UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO CLEUTON DE ARAÚJO

ESTUDO DOS MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES AX = B

Mossoró- RN
2016

FRANCISCO CLEUTON DE ARAÚJO

ESTUDO DOS MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES AX = B

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Santos Demetrio Miranda Borjas

A658e ARAUJO, FRANCISCO CLEUTON DE .
ESTUDO DOS MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES AX = B / FRANCISCO CLEUTON DE ARAUJO. - 2016.
54 f. : il.

Orientador: Santos Demetrio Miranda Borjas.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

1. Sistemas Lineares. 2. Métodos Diretos. 3. Métodos Iterativos. 4. Álgebra Linear. I. Borjas, Santos Demetrio Miranda , orient. II. Título.

FRANCISCO CLEUTON DE ARAÚJO

ESTUDO DOS MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES AX = B

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Departamento de Ciências Exatas e Naturais, para a obtenção do título de Mestre em Matemática do programa PROFMAT.

APROVADO EM: 29 / 03 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Dr. Santos Demetrio Miranda Borjas - UFERSA
Presidente

Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA
Primeiro Membro

Dr. David Armando Zavaleta Villanueva - UECE
Segundo membro

MOSSORÓ/RN, 2016.

Dedico este trabalho a minha filha Luiza e a minha esposa Sara.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Santos Demetrio, pelo apoio e pelas valiosas sugestões ao trabalho.

Aos professores do curso de Mestrado em Matemática – PROFMAT/UFERSA, pela contribuição teórica.

Ao coordenador do curso Ronaldo Garcia, pelo apoio e incentivo.

Aos colegas da turma de mestrado, pelo incentivo e colaboração.

Aos colegas professores do ensino básico, pelo incentivo no cotidiano do magistério.

À Sara e Luiza, pela paciência e afeto.

À Dedé, Miguel, Chris e Celia, pelo apoio.

“Não sou nada. Nunca serei nada.

Não posso querer ser nada.

À parte isso, tenho em mim

Todos os sonhos do mundo.”

(Fernando Pessoa)

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo estudar alguns métodos diretos e iterativos para obter uma solução exata ou aproximada do sistema linear $Ax = b$, assim como investigar o desempenho destes métodos e o uso adequado de cada um deles. Para realizar este objetivo é necessário conhecer conceitos elementares de Álgebra Linear. A investigação deste trabalho traz à luz métodos de solução de sistemas lineares não convencionais para o Ensino Básico. Acredito que este material irá contribuir com o estudo complementar dos professores e público em geral que tenham interesse pelo tema em estudo.

Palavras-chave: Sistemas Lineares, Métodos Diretos, Métodos Iterativos, Álgebra Linear.

ABSTRACT

This work aims to study some direct and iterative methods for to obtain an exact or approximate solution of the linear system $Ax = b$, and investigate the performance of these methods and the proper use of each of these. To accomplish this goal you need to know basic concepts of linear algebra. The investigation of this work brings to light methods of solution of non-conventional linear systems for basic education. I believe that this will work to contribute to the further study of teachers and the general public with an interest in the subject under study.

Keywords: Linear Systems, Direct methods, Iterative methods, Linear Algebra.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

De modo geral, no ensino básico, os procedimentos para resolução de sistemas de equações lineares são apresentados da seguinte maneira: métodos da adição, da substituição e regra de Cramer. Deste modo, podemos incorrer no erro de pensar que só existem esses métodos, ou ainda que estes métodos sejam os melhores, mais práticos e precisos.

No presente trabalho, pretendemos expandir esses conhecimentos apresentando para isso alguns métodos diretos e iterativos para resolução destes sistemas.

Os cálculos para determinar as soluções de sistemas lineares de pequeno porte (número pequeno de equações e variáveis) são simples, manualmente encontramos os resultados desejados sem muitas dificuldades. Em contrapartida, a solução de sistemas de grande porte envolve um número muito elevado de operações. Tornando-se inviável a solução manual. Outro ponto que devemos levar em consideração é que, em sistemas de grande porte, existe uma tendência maior a erros de arredondamento e truncamento.

Para nosso estudo serão necessários conhecimentos básicos de álgebra linear, que nos permitirão falar em espaços vetoriais, haja vista que a solução de $Ax = b$ encontra-se no espaço vetorial.

Podemos nos perguntar então qual a importância em estudarmos métodos para solucionar $Ax = b$. Essa necessidade se concentra no fato de que diversos fenômenos podem ser modelados por $Ax = b$.

Segundo Lamin (2000, p. 29),

> "Provavelmente um dos problemas mais importantes em matemática é resolver um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações cientificas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em alguma etapa."

Ademais, as aplicações de sistemas lineares são inúmeras, abrangendo inclusive diversas áreas do conhecimento, como Economia, Engenharia, Estatística, Física, Ciências Sociais, Biologia, entre outras.

Esperamos que as ideias aqui apresentadas possam contribuir com ensino-aprendizagem de Matemática, em particular de Sistemas Lineares.

1. 1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é estudar alguns métodos diretos e numéricos para obter a solução do sistema linear $Ax = b$.

1.1.2 Objetivos Específicos

a) Apresentar conceitos básicos da Álgebra Linear;

b) Estudar quatro métodos diretos na solução de $Ax = b$;

c) Estudar dois métodos iterativos na solução de $Ax = b$;

d) Resolver sistemas lineares do tipo $Ax = b$.

1.2 Estrutura do Trabalho

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos, cuja descrição é apresentada a seguir. Após os capítulos seguem a conclusão deste trabalho e as referências bibliográficas.

Capítulo 1: Esboça o corpo geral do trabalho desenvolvido, apresentando uma introdução sobre o assunto e os objetivos do trabalho.

Capítulo 2: É apresentada a fundamentação em álgebra linear, serão trabalhados os conceitos de corpo, espaço e subespaço vetoriais.

Capítulo 3: Serão desenvolvidos os espaços fundamentais, assim como a solução de $Ax = b$.

Capítulo 4: Serão discutidos os métodos diretos para a solução de sistemas lineares.

Capítulo 5: Serão tratados os métodos iterativos para a resolução destes sistemas.

2. CORPO, ESPAÇO E SUBESPAÇO VETORIAIS

2.1 Corpos

Neste capítulo, introduziremos um conceito fundamental para nosso estudo, a estrutura de Corpo.

Um Corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto que possui duas leis algébricas, a adição $(+)$ e a multiplicação $(\times)$. Estas duas operações satisfazem certas condições, denominadas axiomas de corpo.

A adição de dois elementos $a, b \in \mathbb{K}$, corresponde à soma $a + b \in \mathbb{K}$. E a multiplicação desses mesmos elementos equivale ao produto $a.b \in \mathbb{K}$.

Se o conjunto $\mathbb{K}$ é um corpo, então ele satisfaz os seguintes axiomas:

A1) Associatividade:

$(a + b) + c = a + (b + c)$; $\forall\ a, b, c \in \mathbb{K}$.

A2) Comutatividade:

$a + b = b + a$; $\forall\ a, b \in \mathbb{K}$.

A3) Elemento Neutro:

Existe $0 \in \mathbb{K}$, denominado zero, tal que $a + 0 = 0 + a = a$; $\forall\ a \in \mathbb{K}$.

A4) Elemento Simétrico:

Todo elemento $a \in \mathbb{K}$ possui um simétrico $-\ a \in \mathbb{K}$, tal que $a + (-\ a) = 0$.

M1) Associatividade:

$(a.b).c = a.(b.c)$; $\forall\ a, b, c \in \mathbb{K}$.

