Universidade Estadual de Londrina

JOÃO PAULO CHIAROTTI

NÚMEROS INTEIROS: UMA PROPOSTA DE TRATAMENTO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DAS IDEIAS DE DESCARTES E HILBERT

Londrina
2016

JOÃO PAULO CHIAROTTI

NÚMEROS INTEIROS: UMA PROPOSTA DE TRATAMENTO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DAS IDEIAS DE DESCARTES E HILBERT

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini

Londrina
2016

JOÃO PAULO CHIAROTTI

NÚMEROS INTEIROS: UMA PROPOSTA DE TRATAMENTO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DAS IDEIAS DE DESCARTES E HILBERT

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora: Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Profa. Dra Claudete Matilde Webler Martins
Universidade Estadual de Maringá - UEM

____
Profa. Dra. Ana Lúcia da Silva
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 19 de fevereiro de 2016.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me guiou e me deu forças durante a realização deste trabalho e durante toda a vida.

À minha orientadora Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini por seus ensinamentos, disposição, orientação, paciência e sobretudo por sua amizade.

À todos professores do PROFMAT/UEL por seus ensinamentos.

Aos amigos da Turma PROFMAT 2013 pela força nos momentos de dificuldade, pelo compartilhamento de seus conhecimentos, pela descontração nos almoços e viagens, por dois anos companheirismo e trocas de experiência.

Aos meus pais, José Carlos e Marialba, e meu irmão, Luiz Fernando, pelo apoio incondicional, principalmetne nos momentos de ausência.

Em especial à minha namorada, Dani, pela compreensão, paciência e, principalmente, companherismo.

Por fim, à todos que de algum modo tornaram este trabalho possível.

CHIAROTTI, João Paulo. *NÚMEROS INTEIROS: uma proposta de tratamento para o Ensino Fundamental a partir das ideias de Descartes e Hilbert*. 2016. 147 fls. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

Apresentamos neste trabalho uma proposta de tratamento para o Conjuntos dos Números Inteiros, um dos conteúdos básicos do sétimo ano do ensino Fundamental. Realizamos estudos que discutem os problemas que observamos em relação a este conteúdo, relacionados ao seu ensino e aprendizagem e que corroboram nossas inquietações ao longo de nossa experiência. Constata-se a existência de um ilogismo enraizado no tratamento das operações entre números negativos, no qual não segue uma sequência lógico-didática. E na história vemos as dificuldades e a insatisfação causada pelas *regras de sinais* em tempos mais remotos, bem como, o modo pelo qual os matemáticos avançaram ao construírem uma definição para o conjunto dos números inteiros e suas operações. Cumprindo nosso objetivo maior, com base no estudo desenvolvido, apresentamos uma proposta de tratamento para os números inteiros, mais especificamente, para as suas operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. Nossa proposta apresenta um contexto capaz de representar o *número inteiro* e promover justificativas plausíveis para o *resultado* obtido ao operar com estes números – por meio de segmentos. Com este trabalho esperamos contribuir com o tratamento do conteúdo para estudantes em geral, particularmente, os da Educação Básica.

Palavras-chave: Números Negativos; Regra de Sinais; Conjunto dos Números Inteiros; História da Matemática.

CHIAROTTI, João Paulo. *WHOLE NUMBERS: a proposed treatment for Elementary Education from the ideas of Descartes and Hilbert*. 2016. 147 sheets. Working Professional Master's Degree Completion in Mathematics – PROFMAT – State University Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

Here we present a proposal for a treatment for Sets of Integer Numbers, one of the basic content of the seventh year of elementary school. We conducted studies that discuss the problems we saw in relation to this content, related to teaching and learning and that support our concerns over our experience. Notes the existence of an illogical rooted in the treatment of transactions between negative numbers, which does not follow a logical and didactic sequence. And in the history we see the difficulties and dissatisfaction caused by signs of rules in ancient times as well as the way in which mathematicians advanced to build a definition for the set of integers and their operations. Fulfilling our ultimate goal, based on the study conducted, we propose a treatment for integers numbers, more specifically, for its operations: addition, subtraction, multiplication and division. Our proposal presents a context able to represent the integer numbers and promote plausible explanations for the *results* obtained when operating with these numbers - through segments. With this work we hope to contribute to the treatment of content for students in general, particularly the Basic Education.

Keywords: Negative numbers; Signs rule; Set of whole numbers; History of Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

Sumário

INTRODUÇÃO

No que se refere ao ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos contemplados na educação básica, muitos questionamentos circulam entre os professores responsáveis por esta disciplina e estão presentes nos trabalhos científicos no campo da Educação Matemática. Dentre eles, as estratégias de ensino e os recursos didáticos a serem utilizados em sala de aula. Isso ocorre com os mais diversos temas da disciplina, e os números inteiros fazem parte desta discussão.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCE (PARANÁ, 2008) da Rede Pública Estadual recomendam uma série de conteúdos considerados fundamentais para a disciplina de Matemática, denominados Conteúdos Estruturantes, que são organizados em campos de estudo. Atualmente, para o Ensino Fundamental, bem como para o Ensino Médio, os Conteúdos Estruturantes dividem-se em: *Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação.*

Cada Conteúdo Estruturante é composto de uma série de Conteúdos Básicos, assim como são intitulados no documento. Os Números Inteiros apresentam-se como um desses conteúdos, e parte do Conteúdo Estruturante *Números e Álgebra*. As DCE (PARANÁ, 2008) sugerem que este conteúdo deve ser trabalhado no sétimo ano do Ensino Fundamental, junto a dois objetivos de aprendizagem: que os alunos reconheçam números inteiros em diferentes contextos; e que realizem operações com números inteiros.

No entanto, nossa experiência como docente na rede pública de Ensino do Estado do Paraná, nos níveis Fundamental e Médio, e na rede particular de ensino ao longo de oito anos, permite-nos afirmar que o segundo objetivo citado apresenta-se como um desafio não somente quanto ao saber realizá-las, mas quanto à compreensão dessas operações, no quesito conhecido como “regras de sinais” da soma, da subtração, da multiplicação e da divisão entre números inteiros. Dentro deste contexto, podemos considerar alguns fatores que estão atrelados a este desafio, como a formação de professores nos cursos de Licenciatura de Matemática, que nem sempre contempla uma discussão sobre os conjuntos numéricos levando os futuros professores à compreensão do assunto e o conhecimento necessário para que eles possam enfrentar os desafios que a prática docente lhes apresenta. Particularmente, as explicações para as regras de sinais e outros assuntos correlatos, como propriedades e justificativas para os procedimentos que lidam com números, de um modo geral, englobam. Com propriedade faço esta afirmação, pois, foi esta a experiência na minha formação inicial, como em licenciatura em Matemática Plena em uma instituição pública, junto aos cursos de formação continuada que realizei até então. Porém, todo este quadro transformou-se em um dos combustíveis para a escolha do tema e para a realização deste trabalho.

Na busca de conhecimentos que pudessem suprir as falhas em nossa formação e que resolvessem nossas inquietações, realizamos um estudo sobre os números inteiros, mais geralmente, sobre o Conjunto dos Números Inteiros.

Percebemos que existem diversas indagações dos estudantes nos primeiros contatos com as regras operatórias para os números inteiros, principalmente com relação aos números negativos, e que faltam argumentos convincentes do professor para respondê-las. Mesmo que o professor possua conhecimentos acerca do que seja um número inteiro do ponto de vista matemático, ele não é adequado a este nível de escolaridade. Portanto, na falta de argumentos, os professores orientam os estudantes a decorar o que é necessário para que possam levar adiante seus estudos, abandonando a compreensão dos conhecimentos envolvidos. Desse modo, surge-nos a questão principal para este trabalho de investigação:

Existe algum modo de abordarmos o conjunto dos números inteiros bem como suas operações que justifique as regras operatórias para um primeiro tratamento na escola básica, ou seja, no sétimo ano do Ensino Fundamental?

No intuito de responder a esta questão, e como desdobramento da mesma, surgiram diversos questionamentos acerca do assunto que nortearam o desenvolvimento do nosso trabalho de investigação. Aliado aos estudos preliminares que realizamos recorremos à história da Matemática como uma fonte de pesquisa que foi capaz de fornecer subsídios capacitando-nos a construir esta dissertação e respondendo a questão de investigação. Salientamos que a história da Matemática apresenta-se como uma das tendências metodológicas presentes na Educação Matemática e que segundo as DCE (PARANÁ, 2008) pode nos trazer contribuições acerca de nossa prática.

> A história da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos. A história deve ser o fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática. Assim, pode promover uma aprendizagem significativa, pois propicia ao

> estudante entender que o conhecimento matemático é construído [...] (DCE PARANÁ, 2008, p. 66)

Desse modo, como foi a aceitação dos números negativos pelos matemáticos na história da Matemática? Há alguma semelhança entre o que a história conta e a forma como se ensina este assunto atualmente? Os questionamentos dos estudantes foram os mesmos que os feitos pelos matemáticos na história da Matemática? Na História da Matemática existe alguma justificativa plausível para as regras de multiplicação e divisão de números inteiros que alunos de 7º ano compreenderiam? Somente no século XIX os matemáticos apresentaram uma definição para um número inteiro. Quais as motivações que os matemáticos tiveram para construir o Conjunto dos Números Inteiros? Estes e outros questionamentos surgiram-nos e à medida que julgamos necessário virão ao longo do texto.

Inegavelmente, o curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - contribuiu para mudar significativamente nossa visão sobre a Matemática, sobretudo, no aspecto do rigor. E à luz do tema a que nos propomos estudar os Números Inteiros, surge-nos uma oportunidade de responder a nossas indagações sobre as operações com esses números, tanto no âmbito didático-pedagógico quanto no histórico-matemático.

Com isso, buscamos na própria história subsídios para elaborarmos uma proposta que nos auxilie em nossa prática docente a fim de justificarmos as operações neste conjunto, adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros junto aos nossos alunos do Ensino Fundamental. Além disso, oferecer para o leitor a forma que os Números Inteiros se apresentam na Matemática, ou seja, a real definição de um Número Inteiro em uma linguagem acessível ao professor da Educação Básica.

Desta forma, nosso texto será composto por quatro capítulos. No primeiro capítulo, trazemos uma análise do Conteúdo Básico Números inteiros no contexto da educação paranaense. Para tal, observaremos os documentos que norteiam nossa prática, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) e o livro didático que exerce papel fundamental em estudos dessa natureza, pois, é referência para a maioria dos professores. Pretendemos, com isso, detectar possíveis barreiras didático-epistemológicas enfrentadas no tratamento do tema.

No segundo capítulo trazemos o resultado de uma revisão bibliográfica acerca da História da Matemática, pois acreditamos que a história dos números inteiros só será bem compreendida se mostrada dentro de um contexto maior na História da Matemática que, por sua vez, é apenas uma parte da História da Humanidade. Com isso compreender a evolução do conhecimento acerca dos Números Inteiros com suas regras e propriedades operatórias observando os personagens, os percalços e o contexto em que ocorreu a evolução desse conhecimento até o século XIX quando, finalmente, Hermann Hankel (1839 – 1873) apresenta uma construção capaz de definir um número inteiro, junto às justificativas formais para as operações com estes números.

O terceiro capítulo traz uma proposta que busca alinhar a apresentação do ensino do conteúdo Números Inteiros e suas operações, justificando assim, as regras de sinais. Para isso, nos embasamos em trabalhos anteriores das autoras Cyrino e Pasquini, que por sua vez buscam na história da Matemática as ideias de David Hilbert (1862 – 1943) e René Descartes (1596 – 1650), onde os números são considerados segmentos de reta. Elaboramos uma sequência de tarefas que tem por objetivo abordar o conteúdo desejado. As tarefas incluem a utilização de materiais geométricos para que as operações sejam realizadas, já que os números inteiros serão representados por segmentos de retas, seguindo as ideias de Descartes e Hilbert. Com isso oferecemos um contexto para que essas operações sejam abordadas.

No quarto e último capítulo apresentaremos uma construção do Conjunto dos Números Inteiros do ponto de vista matemático, para tal observaremos os trabalhos realizados pelos matemáticos Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 -1916) e Hermann Hankel no século XIX. Julgamos a necessidade deste capítulo para justificar porque após toda a discussão realizada, não devemos apresentar esta abordagem para o estudante da Educação Básica. E, além disso, trazer com a formalidade desejada, a definição de Número Inteiro, objeto matemático principal deste trabalho. Procuramos trazer uma redação que apresenta o assunto de forma explicativa, oferecendo uma série de exemplos, com o objetivo de tornar o tema compreensível, aquém de uma apresentação meramente formal.

No último capítulo apresentamos as considerações finais onde colocamos conclusivamente nossas ideias acerca do estudo empreendido.

CAPÍTULO I
REFLEXÕES ACERCA DO ENSINO DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Neste capítulo pretendemos apresentar as reflexões que construímos ao longo dos anos de nossa atuação na educação básica junto às leituras que realizamos durante o desenvolvimento deste trabalho em relação ao ensino dos números inteiros.

Nossa experiência pedagógica evidencia que ao apresentar aos estudantes os números positivos e negativos como ganhos e perdas, respectivamente, obtemos resultados satisfatórios no que diz respeito à compreensão das propriedades aditivas desses números. E ainda, para compreender que a multiplicação entre números inteiros cujos sinais são opostos possui resultado negativo. No entanto, como podemos construir uma linha de raciocínio coerente para explicar, nesse mesmo contexto, que a multiplicação entre duas perdas é um ganho? Estamos diante de um obstáculo epistemológico didático.

Gaston Bachelard, filósofo francês, que em sua obra "A formação do Espírito Científico", publicada em 1938 definiu pela primeira vez o termo *obstáculo epistemológico*. Segundo Lisboa (2013, p. 3) nessa obra, seu objetivo era interpretar as condições de evolução da ciência, e para isso delineou a noção de obstáculo atualmente presente em estudos educacionais.

> Bachelard indicou que a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de conhecimento passa, na maioria das vezes pela aceitação de conhecimentos anteriores e se depara com certo número de obstáculos. Dessa forma esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, e sim, de conhecimentos antigos, estáticos, que resistem à aceitação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de que detém o conhecimento. (LISBOA, 2013, p. 3)

Os obstáculos didáticos são entraves do conhecimento que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar. No que se refere ao estudo dos obstáculos didáticos, permanece o interesse de estabelecer os limites do paralelismo possível entre o plano histórico do desenvolvimento das ciências e o plano cognitivo da aprendizagem escolar. Se a didática se dispõe a estudar o aspecto evolutivo da formação de conceitos, é conveniente admitir a flexibilização de que os obstáculos não dizem respeito somente às dificuldades históricas e externas ao plano da aprendizagem (IGLIORI, 1999; SCHUBRING, 2000).

Assim percebe-se que as práticas adotadas por professores, muitas vezes influenciadas pelos livros didáticos, utilizam as mesmas estratégias para apresentarem as propriedades aditivas dos números inteiros, quais sejam: a reta enumerada, a temperatura de algumas cidades, a movimentação de contas bancárias ainda que fictícias, entre outras (FIGUEIREDO, 2013). Geralmente alcançam sucesso no aprendizado. Paradoxalmente, os problemas didáticos surgem na evolução natural do assunto para a multiplicação de números negativos. Pois, a contextualização amparada nas estratégias anteriormente usadas torna-se inviável neste novo cenário (FIGUEIREDO, 2013; CYRINO; PASQUINI, 2010; GLAESER, 1981).

> Por um processo de generalização indutiva a criança vai tomando consciência de variações extrínsecas impostas pelos diferentes resultados a que chega os problemas que resolve, até a construção do sistema dos números inteiros, como resultado de integração de todas as suas propriedades, por um processo de generalização construtiva porque baseada em deduções necessárias.
> Assim, a compreensão do que seja um número negativo avança paulatinamente, por abstrações e generalizações (FIGUEIREDO, 2013, p.5).

Dessa forma, à medida que a abordagem desses novos números avança, a compreensão por parte do aluno passa por abstrações e generalizações até então desejadas pelo professor.

Nota-se que na multiplicação entre números negativos há uma quebra do elo que tange a metodologia de ensino até então empregada, com isso, “menos vezes menos resulta em mais” torna-se uma regra a ser aceita sem relação alguma com o que foi aprendido e entendido nas operações de adição e subtração de números positivos e negativos e, na multiplicação entre números de sinais opostos (Teixeira, 1993). Ou seja, se considerarmos um operador multiplicativo como aquele que indica o número de vezes que o um algo se repete, ao mesmo tempo em que produz transformações de aumento e redução no resultado dependendo dos sinais em jogo.

