UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

DANIEL PETRAVICIUS

A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN E OS NÚMEROS PRIMOS

CAMPINAS

2016

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

DANIEL PETRAVICIUS

A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN E OS NÚMEROS PRIMOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: SERGIO ANTONIO TOZONI

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno DANIEL PETRAVICIUS, e orientada pelo Prof. Dr. SERGIO ANTONIO TOZONI

Assinatura do Orientador

Sergio Tozoni

Campinas
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

P446f

Petravicius, Daniel, 1988-
A função zeta de Riemann e os números primos / Daniel Petravicius. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Funções Zeta. 2. Números primos. 3. Números complexos. I. Tozoni, Sergio Antonio,1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The Riemann zeta function and the prime numbers
Palavras-chave em inglês:
Zeta Functions
Prime numbers
Complex numbers
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Sergio Antonio Tozoni [Orientador]
Benjamin Bordin
Régis Leandro Braguim Stábile
Data de defesa: 04-02-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 04 de fevereiro de 2016

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof(a). Dr(a). BENJAMIN BORDIN

Prof(a). Dr(a). RÉGIS LEANDRO BRAGUIM STÁBILE

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, Andréa e Carlos, irmãos, Rafael e Pamela, cunhados, Dimas e Queila, namorado, Eduardo, e meus primos.

Também agradeço aos colegas, pelo incentivo e pelo apoio constante.

Por fim, agradeço ao meu orientador, Sergio, pelo incentivo e suporte que tornaram possível a conclusão desta dissertação e também à instituição que financiou a minha bolsa, CAPES, por 24 meses e viabilizaram a minha permanência nos estudos.

Resumo

Neste trabalho são estudados conceitos e resultados sobre os números reais e os números complexos, sobre sequências e séries de números reais e de números complexos e sobre funções reais e complexas. Então, são exibidos e demonstrados resultados conhecidos sobre a Função Zeta de Riemann e sua relação com os números primos. Por fim, os números primos são tratados em uma perspectiva da educação básica, através de propostas e exercícios para aplicação em sala de aula em nível de ensino fundamental e ensino médio.

Palavras-chave: Função Zeta de Riemann, Números Primos, Números Complexos.

Abstract

In this work are studied concepts and results on real numbers and complex numbers, on sequences and series of real numbers and complex numbers and on real and complex functions. Are demonstrated known results on the Riemann Zeta function and its relation to the prime numbers. Finally, the prime numbers are treated in a perspective of basic education, through proposals and exercises for use in classroom at primary school level and high school.

Keywords: Riemann Zeta Function, Prime Numbers, Complex Numbers.

Sumário

Introdução

Os números primos foram estudados na Antiguidade com o objetivo de obtermos resultados e aplicações a respeito da divisibilidade e da composição de números inteiros. Porém, em tempos modernos, esses números ganharam imensa importância na área da Teoria dos Números, em particular, no estudo da criptografia e suas técnicas.

No século XIX, Euler, Gauss e Riemann fizeram estudos e especulações sobre a função Zeta de Riemann, alegando que ela guardava diversos segredos sobre a regularidade dos números primos. E de fato, ao estudarem esta função de variáveis complexas, Riemann conjecturou que os zeros da função Zeta de Riemann estão localizados na faixa $0 < \mathrm{Re}(s) < 1, s \in \mathbb{C}$ e foram percebidas diversas propriedades relevantes sobre os zeros desta função.

Esta conjectura é hoje conhecida como Hipótese de Riemann, um problema que ainda não foi resolvido, e que se for demonstrado terá fortes impactos na Teoria dos Números, por fornecer uma fórmula explícita para a contagem de números primos em um dado intervalo.

Este trabalho busca mostrar resultados sobre os números primos com aplicações no cotidiano escolar, e posteriormente um estudo sobre a Função Zeta de Riemann, de modo que os capítulos serão elaborados da seguinte maneira:

No Capítulo 1, será dado o contexto histórico em relação aos estudos referentes aos números primos, sua importância atualmente e a relação da regularidade da sequência desses números com os zeros da função zeta de Riemann.

No Capítulo 2, serão apresentadas definições e resultados básicos sobre módulos, sequências e séries de números reais e sobre continuidade, derivadas e integração de funções de uma variável real. Estes resultados sustentarão a teoria principal desse trabalho e deixarão as notações bem definidas.

Analogamente, no Capítulo 3, haverá um estudo semelhante ao do Capítulo 2, porém, dedicado às variáveis complexas. Além disso, ao final deste capítulo, serão estudados resultados que serão usados no estudo da Função Zeta de Riemann.

No Capítulo 4, serão estudados resultados elementares e antigos sobre os números primos, e também será apresentada a Função Zeta de Riemann e sua extensão holomorfa.

No Capítulo 5, será apresentado o conteúdo matemático estudado nos Ensinos Fundamental e Médio, de modo a evidenciar os números primos e propostas de atividades abordando este assunto.

Este trabalho foi feito com o propósito de ser uma leitura acessível aos interessados no assunto, exigindo de conhecimento prévio apenas noções de Cálculo Diferencial e Integral.

1 Introdução Histórica e Motivação

Este capítulo tem como objetivo mostrar a trajetória histórica do estudo dos números primos na matemática, a importância desses números e qual a relação deles com os zeros da função zeta de Riemann. As referências para este capítulo são [2] e [4].

1.1 Surgimento dos Números Primos

Nesta seção serão apontados momentos históricos em que os números primos receberam importância. As referências para esta seção são [2] e [4].

O conceito de número primo está entre os mais antigos da Matemática e historicamente ganha visibilidade através de resultados obtidos por Euclides, em particular, através do teorema de Euclides e do teorema fundamental da aritmética, que fornecem resultados sobre a composição dos números naturais maiores do que 1.

No teorema de Euclides, temos que o conjunto dos números primos possuí infinitos elementos. E no teorema fundamental da aritmética, temos o resultado que garante a composição única de um número natural através de um produto de números primos. A partir destes resultados, a busca pelo padrão de aparição dos números primos ganhou importância, pelo fato de podermos construir todos os números naturais com eles.

A busca por esta regularidade ainda não está finalizada. Com o passar do tempo, resultados foram encontrados, mas estes resultados ou são efecientes, mas pontuais ou são precisos, mas de difícil aplicação.

Euler foi um dos matemáticos que tentou encontrar a regularidade dos números primos. Uma de suas várias tentativas em busca de um padrão foi o estudo do polinômio $x^2 + x + 41$. Neste polinômio, substituindo x pelos inteiros de 0 a 39 obtemos os números primos 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523 e 1601.

Além disso, Euler verificou que para $q = 2, 3, 5, 11$ e 17 o polinômio $x^2 + x + q$ também gera números primos ao substituirmos x pelos inteiros de 0 a $(q - 2)$. Este resultado é simples, mas pouco abrangente.

Por outro lado, considerando o teorema de Wilson, temos um caso em que o resultado vale para todos os números naturais, mas não é um resultado prático, por envolver um cálculo muito lento para números muito grandes. De acordo com este teorema, se p for um número natural maior do que 2, então p é um número primo se, e somente se, $(p - 1)! + 1$ for divisível por p.

Estudar os números primos é de grande importância para a teoria aritmética dos números e também para outras áreas como a criptografia por exemplo, e este trabalho aponta para um método de busca destes números que caso seja concluido pode se tornar um método preciso e eficiente.

1.2 A ideia de Gauss e a função Zeta de Riemann

Nesta seção, apresentamos a função π de Gauss e a introdução de sua relação com a regularidade dos números primos. As referências para esta seção são [2] e [4].

Após várias tentativas da comunidade matemática de encontrar o segredo da regularidade dos números primos, Gauss, em sua busca, tentou oferecer uma abordagem em que ao invés de buscar diretamente os números primos, buscou uma função que pudesse contar o número de primos no intervalo $[1; N]$, essa função recebeu a notação $\pi(N)$.

Por exemplo, $\pi(10) = 4$ pois os primos no intervalo $[1; 10]$ são 2, 3, 5 e 7. Outros exemplos são $\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$ e $\pi(10000) = 1229$.

Em seus estudos, Euler e Gauss exploraram a função que hoje é conhecida como função Zeta de Riemann, que é definida por uma série usando números naturais, e por isso, admite uma representação usando números primos. Ambos percebiam a relação desta função com os números primos, através da Fórmula do Produto de Euler, apresentada na Proposição 4.3.4. Riemann trabalhou com esta função de modo que pôde perceber que ela e seus zeros poderiam ser a chave para se encontrar a regularidade dos números primos. Em particular, a resposta para a contagem de primos em um dado intervalo.

1.3 A Hipótese de Riemann

As referências para esta seção são [2] e [4].

Riemann conseguiu prever que a função que realiza a contagem de número primos, $\pi(N)$, tem uma expressão explícita em função dos infinitos zeros não-triviais da função zeta de Riemann. Este é o Teorema dos números primos. Porém, o problema relacionado a esta função é de encontrar os seus zeros. Em seus estudos Riemann conjecturou que os zeros triviais, são os inteiros negativos pares $(-2, -4, -6, -8, \cdots)$ e que os não-triviais são infinitos e localizados na reta do plano complexo onde $\mathrm{Re}(z) = 1/2$. Esta conjectura é chamada de Hipótese de Riemann e é um problema ainda não solucionado.

A função que relaciona os zeros não triviais da função Zeta de Riemann com a contagem de números primos em um intervalo não é estudada neste trabalho, por fugir dos objetivos do mesmo, mas maiores detalhes sobre ela podem ser encontrados na bibliografia desta seção.

2 Sequências e Limites Reais

Este capítulo tem o objetivo de apresentar definições e resultados sobre sequências e séries de números reais e sobre limites, continuidade, derivadas e integrais de funções reais de uma variável real que darão suporte aos resultados a serem estudados nos capítulos posteriores. A partir do Capítulo 2, esses resultados serão extendidos para sequências e séries de números complexos e para funções com valores no conjunto dos números complexos. As referências para esse capítulo são [7], [8] e [9].

2.1 Sequências e seus Limites

Nesta seção estudaremos sequências de números reais, seus limites e resultados sobre sequências. A referência para essa seção é [9].

Definição 2.1.1. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é um número real, representado por x_n, que é chamado o n-ésimo termo da sequência. Escrevemos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou (x_n), para indicar a sequência x.

Definição 2.1.2. Dizemos que a sequência (x_n) é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existem $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência (x_n) não é limitada, dizemos que ela é ilimitada.

Definição 2.1.3. Dada uma sequência $x = (x_n)$ de números reais, uma subsequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escrevemos $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_{n_i}) para indicar a subsequência $x' = x|\mathbb{N}$.

Definição 2.1.4. Uma sequência (x_n) chama-se crescente quando $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, isto é, $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo n, a sequência chama-se não descrescente. Analogamente, se $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência é decrescente, e se para todo n, $x_n \geqslant x_{n+1}$, dizemos que a sequência é não-crescente. As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são chamadas sequências monótonas.

Definição 2.1.5. Dizemos que o número real a é limite da sequência (x_n) de números reais, e escreve-se $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, quando para cada número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, sempre que $n > n_0$.

Definição 2.1.6. Se o limite de uma sequência existe e temos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, dizemos que (x_n) converge para a $(x_n \to a)$ e dizemos que essa sequência é convergente. Uma sequência não-convergente é chamada de sequência divergente.

Exemplo 2.1.7. Seja $a \in \mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n = a$. Então, $x_n \to a$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 = 1$ e temos que $|x_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$ para todo $n > 1$. Logo $x_n \to a$.

Exemplo 2.1.8. Seja $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n = n^{-p}$. Então $x_n \to 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \epsilon^{-1/p}$ e temos que se $n > n_0$ então $|x_n - 0| = n^{-p} < n_0^{-p} < \epsilon$. Logo $x_n \to 0$.

Teorema 2.1.9. *Seja (x_n) uma sequência. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração. Seja $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Dado qualquer número real $b \neq a$, mostraremos que não se tem $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$. Para isso, tomemos $\epsilon = |b - a|/2$. Vemos que $\epsilon > 0$ e notamos ainda que os intervalos $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ são disjuntos, pois se existisse $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (b - \epsilon, b + \epsilon)$, teríamos $|a - x| < \epsilon$ e $|x - b| < \epsilon$, portanto $|a - b| \leqslant |a - x| + |x - b| < 2\epsilon = |a - b|$, um absurdo. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, então $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e portanto, $x_n \notin (b - \epsilon, b + \epsilon)$, para todo $n > n_0$. Logo, não vale $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$. ■

Teorema 2.1.10. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass, caso real). Toda sequência real limitada contém uma subsequência convergente.*

Demonstração. A demonstração deste teorema não será realizada. ■

Teorema 2.1.11. *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$*, então toda subsequência de* (x_n) *converge para o limite* a*.*

Demonstração. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_i}, \ldots)$ uma subsequência de (x_n). Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $|x_n - a| < \epsilon$. Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles $n_{i_0} > n_0$. Então se $i > i_0$, temos que $n_i > n_{i_0} > n_0$, e portanto,$|x_{n_i} - a| < \epsilon$. Logo $\lim\limits_{i\to+\infty} x_{n_i} = a$. ■

Teorema 2.1.12. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Então, tomando $\epsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos $x_n \in (a-1, a+1)$. Consideremos o conjunto $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Sejam c o menor e d o maior elemento de F. Então todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[c, d]$, logo a sequência é limitada. ■

Definição 2.1.13. Dizemos que uma sequência (x_n) é limitada superiormente se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geqslant x_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Cada $b \in \mathbb{R}$ com essa propriedade é chamada uma cota superior da sequência (x_n) e chamamos de supremo de (x_n), denotado por $\sup x_n$, a menor das cotas superiores. Analogamente, dizemos que uma sequência (x_n) é limitada inferiormente se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leqslant x_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Cada $b \in \mathbb{R}$ com essa propriedade é chamada uma cota inferior da sequência (x_n) e chamamos de ínfimo de (x_n), denotado por, $\inf x_n$ a maior das cotas inferiores.

Teorema 2.1.14. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona, limitada e não-decrescente. Tomemos $a = \sup x_n$. Afirmamos que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Com efeito, dado qualquer $\epsilon > 0$, com $a - \epsilon < a$, o número $a - \epsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0}$. Como a sequência é monótona, $n > n_0$ implica que $x_{n_0} \leqslant x_n$ e portanto, $a - \epsilon < x_n$. Como $x_n \leqslant a$ para todo n, vemos que se $n > n_0$ temos que $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Assim, temos de fato $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, como queríamos demonstrar. De modo análogo, podemos demonstrar o mesmo para sequências não-decrescentes. ■

Teorema 2.1.15. *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada, então* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = 0$.

Demonstração. Como (x_n) é limitada, existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $|x_n| < \epsilon/c$. Logo, $n > n_0$, implica que $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < (\epsilon/c)c = \epsilon$. Isto mostra que $x_n y_n \to 0$. ■

Teorema 2.1.16. *Se k é um número real,* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, *então:*

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = a + b$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = a - b$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n) = ab$;

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} kx_n = ka$;

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n/y_n) = a/b$, *se* $b \neq 0$.

Demonstração. (a) : Dado $\epsilon > 0$, existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que se $n > n_1$, temos $|x_n - a| < \epsilon/2$ e se $n > n_2$, temos $|y_n - b| < \epsilon/2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, $n > n_0$ implica que $n > n_1$ e $n > n_2$. Logo $n > n_0$ implica que $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Isto demonstra que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = a + b$. O caso da diferença se trata de maneira análoga.
(b) : Temos $x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a)$. Como (x_n) é uma sequência limitada pela parte (a) já demonstrada e pelo Exemplo 2.1.7 temos $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - b) = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b = b - b = 0$. Logo, pelo Teorema 2.1.15, $\lim\limits_{n\to+\infty}[x_n(y_n - b)] = 0$. De forma análoga mostramos que $\lim\limits_{n\to+\infty} b(x_n - a) = 0$. Assim, pela parte (a), temos $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n - ab) = \lim\limits_{n\to+\infty}[x_n(y_n - b)] + \lim\limits_{n\to+\infty}[b(x_n - a)] = 0$, e portanto, novamente pela parte (a) e pelo Exemplo 2.1.7 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n - ab) + \lim\limits_{n\to+\infty} ab = ab$.
(c) : A demonstração de (c) segue imediatamente de (b) e do Exemplo 2.1.7.
(d) : Inicialmente, notemos que, como $y_n b \to b^2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$,

implica que $y_n b > b^2/2$. (Basta tomar $\epsilon = b^2/2$ e achar o n_0 correspondente). Segue que, para todo $n > n_0$, $1/(y_n b)$ é um número positivo inferior a $2/b^2$. Logo, a sequência $(1/(y_n b))$ é limitada. Temos $x_n/y_n - a/b = (bx_n - ay_n)/(y_n b) = (bx_n - ay_n)(1/y_n b)$. Aplicando as partes (a) e (b) obtemos $\lim\limits_{n\to+\infty}(bx_n - ay_n) = ab - ab = 0$, e assim segue pelo Teorema 2.1.15 que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n/y_n - a/b) = 0$. Portanto, por (a) e pelo Exemplo 2.1.7, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n/y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n/y_n - a/b) + \lim\limits_{n\to+\infty} a/b = 0 + a/b = a/b$. ∎

Definição 2.1.17. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Ela se chama sequência de Cauchy quando, dado arbitrariamente um número real $\epsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \epsilon$.