M2) Comutatividade:

$a.b = b.a$; $\forall\ a, b \in \mathbb{K}$.

M3) Elemento Neutro:

Existe $1 \in \mathbb{K}$, tal que $1 \neq 0$ e $a.1 = a$; $\forall\ a \in \mathbb{K}$.

M4) Inverso Multiplicativo:

Para todo $a \neq 0$ em $\mathbb{K}$, existe um $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a. a^{-1} = 1$.

Para completarmos nossa definição, apresentamos o axioma da distributividade, que relaciona adição e multiplicação em $\mathbb{K}$:

$a.(b + c) = (b + c).a = a.b + a.c$; $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$.

Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um corpo. Com efeito, tanto a soma como o produto de dois números racionais é um racional. O elemento neutro é $0 = 0/n$, $n \in \mathbb{Z}^*$. O simétrico do racional m/n é $-\, m/n$. E o inverso de $m/n \neq 0$ é n/m.

Os conjuntos $\mathbb{R}$ dos números reais e $\mathbb{C}$ dos números complexos também são exemplos de corpos.

Já os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais e $\mathbb{Z}$ dos números inteiros não são exemplos de corpos. Pois $\mathbb{N}$ não possui elemento simétrico nem inverso. E $\mathbb{Z}$ não possui elemento inverso.

Na próxima seção vamos definir espaço vetorial. Veremos que sua estrutura, dotada de adição e multiplicação por escalar, guarda importante relação com a noção de corpo.

2.2 Espaços Vetoriais

Seja V um conjunto diferente do conjunto vazio e $\mathbb{F}$ um corpo. Define-se em V duas operações

i) Soma: $\begin{cases} V \times V \to V \\ (u, v) \to u + v \end{cases}$

ii) Produto: $\begin{cases} \mathbb{F} \times V \to V \\ (\lambda, v) \to \lambda. v \end{cases}$

Se o conjunto V munido da operação de soma satisfaz:

S1) $u + v = v + u$; $\forall\, u, v \in V$.

S2) $(u+v)+w=u+(v+w);\ \forall\, u,v,w \in V$.

S3) Existe um único $e \in V$ tal que $u+e=e+u=u;\ \forall\, u \in V$.

S4) Para todo $u \in V$ existe um único $-u \in V$ tal que $u+(-u)=(-u)+u=e$.

E o conjunto V munido da operação de multiplicação por escalar satisfaz:

P1) $(ab)u=a(bu);\ \forall\, a,b \in \mathbb{F}$ e $\forall\, u \in V$.

P2) $a(u+v)=au+av;\ \forall\, u,v \in V$ e $a \in \mathbb{F}$.

P3) $(a+b)u=au+bu;\ \forall\, a,b \in \mathbb{F}$ e $\forall\, u \in V$.

P4) $1.u=u$; $\forall\, 1 \in \mathbb{F}$ e $\forall\, u \in V$.

Então, o par ordenado $(V,\mathbb{F})$ é chamado espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seus elementos são chamados de vetores.

Em particular se $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, o par $(V,\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O espaço vetorial $(V,\mathbb{R})$ será denotado simplesmente por V.

Vejamos agora alguns exemplos de espaços vetoriais.

Exemplo 1: O conjunto $V=\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial. Seus elementos são pares ordenados de números reais do tipo $u=(a_1,a_2)$ e $v=(b_1,\ b_2)$. A soma e o produto são definidos da seguinte maneira

$u+v=(a_1+b_1,a_2+b_2)$;

$av=(ab_1,ab_2)$.

É imediato verificar que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O vetor nulo é: $e=(0{,}0)$. E o inverso aditivo é $-u=(-a_1,-a_2)$.

Exemplo 2: Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ não são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Pois $\mathbb{N}$ não tem elemento simétrico, $\mathbb{I}$ não possui elemento neutro (zero), $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ não são fechados em relação à multiplicação por escalar. Isto é, o produto entre um número inteiro (ou ainda racional) e um número real não é necessariamente um número inteiro (ou racional).

Exemplo 3: O conjunto $A_{m\times n}$ de todas as matrizes de m linhas e n colunas (em $\mathbb{R}$) é um espaço vetorial.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes. A soma e a multiplicação por escalar são definidas por

$A + B = [a_{ij}+b_{ij}]$ e $aA = [aa_{ij}]$; $a \in \mathbb{R}$.

O inverso aditivo de $A = [a_{ij}]$ é $-A = [a_{ij}]$. E a matriz nula é aquela cujos elementos são todos zeros. Os 8 axiomas são todos satisfeitos, decorrem das propriedades de operações de matrizes.

Exemplo 4: O conjunto $\mathbb{R}_+$ dos números reais positivos não é um espaço vetorial, pois não possui zero nem simétrico.

Vamos listar algumas propriedades do espaço vetorial:

i) Dados $0 \in \mathbb{F}$ e $v \in V$, tem-se $0.v = 0 \in V$.

Com efeito, $v + 0.v = 1.v + 0.v = (1 + 0).v = 1.v = v$. Portanto, $0.v = 0$.

ii) Dados $a \in \mathbb{F}$ e $0 \in V$, tem-se $a.0 = 0$.

Com efeito, $a.0 + a.0 = a.(0 + 0) = a.0$. Logo, $a.0 = 0$.

iii) Se $w + v = w + u$, então $v = u$.

Com efeito, $v = 0 + v = (-w + w) + v = -w + (w + v) = -w + (w + u) = (-w + w) + u = 0 + u = u$. Logo $v = u$.

Surge-nos uma pergunta: é possível termos um espaço vetorial contido em outro espaço vetorial? Na seção seguinte vamos responder este importante questionamento.

2.3 Subespaços Vetoriais e Subespaço Gerado

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e S um subconjunto não vazio de V. Se S satisfaz os 8 axiomas do espaço vetorial, então S é um subespaço de V.

A definição de subespaço não nos ajuda muito a verificar quando um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço. Mas o seguinte teorema resolve este problema.

Teorema: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e S um subconjunto $S \subset V$ diferente do vazio. Dizemos que S é um subespaço de V se, e somente se

a) $0 \in S$;

b) $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$;

c) $a \in \mathbb{F}$ e $u \in S \Rightarrow au \in S$.

Demonstração: Se S é um subespaço vetorial de V, então todos os axiomas são satisfeitos. Em particular são válidos os axiomas de fechamento. Reciprocamente, temos que se S satisfaz os axiomas da adição e da multiplicação por escalar. E como $S \subset V$, os axiomas da comutatividade e associatividade são satisfeitos, pois são válidos para todos os elementos de V. Analogamente, os axiomas da multiplicação são todos satisfeitos. Falta provar ainda a existência de elemento neutro e simétrico. Para isso, seja u um vetor qualquer de S. Pela condição (c), $au \in S$ e tomando $a = 0$, segue-se que $0u = 0 \in S$. Ou ainda, tomando $a = -1$ segue-se que $(-1).u = -u \in S$. ■

Assim, todo subespaço é também um espaço vetorial.

Em seguida, apresentamos alguns exemplos de subespaços.

Exemplo 5: O conjunto contendo o vetor nulo é um subespaço vetorial.

Exemplo 6: O conjunto das matrizes diagonal, da forma

$$d = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial $A_{n\times n}$ sobre $\mathbb{R}$.