> Quando o operador multiplicativo é positivo, a assimilação é fácil, porque é possível até usando modelos mostrar que 2.(–5) ou 2.(+5) significa repetir duas vezes o número dentro de sua região: ao multiplicar negativo o resultado permanece na região negativa, valendo o mesmo para o positivo. Entretanto, quando o operador multiplicativo é negativo não é possível simplesmente imaginar números que se multiplicam na mesma região, mas, além disso, que o operador transforma o resultado obtido, mudando-o de região, ou seja, –2.(+5) = –10 e –2.(–5) = +10 (TEIXEIRA, 1993, p. 65)

O problema realmente aparece no produto de dois fatores que são negativos, pois, não é mais possível manter a estrutura didática usada até então e o professor acaba modificando-a, pois ao que tudo era claro e lógico, agora vem à tona a sensação de estar usando algo outorgado pela força. Nessa perspectiva, recursos como a "regra da amizade" ganham espaço na prática pedagógica.

A "regra da amizade" utiliza-se de uma convenção ao estabelecer que se ser amigo vale o sinal (+) e inimigo vale o sinal negativo (–) então:

Amigo (+) do meu amigo (+) é meu amigo (+), ou seja, (+).(+) = (+)

Amigo (+) do meu inimigo (–) é meu inimigo (–), ou seja, (+).(–) = (–)

Inimigo (–) do meu amigo (+) é meu inimigo (–), ou seja, (–).(+) = (–)

Inimigo (–) do meu inimigo (–) é meu amigo (+), ou seja, (–).(–) = (+)

Por tais razões, observamos alunos já no Ensino Médio apresentando dificuldades em operar com números negativos, apesar do conhecimento das regras de sinais (LISBOA, 2013).

O exposto acima concatena e justifica nossas constatações acerca das dificuldades que grande parte dos alunos de Ensino Médio apresenta ao lidar com as operações que envolvem números negativos. Apesar de saberem *recitar* as regras de sinais, não demonstram compreensão a ponto de utilizá-las adequadamente quando desejado.

Vale ratificar que as estratégias de ensino dos números inteiros até a multiplicação de números negativos estão coerentes ao nosso ponto de vista, pois resgata os conhecimentos já adquiridos pelos alunos sobre números naturais. E a construção abstrata de números inteiros é uma ampliação dos naturais, deste modo é necessário mostrar que as leis e regras que regem o conjunto dos números naturais servem sem prejuízo aos números inteiros (TEIXEIRA, 1993).

Nessa linha de análise, os sinais herdados dos números naturais são exclusivamente de natureza operatória de sentido intuitivo completo, ou seja, "acrescentar algo a" ou "tirar algo de". No entanto, no âmbito dos números inteiros a adição não é sinônima de acréscimo nem subtração de decréscimo. Este, provavelmente, é o primeiro desafio do docente ao abordar este conteúdo.

> Na realidade, o conceito de adição precisa ser ampliado, não se limitando à ideia de acrescentar. Na medida em que abstrai das diferentes associações de números positivos e negativos, um invariante, expresso na ideia de operador aditivo que produz transformações de acordo com elementos em jogo, é possível chegar às generalizações expressas nas regras de adição: sinais iguais somam-se e conserva-se os sinais, sinais diferentes ou opostos subtraem-se e conserva-se o sinal do se módulo maior. A adição deixa de ser apenas acrescentar (um dos casos) para ter um novo significado, mais genérico, de associação ou composição. (TEIXEIRA, 1993, p.64)

Nesse passo, a subtração ganha outro significado no domínio dos números inteiros em comparação ao domínio dos números naturais, deixando de ser apenas o ato de tirar certa quantia menor de uma maior, ou de achar complemento entre dois números. A nova ideia de subtração ampara-se na operação inversa da adição, ou seja, a soma de duas grandezas resulta em uma terceira, então a diferença desta terceira pela primeira resulta na segunda ou a diferença desta terceira com a segunda resulta na primeira.

> Para operar com inteiros é fundamental que o esquema de assimilação para subtração esteja estruturado com base na abstração do invariante da inversão e não simplesmente no conceito de tirar. Subtrair inteiros significa trabalhar com operadores negativos, ou seja, números que operam transformações de oposição [...] a generalização do caráter de inversão presente na subtração para os inteiros é muito mais complexa, porque é preciso identificar com clareza a operação que está em jogo, tarefa não muito simples quando se trata de operar com números positivos e negativos. (TEIXEIRA, 1993, p.64 - 65)

No âmbito dos números naturais é concebido o conceito de operador multiplicativo (quantas vezes um conjunto se repete) que equivale a adição repetida. Porém, essa concepção de multiplicação precisa ser mudada, mas, isso é um obstáculo didático tendo à luz a herança trazida dos números naturais que mostra a ideia de multiplicação como algo "sólido" e claro. Pois, agora, no conjunto dos números inteiros, multiplicar significa número de vezes que um conjunto se repete simultaneamente em que produz transformações de aumento ou diminuição no resultado, dependendo dos sinais do jogo (TEIXEIRA, 1993).

Lakatos (1978) descreve uma análise epistemológica importante para o entendimento da evolução conceitual da matemática através de processo de elaboração de suas provas e demonstrações. Ele constata que o desenvolvimento das provas se faz por uma sequência de rupturas parciais dos argumentos estabelecidos até então e, por outro lado, procura manter uma continuidade no espaço dos problemas considerados.

Sendo assim, a aprendizagem operatória dos números inteiros, tendo como pressuposto a compreensão do seu significado, supõe que o aluno domine gradativamente as propriedades que regem os inteiros como sistema (TEIXEIRA, 1993).

A criança na tentativa de preencher lacunas ou resolver contradições deixada pelos números naturais onde eles não se aplicam, como por exemplo, "*a*–*b*", com "*b>a*", pode admitir a realidade desse novo resultado, até então inexistente, não demonstrado e reconheça a partir daí uma nova classe de números. Com isso, espera-se a abstração reflexiva que esses novos números tem, a característica fundamental de serem menores que qualquer número positivo, ou seja, a existência do número negativo está intimamente ligada à do número positivo.

Entretanto, as dificuldades apresentadas pelos alunos ao se depararem com as operações matemáticas evolvendo números negativos é totalmente justificável, pois, a história mostra que foram necessários mais de mil anos para que os números negativos fossem totalmente aceitos. Já nos adiantamos a anunciar o Capítulo II que é capaz de trazer alguns aspectos históricos que mostram diversos personagens e fatos associados ao assunto. Por outro lado, cabe-nos refletir o quanto exigimos de nossos alunos ao esperar que possam aceitar e compreender todo o conhecimento que cercam esses números e as suas propriedades em poucos meses em uma idade escolar onde tudo ainda demanda de amadurecimento e maturidade, já que estamos lidando com conceitos abstratos da Matemática (TEIXEIRA, 1993).

Um estudo detalhado de Glaeser (1981) observou o desenvolvimento histórico-epistemológico, desde épocas remotas até o século XIX, dos números inteiros e como resultado apontou seis obstáculos que dificultaram a compreensão desses números, quais sejam:

1- Inaptidão para manipular quantidades isoladas;

2- Dificuldade em dar sentido a quantidades negativas isoladas;

3- Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais diferentes; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números;

4- Ambiguidade dos dois zeros: zero absoluto e zero origem;

5-Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos;

6- Desejo de um modelo unificador. É a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante. (GLAESER, 1981)

Entendemos que estudos nesta direção podem nos levar a estabelecer diferentes modos de abordarmos um conteúdo assim como relata LISBOA (2013, p. 3) ao concluir que “o desenvolvimento histórico dos números negativos é marcado por obstáculos epistemológicos que merecem ser estudados e analisados”.

De um modo geral, percebemos diferentes autores ao longo de nossos estudos que se preocupam com o tema Números Inteiros. Entretanto, com o objetivo de trazer este tema para a nossa realidade local, qual seja, a escola pública do Estado do Paraná, buscamos investigar como este assunto se apresenta no nosso Estado em termos de diretrizes curriculares, e como deve ser considerado em sala de aula. Com isso, recorremos aos documentos norteadores de nossa prática a fim de promover uma compreensão mais ampla sobre o assunto. O texto que segue traz as informações que julgamos necessárias para dar continuidade a esse discurso.

1.1 OS NÚMEROS INTEIROS E A ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

Podemos dizer que o conteúdo básico Números Inteiros deve ser trabalhado no sétimo ano, conforme observamos na tabela de conteúdos de Matemática contida no DCE – Diretriz Curricular da Educação Básica: Matemática. Espera-se que toda abordagem seja capaz de tornar o aluno apto a reconhecer os números inteiros em diferentes contextos, além de realizar operações com esses números.

Tabela 1: Conteúdos de Matemática do Sétimo Ano

6ª SÉRIE/ 7º ANO	NÚMEROS E ÁLGEBRA	• Números Inteiros; • Números Racionais; • Equação e Inequação do 1º grau; • Razão e proporção; • Regra de três simples.	• Reconheça números inteiros em diferentes contextos; • Realize operações com números inteiros; • Reconheça números racionais em diferentes contextos; • Realize operações com números racionais; • Compreenda o princípio de equivalência da igualdade e desigualdade; • Compreenda o conceito de incógnita; • Utilize e interprete a linguagem algébrica para expressar valores numéricos através de incógnitas; • Compreenda a razão como uma comparação entre duas grandezas numa ordem determinada e a proporção como uma igualdade entre duas razões; • Reconheça sucessões de grandezas direta e inversamente proporcionais; • Resolva situações-problema aplicando regra de três simples.
	GRANDEZAS E MEDIDAS	• Medidas de temperatura; • Medidas de ângulos.	• Compreenda as medidas de temperatura em diferentes contextos; • Compreenda o conceito de ângulo; • Classifique ângulos e faça uso do transferidor e esquadros para medi-los;
	GEOMETRIAS	• Geometria Plana; • Geometria Espacial; • Geometrias não-euclidianas.	• Classifique e construa, a partir de figuras planas, sólidos geométricos; • Compreenda noções topológicas através do conceito de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados.
	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO	• Pesquisa Estatística; • Média Aritmética; • Moda e mediana; • Juros simples.	• Analise e interprete informações de pesquisas estatísticas; • Leia, interprete, construa e analise gráficos; • Calcule a média aritmética e a moda de dados estatísticos; • Resolva problemas envolvendo cálculo de juros simples.

Por outro lado, julgamos necessário recorrer a fontes que nos trouxessem o modo pelo qual esse assunto é abordado na escola pública. Dessa forma, ressaltamos a importância do livro didático reconhecendo que, em muitos casos, pesquisas mostram-no como o único instrumento que traz o que desejamos, ou seja, o livro didático é uma fonte de pesquisa de notório valor para pesquisas educacionais. Com isso, apresentamos nos parágrafos a seguir, ainda que de modo descritivo, a forma pela qual os números negativos se apresentam em uma determinada coleção quando nos referimos aos livros didáticos das escolas públicas do Estado do Paraná. Para isso consultamos o Guia do Livro Didático frente ao PNLD[1].

[1] PNLD: Plano Nacional do Livro Didático - A última escolha de livros didáticos, para os anos finais do Ensino Fundamental, ocorreu no final do ano letivo de 2013 para o próximo triênio (2014, 2015 e 2016). Cada escola recebe previamente às obras o “Guia de livros Didáticos PNLD 2014” que explica, orienta e estipula com todos os entes envolvidos na escolha do livro didático, desde o Ministério da Educação até o professor, para o próximo triênio. Cada escola recebeu, também, um guia que orienta os professores por disciplina, não obstante recorreremos somente ao guia específico de matemática “Guia de Livros Didáticos PNLD 2014 – Matemática”.

2.1 Os números inteiros no cenário do livro didático

Um dos livros presentes na lista do PNLD e que é adotado em escolas de nossa região faz parte da coleção "*Matemática: teoria e contexto*". Particularmente, este livro é utilizado em todos os sétimos anos das escolas da cidade de Ribeirão Claro, Paraná, nos anos de 2014 e 2015, e será usado no ano de 2016, onde atuamos como professor da disciplina de Matemática.

Figura 1: Capa do Livro

Os autores dessa obra são Marília Centurion, licenciada e bacharel em Matemática pela FFCLM – São Paulo – SP, professora e assessora de Ensino de Matemática em diversas escolas; e José Jakubovic, licenciado em Matemática pela FFCLM – São Paulo – SP, que foi professor e assessor de Ensino de Matemática em diversas escolas. Trata-se de uma coleção da Editora Saraiva composta por quatro livros, um para cada ano do Ensino Fundamental onde o conteúdo que nos interessa está contemplado no livro de sétimo ano.

Utilizamos o exemplar do professor que foi publicado no ano de 2012 e que é composto por sete capítulos. Diferentemente do livro dos alunos, este exemplar, contém, ao final, um apêndice com noventa e seis páginas destinadas à orientação do professor de Matemática, intitulado "Manual do Professor". Para o presente trabalho faremos uso deste manual.

Os números inteiros são abordados no primeiro capítulo, dividido em dez seções, nesta ordem: (1) Números positivos e números negativos, (2) A representação geométrica, (3) Os números também tem sua história, (4) Adição de inteiros, (5) Subtração de inteiros, (6) Adição e subtração: relações e propriedades, (7) Multiplicação de inteiros, (8) Divisão exata de inteiros e (9) Potenciação e raiz quadrada, (10) Propriedades da potenciação. Com base em nossos objetivos faremos uma análise descritiva até a seção sete.

A seção "Números inteiros" está apoiada nas ideias intuitivas de perdas e ganhos e em diversas situações, como: jogos, débitos e créditos bancários, botões de um elevador indicando andares de um prédio, altitude, temperatura, datas etc. Os autores afirmam pelo manual do professor (p.26) que "neste capítulo, merecem ser destacadas as justificativas verbais intuitivas para as adições e/ou subtrações. Por exemplo, se devo 2 para o banco e ainda retiro 3, fico devendo 5. Em linguagem matemática: $-2 - 3 = -5$" (CENTURION e JAKUBOVIC, 2012, p.26)*.

Na seção seguinte (2) os autores dão um enfoque geométrico para os números inteiros, para tal, utilizam a reta orientada com origem no zero. Eles afirmam que essa estratégia é um interessante recurso para explorar vários aspectos do conteúdo como:

> - Visualizar pontos de referência (origem) a partir do qual se definem os dois sentidos;
> - Identificar um número e seu oposto (simétrico): números que se situam à mesma distância do zero;
> - Reconhecer a ordenação dos inteiros, dados dois números inteiros quaisquer, o menor é o que está à esquerda (no sentido positivo da reta numérica), assim dados dois números negativos, será maior o que está mais próximo do zero;
> - Comparar números inteiros e identificar diferenças entre eles;
> - Inferir regras para operar com adição e subtração. (CENTURION e JAKUBOVIC, 2012, p. 26)*

A localização dos números em uma reta orientada, utilizando a reta como um modelo para o conjunto dos números reais, nos oferece uma situação capaz de mostrar o oposto de um número inteiro, realizar a comparação de números inteiros e introduzir a ideia de valor absoluto.

Nas seções (4) Adição de inteiros e (5) Subtração de inteiros é apresentada uma sequência de situações de juntar bolinhas verdes (unidade positiva)

* Manual do Professor, p. 26
* Manual do Professor, p. 26

com bolinhas vermelhas (unidade negativa), de modo a propiciar a compreensão dos processos do cálculo.

> A abordagem dada à operação de adição de inteiros é com material concreto, onde serão confeccionados bolinhas verdes e vermelhas, onde cada bolinha verde representa uma unidade positiva e cada bolinha vermelha apresenta uma unidade negativa, afinal a adição é uma operação utilizada para juntar ou acrescentar quantidades e uma unidade positiva e uma unidade negativa se anulam. (CENTURION e JAKUBOVIC, 2012 p.27) .