Teorema 2.1.18. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $|x_n - a| < \epsilon/2$. Logo, para $m, n > n_0$ temos $|x_m - x_n| \leqslant |x_m - a| + |x_n - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, o que mostra que (x_n) é uma sequência de Cauchy. ∎

A seguir demonstraremos dois lemas que servirão de auxílio na demonstração do próximo teorema, conhecido por Critério de Cauchy para sequências, que é a recíproca do Teorema 2.1.18.

Lema 2.1.19. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Tomando $\epsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que $|x_m - x_n| < 1$. Em particular, para $n > n_0$ temos $|x_{n_0+1} - x_n| < 1$, ou seja, $n > n_0$ implica que $x_n \in (x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1)$. Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1\}$. Então $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo (x_n) é limitada. ∎

Lema 2.1.20. *Se uma sequência de Cauchy (x_n) possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy e (x_{n_i}) uma subsequência de (x_n) tal que $\lim\limits_{i\to+\infty} x_{n_i} = a$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0$ implica que $|x_n - x_m| < \epsilon/2$, e existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i > i_0$ implica que $|x_{n_i} - a| < \epsilon/2$. Seja $i > i_0$ tal que $n_i > n_0$. Então se $n > n_0$ temos $|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_i}| + |x_{n_i} - a| < \epsilon$. Logo $x_n \to a$. ∎

Teorema 2.1.21. *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Pelo Lema 2.1.19, ela é limitada. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 2.1.10) (x_n) possui uma subsequência convergente. Segue pelo Lema 2.1.20 que (x_n) converge.

∎

Definição 2.1.22. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Diremos que (x_n) tende para mais infinito, e escreveremos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, quando, para todo número real $A > 0$ dado arbitrariamente, pudermos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$, temos $x_n > A$.

Teorema 2.1.23. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências. Então:*

(a) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente, então, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$;

(b) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty$;

(c) Seja $x_n > 0$ para todo n. Então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/x_n = +\infty$;

(d) Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números positivos. Então:

  (i) se existe $c > 0$ tal que $x_n > c$ para todo n e se $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ temos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n/y_n = +\infty$;

  (ii) se (x_n) é limitada e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n/y_n = 0$.

Demonstração. (a) : Dado $A > 0$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n > A - c$. Segue que se $n > n_0$, então $x_n + y_n > A - c + c = A$, e portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.
(b) : Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos $x_n > A/c$. Logo se $n > n_0$ obtemos $x_n y_n > (A/c)c = A$, e assim, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n) = +\infty$.
(c) : Suponhamos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $0 < x_n < 1/A$, e portanto, $1/x_n > A$. Logo $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/x_n = +\infty$. Reciprocamente, se $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/x_n = +\infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos $1/x_n > 1/\epsilon$, e assim, $0 < x_n < \epsilon$. Segue que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
$(d)(i)$: Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos $0 < y_n < c/A$. Assim, se $n > n_0$ então $x_n/y_n > c/(c/A) = A$. Logo $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n/y_n = +\infty$.
$(d)(ii)$: Existe $k > 0$ tal que $x_n < k$ para todo n. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que quando $n > n_0$ temos $y_n > k/\epsilon$. Então se $n > n_0$ temos $0 < x_n/y_n < k/(k/\epsilon) = \epsilon$, e assim $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n/y_n = 0$. ■

Proposição 2.1.24. *Sejam $r \in \mathbb{R}$, $|r| < 1$, e a sequência (a_n), $a_n = r^n$. Então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*

Demonstração. Consideremos primeiro $r = 0$, então $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$. Tomemos agora $0 < |r| < 1$. Devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos

$$|r^n - 0| < \epsilon, \tag{2.1}$$

logo $|r|^n < \epsilon$. Aplicando o logaritimo na desigualdade, temos $\ln|r|^n < \ln\epsilon$ e por propriedade do logaritimo, $n\ln|r| < \ln\epsilon$. Como $0 < |r| < 1$, $\ln|r| < 0$. Logo, para $n > n_0$ temos $n > (\ln\epsilon)/(\ln|r|)$. Tomemos $n_0 > (\ln\epsilon)/(\ln|r|)$, então, podemos concluir (1.1). Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. ■

2.2 Séries Numéricas

Nesta seção estudaremos séries de números reais e alguns critérios de convergência. A referência para esta seção é [7].

Definição 2.2.1. Seja (a_n) uma sequência de números reais. A partir dela, formamos uma nova sequência (s_n) cujos elementos são as somas $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, que chamaremos de sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se existir o limite

$$s = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e que sua soma é s, e do contrário, diremos que a série é divergente.

Teorema 2.2.2. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série convergente, então* $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Demonstração. Seja $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Então existe $s = \lim_{n \to +\infty} s_n$. Evidentemente, temos também $s = \lim_{n \to +\infty} s_{n-1}$. Logo $0 = s - s = \lim_{n \to +\infty} s_n - \lim_{n \to +\infty} s_{n-1} = \lim_{n \to +\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to +\infty} a_n$. ■

Teorema 2.2.3. *Suponhamos* $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se, as somas parciais* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *formam uma sequência limitada, isto é, se, e somente se, existe* $k > 0$ *tal que* $a_1 + \cdots + a_n < k$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sendo $a_n \geqslant 0$, temos $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \dots$. Logo, pelo Teorema 2.1.14 a sequência (s_n) converge se, e somente se, é limitada. ■

Corolário 2.2.4. *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries de termos não-negativos. Se existem* $c > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $a_n \leqslant c b_n$ *para todo* $n > n_0$ *então a convergência de* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *implica a convergência de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *enquanto a divergência de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *acarreta a de* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Demonstração. Sejam (s_n) a sequência das somas parciais de (a_n) e (t_n) a sequência das somas parciais de (b_n). Como $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant cb_1 + cb_2 + \cdots + cb_n = c(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$, então $s_n \leqslant ct_n$. Então, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, temos que a sequência (ct_n) é limitada, e portanto, a sequência (s_n) é limitada. Logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. Analogamente mostramos que a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica na divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ■

Teorema 2.2.5. *(Critério de Cauchy). A fim de que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente, é necessário e suficiente que, para $\epsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$ quaisquer que sejam $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Basta observar que $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, onde (s_n) é a sequência de somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e aplicar os Teoremas 2.1.18 e 2.1.21. ■

Definição 2.2.6. Sejam $a, r \in \mathbb{R}$. Definimos como série geométrica a série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

Observação 2.2.7. A $n - esima$ soma parcial da série geométrica acima é dada por $s_n = a(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$. Como $1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$ podemos reescrever, para $r \neq 1$ a soma parcial como

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Teorema 2.2.8. *A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ converge para $a/(1 - r)$ se $|r| < 1$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1.24, temos que $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$ se $|r| < 1$. Logo, pela Observação 2.2.7, se tomarmos as somas parciais s_n dessa série, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r},$$

conforme queríamos demonstrar. ■

Teorema 2.2.9. *(Teste da Comparação). Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos.*

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *for uma série de termos positivos e convergente e se* $a_n \leqslant b_n$ *para todo* n *inteiro positivo, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente;*

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *for uma série de termos positivos e divergente e se* $a_n \geqslant b_n$ *para todo* n *inteiro positivo, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será divergente.*

Demonstração. (a) : Seja (s_n) a sequência de somas parciais da série Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e (t_n) a sequência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série convergente de termos positivos, segue do Teorema 2.2.3 que a sequência (t_n) tem um limite superior, o qual chamaremos de k. Como $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $s_n \leqslant t_n \leqslant k$. Logo, k é um limitante superior da sequência (s_n). Como os termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ são todos positivos, segue do Teorema 2.2.3 que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(b) : Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente. Então, como ambas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries de termos positivos e $b_n \leqslant a_n$ para todo n inteiro positivo, segue da parte (a) que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente. Mas isso contradiz a hipótese, logo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente. ■

Definição 2.2.10. Se $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, definimos como série harmônica de ordem p a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, onde $a_n = (1/n)^p$. Em particular, se $p = 1$, chamamos esta série de série harmônica.

Exemplo 2.2.11. Neste exemplo iremos mostrar, usando a série harmônica, que ter o limite do termo geral a_n de uma série igual a 0, não implica necessariamente que a sequência das somas parciais desta mesma série tenha um limite finito. Este fato é importante, pois a série harmônica é frequentemente usada para a realização de critérios de comparação para convergência de séries. Na série harmônica, temos

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

e

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Logo

$$s_{2n} - sn = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}. \tag{2.2}$$

Se $n > 1$,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Há n termos em cada lado da desigualdade, então, o lado direito é $n(1/2n) = 1/2$. Logo, de (1.2) e da desigualdade acima, se $n > 1$, então

$$s_{2n} - s_n > 1/2. \tag{2.3}$$

Mas o Teorema 2.2.5 estabalece que se a série dada for convergente, $s_{2n} - s_n$ poderá se tornar tão pequeno quanto desejarmos. Tomando n suficientemente grande, isto é, se $\epsilon = 1/2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ se $2n > n_0$ e $n > n_0$, então $s_{2n} - s_n > 1/2$. Mas isso contradiz (1.3). Logo a série harmônica é divergente.

Exemplo 2.2.12. Neste exemplo iremos mostrar que para a série harmônica de ordem p, se $p \leqslant 1$ então a série diverge, e que se $p > 1$ então a série converge. Se $p = 1$, temos a série harmônica que já vimos ser divergente. Se $p < 1$, então $n^p \leqslant n$ e assim $(1/n^p) \geqslant (1/n)$ para todo n. Logo, pelo teste da comparação, a série harmônica de ordem p é divergente para $p < 1$. Se $p > 1$, vamos agrupar os termos da seguinte forma

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right) + \cdots. \tag{2.4}$$

Consideremos agora a série

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} + \cdots , \tag{2.5}$$

que é uma série geométrica de razão $2/2^p = 1/2^{p-1}$, que é um número positivo menor do que 1. Portanto a série (1.5) é convergente. Vamos reescrever a série (1.5) para obter

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p}\right) + \cdots \tag{2.6}$$

Usando o teste da comparação nas séries (1.4) e (1.6) vemos que o grupo de termos em cada conjunto entre parenteses em (1.4) é sempre menor ou igual ao grupo de termos em cada conjunto entre parenteses em (1.6). Portanto, para $p > 1$ a série p é convergente.

Definição 2.2.13. Uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ chama-se absolutamente convergente quando $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é uma série convergente.

Teorema 2.2.14. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_o$ implica que $|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$, qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 2.2.5. Nestas condições $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$ e portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pelo mesmo teorema. ■

Teorema 2.2.15. *(Teste da Razão). Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série dada para a qual todo* a_n *é não-nulo. Então,*

(a) se $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = L < 1$, *a série dada é absolutamente convergente;*

(b) se $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = L > 1$, *a série dada é divergente;*

(c) se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = L = 1$, *nenhuma conclusão quanto à convergência da série pode ser feita com o teste.*

Demonstração. (a) : Seja c um número tal que $L < c < 1$. Seja $0 < c - L = \epsilon < 1$. Como $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = L$, existe um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$, então $||a_{n+1}/a_n| - L| < \epsilon$. Assim, se $n \geqslant n_0$, temos

$$|a_{n+1}/a_n| < L + \epsilon = c. \tag{2.7}$$

Vamos supor que n assuma os valores sucessivos $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$ e assim por diante. Por (1.7) obtemos,

$$\begin{aligned}
|a_{n_0+1}| &< c|a_{n_0}|, \\
|a_{n_0+2}| &< c|a_{n_0+1}| < c^2|a_{n_0}|, \\
|a_{n_0+3}| &< c|a_{n_0+2}| < c^3|a_{n_0}|.
\end{aligned}$$

Em geral, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ temos

$$|a_{n_0+k}| \quad < \quad c^k|a_{n_0}| \tag{2.8}$$

e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c^k|a_{n_0}| = c|a_{n_0}| + c^2|a_{n_0}| + \cdots + c^n|a_{n_0}| + \cdots$$

é convergente, pois é uma série geométrica com razão menor que 1. De (1.8) e do teste da comparação, segue que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_0+k}|$ é convergente. A série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_0+k}|$ difere da série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ somente nos n_0 primeiros termos. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, e com isso, a série dada é absolutamente convergente.

(b) : Se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = L > 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geqslant n_0$, então $|a_{n+1}/a_n| > 1$. Vamos supor que n assuma os valores sucessivos $n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$. Obtemos

$$\begin{aligned}
|a_{n_0+1}| &> |a_{n_0}|, \\
|a_{n_0+2}| &> |a_{n_0+1}| > |a_{n_0}|, \\
|a_{n_0+3}| &> |a_{n_0+2}| > |a_{n_0}|.
\end{aligned}$$

Então, se $n > n_0$, temos $|a_n| > |a_{n_0}|$. Logo, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ e, portanto, a série dada é divergente, pelo Teorema 2.2.2.
(c) : Aplicando o teste da razão à série harmônica de ordem p, teremos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^p}{(n+1)^p}\right| = 1.$$

Como a série harmônica de ordem p diverge se $p \leqslant 1$ e converge se $p > 1$, pelo Exemplo 2.2.12, mostramos que é possível ter tanto séries convergentes como divergentes para as quais $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$. ∎

Corolário 2.2.16. *(Teste da Raíz). Consideremos uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Então,*

(a) se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, *a série dada é absolutamente convergente;*

(b) se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, *a série dada é divergente;*

(c) se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L = 1$, *nenhuma conclusão quanto à convergência da série pode ser feita com o teste.*

Demonstração. A demonstração é análoga a do teorema anterior, e portanto será omitida. ∎

Observação 2.2.17. Para séries de termos não-nulos os testes da razão e de Cauchy são equivalentes.

Teorema 2.2.18. *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série cujas somas parciais* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *formam uma sequência limitada. Seja* (b_n) *uma sequência não-crescente de números positivos com* $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *é convergente.*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + \\ &+ (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_n)b_n \\ &= \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + s_nb_n. \end{aligned}$$

Existe $k > 0$ tal que $|s_n| \leqslant k$ para todo n. Além disso, $\sum_{n=2}^{\infty}(b_{n-1} - b_n)$ é uma série convergente de números reais não-negativos. Logo, pelo Teorema 2.2.14, a série $\sum_{n=2}^{\infty} s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Como, pelo Teorema 2.1.15, $\lim_{n\to+\infty} s_n b_n = 0$, segue-se que existe $\lim_{n\to+\infty}(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)$, isto é, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. ∎

Corolário 2.2.19. *(Critério de Leibniz). Se (b_n) é uma sequência não-crescente com $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ é convergente.*

Demonstração. Basta tomarmos a_n do teorema anterior como $a_n = (-1)^n$. ∎

2.3 Limites de Funções Reais

Nesta seção estudaremos a topologia na reta real de maneira elementar, e em seguida faremos um estudo de limites aplicados às funções. A referência para esta seção é [9].

Definição 2.3.1. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $x \in X$. Dizemos que x é um ponto interior do conjunto X se existe $\epsilon > 0$ tal que $|y - x| < \epsilon$ implica que $y \in X$. Chamamos de interior de X, e denotamos por $\mathrm{int}(X)$ o conjunto de todos os pontos interiores de X.

