vetor normal $\vec{n} = N = (a, b)$, isto é, em todos os pontos de uma dessas retas a função φ assume um valor constante. Além disso, os valores da função φ crescem no sentido do vetor normal $\vec{n} = N = (a, b)$. Disto resulta uma observação relevante: *O valor máximo (ou mínimo) de φ no conjunto V dos pontos viáveis não pode ser atingido num ponto do interior de V ; tem de ser localizado no bordo de V* . Por exemplo, se $I = (x_0, y_0)$ é um ponto do interior de V então a linha de nível que passa por I pode ser deslocada e nos dar pontos de V nos quais a função φ assume valores maiores do que $\varphi(x_0, y_0)$, se percorrido o sentido do vetor normal $\vec{n} = N = (a, b)$. O bordo de V é formado por segmentos de reta (ou duas semiretas), que chamamos *lados de V* . Assim, o valor máximo (ou mínimo) de φ é atingido num dos vértices ou em todos os pontos de um dos lados de V (caso este excepcional, em que esse lado está contido numa linha de nível de φ). Portanto, o máximo ou mínimo é atingido num dos vértices do polígono de viabilidade

Exemplo 3.7.2 (DANTE[3],p.167). Um comerciante vende dois tipos de artigo, A e B. Na venda do artigo A tem um lucro de 20 por unidade, e na venda do artigo B um lucro de 30 por unidade. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que por compromissos já assumidos ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo A e 25 do tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos do tipo A e 50 artigos do tipo B. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que venda todos, obtenha o lucro máximo?

Resolução:

Seja x o número de artigos do tipo A, e y o número de artigos do tipo B que devem ser encomendados.

1. Função-objetivo:

Se para cada artigo do tipo A que vende tem um lucro de 20 e para cada artigo do tipo B tem um lucro de 30, o lucro total é dado pela função-objetivo

$$L = 20x + 30y$$

2. Restrições:

- a) cabem no máximo 100 artigos no depósito: $x + y \leq 100$
- b) serão vendidos pelo menos 15 artigos do tipo A: $x \geq 15$
- c) serão vendidos pelo menos 25 artigos do tipo B: $y \geq 25$
- d) o distribuidor pode entregar no máximo 60 artigos do tipo A: $x \leq 60$
- e) o distribuidor pode entregar no máximo 50 artigos do tipo B: $y \leq 50$

3. Gráfico:

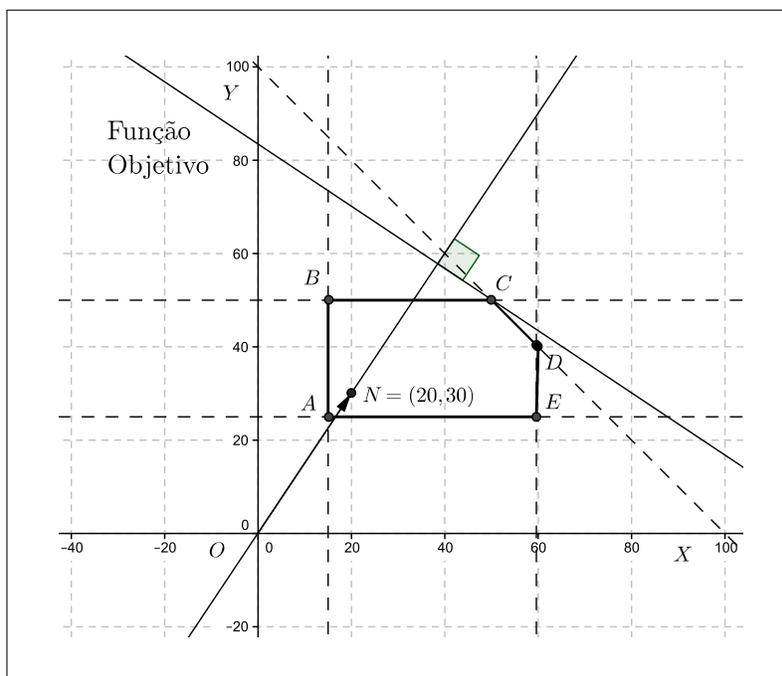


Figura 3.8: Polígono de soluções.

As restrições dão origem ao polígono convexo limitado pelas retas:

$$x + y = 100, \quad x = 15, \quad y = 25, \quad x = 60, \quad \text{e} \quad y = 50.$$

As coordenadas dos vértices do polígono são encontradas com facilidade, basta resolver os pares de equações correspondentes aos lados que determinam o vértice. Assim, as coordenadas são $A = (15, 25)$, $B = (15, 50)$, $C = (50, 50)$, $D = (60, 40)$ e $E = (60, 25)$.

Dá-se, portanto, o nome de polígono de soluções ao conjunto de intersecções de todas as retas, que representam as restrições, com o plano geométrico.

4. Valor da Função-objetivo nos vértices

Vértice	Valor de $L = 20x + 30y$
$A = (15, 25)$	$20 \cdot 15 + 30 \cdot 25 = 1050 \leftarrow$ mínimo
$B = (15, 50)$	$20 \cdot 15 + 30 \cdot 50 = 1800$
$C = (50, 50)$	$20 \cdot 50 + 30 \cdot 50 = 2500 \leftarrow$ máximo
$D = (60, 40)$	$20 \cdot 60 + 30 \cdot 40 = 2400$
$E = (60, 25)$	$20 \cdot 60 + 30 \cdot 25 = 1950$

5. *Conclusão:*

Concluimos que a solução ótima, que corresponde ao valor máximo de Lucro L , é $C = (50, 50)$ e o lucro máximo é 2500.

6. *Resposta:*

O comerciante, para obter lucro máximo nas condições do problema, deverá encomendar 50 artigos do tipo A e 50 artigos do tipo B. Com isso, vendendo todos, terá lucro de 2500.

Exemplo 3.7.3 (DANTE[3],p.169). Uma empresa comercial tem 40 unidades de mercadoria no depósito D_1 e 50 unidades no depósito D_2 . Ela deve enviar 30 unidades ao cliente A e 40 ao cliente B. Os gastos de transporte por unidade de mercadoria estão indicados na tabela abaixo. De que maneira essas mercadorias devem ser enviadas para que o gasto com o transporte seja mínimo?

Depósitos	Cliente A	Cliente B
D_1	10	14
D_2	12	15

Resolução:

Seja x a quantidade que a empresa deve enviar ao cliente A do depósito D_1 , e y a quantidade que deve enviar ao cliente B do mesmo depósito D_1 . Assim, $(30 - x)$ será a quantidade que deve enviar a A do depósito D_2 e $(40 - y)$ a que deve enviar a B do depósito D_2 .

Resolução:

1. *Função-objetivo:*

O gasto G do transporte será dado por:

$$G = 10x + 14y + 12(30 - x) + 15(40 - y) = 960 - 2x - y$$

$$G = 960 - 2x - y$$

Nosso objetivo é minimizar a função G .

2. Restrições:

- a) $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (são unidades de mercadoria)
- b) $x \leq 30$ e $y \leq 40$
- c) $x + y \leq 40$ (em D_1 há somente 40 unidades)
- d) $(30 - x) + (40 - y) \leq 50$ (ou, de forma equivalente, $x + y \geq 20$, pois em D_2 há somente 50 unidades)

3. Gráfico:

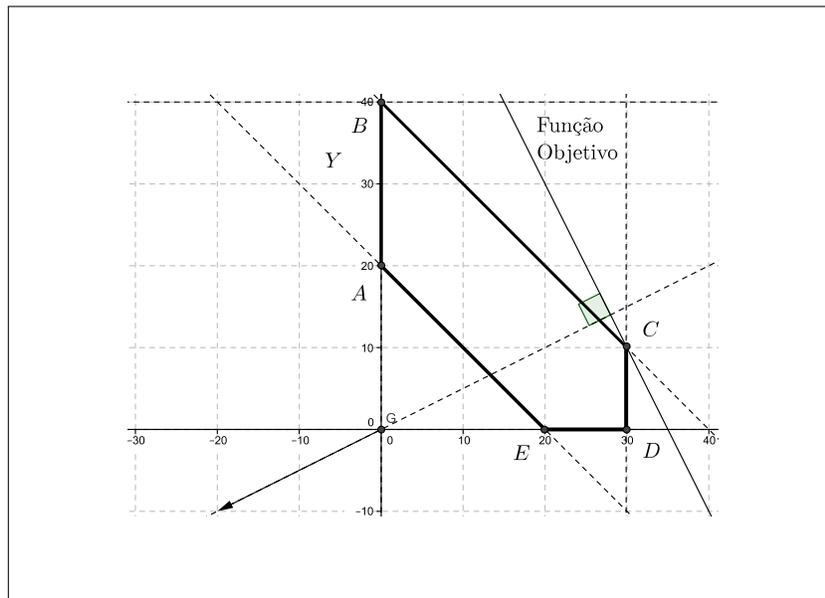


Figura 3.9: Polígono de soluções.

As restrições dão origem ao polígono convexo limitado pelas retas:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 30, \quad y = 40, \quad x + y = 20, \quad x + y = 40$$

As coordenadas dos vértices do polígono são encontradas com facilidade, basta resolver os pares de equações correspondentes aos lados que determinam o vértice. Assim, as coordenadas são $A = (0, 20)$, $B = (0, 40)$, $C = (30, 10)$, $D = (30, 0)$ e $E = (20, 0)$.

4. Valor da Função-objetivo nos vértices:

Vértice	Valor do gasto $G = 960 - 2x - y$
$A = (0, 20)$	$960 - 2 \cdot 0 - 20 = 940 \leftarrow$ máximo
$B = (0, 40)$	$960 - 2 \cdot 0 - 40 = 920$
$C = (30, 10)$	$960 - 2 \cdot 30 - 10 = 890 \leftarrow$ mínimo
$D = (30, 0)$	$960 - 2 \cdot 30 - 0 = 900$
$E = (20, 0)$	$960 - 2 \cdot 20 - 0 = 920$

5. Conclusão:

A solução ótima do problema é dada pelo vértice $C = (30, 10)$.

Assim, $30 - x = 0$ e $40 - y = 30$

6. Resposta:

O gasto mínimo será obtido enviando 30 unidades de mercadoria de D_1 a A, 10 unidades de D_1 a B, 30 unidades de D_2 a B e nenhuma de D_2 a A.

3.8 Ângulo entre retas

Definição 3.8.1. O ângulo $\theta = \angle(r_1, r_2)$ entre duas retas r_1 e r_2 se define da seguinte maneira:

- i) se r_1 e r_2 são coincidentes ou paralelas, $\theta = \angle(r_1, r_2) = 0$
- ii) se as retas são concorrentes, isto é, $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, $\theta = \angle(r_1, r_2)$ é o menor dos ângulos positivos determinados pelas retas.

Sejam \vec{v}_1 e \vec{v}_2 vetores paralelos às retas concorrentes r_1 e r_2 , respectivamente. Considerando que $\angle(r_1, r_2) = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ou $\pi - \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, então:

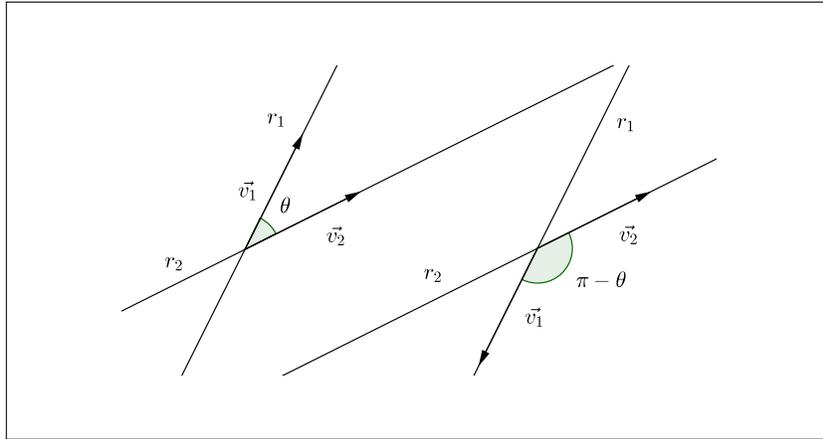


Figura 3.10: Ângulos entre duas retas concorrentes.

$$\cos\theta = \cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 3.8.2 (WAGNER[17]). Dois lados de um paralelogramo medem 2 cm e 3 cm e fazem entre si um ângulo de 60° . Qual é a medida do ângulo formado pelas diagonais?

Resolução:

Seja o paralelogramo $ABCD$, representado em sistema de coordenadas conveniente:

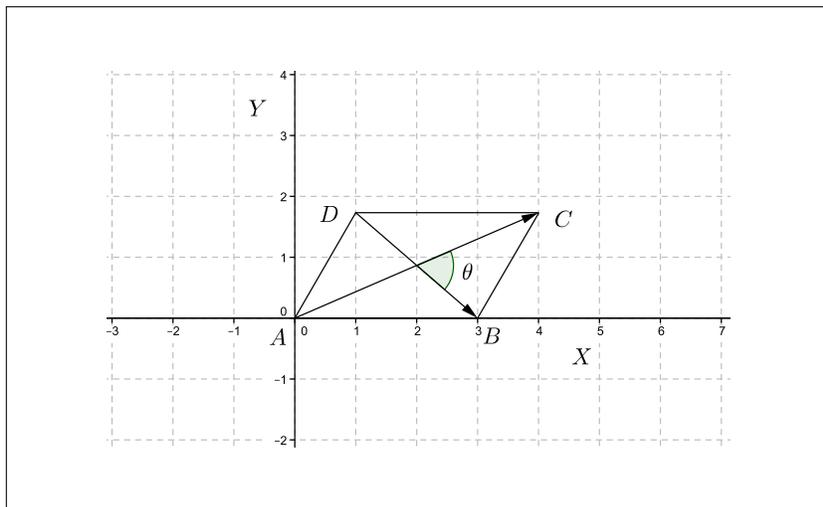


Figura 3.11: Ângulo formado pelas diagonais do paralelogramo.

De $\overline{AB} = 3$, $\overline{AD} = \overline{BC} = 2$ e $\angle DAB = 60^\circ$ obtemos as coordenadas dos vértices do paralelogramo para o sistema de coordenadas adotado, isto é:

$$A = (0, 0), \quad B = (3, 0), \quad C = (4, \sqrt{3}) \quad \text{e} \quad D = (1, \sqrt{3})$$

Após a determinação dos vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{DB} , determina-se o cosseno do ângulo procurado.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = C - A = (4, \sqrt{3}) - (0, 0) = (4, \sqrt{3})$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{DB} = B - D = (3, 0) - (1, \sqrt{3}) = (2, -\sqrt{3})$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\cos\theta = \frac{8 - 3}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{7}}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{133}}$$

$$\theta \cong 64,31^\circ$$

3.9 Distância de um ponto a uma reta

A distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta r , de equação $ax + by = c$, é definida como sendo a distância de $P = (x_0, y_0)$ a A , onde $A = (x_1, y_1)$ é o pé da perpendicular baixada de P a r . Indicando por $d(P, r)$ a distância de P a r , temos:

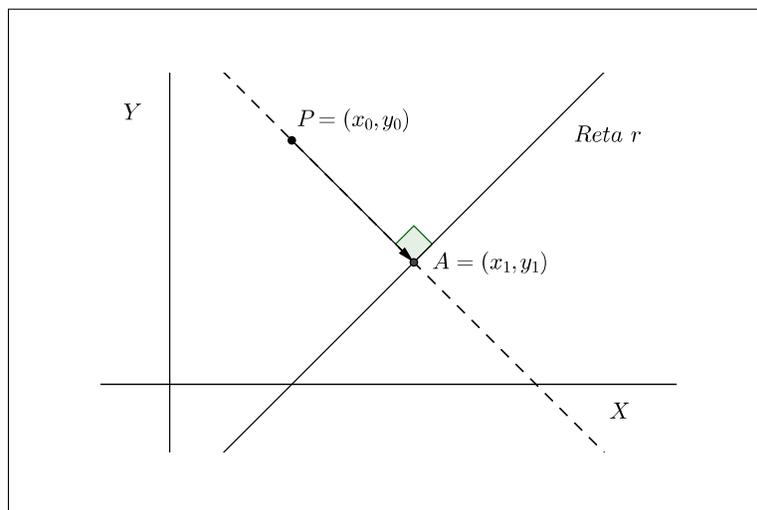


Figura 3.12: Distância do ponto P à reta r .

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{PA}\|$$

Como o vetor $\vec{n} = (a, b)$ tem a direção normal à reta r , os vetores \overrightarrow{PA} e $\vec{n} = (a, b)$ têm a mesma direção. Logo, existe um número real t tal que

$$\overrightarrow{PA} = t \cdot (a, b)$$

portanto,

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{PA}\| = \|t \cdot (a, b)\|$$

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{PA}\| = |t| \cdot \|(a, b)\|$$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PA}| = |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Desta forma, $d(P, r)$ estará determinada quando conhecermos t .

$$\overrightarrow{PA} = t \cdot (a, b)$$

$$A - P = t \cdot (a, b)$$

$$(x_1, y_1) - (x_0, y_0) = t \cdot (a, b)$$

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (at, bt)$$

$$x_1 - x_0 = at \quad \text{e} \quad y_1 - y_0 = bt$$

$$x_1 = x_0 + at \quad \text{e} \quad y_1 = y_0 + bt$$

Como $A = (x_1, y_1)$ pertence à reta r , deve valer

$$a \cdot (x_1) + b \cdot (y_1) = c$$

$$a \cdot (x_0 + at) + b \cdot (y_0 + bt) = c$$

$$a \cdot x_0 + t \cdot a^2 + b \cdot y_0 + t \cdot b^2 = c$$

$$(a^2 + b^2) \cdot t = c - a \cdot x_0 - b \cdot y_0$$

Donde

$$t = \frac{c - a \cdot x_0 - b \cdot y_0}{a^2 + b^2}$$

Assim,

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{PA}\| = |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d(P, r) = |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d(P, r) = \frac{|c - a \cdot x_0 - b \cdot y_0|}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Logo,

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo 3.9.1 (WAGNER[17]). Considere o quadrado $ABCD$, com lado medindo 10 cm. Sendo M o ponto médio de BC , trace DP perpendicular a AM . Qual é a medida do segmento DP ?

Resolução: Trata-se de um problema de Geometria Plana (GP), que será resolvido com as ferramentas da Geometria Analítica (GA). Podemos - *por conveniência* - escolher um sistema de coordenadas com o eixo X passando por AB e com o eixo Y passando por AD , conforme mostra a Figura 3.13:

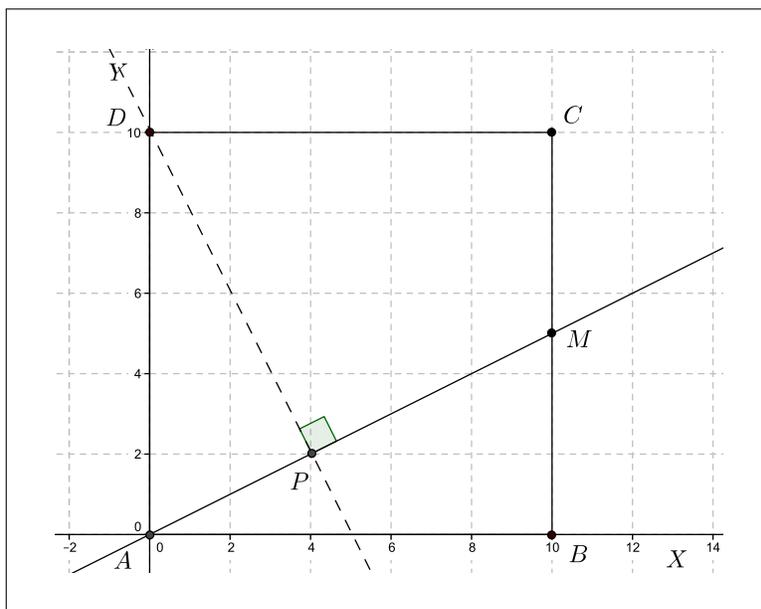


Figura 3.13: Representação no plano cartesiano dos dados do problema.