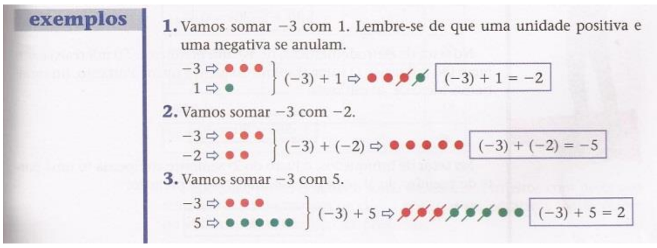


Figura 2: Atividade ilustrativa

> Dessa maneira, partindo da exploração das ideias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos em um jogo, eles podem concluir, após alguma discussão, que, por exemplo, (–3) + (–2) = –5 (uma vez que, juntando-se 3 bolinhas vermelhas com 2 bolinhas vermelhas, obtêm-se 5 bolinhas vermelhas) [...] Da mesma maneira como foi abordada a adição, a subtração também é apresentada por, bolinhas, positivas e negativas, de modo que os alunos possam fazer analogia entre números positivos e negativos e o uso das bolinhas. (CENTURION e JAKUBOVIC, 2012 p.27)*

Na seção seguinte, a seção (5) Subtração de inteiros, os autores explicam que,

> Da mesma maneira como foi abordada a adição, a subtração também é apresentada por meio de bolinhas, positivas e negativas, de modo que os alunos possam fazer analogia entre números positivos e negativos e o uso das bolinhas. [...] Na vivência das situações de adição e subtração de créditos e débitos com as cédulas ou bolinhas, os alunos envolvem-se em uma fase de investigação [...] (CENTURION e JAKUBOVIC, 2012, p.27)*

* Manual do Professor, p. 27

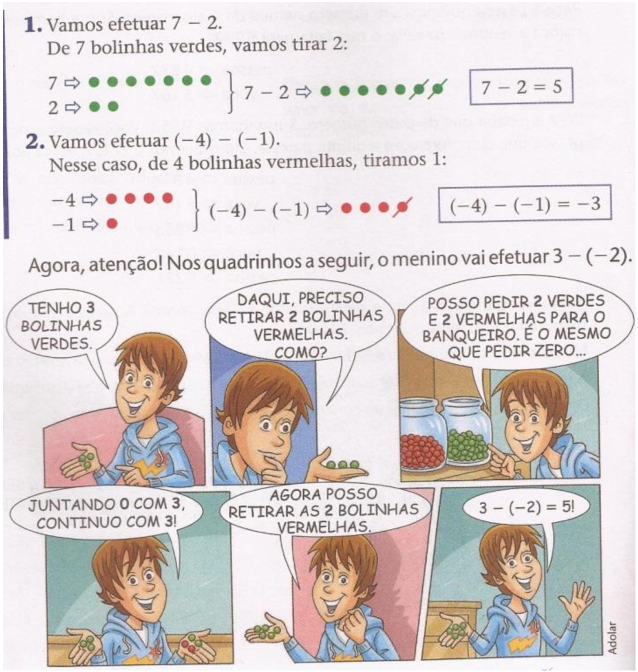


Figura 3: Atividade Ilustrativa

O capítulo seguinte, (6) Adição e subtração: relações e propriedades, é composto basicamente pela exposição das propriedades da adição de números inteiros – comutativa, associativa, existência do elemento oposto e do elemento neutro.

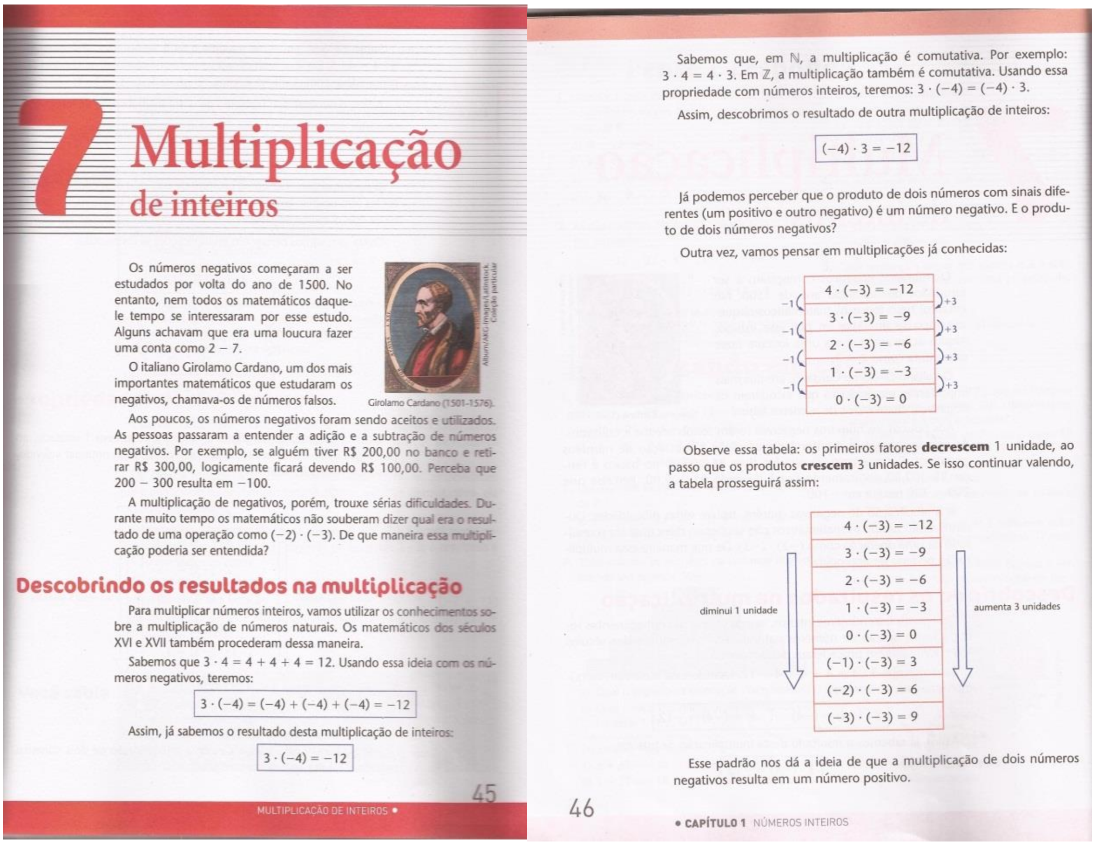
Até esse ponto os autores apresentam os números inteiros em vários contextos, propõem atividades que ilustram as regras operatórias de adição e subtração entre os inteiros, junto à atividades diversas de diferentes níveis de dificuldades.

A seção intitulada (7) Multiplicação de inteiros, aborda a multiplicação dos números inteiros. CENTURION e JAKUBOVIC (2012 p.27)* afirmam que "é importante justificar com cuidado as regras de sinais para a multiplicação: por que o produto de dois números negativos é positivo? Não convém ressaltar a dificuldade e apenas dar a regra".

O livro expõe o conteúdo com uma abordagem basicamente intuitiva, encontrada nas páginas quarenta e cinco e quarenta e seis, com intuito de justificar que o produto de dois números negativos resulta em um valor positivo. Os autores iniciam o capítulo com uma apresentação que recorre, mesmo que brevemente, à História da Matemática.

Conforme ilustrado:

* Manual do Professor, p. 27



7 Multiplicação de inteiros

Os números negativos começaram a ser estudados por volta do ano de 1500. No entanto, nem todos os matemáticos daquele tempo se interessaram por esse estudo. Alguns achavam que era uma loucura fazer uma conta como $2 - 7$.

O italiano Girolamo Cardano, um dos mais importantes matemáticos que estudaram os negativos, chamava-os de números falsos.

Album/AKG-images/Latinstock. Coleção particular

Girolamo Cardano (1501-1576).

Aos poucos, os números negativos foram sendo aceitos e utilizados. As pessoas passaram a entender a adição e a subtração de números negativos. Por exemplo, se alguém tiver R$ 200,00 no banco e retirar R$ 300,00, logicamente ficará devendo R$ 100,00. Perceba que $200 - 300$ resulta em -100.

A multiplicação de negativos, porém, trouxe sérias dificuldades. Durante muito tempo os matemáticos não souberam dizer qual era o resultado de uma operação como $(-2) \cdot (-3)$. De que maneira essa multiplicação poderia ser entendida?

Descobrindo os resultados na multiplicação

Para multiplicar números inteiros, vamos utilizar os conhecimentos sobre a multiplicação de números naturais. Os matemáticos dos séculos XVI e XVII também procederam dessa maneira.

Sabemos que $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$. Usando essa ideia com os números negativos, teremos:

$$\boxed{3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12}$$

Assim, já sabemos o resultado desta multiplicação de inteiros:

$$\boxed{3 \cdot (-4) = -12}$$

45 MULTIPLICAÇÃO DE INTEIROS •

Sabemos que, em $\mathbb{N}$, a multiplicação é comutativa. Por exemplo: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$. Em $\mathbb{Z}$, a multiplicação também é comutativa. Usando essa propriedade com números inteiros, teremos: $3 \cdot (-4) = (-4) \cdot 3$.

Assim, descobrimos o resultado de outra multiplicação de inteiros:

$$\boxed{(-4) \cdot 3 = -12}$$

Já podemos perceber que o produto de dois números com sinais diferentes (um positivo e outro negativo) é um número negativo. E o produto de dois números negativos?

Outra vez, vamos pensar em multiplicações já conhecidas:

	$4 \cdot (-3) = -12$	
-1	$3 \cdot (-3) = -9$	$+3$
-1	$2 \cdot (-3) = -6$	$+3$
-1	$1 \cdot (-3) = -3$	$+3$
-1	$0 \cdot (-3) = 0$	$+3$

Observe essa tabela: os primeiros fatores **decrescem** 1 unidade, ao passo que os produtos **crescem** 3 unidades. Se isso continuar valendo, a tabela prosseguirá assim:

diminui 1 unidade	$4 \cdot (-3) = -12$	aumenta 3 unidades
	$3 \cdot (-3) = -9$	
	$2 \cdot (-3) = -6$	
	$1 \cdot (-3) = -3$	
	$0 \cdot (-3) = 0$	
	$(-1) \cdot (-3) = 3$	
	$(-2) \cdot (-3) = 6$	
	$(-3) \cdot (-3) = 9$	

Esse padrão nos dá a ideia de que a multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo.

46 • CAPÍTULO 1 NÚMEROS INTEIROS

Figura 3: Atividade Ilustrativa

Na obra “*Matemática: teoria e contexto*”, CENTURION e JAKUBOVIC (2012, p.27)[*] orientam que “é fundamental que, antes da explicação da ‘regra prática’ apresentada na página 47, os alunos compreendam o padrão da sequência das multiplicações apresentado nas tabelas”.

Ratificando o raciocínio os próprios autores expõem no manual do professor, que:

> Os quadros de multiplicação de inteiros da página dão uma razão para que o produto de negativos seja positivo, a partir da análise de padrão estabelecido, embora isso não seja uma demonstração matemática. Para explicar a ideia que os quadros apresentam, sugerimos uma discussão coletiva, com o professor fazendo perguntas, tais como: ‘E agora, como deve continuar essa sequência?’
> [...] Uma terceira maneira de tratar essa situação consiste em mostrar que a manutenção da distributividade exige que o produto de negativos seja positivo. Veja:
> –3. [2+(–2)] = -3 . 0 = 0, Nessa mesma expressão, se valer a distributividade, é preciso ter:
> –3.[2+(–2)] = –3 . 2 + (–3) . (–2) = –6 +(–3).(–2), o segundo produto precisa resultar em 6 positivo, porque já sabemos que, no

[*] Manual do Professor, p.27

> final, o resultado é zero. (CENTURION e JAKUBOVIC, 2012 p.27)[*]

A partir das palavras acima os autores propõem um reconhecimento de padrões para a regra de sinal "(–).(–)=(+)". Gostaríamos de tecer algumas considerações acerca desta exposição. Julgamos válido o recurso do reconhecimento de padrões para o ensino de Matemática, até porque entre as várias definições sobre o que é Matemática, o reconhecimento de padrões faz parte da definição para esta palavra. Mais ainda, não estamos desvinculando a matemática dos seus padrões, ou criticando o recurso utilizado na obra, inclusive reconhecemos a importância desse recurso do qual utilizamos constantemente em nossa prática docente. A tônica do nosso discurso situa-se na constatação de algo recorrente nas abordagens do conteúdo números inteiros onde o elo da corrente didática utilizada para a apresentação, reconhecimento e propriedades aditivas é quebrado na passagem para as propriedades multiplicativas.

A partir da nossa experiência com abordagens variadas do assunto e como resultado de nosso estudo, ressaltamos que nosso objetivo ao trazer o livro didático resume-se a uma ilustração para as observações expostas no texto, pois ela segue a mesma linha da maioria dos livros didáticos que conhecemos que abordam os números negativos e suas operações. Ou seja, ao abordar os números negativos os autores seguem uma linha de raciocínio, ou um contexto, capaz de mostrar satisfatoriamente as regras da adição e subtração de números inteiros, porém, não é capaz de dar continuidade à operação de multiplicação e de divisão, interrompendo qualquer que seja o tratamento. Sendo necessário um novo contexto, outra representação para os números inteiros a fim de que sejam realizadas essas operações.

[*] Manual do Professor, p. 27

CAPÍTULO II

OS NÚMEROS INTEIROS: UM PASSEIO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Rever a trajetória traçada pela humanidade na descoberta ou criação dos conhecimentos produzidos por ela, particularmente dos objetos matemáticos, em uma análise fundamentalmente crítica pode ter papel importante no sentido de ampliar o campo de visão acerca da realidade, o que pode auxiliar todos os entes envolvidos no processo de ensino aprendizagem.

Nessa tônica, trazemos neste capítulo o resultado de nossos estudos ao recorrermos à história da Matemática, em um longo período cronológico, desde os seus primórdios na busca de algo que faça sentido para ampliarmos nossa visão sobre as dificuldades, indagações e incompreensões que os números inteiros, notoriamente os negativos, supostamente causaram e ainda causam nos estudiosos de Matemática.

Em todas as formas de cultura e sociedade, mesmo as mais rudimentares buscadas no Período Pré-Histórico: Período Paleolítico, Período Neolítico e Idade dos Metais, o homem utiliza processos de contagem oriundos de um conjunto familiar (chamado conjunto de contagem): os dedos da mão, do pé, pedras etc. Pois, o ser humano possui habilidades naturais para pensar, logo compreende noções quantitativas: muito, pouco, grande, pequeno etc. (EVES, 2011).

Com o início da Idade Antiga (por volta de 4000 a.C.) face às necessidades de contar uma quantidade maior de objetos e sistematizar este processo, povos de diversas partes do mundo desenvolveram vários *organizações*, do que hoje, chamamos de sistemas de numeração. Basicamente estabelecia-se um conjunto de símbolos, juntamente com algumas regras que permitiam contar, representar e enunciar os números, como, por exemplo, o sistema sexagesimal posicional da Antiga Babilônia, os Sistemas de Numeração do Antigo Egito e Sistema hindu-arábico popularizado até os dias atuais.

> A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Ganges no sul da Ásia central e o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental. (EVES, 2011, p.57)

A ênfase inicial da Matemática ocorreu na aritmética, no que se refere a contagem, e nas mensurações decorrentes de situações práticas. Segundo Katz (1998) essa matemática existia em praticamente todas as civilizações antigas, porém seu domínio era restrito a alguns sacerdotes e a escribas - membros do governo, cuja função era manusear a Matemática em campos da organização como cobrança de impostos, medição de áreas, calendário, entre outros. Nesse contexto, desenvolve-se o sentido mais aprofundado de abstração Matemática e, que até certo ponto, passa-se a estudar a ciência por si mesma (EVES, 2011).

A fim de evitar possíveis confusões convém salientar que textos históricos usam ao composto *números inteiros* para referência a números não fracionários, ou frações. Neste trabalho, por número inteiro compreendemos um elemento do conjunto dos Números Inteiros.