Definição 2.3.2. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que A é aberto se $\mathrm{int}(A) = A$.

Definição 2.3.3. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que um ponto a é aderente a um conjunto X, quando a for limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$. Chamamos de fecho do conjunto X, e denotamos por $\overline{X}$, o conjunto de todos os pontos aderentes a X.

Definição 2.3.4. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que um conjunto X é fechado se $X = \overline{X}$.

Definição 2.3.5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $r > 0$. Chamamos de bola aberta de centro a e raio r, e denotamos por $B_r(a)$, o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $|x - a| < r$.

Analogamente, chamamos de bola fechada de centro a e raio r, e denotamos por $\overline{B_r}(a)$, o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $|x - a| \leqslant r$.

Definição 2.3.6. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um ponto a é chamado um ponto de acumulação de X se, para todo $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(a)\backslash\{a\} \neq \varnothing$. Denotamos por $X^{'}$ o conjunto de todos os pontos de acumulação de X e, se $b \in X$, mas b não é um ponto de acumulação de X, então dizemos que b é um ponto isolado de X.

Definição 2.3.7. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é limitado inferiormente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer $c \in X$, temos $a \leqslant c$. Analogamente, dizemos que X é limitado superiormente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer $c \in X$, temos $a \geqslant c$. Se o conjunto X for limitado inferiormente e superiormente, diremos simplesmente que X é limitado.

Definição 2.3.8. Seja $K \subset \mathbb{R}$. Dizemos que K é compacto se K é limitado e fechado.

Definição 2.3.9. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com valores reais definida no subconjunto X de $\mathbb{R}$ e $a \in X'$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f quando x tende para a, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

para significar o seguinte: para cada $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que se tenha $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Teorema 2.3.10. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X^{'}$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então, $L_1 = L_2$.*

Demonstração. Dado qualquer $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que para $x \in X$ temos, $0 < |x - a| < \delta_1$ implica que $|f(x) - L_1| < \epsilon/2$ e $0 < |x - a| < \delta_2$ implica que $|f(x) - L_2| < \epsilon/2$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como a é ponto de acumulação de X, podemos obter $\overline{x} \in X$, tal que $0 < |\overline{x} - a| < \delta$. Então $|L_1 - L_2| \leqslant |L_1 - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Isto nos dá $|L_1 - L_2| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, e portanto, $L_1 = L_2$. ∎

Teorema 2.3.11. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então existe $\delta > 0$ tal que f é limitada no conjunto $B_\delta(a) \backslash \{a\}$, isto é, existem $A > 0$, $\delta > 0$ tais que para $0 < |x - a| < \delta$ e $x \in X$, temos $|f(x)| < A$.*

Demonstração. Seja $L = \lim_{x \to a} f(x)$.Tomando $\epsilon = 1$ na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$, temos que $|f(x) - L| < 1$, logo $|f(x)| < |L| + 1$. Tomemos este δ e $A = |L| + 1$. ∎

Teorema 2.3.12. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se para todo $x \in X$, com $x \neq a$ tivermos $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, e além disso, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para $x \in X$ temos, $0 < |x - a| < \delta_1$ implica que $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ e se $0 < |x - a| < \delta_2$, implica que $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$. Seja, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Portanto, se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ temos $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$, e assim, $\lim_{x \to a} g(x) = L$. ∎

Teorema 2.3.13. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f, g : X \to \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ com $L < M$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ implica que $f(x) < g(x)$.*

Demonstração. Seja $\epsilon = (M - L)/2 > 0$. Então $L + \epsilon = (L + M)/2 = M - \epsilon$. Existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que se $|x - a| < \delta_1$, então $|f(x) - L| < \epsilon$ e se $|x - a| < \delta_2$, então $|g(x) - L| < \epsilon$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos para $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ que $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$ e $g(x) \in (M - \epsilon, M + \epsilon)$, assim $f(x) < (L + M)/2 < g(x)$. ∎

Teorema 2.3.14. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Para que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, é necessário e suficiente que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ para toda sequência de pontos $x_n \in X \backslash \{a\}$, tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.*

Demonstração. Suponhamos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, com $x_n \in X \backslash \{a\}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ e $x \in X$ implica que

$|f(x) - L| < \epsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $0 < |x_n - a| < \delta$. Segue que para $n > n_0$, temos $|f(x_n) - L| < \epsilon$, assim, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Para demonstrar a recíproca, suponhamos que não se tenha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_n \in X$ com $0 < |x_n - a| < 1/n$ e $|f(x_n) - L| \geqslant \epsilon$. Logo, $x_n \to a$, mas não se tem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$, o que é uma contradição. ■

Corolário 2.3.15. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Para que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é suficiente que exista $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ para toda sequência de pontos $x_n \in X\backslash\{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

Demonstração. Suponhamos que existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Então para toda sequência (x_n) com $x_n \in X\backslash\{a\}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, pelo Teorema 2.3.14, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$, e portanto existe. Suponhamos agora que para toda sequência (x_n) com $x_n \in X\backslash\{a\}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, o limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ existe. Suponhamos que existem duas sequências (x_n) e (y_n) tais que $x_n, y_n \in X\backslash\{a\}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = L_2$ e $L_1 \neq L_2$. Consideremos a sequência (z_n) tal que $z_{2n} = x_n$ e $z_{2n+1} = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} z_{2n+1} = a$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$. Temos também que $z_n \in X\backslash\{a\}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e assim por hipótese devemos ter que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n)$ existe. Mas $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_{2n}) = L_1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_{2n+1}) = L_2$ com $L_1 \neq L_2$, o que é um absurdo. Podemos então concluir que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que, para toda sequência (x_n) satisfazendo $x_n \in X\backslash\{a\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ temos $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$. Portanto, pelo Teorema 2.3.14 temos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. ■

Observação 2.3.16. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Suponhamos que exista $\delta > 0$ tal que f seja limitada no conjunto $B_\delta(a)\backslash\{a\}$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe, então existem duas sequências (x_n) e (y_n) com $x_n, y_n \in X\backslash\{a\}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$ tal que os limites $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$ existem, mas são diferentes. De fato, pelo Corolário 2.3.15, existe uma sequência (x_n) com $x_n \in X\backslash\{a\}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ não existe. Como f é limitada no conjunto $B_\delta(a)\backslash\{a\}$, segue que $(f(x_n))$ é uma sequência limitada de números reais. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 2.1.10) existe uma subsequência

(x_{n_j}) de (x_n) tal que $(f(x_{n_j}))$ converge para $L_1 \in \mathbb{R}$.
Seja $\mathbb{N}' = \mathbb{N}\backslash\{n_j : j \in \mathbb{N}\} = \{m_k : k \in \mathbb{N}\}$. Como $(f(x_n))$ diverge, $\mathbb{N}'$ é infinito e existe, novamente pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass uma subsequência $(x_{m_{k_i}})$ de (x_{m_k}) tal que $(f(x_{m_{k_i}}))$ converge para um ponto $L_2 \in \mathbb{R}$, $L_2 \neq L_1$. A não existência de uma tal subsequência implicaria na convergência de $(f(x_n))$. As subsequências (x_{n_j}) e $(x_{m_{k_i}})$ de (x_n) são as sequências procuradas.

Teorema 2.3.17. *(Critério de Cauchy para funções). Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Para que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é necessário e suficiente que, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, se possa obter $\delta > 0$, tal que $x, y \in X$, $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$ implique que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Demonstração. Suponhamos que a condição seja satisfeita e que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não exista. A condição implica que f é limitada em $B_\delta(a)\backslash\{a\}$. Assim, pela Observação 2.3.16, existem sequências $(x_n), (y_n)$, com $x_n, y_n \in X\backslash\{a\}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, tal que $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, $L_2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ e $L_1 \neq L_2$. Para $\epsilon = |L_1 - L_2| > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$ temos

$$\begin{aligned} |f(x_n) - L_1| &< \frac{\epsilon}{3}, \\ |f(y_n) - L_2| &< \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Por hipótese existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in X\backslash\{a\}$, se $0 < |x - a| < \delta$ e $0 < |y - a| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon/3$. Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$, então $0 < |x_n - a| < \delta$ e $0 < |y_n - a| < \delta$. Assim, para $n > n_1$

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto, se $n > \max\{n_0, n_1\}$ temos

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |(L_1 - f(x_n)) + (f(x_n) - f(y_n)) + (f(y_n) - L_2)| \\ &\leqslant |L_1 - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - L_2| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon = |L_1 - L_2|, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo devemos ter que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

Agora, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Assim $|f(x) - L| < \epsilon/2$. Então, se $x, y \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ e $0 < |y - a| < \delta$, temos

$$|f(x) - f(y)| < |f(x) - L| + |f(y) - L| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Portanto a condição é satisfeita. ■

Definição 2.3.18. Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(X) = L,$$

quando o número real L satisfaz a seguinte condição: Para todo $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $x \in X$, $x > A$ implica em $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definição 2.3.19. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Se $X \cap (a, a + \delta) \neq \varnothing$ para todo $\delta > 0$, dizemos que a é um ponto de acumulação à direita de X, e se $X \cap (a - \delta, a) \neq \varnothing$ para todo $\delta > 0$, dizemos que a é um ponto de acumulação à esquerda de X. Denotamos por X'_+ como o conjunto dos pontos de acumulação à direita de X, e por X'_- o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de X.

Definição 2.3.20. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Diremos que o número real L é o limite à direita de f quando x tende para a, e escreveremos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

quando para todo $\epsilon > 0$ dado, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$. Analogamente, se $a \in X'_-$ diremos que o número real L é o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a, e escreveremos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

quando para todo $\epsilon > 0$ dado, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < a - x < \delta$.

Definição 2.3.21. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função monótona não-crescente se para $x, y \in X$, $x < y$ tivermos $f(x) \geqslant f(y)$. Analogamente, dizemos que f é uma função monótona não-decrescente se para $x, y \in X$, $x < y$ tivermos $f(x) \leqslant f(y)$.

Teorema 2.3.22. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Então existem os limites laterais $L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $M = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.*

Demonstração. Suponhamos f não-decrescente. Seja $L = \inf\{f(x) : x \in X, x > a\}$. Afirmamos que $L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, $L + \epsilon$ não é cota inferior do conjunto $\{f(x) : x \in X, x > a\}$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta \in X$ e $L \leqslant f(a + \delta) < L + \epsilon$. Como f é não-decrescente, se $x \in X$ e $a < x < a + \delta$ então $L \leqslant f(x) < L + \epsilon$, o que demonstra a afirmação feita. A demonstração para o limite M é análoga. ∎

2.4 Funções Reais Contínuas

Nesta seção estudaremos resultados sobre funções reais de uma variável real, no que diz respeito à continuidade. Estes resultados buscam sustentar as próximas seções sobre derivadas e integrais. Estaremos assumindo que X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, e nem todos os resultados desta sessão serão demonstrados. As referências para esta seção são [7], [8] e [9].

Definição 2.4.1. Diremos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Teorema 2.4.2. *(Desigualdade Triangular). Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.*

Demonstração. Pela definição de módulo de um número real, temos $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ e $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$. Logo, temos que $-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$. Voltando pela definição de módulo para números reais, conluímos que $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. ∎

Proposição 2.4.3. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $x_0 \in X$ e seja c uma constante real. Então:*

(a) $f + g$ é contínua em x_0,

(b) cf é contínua em x_0,

(c) fg *é contínua em* x_0*,*

(d) $\dfrac{f}{g}$ *é contínua em* x_0*, se* $g(x_0) \neq 0$*.*

Demonstração. (a) : Seja $\epsilon > 0$ dado. Como f e g são contínuas em x_0, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_1$ então $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2$, e se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_2$ então $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon/2$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e temos que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$, então $|x - x_0| < \delta_1$ e $|x - x_0| < \delta_2$ e assim pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))| &= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \\ &\leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo $f + g$ é contínua em x_0.
(b) : Suponhamos $c \neq 0$ e seja $\epsilon > 0$ dado. Como f é contínua em x_0, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/|c|$. Então se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$,

$$|cf(x) - cf(x_0)| = |c||f(x) - f(x_0)| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

Logo cf é contínua em x_0. Se $c = 0$, então $cf = 0$ é contínua em x_0.
(c) : Como f é contínua em x_0, pelo Lema 3.3.4 para o caso real (mesma demonstração), existem constantes $\delta_1, M > 0$ tais que, se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_1$, então $|f(x)| \leqslant M$. Assim se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_1$, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| &= |(f(x)g(x) - f(x)g(x_0)) + (f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0))| \\ &\leqslant |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\ &\leqslant M|g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como f é contínua em x_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_2$ então $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/(2|g(x_0)|)$ se $g(x_0) \neq 0$ ou $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $g(x_0) = 0$. Como g é contínua em x_0, existe $\delta_3 > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_3$ então $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon/(2M)$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ e temos que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$, pela desigualdade anterior,

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| < M\frac{\epsilon}{2M} + |g(x_0)|\frac{\epsilon}{2|g(z_0)|} = \epsilon$$

se $g(x_0) \neq 0$ ou

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| < M\frac{\epsilon}{2M} + 0\epsilon = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

se $g(x_0) = 0$. Logo fg é contínua em x_0.
(d) : Se demonstrarmos que a função $1/g$ é contínua em x_0, usando (c) obteremos que $f/g = f\,(1/g)$ é contínua em x_0. Logo basta demonstrar que $1/g$ é contínua em x_0. Suponhamos que g seja contínua em x_0 e que $g(x_0) \neq 0$. Pelo Lema 3.3.5 para o caso real (mesma demonstração), existem $\delta_1, M > 0$ tais que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_1$, então $|g(x)| \geqslant M$. Assim se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_1$ temos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|} \leqslant \frac{|g(x) - g(x_0)|}{M|g(x_0)|}.$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como g é contínua em x_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_2$, então $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon M|g(x_0)|$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_2, \delta_1\}$ e temos pela desigualdade anterior que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| \leqslant \frac{|g(x) - g(x_0)|}{M|g(x_0)|} < \frac{\epsilon M|g(x_0)|}{M|g(x_0)|} = \epsilon.$$

Podemos assim concluir que $1/g$ é contínua em x_0. ■

Proposição 2.4.4. *Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$, com $f(X) \subset Y$. Suponha que f é contínua em $x_0 \in X$ e que g é contínua em $f(x_0)$. Então a função $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para $0 < |x - f(x_0)| < \delta_1$, temos $|g(x) - g(f(x_0))| < \epsilon$. Também existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_2$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \delta_1$. Portanto, se $0 < |x - x_0| < \delta_2$, então $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$, como queríamos demonstrar. ■

Definição 2.4.5. Sejam $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funções reais. Dizemos que (f_n) converge uniformemente para f se, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $n > n_0$ e todo $x \in X$.

Definição 2.4.6. Seja (a_n) uma sequência de números reais e seja $x_0 \in \mathbb{R}$. A soma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

é chamada uma série de potências em torno de x_0.

Definição 2.4.7. Seja (f_n) uma sequência de funções reais definidas em $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

é convergente em X e sua soma é $S(x)$ se a sequência das somas parciais $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ converge para $S(x)$ para todo x em X.

Definição 2.4.8. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Diremos que f é analítica no ponto $x_0 \in X$ se existir uma sequência (a_n) de números reais e $r > 0$ tal que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge para $f(x)$ se $|x - x_0| < r$, isto é, se $|x - x_0| < r$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Se a função f for analítica em todo ponto x_0 de X, dizemos que a f é analítica em X.

Observação 2.4.9. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ convergir para $f(x)$ para todo x tal que $|x - x_0| < r$ onde $r > 0$, e se $0 < s < r$, então temos que essa série vai convergir uniformemente para $f(x)$ quando $|x - x_0| \leqslant s$.

2.5 Derivadas de Funções de uma Variável Real

Nesta seção daremos a definição de derivada de uma função real de uma variável real e apresentaremos exemplos e propriedades de funções deriváveis. Não faremos as demonstrações dos resultados aqui apresentados. Nesta seção, X denotará um conjunto aberto. A referência para essa seção é [7].

Definição 2.5.1. Sejam $x_0 \in X$ e f uma função real definida em X. A derivada de f em x_0 é definida como sendo o limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

se esse limite existir. Neste caso, dizemos que f é derivável em x_0.