Da Figura 3.13, temos: $A = (0, 0)$, $B = (10, 0)$, $C = (10, 10)$, $D = (0, 10)$ e $M = (10, 5)$.

A equação da reta AM é $x - 2y = 0$ e a medida do segmento DP é a distância do ponto D à reta AM .

Da teoria, sabemos que a distância de um ponto (x_0, y_0) à reta $ax + by = c$ é dada pela fórmula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Assim,

$$d = \frac{|1 \cdot (0) - 2 \cdot (10) - 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4 \cdot \sqrt{5}$$

Portanto, $\overline{DP} = 4 \cdot \sqrt{5}$ cm.

3.10 Área de triângulo

Considere um triângulo $A_1A_2A_3$ do qual o vértice $A_3 = (0, 0)$ é a origem. Sejam $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que o lado A_1A_3 não é vertical, isto é, que $x_1 \neq 0$.

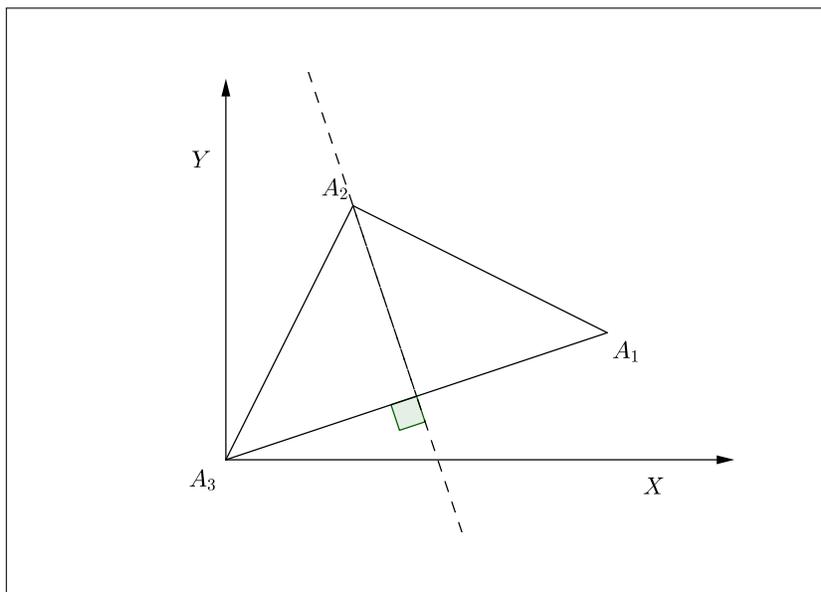


Figura 3.14: A altura é a distância do vértice à base.

Vamos considerar o lado A_1A_3 como base do triângulo. Desta forma, a distância de A_2 até a reta A_1A_3 é a sua altura. Como a equação da reta A_1A_3 é:

$$y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$$

$$y_1x - x_1y = 0$$

Para a área do triângulo $A_1A_2A_3$ temos:

$$\text{Área do } \Delta A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{y_1^2 + (-x_1)^2}}$$

$$\text{Área do } \Delta A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} \cdot |x_1y_2 - x_2y_1|$$

No caso geral, temos um triângulo $A_1A_2A_3$ onde os vértices $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$ são pontos quaisquer. A partir da origem O traçamos os segmentos orientados \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} , respectivamente equipolentes a $\overrightarrow{A_3A_1}$ e $\overrightarrow{A_3A_2}$, logo $P = (\alpha_1, \beta_1)$ e $Q = (\alpha_2, \beta_2)$, com $\alpha_1 = x_1 - x_3$, $\beta_1 = y_1 - y_3$, $\alpha_2 = x_2 - x_3$, $\beta_2 = y_2 - y_3$.

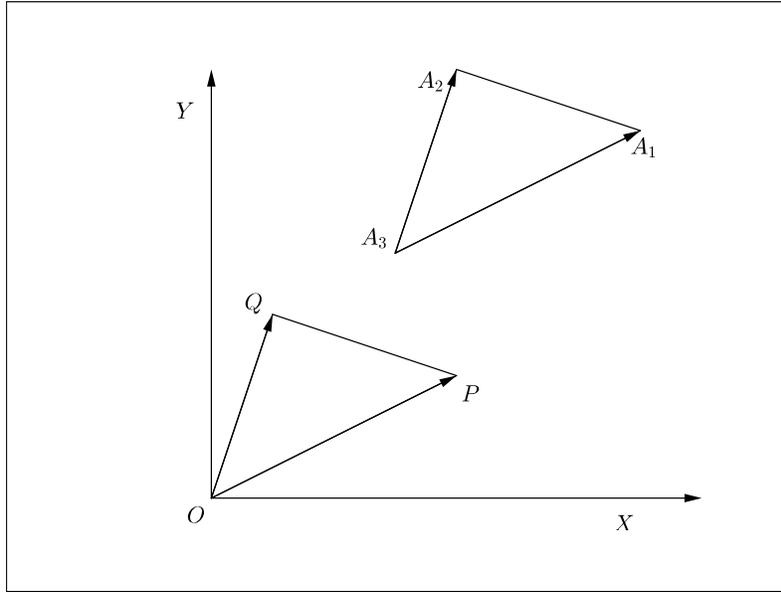


Figura 3.15: Uma translação leva o triângulo $A_1A_2A_3$ para a posição $PQQO$.

Dada a congruência entre os triângulos $A_1A_2A_3$ e $PQQO$, temos mesma área:

$$\text{Área do } \Delta A_1A_2A_3 = \text{área do } \Delta PQQO = \frac{1}{2} \cdot |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|$$

Ou seja:

$$\text{Área do } \Delta A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} \cdot |(x_1 - x_3) \cdot (y_2 - y_3) - (x_2 - x_3) \cdot (y_1 - y_3)|$$

Por fim, após efetuar as multiplicações:

$$\text{Área do } \Delta A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} \cdot |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)|$$

Apesar da aparência assustadora dessa expressão, podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$\text{Área do } \Delta A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

e estabelecer um *algoritmo* para a determinação da área de um triângulo. Lembrando que, *algoritmo* é um procedimento passo a passo que produz uma resposta para um problema.

Algoritmo para determinação da área de um triângulo:

Devemos somar os produtos dos número ao longo de cada uma das diagonais inclinadas para a direita e subtrair a soma dos produtos dos números ao longo de cada uma das diagonais inclinadas para a esquerda. A área será a metade do valor absoluto deste resultado.

Exemplo 3.10.1 (NERY[9]). Os catetos de um triângulo ABC , retângulo em A , medem $AB = 10$ cm e $AC = 15$ cm. Se AD é bissetriz do ângulo A , calcule as áreas dos triângulos ABD e ACD .

Resolução:

Vamos colocar o triângulo ABC encaixado no 1º quadrante do plano cartesiano, de modo que o vértice A coincida com a origem. Assim, temos: $A = (0, 0)$, $B = (0, 10)$ e $C = (15, 0)$.

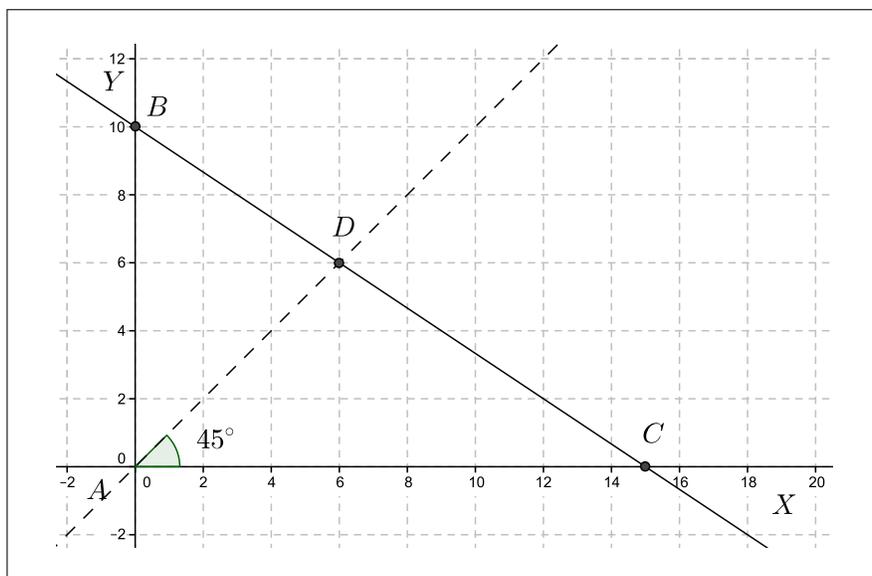


Figura 3.16: Triângulo retângulo, adequadamente encaixado no 1º quadrante.

A reta AD tem equação $y = x$, pois passa pelo ponto $(0, 0)$ e tem coeficiente angular $m = \tan 45^\circ = 1$. A reta BC tem equação $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} = 1$, pois determina nos eixos X e Y segmentos de medidas 15 e 10 respectivamente. O ponto D , pé da bissetriz AD na hipotenusa BC , que é a intersecção dessas duas retas, pode ser obtido resolvendo-se o sistema formado pelas suas respectivas equações:

$$\begin{cases} y = x \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{10} = 1 \end{cases}$$

Sendo $D = (6, 6)$ sua solução.

O triângulo ACD tem vértices $A = (0, 0)$, $C = (15, 0)$ e $D = (6, 6)$ e o triângulo ABD tem vértices $A = (0, 0)$, $B = (0, 10)$ e $D = (6, 6)$. Logo as áreas são:

$$\text{Área do } \Delta ACD = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 15 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área do } \Delta ACD = \frac{1}{2} \cdot |(0 \cdot 0 + 15 \cdot 6 + 6 \cdot 0) - (0 \cdot 15 + 0 \cdot 6 + 6 \cdot 0)|$$

$$\text{Área do } \Delta ACD = 45 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área do } \Delta ABD = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área do } \Delta ABD = \frac{1}{2} \cdot |(0 \cdot 10 + 0 \cdot 6 + 6 \cdot 0) - (0 \cdot 0 + 10 \cdot 6 + 6 \cdot 0)|$$

$$\text{Área do } \Delta ABD = 30 \text{ cm}^2$$

3.11 Área de um polígono

Nosso objetivo nessa seção é encontrar, conforme VICTOR[16], uma fórmula simples para a determinação da área de um polígono.

Consideremos - inicialmente - um polígono convexo de vértices consecutivos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ordenados no sentido anti-horário e seja $I = (x_0, y_0)$ um ponto qualquer no seu interior.

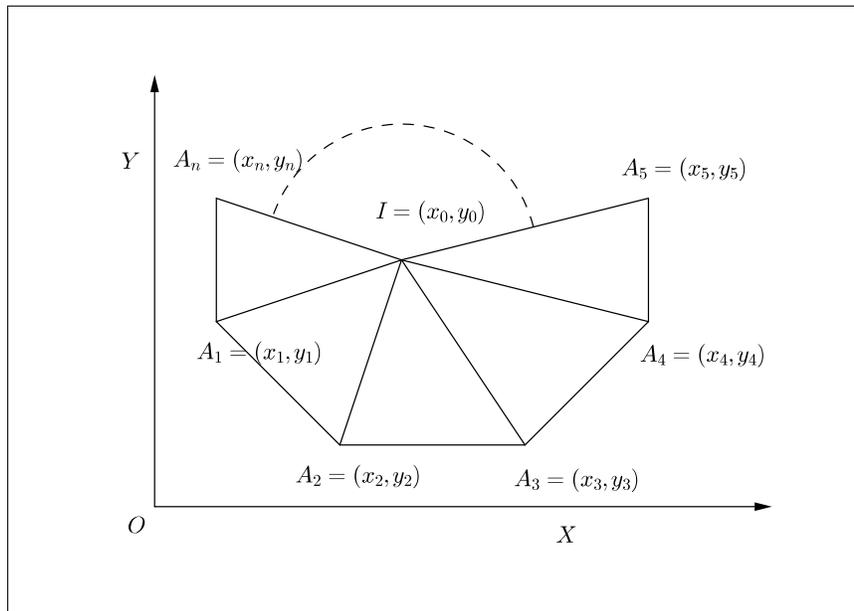


Figura 3.17: Polígono convexo qualquer.

Dividimos o polígono em n triângulos, cada um deles tendo I como um de seus vértices. Podemos aplicar a fórmula da área do triângulo para obter a seguinte expressão para o dobro da área do polígono:

$$2A = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_0 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_0 \\ y_0 & y_2 & y_3 & y_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & x_3 & x_4 & x_0 \\ y_0 & y_3 & y_4 & y_0 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_0 & x_n & x_1 & x_0 \\ y_0 & y_n & y_1 & y_0 \end{vmatrix}$$

Expandindo, obtemos:

$$\begin{aligned} & (x_0y_1 + x_1y_2 + x_2y_0) - (x_1y_0 + x_2y_1 + x_0y_2) \\ & + (x_0y_2 + x_2y_3 + x_3y_0) - (x_2y_0 + x_3y_2 + x_0y_3) \\ & + (x_0y_3 + x_3y_4 + x_4y_0) - (x_3y_0 + x_4y_3 + x_0y_4) \\ & + \dots \\ & + (x_0y_n + x_ny_1 + x_1y_0) - (x_ny_0 + x_1y_n + x_0y_1) \end{aligned}$$

Após cancelar os termos semelhantes, obtemos:

$$2A = (x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + \dots + x_ny_{n-1} + x_1y_n)$$

que pode ser escrito como:

$$2A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

Área do polígono convexo:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

Observe que essa expressão independe do ponto I , escolhido como vértice comum de todos os triângulos.

Exemplo 3.11.1 (FGV/97). No plano cartesiano:

- a) Representar graficamente os pontos (x, y) que satisfazem a relação:
 $x + 2y \leq 6$.
- b) Achar a área do polígono determinado pelas relações simultâneas:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y \leq 18 \\ x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Resolução:

- a) A reta $x + 2y = 6$ decompõe o plano em duas regiões denominadas semiplanos. A região à qual pertencem os pontos (x, y) que satisfazem a relação $x + 2y \leq 6$ é o semiplano de origem nessa reta e que contém o ponto $O = (0, 0)$.

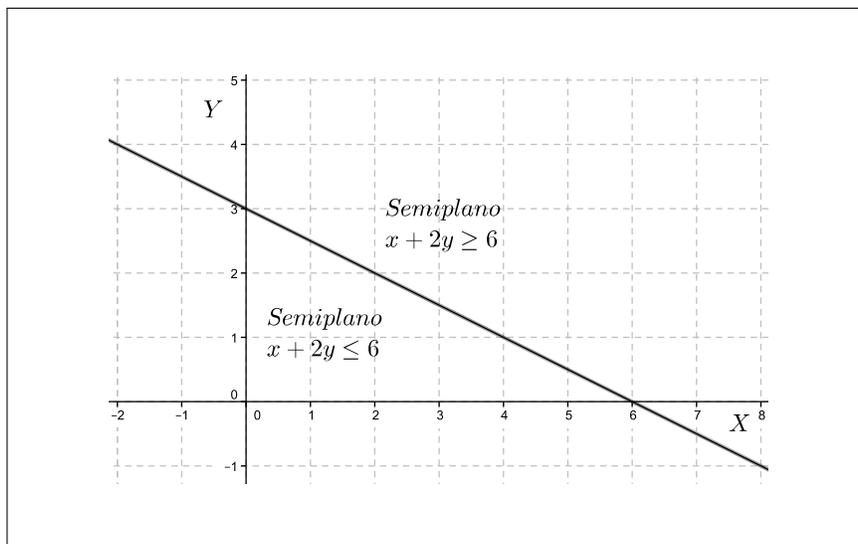


Figura 3.18: Semiplanos determinados pela reta.

b) De maneira análoga à anterior, podemos concluir que:

- A desigualdade $x - y \geq 0$ determina no plano cartesiano, um semiplano de origem na reta $x - y = 0$ e que contém o ponto $(2, 0)$.
- A desigualdade $2x + y \leq 18$ determina no plano cartesiano, um semiplano de origem na reta $2x + y = 18$ e que contém o ponto $(0, 0)$.
- A desigualdade $x \leq 8$ determina no plano cartesiano, um semiplano de origem na reta $x = 8$ e que contém o ponto $(0, 0)$.
- A desigualdade $y \geq 0$ determina no plano cartesiano, um semiplano de origem no eixo $y = 0$ e que contém o ponto $(0, 2)$.

Na figura que se segue, determinamos a intersecção das 4 regiões anteriores. Isto é, os pontos do polígono convexo $OABC$ satisfazem a todas as desigualdades.

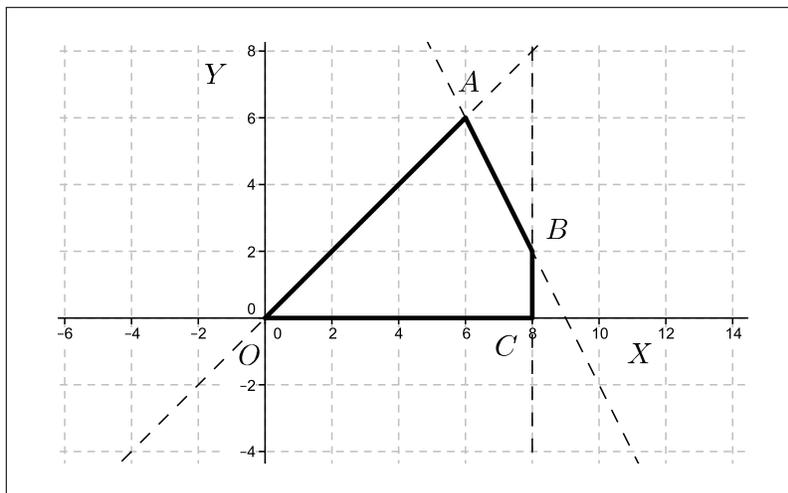


Figura 3.19: Polígono de soluções, a intersecção dos 4 semiplanos apresentados.