A seguir faremos um breve relato organizado da história da Matemática, ora em ordem cronológica, ora por meio de civilizações, observando fundamentalmente alguns aspectos, sobretudo o desenvolver da aritmética. Para tal, procuramos seguir os períodos matemáticos com as respectivas civilizações, em datas aproximadas, conforme a figura a seguir:

EGÍPCIO E BABILÔNICO (3000 a.C.-260 d.C.)	*GREGO* (600 a.C.-450 d.C.)	*CHINÊS* (1030 a.C.-1644 d.C.)	*HINDU* (200 a.C.-1250 d.C.)
Matemática essencialmente empírica, ou indutiva ——— Introdução dos sistemas de numeração antigos (decimal e sexagesimal) ——— Aritmética simples, geometria prática ——— Tábuas matemáticas, coleções de problemas matemáticos ——— Fontes primárias principais: Moscou (1850 a.C.), Rhind (1650 a.C.) e outros papiros egípcios; tábulas cuneiformes babilônicas (2100 a.C. a 1600 a.C. e 600 a.C. a 300 d.C.)	Introdução e depois desenvolvimento significativo da geometria dedutiva (Tales, 600 a.C; Pitágoras, 540 a.C.) ——— Início da Teoria dos números (Escola Pitagórica, 540 a.C.) ——— Descoberta das grandezas incomensuráveis (Escola Pitagórica, antes de 340 a.C.) ——— Sistematização da lógica dedutiva (Aristóteles, 340 a.C.) ——— Desenvolvimento axiomático da geometria (Euclides, 300 a.C.) ——— Germes do cálculo integral (Arquimedes, 225 a.C.) ——— Geometria das secções cônicas (Apolônio, 225 a.C.) ——— Geometria prática (Herão, 75 d.C.) ——— Trigonometria (Hiparco, 140 a.C.; Menelau, 100 d.C.; Ptolomeu, 150 d.C.) ——— Teoria dos Números, sincopação da álgebra (Diofanto, 250 d.C.)	Grandemente isolada das correntes principais do desenvolvimento matemático ——— Sistema de numeração decimal, numerais em barra, exemplo mais antigo de quadrado mágico ——— *Chou-peï*, mais antigo dos clássicos matemáticos chineses ——— *Nove capítulos sobre a Arte da Matemática* (100 a.C-?) ——— Método de Horner (Ch'in Kiu-Shoo, 1247) ——— Triângulo aritmético de Pascal, teorema binomial (Chu Shï-kié, 1303) ——— Jesuítas missionários entram na China no século XVI.	Introdução do sistema de numeração indo-arábico (antes de 250 a.C.) ——— Números negativos e invenção do zero (últimos séculos a.C.) ——— Desenvolvimento de algoritmos de cálculo antigos (900-1000 d.C.) ——— Álgebra sincopada, equações indeterminadas. (Brahmagupta, 628 d.C.; Bhāskara, 1150 d.C.) ——— *ÁRABE* (650-1200 d.C.) ——— Preservadores da aritmética hindu e da geometria grega (incentivadas por califas que prestigiavam a cultura, como Harun al-Rashid, 790 d.C.) ——— Tratado de álgebra influente e livro sobre os numerais indus (Al-Khovarizmi, 820 d.C.) ——— Tábuas trigonométricas (Abû'l Wefâ, 980 d.C., lugh Beg, 1435 d.C.) ——— Solução geométrica de equações cúbicas, (1100 d.C.)

ALTA IDADE MÉDIA (450-1120 d.C.)	*MODERNO* (Primeira metade, 1450 a 1700 d.C.)	*MODERNO* (Segunda metade, 1700 d.C. até o presente)
Período estéril para o saber e a cultura na Europa Ocidental Preservação em monastérios de um fio delgado do saber e da cultura gregos e latinos *PERÍODO DE TRANSMISSÃO* (950-1500 d.C.) O saber e a cultura preservados pelos árabes são transmitidos lentamente à Europa Ocidental Tradução de trabalhos árabes (Platão de Tivoli, 1120 d.C.; Robert de Chester, 1140 d.C.; Adelardo de Bath, 1142 d.C.; Geraldo de Cremona, 1150 d. C.; Campanus, 1260 d.C.) Luta pelo sistema de numeração indo-arábico (Fibonacci, 1260 d.C.) Século XIV, século da Peste Negra Primeiro livro de matemática impresso no Mundo Ocidental (*Aritmética de Treviso*, 1478) Primeira edição impressa dos *Elementos* de Euclides (Tradução de Campanus, 1482 d.C.)	Trigonometria antiga (Regiomontanus, 1464; Copérnico, 1530; Rhaeticus, 1550) Primeiras aritméticas (Borghi, 1484; Widman, 1489; Pacioli, 1494; Köbel, 1512; Riese, 1518; Tonstall, 1522; Buteo, 1525) Início do simbolismo algébrico (Recorde, 1557, Bombelli, 1572; Viète, 1579, Oughtred, 1631) Solução algébrica das equações cúbicas e quárticas (Tartaglia, Cardano, Ferrari, 1545) Desenvolvimento da álgebra clássica (Viète, 1580, Harriot, 1631) Frações decimais (Stevin, 1585) Impulso na ciência (Galileu, 1600; Kepler, 1609) Logaritmos (Napier, 1614; Briggs, 1615) Teoria dos Números moderna (Fermat, 1635) Geometria analítica (Fermat, 1629; Descartes, 1637) Início da geometria projetiva (Desargues, 1639; Pascal, 1648) Probabilidade matemática (Fermat e Pascal, 1654) Cálculo (Fermat, 1629; Cavalieri, 1635; Barrow, 1669; Leibniz, 1684; Newton, 1687)	Cálculo aplicado (Jakob e Johann Bernoulli, 1700; Clairaut, 1743, d'Alembert, 1743; Euler, 1750; Lagrange, 1788; Laplace, 1805; Fourier, 1822; Legendre, 1825; Green, 1828; Poisson, 1831) Séries infinitas (Taylor, 1715; Maclaurin, 1742; Fourier, 1822) Geometria não euclidiana (Saccheri, 1733; Lambert, 1770; Legendre, 1794; Gauss, 1800; Lobachevsky, 1829; J. Bolyai, 1832) Topologia (Euler, 1736; Gauss, 1799; Listing, 1847; Riemann, 1851; Möbius, 1865; Poincaré, 1895) Geometria analítica avançada (Monge, 1795; Plücker, 1826; Möbius, 1827) Análise (Lagrange, 1797; Abel, 1826; Cauchy, 1827; Riemann, 1851; Dedekind, 1872; Weierstrass, 1874; Lebesgue, 1903) Geometria projetista (Poncelet, 1822; Gergonne, 1826; Steiner, 1834; von Staudt, 1847; Clifford, 1878) Máquinas de calcular modernas (Babbage, 1823; ASCC, 1944; ENIAC, 1945; SSEG; EDVAC; MANIAC; UNIVAC) O despontar da álgebra moderna (Galois, 1832; Hamilton, 1843; Grassmann, 1844; Cayley, 1857) Lógica matemática (Boole, 1847; De Morgan, 1847; Schröder, 1890; Peano, 1894; Whitehead e Russell, 1910; Lukasievicz, 1921 Teoria dos conjuntos (Cantor, 1874; Hausdorf, 1914) Fundamentos e filosofias da matemática (Frege, 1884-1903; Hilbert, 1899; Brouwer, 1907; Whitehead e Russell, 1910; Gödel, 1931 Espaços abstratos (Fréchet, 1906; Hausdorff, 1914; Banach, 1923)

fonte 1: observada em Eves (2011, p. 46-47)

2.1 Mesopotâmia e Egito

Nossa trajetória começa por volta de 3000 anos antes da era cristã na Mesopotâmia, particularmente na Babilônia. Posteriormente, visitaremos a cultura egípcia à qual também se sobressaiu intelectualmente na Idade Antiga.

Iniciando nossa discussão, nas terras entre os rios Tigre e Eufrates, percebemos sociedades que se baseavam na agricultura como elemento econômico fundamental. Os povos dessa época tinham a concepção de desenvolvimento nas forças divinas, mesmo sem acreditar na vida pós-morte, e se dividiam em cidades-Estado, cujo termo designava regiões controladas exclusivamente por uma cidade e cada núcleo urbano constituía-se num ambiente político autônomo e independente. Porém, com o advento do século XVIII a.C. forma-se uma estrutura política imperial, conhecida como Império Babilônico (CARDOSO, 1986).

Informações sobre os babilônicos deram-se de escavações iniciadas no século XIX, onde textos em tábuas (ou tabuletas) de argila foram encontrados nos últimos anos. Várias dessas tábuas são dedicadas exclusivamente a problemas matemáticos (KATZ, 2010).

Apesar de as tábuas mais antigas mostrarem que os primeiros babilônicos tratavam a Matemática de maneira indutiva, outras revelam habilidade com um sistema sexagesimal aplicado a transações comerciais. As tábuas mostram que os mesopotâmicos antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de venda e endossos (EVES, 2011). Problemas de ordem geométrica que hoje conhecemos por equações quadráticas também foram observados pela civilização babilônica.

Cumpre examinarmos nesse passo que estas habilidades Matemáticas eram conhecidas dos mais recentes babilônicos tendo em vista que as tabuletas mais antigas eram datadas de 2100 a.C. e as mais recentes 300 d.C.. De um modo geral, apesar história babilônica ser extremamente rica, vamos continuar nossa busca sobre os números inteiros agora no Egito, cerca de 1850 a.C. de onde temos relatos (BOYER, 1996).

A sociedade egípcia, assim como outras sociedades hidráulicas, que desenvolviam relações íntimas com os rios e seus respectivos territórios teve todo seu desenvolvimento dependente do rio Nilo. A vida das comunidades, cada uma em seu território dependiam das variações desse rio. Como já relatado na Mesopotâmia, estas sociedades tinham como elemento principal em seu campo econômico a prática agrícola (CARDOSO, 1996).

Vale lembrar que o povo egípcio era extremamente venerador de seus mortos e o ambiente era particularmente seco, o que contribuiu para que grandes tumbas resistissem ao poder do tempo trazendo consigo escritos e conservando a principal fonte de pesquisa que temos sobre esse povo - os papiros. Particularmente, os dois mais conhecidos são "O Papiro de Rhind" (1650 a.C.) e o "Papiro de Moscou" (1850 a.C.), fontes principais da Matemática do Egito antigo (EVES, 2011 – KATZ, 2010).

> O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos. (EVES, 2011 p.70)

Apesar de os egípcios se preocuparem com sistemas de numeração, privilegiavam a geometria como estudo, concretizada em grandes realizações como as monumentais pirâmides. Segundo Eves (2011 p.72) "todos os 110 problemas incluídos nos papiros Moscou e Rhind são numéricos, e boa parte deles é muito simples, embora a maioria tenha origem prática, há alguns de natureza teórica".

> A geometria e a aritmética então praticadas na Mesopotâmia e no Egito tinham caráter prático e se limitavam a aplicar procedimentos numéricos para resolver problemas específicos, sem maiores preocupações com a estrutura intelectual ou com os princípios filosóficos da matemática envolvida[...]. (MOL, 2013 p.32)

A Matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela Matemática babilônica. Esse fato pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado dos babilônicos (BOYER, 1996).

Os últimos séculos do segundo milênio antes da era cristã destacam-se pelo fim do apogeu do Egito e da Babilônia, novos povos como Fenícios, Assírios e Hebreus começam a ascender comercialmente e novas terras são descobertas (CARDOSO, 1996).

Lembrando que um algoritmo é uma lista ordenada de instruções para que se resolva algum problema e, de um modo geral, os povos antigos que detinham algum tipo de sistema de numeração criaram regras para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Desse modo, podemos classificar a Matemática antiga como algorítmica por natureza, à exceção dos gregos que, em contraste aos seus contemporâneos, enfatizavam a Matemática teórica (KATZ, 2010).

Um bom exemplo dos algoritmos egípcios é o processo de multiplicação que consistia em duplicações sucessivas que trazemos a seguir:

> Para multiplicar *a* e *b* o escriba registraria primeiro o par 1 e *b*. Depois duplicaria sucessivamente cada número do par, até que a duplicação seguinte levasse o primeiro elemento a exceder o número *a*. Posteriormente tendo determinado as potências de 2 que somadas dão iguais a *a*, o escriba adicionaria os múltiplos correspondentes a *b* para obter a resposta. (KATZ, 2010, p. 13)

Por exemplo, para multiplicar 13 por 15 (em linguagem atual):

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240

Como 13 é igual à soma entre 8 + 4 + 1, tem-se que a resposta da multiplicação é 120 + 60 + 15, ou seja, 195.

Os sistemas de numeração babilônicos e egípcios eram funcionais para a época, pois atendiam as necessidades no que diz respeito à cobrança de impostos (dívidas), cálculo com raízes quadradas e problemas que faziam referência às equações quadráticas. Porém, não encontramos relatos de menção sobre quantidades negativas ou números negativos, explicitamente.

2.2. Grécia

Por volta do século VI a.C., as cidades-Estado gregas são conhecidas pelas suas importantes contribuições para a política e a filosofia atual, pois contribuíram para o desenvolvimento matemático devido às atividades comerciais desenvolvidas. Embora não foram encontrados textos matemáticos datados antes de 300 a.C., há fragmentos de textos matemáticos em manuscritos e referências em textos posteriores, como, por exemplo, no livro *Os Elementos,* de Euclides (KATZ, 2010).

> A visão estática do Oriente antigo sobre as coisas tornou-se insustentável e, numa atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar *como e por quê.* Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “Por que os

> ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?" e "Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?". [...] Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo [...] (EVES, 2011, p.94)

De qualquer forma o primeiro matemático grego mencionado na história é Tales de Mileto (c. 624-546 a.C.), citado em diversos textos como um dos sete sábios da humanidade e intitulado precursor da geometria demonstrativa, foi o primeiro a demonstrar uma afirmação Matemática.

Em continuidade aos nossos estudos trazemos as contribuições da Escola Pitagórica que era regida pela seguinte filosofia, segundo (EVES, 2011, p.97-98), "a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros". Esse modo de pensar levava a uma exaltação dando ênfase ao estudo das propriedades dos números e da aritmética, e, os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números foram dados pelos Pitágóricos (EVES, 2011, p. 97 – 98). Entretanto, a existência do tão referenciado e grande mestre da escola pitagórica, Pitágoras, é duvidosa, o que se comprova é a existência de uma seita mística onde alguns de seus membros fizeram descobertas, principalmente no ramo do que hoje conhecemos por teoria dos números (KATZ, 2010).

Se Pitágoras realmente existiu, "era mais um místico do que um pensador racional, mas que induzia grande respeito em seus seguidores e [...] as doutrinas de sua escola apenas podem ser presumidas das obras de escritores mais tardios" (KATZ, 2010, p.62).

O ente matemático *número* era observado e até mesmo venerado pelos pitagóricos, aliás, era essa uma das doutrinas da escola Pitagórica que acreditavam que o *número* era a essência de todas as coisas. No entanto, eles conceituavam *número* como o que hoje conhecemos por número inteiro positivo. Eles associavam *número* a objetos contados, não obstante os segmentos também poderiam ser contados bastando tomar uma unidade de medida. "A incapacidade pitagórica de reconhecer a distinção fundamental entre número e magnitude, ou entre a indivisibilidade da unidade par ao número e a infinita divisibilidade das medidas de magnitudes como o comprimento, iria provocar problemas" (KATZ, 2010, p. 65). O que nos leva a acreditar que eles ainda não eram capazes aceitar a existência de números negativos como um ente matemático.

A tradição da época fazia com que todos os feitos da Escola Pitagórica fossem atribuídos a seu mentor. Na verdade, não apenas Pitágoras, mas a Escola Pitagórica contribuiu de forma relevante para novas descobertas matemáticas (KATZ, 2010).

Na Grécia, o estudo das relações abstratas envolvendo os números era dividido em duas partes, denominados de logística – o estudo das relações abstratas envolvendo os números, e a aritmética – a arte prática de calcular com números (BOYER, 1996).

A título de ilustração das contribuições dos pitagóricos para a nossa atual aritmética podemos citar seus estudos que avançam no campo dos números quando nos referimos a números primos, números figurados, números perfeitos, números abundantes, números deficientes, números amigáveis entre outros (EVES, 2011).

A seguir apresentamos alguns exemplos de números figurados:

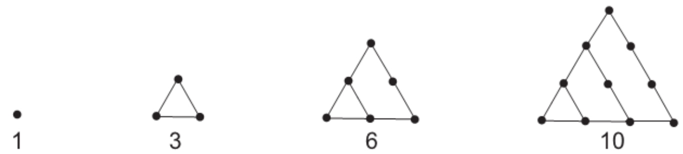


Figura 4: Números Triangulares

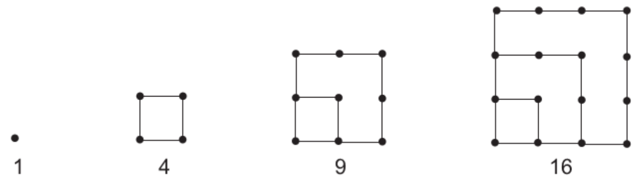


Figura 5: Números Quadrados

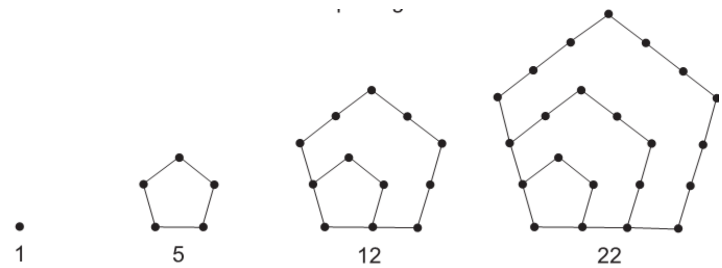


Figura 6: Números Pentagonais

Em outras palavras a Escola Pitagórica foi um marco nos estudos de Teoria dos Números a ponto de chamar a atenção de matemáticos de épocas posteriores, como de Euclides, Euler (1707 – 1783) e Descartes (1596 – 1650). Vale comentar que mesmo ainda em épocas atuais, ainda existem alguns antigos problemas gregos que estão em aberto, como a questão de existir ou não números perfeitos ímpares (EVES, 2011). Um número se diz perfeito se é igual à soma de seus divisores próprios, ou seja, todos os seus divisores inteiros positivos.