Definição 2.5.2. Uma função f definida em X é dita derivável se for derivável em todos os pontos de X.

Teorema 2.5.3. *Se uma função f for derivável no ponto $x_0 \in X$, então, f é contínua em x_0.*

Teorema 2.5.4. *Sejam f e g funções deriváveis em X e c uma constante real. Então*

(a) Se $h(x) = cf(x)$, então h é derivável e $h'(x) = cf'(x)$;

(b) Se $h(x) = f(x) + g(x)$, então h é derivável e $h'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(c) Se $h(x) = f(x) - g(x)$, então h é derivável e $h'(x) = f'(x) - g'(x)$;

(d) Se $h(x) = f(x)g(x)$, então h é derivável e $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$;

(e) Se $h(x) = f(x)/g(x)$, então, se $g(x) \neq 0$, h é derivável e, $h'(x) = (f'(x)g(x) - f'(x)g(x))/[g(x)]^2$;

Proposição 2.5.5. *Se c for uma contante real e se $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f'(x) = 0$.*

Proposição 2.5.6. *Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Proposição 2.5.7. *Seja $f(x) = \ln x$ para $x > 0$. Então, $f'(x) = 1/x$.*

Proposição 2.5.8. *Seja $f(x) = a^x$ para $a > 0$ constante. Então, $f'(x) = a^x \ln x$. Em particular, se $f(x) = e^x$, temos $f'(x) = e^x$.*

Proposição 2.5.9. *Para as funções trigonométricas, valem as seguintes derivadas:*

(a) *Se* $f(x) = \operatorname{sen} x$, *temos* $f'(x) = \cos x$;

(b) *Se* $f(x) = \cos x$, *temos* $f'(x) = -\operatorname{sen} x$;

(c) *Se* $f(x) = \operatorname{tg} x$, *temos* $f'(x) = \sec^2 x$;

(d) *Se* $f(x) = \operatorname{cotg} x$, *temos* $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$;

(e) *Se* $f(x) = \sec x$, *temos* $f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$;

(f) *Se* $f(x) = \operatorname{cosec} x$, *temos* $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$.

Teorema 2.5.10. *(Regra da Cadeia). Sejam* X *e* Y *subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}$ *e* $f : Y \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(X) \subset Y$. *Se a função* g *for derivável em* x *e a função* f *for derivável em* $g(x)$, *então a função composta* $f \circ g$ *será derivável em* x, *e* $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

2.6 Integral de Funções de uma Variável Real

Nessa seção citaremos os fatos mais relevantes sobre integração de funções de uma variável real, sem realizar demonstrações. Para essa seção, vamos assumir sempre que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante e que f, g e h são funções sempre definidas e contínuas em um intervalo $I = [a, b]$. A referência para essa seção é [7].

Definição 2.6.1. Uma função F contínua em I, será chamada de antiderivada de uma função f se $F'(x) = f(x)$ para todo x no interior de I, isto é, para todo $x \in (a, b)$.

Teorema 2.6.2. *Toda função* $f : I \to \mathbb{R}$ *contínua possui uma antiderivada* F.

Teorema 2.6.3. *Sejam* f *e* g, *tais que* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* x *no interior de* I, *então existe uma constante* C, *tal que* $f(x) = g(x) + C$ *para todo* x *em* I.

Teorema 2.6.4. *Se* F *for uma antiderivada particular de* f, *então toda antiderivada de* f *será dada por* $F(x) + C$, *para alguma constante* $C \in \mathbb{R}$.

Notação 2.6.5. Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função. O símbolo $\int f(x)dx$ denota a operação de antidiferenciação de uma função f que chamaremos de integral indefinida de f. Nesse caso, temos

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

onde

$$F'(x) = f(x) \;\; x \in (a,b).$$

Teorema 2.6.6. *Sejam $c \in \mathbb{R}$ uma constante e f,g funções reais contínuas definidas em I. Então, valem as seguintes propriedades:*

(a) $\displaystyle\int dx = x + C$ *;*

(b) $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$*;*

(c) $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Proposição 2.6.7. *Seja $n \in \mathbb{R}$. Então*

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad se\, n \neq -1$$

e

$$\int x^{-1} = \ln x + C.$$

Proposição 2.6.8. *Seja $a \in \mathbb{R}$. Então*

$$\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Em particular, se $a = e$, temos

$$\int e^x = e^x + C.$$

Proposição 2.6.9. *(Integrais indefinidas trigonométricas). Para as funções trigonométricas temos as seguintes propriedades para integrais indefinidas:*

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$;

(b) $\displaystyle\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$;

(c) $\displaystyle\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$;

(d) $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C$;

(e) $\displaystyle\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C$;

(f) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x dx = -\operatorname{cosec} x + C$.

Teorema 2.6.10. *(Regra da Cadeia para Integral). Seja $g : J = [c,d] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (c,d) tal que $g(J) = I$. Suponha que f tenha F como antiderivada em I. Então*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Definição 2.6.11. Seja f uma função limitada em $[a,b]$. Dizemos que f é integrável em $I = [a,b]$ se existir um número $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, tal que $\Delta_i = x_i - x_{i-1} < \delta$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e todo $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, temos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - L\right| < \epsilon.$$

Nessas condições, seja $\Delta = \max\{\Delta_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Escrevemos

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = L.$$

Definição 2.6.12. Seja f uma função integrável no intervalo $[a,b]$ e seja L nas condições da definição anterior. O número L é chamado de integral definida de f de a até b e é denotada por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 2.6.13. *Se uma função for contínua no intervalo fechado* $[a, b]$, *então ela será integrável em* $[a, b]$.

Definição 2.6.14. Seja f uma função integrável no intervalo $[a, b]$. Definimos

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 2.6.15. *Sejam* c *uma constante real e* f *e* g *funções integráveis no intervalo fechado* $[a, b]$. *Então, valem as seguintes propriedades:*

(a) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0;$

(b) $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx;$

(c) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Teorema 2.6.16. *Se a função* f *for integrável nos intervalos fechados* $[a, b]$, $[a, c]$ *e* $[c, b]$, *com* $a < c < b$, *então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema 2.6.17. *(Teorema do Valor Médio para Integrais). Se a função* f *for contínua no intervalo fechado* $[a, b]$, *existe* $c \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Teorema 2.6.18. *(Teorema Fundamental do Cálculo). Seja* f *uma função contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e seja* F *uma função contínua em* $[a, b]$, *tal que* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in (a, b)$. *Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Teorema 2.6.19. *(Integração por partes). Sejam* f *e* g *funções contínuas e com derivadas contínuas. Então*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Teorema 2.6.20. *Sejam* $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *funções contínuas. Se* (f_n) *converge uniformemente para* f *em* $[a,b]$*, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Definição 2.6.21. Seja f contínua em $[a,+\infty)$. Definimos a integral imprópria $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ como sendo o limite

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

se esse limite existir.

Definição 2.6.22. Seja f contínua em $(-\infty,b]$. Definimos a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ como sendo o limite

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

se esse limite existir.

Definição 2.6.23. Seja f contínua em $(-\infty,+\infty)$. Definimos a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ como sendo o limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^a f(x)dx$$

se esse limite existir.

3 Funções Complexas

Neste capítulo faremos a introdução ao conjunto dos números complexos e estudaremos funções complexas de uma variável complexa e algumas propriedades específicas, que serão utilizadas no próximo capítulo, que tratará da função Zeta de Riemann. As referências para esse capítulo são [1], [5] e [13].

3.1 O Conjunto dos Números Complexos

Nesta seção introduziremos o conjunto dos números complexos e apresentaremos algumas de suas propriedades. As referências para esta seção são [1] e [13].

Definição 3.1.1. Um número complexo z pode ser representado por um par ordenado (a, b) de números reais a e b.

Notação 3.1.2. O conjunto $\{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ dos números complexos será denotado por $\mathbb{C}$ e cada par ordenado $(a, b) \in \mathbb{C}$ será denotado por $a + bi$. Em particular, $(0, 1)$ será denotado por i.

Definição 3.1.3. Os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são idênticos se $a = c$ e $b = d$.

Definição 3.1.4. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos. A soma de z_1 com z_2 e o produto de z_1 por z_2 são definidos respectivamente por:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i;$$
$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Notação 3.1.5. O elemento $(0, 0) \in \mathbb{C}$ será denotado por 0, e será reconhecido como elemento neutro aditivo do conjunto $\mathbb{C}$, analogamente, o elemento $(1, 0)$ por 1, e será reconhecido como elemento neutro multiplicativo do conjunto $\mathbb{C}$. Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Denotaremos por $-z = -a - bi$, o inverso aditivo de z e por

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i,$$

o inverso multiplicativo de z, se $z \neq 0$.

Proposição 3.1.6. *Sejam* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. *Valem as seguintes propriedades:*

(a) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;

(b) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

(c) $0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1$;

(d) $z_1 + (-z_1) = -z_1 + z_1 = 0$;

(e) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$;

(f) $z_1z_2 = z_2z_1$;

(g) $1z_1 = z_11 = z_1$;

(h) $z_1z_1^{-1} = z_1^{-1}z_1 = 1$, *se* $z_1 \neq 0$;

(i) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

A verificação dessas propriedades é simples e não serão demonstradas.

Observação 3.1.7. Seja $z = a+bi \in \mathbb{C}$. O número complexo $a+0i$ será identificado como o número real a. Esta regra permite configurar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como um subconjunto do conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Pela definição de multiplicação em $\mathbb{C}$ temos $i^2 = -1$.

Definição 3.1.8. Seja, $a + bi = z \in \mathbb{C}$. Dizemos que a é a parte real de z e b é a parte imaginária de z, e escrevemos, respectivamente, $\mathrm{Re}(z) = a$ e $\mathrm{Im}(z) = b$.

Definição 3.1.9. Seja $z \in \mathbb{C}$. Dizemos que o conjugado de $z = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = a - bi$.

Definição 3.1.10. O módulo de um número complexo $z = a + bi$ é definido como sendo o número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposição 3.1.11. *Sejam* $z, w \in \mathbb{C}$. *Então:*

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$*;*

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$*;*

(c) $z\overline{z} = |z|^2$*;*

(d) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad w \neq 0$*;*

(e) $|zw| = |z|\,|w|$*.*

Demonstração. As propriedades (a), (b) e (c) são imediatas. Se $z_1 = z/w$, então $z_1 w = z$. Por (b) temos $\overline{z}/\overline{w} = \overline{z_1 w}/\overline{w} = \overline{z_1}\,\overline{w}/\overline{w} = \overline{z_1}$, o que demonstra (d). Passemos agora à demonstração de (e). Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Temos

$$\begin{aligned}
|zw| &= |(a+bi)(c+di)| \\
&= |(ac-bd) + (ad+bc)i| \\
&= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\
&= |a+bi|\,|c+di| \\
&= |z|\,|w|\,.
\end{aligned}$$

Conforme queríamos demonstrar. ■

Observação 3.1.12. Seja $z = a + bi$ um número complexo não nulo. Através da representação do par ordenado (a, b) em coordenadas polares, podemos escrever

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

onde $0 \leqslant \theta < 2\pi$. O número θ será chamado de argumento do número z.

Lema 3.1.13. *Se* $z, w \in \mathbb{C}$*, então*

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w}).$$

Demonstração. Temos,

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} + (z\overline{w} + \overline{z}w) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + (z\overline{w} + \overline{z}w). \end{aligned}$$

Observamos que $\overline{z}w$ é o conjugado de $z\overline{w}$ e portanto

$$z\overline{w} + \overline{z}w = 2\mathrm{Re}(z\overline{w}),$$

o que completa a demonstração. ∎

Teorema 3.1.14. *(Desigualdade Triangular). Se $z, w \in \mathbb{C}$, então*

$$|z+w| \leqslant |z| + |w|.$$

Demonstração. Utilizando o resultado do Lema 3.1.13, temos

$$|z+w|^2 - (|z| + |w|)^2 = -2\,|z|\,|w| + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$

Pela Proposição 3.1.11 temos $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leqslant |z\overline{w}| = |z|\,|w|$, e portanto,

$$|z+w|^2 - (|z| + |w|)^2 \leqslant 0,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Proposição 3.1.15. *Sejam z e w dois números complexos. Então,*

$$\big|\,|z| - |w|\,\big| \leqslant |z-w|.$$

Demonstração. Utilizando a desigualdade triangular temos

$$|z| = |(z-w) + w| \leqslant |z-w| + |w|$$

e assim

$$|z| - |w| \leqslant |z-w|.$$

De forma análoga

$$|w| = |(-z + w) + z| \leqslant |-z + w| + |z| = |z - w| + |z|$$

e assim

$$|w| - |z| \leqslant |z - w|\,.$$

Logo podemos concluir que $|\,|z| - |w|\,| \leqslant |z - w|$. ■

3.2 Sequências no Plano Complexo

Nesta seção extenderemos os estudos feitos para sequências de números reais para sequências de números complexos. As referências para esta seção são [1] e [13].

Definição 3.2.1. Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

(a) A bola aberta de centro em z_0 e raio r, é definida como sendo o subconjunto $B_r(z_0)$ de $\mathbb{C}$ dado por

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}\,.$$

(b) A bola fechada de centro em z_0 e raio r, é definida como sendo o subconjunto $\overline{B_r}(z_0)$ de $\mathbb{C}$ dado por

$$\overline{B_r}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}\,.$$

Definição 3.2.2. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$. Dizemos que z é um ponto interior de A se existir $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset A$. Denotamos por $\mathring{A}$ o conjunto de todos os pontos interiores de A, que é chamado de interior de A.

Definição 3.2.3. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Se para qualquer $r > 0$ temos que $B_r(z_0) \cap A \neq \varnothing$, dizemos que z_0 é um ponto aderente do conjunto A. O fecho do conjunto A, denotado por $\overline{A}$, é definido como sendo o conjunto formado por todos os pontos aderentes de A.

Definição 3.2.4. Seja $A \subset \mathbb{C}$. Se $A = \overline{A}$, dizemos que o conjunto A é fechado.

Definição 3.2.5. Seja $A \subset \mathbb{C}$. Se $A = \mathring{A}$, dizemos que o conjunto A é aberto.

Definição 3.2.6. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que o ponto z_0 é um ponto de acumulação de A se para qualquer $r > 0$ dado $(B_r(z_0) \backslash z_0) \cap A \neq \emptyset$. Se $z_0 \in A$ não for um ponto de acumulação de A, dizemos que z_0 é um ponto isolado de A.

Definição 3.2.7. Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é denominado limitado se existir $r > 0$ tal que $|z| \leqslant r$ para todo $z \in A$, isto é, se $A \subset \overline{B_r}(0)$.

Definição 3.2.8. Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é denominado compacto se ele for limitado e fechado.

Definição 3.2.9. Uma sequência em $\mathbb{C}$ é uma função $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Escrevemos $z(n) = z_n$. A sequência z será denotada por (z_n).

Definição 3.2.10. Dizemos que a sequência (z_n) de números complexos converge para $w \in \mathbb{C}$, ou que tem limite w, e escrevemos $z_n \to w$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$ se, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant n_0$ então $|z_n - w| < \epsilon$.

Proposição 3.2.11. *Seja (z_n) uma sequência de números complexos. Então*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{n\to\infty} Re(z_n) = Re(w)$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} Im(z_n) = Im(w)$*;*

(b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$ *então* $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |w|$*;*

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

Demonstração.

(a) Notemos que

$$\begin{aligned} |z_n - w| &= |(\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(w)) + i(\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(w))| \\ &= \left[(\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(w))^2 + (\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(w))^2\right]^{1/2} \\ &\geqslant |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(w)|, \end{aligned}$$

e analogamente

$$|z_n - w| \geqslant |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(w)|.$$

Suponhamos que $z_n \to w$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - w| < \epsilon$ para $n \geqslant n_0$. Segue que $|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(w)| < \epsilon$ e $|\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(w)| < \epsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(w)$. Agora pela desigualdade triangular temos

$$|z_n - w| \leqslant |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(w)| + |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(w)|.$$

Suponhamos que $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(w)$. Então dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(w)| < \epsilon/2$ se $n \geqslant n_1$ e $|\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(w)| < \epsilon/2$ se $n \geqslant n_2$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e temos pela desigualdade anterior $|z_n - w| < \epsilon$ se $n \geqslant n_0$. Podemos assim concluir que $z_n \to w$.