Considerando os pontos $O = (0, 0)$, $A = (6, 6)$, $B = (8, 2)$, $C = (8, 0)$, é possível determinar a área do polígono de soluções $OABC$. Isto é:

$$\text{Área do Polígono } OABC = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área do Polígono } OABC = \frac{1}{2} \cdot |(0 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 0 + 8 \cdot 0) - (0 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 0 \cdot 0)|$$

$$\text{Área do Polígono } OABC = \frac{1}{2} \cdot |-52| = 26$$

Capítulo 4

O Círculo

4.1 Introdução

A roda parece ter sido inventada, há cerca de 6000 anos, na Mesopotâmia. Foi uma invenção de importância extraordinária, não só porque promoveu uma revolução no campo dos transportes e da comunicação, mas também porque a roda, com diferentes modificações, passou a fazer parte de numerosos mecanismos e contribuiu para um incrível impulso ao progresso humano. Por tudo isso, o estudo do círculo ocupa um lugar de destaque na Geometria Euclidiana e na Geometria Analítica.

4.2 Lugar Geométrico

Definição 4.2.1. *Lugar geométrico* é a linha de uma trajetória, ao longo da qual se move um ponto para satisfazer algumas condições dadas.

Observação 4.2.2. Um lugar geométrico geralmente é uma curva, mas pode não ser.

4.3 A equação reduzida do círculo

Definição 4.3.1. O Círculo $\mathcal{E}=(C, r)$ é o lugar geométrico de um ponto que se movimenta no plano, mantendo sempre a mesma distância $r > 0$ de um ponto fixo C , chamado centro.

Considere o círculo $\mathcal{E}=(C, r)$ de centro $C = (a, b)$ e raio r . Um ponto $P = (x, y)$ pertence a $\mathcal{E}=(C, r)$ se, e somente se, a distância $d(C, P)$ é igual ao raio r .

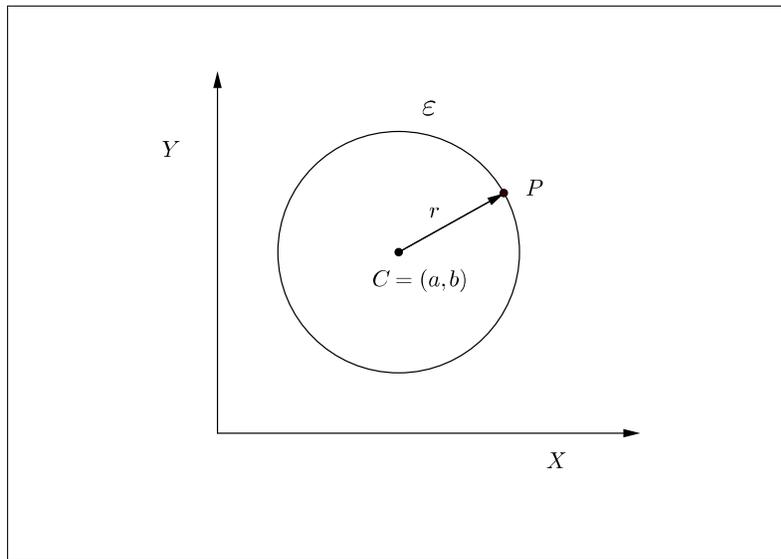


Figura 4.1: Círculo $\mathcal{E}=(C, r)$ de centro $C = (a, b)$ e raio r .

$$\begin{aligned}
 d(C, P) &= \|\vec{CP}\| = r \\
 \vec{CP} &= P - C = (x, y) - (a, b) \\
 \vec{CP} &= P - C = (x - a, y - b) \\
 d(C, P) &= \|\vec{CP}\| = r \\
 d(C, P) &= \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \\
 \text{ou seja,} \\
 (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2
 \end{aligned}$$

Denominada *equação reduzida do círculo*.

Assim, a condição necessária e suficiente para um ponto (x, y) pertença ao círculo de centro (a, b) e raio r é que (x, y) satisfaça a equação:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Exemplo 4.3.2 (NERY[9]). Calcule a área do triângulo ADE , retângulo em E , inscrito num trapézio retângulo $ABCD$, com $AB = 10$ cm, $AD = 30$ cm e $CD = 20$ cm, conforme figura anexa:

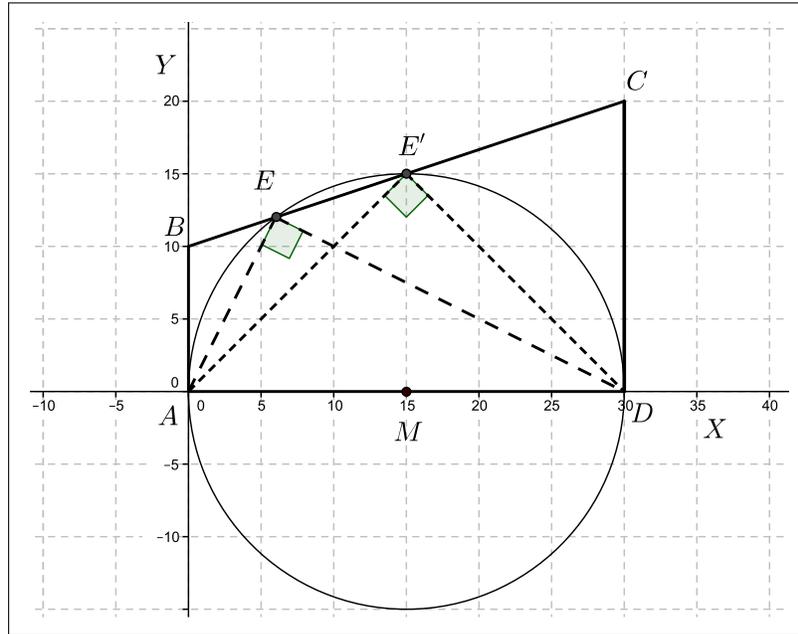


Figura 4.2: Triângulo Retângulo, conforme enunciado do problema.

Encaixamos o trapézio $ABCD$ no primeiro quadrante do plano cartesiano, fazendo os lados AD e AB ficarem contidos, respectivamente, nos eixos X e Y . Como a reta BC tem coeficiente angular $m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{20 - 10}{20 - 0} = \frac{1}{3}$ e coeficiente linear 10, sua equação reduzida é $y = \frac{1}{3} \cdot x + 10$. O círculo de diâmetro AD , com centro $M = (15, 0)$, passa pelo ponto E e tem equação: $(x - 15)^2 + y^2 = 15^2$.

O Ponto E é dado pela solução do sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \cdot x + 10 \\ (x - 15)^2 + y^2 = 15^2 \end{cases}$$

ou seja, $E = (6, 12)$ ou $E = E' = (15, 15)$.

Considerando que existem duas possibilidades para o ponto E , doravante chamadas de E e E' ; duas áreas distintas são possíveis, uma para o ΔADE e outra para o $\Delta ADE'$.

$$\text{Área do } \Delta ADE = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área do } \triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot |(0 \cdot 0 + 30 \cdot 12 + 6 \cdot 0) - (0 \cdot 30 + 0 \cdot 6 + 12 \cdot 0)|$$

$$\text{Área do } \triangle ADE = 180 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área do } \triangle ADE' = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 30 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área do } \triangle ADE' = \frac{1}{2} \cdot |(0 \cdot 0 + 30 \cdot 15 + 15 \cdot 0) - (0 \cdot 30 + 0 \cdot 15 + 15 \cdot 0)|$$

$$\text{Área do } \triangle ADE' = 225 \text{ cm}^2$$

4.4 A equação normal do círculo

Desenvolvendo a equação reduzida , obtemos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Chamada *equação normal do círculo*.

Exemplo 4.4.1. Dados os pontos $A = (-2, 0)$ e $B = (1, 0)$, o ponto $P = (x, y)$ é tal que sua distância ao ponto A é o dobro de sua distância ao ponto B , ou seja, $\overline{PA} = 2 \cdot \overline{PB}$. Qual é a trajetória do ponto P ? Em outras palavras, qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a propriedade $\overline{PA} = 2 \cdot \overline{PB}$?

Resolução:

Considerando a relação fornecida,

$$\overline{PA} = 2 \cdot \overline{PB}$$

elevando ao quadrado ambos os lados, por simplicidade, temos:

$$\overline{PA}^2 = 4 \cdot \overline{PB}^2$$

Assim,

$$(x + 2)^2 + y^2 = 4 \cdot [(x - 1)^2 + y^2]$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4 \cdot [x^2 - 2x + 1 + y^2]$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$$

$$3x^2 - 12x + 3y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

Equação de um círculo na forma normal, transformada agora para a forma reduzida:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 0 + 4$$

Somamos o número 4 para completar o quadrado que faltava, assim:

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

Desta forma foi possível identificar o lugar geométrico com clareza; trata-se do círculo de centro $(2, 0)$ e $raio = 2$.

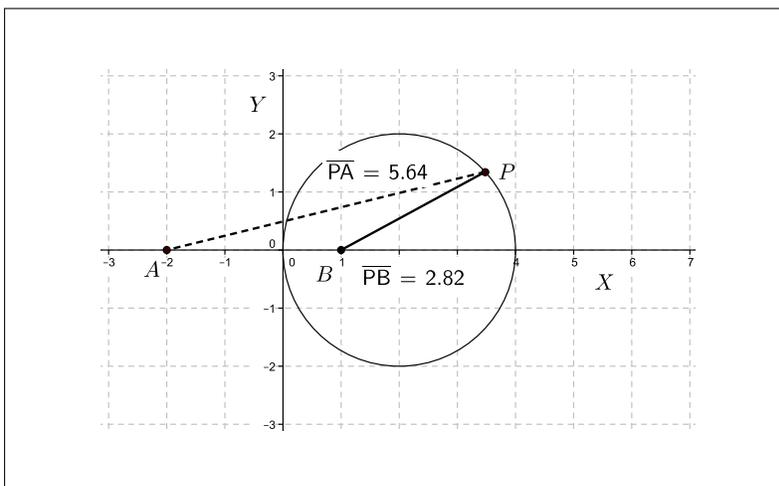


Figura 4.3: Identificação do lugar geométrico.

4.5 Reconhecimento do círculo

Partindo da equação normal do círculo,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

percebemos, por simples inspeção, que a equação do círculo pode ser expressa por:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ com } D^2 + E^2 - 4F > 0,$$

sendo as coordenadas do centro $\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$ e o raio $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

4.6 Posições relativas entre reta e círculo

Da Geometria Plana:

Sabemos da *Geometria Plana* que uma reta r e um círculo \mathcal{E} podem estar em três posições relativas, a saber:

- a) $r \cap \mathcal{E}$ consiste de dois pontos: a reta r é dita secante ao círculo \mathcal{E} .
- b) $r \cap \mathcal{E}$ consiste de exatamente um ponto: a reta r é dita tangente ao círculo \mathcal{E} . Neste caso, o ponto de intersecção é chamado de ponto de tangência de r com \mathcal{E} .
- c) $r \cap \mathcal{E} = \emptyset$: a reta r é dita exterior ao círculo \mathcal{E}

Da Geometria Analítica:

A posição relativa de uma reta $r : ax + by = c$ e um círculo $\mathcal{E} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ é determinada pesquisando o número de soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$$

Aplicando o método da substituição, a equação do círculo se reduz a uma equação do segundo grau.

O discriminante Δ dessa equação vai determinar o número de soluções do sistema, isto é, a posição da reta em relação ao círculo.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$: a reta r é dita secante ao círculo \mathcal{E} .

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$: a reta r é dita tangente ao círculo \mathcal{E} .

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$: a reta r é dita exterior ao círculo \mathcal{E} .

Exemplo 4.6.1 (Unicamp/97). Os ciclistas A e B partem do ponto $P = (-1, 1)$ no mesmo instante e com velocidade de módulos constantes. O ciclista A segue a trajetória descrita pela equação $4y - 3x - 7 = 0$ e o ciclista B , a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano e a unidade de medida de comprimento é o Km. Pergunta-se:

- Quais as coordenadas do ponto Q , distinto de P , onde haverá cruzamento das duas trajetórias?
- Se a velocidade do ciclista A for de 20 Km/h, qual deverá ser a velocidade do ciclista B para que cheguem no mesmo instante ao ponto Q ?

Resolução:

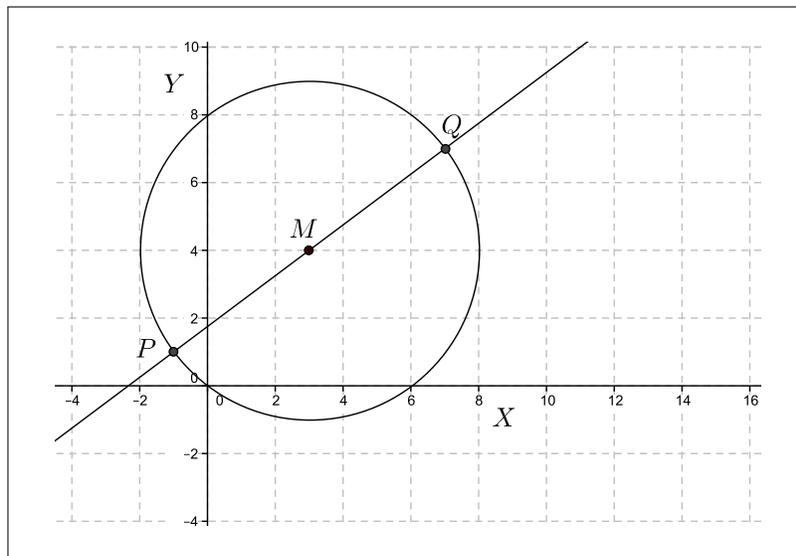


Figura 4.4: Duas trajetórias: uma reta para o ciclista A e um círculo para o B .

- Considerando a equação da trajetória do ciclista B : $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

Completando os quadrados, temos:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

Assim, trata-se de um círculo de centro $M = (3, 4)$ e *raio* = 5.

A trajetória do ciclista A é uma reta de equação $4y - 3x - 7 = 0$. Observa-se na figura, que o centro M está nessa reta, pois $4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 7 = 0$.

Como $P = (-1, 1)$ é um ponto comum às duas trajetórias, pois é o ponto de partida, o outro ponto comum, que é o ponto Q pedido, será diametralmente oposto a P . Então, se PQ é diâmetro, M é o ponto médio de PQ . Assim:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}$$

$$3 = \frac{-1 + x_Q}{2}$$

$$6 = -1 + x_Q$$

$$x_Q = 7.$$

E também,

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}$$

$$4 = \frac{1 + y_Q}{2}$$

$$8 = 1 + y_Q$$

$$y_Q = 7.$$

Portanto, encontramos as coordenadas do ponto $Q = (7, 7)$.

b) Vamos determinar o tempo (t) que o ciclista A leva para chegar em Q . A distância percorrida é o produto da velocidade pelo tempo gasto em percorrê-la.

$$\overline{PQ} = v_A \cdot t$$

$$10 = 20 \cdot t$$

$$\text{Assim, } t = \frac{1}{2} \text{ h.}$$

Para chegar em Q no mesmo instante que o ciclista A , o ciclista B deverá percorrer um número ímpar de semicírculos de diâmetro 10 Km durante meia hora.

O comprimento de um semicírculo percorrido por B é: $\frac{2\pi \cdot 5}{2} = 5\pi$.

E para um número ímpar de semicírculos: $5\pi \cdot (2k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$5\pi \cdot (2k + 1) = v_B \cdot \frac{1}{2}$$

$$v_B = 10\pi \cdot (2k + 1) \text{ Km/h}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Interpretando o resultado:

Se $k = 0$, $v_B = 10\pi \text{ Km/h} \cong 10 \cdot 3,14 \text{ Km/h} \cong 31,4 \text{ Km/h}$.

Se $k = 1$, $v_B = 10\pi \cdot 3 \text{ Km/h} \cong 30 \cdot 3,14 \text{ Km/h} \cong 94,2 \text{ Km/h}$. (velocidade considerada alta para um ciclista)

Para os valores de k acima desses, obtemos velocidades absurdas para um ciclista.

Portanto: sua velocidade deverá ser $v_B = 10\pi \text{ Km/h}$

Observação 4.6.2. Sempre é interessante, para um bom aprendizado, que professores e alunos possam abordar problemas de Geometria de diversas formas: seja da forma sintética, analítica, ou ainda na forma de uma construção com régua e compasso. Mostraremos a seguir um exemplo que permite múltiplas abordagens.

Exemplo 4.6.3 (LIMA[8],p.48). Um círculo tem raio R e um ponto dista $\frac{3R}{2}$ de seu centro. Mostre como se pode construir uma reta que passe por P , corte o círculo em A e B , de forma que $\overline{AP} = \overline{BA}$.

Resolução: Nossa opção será pela resolução analítica, foco principal desta dissertação.

Os dados do problema são um círculo \mathcal{E} com raio R e um ponto P que dista $\frac{3R}{2}$ do centro deste círculo.

Por conveniência, vamos escolher um sistema de coordenadas onde a origem é o centro do círculo \mathcal{E} e um dos eixos passa por P . E mais, temos a liberdade de escolher a escala de graduação dos eixos. Uma decisão simplificadora, escolher o raio de \mathcal{E} valendo duas unidades. Desta forma, a distância de P ao centro de \mathcal{E} será de 3 unidades. O nosso problema fica então posto de acordo com a figura que se segue:

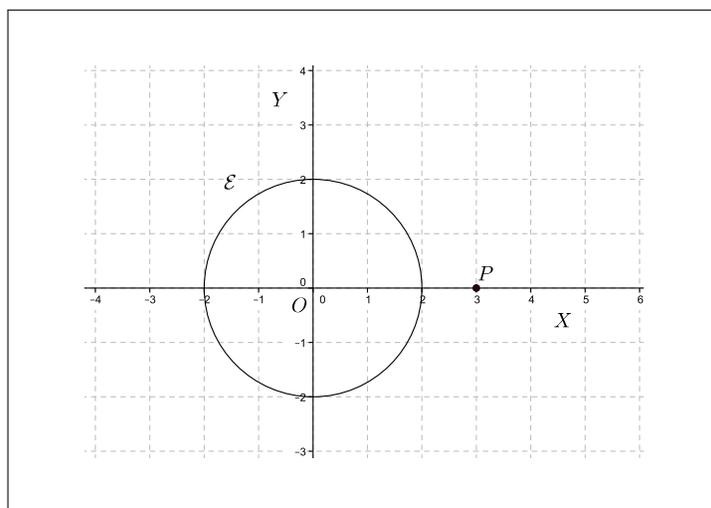


Figura 4.5: Dados do problema

Deste modo, a equação do círculo \mathcal{E} é $x^2 + y^2 = 4$ e devemos encontrar uma reta que passa pelo ponto $P = (3, 0)$ satisfazendo a condição do problema.

A equação da reta que contém o ponto $P = (3, 0)$ e tem inclinação m é dada por: $y = m \cdot (x - 3)$.