Este momento da história científica é muito importante para a matemática, porque os estudiosos da época se dedicaram sobremaneira a esta área de conhecimento, que era dividida em cinco ramos: aritmética (teoria dos números), geometria plana, geometria sólida, astronomia e harmonia (música). Também ocorreram avanços na tentativa de resolver problemas clássicos da Matemática como a duplicação do cubo, a quadratura do círculo, trissecção do ângulo e da incomensurabilidade. Além do mais, muitos destes avanços se deram por causa da junção de forças de grandes pensadores gregos na Academia de Platão, que leva o nome de seu fundador em 385 a.C. (KATZ, 2010).

Um dos membros mais célebres da Academia de Platão foi Aristóteles (384-322 a.C.) que contribuiu para a sistematização da lógica dedutiva. Ele propôs uma forma de procurar verdades e classificou as verdades básicas de postulados e as verdades comuns de todas as ciências de axiomas. Para ele, a argumentação lógica era a única forma certa de alcançar o conhecimento científico (KATZ, 2010).

Aristóteles propôs a distinção entre número e magnitude, rejeitando a ideia dos pitagóricos. Ele classificou número como quantidade discreta e magnitude como quantidade contínua, ou seja, ambas estavam na mesma categoria (quantidade) dividas em duas classes (discreta e contínua).

> A distinção primária entre estas duas classes é de que a magnitude é "o que é divisível em divisíveis que são infinitamente divisíveis", enquanto a base do número é a unidade indivisível. Assim as magnitudes não podem ser compostas por elementos indivisíveis, enquanto os números o são inevitavelmente [...] Aristóteles classificou mais estas ideias na sua definição de "em sucessão" e "continuo". As coisas estão em sucessão se não há nada do seu próprio tipo a intermediá-las. (KATZ, 2010, p. 73)

A geometria retoma a atenção dos estudiosos quando Euclides (c. 300 a.C.) axiomatiza a geometria na obra mais lida depois da Bíblia, "*Os Elementos*". A obra é constituída de treze livros que falam principalmente sobre geometria plana e espacial. Euclides compartilha algumas ideias de Aristóteles sobre verdades e números. Portanto, ele diferencia número de magnitude e a maioria dos treze livros que compõem "*Os Elementos*" é iniciada com definições dos objetos que serão trabalhados (do ponto de vista da Matemática atual algumas das definições estabelecidas por Euclides não são verdadeiramente definições), além dos postulados, axiomas e provas (KATZ, 2010). Trazendo para épocas mais recentes podemos citar vários matemáticos, entre eles Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) que empreendeu seus esforços no sentido de reescrever partes desta obra corrigindo possíveis erros ou incompletudes e produzindo a obra "*Éléments de géométrie*" (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2015) que fora adotada no ensino de Geometria em nosso país no início do século passado.

A obra prima de Euclides não se trata de uma obra unificada, na verdade é um compêndio organizado pelo autor sobre várias partes da Matemática, com distinção fundamental entre *número* e *magnitude,* após os trabalhos de Aristóteles. Os livros VII, VIII e IX tratam da Teoria dos Números e formam uma unidade totalmente independente e não fazem menção aos seis primeiros livros. Porém, o padrão de escrita se mantém como nos outros livros, iniciando com as definições dos objetos matemáticos que serão mencionados (KATZ, 2010). Essas definições fornecem uma visão de como os gregos viam os números e o quanto seria difícil conceberem a existência de números negativos. Para ilustrar observaremos algumas definições do Livro VII de *Os Elementos*:

Definição 1: Uma **unidade** é algo em virtude do qual as coisas que existem são chamadas de um.

Definição 2: Um **número** é uma pluralidade composta de unidades.

Definição 15: Diz-se que um número **multiplica** um número quando o que é multiplicado é adicionado a si próprio tantas vezes quantas há unidades no outro, e assim algum número se produz.

Há grandes matemáticos gregos a serem citados depois de Euclides como: Arquimedes (c. 287 a.C – 212 a.C), Apolônio (c. 262 a.C. – 290 a.C.), Hiparco (c. 190 a.C – 120 a.C), ente outros, todos eles focaram seus estudos em geometria e trigonometria. E foi somente por volta 250 d.C. que o matemático Diofanto de Alexandria (ou Diofante), nascido entre 201 e 214 — falecido entre 284 e 298, retoma o estudo sobre o tema que nos interessa (EVES, 2011).

Há muita controvérsia a respeito do período de vida desse matemático. Porém, quanto a sua vida existe um curioso problema contido na coleção “Antologia Grega” em que os dados fazem referência à vida de Diofanto, conforme segue:

> 1) Viajante! Aqui estão as cinzas de Diofante. É milagroso que os números possam medir a extensão de sua vida.
> 2) Um sexto dela foi uma bela infância.
> 3) Depois de 1/12 de sua vida, sua barba cresceu.
> 4) Um sétimo de sua vida passou-se em um casamento sem filhos.
> 5) Mas, cinco anos após isso, nasceu seu primeiro filho.
> 6) Que viveu uma vida feliz durante apenas metade do tempo de vida de seu pai.
> 7) Em profundo pesar, o pobre velho terminou seus dias na Terra, quatro anos após perder seu filho.
> Quantos anos viveu Diofante?
> Resolvendo o problema, acredita-se que ele viveu oitenta e quatro anos, casou-se aos vinte e seis e teve um filho que morreu com quarenta e dois anos (VANSAN, 2014).

Apesar de historiadores terem atribuído a Diofanto o título “Pai da Álgebra” – talvez pelo uso sistemático de abreviações para potências de número para relações e operações – seu conteúdo está mais relacionado com a Teoria dos Números, principalmente em sua obra Aritmética, composta por treze livros, dos quais remanesceram apenas seis (VANSAN, 2014).

Convém observar que na época de Diofanto, número ainda significava número racional positivo, em denominação atual. Sua concentração na teoria dos números não fez referência alguma aos números negativos. Porém, ele apresentou uma declaração muito importante a respeito do que hoje podemos entender como uma regra para a multiplicação de números negativos afirmando que:

O que está em falta multiplicado pelo que falta resulta em algo positivo. O que está em falta multiplicado pelo que é positivo resulta em algo que está em falta.

A citação a seguir confirma esse extrato:

> Diofanto conhecia também as regras de sinais ao multiplicar: um menos multiplicado por um menos dá um mais, um menos multiplicado por um mais dá um menos. Obviamente, Diofanto não estava a lidar com números negativos, que para ele não existiam. Estava simplesmente a estabelecer regras necessárias para multiplicar expressões algébricas envolvendo subtracções. (KATZ, 2010. p. 216)

Os escritos de Diofanto levam-nos a acreditar que antes do declínio da Matemática na Grécia os gregos conheciam a regra de sinais (menos por menos dá mais e menos por mais dá menos) na tentativa de validar um modelo para multiplicar expressões que envolviam subtrações. E, mesmo sem deixar escritos que mostrassem a existência de números negativos, recorrendo apenas ao enfoque prático das operações, podemos acreditar que suas contribuições sinalizavam para a necessidade de criar ou reconhecer outro tipo de número – o número negativo.

2.3. China Medieval

As civilizações às margens dos rios Yang-Tsé e Howang Ho são antigas tais quais as babilônicas e egípcias. Porém, nossa análise às descobertas chinesas referentes à Matemática inicia-se por volta de 1030 a.C., apesar de haver grandes divergências quanto às datas das obras chinesas (EVES, 2011).

Datar documentos matemáticos chineses não é fácil. Para ilustrar esse fato observamos a obra *Chou Pei Suang Ching*, considerado por historiadores como o mais antigo dos clássicos matemáticos chinês, alguns colocam esta obra cerca de 1200 a.C., outros após o nascimento de Cristo. A dificuldade desta datação se dá pelo fato de que esta obra é contemplada por trabalhos de vários homens em períodos diferentes (BOYER, 1996).

Segundo Eves (2011) o cenário político chinês foi divido em períodos:

Tabela 2: Dinastias e períodos da China

Dinastia	Período
Período Shang	1500 a.C. a 1207 a.C.
Período Chou	1207 a.C. a 221 a.C.
Dinastia Chin	221 a.C. a 206 a. C
Dinastia Han	206 a.C. a 221 d.C.
Período Pós-Chin	221 a 618
Dinastia Tang	618 a 960
Período das cinco dinastias	906 a 960
Dinastia Song	960 a 1279
Dinastia Yuan	1279 a 1368
Dinastia Ming	1368 até1644

Existe uma lenda a respeito do imperador Qin Shih Huang-ti que comprometeria severamente o conhecimento chinês quando, por volta de 213 a.C., o imperador mandou queimar todos os livros existentes na China. Entretanto, se essa determinação por parte do imperador realmente existiu há indícios para acreditarmos que ela não foi completamente cumprida, tendo em vista que alguns livros dessa época perduraram (BOYER, 1996; KATZ, 2010).

Relata Boyer (1996, p.143) que “[...] se a matemática chinesa tivesse tido ininterrupta continuidade de tradição, algumas das notáveis antecipações dos métodos modernos poderiam ter modificado substancialmente”.

Apesar dos obstáculos citados, os chineses avançaram consideravelmente no ramo da Matemática até o período Sung. Dentre suas contribuições elencamos algumas delas a seguir:

> (1) criar um sistema de numeração posicional decimal, (2) reconhecer os números negativos, (3) obter valores precisos de π , (4) chegar ao método de Horner para soluções numéricas de equações algébricas, (5) apresentar o triângulo aritmético de Pascal, (6) se inteirar do método binomial, (7) empregar métodos matriciais para resolver sistemas de equações lineares, (8) resolver sistemas de congruências pelo método hoje consubstanciado no Teorema chinês dos Restos, (9) desenvolver as frações decimais, (10) desenvolver a regra de três, (11) aplicar a regra de falsa posição dupla, (12) desenvolver séries aritméticas de ordem superior e suas aplicações à interpolação e (13) desenvolver a geometria descritiva. (EVES, 2011, p. 246 - 247)

Provavelmente o texto matemático chinês mais importante é o *K'ui-ch'ang Suanshu*[2], de vários autores encabeçados por Liu Hiu (225 - 295), compilado no período Han. Tal texto contém problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos. Destaca-se neste trabalho a obra "*Nove capítulos da arte matemática*" ao conter os primeiros registros de números negativos. Estes registros derivam da solução de um problema ligado ao dia a dia dos matemáticos chineses, que ao resolver um sistema de equações e conduzindo-o a forma matricial, os números negativos encontram-se nos registros. No entanto, estes não eram considerados entidades matemáticas independentes (FOSSA e ANJOS, 2007).

No período Pós-Chin a Matemática chinesa fica marcada na história no âmbito da teoria dos números com um teorema que é utilizado e estudado até os dias atuais, o *Teorema chinês dos Restos*. É um resultado sobremaneira importante na resolução de problemas de congruência (KATZ, 2010).

A Matemática chinesa ganha força novamente no final da Dinastia Sung início da Dinastia Yuan, onde aparecem muitas obras matemáticas, nessa linha podemos citar vários importantes matemáticos como: Yang Hui (segunda metade do século treze), Li Yeh (1192-1279) e Chu Shï-kié (c. 1300) (EVES, 2011; KATZ, 2010).

Para este trabalho Li Yeh merece menção especial, pois, segundo (EVES, 2011 p. 246) "introduziu uma notação para números negativos que consistia em fazer um traço diagonal no dígito da direita de um número escrito no sistema científico ou no sistema de barras chinês". Acredita-se que o símbolo utilizado para o zero (uma circunferência) também foi dada pelos chineses.

2.4. Índia Medieval

[2] *K'ui-ch'ang Suanshu* - Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática

Nossa trajetória pela Índia inicia-se por volta de 200 a.C., povo que contribuiu decisivamente para o desenvolvimento da Astronomia. Na Matemática, os indianos foram efetivos para a aceitação e compreensão de números negativos. Brahmagupta (c. 598-668) e Bhaskara (1114-1185) são dois matemáticos que se destacam entre os indianos nesta direção.

Uma das contribuições da Índia para a Matemática que é muito referenciada nos textos históricos trata-se do sistema de numeração decimal e posicional, com o uso de nove símbolos e do zero. Um sistema prático e coeso que serviu de sustentação para a evolução da Matemática.

No entanto, o referido sistema de numeração não foi uma invenção hindu, foi uma mescla de ideias anteriores ao conhecimento desse povo, conforme explica Mol (2013, p.63) "os hindus uniram em seu sistema quatro elementos: a base decimal, a notação posicional, o uso do zero e uma notação para cada um dos dez numerais. Nenhum desses elementos foi criação hindu[...]".

> Os mais antigos espécimes dos numerais utilizados pelos indianos foram encontrados em pilares erguidos na Índia por volta de 250 a.C. Entretanto, nesses antigos escritos ainda não existe um símbolo para o zero e a notação posicional tampouco é empregada. Eles usavam um sistema de numeração com nove símbolos representando os números de 1 a 9 e nomes para indicar cada potência de 10. Por exemplo, escreviam 3 sata, 2 dasan, 7 para representar o número 327 e escreviam 1 sata, 6 para representar 106. A data exata da introdução na Índia da notação posicional e de um símbolo para o zero não é conhecida[...] (SOUZA, 2010, p.15)

Há textos sobre Astronomia datados dos séculos V e VI da nossa era como, por exemplo: *Sūrya Siddhānta* (autor desconhecido) *e Pañca Siddhāntikā* de autoria Varāhamihira (5025 – 587). Nesses encontram-se estudos matemáticos dos quais podemos destacar: aproximações para o número π, considerações sobre a regra de três, trigonometria esférica e uma tábua de senos (MOL, 2013).

A história conta que o primeiro matemático notável hindu foi *Aryabhata* (476 – 550). Porém, Brahmagupta é considerado um dos maiores matemáticos e astrônomos hindus. Sua obra intitulada *Brahmasphuta Sidd´hanta*[3] é um livro de astronomia de vinte e um capítulos em que ele dedica os capítulos 12 e 18 à Matemática, os quais deram base conceitual para o desenvolvimento da álgebra, além de uma sistematização para a aritmética dos números negativos. Nessa sistematização Brahmagupta define o zero como a subtração de um número por ele mesmo, e considera os números negativos como *débitos*.

---

[3] *Brahmasphuta Sidd´hanta* - A abertura do universo

> Os hindus aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais. Eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método familiar de completar quadrados, esse método é hoje muitas vezes conhecido como método hindu. (EVES, 2011, p. 256)

Além do mais propôs regras para cálculo com esses números negativos. Conforme MOL (2013, p.64) “[...] Estabeleceu regras numéricas para lidar com números negativos que, pela primeira vez, tiveram sua aritmética sistematizada”, afirmando que

Positivo dividido por positivo, ou negativo dividido por negativo é positivo. [...] positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por positivo é negativo.

Um matemático que é muito citado nos livros de Matemática no Brasil é o matemático indiano Bhaskara, pois, todo estudante usa a fórmula que leva o nome deste matemático hindu, mesmo já havendo um consenso que ele não é o estudioso que determinou a fórmula resolutiva da equação do segundo grau. Paradoxalmente, sem desprestigiar seu inegável talento, os trabalhos de Bhaskara deram poucas inovações aos trabalhos de Brahmagupta, tendo em vista que ele também se dedicou à Astronomia e a Matemática (BOYER, 1996).

Suas obras mais importantes foram *Lilavati*e *Vija-Ganita* - aquela, por levar o nome de sua filha, é seguida de muito folclore – onde encontram-se numerosos problemas que envolvem equações lineares e quadráticas.

> [...] as obras de Brahmagupta e Bhaskara e dos que viveram em seu tempo, contém muita coisa de interesse para a história da matemática, incluindo métodos de cálculo com número positivos e negativos, soluções de equações quadráticas e sistemas de equações lineares, e resultados básicos em análise combinatória. (KATZ, 2010, p.280)

Segundo nossos estudos no período medieval, os matemáticos indianos eram essencialmente algebristas e se interessavam por astronomia assim como os gregos, porém, em comparação com estes, não eram tão rigorosos nas provas e demonstrações. Eles se preocupavam em enumerar passos ou regras para manipular expressões numéricas ou resolver problemas aritméticos e geométricos. Merece nosso registro que, apesar de tudo, foram os indianos que registraram as regras básicas da aritmética, portanto, acreditamos que eles reconheciam e manipulavam números negativos.