(b) Suponhamos que $z_n \to w$ e seja $\epsilon > 0$ dado. Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant n_0$, então $|z_n - w| < \epsilon$. Mas pela Proposição 3.1.15,

$$||z_n| - |w|| \leqslant |z_n - w|$$

e assim, se $n \geqslant n_0$,

$$||z_n| - |w|| < \epsilon,$$

ou seja, $|z_n| \to |w|$.

(c) Segue como consequência de (b) que se $z_n \to 0$, então $|z_n| \to 0$. Suponhamos que $|z_n| \to 0$ e seja $\epsilon > 0$ dado. Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant n_0$ então $|z_n| < \epsilon$. Como $|\mathrm{Re}(z_n)| \leqslant |z_n|$ e $|\mathrm{Im}(z_n)| \leqslant |z_n|$ obtemos $|\mathrm{Re}(z_n)| < \epsilon$ e $|\mathrm{Im}(z_n)| < \epsilon$ se $n \geqslant n_0$, e assim $\mathrm{Re}(z_n) \to 0$ e $\mathrm{Im}(z_n) \to 0$. Por (a) podemos concluir que $z_n \to 0$.

■

Definição 3.2.12. Uma sequência (z_n) é denominada limitada quando $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ for um conjunto limitado.

Definição 3.2.13. Seja $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ e seja $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ uma sequência. A restrição $z|\mathbb{N}'$, da função z ao conjunto $\mathbb{N}'$, é chamada uma subsequência da sequência z.

Teorema 3.2.14. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass, caso complexo). Toda sequência complexa limitada contém uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (z_n) uma sequência complexa limitada e sejam $x_n = \text{Re}(z_n)$, $y_n = \text{Im}(z_n)$. É claro que (x_n) e (y_n) são sequências reais limitadas. Pelo Teorema 2.1.10, (x_n) contém uma subsequência (x_{n_k}) convergente. Mas (y_{n_k}) é uma sequência limitada e assim, novamente pelo Teorema 2.1.10, (y_{n_k}) contém uma subsequência convergente $(y_{n_{k_j}})$. Como $(x_{n_{k_j}})$ é uma subsequência da sequência convergente (x_{n_k}), segue que $(x_{n_{k_j}})$ também converge. Então $(x_{n_{k_j}})$ e $(y_{n_{k_j}})$ são sequências reais convergentes, $x_{n_{k_j}} = \text{Re}(z_{n_{k_j}})$ e $y_{n_{k_j}} = \text{Im}(z_{n_{k_j}})$ e assim, pelo item (a) da Proposição 3.2.11, temos que $(z_{n_{k_j}})$ é convergente e subsequência de (z_n). ■

3.3 Funções Contínuas

Nesta seção fazemos um estudo sobre funções contínuas definidas em subconjuntos de $\mathbb{C}$ e com valores em $\mathbb{C}$. As referências para esta seção são [1] e [13].

Definição 3.3.1. Sejam $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \varnothing$, f uma função definida em U e com valores em $\mathbb{C}$ e $z_0 \in U$. Dizemos que f é contínua em z_0 se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Definição 3.3.2. Sejam $h_n, h : U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, funções complexas. Dizemos que h_n converge uniformemente para h se, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|h_n(z) - h(z)| < \epsilon$ para todo $n > n_0$ e todo $z \in U$.

Proposição 3.3.3. *Sejam U um subconjunto de $\mathbb{C}$, $U \neq \varnothing$, $f : U \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in U$. São equivalentes:*

(a) f é contínua em z_0;

(b) se (z_n) é uma sequência, $z_n \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z_n \to z_0$, então $f(z_n) \to f(z_0)$.

Demonstração. Se z_0 for um ponto isolado de U, então é imediato que (a) e (b) são equivalentes e que f é contínua em z_0. De agora em diante vamos supor que z_0

é um ponto de acumulação de U.
$(a) \Rightarrow (b)$: Suponhamos que f seja contínua em z_0 e seja (z_n) uma sequência tal que $z_n \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z_n \to z_0$. Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade de f em z_0, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Como $z_n \to z_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant n_0$, então $|z_n - z_0| < \delta$. Portanto, temos $z_n \in U$ e $|z_n - z_0| < \delta$, e assim $|f(z_n) - f(z_0)| < \epsilon$. Logo $f(z_n) \to f(z_0)$.
$(b) \Rightarrow (a)$: Suponhamos que f não seja contínua em z_0 e que a condição (b) seja verdadeira. Como f não é contínua em z_0, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $z \in U$ tal que $|z - z_0| < \delta$ e $|f(z) - f(z_0)| \geqslant \epsilon$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\delta = 1/n$, existe $z_n \in U$ tal que $|z_n - z_0| < 1/n$ e $|f(z_n) - f(z_0)| \geqslant \epsilon$. Como $|z_n - z_0| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é fácil verificar que $z_n \to z_0$. Mas $|f(z_n) - f(z_0)| \geqslant \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim a sequência $(f(z_n))$ não converge para $f(z_0)$. Portanto a condição (b) não pode ser verdadeira, isto é, temos uma contradição. Podemos então concluir que (b) implica (a). ■

Lema 3.3.4. *Se $f : U \to \mathbb{C}$ é contínua em $z_0 \in U$, então existem constantes positivas $\delta, M \in \mathbb{R}$ tais que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z)| \leqslant M$.*

Demonstração. Como f é contínua em z_0, para $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < 1$. Portanto se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |(f(z) - f(z_0)) + f(z_0)| \\ &\leqslant |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)| \\ &< 1 + |f(z_0)| = M \end{aligned}$$

e assim concluimos a demonstração. ■

Lema 3.3.5. *Se $f : U \to \mathbb{C}$ é contínua em $z_0 \in U$ e $f(z_0) \neq 0$, então existem constantes positivas $\delta, M \in \mathbb{R}$ tais que se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z)| \geqslant M$.*

Demonstração. Tomamos $\epsilon = |f(z_0)|/2 > 0$. Como f é contínua em z_0, existe $\delta > 0$ tal que, se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Logo se $z \in U$ e

$|z - z_0| < \delta$, pela Proposição 3.1.15,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(z_0) + (f(z) - f(z_0))| \\ &\geqslant |f(z_0)| - |f(z) - f(z_0)| \\ &> |f(z_0)| - \epsilon = \frac{|f(z_0)|}{2} = M, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 3.3.6. *Sejam $f, g : U \to \mathbb{C}$ duas funções contínuas em $z_0 \in U$ e seja c uma constante complexa. Então:*

(a) $f + g$ é contínua em z_0;

(b) cf é contínua em z_0;

(c) fg é contínua em z_0;

(d) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em z_0 se $g(z_0) \neq 0$.

Demonstração. (a) : Seja $\epsilon > 0$ dado. Como f e g são contínuas em z_0, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta_1$ então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon/2$, e se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta_2$ então $|g(z) - g(z_0)| < \epsilon/2$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e temos que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|z - z_0| < \delta_1$ e $|z - z_0| < \delta_2$ e assim pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |(f(z) + g(z)) - (f(z_0) - g(z_0))| &= |(f(z) - f(z_0)) + (g(z) - g(z_0))| \\ &\leqslant |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo $f + g$ é contínua em z_0.
(b) :Suponhamos $c \neq 0$ e seja $\epsilon > 0$ dado. Como f é contínua em z_0, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$, temos $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon/|c|$. Então se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$,

$$|cf(z) - cf(z_0)| = |c||f(z) - f(z_0)| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

Logo cf é contínua em z_0. Se $c = 0$, então $cf = 0$ é contínua em z_0.
(c) : Como f é contínua em z_0, pelo Lema 3.3.4, existem constantes $\delta_1, M > 0$ tais que, se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta_1$, então $|f(z)| \leqslant M$. Assim se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta_1$, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &= |(f(z)g(z) - f(z)g(z_0)) + (f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0))| \\ &\leqslant |f(z)||g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)||f(z) - f(z_0)| \\ &\leqslant M|g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)||f(z) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como f é contínua em z_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta_2$ então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon/(2|g(z_0)|)$ se $g(z_0) \neq 0$ ou $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ se $g(z_0) = 0$. Como g é contínua em z_0, existe $\delta_3 > 0$ tal que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta_3$ então $|g(z) - g(z_0)| < \epsilon/(2M)$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ e temos que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$, pela desigualdade anterior,

$$|f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| < M\frac{\epsilon}{2M} + |g(z_0)|\frac{\epsilon}{2|g(z_0)|} = \epsilon$$

se $g(z_0) \neq 0$ ou

$$|f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| < M\frac{\epsilon}{2M} + 0\epsilon = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

se $g(z_0) = 0$. Logo fg é contínua em z_0.
(d) : Se demonstrarmos que a função $1/g$ é contínua em z_0, usando (c) obteremos que $f/g = f\,(1/g)$ é contínua em z_0. Logo basta demonstrar que $1/g$ é contínua em z_0. Suponhamos que g seja contínua em z_0 e que $g(z_0) \neq 0$. Pelo Lema 3.3.5, existem $\delta_1, M > 0$ tais que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta_1$, então $|g(z)| \geqslant M$. Assim se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta_1$ temos

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}\right| = \frac{|g(z) - g(z_0)|}{|g(z)||g(z_0)|} \leqslant \frac{|g(z) - g(z_0)|}{M|g(z_0)|}.$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como g é contínua em z_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta_2$, então $|g(z) - g(z_0)| < \epsilon M|g(z_0)|$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_2, \delta_1\}$ e temos pela desigualdade anterior que se $z \in U$ e $|z - z_0| < \delta$,

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}\right| \leqslant \frac{|g(z) - g(z_0)|}{M|g(z_0)|} < \frac{\epsilon M|g(z_0)|}{M|g(z_0)|} = \epsilon.$$

Podemos assim concluir que $1/g$ é contínua em z_0. ■

Definição 3.3.7. Sejam $f : U \to \mathbb{C}$ e $V \subset U$. Se f é contínua em todos os pontos de V, dizemos que f é contínua em V.

Lema 3.3.8. *Seja $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \varnothing$, um conjunto compacto e seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é limitada.*

Demonstração. Vamos mostrar que f é limitada superiormente. Suponhamos por contradição que f não seja limitada superiormente. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in U$ tal que $f(z_n) > n$. Como U é limitado então a sequência (z_n) é limitada e portanto pelo Teorema 3.2.14, (z_n) contém uma subsequência convergente (z_{n_k}). Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_{n_k} \to z_0$. Dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geqslant k_0$ então $|z_{n_k} - z_0| < \epsilon$, isto é, $z_{n_k} \in B_\epsilon(z_0)$. Mas $z_{n_k} \in U$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e assim $z_{n_k} \in B_\epsilon(z_0) \cap U$. Portanto temos que z_0 é um ponto aderente de U, isto é, z_0 pertence ao fecho $\overline{U}$ de U. Como $\overline{U} = U$ pois U é fechado, segue que $z_0 \in U$. Como $z_{n_k} \to z_0$ e f é contínua em z_0, pela Proposição 3.3.3 temos que $f(z_{n_k}) \to f(z_0)$. Assim, para $\epsilon = 1$, segue pela definição de limite de sequência, que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z_{n_k}) - f(z_0)| < 1$ se $k \geqslant k_0$. Logo $f(z_0) - 1 < f(z_{n_k}) < f(z_0) + 1$ se $k \geqslant k_0$, em particular $f(z_{n_k}) < f(z_0) + 1$ se $k \geqslant k_0$. Para $k \geqslant k_0$ temos então $f(z_{n_k}) < f(z_0) + 1$ e $f(z_{n_k}) > n_k$ e assim $n_k < f(z_0) + 1$ para qualquer $k \geqslant k_0$. Como a aplicação $k \mapsto n_k$, de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ deve ser injetora, devemos ter $n_k \geqslant k$. Portanto $k < f(z_0) + 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0$, o que é um absurdo. De forma análoga podemos mostrar que f é limitada inferiormente. ∎

Proposição 3.3.9. *Sejam U e V abertos, $f : U \to \mathbb{C}$ e $g : V \to \mathbb{C}$ funções complexas, com $f(U) \subset V$. Suponha que f é contínua em $z_0 \in U$ e que g é contínua em $f(z_0)$. Então a função $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, como g é contínua em $f(z_0)$ e V é aberto, existe $\delta_1 > 0$ tal que para $|w - f(z_0)| < \delta_1$, temos $w \in V$ e $|g(w) - g(f(z_0))| < \epsilon$. Mas também, f é contínua em z_0 e U é aberto, e portanto, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta_2$ implica que $z \in U$ e $|f(z) - f(z_0)| < \delta_1$. Logo, se $0 < |z - z_0| < \delta_2$, então $|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \epsilon$, como queríamos demonstrar. ∎

Definição 3.3.10. Seja $U \subset \mathbb{C}$. Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é chamada uniformemente contínua em U se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$ sempre que $z, w \in U$ e $|z - w| < \delta$.

Teorema 3.3.11. *Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto. Toda função contínua $h : K \to \mathbb{C}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Suponhamos que h não seja uniformemente contínua. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos achar $z_n \in K$ e $w_n \in K$ com $|z_n - w_n| < 1/n$ e $|h(z_n) - h(w_n)| \geqslant \epsilon$. Como K é compacto, uma subsequência (z_{n_k}) converge para um ponto $z \in K$. Então $\lim\limits_{k \to +\infty} w_{n_k} = z$. Como h é contínua, $\lim\limits_{k \to +\infty} h(z_{n_k}) = \lim\limits_{k \to +\infty} h(w_{n_k}) = h(z)$. Mas isto contradiz a desigualdade $|h(z_{n_k}) - h(w_{n_k})| \geqslant \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, h é uniformemente contínua. ∎

3.4 Derivada de Funções de uma Variável Complexa

Nesta seção definiremos e enunciaremos propriedades da derivada de funções de uma variável complexa e veremos alguns exemplos. O domínio das funções que serão tratadas nessa seção serão sempre subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$. A referência com as demonstrações para esta seção é [13].

Definição 3.4.1. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto, z_0 um ponto de A e $f : A \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Chamamos de derivada de f em z_0 e denotamos por $f'(z_0)$ o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

caso exista. Neste caso dizemos que f é derivável em z_0.

Definição 3.4.2. Sejam $U \subset \mathbb{C}$, z_0 um ponto de acumulação de U, $f : U \to \mathbb{C}$ e $L \in \mathbb{C}$. Se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $z \in U$ e $0 < |z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - L| < \epsilon$, dizemos que L é o limite de $f(z)$ quando $z \to z_0$ e escrevemos

$$L = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Se não existe $L \in \mathbb{C}$ tal que $L = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, dizemos que o limite $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ não existe.

Observação 3.4.3. Sejam $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \varnothing$, $f : U \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in U$. Se z_0 é um ponto isolado de U, então segue imediatamente pela definição de continuidade que f é contínua em z_0. Se z_0 é um ponto de acumulação de U, então f é contínua em z_0 se, e somente se,

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Proposição 3.4.4. *Se f é derivável em z_0, então f é contínua em z_0.*

Proposição 3.4.5. *Se f e g são deriváveis em z_0, então também são deriváveis em z_0 as funções cf, com c uma constante complexa, $f+g$, fg e f/g (nesta última, desde que $g(z_0) \neq 0$). E valem:*

(a) $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$;

(b) $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$;

(c) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0)$;

(d) $(f/g)'(z_0) = [f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)]/[g(z_0)]^2$.

Proposição 3.4.6. *(Regra da Cadeia, caso complexo). Sejam $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$ com $f(A) \subset B$. Se f é derivável em z_0 e g é derivável em $f(z_0)$, então $g \circ f$ é derivável em z_0 e*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Definição 3.4.7. Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Diremos que f é holomorfa em U se $f'(z)$ existe para todo $z \in U$.

Definição 3.4.8. Seja (a_n) uma sequência de números complexos e seja $z_0 \in \mathbb{C}$. A soma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k,$$

é chamada uma série de potências em torno de z_0.

Definição 3.4.9. Seja (h_n) uma sequência de funções complexas definidas em $U \subset \mathbb{C}$. Dizemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(z)$$

é convergente em U e sua soma é $S(z)$ se a sequência das somas parciais $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} h_k(z)$ converge para $S(z)$ para todo z em U.