Ao resolver o sistema, encontramos as coordenadas (x, y) de intersecção desta reta com o círculo:

$$\begin{cases} y = m \cdot (x - 3) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Após simples substituição, temos:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + [m \cdot (x - 3)]^2 = 4$$

$$x^2 + m^2 \cdot (x - 3)^2 = 4$$

$$x^2 + m^2 \cdot (x^2 - 6x + 9) = 4$$

$$(1 + m^2)x^2 - 6m^2x + 9m^2 - 4 = 0$$

$$\Delta = (-6m^2)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot (9m^2 - 4)$$

$$\Delta = 16 - 20m^2$$

$$\Delta = 4 \cdot (4 - 5m^2)$$

Assim, as raízes são:

$$x = \frac{3m^2 \pm \sqrt{4 - 5m^2}}{1 + m^2}$$

Ou seja,

$$x_1 = \frac{3m^2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{1 + m^2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{3m^2 + \sqrt{4 - 5m^2}}{1 + m^2}$$

Os pontos comuns às duas figuras devem ser A e B com a condição que $\overline{PA} = \overline{AB}$

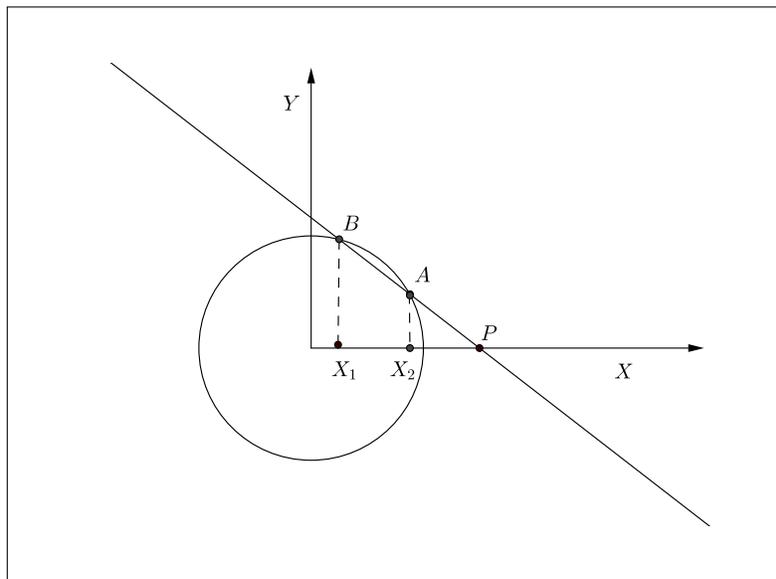


Figura 4.6: Do enunciado do problema, $\overline{PA} = \overline{AB}$

Contudo, se A deve ser ponto médio do segmento PB então:

$$x_2 = \frac{x_1 + 3}{2}$$

Isto é,

$$x_1 + 3 = 2 \cdot x_2$$

Logo,

$$\frac{3m^2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{1 + m^2} + 3 = 2 \cdot \frac{3m^2 + \sqrt{4 - 5m^2}}{1 + m^2}$$

o que nos faz concluir que

$$\sqrt{4 - 5m^2} = 1$$

e por conseguinte

$$m = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Portanto, as retas que passam por P e cortam o círculo em dois pontos A e B tais que A é médio do segmento PB têm equações

$$y = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot (x - 3)$$

Na figura que se segue, mostramos as duas retas:

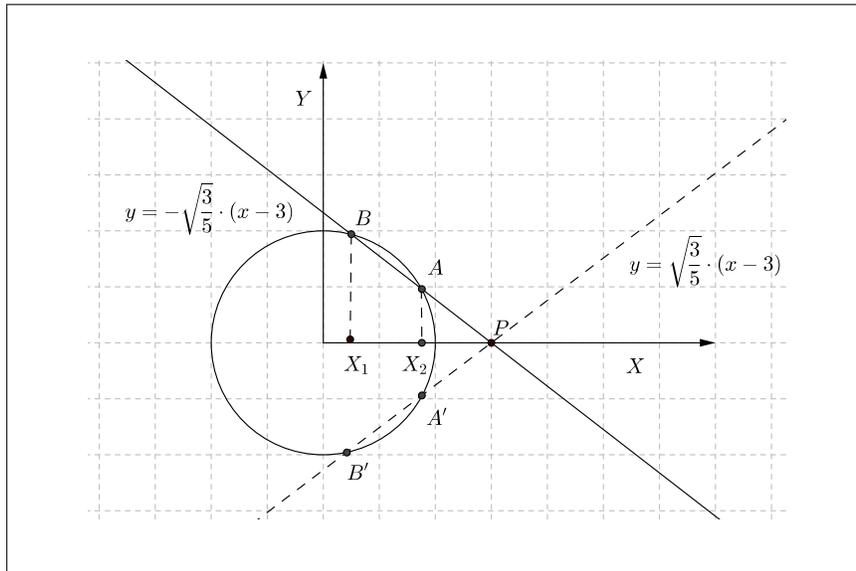


Figura 4.7: Por simetria, duas retas são possíveis.

Considerando que $m^2 = \frac{3}{5}$ e as relações abaixo,

$$x_1 = \frac{3m^2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{1 + m^2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{3m^2 + \sqrt{4 - 5m^2}}{1 + m^2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{7}{4}$$

Agora, com as equações das retas

$$y = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot (x - 3)$$

encontramos as coordenadas dos pontos de intersecção com o círculo:

$$A = \left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4} \right)$$

$$B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2} \right)$$

$$A' = \left(\frac{7}{4}, \frac{-\sqrt{15}}{4} \right)$$

$$B' = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{15}}{2} \right)$$

Portanto, as distâncias podem ser calculadas:

$$\overline{PA} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cong 1,58$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cong 1,58$$

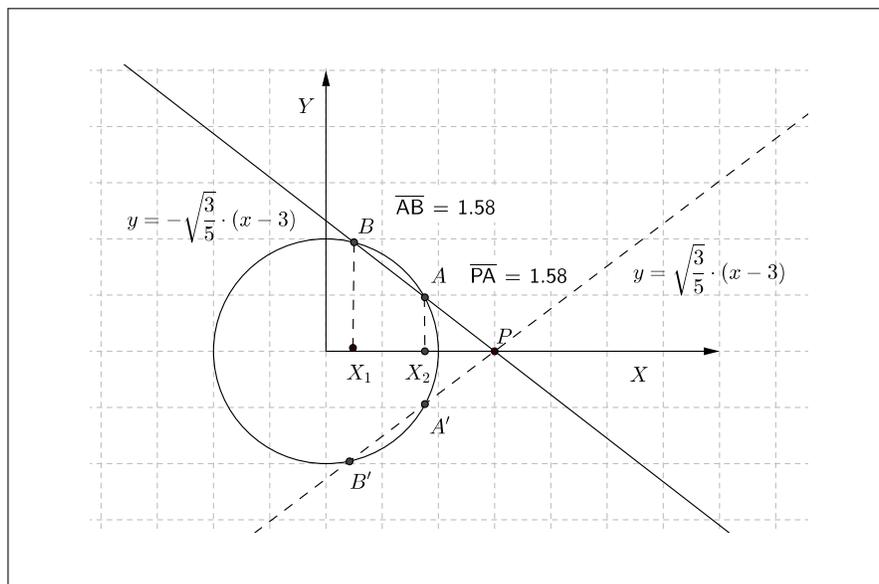


Figura 4.8: Confirmando o cálculo das distâncias; software GeoGebra.

Capítulo 5

As Cônicas

5.1 Introdução

Nome geral dado aos três tipos de curva que podem ser produzidas pela secção de um cone à medida que ele é fatiado por um corte reto em vários ângulos. O estudo das cônicas sob este ponto de vista, como intersecção de um plano e de um cone, data do século III a.C. Com a mudança no ângulo de corte, as seguintes curvas são produzidas: **círculos, elipses, parábolas e hipérbolas**. Um esclarecimento inicial: o círculo é um caso especial de elipse, com eixos maior a e menor b com medidas iguais ($a = b$).

5.2 Elipse

Definição 5.2.1. A elipse é o lugar geométrico de um ponto que se movimenta de tal modo que a soma de suas distâncias a dois focos é constante. *Para nós, FOCO é um ponto fixo usado no desenho de qualquer uma das secções cônicas.*

Consideremos os pontos F e F' como focos da elipse e o ponto médio do segmento FF' seu centro. Vamos supor a elipse centrada na origem e disposta simetricamente em relação a cada um dos eixos de coordenadas, de forma que o eixo OX seja coincidente com OF' .

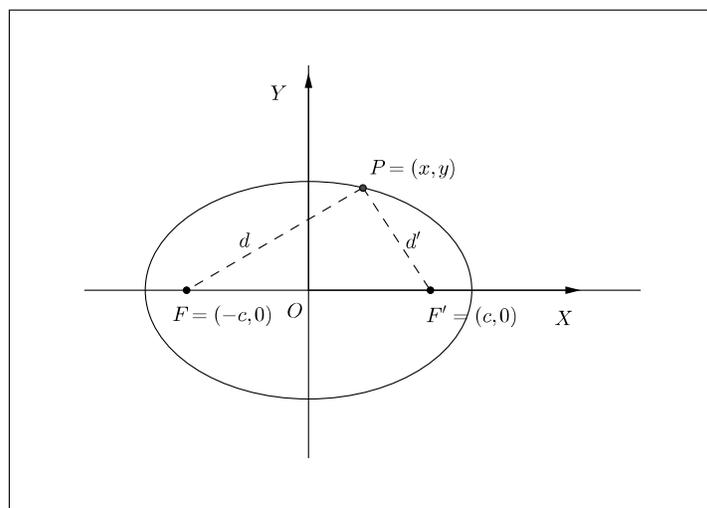


Figura 5.1: Elipse centrada na origem.

Sejam $-c$ e $c > 0$ as respectivas abscissas de F e F' ; agora considere $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$, onde $P = (x, y)$ é um ponto arbitrário da elipse.

Vamos estabelecer inicialmente que,

$$d = \overline{PF} \text{ e } d' = \overline{PF'} \quad (1)$$

e notando que

$$d = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ e } d' = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (2)$$

a equação da elipse,

$$d + d' = 2a \quad (3)$$

assume a forma

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (4)$$

Elevamos os dois lados da igualdade, para eliminar os radicais

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 + 2 \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 \quad (5)$$

ou ainda, após simplificações,

$$\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2 + 2cx) \cdot (x^2 + c^2 + y^2 - 2cx)} = 2a^2 - (x^2 + c^2 + y^2) \quad (6)$$

O radical desaparece com uma nova operação de elevar ao quadrado:

$$(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 = [2a^2 - (x^2 + c^2 + y^2)]^2 \quad (7)$$

isto é,

$$-4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2 \cdot (x^2 + c^2 + y^2)$$

que equivale a

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (8)$$

Na elipse $a > c$ e $b^2 = a^2 - c^2$.

Agora, após divisão dos dois lados por a^2b^2 , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

Assim, provamos que se o ponto (x, y) pertence à elipse de semi-eixos a e b , disposta simetricamente em relação aos dois eixos de coordenadas, então (x, y) satisfaz a equação (9).

De acordo com ÁVILA[1], isso não basta para provar que essa é a equação da elipse. É preciso demonstrar também a recíproca: *se (x, y) satisfaz a equação (9), então esse ponto pertence à elipse de semi-eixos a e b , disposta simetricamente em relação aos eixos de coordenadas.*

Para demonstrar a recíproca

Provamos que (3) \Rightarrow (9); agora é preciso provar a recíproca, que (9) \Rightarrow (3), para garantir que essas equações são equivalentes. Note que usamos duas vezes a operação de elevar ao quadrado, operação esta que introduz novas soluções na equação. Por exemplo, $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$, mas $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$, de sorte que ao elevar ao quadrado introduzimos a raiz $x = -3$. Logo, não se pode escrever a equivalência $x = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9$. Contudo, isso será verdade se a e b são números positivos. Colocando este resultado em destaque:

$$\text{Se } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0, \text{ então } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2 \quad (10)$$

Demonstrando a recíproca

Após essas observações, vamos demonstrar que (9) \Leftrightarrow (3), o que engloba a recíproca (9) \Rightarrow (3). Observe que as equações (3) e (4) são idênticas, (4) sendo outra maneira de escrever (3). As equações (4) e (5) são equivalentes porque já sabemos que d e d' são números positivos, quaisquer que sejam os valores de x e y , d e d' desempenham aqui os mesmos papéis que a e b desempenham em (10). As equações (5) e (6) são equivalentes porque (6) resulta de (5) por simplificações todas reversíveis. Vejamos agora a passagem de (6) a (7): os parênteses no radical de (6) são d^2 e d'^2 , positivos, e é também positivo o membro direito de (6), de forma que (6) e (7) são equivalentes

pela mesma razão que prova a equivalência de (4) e (5). Finalmente, (9) resulta de (7) por transformações todas elas reversíveis. Isso completa a demonstração de que (3) e (9) são equivalentes.

Equação da Elipse - Forma alternativa

Considerando o aspecto didático, apresento a seguir uma forma alternativa para obtenção da equação da Elipse. A figura de uma elipse nos dá a impressão de um círculo *achatado*. Esta impressão é correta, num sentido bem preciso. A elipse é a curva que se obtém quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado. Vamos mostrar que a equação da elipse de centro na origem e com os semieixos a e b é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

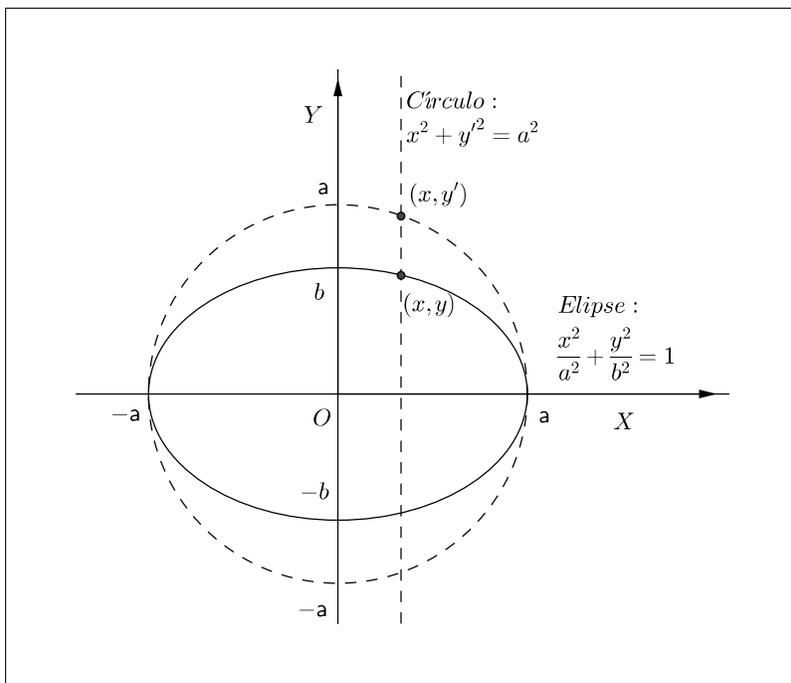


Figura 5.2: Elipse como círculo achatado.

De fato, se os pontos (x, y') de um círculo de centro na origem e raio a satisfazem a equação $x^2 + y'^2 = a^2$, os pontos (x, y) da elipse obtida reduzindo todas as ordenadas na proporção de a para b ($a > b > 0$) são tais que $\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}$, ou seja, $y' = y \cdot \frac{a}{b}$.

Substituindo esse valor de y' na equação do círculo $x^2 + y'^2 = a^2$, obtemos $x^2 + \left(\frac{y \cdot a}{b}\right)^2 = a^2$, de onde resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ que é a equação da elipse.}$$

Exemplo 5.2.2 (FGV/98). Uma elipse tem centro na origem, eixo maior medindo 12, contido no eixo das abscissas e distância do centro a um dos focos igual a 4.

a) Obtenha as coordenadas dos focos e a medida do eixo menor.

b) Achar a equação da elipse.

Resolução:

a) Sejam $2a$ e $2b$, respectivamente, as medidas dos eixos maior e menor da elipse de centro $O = (0, 0)$ e distância focal $2c$.

Se $c = 4$, temos:

$$F_1 = (-4, 0) \quad \text{e} \quad F_2 = (4, 0)$$

$$2a = 12$$

$$a = 6$$

Se $c = 4$ e $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$6^2 = b^2 + 4^2$$

$$b^2 = 20$$

$$b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Então, o eixo menor mede $2b = 4\sqrt{5}$.

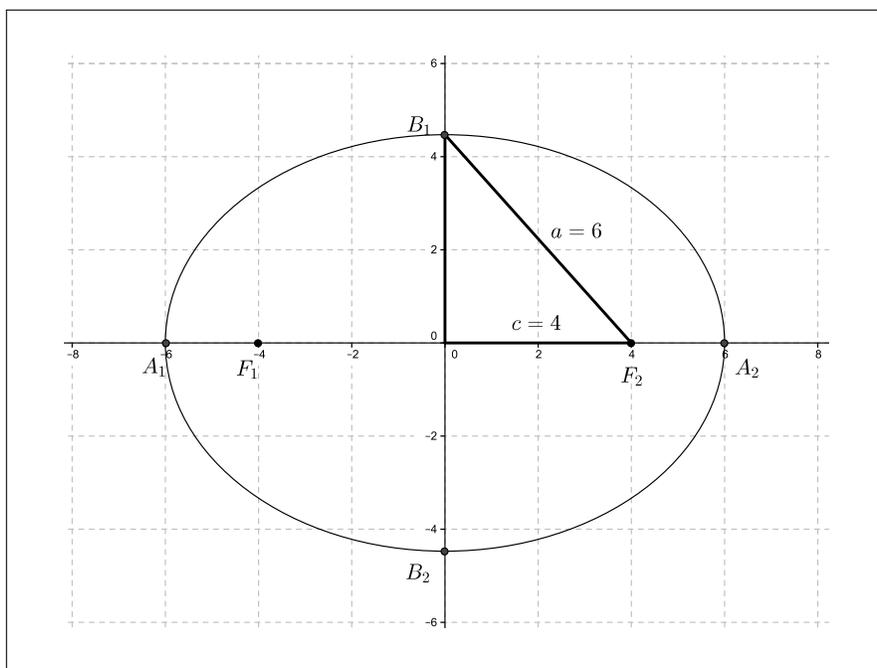


Figura 5.3: Elipse do exemplo.

b) Portanto, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

5.3 Parábola

Definição 5.3.1. Lugar geométrico de um ponto que se movimenta, de tal modo que sempre está a uma mesma distância de um foco e de uma reta fixa chamada diretriz.

Elementos:

A reta focal s da parábola \mathcal{P} é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz r .

Considerando o ponto D , intersecção de s e r :

À medida do segmento DF , $d(F, D) = d(F, r) = 2p$, denominamos parâmetro da parábola. Ao ponto V , médio de DF , vértice da parábola.

Em um sistema de coordenadas, vamos encontrar a equação da parábola, dados o foco e a diretriz. Tomemos $F = (0, p)$ como foco e $y = -p$ como diretriz.