2.5. Arábia Medieval

A sociedade árabe desenvolveu-se no Oriente Médio na Península Arábica, região desértica de parcos recursos naturais e grandes dificuldades para a agricultura. Desta forma a sociedade primou pelo desenvolvimento da prática comercial. Até o século VII quando Maomé inicia a expansão da fé islâmica, os árabes se organizavam em clãs e tinham culto politeísta (CARDOSO, 1986).

Os califas, sucessores do profeta Maomé, encabeçaram uma enorme expansão além da península arábica construindo o chamado "Império Árabe" que se inicia com a morte do profeta fortalecendo a fé muçulmana. Os territórios se estendiam da Índia à Península Ibérica, passando pelo Oriente Médio e norte da África. O período áureo desse império foi entre os séculos VII à XIII (CARDOSO, 198).

Devido às expansões e consequente contato com as novas culturas, a Matemática árabe foi fortemente influenciada pela aritmética hindu, isso faz com que os calculadores árabes ocidentais, que escreviam todos os números em palavras, se tornem especialistas em cálculo e passassem a manejar números com mais facilidade. Dessa forma, os algarismos e métodos de origem hindu facilitavam a prática de todas as operações aritméticas. Os algarismos ocidentais eram denominados pelos arábicos de algarismos *ghobar* (poeira), por causa da poeira fina com a qual os calculadores costumavam salpicar suas tábuas para traçar os algarismos e efetuar todo tipo de operações (SOUZA, 2010).

Inadequado seria esquecer também que a Matemática árabe possuiu influência de outras culturas além da hindu, pois seus alicerces foram herdados também da Grécia Clássica.

> A contribuição árabe para a matemática, no entanto, foi além da assimilação e da preservação do conhecimento herdado de civilizações mais antigas. Os árabes conjugaram o rigor grego às visões práticas babilônica e hindu para, a partir daí, introduzir elementos originais que deram uma nova vida à matemática. (MOL, 2013 p.66)

Por outro enfoque nota-se forte semelhança entre os algarismos hindus e *ghobar*. Porém, é a grafia árabe que acabou consagrada na Europa Medieval e vai posteriormente evoluir para os símbolos que conhecemos hoje. No auge do Império os árabes se tornam referência científica e cultural em comparação aos povos do ocidente, por isso estes *signos* receberam por gerações consecutivas a denominação de algarismos arábicos (SOUZA, 2010)

Nessa perspectiva citamos um dos mais notáveis estudiosos árabes da época, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780-850), autor da obra "O *Livro da Adição e da*

Subtração" exerce notável influência nos rumos da Matemática, pois, ele explica o sistema de numeração decimal posicional hindu e as operações feitas nesse sistema, incluindo a multiplicação e a divisão. Assim como afirma Eves (2004, p, 263) "os numerais indo-arábicos ficaram então conhecidos como sendo de al-Khwarizmi, o que resultou nas palavras algarismo e algoritmo, incorporadas às línguas europeias ".

Salienta-se ainda outra importante contribuição de al-Khwarizmi para o estudo da álgebra moderna encontrada em seu livro *Tratado sobre o Cálculo*, onde ele escreve sobre soluções de equações de primeiro e segundo graus, por isso, esse livro é considerado o precursor da álgebra como área do conhecimento matemático (EVES, 2004; KATZ, 2010).

Merece destaque o matemático al-Karagi (c. 953 - 1029) pois em sua obra *Livro Luminoso da Aritmética,* estabeleceu regras algébricas para lidar com expressões negativas tais como: "$-(-ax^n) = ax^n$" e "$-ax^n - bx^m = -(ax^n + bx^m)$".

O matemático e astrônomo Omar Khayyám (1048 - 1131) também se dedicou aos estudos de álgebra. Ele estudou equações cúbicas e as classificou em quatorze tipos e canônicos, além de propor construção geométrica de suas raízes. Foi sucedido por Al-Tusi (1201-1274) que desenvolveu métodos de natureza numérica para a extração de raízes n-ésimas de um número.

Também Al-Kashi (c. 1380 - 1429) em sua obra *Chave da Aritmética*, reúne boa parte do conhecimento algébrico produzido por seus antepassados árabes até então. Por outro lado, contribui de forma original, pois segundo Mol (2013)

> O autor obteve, em seu Tratado da Circunferência, uma aproximação de 2π com 16 casas decimais exatas, usando um método de aproximações numéricas baseado no método de Arquimedes de aproximação dos círculos por polígonos regulares inscritos. No seu Tratado da Corda e do Seno, obteve aquilo que é considerado o primeiro método de solução de equações por meio de aproximações numéricas sucessivas. (p. 72)

Apesar de alguns matemáticos árabes como Alhazenn (965 - 1040) debruçarem nos trabalhos de geometria e trigonometria percebe-se, à guisa dos exemplos anteriores, que os matemáticos islâmicos dedicaram-se basicamente aos estudos da álgebra. Portanto, Eves (2004) definiu a contribuição dos árabes para a Matemática.

> As avaliações do papel dos árabes no desenvolvimento da matemática de maneira nenhuma são unânimes. Há aqueles que veem nos escritores muçulmanos, particularmente em seu trabalho em álgebra e geometria, grande originalidade. Outros assinalam que esses escritores, a despeito de talvez revelarem erudição, raramente eram criativos e que seu trabalho se

> situa num plano secundário, quantitativa e qualitativamente, em relação aos gregos e aos escritores modernos. (EVES, 2004, p. 267)

2.6. Idade Média na Europa

É comum encontramos a referência a este período como a “Idade das Trevas”, exprimindo a suposta baixa evolução científica alcançada pelos medievais. Questionamos essa referência, pois, essa conotação coloca em uma mesma linha todas as sociedades existentes naquela época e desconsiderando-se as especificidades da produção, particularmente, a Matemática dos diferentes povos como os maias, os árabes, os chineses, alguns inclusive já constantes neste trabalho, que em outras regiões pesquisavam vários temas científicos (CARDOSO, 1986; BOYER, 1996).

A produção intelectual na Europa no medievo foi realmente baixa em todos os seus ramos, portanto é esperado que pouco se inovou em relação aos números inteiros. Porém, trouxemos para este texto fatores que consideramos relevantes para explicar os porquês dessa freada científica, assim como alguns fatores que ajudaram os europeus na superação dessa fase e posteriormente, retomarem o crescimento científico até fazer da Europa o berço intelectual do mundo em anos conseguintes.

Os marcos que indicam o início e o fim desse período, também conhecido como Alta Idade Média, são, respectivamente, a queda de Roma em 476, pela deposição do último imperador do Império Romano do Ocidente, Rômulo Augusto, após a invasão dos hérulos, e a queda de Constantinopla para os turcos em 1453, significando o fim do Império Bizantino. Na porção central do continente europeu o período foi caracterizado por muita violência física e intensa fé religiosa, um sistema econômico autossuficiente e limitado às áreas dos feudos e uma estrutura política extremamente fragmentada, com os reis sem autoridade para se imporem diante de uma nobreza fortalecida, e com uma Igreja Católica dominando a mentalidade do período marcado pelo chamado Teocentrismo (CARDOSO, 1996), teoria segundo a qual Deus é o centro do universo.

Apesar de algum resquício de vida intelectual ter sido praticada em mosteiros periféricos, motivado pelo Teocentrismo, que colocava o divino, o pecado e o inferno no centro, conduzido pela Igreja Católica que monopolizava o que se refere à produção, veiculação e manutenção das ideias e saberes e o domínio das habilidades de leitura e escrita, o homem medieval europeu, segundo Mol (2013, p.74), era “incapaz de conhecer o universo por meio de suas faculdades racionais, foi desestimulado a exercer atividades de observação da natureza e de pensamento científico”.

Especificamente em relação ao desenvolvimento da Matemática,

> Os romanos nunca tiveram inclinação para a matemática abstrata; ao contrário, somente os aspectos práticos da matemática ligados ao comércio e à engenharia civil, lhes interessavam. Com a queda o Império Romano e a cessação subsequente de grande parte do comércio leste-oeste e, ainda, com o abandono de projetos estatais de engenharia, mesmo esse interesse minguou e não seria exagero dizer que, afora a elaboração do calendário cristão, muito pouca matemática se fez durante o meio milênio da Alta Idade Média. (EVES, 2011 p. 289)

Nesse processo Brito (2007, p.2) afirma que “aqueles que não se coadunavam com tais dogmas foram excluídos ou alegorizados de modo a não contradizerem as ideias religiosas. Os conhecimentos matemáticos produzidos pelos pagãos não escaparam”.

Não interessava o cunho das produções científicas ou literárias, todas tinham enfoque cristão, de modo que a Matemática desse período restringe-se em traduções de textos já existentes que viravam manuais que tentavam usar as artes liberais para explicar os dogmas bíblicos. Podemos citar como “matemáticos-tradutores” o estadista *Anicio Manlio Severino Boécio* (c.480 – 525), *Magno Aurelio Cassiodoro* (c. 490 – 581) e *Isidoro de Sevilha* (c. 560 – 636) considerados os mais importantes dos séculos V, VI e VII.

A importância de Boécio se dá pelo fato de seus livros de geometria (traduções dos Elementos de Euclides) e aritmética terem sido adotados nas escolas monásticas. Embora pouco relevantes, esses trabalhos acabaram se constituindo no conhecimento matemático, o que ilustra bem o quanto esse conhecimento se tornou insignificante neste período na Europa (EVES, 2011).

Boécio classificava a união entre as quatro matérias: aritmética, música, geometria e astronomia, como *quadrivium*, e Cassidoro e Isidoro classificavam-nas em matemática. Independente do nome a temática evidencia a influência pitagórica nos saberes dos referidos autores.

A passagem da Bíblia na qual se afirma que “tudo foi criado em medida, número e peso” (Sab 11, 21) e a relação entre os números e o milagre da obra divina seria – a criação do mundo em seis dias. Uma vez que seis é o primeiro número perfeito são apenas exemplos que nos levam a entender porque a aritmética merecia lugar de destaque dentre o *quadrivium*, sem perder de vista a mística religiosa e a influência dos pitagóricos, certos que o estudo dos números possibilitava não apenas um conhecimento racional do universo, mas uma identificação com a essência deste último.

> Porém, a importância dada à aritmética, no medievo, não se explica apenas por questões metafísicas, mas também por suas aplicações práticas no cômputo do tempo, na administração de bens e na exegese bíblica. A medida do tempo foi, durante o período em questão, um dos problemas mais frequentes no meio intelectual eclesiástico, pois dela dependiam o conhecimento das horas dos ofícios, que variavam segundo as estações, e a determinação da data da Páscoa. As situações de administração financeira também faziam parte do cotidiano da alta hierarquia eclesiástica. (BRITO, 2007, p.4)

O conceito de aritmética estudado pelos medievais europeus difere do moderno. Para os europeus medievais, aritmética era definida como disciplina que estuda quantidade numérica em si mesma, e limitava-se em classificar e expor as propriedades dos números, ao passo que atualmente ela é definida como ramo da Matemática que estuda as operações numéricas: soma, subtração, multiplicação, divisão etc., ou seja, matemática medieval europeia, alicerçada sobre uma crença mística pitagórica e cristã, da formação do universo, buscando provar a existência do ser divino. De igual forma, a Matemática (*quadrivum*) era composta por disciplinas que na verdade eram conhecimentos doutrinais, ou seja, a partir das quais se alcançaria a contemplação das coisas divinas e saberes importantes devido às suas utilizações práticas, tais como, o uso em situações de negócio, na contagem do tempo, na medição de terras, na construção de templos e na exegese bíblica, ou seja, a interpretação profunda de um texto bíblico (BOYER, 1996; EVES, 2011; BRITO, 2007; MOL, 2013).

A partir do século XI começa um período de transição. A Alta Idade Média e o Feudalismo começam a dar lugar à conhecida Baixa Idade Média repleta de transformações políticas, econômicas, culturais e mesmo religiosas. Com a realização das Cruzadas, que eram as sequências de expedições militares convocadas pelo Papa com o fim de retomar o controle cristão sobre Jerusalém e a Terra Santa no período de 1095 a 1291, o comércio volta para o quadro econômico europeu e traz consigo um novo agente social, a burguesia, em um novo ambiente, as cidades. Neste quadro, de profunda transformação, as ciências passam a ser algo de maior relevância já que a visão teocêntrica pregada pela Igreja torna-se insuficiente para explicar toda a efervescência do mundo de então (CARDOSO, 1996).

Curiosamente, o início desta empreitada veio de dentro da própria Igreja Católica, então monopolizadora do conhecimento, na figura do francês Gerberto de Aurillac (946 – 1003), que se tornou Papa com o nome de Silvestre II no ano de 999. Antes da vida papal, Gerberto escreveu textos sobre o *quadrivium* e foi o primeiro ocidental a ensinar os algarismos hindu-arábicos nas escolas eclesiásticas, mesmo sem utilizar o zero. Além de reintegrar o uso do ábaco extinto desde o fim do Império Romano (EVES, 2011).

> A introdução dos algarismos arábicos na Europa cristã encontrou, a princípio, forte resistência. Foram boicotados por muitos calculadores medievais, que os tratavam por "signos diabólicos desses cúmplices de Satanás que são os árabes". Herdeira da tradição romana, a Igreja Católica não aceitava a superioridade de elementos vindos de outra cultura. Por suas ligações com a cultura e a ciência árabes, Gerberto seria inclusive acusado de ter estudado magia e astrologia nas cidades árabes, o que alimentou a lenda de que ele fosse um feiticeiro pactuado com o demônio. (MOL, 2013 p.75)

Com as Cruzadas, os europeus tomam maior contato com a cultura e a ciência árabe e com os textos hebreus, que foram todos traduzidos para a nova língua culta, o latim. Inclusive, o século XII é apelidado como o século das traduções.

No século seguinte começam a surgir as primeiras universidades. Um aspecto que não deve ser esquecido é a estrutura das Universidades que defendem o interesse de um grupo, possuem um estatuto de associação, assembleias gerais e oficiais eleitos e autonomia, ou seja, essas novas instituições possuem características e estrutura de corporações de ofício, apesar de cada instituição possuir moldes próprios (LE GOFF, 2007).

Com a expansão populacional, urbana e econômica vivida pela Europa, o aumento do interesse científico dos europeus foi consequência natural. Neste cenário surge a primeira Universidade europeia, a Universidade de Bolonha, no século XI, com foco no estudo do Direito civil e canônico. Não obstante, Medicina, Artes, Filosofia Natural também constavam em seu currículo (LE GOFF, 2007).

Figura 7: Universidade Bolonha[4]

Os primeiros centros de pesquisa ainda tinham muita influência da Igreja Católica, “no entanto, o nascimento dessas instituições foi um marco na história das ciências, pois com poucos séculos de vida, elas passariam a ser o principal palco da atividade científica europeia”, conforme relata Mol (2013, p.77).

A Matemática segue o mesmo fluxo de todas as outras ciências, o personagem principal dessa época foi Leonardo de Pisa (c. 1170 - 1250), também conhecido como Fibonacci, considerado o maior matemático da Idade Média. Quando jovem morou um tempo na Argélia onde aprendeu o idioma árabe. Vindo de família de comerciantes de Pisa, sua cidade natal, continuou nesse ramo viajando pelo mundo árabe onde se interessou por Matemática.

De volta às suas origens, em 1202, Leonardo de Pisa escreveu obras que ajudaram a difundir os algarismos hindu-arábicos, como os livros *Liber Abaci* e *Practica Geometrica*, que trata de aplicações da álgebra para a solução de problemas de geometria e trigonometria. Segundo Mol (2013, p. 77) essas obras “forneceram material para que os estudiosos italianos do século XIII tomassem contato com a matemática árabe e grega, preparando o terreno para os progressos que a álgebra italiana teria no período renascentista”.

No campo dos números inteiros Eves (2011, p. 293) faz uma importante afirmação sobre a obra *Liber Abaci* de Fibonacci: “o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas [...] raízes negativas e imaginárias não são

[4] http://www.ifsc.usp.br/~reginaldo/Historia/Semin1/Universidades/Universidades.htm

admitidas”. Ou seja, Fibonacci também teve contato com números negativos, mas não foi capaz de dar um significado para a existência desses números.

No medievo europeu pouco se avançou no ramo da Matemática, não obstante, praticamente nada evoluiu sobre o conhecimento dos números inteiros.

2.7. O Renascimento europeu: um contexto geral

O século XIV marca o início de um movimento artístico, filosófico e científico conhecido como Renascimento Cultural Europeu. Este movimento, racional, científico e laico, não se trata de opor o homem à Deus e medir forças com Ele, mas, da busca por uma valorização da figura humana, encontrar nela as qualidades e as virtudes negadas pelo pensamento católico medieval (LE GOFF, 2007).