Definição 3.4.10. Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Diremos que f é analítica no ponto $z_0 \in U$ se existir uma sequência (a_n) de números complexos e $r > 0$ tal que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge para $f(z)$ se $|z - z_0| < r$, isto é, se $|z - z_0| < r$, temos

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

Se a função f for analítica em todo ponto z_0 de U, dizemos que f é analítica em U.

Observação 3.4.11. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge para $f(z)$ para todo z tal que $|z - z_0| < r$ onde $r > 0$, então se $0 < s < r$ temos que essa série vai convergir uniformemente para $f(z)$ quando $|z - z_0| \leqslant s$.

Teorema 3.4.12. *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Então f é uma função holomorfa em U se, e somente se, é analítica em U.*

Definição 3.4.13. Para todo $z = x + iy$ complexo, definimos

$$\begin{aligned}
e^z &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y);\\
\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};\\
\operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};\\
\operatorname{tg} z &= \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \cos z \neq 0;\\
\operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \quad \operatorname{sen} z \neq 0;\\
\sec z &= \frac{1}{\cos z}, \quad \cos z \neq 0;\\
\operatorname{cosec} z &= \frac{1}{\operatorname{sen} z}, \quad \operatorname{sen} z \neq 0.
\end{aligned}$$

Observação 3.4.14. Todas as funções definidas acima são holomorfas nos seus respectivos domínios e suas derivadas são dadas por

$$[\operatorname{sen} z]' = \cos z;$$

$$[\cos z]' = -\operatorname{sen} z;$$

$$[\operatorname{tg} z]' = \sec^2 z;$$

$$[\operatorname{cotg} z]' = -\operatorname{cosec}^2 z;$$

$$[\sec z]' = \sec z \operatorname{tg} z;$$

$$[\operatorname{cosec} z]' = -\operatorname{cosec} z \operatorname{cotg} z.$$

Proposição 3.4.15. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ temos as expressões*

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \\ \operatorname{sen} z &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}; \\ \cos z &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Definição 3.4.16. Sejam $h_n : U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, funções definidas no aberto U de $\mathbb{C}$. Se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$, implica que $|h_n(z) - h_m(z)| < \epsilon$ para todo $z \in U$, dizemos que (h_n) é uma sequência de Cauchy em U.

Teorema 3.4.17. *Sejam $h_n : U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, funções definidas no aberto U de $\mathbb{C}$. Se (h_n) é uma sequência de Cauchy em U, então existe uma função $h : U \to \mathbb{C}$ tal que $h_n \to h$ uniformemente em U.*

Teorema 3.4.18. *Sejam $h, h_n : U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, funções definidas no aberto U de $\mathbb{C}$. Suponhamos que $h_n \to h$ uniformemente em U.*

(a) Se cada h_n é contínua em U, então h é contínua em U;

(b) Se cada h_n é holomorfa em U, então h é holomorfa em U.

Definição 3.4.19. Um ponto singular de uma função complexa f (ou singularidade isolada de f) é um ponto z_0 tal que existe uma bola aberta $B_r(z_0)$ na qual f é holomorfa, exceto no ponto z_0.

3.5 Resultados e Definições de Apoio

Nessa seção estudaremos alguns resultados que servirão de suporte a outros resultados do capítulo seguinte, que trata da Função Zeta de Riemann. A maioria dos resultados serão demonstrados integralmente, mas parte de algumas demonstrações serão omitidas por serem muito técnicas e assim fugirem dos objetivos dessa dissertação. O leitor interessado pode encontrar as demonstrações completas na referência [5].

Teorema 3.5.1. *Sejam U um aberto de $\mathbb{C}$, $\varphi : [\alpha,\beta]\times U \to \mathbb{C}$ uma função contínua e $h : U \to \mathbb{C}$ definida por:*

$$h(z) = \int_\alpha^\beta \varphi(x,z)dx.$$

Então h é contínua. Seja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z) = \varphi_x'(z),$$

onde $\varphi_x : U \to \mathbb{C}$ é a função dada por $\varphi_x(z) = \varphi(x,z)$ para cada x fixo. Se $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ existe para cada ponto (x,z) em $[\alpha,\beta]\times U$ e é contínua, então h é holomorfa e

$$h'(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z)dx.$$

Demonstração. Inicialmente demonstraremos que h é contínua em $z_0 \in U$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|h(z) - h(z_0)| < \epsilon$ sempre que $|z - z_0| < \delta$, $z \in U$. Temos

$$\begin{aligned} |h(z) - h(z_0)| &= \left| \int_\alpha^\beta \varphi(x,z)dx - \int_\alpha^\beta \varphi(x,z_0)dx \right| \\ &= \left| \int_\alpha^\beta [\varphi(x,z) - \varphi(x,z_0)]dx \right| \\ &\leqslant \int_\alpha^\beta |\varphi(x,z) - \varphi(x,z_0)|\, dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como U é um aberto, existe $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tal que $\overline{B_r}(z_0) \subset U$. Assim, $[\alpha, \beta] \times \overline{B_r}(z_0)$ é compacto e logo a função φ é uniformemente contínua sobre $[\alpha, \beta] \times \overline{B_r}(z_0)$. Portanto dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, $0 < \delta < r$, tal que se $(x, z), (x', z') \in [\alpha, \beta] \times \overline{B_r}(z_0)$ e $|x - x'|^2 + |z - z'|^2 < \delta^2$, então

$$|\varphi(x, z) - \varphi(x', z')| < \frac{\epsilon}{\beta - \alpha}.$$

Em particular, tomando $x' = x$ e $z' = z_0$ obtemos

$$|\varphi(x, z) - \varphi(x, z_0)| < \frac{\epsilon}{\beta - \alpha},$$

para qualquer $x \in [\alpha, \beta]$ e qualquer z tal que $|z - z_0| < \delta$. Logo, por (3.1)

$$|h(z) - h(z_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta dt = \epsilon.$$

Logo, h é contínua em $z_0 \in U$.

A demonstração de que h é holomorfa e sua derivada é dada pela integral que se encontra no enunciado, será omitida. ■

Lema 3.5.2. *(a) Sejam $\epsilon > 0$ e $S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geqslant a\}$ onde $a > 1$. Então existe um número δ, $(0 < \delta < 1)$ tal que para todo $z \in S$,*

$$\left| \int_\alpha^\beta (e^x - 1)^{-1} x^{z-1} dx \right| < \epsilon, \quad \delta > \beta > \alpha > 0.$$

(b) Seja $S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leqslant A\}$, onde $-\infty < A < \infty$. Se $\epsilon > 0$, então existe um número $k > 1$ tal que para todo $z \in S$,

$$\left| \int_\alpha^\beta (e^x - 1)^{-1} x^{z-1} dx \right| < \epsilon, \quad \beta > \alpha > k.$$

Demonstração. (a) : Como $e^x - 1 \geqslant x$, para todo $x \geqslant 0$, temos que para $0 < x \leqslant 1$ e $z \in S$

$$\begin{aligned} |(e^x - 1)^{-1} x^{z-1}| &\leqslant |x^{-1} x^{z-1}| \\ &= x^{-2} |x^z| \\ &= x^{\mathrm{Re}(z)-2} |x^{i\mathrm{Im}(z)}| \\ &\leqslant x^{a-2} |e^{i\mathrm{Im}(z)\ln x}| \\ &= x^{a-2}. \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < \beta < 1$ e $a > 1$, então, para todo $z \in S$, temos que

$$\begin{aligned} \left|\int_\alpha^\beta (e^x-1)^{-1}x^{z-1}dx\right| &\leqslant \int_\alpha^\beta \left|(e^x-1)^{-1}x^{z-1}\right|dx \\ &\leqslant \int_\alpha^\beta x^{a-2}dx \\ &= \frac{1}{a-1}\left(\beta^{a-1}-\alpha^{a-1}\right). \end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta = [\epsilon(a-1)]^{1/(a-1)}$ e obtemos o resultado desejado.

(b) : Se $x \geqslant 1$ e $z \in S$, então $|x^{z-1}| = x^{\mathrm{Re}(z)-1}|x^{i\mathrm{Im}(z)}| \leqslant x^{A-1}$. Por outro lado, a função $x^{A-1}e^{-\frac{x}{2}}$ é contínua no intervalo $[1,\infty)$ e converge para zero quando $x \to \infty$, e assim, existe uma constante c tal que $x^{A-1}e^{-\frac{x}{2}} \leqslant c$ para todo $x \geqslant 1$. Logo

$$|(e^x-1)^{-1}x^{z-1}| = |(e^x-1)^{-1}x^{z-1}e^{-\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}| \leqslant ce^{\frac{x}{2}}(e^x-1)^{-1}$$

para todo $z \in S$ e $x \geqslant 1$. Temos

$$\left|\int_\alpha^\beta (e^x-1)^{-1}x^{z-1}dx\right| \leqslant c\int_\alpha^\beta e^{\frac{x}{2}}(e^x-1)^{-1}dx.$$

Usando a mudança de variável $u = e^{x/2}$, e em seguida, frações parciais, obtemos

$$\int_\alpha^\beta e^{\frac{x}{2}}(e^x-1)^{-1}dx = \ln\left[\left(\frac{e^{\frac{\beta}{2}}-1}{e^{\frac{\beta}{2}}+1}\right)\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}+1}{e^{\frac{\alpha}{2}}-1}\right)\right].$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe um número $k > 1$, tal que

$$\left|\int_\alpha^\beta (e^x-1)^{-1}x^{z-1}dx\right| \leqslant c\ln\left[\left(\frac{e^{\frac{\beta}{2}}-1}{e^{\frac{\beta}{2}}+1}\right)\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}+1}{e^{\frac{\alpha}{2}}-1}\right)\right] < \epsilon$$

para $\beta > \alpha > k$, o que demonstra a parte *(b)*. ■

Observação 3.5.3. Seja

$$h(z) = \int_\alpha^\beta (e^x-1)^{-1}x^{z-1}dx, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < \beta$, então h é uma função contínua e holomorfa em $\mathbb{C}$.

De fato, seja $\varphi(x,z) = (e^x-1)^{-1}x^{z-1}$ para $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Então $\varphi(x,z)$ e $\partial\varphi/\partial z = (\ln x)(e^x-1)^{-1}x^{z-1}$ são contínuas em $[\alpha,\beta] \times U$. Portanto h, é contínua e holomorfa em $\mathbb{C}$ pelo Teorema 3.5.1.

Teorema 3.5.4. (a) : *Se* $S = \{z \in \mathbb{C} : a \leqslant Re(z) \leqslant A\}$, *onde* $1 < a < A < \infty$, *então a integral*

$$\int_0^{\infty} (e^x - 1)^{-1} x^{z-1} dx$$

converge uniformemente em S *e é holomorfa em* $\{z \in \mathbb{C} : 1 < Re(z)\}$.
(b) : *Se* $S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leqslant A\}$ *onde* $-\infty < A < \infty$, *então a integral*

$$\int_1^{\infty} (e^x - 1)^{-1} x^{z-1} dx$$

converge uniformemente em S *e é holomorfa em* $\mathbb{C}$.

Demonstração. (a) : Sejam $\varphi(x, z) = (e^x - 1)^{-1} x^{z-1}$ e $h_n(z) = \displaystyle\int_{1/n}^{n} \varphi(x, z) dx$. Já vimos na Observação 3.5.3 que h_n é contínua e holomorfa em $\mathbb{C}$. Para $1 < n < m$, temos

$$\begin{aligned}
h_m(z) - h_n(z) &= \int_{1/m}^{m} \varphi(x,z)dx - \int_{1/n}^{n} \varphi(x,z)dx \\
&= \int_{1/m}^{m} \varphi(x,z)dx + \int_{n}^{1/n} \varphi(x,z)dx + \int_{n}^{m} \varphi(x,z)dx - \int_{n}^{m} \varphi(x,z)dx \\
&= \int_{1/m}^{m} \varphi(x,z)dx + \int_{n}^{1/n} \varphi(x,z)dx + \int_{n}^{m} \varphi(x,z)dx + \int_{m}^{n} \varphi(x,z)dx \\
&= \int_{1/m}^{1/n} \varphi(x,z)dx + \int_{n}^{m} \varphi(x,z)dx.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 3.5.2, existem $0 < \delta < 1$ e $k > 1$ tais que se $1/n < \delta$ e $n > k$, temos

$$\left| \int_{1/m}^{1/n} \varphi(x,z)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\left| \int_{n}^{m} \varphi(x,z)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, se $n, m > \max\{1/\delta, k\}$, então, para todo $z \in S$, temos

$$|h_m(z) - h_n(z)| \leqslant \left| \int_{1/m}^{1/n} \varphi(x,z)dx \right| + \left| \int_{n}^{m} \varphi(x,z)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, a sequência (h_n) é uma sequência de Cauchy em S de funções holomorfas no interior $\mathring{S} = \{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}(z) < A\}$ de S. Deste modo, pelo Teorema 3.4.17 a sequência $\{h_n\}$ converge uniformemente em $\mathring{S}$ para a função h, dada por

$$h(z) = \int_0^\infty (e^x - 1)^{-1} x^{z-1} dx.$$

Como cada h_n é holomorfa em $\mathring{S}$, segue pelo Teorema 3.4.18 que h é holomorfa em $\mathring{S}$. Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 1$ e sejam $a, A \in \mathbb{R}$ tais que $1 < a < \mathrm{Re}(z) < A$. Como h é holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}(z) < A\}$ segue que h é holomorfa em z

(b) : Sejam $\varphi(x,z) = (e^x - 1)^{-1} x^{z-1}$ e $f_n(z) = \displaystyle\int_1^n \varphi(x,z)dx$. Já vimos na Observação 3.5.3 que f_n é contínua e holomorfa em $\mathbb{C}$. Para $1 < n < m$, temos

$$\begin{aligned} f_m(z) - f_n(z) &= \int_1^m \varphi(x,z)dx - \int_1^n \varphi(x,z)dx \\ &= \int_n^1 \varphi(x,z)dx + \int_1^m \varphi(x,z)dx \\ &= \int_n^m \varphi(x,z)dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.5.2, existe $k > 1$ tal que se $n > k$, temos

$$\left|\int_n^m \varphi(x,z)dx\right| < \epsilon.$$

Segue que

$$|f_m(z) - f_n(z)| = \left|\int_n^m \varphi(x,z)dx\right| < \epsilon,$$

ou seja, a sequência (f_n) é de Cauchy em S e converge uniformemente para f, que é dada por

$$f(z) = \int_1^\infty (e^x - 1)^{-1} x^{z-1} dx.$$

Como cada h_n é holomorfa no interior $\mathring{S} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < A\}$ de S, temos pelo Teorema 3.4.18 que h é holomorfa em $\mathring{S}$. Seja $z \in \mathbb{C}$ e seja $A \in \mathbb{R}$, tal que $\mathrm{Re}(z) < A$. Como f é holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < A\}$, segue que f é holomorfa em z. ■

4 A Função Zeta de Riemann

Nesse capítulo estudaremos a função zeta de Riemann, suas extensões e a relação desta função com os números primos. As referências para este capítulo são [3], [5], [6] e [14].

4.1 Números Primos

Nessa seção apresentaremos algumas definições e resultados dos números primos. A referência para esta seção é [6].

Definição 4.1.1. Dizemos que o inteiro b divide o inteiro a se existe um inteiro c tal que $a = bc$.

Definição 4.1.2. Um número natural é chamado de primo se os únicos inteiros positivos que o dividem são 1 e ele mesmo. Por definição, 1 não é primo.