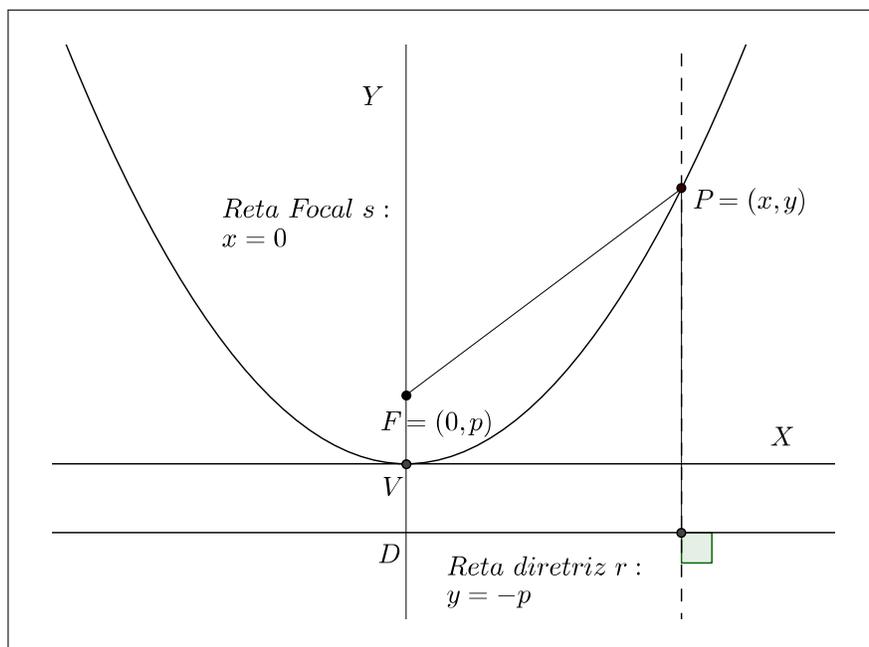


Figura 5.4: Parábola \mathcal{P} .

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola, pela definição temos:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

elevando ao quadrado e cancelando os termos iguais dos dois lados, obtemos:

$$x^2 = 4py \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{4p}x^2$$

o que mostra que a equação de uma parábola é da forma $y = ax^2$ (função quadrática). Reciprocamente, dada uma função da forma $y = ax^2$, é fácil provar que qualquer um de seus pontos possui distância ao ponto $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ igual à distância à reta $y = -\frac{1}{4a}$, o que mostra que o gráfico de $y = ax^2$ é uma parábola.

Exemplo 5.3.2. Determine a equação da parábola de foco $F = (0, -5)$ e diretriz $y=5$.

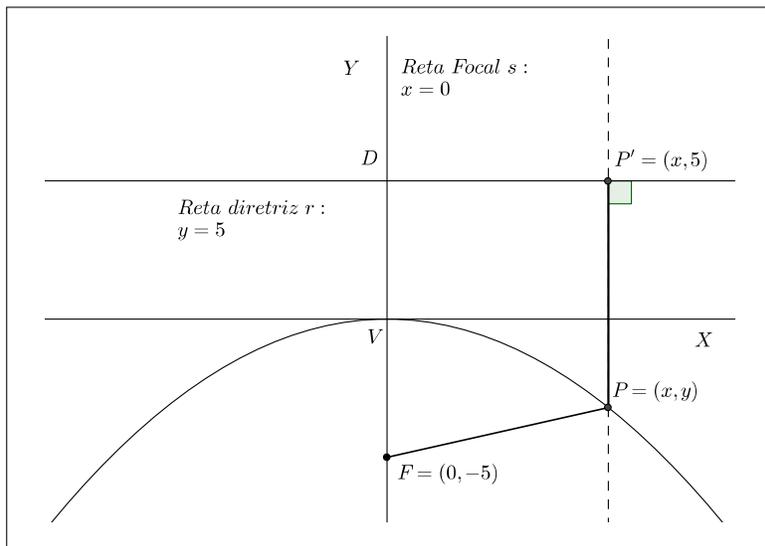


Figura 5.5: Parábola do enunciado.

Resolução:

Da definição de parábola,

$$\overline{PF} = \overline{PP'}$$

$$\overline{PF}^2 = \overline{PP'}^2$$

$$(x - 0)^2 + (y + 5)^2 = (x - x)^2 + (y - 5)^2$$

$$x^2 + (y + 5)^2 = (y - 5)^2$$

$$x^2 + y^2 + 10y + 25 = y^2 - 10y + 25$$

$$x^2 = -20y$$

5.4 Hipérbole

Definição 5.4.1. Lugar geométrico de um ponto que se movimenta de tal modo que a diferença de suas distâncias a dois focos é constante.

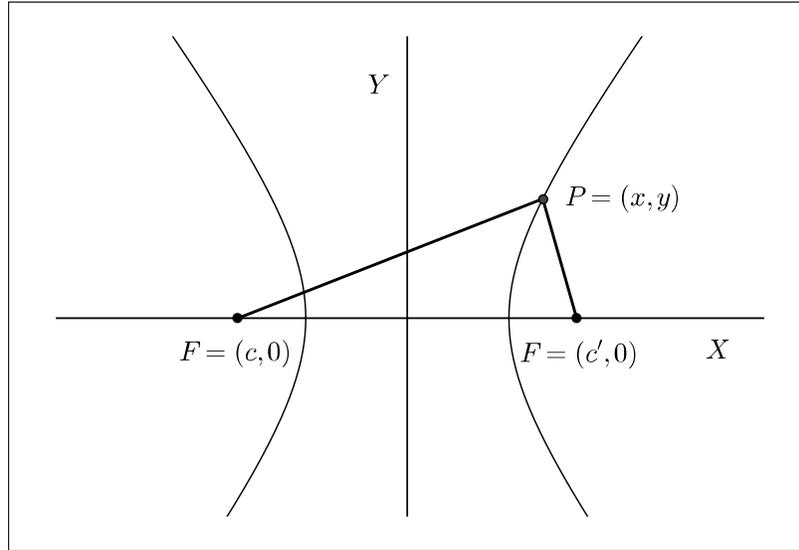


Figura 5.6: Hipérbole.

Note que a hipérbole possui dois ramos, conforme mostra a Figura. Assim,

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a \text{ ou } \overline{PF'} - \overline{PF} = 2a \quad (1)$$

Substituindo $\overline{PF} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ e $\overline{PF'} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, podemos juntar as duas equações anteriores em uma única, a saber:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \quad (2)$$

Procedendo como no caso da elipse, somos levados às seguintes equações:

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 \quad (3)$$

$$\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2 + 2cx) \cdot (x^2 + c^2 + y^2 - 2cx)} = x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 \quad (4)$$

$$(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 = [(x^2 + c^2 + y^2) - 2a^2]^2 \quad (5)$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (6)$$

Na hipérbole $c > a$ e $b^2 = c^2 - a^2$. Logo

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo os membros a^2b^2 , obtemos a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7)$$

As equivalências (3) \Leftrightarrow (4), (4) \Leftrightarrow (5), (5) \Leftrightarrow (6) são justificadas como no caso da elipse. Falta provar que (3) \Rightarrow (2), visto que já provamos (2) \Rightarrow (3) ao deduzirmos esta última equação. Mas a prova de que (3) \Rightarrow (2) segue por extração da raiz quadrada de (3). De fato, ao fazermos isso, obtemos as duas possibilidades indicadas em (2) pelo duplo sinal do 1º membro. Observe que essas possibilidades conduzem a valores positivos do 1º membro, cada um correspondendo a um ramo da hipérbole; num caso temos $PF - PF' = 2a$; no outro, $PF' - PF = 2a$.

Exemplo 5.4.2. Determine a equação da hipérbole de focos $F_1 = (-5, 0)$ e $F_2 = (5, 0)$ e de vértices $A_1 = (-3, 0)$ e $A_2 = (3, 0)$.

Resolução:

Pelos dados do problema, temos:

$$c = 5$$

$$a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$5^2 = 3^2 + b^2$$

$$b^2 = 16$$

Como os focos estão sobre o eixo X , vem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Logo, a equação da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

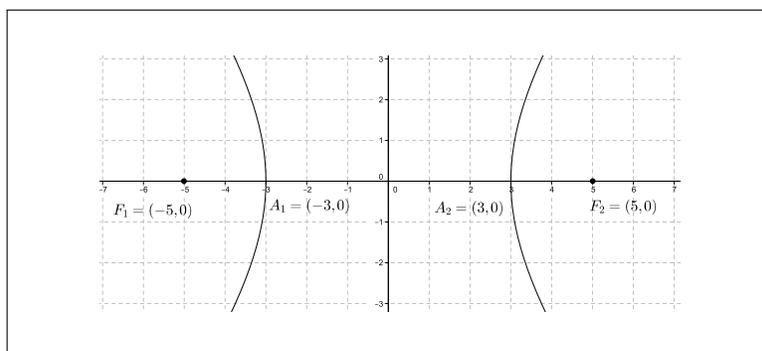


Figura 5.7: Hipérbole do exemplo.

5.5 Rotação e translação de eixos

Nas seções anteriores vimos que a equação de uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola) é sempre do segundo grau, isto é, da forma:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ com } a, b \text{ ou } c \neq 0$$

Vimos também, quando o sistema de coordenadas é escolhido de modo conveniente, a equação da cônica fica simplificada.

Na seção 5.8, proposição (5.8.2), provaremos que - exceto em certos casos particulares - o gráfico de uma equação do segundo grau, em duas variáveis, é uma cônica. De acordo com REIS[14], a técnica utilizada para identificar esta cônica consiste em simplificar sua equação efetuando-se mudanças no sistema de coordenadas. *Estas mudanças são translação e rotação de eixos.*

5.6 Translação de eixos

Considere dois sistemas de coordenadas, conforme Figura: o sistema OXY , mais usual, e o sistema $O_1X_1Y_1$, que pode ser imaginado como uma translação de OXY em que a origem O coincide com o ponto O_1 . Se P é um ponto do plano, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas. Da figura, se (x, y) são as coordenadas de P em relação ao sistema OXY e (x_1, y_1) são as coordenadas de P em relação ao sistema $O_1X_1Y_1$, temos:

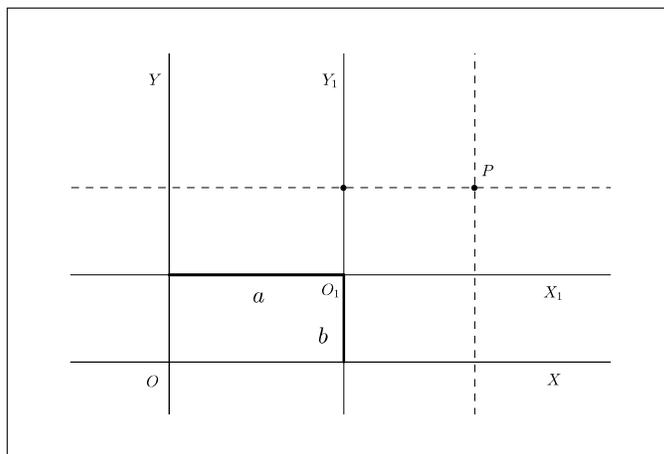


Figura 5.8: Translação de eixos.

$$\begin{aligned}x &= x_1 + a \\ y &= y_1 + b\end{aligned}$$

onde a e b são as coordenadas de O_1 em relação ao sistema OXY . Explicitando x_1 e y_1 , obtemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= x - a \\ y_1 &= y - b\end{aligned}$$

Estas equações permitem passar das coordenadas de um ponto P , dadas no sistema OXY , para as coordenadas de P com relação ao sistema $O_1X_1Y_1$.

Exemplo 5.6.1. Dado um ponto $P = (4, -1)$ no sistema OXY , quais suas coordenadas no novo sistema $O_1X_1Y_1$, em que a origem é $O_1 = (-2, 3)$?

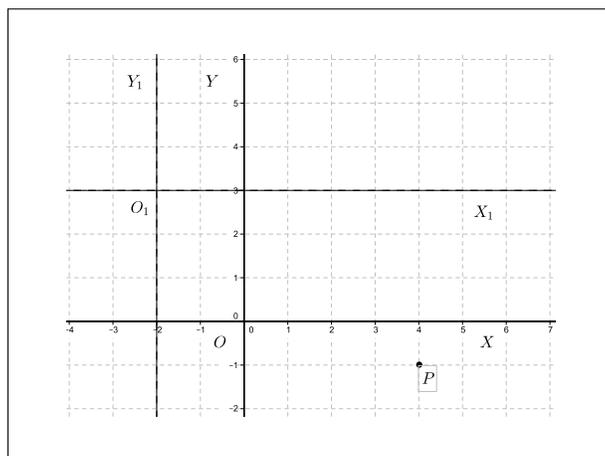


Figura 5.9: Translação de eixos do exemplo.

$$x_1 = 4 - (-2) = 6$$

$$y_1 = -1 - 3 = -4$$

Neste caso, as equações de mudanças de coordenadas são:

$$x_1 = x + 2 \text{ ou } x = x_1 - 2$$

$$y_1 = y - 3 \text{ ou } y = y_1 + 3$$

Exemplo 5.6.2. Demonstre que os gráficos das funções quadráticas $y = ax^2 + bx + c$ e $y = ax^2$ (com $a \neq 0$ e definidas de \mathbb{R} em \mathbb{R}), são idênticos (congruentes). Apenas o vértice do primeiro é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Resolução:

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left[x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right]$$

Completando o quadrado,

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

$$y = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Expressão conhecida como **forma canônica do trinômio**, que pode ser reescrita de outra maneira:

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

Efetuamos agora a translação de eixos definida pelas seguintes equações

$$x_1 = x + \frac{b}{2a} = x - \left(-\frac{b}{2a} \right)$$

$$y_1 = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = y - \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

e escrevemos a equação

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

assim,

$$y_1 = a \cdot x_1^2$$

Exemplo 5.6.3 (REIS[14],p.74). Usando uma translação conveniente, faça o reconhecimento da curva $\mathcal{C} : 4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$.

Resolução:

Completando os quadrados, obtemos

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = 9 \cdot 4$$

ou

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$$

Agora, efetuamos a translação de eixos definida pelas equações

$$x_1 = x - 1$$

$$y_1 = y - 2$$

e escrevemos a equação

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

assim

$$4x_1^2 + 9y_1^2 = 36$$

Solução do problema.

Escrevendo essa última equação na forma

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

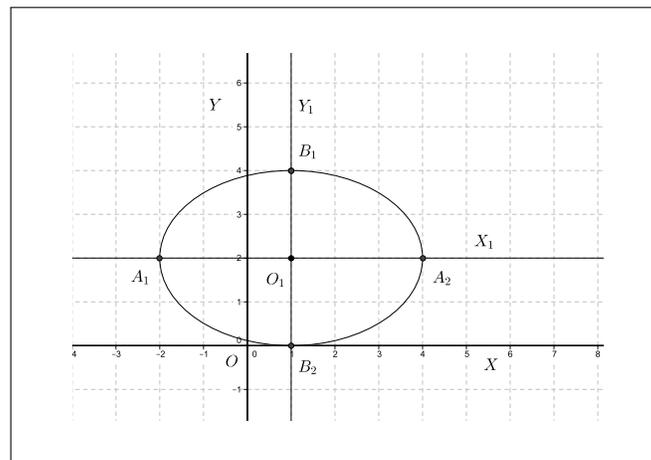


Figura 5.10: Translação de eixos do exemplo.

vemos que seu gráfico é uma elipse cujos vértices, no sistema $O_1X_1Y_1$, onde $O_1 = (1, 2)$, são:

$$A_1 = (-3, 0) \quad \text{e} \quad A_2 = (3, 0)$$

$$B_1 = (0, 2) \quad \text{e} \quad B_2 = (0, -2)$$

Observe que a elipse acima é também o gráfico da equação

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$$

em relação ao sistema OXY , pois quando se efetua uma translação a curva não se altera, apenas a equação muda.

5.7 Rotação de eixos

Considere o sistema de coordenadas OXY , e seja OX_1Y_1 , o sistema de coordenadas obtido de OXY por uma rotação de um ângulo θ , no sentido anti-horário, como mostra a Figura. Sejam (x, y) e (x_1, y_1) as coordenadas de um ponto P do plano, em relação aos sistemas OXY e OX_1Y_1 , respectivamente. Nosso objetivo é escrever x_1 e y_1 , em função de x , y e do ângulo θ . Uma rotação de um ângulo θ transforma os vetores

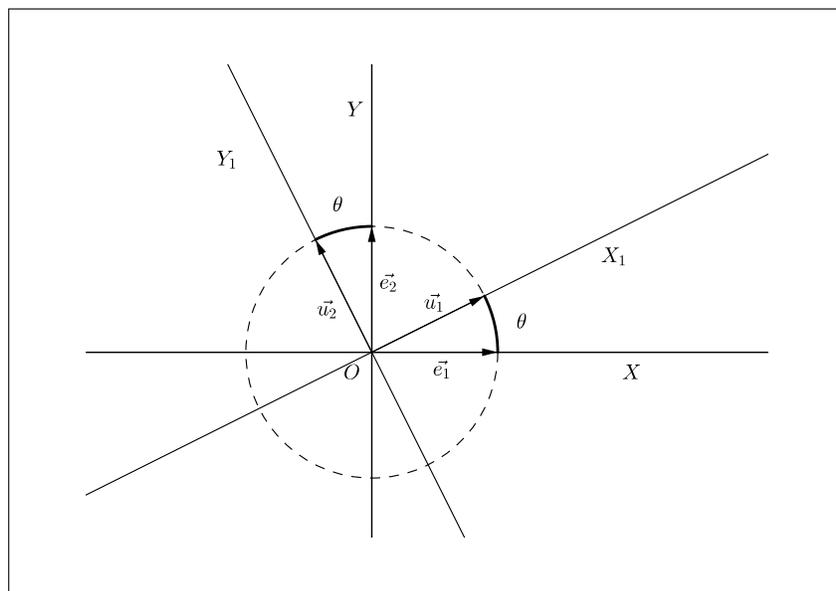


Figura 5.11: Rotação de eixos.

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{e}_2 = (0, 1)$$

nos vetores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , onde

$$\vec{u}_1 = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$$

$$\vec{u}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2.$$

Para o vetor \vec{OP} temos

$$\vec{OP} = (x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

onde x e y são as coordenadas de P em relação ao sistema OXY . Por outro lado, como \vec{u}_1 e \vec{u}_2 são unitários e perpendiculares, temos também

$$\vec{OP} = (x_1, y_1) = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2,$$

onde x_1 e y_1 são as coordenadas de P em relação ao sistema OX_1Y_1 .

Temos, então, a igualdade

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$$

ou

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_1(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) + y_1(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)$$

de onde obtemos

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta$$

$$y = x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta$$

ou

$$x_1 = x \cos\theta + y \sin\theta$$

$$y_1 = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

Existe uma outra forma de apresentar estas relações, utilizando matrizes:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 5.7.1. Se $P = (6, 4)$ e o sistema sofre uma rotação de um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos nos eixos, as novas coordenadas de P serão:

$$x_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$y_1 = -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 \cdot \sqrt{3} + 2.$$

ou seja,

$$P = (3 + 2 \cdot \sqrt{3}, -3 \cdot \sqrt{3} + 2)$$

Exemplo 5.7.2 (REIS[14],p.77). Usando uma rotação de eixos conveniente, transforme a equação $4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0$ em uma equação que não contenha o termo misto xy .