Com efeito, o elemento neutro é a matriz nula, cujos elementos são todos zeros. A soma de duas matrizes diagonal é uma matriz diagonal.

$$\lambda . d = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 7: O conjunto das matrizes S, tal que

$$S = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}$$

com $x, y \in \mathbb{R}$, é um subespaço vetorial do espaço vetorial $A_{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$. Com a operação usual de soma de matrizes e produto de um escalar por uma matriz.

Vejamos:

a) Como $x, y \in \mathbb{R}$, em particular $x = 0$ e $y = 0$

$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S \neq \emptyset$.

b) Seja A_1, $A_2 \in S$

$\Rightarrow A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 & y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in S$.

c) $\lambda S = \lambda \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda x \\ \lambda y & \lambda y \end{pmatrix} \in S; \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Logo, conjunto das matrizes S é um subespaço.

Exemplo 8: Seja $V = \mathbb{R}^3$ um espaço vetorial, então uma reta que passa pela origem é um subespaço vetorial. Assim como um plano que passa pela origem também é um subespaço vetorial.

Em $\mathbb{R}^3$ temos os seguintes subespaços

- A reta L que passa pela origem;
- Qualquer plano P que passa pela origem;
- Todo o espaço $\mathbb{R}^3$;
- O conjunto contendo apenas o vetor nulo, isto é, $(0, 0, 0)$.

Se tentarmos manter parte de uma reta ou parte de um plano, as exigências para um subespaço não serão satisfeitas.

O quadrante $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ não é um subespaço. Pois a condição (c) não é válida. Isto é, $u = (1,1) \in A$, $\lambda u \notin A$ para $\lambda = -1$.

Exemplo 9: O conjunto S dos pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y = |x|$, com a soma e produto usuais em $\mathbb{R}$, não é um subespaço.

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = |x|\} \Rightarrow$ Se $x = 0$ tem-se $y = 0$

$\Rightarrow (0, 0) \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$.

É claro que se

$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow u = (1, 1) \in S$

$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 1 \Rightarrow v = (-1, 1) \in S$

Mas $u + v = (0, 2) \notin S$, pois os elementos de S são do tipo $(x, |x|)$.

Vamos conceituar agora subespaço gerado.

Definição: Sejam $v_1, \dots, v_n$ vetores do espaço vetorial V. A expressão $a_1 v_1, \dots, a_n v_n$, chama-se combinação linear dos vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$, se existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$.

Exemplo 10: Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Com m equações e n incógnitas. Esse sistema é equivalente a $Ax = b$, onde $A = [A_1, \dots, A_n]$ são as colunas de A.

$$\therefore \quad x_1A_1, \dots, x_nA_n = b.$$

Logo, b se expressa como uma combinação linear das colunas de A.

Seja $S \subset V$ o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Então é fácil verificar que S é um subespaço.

Como $0 = 0v_1 + \cdots + 0v_n \Rightarrow 0 \in S$.

Se $v = a_1v_1 + \cdots + \ a_nv_n \in S$ e $u = b_1v_1 + \cdots + \ b_nv_n \in S$, então

$v + u = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + \ (a_n + b_n)v_n \in S$

e $\lambda u = \lambda(b_1v_1 + \cdots + \ b_nv_n) = (b_1\lambda)v_1 + \cdots + \ (b_n\lambda)v_n \ \in S$.

$\therefore$ S é um subespaço vetorial.

Definição 2: O subespaço que acabamos de construir recebe o nome de subespaço gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_n$.

Podemos escrever $S = [v_1, \dots, v_n]$ para dizer que S é um subespaço gerado pelos vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ ou que o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ gera S. Se $S = V$, então dizemos que V é gerado pelo conjunto $[v_1, \dots, v_n]$.

2.4 Determinante de uma matriz

Definição: Se $A = [a_{ij}]$ for uma matriz do tipo $n \times n$ e $\det A$ o seu determinante então, por definição:

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow \det A = a_{11} \\ n \geq 2 \Rightarrow \det A = \sum(-1)^p . a_{1k_1} . a_{2k_2} . a_{3k_3} \dots . a_{nk_n} \end{cases}$$

sendo (k_1, k_2, k_3, ..., k_n) uma permutação genérica dos segundos índices e p o número de inversões em relação à fundamental (1, 2, 3, ..., n).

Por exemplo, para $n = 2$, temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21}.$$

E para $n = 3$, temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \det A = a_{11} . a_{22} . a_{33} + a_{12} . a_{23} . a_{31} + a_{13} . a_{21} . a_{32} - a_{13} . a_{22} . a_{31} - a_{12} . a_{21} . a_{33} - a_{11} . a_{23} . a_{32}.$$

Este dispositivo prático é chamado regra de Sarrus.

Vejamos algumas propriedades dos determinantes.

i) Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então $\det(AB) = \det(A) \det(B)$;

ii) $\det(kA) = k^n \det(A)$, $k \in \mathbb{R}$;

iii) $\det(A) = \det(A^t)$;

iv) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, onde B é a matriz obtida a partir de de A, trocando-se duas linhas ou colunas, então $\det(B) = -\det(A)$;

v) Se A é uma matriz invertível, então $\det(A) \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Para a prova destas propriedades (HOWARD; RORRES, 2001).

Um conceito importante para nosso estudo é o de matriz inversa.

Definição: Seja uma matriz quadrada A, se pudermos encontrar uma matriz B de mesma ordem, tal que $AB = BA = I$, então dizemos que A é invertível e que B é a inversa de A.

Exemplo 11: A matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ é inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, pois

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ e

$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

Teorema: Diz-se que uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Para prova do teorema, ver (HOWARD; RORRES, 2001).

Um dos nossos objetivos nesse trabalho é discutir quando o sistema $Ax = b$ tem solução. Daremos um importante passo nesse sentido com introdução do conceito espaço-coluna de uma matriz.

3. ESPAÇOS FUNDAMENTAIS E SOLUÇÃO DE AX = B

3.1 Espaço-coluna de A

Seja A_{mxn} uma matriz e $A_i \in \mathbb{R}^m$ para $i = 1, \ldots, n$ suas colunas, isto é, $A = [A_1, \ldots, A_n]$. Então a combinação linear das colunas de A geram o subespaço coluna da A, o qual é denotado por $C_{(A)}$.

Em particular,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 10 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

então $v_1 = (1,2,0)^T$, $v_2 = (4,5,6)^T$ e $v_3 = (8,10,12)^T$ geram o espaço coluna de A.

$$C_{(A)} = [v_1, v_{2,} v_3].$$

Como v_3 é múltiplo de v_2 então podemos dizer

$$C_{(A)} = [v_1, v_2].$$

O espaço-coluna de A é subespaço de $\mathbb{R}^m$.

Definição: O espaço-coluna consiste de todas as combinações lineares das colunas de uma matriz.

Teorema: Um sistema linear $Ax = b$ é consistente se, e somente se, b está no espaço-coluna de A. Ou ainda, $Ax = b$ é dito consistente se, e somente se, b for uma combinação linear dos vetores-coluna de A.

Para demonstração desse teorema, ver (HOWARD; RORRES, 2001).

Exemplo 1: Seja $Ax = b$ o sistema linear não homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Mostre que b está no espaço-coluna de A e expresse b como uma combinação linear dos vetores de A.

Ao resolvermos o sistema linear, obtemos

$$x_1 = -1, x_2 = 2 \text{ e } x_3 = 1.$$

O sistema consistente, ou seja, b está no espaço-coluna de A. Daí, vem que

$$-1.\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\6\end{pmatrix}.$$

3.2 Espaço-linha

Se A é uma matriz com m linhas e n colunas, então o subespaço de $\mathbb{R}^n$ que foi gerado pelos vetores-linha de A é denominado espaço-linha de A.