Teorema 4.1.3. *(Teorema Fundamental da Aritmética). Todo número natural maior do que* 1*, ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como produto de primos.*

Demonstração. Para essa demonstração, usaremos o Princípio de Indução. Se $n = 2$, o resultado é facilmente verificado, pois 2 é primo. Suponhamos agora que o resultado é válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se n é primo, não precisamos demonstrar nada. Suponhamos então, que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela Hipótese de Indução, temos que existem primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ e $q_1, q_2, \ldots, q_s$ tais que $n_1 = p_1p_2 \ldots p_r$ e $n_2 = q_1q_2 \ldots q_s$, portanto

$$n = p_1p_2 \ldots p_rq_1q_2 \ldots q_s.$$

Para mostrarmos a unicidade da escrita, suponhamos agora que

$$n = p_1p_2 \ldots p_r = q_1q_2 \ldots q_s,$$

onde os $p_i's$ e os $q_j's$ são primos. Como p_1 divide $q_1q_2 \ldots q_s$, temos que $p_1 = q_j$ para algum j, que após reordenamento podemos supor que seja q_1. Portanto

$$p_2p_3 \ldots p_r = q_2q_3 \ldots q_s.$$

Como $p_2 \ldots p_r < n$, a Hipótese de Indução acarreta que $r = s$ e os $p_i's$ e os $q_j's$ são iguais aos pares, conforme queríamos demonstrar. ■

Corolário 4.1.4. *Dado um número natural $n > 1$, existem primos $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, univocamente determinados, tais que $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$.*

Teorema 4.1.5. *(Teorema de Euclides). O conjunto dos números primos é infinito.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe um número finito de primos $p_1, p_2, \ldots, p_m$ e seja

$$N = p_1p_2 \ldots p_m + 1.$$

O inteiro N se escreve como produto de números primos, pelo Teorema 4.1.3, logo, há um primo p_i que o divide. Como p_i é um dos finitos primos, p_i divide o número

$$N - 1 = p_1p_2 \ldots p_m.$$

Segue que p_i divide $N - (N - 1) = 1$. Daí, $p_i = 1$, o que é um absurdo, conforme queríamos demonstrar. ■

4.2 A Função Zeta de Riemann e sua Representação Integral

Nessa seção definiremos a função zeta de Riemann e daremos a sua representação integral. As referências para essa seção são [3], [5] e [14].

Definição 4.2.1. Seja $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Definimos a função Zeta de Riemann, para $z \in U$, como

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Definição 4.2.2. Seja $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Definimos a função gama de Euler, para $z \in U$, como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Observação 4.2.3. Para auxiliarmos a demonstração do próximo teorema, vamos realizar a mudança de variável $t = nu$ na definição da função Γ.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-nu}(nu)^{z-1} n du = n^z \int_0^\infty e^{-nu} u^{z-1} du,$$

e portanto

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-nu} u^{z-1} du.$$

Tomando a somatória em $n \in \mathbb{N}$ em ambos os lados da equação acima, e considerando $\mathrm{Re}(z) > 1$, temos

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^\infty n^{-z}\Gamma(z) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nu} u^{z-1} du,$$

pela Definição 4.2.1.

Teorema 4.2.4. *Se $Re(z) > 1$, então*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt.$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.5.4, a integral $\displaystyle\int_0^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$ é uniformemente convergente em cada anel $S = \{z \in \mathbb{C} : a \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant A\}$, com $1 < a < A < \infty$, e holomorfa na região onde $\mathrm{Re}(z) > 1$. Assim, é suficiente mostrar que $\zeta(z)\Gamma(z)$ é igual à integral $\displaystyle\int_0^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$ para z tal que $\mathrm{Re}(z) > 1$. Pelo Lema 3.5.2, existem números α e β, $0 < \alpha < \beta < \infty$, tais que

$$\left| \int_0^\alpha (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \right| \leqslant \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| \int_{1/j}^\alpha (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \right| < \frac{\epsilon}{4}$$

e

$$\left| \int_\beta^\infty (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \right| \leqslant \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| \int_\beta^j (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.2.8, tomando $r = e^{-t}$ para todo $t > 0$, obtemos

$$(e^t - 1)^{-1} = e^{-t}\frac{1}{1 - e^{-t}} = e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}.$$

Consequentemente, como para $j \geqslant 1$, temos convergência uniforme no intervalo $[1/j, \alpha]$, assim

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{1/j}^{\alpha} e^{-kt}t^{z-1}dt = \int_{1/j}^{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}\right) t^{z-1}dt = \int_{1/j}^{\alpha}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt,$$

e portanto,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\alpha} e^{-kt}t^{z-1}dt\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\int_{1/j}^{\alpha}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt\right| = \left|\int_0^{\alpha}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt\right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Analogamente,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty} e^{-nt}t^{z-1}dt\right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Segue, usando a desigualdade triangular e a Observação 4.2.3 que

$$\begin{aligned}
&\left|\zeta(z)\Gamma(z) - \int_0^{\infty}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{z-1}dt - \int_0^{\infty}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\alpha} e^{-nt}t^{z-1}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-nt}t^{z-1}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty} e^{-nt}t^{z-1}dt\right. \\
&\left. - \int_0^{\alpha}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt - \int_{\alpha}^{\beta}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt - \int_{\beta}^{\infty}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt\right| \\
&< \epsilon + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-nt}t^{z-1}dt - \int_{\alpha}^{\beta}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt\right| = \epsilon,
\end{aligned}$$

pois $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$ converge uniformemente para $(e^t - 1)^{-1}$ no intervalo $[\alpha, \beta]$, e logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-nt}t^{z-1}dt = \int_{\alpha}^{\beta}(e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt.$$

Portanto, obtivemos o resultado desejado. ■

4.3 Extensão do Domínio da Função ζ

Vimos na seção anterior que a função zeta de Riemann é holomorfa no semi-plano $\text{Re}(z) > 1$. Nesta seção, usando o Teorema 4.2.4 mostraremos que essa função pode ter o seu domínio extendido para a faixa $-1 < \text{Re}(z) < 1$. Também mostraremos o resultado que relaciona a função zeta de Riemann com os números primos. A referência para essa seção é [5].

Proposição 4.3.1. *A função zeta de Riemann ζ, definida na seção anterior no semi-plano $Re(z) > 1$, admite uma extensão holomorfa para a faixa $-1 < Re(z) < 1$.*

Demonstração. Consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^t - 1} - \dfrac{1}{t}, & se \ \ t \neq 0, \\ -\dfrac{1}{2}, & se \ \ t = 0. \end{cases}$$

Como $1/(e^t - 1)$ e $1/t$ são funções contínuas em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, segue que g é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Usando a Regra de L'Hôspital obtemos

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t - e^t + 1}{te^t - t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - e^t}{e^t + te^t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{-e^t}{2e^t + te^t} = -\frac{1}{2}$$

e portanto g também é contínua em $t = 0$. Logo g é contínua em $\mathbb{R}$. Fixemos $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e seja $S_a = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > a\}$. Consideremos a função $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(t, z) = g(t)t^{z-1}$. Para $0 < t \leqslant 1$ e $z \in \mathbb{C}$ temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(t, z) = g(t)(\ln t)t^{z-1}.$$

Como φ e $\partial\varphi/\partial z$ são funções contínuas em $(0, 1] \times S_a$, então as funções $h_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definidas por,

$$h_n(z) = \int_{1/n}^{1} \varphi(t, z)dt$$

são funções holomorfas em $\mathbb{C}$ pelo Teorema 3.5.1. Como $g(t)$ é contínua em $[0,1]$, existe $C > 0$ tal que $|g(t)| \leqslant C$ para todo $t \in [0,1]$. Para $1 < n < m$ e $z \in S_a$ temos

$$\begin{aligned}
|h_m(z) - h_n(z)| &= \left|\int_{1/m}^{1/n} \varphi(t,z)dt\right| \\
&\leqslant \int_{1/m}^{1/n} |\varphi(t,z)|dt \\
&= \int_{1/m}^{1/n} |g(t)||t^{z-1}|dt \\
&\leqslant C\int_{1/m}^{1/n} t^{a-1}dt = C\frac{t^a}{a}\bigg|_{1/m}^{1/n} = \frac{C}{a}\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{m^a}\right).
\end{aligned}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|h_m(z) - h_n(z)| < \epsilon$ para todos $m, n \geqslant n_0$ e todo $z \in S_a$. Logo (h_n) é uma sequência de Cauchy de funções holomorfas em S_a e portanto pelos Teoremas 3.4.17 e 3.4.18, (h_n) converge uniformemente para a função h, holomorfa em S_a, dada por

$$h(z) = \int_0^1 \varphi(t,z)dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt.$$

Como h é holomorfa em S_a para qualquer $a > 0$, podemos concluir que h é holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Por outro lado, pelo Teorema 4.2.4, temos

$$\begin{aligned}
\zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^\infty (e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt \\
&= \int_0^1 (e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt + \int_1^\infty (e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt \\
&= \int_0^1 (e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt - (z-1)^{-1} + (z-1)^{-1} + \int_1^\infty (e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt \\
&= \int_0^1 (e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt - \int_0^1 t^{z-2}dt + (z-1)^{-1} + \int_1^\infty (e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt \\
&= \int_0^1 [(e^t - 1)^{-1} - t^{-1}]t^{z-1}dt + (z-1)^{-1} + \int_1^\infty (e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.5.4 a integral

$$\int_1^\infty (e^t - 1)^{-1}t^{z-1}dt$$

é holomorfa em $\mathbb{C}$ e a função $(z-1)^{-1}$ é holomorfa se $\mathrm{Re}(z) > 0$, exceto no ponto $z = 1$. Então,

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\left[\int_0^1 [(e^t-1)^{-1} - t^{-1}]t^{z-1}dt + (z-1)^{-1} + \int_1^\infty (e^t-1)^{-1}t^{z-1}dt\right]$$

é holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ e } z \neq 1\}$. Quando $z = 1$, $\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ é a série harmônica que é divergente. Para $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, temos $(z-1)^{-1} = -\int_1^\infty t^{z-2}dt$. Substituindo este resultado na equação obtida para $\zeta(z)\Gamma(z)$, obtemos

$$\begin{aligned}\zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)t^{z-1}dt + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)t^{z-1}dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)t^{z-1}dt, \quad 0 < \mathrm{Re}(z) < 1. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Seja $\overline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $\overline{g}(t) = g(t) + 1/2$. Como g é contínua, segue que $\overline{g}$ também é contínua. A derivada da função $\overline{g}$ existe para todo $t \neq 0$ pela expressão de $\overline{g}$. Temos pela Regra de L'Hôspital

$$\begin{aligned}\overline{g}'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\overline{g}(t)-\overline{g}(0)}{t-0} &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t - e^t + \frac{1}{2}te^t + 1}{t^2e^t - t^2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t}{2te^t + t^2e^t - 2t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}te^t}{2e^t + 4te^t + t^2e^t - 2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t}{6e^t + 6te^t + t^2e^t} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

A função $\overline{g}'$ está então bem definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue pela expressão de $\overline{g}'(t)$ que $\overline{g}'$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Podemos também verificar que $\overline{g}'$ é contínua em $t = 0$. Como $\overline{g}'$ é contínua em $[-1, 1]$, existe $\overline{C} > 0$ tal que $|\overline{g}'(u)| \leqslant \overline{C}$ para todo $u \in [-1, 1]$. Dados $t, s \in [-1, 1]$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [-1, 1]$, c entre t e s, tal que

$$|\overline{g}(t) - \overline{g}(s)| \leqslant |\overline{g}'(c)||t-s| \leqslant \overline{C}|t-s|.$$

Em particular, para $s = 0$ e para qualquer $t \in [-1, 1]$, temos $|\overline{g}(t)| \leqslant \overline{C}|t|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $\overline{h}_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\overline{h}_n(z) = \int_{1/n}^1 \overline{g}(t)t^{z-1}dt.$$

Podemos mostrar, como foi feito para h_n, que $\overline{h}_n$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$. Agora se $1 < n < m$ e $z \in S_a = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > a\}$, com $a > -1$, temos

$$\begin{aligned} |\overline{h}_n(z) - \overline{h}_m(z)| &\leqslant \int_{1/m}^{1/n} |\overline{g}(t)||t^{z-1}|dt \\ &\leqslant \overline{C} \int_{1/m}^{1/n} |t| t^{\mathrm{Re}(z)-1} dt \\ &\leqslant \overline{C} \int_{1/m}^{1/n} t^a dt = \frac{\overline{C}}{a+1} \left(\frac{1}{n^{a+1}} - \frac{1}{m^{a+1}} \right). \end{aligned}$$

Como $a > -1$, $a + 1 > 0$, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\overline{h}_n(z) - \overline{h}_m(z)| < \epsilon$ para todos $m, n \geqslant n_0$ e todo $z \in S_a$. Logo $(\overline{h}_n)$ é uma sequência de Cauchy de funções holomorfas em S_a e portanto pelos Teoremas 3.4.17 e 3.4.18, $(\overline{h}_n)$ converge uniformemente para a função $\overline{h}$, holomorfa em S_a, dada por

$$\overline{h}(z) = \int_0^1 \overline{g}(t) t^{z-1} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1} dt. \tag{4.2}$$

Como $\overline{h}$ é holomorfa em S_a para todo $a > -1$, podemos concluir que $\overline{h}$ é holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1\}$.

Como

$$\lim_{t \to +\infty} t \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) = -1,$$

existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right| \leqslant \tilde{C} t^{-1}$$

se $t \geqslant 1$. Para $n \in \mathbb{N}$ seja

$$\tilde{h}_n(z) = \int_1^n g(t) t^{z-1} dt.$$

As funções $\tilde{h}_n$ são holomorfas em $\mathbb{C}$ pelo mesmo argumento usado para mostrar que h_n é holomorfa em $\mathbb{C}$. Para $a < 1$, seja $R_a = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < a\}$. Para $n, m \in \mathbb{N}$,

$1 \leqslant n < m$ e $z \in R_a$ temos

$$\begin{aligned} |\tilde{h}_m(z) - \tilde{h}_n(z)| &\leqslant \int_n^m |g(t)||t|^{z-1}dt \\ &\leqslant \tilde{C}\int_n^m t^{-1}t^{\mathrm{Re}(z)-1}dt \\ &\leqslant \tilde{C}\int_n^m t^{a-2}dt = \frac{\tilde{C}}{1-a}\left(\frac{1}{n^{a-1}} - \frac{1}{m^{a-1}}\right). \end{aligned}$$

Como $a - 1 < 0$, pelos mesmos argumentos usados para as sequências (h_n) e $(\overline{h}_n)$, podemos concluir que $\tilde{h}_n$ converge uniformemente em R_a para a função holomorfa $\tilde{h}$ dada por

$$\tilde{h}(z) = \int_1^\infty g(t)t^{z-1}dt = \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt. \tag{4.3}$$

A função $\tilde{h}$ é holomorfa em R_a, para todo $a < 1$ e assim é também holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 1\}$. Da expressão (4.1), temos para $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$,

$$\begin{aligned} \zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt + \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt + \frac{1}{2}\int_0^1 t^{z-1}dt - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{z-1}dt - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt \\ &= \overline{h}(z) - \frac{1}{2z} + \tilde{h}(z). \end{aligned}$$

Como as funções $\overline{h}$ e $\tilde{h}$ são holomorfas na faixa $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$, por (4.2) e (4.3), podemos usar este resultado para definir ζ nessa faixa, com exceção do ponto $z = 0$. Reescrevendo a igualdade acima, temos

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{z-1}dt - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}dt\right]. \tag{4.4}$$

O termo $2z\Gamma(z)$ no denominador é igual a $2\Gamma(z+1)$, portanto, no ponto $z = 0$, temos $2z\Gamma(z) = 2\Gamma(1) = 2$. Logo, a função ζ está bem definida e é holomorfa na faixa $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$, como queríamos demonstrar. ∎

Afirmação 4.3.2. (Equação Funcional de Riemann). A função ζ pode ter seu domínio extendido para todo plano complexo, exceto no ponto $z = 1$ e é holomorfa nesse domínio.

Afirmação 4.3.3. Para $z \neq 1$, a função ζ satisfaz a Equação Funcional de Riemann:

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)\Gamma(1-z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right). \tag{4.5}$$

Veremos o motivo pelo qual o estudo da função ζ está relacionado ao estudo dos números primos, através da fórmula do produto de Euler para a função ζ.