O entendimento de mundo seria pautado na razão, um dom de Deus, onde a genialidade e a criatividade aproxima o homem do ser Divino. Se Deus criou o homem, este poderia criar uma infinidade de coisas. Dessa forma, o Renascimento foi uma ruptura com a Idade Média que dependeu das tarefas de muitos eruditos deste período para florescer, devido ao trabalho de preservação e reprodução das obras dos pensadores da Antiguidade, principalmente da cultura greco-romana da Antiguidade Clássica (LE GOFF, 2007; MOL, 2013).

O alemão Johannes Gutenberg (1398 – 1468) em 1434 criou a tecnologia para a produção em série de livros, um impulso fundamental na disseminação do conhecimento. Para uma ideia deste impulso, no século XV, as oficinas de Veneza produziam mais livros que todos os copistas da Europa juntos. No final desse século foi impressa a primeira edição de uma tradução latina de *Os Elementos* (EVES, 2011; MOL, 2013).

Em meio à explosão de interesse pelas artes e ciências, a matemática ganha papel importante, ela aparece nas artes em telas pintadas em perspectiva. A ideia de perspectivas já era usada, considerada pré-renascentista do pintor florentino Giotto (1266 – 1337), porém foi o arquiteto Filippo Brunelleschi (1377 – 1446), projetor e construtor da gigantesca cúpula da catedral de Florença, o primeiro a formalizar regras matemáticas para a obtenção sistemática e correta do ponto de fuga – elemento essencial da geometria projetiva.

A matemática aparece para justificar o modelo heliocêntrico de universo estudado por Johann Kepler (1571 – 1630) e Tycho Brahe (1546 – 1601). Posteriormente, Galileu Galilei (1564 – 1642) dá bases definitivas neste modelo, que segundo Mol (2013, p.88), ele “deixou uma contribuição marcante no método científico que o faz ser considerado por muitos como o ‘pai’ da ciência moderna. Galileu combinou de forma inovadora experimentação e matemática”.

A atividade Matemática no século XV girou em torno da aritmética, da álgebra e da trigonometria principalmente nas cidades mercantis, pela comercialização de livros que passou por uma popularização propiciando assim a disseminação do conhecimento de maneira muito mais rápida (BOYER, 1996).

Muitas pessoas dedicaram-se à Matemática, fazendo desse período grande produtor deste conhecimento. Com o intuito de denominar os personagens presentes na História da Matemática desse período, apresentamos uma ordem cronológica, tal como proposta em Eves (2011). Iniciamos nos primeiros séculos da Idade Moderna[5], com atenção especial ao matemático Johann Widman (1460 – 1498), que contribui significativamente com a notação e o estudo dos números inteiros. Nicholas Cusa (1401-1464) em 1448 tornou-se governador de Roma que contribuiu com a reforma do calendário e por suas tentativas de quadrar o círculo e trisseccionar o ângulo. Georg Von Peurbach (1423-1463) escreveu alguns trabalhos de astronomia e elaborou uma tábua de senos.

Johann Müller (1436-1476), conhecido por Regiomontanus, escreveu o tratado *De Triangulis Omnimodis*, escrito por volta de 1464, trata-se da primeira exposição europeia sistemática de trigonometria plana e esférica (BOYER, 1996).

Nicolas Chuquet (c. 1445 - 1488), em 1484 ele escreveu uma aritmética intitulada *Triparty em lascience de snombres.* A primeira das três partes desse trabalho se ocupa do cálculo com números racionais, a segunda com números irracionais e a terceira aborda a teoria das equações. Ele admitia expoentes inteiros, positivos e negativos – primeiro registro de números negativos na Europa. Seu trabalho era demasiado avançado para a época, razão pela qual acabou não exercendo praticamente nenhuma influência sobre seus contemporâneos (BOYER, 1996). Nicolas Chuquet representava número negativo “*–a”* como *0 – a,* o que mostrava que o sinal de “–” não era atributo do número, mas sim a indicação de uma operação”.

> [...] embora não seja consciente neste ponto, Chuquet está disposto a considerar soluções negativas para as equações, novamente, pela primeira vez na Europa. [...] verifica cuidadosamente o resultado e conclui que a resposta está correta. Em outros problemas, contudo, ele próprio rejeita as soluções negativas como “impossíveis” [...]. (KATZ, 2010, p. 441)

---

[5] A **Idade Moderna** é um período específico da História do Ocidente. Destaca-se das demais por ter sido um período de transição por excelência. Tradicionalmente, se aceita o início estabelecido pelos historiadores franceses, em 29 de maio de 1453 quando ocorreu a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos, e o término com a Revolução Francesa, em 14 de julho de 1789.

Luca Pacioli (1445-1509), frade franciscano, publica em 1494 a primeira edição impressa da *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, comumente conhecida apenas por *Summa*. Apesar de a obra trazer pouca contribuição para a geometria, marca a retomada do estudo da álgebra. No *Summa*, Pacioli propõe o uso de abreviações como *p* (de piu, "mais") para indicar a adição, *m* (de meno, "menos") para indicar a subtração, *co* (de cosa, "coisa") para a incógnita, *ce* (de censo) para x^2,cu (de cuba) para x^3, e *cece* (de censo-censo) para x^4. A igualdade às vezes é indicada por *ae* (de *aequalis*) (BOYER, 1996).

E, finalmente, Johann Widman (1460 - 1498), foi autor do primeiro registro dos símbolos + e – que ocorreu em uma aritmética, *Mercantile Arithmetic or Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, publicada em Leipzig no ano de 1489. No caso, esses símbolos eram usados meramente para indicar excesso e deficiência e não com os significados operacionais de hoje. É bastante provável que o primeiro desses sinais seja uma contração da palavra latina *et*, que era usada frequentemente para indicar adição, e é possível que o segundo desses sinais decorra da abreviação *m* para menos (BOYER, 1996; KATZ, 2010).

Convém salientar que o cenário histórico-econômico baseava-se no comércio incorporando a necessidade de dominar as operações aritméticas e seus peculiares problemas, portanto a aritmética se torna foco de muitos matemáticos havendo várias obras direcionadas a este assunto neste período. Apenas na Europa, antes do século XVII três centenas de livros que regem sobre aritmética foram impressos (MOL, 2013). Um deles refere-se à mais antiga aritmética impressa, de autoria anônima, intitulada *Treviso Arithmetic*, publicada em 1478 na cidade de Treviso, na Itália. Neste contexto, por volta do século XIV, surge uma nova classe de profissionais, os abacistas[6], que dominavam uma Matemática diferente das ensinadas nas Universidades (o *quadrivum*). Eles conheciam a aritmética e álgebra islâmicas para a resolução de problemas (KATZ, 2010).

Inicialmente na Itália, expandindo-se posteriormente para toda a Europa, os abacistas passam a ter papel fundamental na introdução dos algarismos hindu-arábicos aos mercadores, pois esse novo método exige apenas papel e caneta para a realização dos cálculos para o acerto de contas. Claramente, estas vantagens não fariam sentido se não houvesse papel em abundância e barato (KATZ, 2010).

---

[6] Pessoas que dominavam instrumentos de cálculo comercial. Eles escreviam os textos a partir dos quais se ensinava aos filhos dos mercadores a matemática necessária, nas novas escolas criadas para esse objetivo.

Os abacistas além de ensinar as crianças dessa classe social, escreviam manuais que serviam para os próprios mercadores. Porém, segundo Katz (1998, p. 431 - 432) “os textos não diziam ao leitor o que fazer se encontrassem uma situação impossível. Não se sabe se os professores discutiam tais situações em aula”.

Acreditamos que não é possível desvincular comércio das dívidas, porém, mesmo com modelo econômico comercial não há relatos que os números negativos tenham sido mencionados pelos abacistas ou estudados profundamente por algum matemático dessa época. Mas, com o frequente contato com problemas matemáticos é evidente que aos poucos os números negativos vão se tornando familiares aos olhos dos matemáticos.

2.8. O Renascimento europeu e a Álgebra

Em linhas gerais, podemos dizer que este capítulo, em nosso trabalho, visa alinhar a evolução do conhecimento de números inteiros sem perder a luz do momento civil, histórico e matemático vivido pela humanidade. Para tal discorreremos sobre o tema *equações algébricas* que trouxeram à tona estranhezas acerca das suas raízes, já que as mesmas traziam grandezas inconcebíveis à maturidade intelectual da época. Os números negativos e complexos pertencem a esse cenário, e mereceram ser dignos da análise dos matemáticos a partir da ampliação de estudos sobre equações algébricas que agora começam a ganhar simplicidade pelas novas notações.

Nossa intenção é trazer um breve relato dos responsáveis pela evolução da álgebra no período do Renascimento fora da Itália, onde a matemática já sofre influência italiana. Na Alemanha, por exemplo, surge uma nova classe de profissionais, os cossistas[7].

Robert Recorde (1510 - 1558), em seu livro *The Whetstoneof Witte*, publicado em 1557, fez uso pela primeira vez do moderno símbolo de igualdade, justificando a adoção de um par de segmentos de reta paralelos como símbolo de igualdade alegando que não pode haver duas coisas mais iguais. O símbolo de radical foi introduzido por Christoff Rudolff (1499 – 1545), em sua álgebra intitulada *Die Coss* (EVES, 2011).

Uma versão do *Die Coss* foi publicada por Michael Stifel (1486 - 1567) em 1553. Sua obra matemática mais conhecida é *Arithmetica Integra*, publicada em 1544, divide-se em três partes dedicadas, respectivamente, aos números racionais, números irracionais e álgebra.

---

[7] Profissão semelhante aos abacistas italianos. Os alemães denominavam a incógnita de uma equação de cosa ou coisa, daí vem o nome cossistas para os profissionais que resolvem problemas algébricos.

"Na primeira parte Stifel salienta as vantagens de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica, prenunciando assim, de quase um século, a invenção dos logaritmos" (EVES, 2011, p.301). A segunda parte é uma apresentação algébrica do Livro X de Euclides e a terceira parte se ocupa de equações. As raízes negativas de uma equação eram descartadas, mas, a incógnita muitas vezes era representada por uma letra (MOL, 2013).

Provavelmente o feito matemático mais extraordinário do século XVI foi a descoberta da solução algébrica das equações cúbica e quártica. Neste cenário surge Nicolo Fontana de Brescia (1499 – 1557), mais conhecido como Tartaglia, que detinha um método para resolver equações cúbicas (MOL, 2013). A chave desta solução teria sido "arrancada" dele por Girolamo Cardano (1501 – 1576) perante um juramento solene de segredo. Porém, em 1545 foi publicado um grande tratado em latim de álgebra denominado *Artis Magna e Sive de Regulis Algebraicis* (*Livro Número Um sobre a Grande Arte ou as Regras da Álgebra*) que continha a solução de Tartaglia da equação cúbica. Nele se dá alguma atenção às raízes negativas de uma equação e ao cálculo com números imaginários (MOL, 2013; BOYER, 1996; KATZ, 2010).

Cardano é considerado um dos homens mais talentosos e versáteis de seu tempo, deixou uma obra vasta, abrangendo aritmética, astronomia, física, medicina e outros assuntos. Além do mais, como jogador inveterado, escreveu um manual do jogador em que abordou algumas questões interessantes de probabilidade (MOL, 2013; BOYER, 1996).

Outro personagem relacionado ao tema é o matemático Rafael Bombelli (1526 – 1572) que escreveu um tratado de álgebra contribuindo para uma formulação mais abstrata e teórica dessa disciplina, além de buscar compreender o aparecimento de soluções envolvendo raízes quadradas de números negativos, o que hoje conhecemos por números complexos. Em uma tentativa de dar sentido à suas resoluções de equações, Bombelli chegou a enunciar que: "*p*15 com *m*20 dá *m*5". Porém, analisando sua produção, constata-se que nem as raízes de números negativos nem as regras operatórias eram claras para ele (KATZ, 2010; MOL, 2013).

Os algebristas europeus tinham evoluído consideravelmente no ramo da álgebra a partir dos conhecimentos islâmicos. No entanto, a notação ainda não era a mais simples, as resoluções eram dadas por procedimentos e alguns até usavam variáveis para as incógnitas, mas, até então, ninguém tinha registrado símbolos para expressar os coeficientes. Além do mais, textos gregos de grandes matemáticos foram traduzidos, com isso a ideia das demonstrações por axiomas e teoremas começa ser de interesse de alguns matemáticos (KATZ, 2010).

Influenciado pelos textos gregos o matemático e advogado francês, de intensa carreira política, François Viète (1540-1603) deu um passo decisivo para que a notação algébrica avançasse na direção do que conhecemos hoje. Pois, passou a designar por letras não somente as variáveis e as potências das variáveis, o que já era feito em sua época, mas também os coeficientes das variáveis. Com essas letras ele formou expressões algébricas com as quais se podia operar de acordo com as regras já conhecidas na álgebra do seu tempo. Segundo Katz (1998, p.464), Viète "reformulou o ensino da álgebra, substituindo a busca de soluções das equações pelo estudo pormenorizado da estrutura das equações, desenvolvendo assim a mais antiga, e conscienciosamente articulada, teoria das equações".

Viète percorreu uma boa parte do caminho para que atingíssemos a notação que utilizamos atualmente na álgebra, ele empregou vogais *A, E, I, O* e *U* para as variáveis desconhecidas e consoantes *B, C, D,...*, para as variáveis conhecidas, ou seja, para os coeficientes da equação. Para o quadrado da variável *A*, empregava a notação (expressão) "*A quadratus"*, enquanto o cubo da mesma variável era denotado por "*A cubus"*. A multiplicação era indicada pela palavra "*in*" e a igualdade por uma abreviatura de *aequalis* (*ae*). Ele realizou importantes progressos no cálculo algébrico e em suas aplicações. No entanto, sua contribuição mais significativa talvez tenha sido a de libertar a álgebra de casos particulares, permitindo que esta se tornasse o estudo de tipos gerais de expressões e de equações (KATZ, 2010; MOL, 2013).

É importante frisar que nas civilizações mais antigas (babilônicos, egípcios, chineses, gregos, hindus etc.) os números negativos não eram concebidos no sentido próprio e a resolução de equações trouxe indagações sobre os números negativos que surgiam nos cálculos e nas soluções das equações, entretanto não possuíam ainda estatuto definido.

Em alguns casos eram efetuadas a operação de subtração de um número menor por um maior (A – B), com A < B), como, por exemplo, 5 – 8 , mas o *número* –3 não era admitido como tal. Na obra *A Arte Analítica*, Viète usa seu novo método de representar expressões com variáveis para escrever algumas conhecidas identidades como: (A – B).(A + B), $(A - B)^2$, $(A + B)^2 + (A - B)^2$, entre outras, que só eram expressas verbalmente, puderam ser vistas como vemos hoje (KATZ, 2010). Com isso fica evidente que Viète usava a regras de sinais, mesmo sem dar significado a elas.

As quantidades negativas apareciam frequentemente nos procedimentos para resolver equações, sem a utilização de símbolos. Vale observar que números negativos, quando apareciam em cálculos já eram chamados de negativos, mas, enquanto solução de equações, eles eram chamados os fictícios. Este apelido foi dado por Cardano às soluções negativas das equações, ele não concebia que *menos vezes menos pudesse dar mais*. (EVES, 2011)

Os matemáticos deste período investigavam as regras de operações com números negativos, no entanto, embora esses números tenham sido reconhecidos como úteis para os cálculos, não eram considerados verdadeiros (ROQUE e CARVALHO, 2012).

> Os algebristas da Renascença tinham por objetivo resolver equações e, por esta razão, apesar de não admitirem certas quantidades como solução da equação, podiam aceitar quantidades que apareciam nos cálculos, mas que desapareciam no resultado. Estas quantidades eram utilizadas de modo puramente pragmático, sem que sua natureza fosse questionada. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 214)

A luz do exposto, os objetos que deveriam ser admitidos na Matemática ainda se confundiam com as grandezas geométricas e este motivo causa entraves para reconhecer os números negativos como entes matemáticos.

Com o intuito de validar identidades e resolver problemas a notação proposta por Viète dá um passo vital para que os negativos ganhem status de números, sendo assim possível operar com "letras" que representam quaisquer valores e não esqueçamos que o método grego de pensar a Matemática (axiomas, teoremas e generalizações) influenciou os matemáticos do período do Renascimento (KATZ, 2010).