Exemplo 2: Seja $A = \begin{pmatrix}5 & -1 & -3\\7 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Os vetores-linha de A que geram o espaço linha desta matriz são

$v_1 = [5 - 1 - 3]$ e $v_2 = [7\ 0\ 2]$.

3.3 Estudo da Solução do Sistema Ax = b

Considere o sistema linear $Ax = b$.

Se A é uma matriz $n \times n$ e $det(A) \neq 0$, então $\exists\ A^{-1}$. A solução do sistema linear $Ax = b$ é dada por $x = A^{-1}b$.

Pode ser provado que se $b \in C_{(A)}$, então o sistema $Ax = b$ possui solução. Se $b \notin C_{(A)}$, então o sistema não possui solução.

Exemplo 3: $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

Como $C_{(A)} = [v_1], v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ é uma reta, então o sistema terá solução se b pertence a essa reta.

Antes de resolver $Ax = b$ vejamos primeiramente o espaço-nulo de A.

3.4 Espaço-Nulo de A

Definição: Seja A uma matriz $m \times n$. O espaço-solução do sistema linear homogêneo de equação $Ax = 0$, subespaço de $\mathbb{R}^n$, é denominado espaço-nulo de A. Denotamos $N(A)$.

Exemplo 4: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Temos que

$$Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{bmatrix}$$

Na verdade temos apenas uma equação, pois a segunda equação é a primeira multiplicada por 2. Em outras palavras, a reta $x_1 + 3x_2 = 0$ é a mesma reta $2x_1 + 6x_2 = 0$. Essa reta é o espaço nulo $N(A)$.

Para descrevermos o espaço-nulo de A, vamos escolher um ponto da reta, por exemplo $x_2 = 1$. Assim, todos os pontos da reta serão múltiplos deste ponto.

Logo, na equação $x_1 + 3x_2 = 0$ teremos $x_1 = -3$. Uma solução particular é $(-3, 1)$, portanto o espaço-nulo de A contém todos os múltiplos de $S = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Antes de prosseguir precisamos relembrar um método bastante útil e eficaz para resolução de sistemas lineares, a eliminação gaussiana.

3.5 Eliminação Gaussiana (Escalonamento)

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2. \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

Com intuito de resolver o sistema, operamos com a matriz e a matriz aumentada

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Dizemos que uma matriz é escalonada quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma de suas linhas encontra-se à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha seguinte. Ademais, as linhas que possuem todos os elementos iguais a zero devem estar abaixo das outras.

O método de escalonamento é fundamentado no fato de que todo sistema é equivalente a um sistema escalonado.

Exemplo 5: Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}.$$

Equivalente a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-3L1]{L2+L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3-10L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_2 + 5x_3 = 9 \\ -52x_3 = -104 \end{cases}.$$

Imediatamente vem $x_3 = 2, x_2 = 1$ e $x_1 = 3$.

Exemplo 6: Aplicando o processo de escalonamento ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -2 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-4L1]{L2-2L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3-L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ \quad -x_2 + 10x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 10x_3 + 3 \text{ e } x_1 = -2 - 17x_3$$

As soluções do sistema são os pontos

$$(-2 - 17x_3, 10x_3 + 3, x_3).$$

Na próxima seção vamos estabelecer relações entre as soluções de um sistema linear $Ax = b$ e as do sistema correspondente $Ax = 0$.

3.6 A resolução de Ax = 0

Definição: O espaço-nulo de A consiste de todas as soluções para $Ax = 0$. Esses vetores x estão em $\mathbb{R}^n$. O espaço-nulo contendo todas as soluções x é denotado por $N(A)$.

Exemplo 7: Considere a matriz C dada por

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Fazendo escalonamento por linhas, a matriz C é transformada em uma matriz da forma

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

As duas primeiras colunas são pivô (líder) e as duas últimas são colunas livres. Como existem 2 colunas livres então o $N(C)$ possui dois elementos não nulos. Estes elementos são encontrados quando substituímos por 1 e 0 as variáveis livres x_3 e x_4. Para isto considere o sistema $Ux = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para obter o primeiro vetor não nulo de $N(C)$ basta fazer $x_3 = 1$ e $x_4 = 0$, no sistema acima. Resulta $x_1 = -2$ e $x_2 = 0$, assim o primeiro vetor não nulo é

$$S_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para obter o segundo vetor não nulo de $N(C)$ basta fazer $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$, no sistema acima. Resulta $x_1 = 0$ e $x_2 = -2$, assim o segundo vetor não nulo é

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vale lembrar duas etapas fundamentais para resolução de $Ax = 0$:

1) Produzir uma matriz triangular U (ou sua forma reduzida R);

2) Substituir em $Ux = 0$ ou $Rx = 0$ para encontrarmos x.

E se a coluna não tiver pivô? Vamos a um exemplo.

Exemplo 8: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$.

Certamente $a_{11} = 1$ é o primeiro pivô.

$$A \xrightarrow[\ ]{\substack{L2-2L1 \\ L3-3L1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

A segunda coluna tem um zero na posição do pivô. Nesse caso, passamos para a coluna seguinte,

O segundo pivô é 4, que está na terceira coluna. Subtraindo a linha 2 da linha 3, chegamos a

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com dois pivôs e a última equação $0 = 0$.

A equação $Ax = 0$ parecia envolver três equações distintas, porém a terceira equação é a soma das duas primeiras. Ela é automaticamente satisfeita quando as duas primeiras são satisfeitas.

Com quatro incógnitas e apenas dois pivôs, há muitas soluções. A questão é registrar todas elas, separando as variáveis pivôs das variáveis livres.

As variáveis pivôs são x_1 e x_3 uma vez que as colunas 1 e 3 contém pivôs. Já as variáveis livres são x_2 e x_4 pois as colunas 2 e 4 não possuem pivôs. As escolhas mais simples para as variáveis livres são uns e zeros. Tais escolhas resultam em soluções especiais.

Soluções especiais:

- Conjunto $x_2 = 1$ e $x_4 = 0$, por substituição $x_3 = 0$ e $x_1 = -1$.

- Conjunto $x_2 = 0$ e $x_4 = 1$, substituindo $x_3 = -1$ e $x_1 = -1$.

Essas soluções especiais resolvem $Ux = 0$ e $Ax = 0$. Elas estão no espaço-nulo. Ademais, toda solução é uma combinação das soluções especiais.

Solução completa $x = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{especial} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{especial} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{completa}$.

Agora, em relação à matriz escalonada R, considere

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dividindo a segunda linha por 4, temos ambos os pivôs iguais a 1. Subtraindo duas vezes essa nova linha da linha acima, produzimos um zero acima e abaixo do segundo pivô. A matriz escalonada reduzida será

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral para $Ax = 0$, $Ux = 0$ ou $Rx = 0$ será a combinação dessas duas soluções especiais: o espaço-nulo $N(A) = N(U) = N(R)$ contém

$x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (solução completa de $Ax = 0$).

Na próxima seção vamos aprofundar nosso entendimento de sistemas lineares. Em particular, vamos buscar as soluções de $Ax = b$.

3.7 A solução completa para Ax = b

Antes de prosseguir faremos uma breve pausa para discutirmos o posto de uma matriz.

Sejam A uma matriz com m linhas e n colunas e A' a matriz na forma escalonada equivalente a A. Define-se como posto de A o número de linhas não nulas de A'.

Exemplo 9: Determine o posto da matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2-2L1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o posto de A é 1.