Proposição 4.3.4. *Seja p_i o i-ésimo número primo. Para $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, vale*

$$\zeta(s) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}.$$

Demonstração. Como $0 < |1/p_i^s| < 1$, temos pelo resultado para séries geométricas que

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{js}} = 1 + \frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{p_i^{2s}} + \frac{1}{p_i^{3s}} + \cdots .$$

Temos

$$\left(\frac{1}{1 - p_1^{-s}}\right)\left(\frac{1}{1 - p_2^{-s}}\right) = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1 s}}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{k_2 s}}\right) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{k_1} p_2^{k_2})^s}$$

e por indução obtemos para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m})^s}. \tag{4.6}$$

Como dados inteiros não negativos $k_1, k_2, \ldots, k_m$, existe um único $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, obtemos por (4.6) que

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s). \tag{4.7}$$

Como $p_1, \dots, p_m$ são os m primeiros números primos, então $\{n \in \mathbb{N} : n \leqslant p_m\} \subset \{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} : k_1, k_2, \dots, k_m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}$ pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Assim por (4.6),

$$\sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} \leqslant \zeta(s). \tag{4.8}$$

Fazendo $m \to +\infty$ nas desigualdades (4.7) e (4.8), obtemos pelo Teorema do Confronto que

$$\zeta(s) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-s}}, \quad s > 1.$$

■

Observação 4.3.5. A Proposição 4.3.4 permanece válida se considerarmos $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(s) > 1$.

5 Perspectiva Escolar dos Números Primos

Neste Capítulo temos o objetivo de mostrar algumas atividades que podem ser realizadas na disciplina de Matemática para o Ensino Fundamental II e para o Ensino Médio. Vale pontuar aqui que os números primos são abordados com sua definição no 6° ano do Ensino Fundamental II e posteriormente não é mais abordado diretamente, mas é um tópico que pode ser usado como suporte no desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos, através de problemas que envolvam a sua definição ou a sua contagem. Com este capítulo, esperamos mostrar ao leitor métodos que forneçam suporte aos conteúdos a serem desenvolvidos em cada um dos anos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio. As referências para este capítulo são [10], [11] e [12].

5.1 Atividades para 6° ano e 7° ano

Alunos nesses anos escolares possuem conhecimento matemático muito elementar, limitados praticamente apenas ao conjunto do números naturais, as quatro operações aritméticas elementares, soma de frações, MMC e MDC, área e perímetro de retângulos e leitura de gráficos de barras. Durante esses anos, o professor deve averiguar se seus alunos possuem esses requisitos e aprimorá-los, introduzindo o conjunto dos números inteiros, estudo de divisibilidade, expressões numéricas, ângulos e soma de ângulos internos em polígonos, proporcionalidades, sistemas de medida, elaboração de gráficos e ao final desse ciclo, uma introdução à Álgebra, através das equações do 1° grau. Portanto, por praticamente trabalharmos com informações puramente numéricas, precisamos trazer problemas concretos e de baixa abstração para propor ao aluno a reflexão e nos anos seguintes introduzirmos conceitos mais elaborados, fortalecendo o seu senso lógico. Vale pontuar aqui, que estas sugestões devem ser adaptadas para cada realizadade escolar, pois cada escola possui diferentes condições educacionais e sociais, ficando por conta do professor a responsabilidade de se adequar a tal realidade. As referências para este capítulo são [10], [11] e [12].

Proposta 5.1.1. Texto do ciclo de vida das cigarras

*Além de encontrar um papel na espionagem, os números primos também aparecem no mundo natural. As cigarras, mais notadamente a **Magicicada septendecim**, possuem o ciclo de vida mais longo entre os insetos. A vida delas começa embaixo da terra, onde as ninfas sugam pacientemente o suco da raiz das árvores. Então, depois de 17 anos de espera, as cigarras adultas emergem do solo e voam em grande número espalhando-se pelo campo. Depois de algumas semanas elas acasalam, põem seus ovos e morrem. A pergunta que intrigava os biólogos era: Por que o ciclo de vida da cigarra é tão longo? E, será que existe um signifcado no fato de o ciclo ser um número primo de anos?*

*Outra espécie, a **Magicicada tredecim**, forma seus enxames a cada 13 anos, sugerindo que um ciclo vital que dura um número primo de anos oferece alguma vantagem evolutiva. Uma teoria sugere que a cigarra tem um parasita com um ciclo igualmente longo, que ela tenta evitar. Se o ciclo de vida do parasita for de, digamos, 2 anos, então a cigarra procura evitar um ciclo vital que seja divisível por 2, de outro modo os ciclos da cigarra e do parasita vão coincidir regularmente.*

*De modo semelhante, se o ciclo de vida do parasita for de 3 anos, então a cigarra procura evitar um ciclo que seja divisível por 3, para que seu aparecimento, e o do parasita, não volte a coincidir. No final, para evitar se encontrar com seu parasita, a melhor estratégia para as cigarras seria ter um ciclo de vida longo, durando um número primo de anos. Como nenhum número vai dividir 17, a **Magicicada septendecim** raramente se encontrará com seu parasita. Se o parasita tiver um ciclo de vida de 2 anos, eles só se encontrarão uma vez a cada 34 anos, e se ele tiver um ciclo mais longo, digamos, de 16 anos, então eles só vão se encontrar a cada 272 anos.*

Exercício 5.1.2. - (O Problema das idades) Meu irmão caçula e eu temos idades entre 10 e 20 anos, e hoje nossas idades são expressas, ambas, por números primos,

fato que se repetirá pela próxima vez daqui a 18 anos. Determine minha idade, sabendo que a idade de nosso irmão mais velho, que hoje também é um número primo, é uma unidade maior do que a soma das nossas idades.
Solução. As duplas de primos entre 10 e 20 são:

$$(11; 13), (11; 17), (11; 19), (13; 17), (13; 19), (17; 19).$$

Como a soma dos números, adicionada de 1, deve resultar um primo, descarto as duplas $(11; 13)$ e $(13; 19)$. Como daqui a 18 anos as idades voltam a ser representadas por números primos, descarto as duplas que incluem o 17. Resta apenas uma possibilidade: minha idade é 19 anos e a do meu irmão é 11 anos. ■

Exercício 5.1.3. (Cálculos Simples para Assimilação)
(i) Escreva todos os números de 5 a 20 como soma de dois números primos.
(ii) Decompor em fatores primos os números 36, 45, 48, 60 e 70.

Exercício 5.1.4. (Decomposição simultânea de números compostos para MMC) Num painel de propaganda, três luminosos se acendem em intervalos regulares: o primeiro a cada 12 segundos, o segundo a cada 18 segundos e o terceiro a cada 30 segundos. Se, em dado instante, os três se acenderem ao mesmo tempo, os luminosos voltarão a se acender, simultaneamente, depois de quanto tempo?

Solução. Este é um problema comum de MMC, para resolvê-lo vamos decompor simultaneamente em fatores os númers 12, 18 e 30 em primos.

12, 18, 30	2
6, 9, 15	2
3, 9, 15	3
1, 3, 5	3
1, 1, 5	5
1, 1, 1	180

Figura 1 – Decomposição por MMC

Logo, o MMC dos números $12, 18, 30$ é 180 e, portanto, os luminosos irão acender simultaneamente após 180 segundos (ou 3 minutos). ■

Proposta 5.1.5. Jogo com códigos.

Esta atividade requer calculadora. Aqui visamos dar uma noção aos alunos em relação ao Teorema Fundamental da Aritmética, sem enunciá-lo formalmente, e criar pequenas senhas através da unicidade da decomposição em fatores primos de grandes números compostos.

Os alunos se dividem em grupos, a fim de agilizar o processo de procura dos fatores primos. E cada grupo recebe 10 envelopes com um cartão em seu interior. Em uma das faces do cartão, há um número a ser decomposto em fatores primos, e do outro, o espaço para o grupo colocar a palavra descoberta.

A partir do momento que o grupo identificar os 4 fatores primos dos números, basta checar qual é a palavra formada, através da tabela a seguir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
PRIMEIRA LETRA	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101
SEGUNDA LETRA	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233	239
TERCEIRA LETRA	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397
QUARTA LETRA	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569

Figura 2 – Tabela de Números Primos

Por exemplo:

A palavra $CASA$ corresponde ao número 72.899.795, pois $72899795 = 5 \times 103 \times 353 \times 401$;

A palavra $AMOR$ corresponde ao número 55.608.662, pois $55608662 = 2 \times 167 \times 331 \times 503$.

Vence o grupo que acertar mais palavras, e em caso de empate, o que completou os 10 cartões em menor tempo. Durante esta atividade, pode-se perceber que os alunos compreendem a unicidade dos fatores, a menos da ordem e que, portanto, a palavra resultado também será única.

5.2 Atividades para 8° ano e 9° ano

Nesta seção apontaremos alguns problemas mais elaborados, pelo fato de que alunos de 8° ano e 9° ano, desenvolvem um senso matemático mais apurado, e se aprimoram de maneira considerável na Álgebra e na abstração de informações. As referências para este capítulo são [10] e [12].

Durante esses dois anos, os alunos passam pela aprendizagem de equações do 1° e 2° grau, inequações, sistemas lineares, produtos notáveis, Teorema de Pitágoras, conjunto dos números reais, trigonometria e análise combinatória. Portanto, o ideal é usar o conceito de números primos com o intuito de aprimorar as habilidades algébricas deles.

Exercício 5.2.1. (Coordenadas na reta) Quantos pontos da reta $y = x + 51$, são tais que as suas duas coordenadas são números primos?
Solução. Se $x = 2$, temos $y = 53$, que é primo. Se x for qualquer outro primo, será um número ímpar, implicando y par maior que 2, logo, não-primo. Assim, existe um único par, $(2, 53)$, da reta de equação $y = x + 51$ que tem ambas as coordenadas dadas por números primos. ■

Exercício 5.2.2. (Primos no triângulo retângulo) As medidas dos lados de um triângulo retângulo (numa mesma unidade de medida) podem ser números primos?
Solução. A resposta é não. Do Teorema de Pitágoras temos a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$. Se a, b e c são primos, os mesmos não podem ser todos ímpares (pois a soma de dois ímpares é par) e, como $a > b$ e $a > c$, devemos ter $b = 2$ ou $c = 2$. Suponhamos $c = 2$.
Teremos então: $a^2 - b^2 = 4$, ou $(a + b)(a - b) = 4$ e analisando os possíveis valores de $a + b$ e $a - b$, que são 1, 2 ou 4, concluímos que a situação é impossível. ■

Exercício 5.2.3. (Problema das raízes da Equação do 2° grau) Uma equação do 2° grau, cujos coeficientes são todos números primos, pode apresentar duas raízes iguais?
Solução. Para que a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c primos, admita duas raízes iguais, devemos ter o discriminante nulo, ou seja, $b^2 - 4ac = 0$ ou $b^2 = 4ac$,

o que implica b^2 par. Logo, como b é primo, $b = 2$. De $b^2 = 4ac$ temos $ac = 1$, o que é absurdo para a, c primos. Portanto, a resposta é não. ■

Exercício 5.2.4. (Problema dos Divisores) Quantos divisores possui o número 2420?
Solução. Decompondo o número 2420 em fatores primos, temos:

$$\begin{array}{r|l} 2420 & 2 \\ 1210 & 2 \\ 605 & 5 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Figura 3 – Decomposição por MMC

Logo, temos que $2420 = 2^2.5.11^2$. Pelo Princípio da Contagem obtemos $(2 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 3.2.3 = 18$ divisores. ■

Exercício 5.2.5. (Problema do triângulo acutângulo) Determine as medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo acutângulo, sabendo que estas são expressas por números primos.

Solução. Se $a + b + c = 180°$, com a, b e c primos, não é possível ter a,b e c todos ímpares. Logo, pelo menos um deles, digamos o a, deve ser igual a $2°$, o que implica $b + c = 178°$. Podemos ter $b = c = 89°$, que é primo e, por verificação direta, mostra-se que não há outra possibilidade, já que o triângulo, sendo acutângulo, precisa ter $b < 90°$ e $c < 90°$. ■

5.3 Atividades para Ensino Médio

No Ensino Médio os conteúdos são semelhantes aos estudados nos 8° ano e 9° ano, porém, aparecem com mais formalidade. Os assuntos acrescidos são basicamente as progressões aritmética e geométrica, o estudo de funções e uma introdução à geometria analítica. As referências para este capítulo são [10] e [12].

Portanto, as propostas aqui serão semelhantes as da seção anterior, mas devem ter um nível de dificuldade maior, já que aqui os alunos terão maior maturidade para lidar com as resoluções de problemas propostos.

Exercício 5.3.1. (Problema da Circunferência) Para quantos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 361$ as duas coordenadas são números primos?
Solução. Se x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 361$, sendo 361 ímpar, devemos ter x par e y ímpar ou x ímpar e y par. Se x é par e primo, então, $x = 2$. Logo, $y^2 = 357$, e y não é, então, um número inteiro. Do mesmo modo verificamos ser impossível ter y par e x ímpar. Portanto, nenhum ponto da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 361$ tem ambas as coordenadas dadas por números primos. ∎

Exercício 5.3.2. (Problema com Múltiplos) Determine todos os números inteiros positivos n tais que n, $n + 2$ e $n + 4$ sejam primos.
Solução. O número n não pode ser par uma vez que, se $n = 2k$ então teríamos, $n + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ par e, portanto, não seria primo. Assim, n, $n + 2$ e $n + 4$ são três ímpares consecutivos. Ora, se $n = 3$, $n + 2 = 5$ e $n + 4 = 7$ são três primos ímpares consecutivos. Para $n > 3$, temos $n = 3k$ ou $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, com $k > 1$. Se $n = 3k$ então n não seria primo, pois seria múltiplo de 3. Se $n = 3k + 1$ então $n + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ e teríamos que $n + 2$ não seria primo por ser múltiplo de 3. Se $n = 3k + 2$, $n + 4 = 3k + 2 + 4 = 3(k + 2)$, então teríamos que $n + 4$ não seria primo por ser múltiplo de 3. Portanto, o único valor de n para que n, $n + 2$ e $n + 4$ sejam primos é 3 e temos então que apenas 3 inteiros satisfazem a exigência do problema: 3, 5 e 7. ∎

5.4 Considerações

Ter um material que seja de capaz de relacionar conteúdos estudados anteriormente com a proposta curricular que rege a escola é de grande relevância.

Em particular para o conteúdo referente aos números primos, o material didático que acompanha os alunos usualmente apresenta apenas a definição deste conceito e breves exercícios para fortalecer esta definição, mas, não contextualiza e não viabiliza a prática contínua dele.

Além disso, o cronograma do ano letivo não é flexível para um trabalho aprofundado sobre este tema, assim como outros. Então, ser capaz de conciliar o estudo dos números primos com os outros conteúdos curriculares, enriquece o ensino da Matemática e fortalece os conhecimentos dos alunos.

É importante que o professor esteja sempre buscando meios para aperfeiçoar sua prática docente e o seu ensino, de acordo com o cotidiano que vive em sua escola, para um melhor processo de aprendizagem.

Referências

[1] Churchill, R. V., *Variáveis Complexas e suas Aplicações.* McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1975.

[2] Du Sautoy, M., *A Música dos Números Primos.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda., 2ª edição, 2007.

[3] Edwards, H. M., *Riemann's Zeta Function.* Academic Press, INC., 1974.

[4] Eves, H., *Introdução à História da Matemática.* Editora da UNICAMP, 5ª edição, Campinas, 2011.

[5] Ferreira, R. C., Navarro, M. C. K. A. , Navarro, V. C. A. e Teramon, N., *A Função Zeta de Riemann.* Ciências Exatas e Naturais **1** (1999), 23-47.

[6] Hefez, A., *Elementos de Aritmética.* Coleção Textos Universitários. SBM, 2005.

[7] Leithold, L., *O Cálculo com Geometria Analítica.* Ed. Harbra Ltda., Volume 1, 3ª edição, 1994.

[8] Leithold, L., *O Cálculo com Geometria Analítica.* Ed. Harbra Ltda., Volume 2, 3ª edição, 1994.

[9] Lima, E. L., *Curso de Análise.* Rio de Janeiro: IMPA, Volume 1, 12ª edição, 2011.

[10] Secretaria de Educação Básica, *Explorando o Ensino da Matemática.* Ministério da Educação, Volume 1, Capítulo 6, 2004.

[11] SEESP (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo), *Caderno do Aluno; Matemática, Ensino Fundamental, 5ª série.* São Paulo, Volume 1, 1ª edição, 2014.

[12] SEESP (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo), *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.* São Paulo, 1ª edição, 2011.

[13] Soares, M. G., *Cálculo em uma variável complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 5ª edição, 2009.

[14] Voloch, J. F., *A Distribuição dos Números Primos*. Rio de Janeiro: IMPA, Matemática Universitária, **6** (1987), 71-82.