Resolução:

Substituindo x e y na equação dada por

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\theta$$

$$y = x_1 \text{sen}\theta + y_1 \cos\theta$$

obtemos

$$4 \cdot (x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\theta)^2 + (x_1 \text{sen}\theta + y_1 \cos\theta)^2 + 4 \cdot (x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\theta) \cdot (x_1 \text{sen}\theta + y_1 \cos\theta) - 2 \cdot (x_1 \text{sen}\theta + y_1 \cos\theta) = 0$$

que é equivalente da equação inicial em relação ao sistema OX_1Y_1 , obtido do sistema OXY por uma rotação de um ângulo θ . Desenvolvendo-a, obtemos

$$(4 \cdot \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta + 4 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta) \cdot x_1^2 + (4 \cdot \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 4 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta) \cdot y_1^2 + (-6 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta + 4 \cdot \cos^2\theta - 4 \cdot \text{sen}^2\theta) \cdot x_1 y_1 + (\cos\theta - 2 \cdot \text{sen}\theta) \cdot x_1 + (-\text{sen}\theta - 2 \cdot \cos\theta) \cdot y_1 = 0$$

Como nosso objetivo é obter uma equação que não contenha o termo misto $x_1 y_1$, o coeficiente de $x_1 y_1$ deve ser zero. Assim, impomos para θ a condição

$$-6 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta + 4 \cdot \cos^2\theta - 4 \cdot \text{sen}^2\theta = 0$$

Lembrando as identidades, $\text{sen}2\theta = 2 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta$ e $\text{cos}2\theta = \text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta$, obtemos:

$$\begin{aligned} -3 \cdot (2 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta) + 4 \cdot (\text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta) &= 0 \\ -3 \cdot \text{sen}2\theta + 4 \cdot \text{cos}2\theta &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\tan 2\theta = \frac{4}{3}$$

A partir desta igualdade deduzimos que

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \text{sen}\theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de $\text{sen}\theta$ e $\text{cos}\theta$ na equação abaixo e efetuando as contas, obtemos:

$$\begin{aligned} (4 \cdot \text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta + 4 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta) \cdot x_1^2 + (4 \cdot \text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta - 4 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta) \cdot y_1^2 \\ + (-6 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta + 4 \cdot \text{cos}^2\theta - 4 \cdot \text{sen}^2\theta) \cdot x_1 y_1 + (\text{cos}\theta - 2 \cdot \text{sen}\theta) \cdot x_1 + (-\text{sen}\theta - 2 \cdot \text{cos}\theta) \cdot y_1 = 0 \\ y_1 = \sqrt{5} \cdot x_1^2 \end{aligned}$$

O gráfico desta equação, como já estudado, é uma parábola. Ela está representada, juntamente com os dois sistemas de coordenadas, na Figura 5.12.

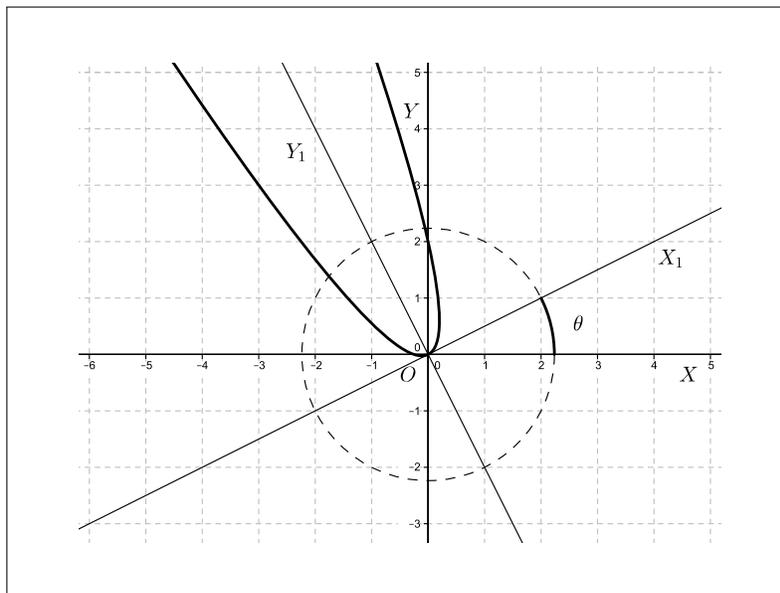


Figura 5.12: Cônica identificada, após rotação dos eixos.

Observe que esta parábola é também o gráfico da equação

$$4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0$$

em relação ao sistema OXY .

Dada uma equação do segundo grau nas variáveis x e y , usando uma rotação conveniente de eixos, podemos eliminar o termo misto xy . O mesmo algoritmo pode ser aplicado em qualquer equação do segundo grau, fato destacado na próxima proposição:

Proposição 5.7.3. Dada uma equação geral do segundo grau

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ com } a, b \text{ ou } c \neq 0$$

O termo misto xy pode ser eliminado, rotacionando o sistema de coordenadas de um ângulo θ :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{c}{a-b} \right), \text{ se } a \neq b.$$

ou

$$\theta = 45^\circ, \text{ se } a = b.$$

Exemplo 5.7.4 (REIS[14],p.79). Faça o reconhecimento da cônica \mathcal{C} , sendo dada sua equação:

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0$$

Como o coeficiente de x^2 é igual ao de y^2 , a rotação é de $\frac{\pi}{4}$ radianos e as equações de mudança de sistema são

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1$$

Substituindo estes valores na equação dada e simplificando a equação resultante, obtemos

$$x_1^2 - 4y_1^2 - 4x_1 + 8y_1 - 16 = 0$$

Depois de completarmos os quadrados em x_1 e y_1 , podemos escrever esta última equação assim

$$\frac{(x_1 - 2)^2}{16} - \frac{(y_1 - 1)^2}{4} = 1$$

que se transforma em

$$\frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{4} = 1$$

após efetuarmos a translação de eixos definida por

$$x_2 = x_1 - 2$$

$$y_2 = y_1 - 1$$

O gráfico desta equação é uma hipérbole. Ela está representada na Figura 5.13, juntamente com os três sistemas de coordenadas. A construção da Figura 5.13 obedeceu à seguinte ordem: primeiro desenhamos o sistema de coordenadas OXY ; girando tal sistema de 45° , obtivemos o sistema OX_1Y_1 ; o sistema $O'X_2Y_2$ foi obtido conforme a translação definida pelas equações

$$x_2 = x_1 - 2$$

$$y_2 = y_1 - 1$$

isto é, uma translação de OX_1Y_1 , onde o ponto $(2, 1)$, relativamente ao sistema OX_1Y_1 , é a nova origem. Por fim, o desenho foi feito no sistema $O'X_2Y_2$. Observe que: com a rotação, o eixo X_1 ficou paralelo ao eixo da hipérbole e, com a translação a origem do novo sistema $O'X_2Y_2$ coincidiu com o centro da hipérbole.

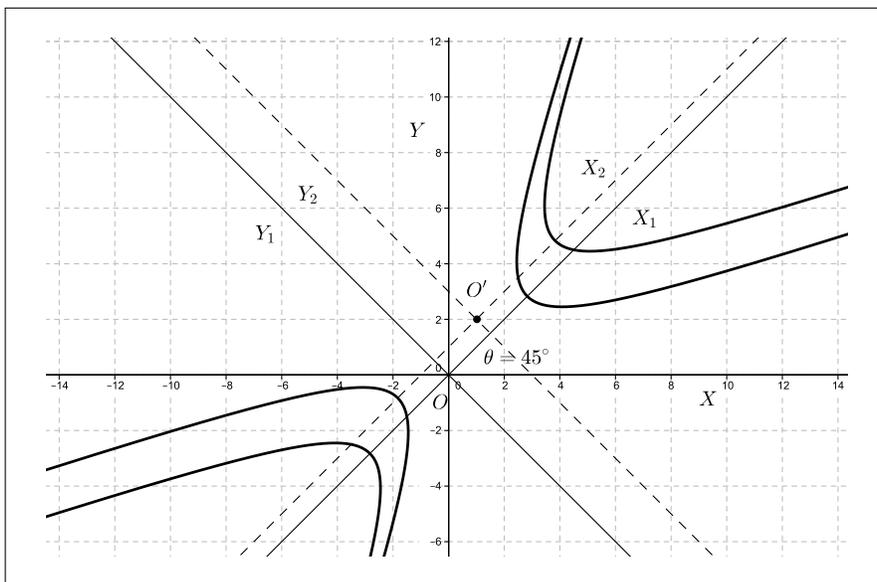


Figura 5.13: Cônica identificada, após rotação e translação dos eixos.

5.8 Equação geral do segundo grau

Já vimos que as cônicas (elipse, hipérbole e parábola) são subconjuntos do plano cujas equações são do segundo grau. Nos exemplos seguintes apresentamos outros subconjuntos do plano cujas equações são, também, do segundo grau.

Exemplo 5.8.1. Determine uma equação do segundo grau cujo gráfico seja o subconjunto constituído das retas

$$r : ax + by + c = 0$$

$$s : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Resolução: Indiquemos por $r \cup s$ o subconjunto das retas r e s . Como um ponto (x_0, y_0) pertence a $r \cup s$, se, e somente se,

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \quad \text{ou} \quad a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$$

e uma destas equações de anula se, e somente se,

$$(ax_0 + by_0 + c) \cdot (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1) = 0$$

segue que $r \cup s$ é o gráfico de

$$(ax + by + c) \cdot (a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

que, evidentemente, é uma equação do segundo grau em x e y .

Por exemplo, o gráfico da equação

$$(x + y + 1) \cdot (2x - y + 4) = 0 \text{ ou } 2x^2 - y^2 + xy + 6x + 3y + 4 = 0$$

é o par de retas mostrado na Figura 5.14:

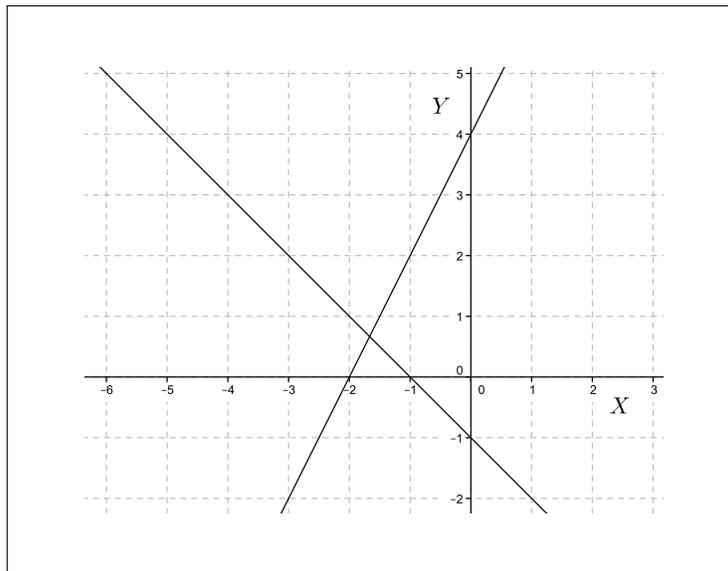


Figura 5.14: Um par de retas concorrentes.

Observe que, se $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ são equações da mesma reta, então

$$(ax + by + c) \cdot (a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

é uma equação do segundo grau cujo gráfico é uma única reta. Por exemplo, o gráfico de

$$(x + y - 1) \cdot (2x + 2y - 2) = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 4x - 4y + 2 = 0$$

é a reta representada na Figura 5.15.

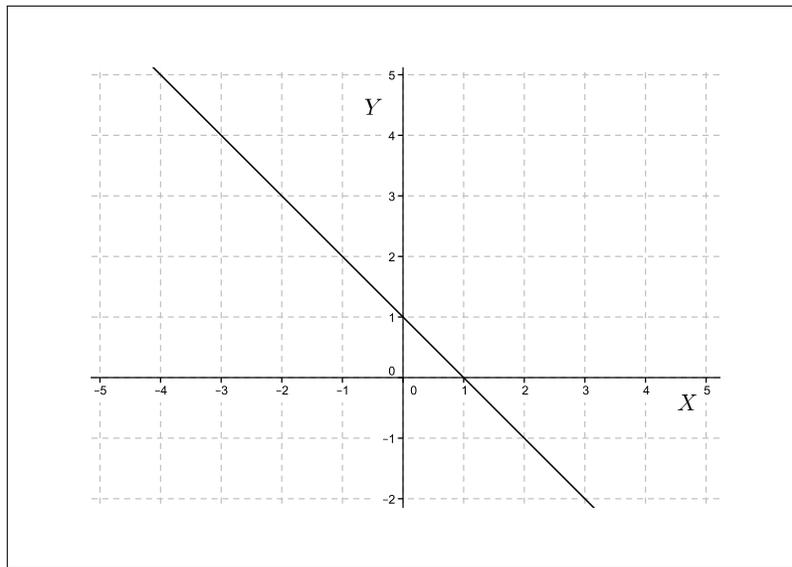


Figura 5.15: Uma única reta.

Pode também acontecer que o gráfico de uma equação do segundo grau seja um único ponto ou o conjunto vazio. Por exemplo, o gráfico de

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

é o ponto $(1, -3)$.

Agora, o gráfico da equação $4x^2 + 9y^2 + 5 = 0$ é o conjunto vazio.

Resumindo, o gráfico de uma equação do segundo grau pode ser:

- Uma elipse**
- Uma parábola**
- Uma hipérbole**
- Um par de retas**
- Uma única reta**
- Um ponto**
- O conjunto vazio.**

Com mais rigor, vamos demonstrar que o gráfico de qualquer equação do segundo grau, com duas variáveis, é um destes subconjuntos. Eles, exceto o subconjunto vazio, são as possíveis intersecções de um cone com um plano e, por esta razão, são chamadas cônicas.

Proposição 5.8.2. O gráfico de uma equação do segundo grau - da forma:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ com } a, b \text{ ou } c \neq 0$$

é uma cônica.

Demonstração: Inicialmente efetuamos uma rotação de eixos de um ângulo θ , onde

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{c}{a-b} \right) \text{ se } a \neq b,$$

$$\theta = 45^\circ, \text{ se } a = b.$$

De acordo com a proposição (5.7.3), após esta rotação a equação dada se transforma numa equação da forma

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.

• Se $A \neq 0$ e $B = 0$, temos:

$$Ax_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

Neste caso, se $E = 0$, esta equação se reduz a

$$Ax_1^2 + Dx_1 + F = 0$$

cujos gráficos são um par de retas paralelas ao eixo Y_1 , uma reta paralela ao eixo Y_1 , ou o conjunto vazio, conforme $D^2 - 4AF$ seja, respectivamente, maior, igual ou menor que zero.

Se $E \neq 0$, temos:

$$Ax_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

$$Ey_1 = -Ax_1^2 - Dx_1 - F$$

$$y_1 = -\frac{A}{E}x_1^2 - \frac{D}{E}x_1 - \frac{F}{E}$$

cujos gráficos são uma parábola. Portanto, a proposição está provada no caso $A \neq 0$ e $B = 0$. A prova do caso $A = 0$ e $B \neq 0$ é análoga.

• Para A e B não-nulos, temos:

Completando os quadrados em x_1 e y_1 ,

$$Ax_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

$$A \cdot \left(x_1^2 + \frac{D}{A}x_1 + \frac{D^2}{4A^2} \right) + B \cdot \left(y_1^2 + \frac{E}{B}y_1 + \frac{E^2}{4B^2} \right) = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}$$

ou

$$A \cdot \left(x_1 + \frac{D}{2A} \right)^2 + B \cdot \left(y_1 + \frac{E}{2B} \right)^2 = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}$$

Efetuada a translação de eixos definida pelas equações

$$x_2 = x_1 + \frac{D}{2A}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{E}{2B} \quad ,$$

A equação fica reduzida a

$$Ax_2^2 + By_2^2 = \Delta \quad ,$$

$$\text{onde } \Delta = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}$$

Se $\Delta = 0$, o gráfico é um par de retas concorrentes se A e B tiverem sinais contrários, ou um ponto, se A e B tiverem o mesmo sinal.

Se $\Delta \neq 0$, obtemos:

$$Ax_2^2 + By_2^2 = \Delta,$$

$$\frac{x_2^2}{\frac{\Delta}{A}} + \frac{y_2^2}{\frac{\Delta}{B}} = 1$$

cujo gráfico é uma elipse, se A , B e Δ tiverem o mesmo sinal, ou uma hipérbole, se os sinais de A e B forem contrários.

Capítulo 6

Números Complexos

6.1 Contextualização Histórica

Do seu aparecimento

De acordo com SAMPAIO[15], a aceitação dos **números complexos** ocorreu no século XVI, quando os matemáticos descobriram a fórmula geral de resolução de equações do 3º grau. No tempo de Cardano e Tartaglia, a quem devemos a fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

para a resolução de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, ainda não se admitiam os números complexos.

O primeiro algebrista a formular regras elementares das operações dos números complexos foi Rafael Bombelli, em seu tratado *L'Algebra* (1572).

Bombelli observou que a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ tem uma solução real positiva, a saber $x = 4$. Notou também que as demais soluções dessa equação, $-2 \pm \sqrt{3}$, são também reais, sendo elas os zeros do polinômio do 2º grau $x^2 + 4x + 1$, obtido como quociente da divisão de $x^3 - 15x - 4$ por $x - 4$.

No entanto, a fórmula de Cardano não se aplica à cúbica em questão, pois nesse caso $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -121 < 0$.

Um notável paradoxo surgiu então: a cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$ tem três raízes reais e, no entanto, a fórmula de Cardano produzia uma expressão numérica destituída de sentido:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Com este paradoxo surge a necessidade de se atribuir um significado para a raiz quadrada de um número negativo. Antes o entendimento era outro, a saber: o aparecimento da raiz quadrada de um número negativo - *na resolução de uma equação de segundo grau* - indicava que o problema equacionado não tinha solução.

Para contornar essa dificuldade Bombelli supôs que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ eram números - respectivamente - da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$ e realizou operações como se fossem números reais. Portanto, seguindo os passos de Bombelli, vamos determinar os valores para a e b .

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b} \Leftrightarrow (a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

Assim,

$$a^3 + 3a^2\sqrt{-b} + 3a(\sqrt{-b})^2 + (\sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{121 \cdot (-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - 3ab) + (3a^2 - b) \cdot \sqrt{-b} = 2 + 11 \cdot \sqrt{-1}$$

Desta forma, $b = 1$ e $a = 2$. Portanto:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

A partir de Bombelli, os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos de forma operacional, mesmo sem entender seu significado.

Dessas considerações, adotamos o símbolo $i = \sqrt{-1}$ como se fosse um número. Ele deve ter a propriedade de que $i^2 = -1$ e deve operar ao lado dos números reais com as mesmas leis formais que regem estes números. Desta forma, introduzimos os números complexos como sendo os números da forma $x + yi$, com x e $y \in \mathbb{R}$.

O novo elemento $i = \sqrt{-1}$ é chamado unidade imaginária; x é chamado de parte real e y de parte imaginária do número complexo $x + yi$.

Da sua representação geométrica

Agora apareceu um problema: Como representar, o número i e seus *derivados*, como toda a família de imaginários yi , bem como os números *mistos ou complexos*, resultantes da soma dos reais x com os imaginários yi ? Como representar os números complexos de modo a dar significado às operações realizadas com eles?

A idéia de representar os números na forma $z = x + yi$ como pontos de um plano pode parecer natural, mas permaneceu latente durante muitas décadas. Esta idéia ganhou força quando Gauss

e Argand, notaram uma associação entre as partes real e imaginária de um número complexo e as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, tornando mais fácil a visualização desses números.