Exemplo 10: Determine o posto de A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -2 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{L2-2L1 \\ L3-4L1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3-L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o posto de A é 2.

Vamos agora resolver $Ax = b$:

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ e b qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$.

A matriz aumentada $[A \quad b]$ para este sistema $Ax = b$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}\Bigg] \xrightarrow[L3-3L1]{L2-2L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

Observe que o sistema $Ax = b$ para este caso possui solução se a terceira componente de b é zero, isto é,

$$0 = b_3 - b_2 - b_1$$

Em particular se $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, a matriz reduzida por linhas da matriz aumentada $[A \quad b]$ é dada por

$$[A \quad b] \ \sim \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução completa para $Ax = b$ é dada por

$$x = x_p + x_n.$$

Onde x_p representa a solução particular do sistema $Ax = b$ e x_n representa a solução do sistema homogêneo $Ax = 0$.

Assim, para encontrarmos a solução completa para $Ax = b$, temos que começar encontrando uma solução particular.

1) $x_{particular}$: Definir todas as variáveis livres iguais a zero.

$x_2 = 0$ e $x_4 = 0$ (colunas sem pivô)

Obtemos $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ \quad\;\; 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}$ e $x_1 = -2$.

$$\therefore x_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Agora devemos encontrar x_n solução do sistema homogêneo $Ax = 0$,

2) $x_{espaço-nulo}$

Encontramos os seguintes vetores

$$x_n = p\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + q\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

Portanto a solução geral para este sistema é dada por

$$x = x_p + x_n$$

Logo,

$$x = \begin{bmatrix}-2\\0\\3/2\\0\end{bmatrix} + \ p\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + q\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

Dado um sistema linear $Ax = b$, o sistema pode possuir uma solução, infinitas soluções ou não ter solução.

Possibilidades para equações lineares posto r:

- $r = m$ e $r = n$ → quadrada e invertível → $Ax = b$ tem 1 solução;
- $r = m$ e $r < n$ → curta e larga → $Ax = b$ tem ∞ soluções;
- $r < m$ e $r = n$ → comprida e comprimida → $Ax = b$ tem 0 ou 1 solução;
- $r < m$ e $r < n$ → forma desconhecida → $Ax = b$ tem 0 ou ∞ soluções.

3.8 Base e Dimensão

Os vetores $v_1, v_2 \dots, v_n$ são denominados linearmente independentes (L. I.) quando

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + \ c_nv_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = \ c_n = 0 \tag{1}$$

Se na equação (1) existir pelo menos um $c_i \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$, então dizemos que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente dependentes (L. D.).

Por exemplo, os vetores $u = (-1, 1)$, $v = (2, 3)$ e $w = (3, 7)$ em $\mathbb{R}^2$ são L. D., pois $w = u + 2v$.

Os vetores $u = (-1, 1, 2)$, $v = (2, 3, -1)$ e $w = (-3, 3, 6)$ em $\mathbb{R}^3$ também são L. D., pois $w = 3u + 0v$.

Seja $A = \begin{bmatrix}1 & 4 & 8\\2 & 5 & 10\\0 & 6 & 12\end{bmatrix}$.

É fácil perceber que A_3, terceira coluna de A é combinação linear de A_1, primeira e A_2 segunda coluna de A, isto é, $A_3 = 0.A_1 + 2A_2$.

Os vetores A_1 e A_2 são L. I., assim como A_1 e A_3.

De fato, para A_1 e A_2

$$aA_1 + bA_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 4b \\ 2a & 5b \\ 0 & 6b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 4b = 0 \\ 2a + 5b = 0 \\ 6b = 0 \end{cases}$$

De onde vem $a = 0$ e $b = 0$. De forma análoga se prova que os vetores A_1 e A_3 são L. I.

Os vetores $v_1, v_2 \ldots, v_n$ de um espaço vetorial V são uma base de V se:

1) o conjunto destes vetores geram o espaço; e

2) $v_1, v_2 \ldots, v_n$ são L. I.

Por exemplo, os vetores $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ e $w = (0, 0, 1)$ constituem uma base de $\mathbb{R}^3$. De fato. Os vetores u, v, w são L.I., pois ao considerarmos a combinação linear $xu + yv + zw = 0$, obtemos um sistema que possui apenas a solução nula, isto é, $x = y = z = 0$. Ademais, qualquer elemento $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ é representado de modo único pela combinação linear

$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$.

4. MÉTODOS DIRETOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

4.1 Introdução

As soluções do sistema $Ax = b$ de ordem n, dividem-se em dois grupos: os métodos diretos e os métodos iterativos.

No presente capítulo, vamos estudar métodos diretos, que são aqueles que nos fornecem uma solução exata após um número finito de operações aritméticas. A desvantagem desses métodos são os possíveis erros de arredondamento, que em sistemas de grande porte tornam a solução sem significado. No próximo capítulo estudaremos os métodos iterativos.

Em geral, nos ensinos Fundamental e Médio são estudados os métodos de adição, substituição e regra de Cramer. Os dois primeiros são eficientes em sistemas de pequeno porte (duas equações e duas variáveis).

A regra de Cramer, que recebe grande destaque, já se mostra um pouco impraticável em sistemas de ordem superior a 3. Neste método faz-se necessário para resolução de um sistema de ordem n, o cálculo de $n + 1$ determinantes de mesma ordem e um número elevado de multiplicações e adições.

Vale lembrar que em sistemas de equações lineares de ordem n, com única solução, a solução de $Ax = b$ é dada por $x = A^{-1}b$, onde A^{-1} é a matriz inversa de A. Todavia os cálculos de A^{-1} e $A^{-1}b$ envolvem um número grande de operações, tornando esse processo inviável e pouco competitivo em relação a outros métodos.

4.2 Método de eliminação de Gauss

Vimos anteriormente (seção 3.5) que o processo de eliminação gaussiana consiste na transformação do sistema linear dado em um sistema triangular equivalente, após uma série de operações elementares.

Teorema: Seja $Ax = b$ um sistema linear. Sobre as linhas do sistema aplicamos uma série de operações que podem ser escolhidas entre:

i) trocar duas equações;

ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula;

iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Ao final, obtemos um novo sistema $A'x = b'$, equivalente ao sistema $Ax = b$.

O método de eliminação gaussiana utiliza o teorema acima para triangularizar a matriz A, supondo $det(A) \neq 0$.

Exemplo 1: Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 12. \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Equivalente a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-3/2L1]{2L2-L1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 21 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3+1/18L2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 9x_2 + 3x_3 = 21 \\ -\frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

É imediato que $x_3 = -2, x_2 = 3$ e $x_1 = 1$.

Exemplo 2: Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Equivalente a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & -6 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-1/2L1]{L2-2L1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 13/2 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ -3x_3 = 3 \\ \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{13}{2} \end{cases}$$

De onde vem que $x_3 = -1, x_2 = 2$ e $x_1 = 1$.

4.3 Método de Eliminação Gauss-Jordan

A eliminação gaussiana irá produzir uma matriz na forma escalonada e o método de eliminação Gauss-Jordan produzirá uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas.

Exemplo 3: Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

A matriz aumentada para o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-3L1]{L2+L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3-10L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando a segunda linha por -1 para introduzirmos um líder na linha 2 coluna 2, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}.$$

Agora multiplicando a terceira linha por $-1/52$ para introduzirmos um líder na linha 3 coluna 3, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz está na forma escalonada. Para obtermos a forma escalonada reduzida por linhas precisamos de mais um passo. Iniciando pela última linha não nula e operando para cima, somaremos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores com intuito de introduzir zeros acima dos líderes.

$$\xrightarrow{L2+5L3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1-L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esta última matriz está na forma escalonada reduzida por linhas. Imediatamente, temos $x_3 = 2, x_2 = 1$ e $x_1 = 3$.