Em resumo, a inspiração fundamental é a seguinte:

- quando se multiplica um número real por -1 , sua imagem na reta real é deslocada segundo um arco de 180° , passando da semireta positiva para a negativa, e vice-versa: $N \cdot (-1) = -N$.

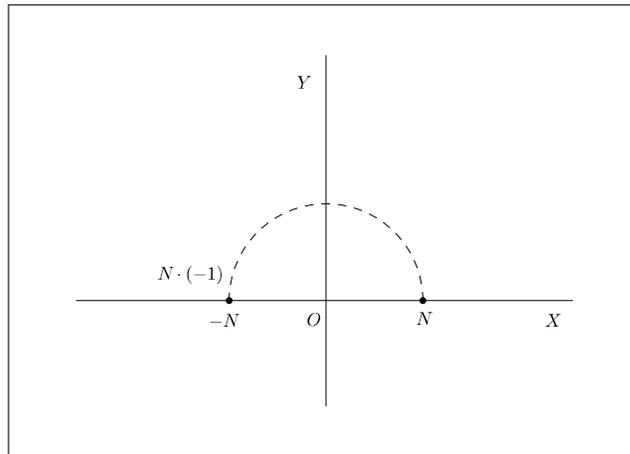


Figura 6.1: A imagem de N sofre rotação segundo arco de 180° , quando N é multiplicado por -1 .

- quando se multiplica um número real por i^2 , ou seja, por -1 , é como se tivéssemos multiplicado o número real por i e multiplicássemos o resultado novamente por i : $N \cdot (-1) = N \cdot i \cdot i = -N$

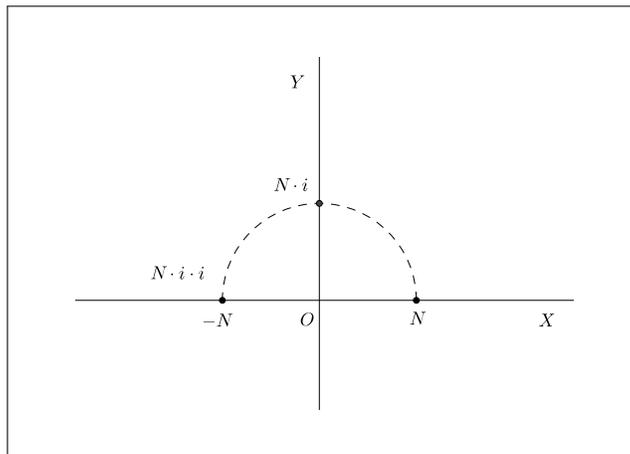


Figura 6.2: A imagem de N sofre rotação segundo arco de 180° , quando N é multiplicado por $i \cdot i$.

- se o resultado das duas multiplicações idênticas e sucessivas foi uma rotação de 180° , seria natural considerar o resultado de cada uma das multiplicações parciais por i como o resultado de uma rotação de 90° : $N \cdot i = Ni$ (rotação de 90°).
- assim, multiplicar um número real por i corresponderia a representar tal número em um eixo perpendicular ao eixo real.

Essa pode ter sido a inspiração para a representação do número imaginário i no eixo perpendicular ao eixo real, o que conduziu à representação de todo complexo $z = x + yi$ como um ponto do plano gerado pelas unidades real 1 e imaginária i . O plano em que os complexos são representados constitui uma extensão da reta real e é conhecido como plano complexo ou plano de Argand-Gauss.

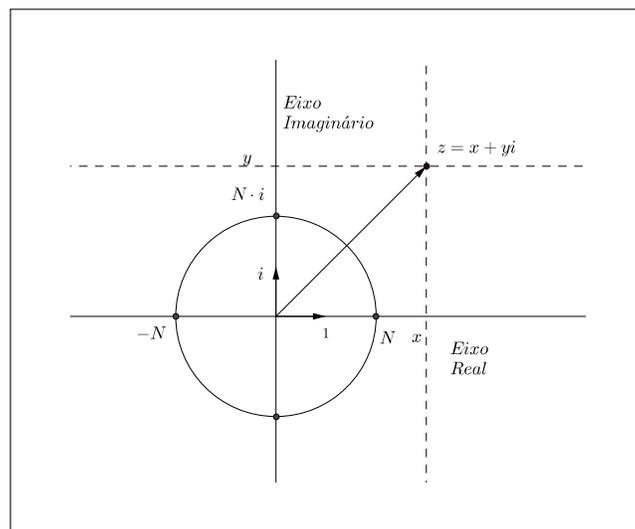


Figura 6.3: Plano complexo ou de Argand-Gauss.

Da nossa proposta: O número complexo como vetor

Como já sabemos, todo número complexo $z = x + yi$ com x e $y \in \mathbb{R}$, pode ser representado geometricamente por um ponto $P = (x, y)$ no plano de Argand-Gauss. Um número complexo não nulo pode ser representado também por um vetor \overrightarrow{OP} de origem no ponto $O = (0, 0)$, origem do plano complexo, e extremidade do ponto $P = (x, y)$.

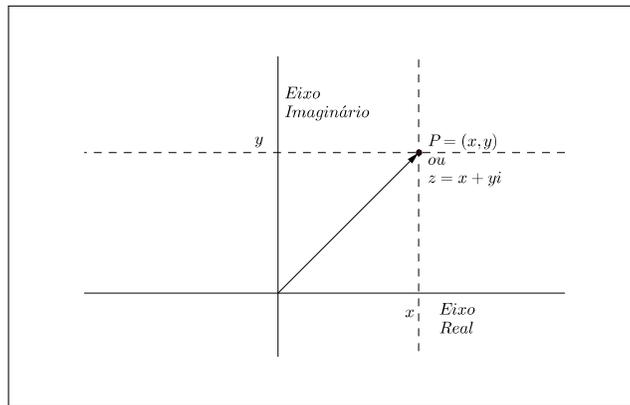


Figura 6.4: Número complexo como vetor.

Logo, todo conhecimento sobre vetores pode ser transferido para o universo dos números complexos. Temos agora um forte argumento em defesa de nossa proposta, isto é, o ensino dos complexos será facilitado após adotarmos o tratamento vetorial para a Geometria Analítica.

6.2 Plano complexo

Dado o número complexo $z = x + yi$, sua parte real x é denotada por $Re z$, e sua parte imaginária y , por $Im z$. O plano complexo é o conjunto de representações de todos os números complexos $z = x + yi$ pelos pontos $P = (x, y)$ do plano. É conveniente identificar o número complexo $z = x + yi$ com o ponto $P = (x, y)$, o que é possível através das seguintes definições:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

É fácil ver então que $a = (a, 0)$ e $i = (0, 1)$

A representação dos números complexos por pontos do plano é muito útil e de uso frequente. Por meio dela, o número complexo $z = x + yi$ é identificado com o ponto (x, y) , ou com o vetor \vec{Oz} de componentes x e y ; vide figura (6.4). As conhecidas regras do paralelogramo para a soma e subtração de vetores se aplicam, então, no caso de soma e subtração de números complexos.

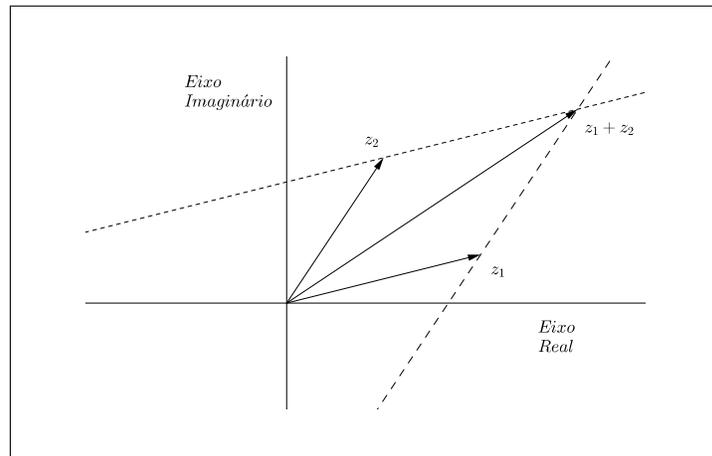


Figura 6.5: Soma de números complexos.

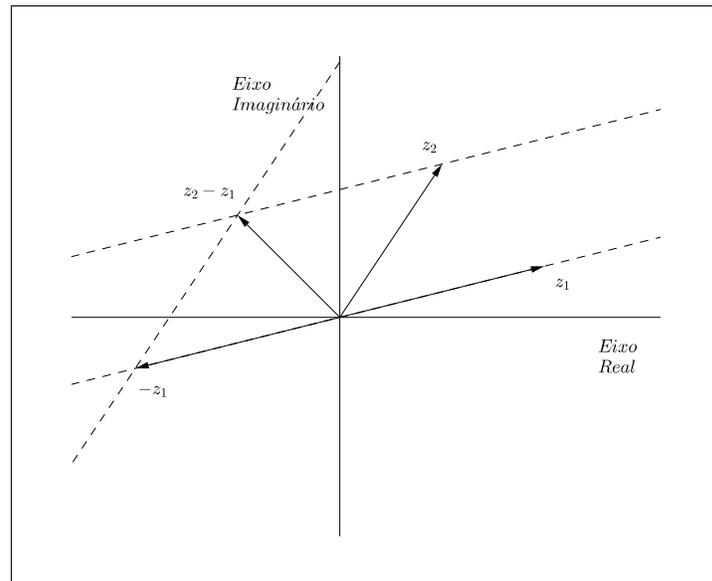


Figura 6.6: Subtração de números complexos.

Exemplo 6.2.1. Efetue algebricamente e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

Resolução:

Algebricamente, temos:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + i) = 5 + 3i = z_3$$

Geometricamente, vem:

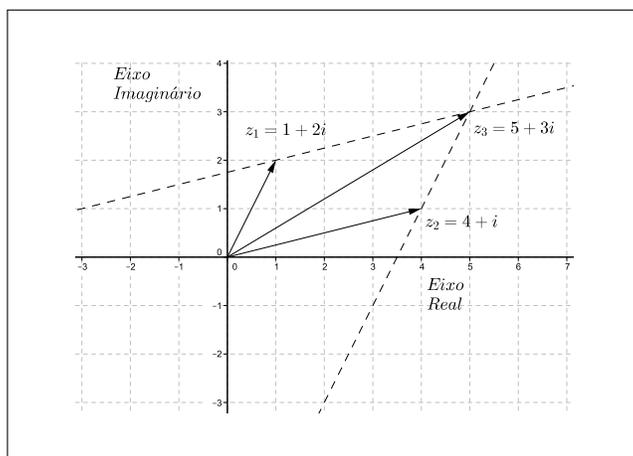


Figura 6.7: Adição de complexos.

Observe que z_3 corresponde ao ponto (5, 3), ou seja, ao número complexo $z_3 = 5 + 3i$.

6.3 Módulo e complexo conjugado

Definimos o módulo, valor absoluto ou norma de um número complexo $z = x + yi$ como sendo o número não-negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como se vê, ele é a distância do ponto z à origem. O complexo conjugado de $z = x + yi$ é definido como sendo $\bar{z} = x - yi$. A figura que se segue ilustra exemplos de complexos conjugados.

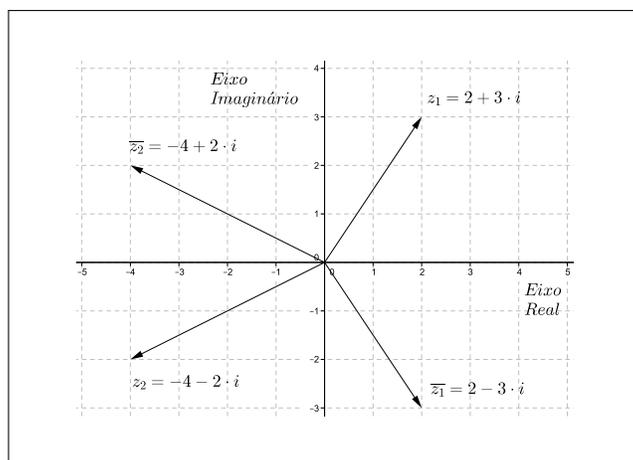


Figura 6.8: Exemplos de complexos e seus respectivos conjugados.

Em termos do módulo e do conjugado, temos:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = (x^2 + y^2) + (-xy + yx) = x^2 + y^2,$$

isto é, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Esta propriedade permite calcular o quociente $z = z_1/z_2$ de dois números complexos z_1 e z_2 , $z_2 \neq 0$. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

Exemplo:

$$\frac{-3 + i}{1 - 2i} = \frac{(-3 + i) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{-5 - 5i}{1^2 + 2^2} = -1 - i$$

De acordo com LIMA[8], apresentamos lista de propriedades de complexos conjugados:

P.1 $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

P.2 $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

P.3 $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

P.4 Se $w \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

P.5 Se z é real, $z = \bar{z}$

P.6 $\bar{\bar{z}} = z$

P.7 Se n é um inteiro positivo, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Prova:

Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, com a, b, c e d reais, temos $z + w = (a + c) + (b + d)i$, $\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$, o que prova P.1.

Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, com a, b, c e d reais, temos $z - w = (a - c) + (b - d)i$, $\overline{z - w} = (a - c) - (b - d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} - \bar{w}$, o que prova P.2.

Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, com a, b, c e d reais, temos $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$, $\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi) \cdot (c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}$, o que prova P.3.

Se $w = c + di$, com c e d reais não nulos simultaneamente, temos

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c + di} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}, \quad \frac{1}{\bar{w}} = \frac{1}{c - di} = \frac{c + di}{c^2 + d^2} = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}.$$

Daí,

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\frac{1}{w}} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},$$

o que prova P.4.

Se $z = x + 0i$, x real, $\overline{z} = x - 0i = z$, o que prova P.5.

Se $z = x + yi$, $\overline{\overline{z}} = \overline{(x - yi)} = x + yi = z$, o que prova P.6.

Finalmente, P.7 decorre da aplicação reiterada de P.3.

Vejamos agora algumas propriedades do módulo de um número complexo:

$$\text{M.1 } |z| = |-z| = |\overline{z}|$$

$$\text{M.2 } z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$\text{M.3 } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{M.4 } \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \quad z \neq 0$$

$$\text{M.5 } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$\text{M.6 } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\text{M.7 } ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Prova da M.6

Observe que

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + \underbrace{z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2}_{2 \cdot \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})} + |z_2|^2.$$

Como $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, a expressão em destaque pode ser alterada:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + \underbrace{z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2}_{2 \cdot \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + \underbrace{z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2}_{2 \cdot \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})} + |z_2|^2$$

$$\text{Assim: } z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \cdot \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq 2 \cdot |z_1 \cdot \overline{z_2}| = 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2|,$$

Portanto,

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2,$$

e finalmente

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Exemplo 6.3.1 (ITA/97). Seja S o conjunto dos números complexos que satisfazem, simultaneamente, as equações: $|z - 3i| = 3$ e $|z + i| = |z - 2 - i|$. O produto de todos os elementos de S é igual a:

a) $-2 + i\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$

d) $-3 + 3i$

e) $-2 + 2i$

Resolução:

Substituindo $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nas equações dadas, temos:

$$|z - 3i| = 3 \Leftrightarrow |x + yi - 3i| = 3 \Leftrightarrow |x + i(y - 3)| = 3$$

$$|x + i(y - 3)| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 3 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9 \quad (1)$$

Equação de um círculo \mathcal{E} de centro $C = (0, 3)$ e raio = 3

$$|z + i| = |z - 2 - i| \Leftrightarrow |x + yi + i| = |x + yi - 2 - i| \Leftrightarrow |x + i(y + 1)| = |(x - 2) + i(y - 1)|$$

$$|x + i(y + 1)| = |(x - 2) + i(y - 1)| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow x + y = 1 \quad (2)$$

Equação cartesiana de uma reta r .

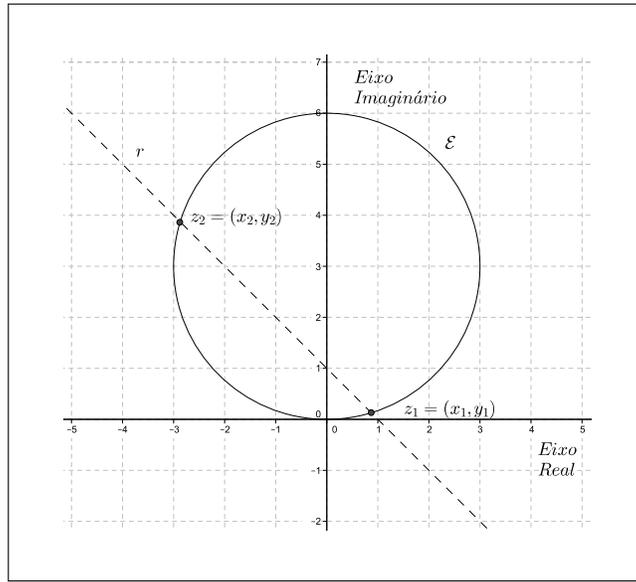


Figura 6.9: Círculo \mathcal{E} e reta r .

$$\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 = 9 & (1) \\ x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x & (2) \end{cases}$$

Resolvendo por substituição:

$$x^2 + (1 - x - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (-2 - x)^2 = 9$$

$$x^2 + (-2 - x)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + [-(2 + x)]^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 5 = 0$$

cujas raízes chamaremos de x_1 e x_2 . Dado que $y = 1 - x$, as coordenadas dos pontos de intersecção das curvas são: $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, com $y_1 = 1 - x_1$ e $y_2 = 1 - x_2$.

Como foi pedido o produto de tais soluções, temos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2 = \\ &= x_1x_2 + ix_1 \cdot (1 - x_2) + ix_2 \cdot (1 - x_1) - (1 - x_1) \cdot (1 - x_2) = \\ &= x_1x_2 + ix_1 - ix_1x_2 + ix_2 - ix_1x_2 - (1 - x_2 - x_1 + x_1x_2) = \\ &= x_1x_2 + ix_1 - ix_1x_2 + ix_2 - ix_1x_2 - 1 + x_2 + x_1 - x_1x_2 = \\ &= x_1x_2 + ix_1 - ix_1x_2 + ix_2 - ix_1x_2 - 1 + x_2 + x_1 - x_1x_2 = \\ &= (x_1 + x_2 - 1) + i[(x_1 + x_2) - 2x_1x_2] \end{aligned}$$

contudo, sabe-se das Relações de Girard que:

$$x_1 + x_2 = -2 \text{ e } x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$$

Portanto, basta substituir os valores para encontrar o produto dos complexos:

$$z_1 \cdot z_2 = (-2 - 1) + i \left[-2 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) \right] = -3 + i[-2 + 5] \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = -3 + 3i$$

Resposta: alternativa d.

Exemplo 6.3.2 (FGV/2004). a) Determine, no plano de Argand-Gauss, o lugar geométrico dos números complexos z representados pela equação: $z \cdot \bar{z} - w \cdot \bar{z} - \bar{w} \cdot z + 25 = 0$, sendo $w = -2 + 5i$.

b) De todos os números complexos z de módulos 3, determine aqueles que satisfazem a igualdade $|z - 2i| = \sqrt{3} \cdot |i - 2|$.

Resolução:

a) Partindo da relação $z \cdot \bar{z} - w \cdot \bar{z} - \bar{w} \cdot z + 25 = 0$

considerando $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) e o complexo $w = -2 + 5i$, temos:

$$(a + bi)(a - bi) - (-2 + 5i)(a - bi) - (-2 - 5i)(a + bi) + 25 = 0$$

$$a^2 + b^2 - [-2a + 2bi + 5ai + 5b] - [-2a - 2bi - 5ai + 5b] + 25 = 0$$

$$a^2 + b^2 + 2a - 2bi - 5ai - 5b + 2a + 2bi + 5ai - 5b + 25 = 0$$

$$a^2 + b^2 + 4a - 10b + 25 = 0$$

$$a^2 + 4a + b^2 - 10b + 25 = 0$$

Vamos agora adicionar 4 dos dois lados para completar os quadrados, ou seja:

$$a^2 + 4a + 4 + b^2 - 10b + 25 = 0 + 4$$

$$(a + 2)^2 + (b - 5)^2 = 2^2$$

O lugar geométrico procurado: Círculo \mathcal{E} de centro $C = (-2, 5)$ e raio = 2.

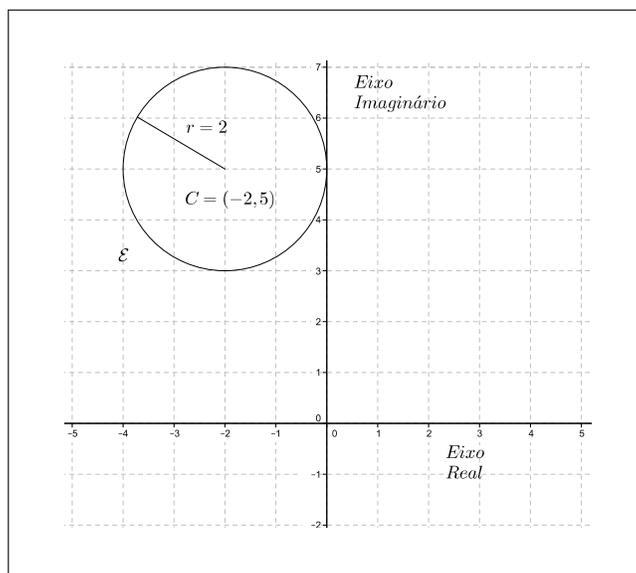


Figura 6.10: Círculo \mathcal{E} de centro $C = (-2, 5)$ e raio $r = 2$.

b) Seja $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z| = 3 \Leftrightarrow |x + yi| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \quad (1)$$

Da relação apresentada,

$$|z - 2i| = \sqrt{3} \cdot |i - 2| \Leftrightarrow |x + i(y - 2)| = \sqrt{3} \cdot |i - 2|$$

$$|x + i(y - 2)| = \sqrt{3} \cdot |i - 2| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + 4}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + 4} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 15$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 15 \quad (2)$$

Das equações (1) e (2), por simples substituição, temos:

$$9 - 4y + 4 = 15 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\text{De (1), } x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{35}}{2}$$

Portanto, os números procurados - intersecção dos círculos - são:

$$z = \pm \frac{\sqrt{35}}{2} - \frac{1}{2}i$$

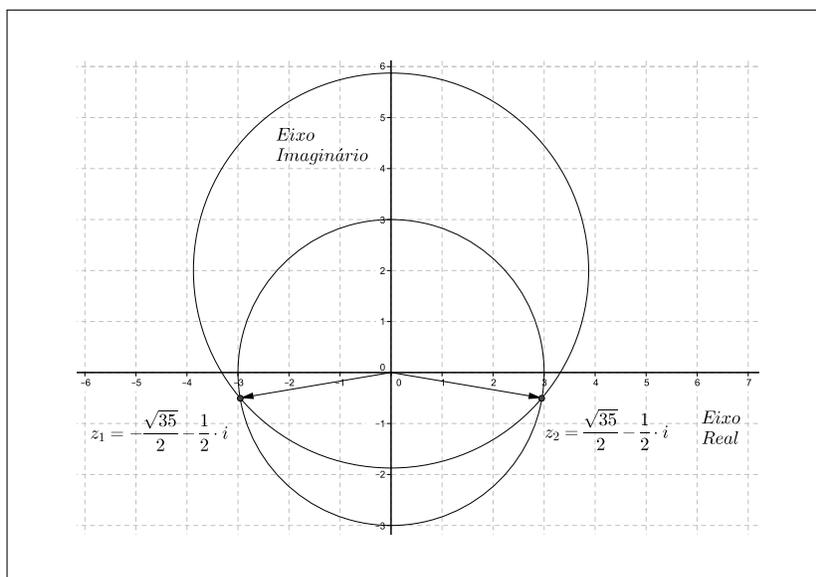


Figura 6.11: Os dois círculos do item b).

6.4 Números complexos na fórmula polar

Considerando a representação geométrica de um número complexo $z \neq 0$, chama-se *argumento* de z o ângulo θ formado pelos eixos OX e o vetor \vec{Oz} . Como na trigonometria, os ângulos são aqui orientados: consideramos positivos o sentido de percurso oposto ao dos ponteiros do relógio.

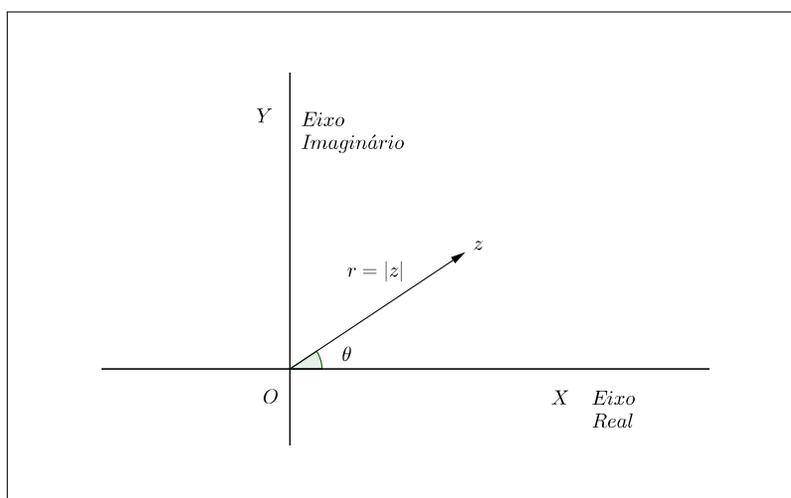


Figura 6.12: Coordenadas polares do complexo z , θ e $|z|$.

O argumento de z só pode ser definido quando $z \neq 0$; mesmo nesta hipótese, o argumento só

fica determinado a menos de múltiplos inteiros de 2π . Como $x = |z| \cdot \cos\theta$ e $y = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta$, temos a seguinte representação de z conhecida como *representação polar ou trigonométrica*:

$$z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta), \quad r = |z|;$$

r e θ são chamados de coordenadas polares de z .

6.5 Fórmulas do produto e do quociente

De posse da representação polar, vamos deduzir uma regra muito conveniente para a multiplicação. Sejam

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

dois números complexos quaisquer. Então:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) + i \cdot (\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2)]. \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))].$$

Portanto, o produto de dois números complexos é o número cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores.

Vamos deduzir resultado análogo para a divisão. Como

$$\frac{1}{\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) \cdot (\cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta)} = \cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta,$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 - i \cdot \operatorname{sen}\theta_2) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) + i \cdot (\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)],$$

isto é, para dividir números complexos basta fazer o quociente dos módulos e a diferença dos argumentos.

Exemplo 6.5.1. Sendo $z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{4} \right)$ e $z_2 = 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} \right)$, calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

Resolução:

a) Substituindo os dados do problema na fórmula, temos:

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen} \frac{3\pi}{4} \right)$$

Fazendo a interpretação geométrica desse produto, obtemos:

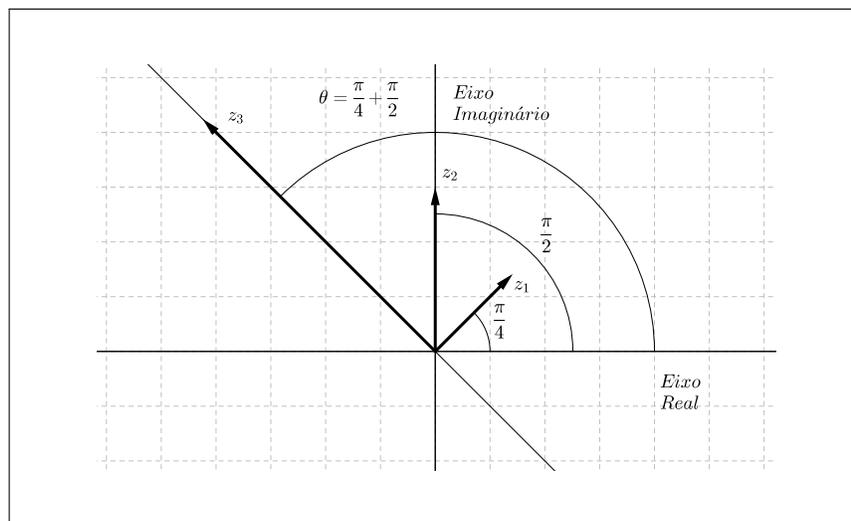


Figura 6.13: A interpretação geométrica do produto de dois complexos.

Em $z_3 = z_1 \cdot z_2$ houve uma rotação positiva a z_1 de um ângulo igual ao ângulo de z_2 . Ou seja, nesse caso houve uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ a z_1 . Como o argumento de z_1 era $\frac{\pi}{4}$ e z_1 recebeu uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, o produto $z_3 = z_1 \cdot z_2$ passa a ter uma argumento igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Já o módulo é $|z_3| = 6$, que corresponde ao produto dos módulos $|z_1| \cdot |z_2| = 2 \cdot 3$.

b) Substituindo z_1 e z_2 na fórmula dada, temos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

6.6 Fórmula de De Moivre

A fórmula da multiplicação de números complexos pode ser aplicada para um número qualquer de fatores. Sendo

$$z_k = r_k \cdot (\cos\theta_k + i \cdot \text{sen}\theta_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

teremos

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = r_1 \cdot r_2 \dots r_n \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)].$$

O uso repetido desta fórmula nos mostra como calcular potências de um número complexo, a saber:

Se

$$z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

então

$$z^2 = r^2 \cdot (\cos 2\theta + i \cdot \text{sen} 2\theta)$$

e

$$z^3 = r^3 \cdot (\cos 3\theta + i \cdot \text{sen} 3\theta)$$

De modo geral, obtemos o Teorema de De Moivre.

Teorema 6.6.1 (Teorema de De Moivre). Se $z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ e n for um números inteiro positivo, então $z^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)]$.

Isso nos diz que para obtermos a n -ésima potência de um número complexo, elevamos à n -ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por n .

Demonstração: Vamos provar que a igualdade é válida para $n \in \mathbb{R}$ e, em seguida, provemos para $n \in \mathbb{Z}$. Para isso usaremos o Princípio de Indução Finita.

Se $n = 0 \Rightarrow z^0 = 1$ e $r^0 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0) = 1$.

Vamos admitir a validade da fórmula para $n = k - 1$:

$$z^{k-1} = r^{k-1} \cdot [\cos(k-1)\theta + i \cdot \text{sen}(k-1)\theta]$$

e agora provemos a validade da igualdade para $n = k$:

$$z^k = z^{k-1} \cdot z = r^{k-1} \cdot [\cos(k-1)\theta + i \cdot \text{sen}(k-1)\theta] \cdot r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

Assim

$$z^k = r^k \cdot (\cos k\theta + i \cdot \text{sen} k\theta)$$

6.7 Raízes de um número complexo

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para achar as n -ésimas raízes dos números complexos. Uma n -ésima raiz de um número complexo z é um número complexo w tal que

$$w^n = z$$

Escrevendo esses dois números na forma polar com

$$w = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \text{sen}\varphi) \quad \text{e} \quad z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

e usando o Teorema de De Moivre, obtemos

$$\rho^n \cdot [\cos(n\varphi) + i \cdot \text{sen}(n\varphi)] = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que

$$\rho^n = r \quad \text{ou} \quad \rho = r^{1/n}$$

e

$$\cos(n\varphi) = \cos\theta \quad \text{ou} \quad \sin(n\varphi) = \sin\theta$$

Do fato de que seno e cosseno têm período 2π segue que

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Logo,

$$w = r^{1/n} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

Uma vez que essa expressão resulta em valores diferentes de w para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, temos o próximo teorema.

Teorema 6.7.1 (Raízes de um número complexo). Seja $z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ e seja n um inteiro positivo. Então z tem n raízes n -ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Observe que cada uma das raízes n -ésimas de z tem módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Assim, todas as raízes n -ésimas de z estão sobre o círculo de raio $r^{1/n}$ no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das raízes n -ésimas excede o argumento da raiz anterior por $\frac{2\pi}{n}$, vemos que as raízes n -ésimas de z são igualmente espaçadas sobre este círculo.

6.8 Aplicações de Raízes da unidade

Vamos agora encontrar os zeros do polinômio $P(x) = x^n - 1$, isto é, as raízes da equação $x^n - 1 = 0$, em que n é um inteiro positivo. Como estudado, as raízes procuradas são as raízes n -ésimas da unidade. É fácil ver que 1 é uma raiz; mas quais são as outras?

Teorema 6.8.1. Os zeros (raízes) do polinômio $P(x) = x^n - 1$ são

$$\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k < n-1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Demonstração:

Partindo do Teorema das raízes complexas,

$$w_k = r^{1/n} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

Neste caso particular que estamos estudando: $r = 1$ e o ângulo $\theta = 0$

Assim,

$$\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k < n-1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dessa forma

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$\epsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = \epsilon$$

$$\epsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n} = \epsilon^2$$

.....

$$\epsilon_{n-1} = \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2(n-1)\pi}{n} = \epsilon^{n-1}$$

As raízes n -ésimas da unidade determinam um polígono regular inscrito em um círculo unitário tal que um dos vértices é o ponto $(1, 0)$.

Exemplo 6.8.2. Para $n = 3$, as raízes cúbicas da unidade são

$$\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

ou seja,

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \epsilon$$

e

$$\epsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \epsilon^2$$

As raízes cúbicas da unidade determinam um triângulo equilátero inscrito em um círculo com

em centro em $(0, 0)$ e raio 1.

Vamos supor que nosso objetivo é encontrar as n raízes n -ésimas de um certo número complexo qualquer z . Observe que a Fórmula de De Moivre pode ser escrita de outra maneira,

$$w_k = r^{1/n} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

Assim,

$$w_k = r^{1/n} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right)$$

Ou seja,

$$w_k = r^{1/n} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \cdot \epsilon^k, \quad 0 \leq k < n - 1.$$

Essa expressão nos diz que as raízes n -ésimas de um número complexo não nulo podem ser obtidas como o produto de uma de suas raízes particulares

$$w_0 = r^{1/n} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right)$$

pelos raízes da unidade, $1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3, \dots, \epsilon^{n-1}$

Exemplo 6.8.3. Determinar as raízes cúbicas do número complexo $z = 8$. Uma delas é $w_0 = 2$. As raízes da unidade já conhecemos e são dadas por $1, \epsilon, \epsilon^2$; agora utilizaremos a raiz

$$\epsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \epsilon$$

Logo, as raízes cúbicas de 8 são:

$$w_0 = 2$$

$$w_1 = w_0 \cdot \epsilon_1 = 2 \cdot \epsilon_1 = 2 \cdot \epsilon^1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i \cdot \sqrt{3}$$

$$w_2 = w_0 \cdot \epsilon_2 = 2 \cdot \epsilon_2 = 2 \cdot \epsilon^2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i \cdot \sqrt{3}$$

Capítulo 7

Considerações Finais

Iniciamos nosso trabalho destacando o século XVII, período marcado pela busca de uma nova ciência. Aquela época foi inspirada, em sua concepção epistêmica, no modelo da engenharia civil. Isto é, o conhecimento era visto como uma estrutura a ser construída. Contrapondo-se a este modelo, consideramos hoje o processo de elaboração do conhecimento similar ao da navegação marítima. De acordo com OLIVA[12]:

“...a embarcação do conhecimento navega sem parar, sem ter onde aportar com segurança, apresentando algum defeito só poderá ser reparada enquanto singra os mares do desconhecido. Sendo assim, tudo é incerto, porque sequer há um longínquo ancoradouro para onde tentar conduzir a embarcação no caso de precisar de conserto. Navegação sem porto, o conhecimento vai sendo - de forma mais ou menos extensa ou profunda - revisto e reformulado enquanto vai sendo produzido. **Mesmo sem ter uma base inabalável, a busca do conhecimento se destaca por ser uma atividade autocorretiva, voltada para a diuturna avaliação crítica dos resultados e a superação dos erros.**”

Nosso ponto de partida, neste trabalho, era adotar o tratamento vetorial no ensino da Geometria Analítica para o Ensino Médio. Este objetivo foi alcançado e um programa de ensino - *extra* - surgiu durante sua elaboração. Tem o professor, portanto, um roteiro com os conteúdos de praticamente um ano letivo. Considerando este entendimento, esperamos que nossa proposta possibilite a exploração de novas rotas.

Boa viagem e boa sorte!

Referências

- [1] Geraldo ÁVILA. *Variáveis Complexas e aplicações*. 3^a ed. LTC, Rio de Janeiro, 2000.
- [2] Márcio BARRETO. *A Física no Ensino Médio*. 1^a ed. Papirus Editora, Campinas, 2012.
- [3] Luiz Roberto DANTE. *Matemática Contexto e Aplicações*. 1^a ed. Editora Ática, São Paulo, 2010.
- [4] Jorge DELGADO, Katia FRENSEL e Lhaylla CRISSAFF. *Geometria Analítica*. 1^a ed. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [5] René DESCARTES. *Discurso do Método*. 3^a ed. Martins Fontes, São Paulo, 2007.
- [6] Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. SEE, São Paulo, 2010.
- [7] Elon Lages LIMA. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2^a ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [8] Elon Lages LIMA et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 6^a ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [9] Chico NERY. “A Geometria Analítica no ensino médio”. Em: *RPM - Revista do Professor de Matemática* 67 ().
- [10] Antonio Caminha MUNIZ NETO. *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana*. 1^a ed. SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [11] Alberto OLIVA. *Filosofia da Ciência*. 3^a ed. Zahar, Rio de Janeiro, 2003.
- [12] Alberto OLIVA. *Teoria do Conhecimento*. 1^a ed. Zahar, Rio de Janeiro, 2011.
- [13] José Roberto Castilho PIQUEIRA e Luís Ricardo Arruda de ANDRADE. *Mecânica*. 2^a ed. Coleção Anglo, São Paulo, 2002.
- [14] Genésio Lima dos REIS e Valdir Vilmar da SILVA. *Geometria Analítica*. 2^a ed. LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [15] João C. V. SAMPAIO. *O Ensino da álgebra elementar através de sua história*. UFSCAR, São Carlos.
- [16] Carlos A.S. VICTOR. “Área de um polígono”. Em: *RPM - Revista do Professor de Matemática* 35 ().
- [17] Eduardo WAGNER. “Sobre o ensino da Geometria Analítica”. Em: *RPM - Revista do Professor de Matemática* 45 ().