A eliminação Gauss-Jordan envolve escrever menos e, em sistemas pequenos, pode-se argumentar ser mais eficiente que a eliminação gaussiana. Porém, para sistemas grandes o método Gauss-Jordan precisa de cerca de 50% mais operações que a eliminação gaussiana.

Na próxima seção, estudaremos um outro método: a decomposição LU.

4.4 Método da Decomposição ou Fatoração LU

Esse método de resolução de sistemas consiste em decompor a matriz A em um produto da matriz triangular inferior com diagonal unitária L pela matriz triangular superior U.

Teorema: Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e A_k a matriz formada das primeiras k linhas e k colunas de A. Supondo $det(A_k) \neq 0$, onde $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Então existe única matriz triangular inferior $L = l_{ij}$, com $l_{ii} = 1,\ 1 \leq i \leq n$ e uma única matriz triangular superior $U = u_{ij}$ tais que $LU = A$. Ademais, $det(A) = u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}$.

A demonstração deste teorema pode ser feita por indução sobre n. Para saber mais ver (RUGGIERO; LOPES, 1998).

Vamos usar a decomposição LU para resolver $Ax = b$. Desta forma, sejam o sistema linear $Ax = b$ e a decomposição LU da matriz A. Temos que

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b.$$

Seja $y = Ux$. A solução do sistema pode ser obtida através da resolução dos seguintes sistemas:

i) $Ly = b$

ii) $Ux = y$

Vale lembrar ainda que y é o vetor constante do lado direito obtido ao final do processo da eliminação de Gauss.

Sejam A, L e U matrizes $n \times n$. Fazendo $LU = A$, temos que

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Existem várias formas de decompor a matriz A na forma LU. Uma dessas formas é dada pelo método de eliminação de Gauss, pois ao final deste método obtemos a matriz U. A matriz L é obtida de forma implícita, e os elementos m_{ij} da matriz L são os números usados na eliminação por linhas $(l_i - m_{ij}\, l_j) \longrightarrow l_i$.

Para obtermos os elementos das matrizes L e U, podemos utilizar as seguintes fórmulas gerais:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj} \ , i \leq j \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}) / \, u_{jj} \, , ij \end{cases}$$

Por convenção, $\sum_{j=1}^{k} \equiv 0$ se $k < 1$.

Para resolução do sistema proposto, vamos seguir o seguinte roteiro:

a) Verificar se A satisfaz as condições da decomposição LU, isto é, $det(A_k) \neq 0$;

b) Decompor A em LU;

c) Resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$.

Exemplo 4: Resolva o sistema linear a seguir usando a decomposição LU.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

É fácil verificar que $det(A_k) \neq 0$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$. Agora vamos decompor a matriz A na forma LU. Aplicando o método de redução por linhas na matriz A temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2+L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}, \text{ onde } m_{21} = -1$$

$$\xrightarrow{L3-3L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix}, \text{ onde } m_{31} = 3$$

$$\xrightarrow{L3-10L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{bmatrix} \text{ onde } m_{32} = 10$$

Logo a matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{bmatrix}$ e a matriz $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$, isto é,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode ser verificado $A = LU$.

O seguinte passo é resolver o sistema $Ax = b$ isto é feito em dois passos

Primeiro passo

Considere $Ly = b$, então:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

de onde vem:

$y_1 = 8$

$-y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 9$

$3y_1 + 10y_2 + y_3 = 10 \Rightarrow y_3 = -104.$

Segundo passo

Como $Ux = y$, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -104 \end{pmatrix}$$

de onde segue

$-52x_3 = -104 \Rightarrow x_3 = 2.$

$-x_2 + 5x_3 = 9 \Rightarrow x_2 = 1.$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \Rightarrow x_1 = 3.$

Assim, a solução do sistema é $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Na seção seguinte, trataremos do método de Cholesky. Através desse método podemos simplificar os cálculos da decomposição LU, para os casos em que a matriz relacionada ao sistema linear seja simétrica.

4.5 Método de Cholesky

A decomposição de Cholesky requer aproximadamente a metade do número de operações efetuadas na fase da eliminação da decomposição LU.

Definição: Uma matriz real simétrica A de ordem n é positiva definida quando para A_k, matriz formada pelas primeiras k linhas e k colunas de A valer: $det(A_k) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Teorema: Se A é simétrica, positiva definida, então A pode ser decomposta de forma única no produto GG^t, onde G é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal estritamente positivos.

Se A, G e G^tmatrizes $n \times n$. Então

$$GG^t = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & g_{32} & \cdots & g_{n2} \\ 0 & 0 & g_{33} & \cdots & u_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Para obtermos os elementos da matriz G, podemos utilizar as seguintes fórmulas gerais:

a) Para elementos diagonais de G:

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^{2}\right)^{1/2}, i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

b) Para elementos não diagonais de G:

$$\begin{cases} g_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{g_{11}}, i = 2, 3, \dots, n. \\ g_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}\, g_{jk}\right) / \, g_{jj}\, , i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Vale observar que na decomposição LU tínhamos $det(A) = u_{11}\, u_{22} \dots u_{nn}$, já no método Cholesky temos que: $det(A) = det(G)^2 = (\, g_{11} g_{22} \dots g_{nn})^2$, onde $A = GG^t$.

A resolução do sistema linear $Ax = b$ segue o seguinte esquema:

$$Ax = b \Leftrightarrow (GG^t)x = b \Rightarrow \begin{cases} i)\ Gy = b \\ ii)\ G^t x = y \end{cases}$$

Para resolução do sistema proposto, vamos seguir o seguinte roteiro:

a) Verificar se A satisfaz as condições do método de Cholesky, isto é, $det(A_k) > 0$;

b) Decompor A em GG^t;

c) Resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = \left(b_1, b_{2,} \dots, b_n\right)^t$.

Exemplo 5: Resolva o sistema linear a seguir usando o método de Cholesky:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 19 \end{cases}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

a) Temos que: $det(A_1) = 1 > 0$, $det(A_2) = 2 > 0$, $det(A_3) = det(A) = 8 > 0$.

b) Usando as fórmulas, obtemos:

$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \Rightarrow\ g_{11} = \sqrt{1} \Rightarrow\ g_{11} = 1,$

$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} \Rightarrow\ g_{21} = \frac{1}{1} = 1,$

$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} \Rightarrow\ g_{31} = \frac{1}{1} = 1,$

$g_{22} = (a_{22} - g_{21}{}^2)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = (3 - 1^2)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = \sqrt{2}$,

$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}g_{21}}{g_{22}} \Rightarrow g_{32} = \frac{-1-1.1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$,

$g_{33} = (a_{33} - g_{31}{}^2 - g_{32}{}^2)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = (7 - 1^2 - (-\sqrt{2})^2)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = 2.$

Então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Para $Gy = b$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 5$

$y_1 + \sqrt{2}y_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -3\sqrt{2}$

$y_1 - \sqrt{2}y_2 + 2y_3 = 19 \Rightarrow y_3 = 4.$

Para $G^t x = y$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 2.$

$\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 = -3\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -1.$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 4.$

Assim, a solução de $Ax = b$ é $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. MÉTODOS ITERATIVOS

5.1 Introdução

Em paralelo aos métodos diretos para resolução de sistemas lineares, existem os métodos iterativos. A grande vantagem desses métodos é a auto correção, diminuindo assim erros de arredondamento nas soluções oriundas de métodos diretos.

Seja o sistema linear $Ax = b$. Este sistema será transformado em um outro sistema do tipo $x = Bx + g$, onde B é a matriz $n \times n$ e g vetor $n \times 1$. A solução desse novo sistema é também solução de $Ax = b$, por se tratarem de sistemas equivalentes. Vale notar que se $\varphi(x) = Bx + g$, então o sistema $x = Bx + g$ é reescrito na forma $x = \varphi(x)$. Onde φ é chamada função de iteração.

O processo de iteração segue o seguinte esquema:

i) Começamos com uma aproximação inicial $x^{(0)}$ para solução;

ii) Em seguida, construímos aproximações sucessivas:

$$\begin{cases} x^{(1)} = Bx^{(0)} + g = \varphi\left(x^{(0)}\right), \\ x^{(2)} = Bx^{(1)} + g = \varphi\left(x^{(1)}\right), \\ \vdots \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g = \varphi\left(x^{(k)}\right), k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

De modo que $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$, onde α é solução do sistema $Ax = b$.

Contudo é importante sabermos se a sequência que estamos construindo está convergindo ou não para a solução almejada. Surge, portanto, a necessidade de se trabalhar com critérios de convergência.

Repetimos o processo iterativo até o vetor $x^{(k)}$ está suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$.

Ademais, dados uma precisão ε e uma distância $d^{(k)}$, com $d^{(k)} = \underset{1\le i\le n}{máx} \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$, o vetor $x^{(k)}$ é escolhido como solução aproximada se $d^{(k)} < \varepsilon$. O teste de erro relativo pode ser realizado pelo seguinte cálculo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\underset{1\le i\le n}{máx} \left|x_i^{(k)}\right|}.$$

5.2 Método Iterativo de Gauss-Jacobi

A ideia central desse método é transformar o sistema linear $Ax = b$ no sistema equivalente $x = Bx + g$. Para isso, tendo como base o sistema original

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Assumindo $a_{ii} \neq 0$, operamos da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases}.$$

Assim, $x = Bx + g$, onde

$$B = \begin{bmatrix} a & -a_{12}/\,a_{11} & \cdots & -a_{1n}/\,a_{11} \\ -a_{21}/\,a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/\,a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/\,a_{nn} & -a_{n2}/\,a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dado uma aproximação inicial $x^{(0)}$, calculamos $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ recursivamente, pela relação $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}.$$

Exemplo 1: Resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Jacobi com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0{,}05$.

O processo iterativo é

$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(5 + x_2^{(k)}\right) = \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{5}{4}$

$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(-1 - x_1^{(k)}\right) = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}$

De maneira que $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, onde

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ e $g = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

Para $k = 0$, temos

$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}x_2^{(0)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{5}{4} = \frac{7}{8} = 0{,}875$

$x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(0)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{7}{8} = -0{,}875$

$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ -7/8 \end{pmatrix}$

Calculando $d_r^{(1)}$:

$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = \left|\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{8}$

$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = \left|-\frac{7}{8} + \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{8}$

$d_r^{(1)} = \frac{5}{7} = 0{,}714 > \varepsilon.$

Prosseguindo as iterações, temos:

para $k = 1$:

$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}x_2^{(1)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-7}{8}\right) + \frac{5}{4} = \frac{33}{32} = 1{,}031$

$x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}x_1^{(1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{15}{16} = -0{,}937$

$\therefore x^{(2)} = \begin{pmatrix} 33/32 \\ -15/16 \end{pmatrix}$

Calculando $d_r^{(2)}$:

$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = \left|\frac{33}{32} - \frac{7}{8}\right| = \frac{5}{32}$

$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = \left|-\frac{15}{16} + \frac{7}{8}\right| = \frac{1}{16}$

$d_r^{(2)} = \frac{5}{33} = 0{,}151 > \varepsilon.$

para $k = 2$:

$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}x_2^{(2)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-15}{16}\right) + \frac{5}{4} = \frac{65}{64} = 1{,}015$

$x_2^{(3)} = -\frac{1}{2}x_1^{(2)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{33}{32}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{65}{64} = -1{,}015$

$\therefore x^{(3)} = \begin{pmatrix} 65/64 \\ -65/64 \end{pmatrix}$

Calculando $d_r^{(3)}$:

$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = \left|\frac{65}{64} - \frac{33}{32}\right| = \frac{1}{64}$

$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = \left|-\frac{65}{64} + \frac{15}{16}\right| = \frac{5}{64}$

$d_r^{(3)} = \frac{5}{65} = 0{,}07 > \varepsilon.$

para $k = 3$:

$x_1^{(4)} = \frac{1}{4}x_2^{(3)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-65}{64}\right) + \frac{5}{4} = \frac{255}{256} = 0{,}996$

$x_2^{(4)} = -\frac{1}{2}x_1^{(3)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{65}{64}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{129}{128} = -1{,}007$

$\therefore x^{(4)} = \begin{pmatrix} 255/256 \\ -129/128 \end{pmatrix}$

Calculando $d_r^{(4)}$:

$\left|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}\right| = \left|\frac{255}{256} - \frac{65}{64}\right| = \frac{5}{256}$

$\left|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}\right| = \left|-\frac{129}{128} + \frac{65}{64}\right| = \frac{1}{128}$

$d_r^{(4)} = \frac{5}{258} = 0{,}019 < \varepsilon.$

Então, a solução do sistema linear acima, com erro menor que 0,05, obtida pelo método Gauss-Jacobi, é

$\bar{x} = x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0{,}996 \\ -1{,}007 \end{pmatrix}.$

O valor de $x^{(0)}$ é arbitrário.

O teorema a seguir estabelece uma condição suficiente para a convergência do método Gauss-Jacobi.

Teorema (Critério das Linhas): Sejam o sistema $Ax = b$ e $\alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$.

Se $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$, então o método Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da aproximação inicial $x^{(0)}$.

A demonstração desse teorema pode ser vista em (RUGGIERO; LOPES, 1998).

Vamos analisar o sistema linear do exemplo anterior. Temos

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25 < 1;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{5} = 0{,}5 < 1;$$

logo, $\max_{1 \leq k \leq 2} \alpha_k = 0{,}5 < 1$ e, portanto, pelo critério das linhas está garantida a convergência para o método Gauss-Jacobi.

Na seção seguinte, vamos tratar do método Gauss-Seidel. Este método também consiste em transformar $Ax = b$ em um sistema equivalente $x = Bx + g$, mediante separação da diagonal.

5.3 Método Iterativo de Gauss-Seidel

Dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$, calculamos $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ por

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

Portanto, o método Gauss-Seidel utiliza os valores mais atualizados para o cálculo de $x^{(k+1)}$.

Exemplo 2: Resolver o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 6x_2 + 8x_3 = -4 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Seidel, dados $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0{,}05$.

O processo iterativo é

$$x_1^{(k+1)} = \tfrac{1}{5}\left(3 - 2.x_2^{(k)} - 2.x_3^{(k)}\right) = -\tfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \tfrac{2}{5}x_3^{(k)} + \tfrac{3}{5}$$

$$x_2^{(k+1)} = \tfrac{1}{3}\left(-4 - 1.x_1^{(k+1)} - 1.x_3^{(k)}\right) = -\tfrac{1}{3}x_1^{(k+1)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(k)} - \tfrac{4}{3}$$

$$x_3^{(k+1)} = \tfrac{1}{8}\left(-4 - 0.x_1^{(k+1)} - 6.x_2^{(k+1)}\right) = -\tfrac{3}{4}x_2^{(k+1)} - \tfrac{1}{2}$$

Para $k = 0$:

$$x_1^{(1)} = -\tfrac{2}{5}x_2^{(0)} - \tfrac{2}{5}x_3^{(0)} + \tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{5} = 0{,}6$$

$$x_2^{(1)} = -\tfrac{1}{3}x_1^{(1)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(0)} - \tfrac{4}{3} = -\tfrac{23}{15} = -1{,}533$$

$$x_3^{(1)} = -\tfrac{3}{4}x_2^{(1)} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{13}{20} = 0{,}65$$

$$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -1{,}533 \\ 0{,}65 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(1)}$:

$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |0{,}6 - 0| = 0{,}6$

$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |-1{,}533 - 0| = 1{,}533$

$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |0{,}65 - 0| = 0{,}65$

$d_r^{(1)} = \frac{1{,}533}{1{,}533} = 1 > \ \varepsilon.$

Para $k = 1$:

$x_1^{(2)} = -\frac{2}{5}x_2^{(1)} - \frac{2}{5}x_3^{(1)} + \frac{3}{5} = \frac{143}{150} = 0{,}953$

$x_2^{(2)} = -\frac{1}{3}x_1^{(2)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} - \frac{4}{3} = -1{,}866$

$x_3^{(2)} = -\frac{3}{4}x_2^{(2)} - \frac{1}{2} = 0{,}899$

$\therefore\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}953 \\ -1{,}866 \\ 0{,}899 \end{pmatrix}$

Calculando $d_r^{(2)}$:

$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |0{,}953 - 0{,}6| = 0{,}353$

$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |-1{,}866 + 1{,}533| = 0{,}333$

$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |0{,}899 - 0{,}65| = 0{,}249$

$d_r^{(2)} = \frac{0{,}353}{1{,}866} = 0{,}189 > \ \varepsilon.$

Para $k = 2$:

$x_1^{(3)} = -\frac{2}{5}x_2^{(2)} - \frac{2}{5}x_3^{(2)} + \frac{3}{5} = -0{,}4.(-1{,}866) - 0{,}4.0{,}899 + 0{,}6 = 0{,}986$

$x_2^{(3)} = -\frac{1}{3}x_1^{3} - \frac{1}{3}x_3^{(2)} - \frac{4}{3} = -0{,}333.0{,}986 - 0{,}333.0{,}899 - 1{,}333 = -1{,}961$

$x_3^{(3)} = -\frac{3}{4}x_2^{(3)} - \frac{1}{2} = -0{,}75.(-1{,}961) - 0{,}5 = 0{,}971$

$$\therefore x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}986 \\ -1{,}961 \\ 0{,}971 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(3)}$:

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |0{,}986 - 0{,}953| = 0{,}033$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |-1{,}961 + 1{,}866| = 0{,}095$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |0{,}971 - 0{,}899| = 0{,}072$$

$d_r^{(3)} = \frac{0{,}095}{1{,}961} = 0{,}048 < \varepsilon.$

Portanto, a solução $\bar{x}$ do sistema linear com erro menor que ε, é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}986 \\ -1{,}961 \\ 0{,}971 \end{pmatrix}.$$

Vamos agora analisar nossa solução, obtida pelo método Gauss-Seidel, a partir de um outro critério de convergência: o critério de Sassenfeld.

Critério de Sassenfeld:

Sejam $\beta_1 = \frac{|a_{12}|+|a_{13}|+\cdots+|a_{1n}|}{|a_{11}|}$ e $\beta_2 = \frac{|a_{j1}|\beta_1+|a_{j2}|\beta_2+\cdots+|a_{jj-1}|\beta_{j-1}+|a_{jj+1}|+\cdots+|a_{jn}|}{|a_{jj}|}$.

Se $\beta = \underset{1\le j\le n}{máx}\{\beta_j\} < 1$, então o método Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja $x^{(0)}$.

Analisando o exemplo anterior pelo critério de Sassenfeld, temos

$$\beta_1 = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8 < 1$$

$$\beta_2 = \frac{1\times\frac{4}{5}+1}{3} = \frac{3}{5} = 0{,}6 < 1$$

$$\beta_3 = \frac{0\times\frac{4}{5}+6\times\frac{3}{5}}{8} = \frac{9}{20} = 0{,}45 < 1$$

Logo, $\underset{1\le j\le 3}{máx}\ \beta_j = 0{,}8 < 1$ e pelo critério de Sassenfeld está garantida a convergência para o método Gauss-Seidel.

Vale observar que o critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não o seja. Também podemos permutar linhas e/ou colunas afim de obtermos uma nova disposição que satisfaça esses critérios de convergência.

Um outro critério importante de convergência é o teste para verificar se a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante.

Definição: Uma matriz A estritamente diagonalmente dominante se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Analisando por esse critério o sistema linear anterior, temos

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 6x_2 + 8x_3 = -4 \end{cases}, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$|a_{12}| + |a_{13}| = |2| + |2| < |5| = |a_{11}|$,

$|a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |1| < |3| = |a_{22}|$,

$|a_{31}| + |a_{32}| = |0| + |6| < |8| = |a_{33}|$.

Logo, podemos garantir que os métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel são ambos convergentes para o sistema dado.

CONCLUSÃO

No presente trabalho, apresentamos conceitos básicos de álgebra linear com intuito de estas ferramentas servirem como suporte ao estudo dos métodos diretos e iterativos de resolução de sistemas lineares.

Para além do que é geralmente estudado no Ensino Básico, buscamos expor alternativas para resolução do problema de resolver $Ax = b$. De nenhum modo, tivemos a intenção de sugerir que tais métodos sejam estudados/ensinados no Ensino Básico. Mas sim oferecer uma visão mais ampliada ao professor de Matemática do ensino básico que tenha o desejo de se aprofundar no tema.

Para isso, trabalhamos com os objetivos de apresentar conceitos elementares de álgebra linear. Devemos lembrar também que, em nossa pesquisa, propomos estudar quatro métodos diretos e dois métodos iterativos. Pretendeu-se com isso solucionar $Ax = b$ e traçar um paralelo entre essas diversas formas de abordar a questão. Comparamos alguns métodos e destacamos o uso adequado de cada um deles, tendo em vista a redução de cálculos e a precisão da solução.

A necessidade de estudar tal problemática surge do fato de que diversos problemas em distintas áreas do conhecimento podem ser modelados por sistemas lineares. Deste modo, a relevância do tema nos motivou a pesquisar sobre o assunto.

Finalmente, acreditamos que nossa pesquisa pode servir como introdução para um estudo mais aprofundado sobre a resolução de sistemas lineares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HEFEZ, A; FERNANDEZ, C. S. Introdução à Álgebra Linear. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HOWARD, A; RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

LAMIN, M. R. N. Resolução de Problemas Modelados com Sistemas de Equações Lineares. Monografia (Licenciatura em Matemática). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.

LIMA, E. L. Álgebra Linear. 8ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. Geometria Analítica e Álgebra Linear. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

PULINO, P. Álgebra Linear e suas Aplicações: Notas de Aula. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/>

RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1998.

STRANG, G. Álgebra Linear e suas aplicações. 4ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

Apostila de Métodos Numéricos Para Engenharia I. Disponível em: <http://paulorcvilela.xpg.uol.com.br/Livro%20Texto%20CNC/cap%EDtulo%20(4).pdf> Acesso em: 10 jan. 2016.