> [...] Cardano ficou embaraçado pela falta de notação conveniente e Viète sempre se restringiu a soluções positivas. Assim, mesmo que o primeiro tenha dado vários exemplos de relações entre raízes de uma equação cúbica simples e entre raízes de equações relacionadas e o último tenha conseguido exprimir algebricamente a relação entre coeficientes e as soluções de equações de grau até cinco, desde que os valores fossem positivos, a teoria geral estava incompleta. (KATZ, 2010, p. 559)

Thomas Harriot (1560 – 1621), entendeu a necessidade de lidar com raízes negativas e imaginárias de equações, e conseguiu algum progresso nesse sentido. Ele percebeu a relação básica entre os coeficientes e as raízes de uma equação, onde estas podiam ser geradas a partir de suas raízes, realizando um produto entre binômios, em que um dos termos era a variável (KATZ, 2010).

Infelizmente Harriot não publicou boa parte de seus estudos, muitas de suas ideias permanecem inacabadas em suas notas, inclusive a descoberta citada acima, conforme relata Katz (1998, p. 560) "[...] assim foi conduzida a relação básica entre as raízes e os coeficientes de uma equação, mesmo no caso das raízes negativas e imaginárias, embora pareça nunca ter afirmado isto explicitamente como um teorema".

O francês Albert Girard (1595 – 1632), que morou boa parte de sua vida na Holanda, conseguiu melhorar as ideias de Harriot na relação entre raízes e coeficientes de uma equação, na obra publicada em 1629, denominada, "*Invention nouvelle em l'allgèbre*" (*Uma Nova Descoberta em Álgebra*), também fez a primeira afirmação sobre o Teorema Fundamental da Álgebra (KATZ, 2010). Extraímos desse mesmo autor o teorema que apresentamos a seguir:

> Teorema**:** Qualquer equação algébrica admite tantas soluções como a denominação da maior quantidade indicada. E a primeira facção das soluções é igual ao "coeficiente da segunda maior" quantidade, a segunda facção delas é igual ao "coeficiente da terceira maior" quantidade, [...] e aí por adiante, de forma que a última facção seja igual ao "termo constante" – tudo isto de acordo com os sinais que podem ser notados de ordem alternada. (KATZ, 2010. p.562)

Para facilitar o enunciado do teorema anterior, Girard criou um novo termo chamado *facções*. Onde, dados n números, a soma desses números é denominada de primeira facção. A soma de todos os produtos dois a dois é a segunda facção. A soma de todos os produtos três a três é a terceira facção. Esse processo se repete até a n-ésima facção, que é o produto dos n números (KATZ, 2010). Por exemplo, para os números 2, 3 e 7, estas facções seriam:

1ª facção: $2+3+7 = 12$

2ª facção: $2.3 + 2.7 + 3.7 = 41$

3ª facção: $2.3.7 = 42$

Para a compreensão dos números negativos Girard contribuiu significativamente ao conseguir dar um significado geométrico para as soluções negativas das equações "A solução negativa é explicitada em geometria pela retrogreção; o menos vai para trás onde o mais avança" (KATZ, 2010, p. 561). E mais ainda,

> [...] Ele até deu um exemplo de um problema geométrico cuja tradução algébrica tem duas soluções positivas e duas soluções negativas e notou no diagrama relevante que as soluções negativas deviam ser interpretadas como estando dispostas na direção oposta das positivas. (KATZ, 2010, p.561)

O fato é que ele sabia que uma equação de grau quatro, por exemplo, terá quatro soluções, independentemente dos respectivos sinais. Vamos a um exemplo extraído de Katz (2010, p. 562):

Exemplo Dada a equação $x^4 = Ax^3 - Bx^2 + Cx - D$, onde suas raízes são 1, 2, –3 e 4, Determinar os coeficientes A, B, C e D.

Inicialmente arranja-se a equação para que os graus se alternem, par no primeiro membro e ímpar no segundo membro.

$x^4 + Bx^2 + D = Ax^3 + Cx$

Pelo teorema temos:

A é igual a 1ª facção: $A = 1 + 2 - 3 + 4 = 4$

B é igual a 2ª facção: $B = 1.2 + 1.(-3) + 1.4 + 2.(-3) + 2.4 + (-3).4 = -7$

C é igual a 3ª facção: $C = 1.2.(-3) + 1.2.4 + 1.(-3).4 + 2.(-3).4 = -34$

D é igual a 4ª facção: $D = 1.2.(-3).4 = -24$

Portanto, a equação é: $x^4 - 7x^2 - 24 = 4x^3 - 34x$

O exemplo dado acima é uma ilustração da aplicação das regras de sinais.

O próximo personagem a ser citado é René Descartes (1596-1650) que será ainda referenciado neste trabalho, onde trazemos com maior riqueza de detalhes, aspectos históricos sobre a vida e obra desse matemático. Por hora, adiantaremos sua contribuição para álgebra a fim de finalizarmos esta seção. O texto de Descartes que destacamos refere-se ao Apêndice da sua obra O Discurso do método, intitulado *La Géométrie*.

> Praticamente toda *La Géométrie* está dedicada a uma completa aplicação da álgebra à geometria e a geometria à álgebra. [...] Além disso, [...] e o autor se interessava tão pouco [...] pelo significado de coordenadas negativas. Ele sabia de modo geral que as ordenadas negativas são orientadas em sentido oposto ao tomado como positivo, mas nunca usou abscissas negativas. (BOYER, 1996, p. 251)

Observando os trabalhos de Harriot, Descartes foi o primeiro a formalizar que: conhecendo uma raiz x_1 de uma equação de grau n é possível baixar este grau para $n-1$ dividindo a equação pelo binômio $x-x_1$. Porém, ao contrário de Girard ele considerava apenas as raízes distintas, por isso enunciava que uma equação “pode ter” tantas raízes quanto o seu grau. No Livro III de *La Géométrie*, ele constrói equações a partir de suas raízes. Por exemplo, ele multiplica $(x - 2).(x - 3).(x + 5)$ gerando o, que hoje chamamos de, polinômio de grau três $x^3 - 19x + 30$, onde suas raízes são 2, 3 e –5 (KATZ, 2010).

Descartes afirmava que o grau de uma equação pode ser diminuído dividindo-a por qualquer um de seus fatores, onde esses são binômios constituídos da incógnita, subtraído de uma raiz verdadeira, ou a incógnita somado a uma das raízes falsas (KATZ, 2010).

> [...] como descobrir raízes racionais, se existem, como baixar o grau da equação quando se conhece uma raiz, como aumentar ou diminuir as raízes de uma equação de qualquer quantidade, ou multiplicá-las ou dividi-las por um número, como eliminar o segundo termo, como determinar o número possível de raízes **“verdadeiras” ou “falsas” (isto é, positivas e negativas)** pela bem conhecida “Regra de sinais de Descartes” [...]. (BOYER, 1996, p.253)

A Regra de Sinais[8] a que Boyer refere-se anteriormente, primeiramente descrita por Descartes, em *La Geometria*, é um teorema que determina o número de raízes positivas e negativas de um polinômio. Segundo a regra, colocando o polinômio em ordem decrescente segundo os expoentes o número de raízes positivas é igual ao número de variações de sinal dos coeficientes do polinômio. Ou seja, Descartes não considerava números negativos como valores verdadeiros, sabia prever a quantidade de raízes de uma equação, mas as negativas eram contabilizadas e consideradas falsas (BOYER, 1996; KATZ, 2010).

Com isso, após Girard, os matemáticos compreendiam geometricamente raízes negativas e sabiam “gerar” uma equação a partir do produto de *polinômio* do tipo $(x–a).(x–b)...$, onde $a, b,...$, são as raízes da equação. Isto associado à revolução causada por Viète na notação e as contribuições dadas por Descartes (ou Harriot) na solução de equações, sem perder de vista o que se entendia por rigor matemático nesta época, evidencia que o uso dos números negativos com suas regras operatórias fossem usadas pelos matemáticos posteriores sem maiores restrições.

2.9. Um Século de Importantes Matemáticos e o Cálculo

O século XVII é marcado por importantes transformações no quadro geral na Europa. Politicamente o poder absoluto passa a ser questionado pela burguesia. Na Inglaterra uma série de Revoluções a partir de 1642 deslocou o poder do rei para o parlamento, transformando o país em uma Monarquia Constitucional - sistema político permanente até os dias de hoje. O quadro social mostrava-se severamente mais complexo. A sociedade, agora dividida entre os ambientes rural e urbano, apresenta uma diversidade de classes sociais muito maiores que a tripartição tradicional do período medieval entre clero, nobreza e servos (LE GOFF, 2007).

[8] Regra de sinais de Descartes: O número de raízes reais positivas da equação $p(x) = 0$, sendo p dado por $p(x) = a_nx^n + na_{-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} +...+ a_1 + a_{0,}$ é igual ao número de variações de sinal da sucessão $\{a_n, a_{n-1}, . . . , a_0\}$ ou um número inferior mas da mesma paridade.

As bases das grandes transformações que se consolidarão no século posterior começam a ser construídas no século XVII. Neste cenário, René Descartes viveu e escreveu maior parte de sua obra até meados do século. O grande ímpeto dado à matemática no século XVII foi partilhado por todas as atividades intelectuais e deveu-se, em grande parte, aos avanços políticos, econômicos e sociais da época. O século testemunhou um desenvolvimento no espírito de internacionalismo intelectual e no ceticismo científico. Politicamente o norte da Europa, conciliado à superação geral da barreira do frio e da escuridão nos longos meses de inverno e com os progressos no aquecimento e na iluminação, responde em grande parte pelo deslocamento da atividade matemática no século XVII da Itália para a França e a Inglaterra (EVES, 2011). Desde a época de Platão não havia tanta intercomunicação ente os pensadores.

A atividade Matemática começou a crescer em uma velocidade nunca vista até então e, muitos nomes que em períodos menos produtivos teriam sido exaltados ficam pouco lembrados ou esquecidos no apresentar dos fatos (KATZ, 2010).

Este novo cenário de “popularização” da informação vem até os dias atuais trazendo uma estupenda riqueza em todas as áreas de conhecimento, e com a Matemática não é diferente, o que faz ser inviável e foge do objetivo deste trabalho citarmos com detalhes todos os fatos matemáticos que ocorreram até os dias atuais.

Porém, convém ponderar que o final século XVII e o início do posterior traz nada mais que a invenção (ou descoberta) do Cálculo, embora atualmente alguns historiadores referem-se a Arquimedes como um nome principal ligado à gênese dessa área do conhecimento da Matemática (EVES, 2011). Não podemos passar pela História da Matemática sem relatar, mesmo que de maneira sucinta, relatos do cálculo de Newton e Leibniz, para verificarmos se realmente muitos fatos importantes para a Matemática ficam em segundo plano devido a grande atenção dada ao cálculo. Posteriormente, centraremos nossas atenções exclusivamente para os acontecimentos que levaram a compreensão e construção dos números inteiros.

> [...] o século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, graças, em grande parte, às novas e vastas áreas de pesquisa que nela se abriram. Indubitavelmente, porém, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior [...] os conceitos do cálculo têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta. (EVES, 2011, p. 417)

A descoberta (ou invenção) do cálculo é tão fascinante para os amantes da Matemática que ao citar os notáveis matemáticos do século XVI e XVII são lembrados, na maioria dos casos, os que contribuíram de alguma forma para a sua descoberta (ou invenção).

Dois dos primeiros matemáticos dos tempos modernos usaram métodos comparáveis aos de Arquimedes, foram eles: o engenheiro flamengo Simon Stevin (1548 – 1620) e o italiano Luca Valerio (c. 1552-1618) (BOYER, 1996).

Johann Kepler teve de recorrer a procedimentos de integração a fim de calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes de que ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho (EVES, 2011).

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) deixou uma obra vasta abrangendo matemática, óptica e astronomia, em grande parte foi o responsável pela introdução dos logaritmos na Europa, tudo isso fez dele um matemático muito influente, mas a obra que mais o projetou é o tratado *Geometria Indivisibilibus*, onde ele apresenta seu método dos indivisíveis (EVES, 2011).

Fermat é o primeiro a manifestar de modo claro o método diferencial, os procedimentos para se encontrar máximos e mínimos de uma função e denominados método de Fermat. John Wallis foi um dos matemáticos mais capazes e originais de seu tempo fez uso sistemático das séries em análise, discutiu as cônicas como curvas de segundo grau, em vez de considerá-las como secções de um cone. Isaac Barrow, um homem de grande estofo acadêmico, escreveu o livro *Lectione sopticae et geometricae*, onde observa-se uma abordagem muito próxima do processo moderno de diferenciação, mediante o uso do chamado triângulo diferencial (EVES, 2011).

Finalmente, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz dão moldes finais e se consagram, de maneira controvérsia, como os inventores do cálculo, na segunda metade século XVII.

> [...] o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral já se tinham feito muitas integrações; muitas cubaturas, quadraturas e retificações já haviam sido efetuadas; já aflorara um processo de diferenciação e muitas tangentes a curvas haviam sido construídas; a ideia de limite já fora concebida; e o teorema fundamental reconhecido. O que mais faltava fazer? Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Foi à primeira dessas duas coisas, ou seja, à criação de um cálculo manipulável e proveitoso, que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram sua contribuição. Assim, embora Newton e Leibniz tenham tido muitos precursores, a criação do cálculo em geral é atribuída a eles. (EVES, 2011, p. 435)

Na perspectiva dos números inteiros, Leibniz afirma que poderia calcular com as proporções, $\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$, uma vez que formalmente isto equivaleria a calcular com quantidades imaginárias, assim Leibniz definia os números negativos. Com isso ele condicionou a validade das operações com os negativos, ou seja, usou as regras de sinais sem demonstração e sem discussão (SÁ e ANJOS, 2010; EVES, 2011; KATZ, 2010).

Por outro lado, Newton escreveu uma aritmética denominada *Aritmética Universalis*, em que discorre sobre a solução de equações algébricas e sobre as regras para a multiplicação numérica e algébrica, aliás, Newton era hábil com manipulações de expressões e detentor de muitas regras para tal. Ele não provou a afirmação sobre a multiplicação, apenas a enunciou, (KATZ, 2010, p.780) "termos algébricos simples são multiplicados desenhando números em números e variáveis em variáveis, e depois designando o produto positivo se os factores forem ambos positivos ou ambos negativos, e negativo caso contrário".

Novamente percebemos que um paradoxo no contexto dos números negativos dentro da Matemática, particularmente dentro do cálculo, pois, é difícil conceber que os matemáticos, já dominando e manipulando com as novas ferramentas do cálculo, não teriam questionado as regras de sinais a ponto de deixarem registros escritos que levasse à público este fato. O desenvolvimento do cálculo levou a Matemática a um nível de conhecimento mais elevado, principalmente no âmbito do rigor para a época, e mesmo assim os negativos e suas regras operatórias continuam sendo apenas artifícios, ou entes imaginários, sem a devida formalização ou explicação.

Antes de adentrarmos nos séculos XVIII, XIX e XX, vamos considerar de modo especial duas personalidades do século XVII que muito contribuíram para que as futuras gerações compreendessem os números negativos.

2.9.1 René Descartes (1596-1650)

O filósofo, cientista e matemático francês, René Descartes (1596-1650), é um dos personagens principais deste trabalho já que suas ideias nos permitiram elaborar a proposta que apresentamos, ou seja, pelo seu método de operar com segmentos. Isso nos motiva a trazer neste capítulo um pouco da sua trajetória de vida e suas respectivas obras que colaboraram para tal.

Apesar de não ter seu nome relacionado à *construção do conjunto dos números inteiros* que será apresentada no capítulo IV, e nem ter sido um personagem que reconheceu os números negativos, Descartes ganha relevância ao apresentar sua *geometria*. Utilizaremos suas ideias para a elaboração das Tarefas que compõe um tratamento para as quatro operações básicas com números negativos por meio de construções geométricas envolvendo segmentos. Hilbert foi outro matemático que construiu uma *geometria* usando ideias análogas, cerca de trezentos anos mais tarde, à sua época traremos este personagem para o texto.

Descartes foi uma figura central do racionalismo, corrente filosófica que preconizava a busca da verdade por meios intelectuais e dedutivos sem contraposição dos meios sensoriais. Ou seja, inicia um pensamento inovador no campo da filosofia que ocorria na diretiva agostiniana do apego ao "eu pensante" juntamente à iluminação divino-natural das ideias superando a iluminação divina, permanecendo apenas na intuição do eu e do inatismo das ideias. Este pensamento ficou imortalizado pela sua célebre frase: "Penso, logo existo" (KATZ, 2010; MOL, 2013).

Na época em que os movimentos intelectuais da Idade Média e da Renascença entravam em declínio, ele concebeu novas ideias para a filosofia e a ciência, elaborando e defendendo-as com originalidade e brilhantismo. O pensamento cartesiano teve formação paulatina, a qual tudo era explicável em termos de matéria e movimento, porquanto teria se consolidado somente em 1637, com a publicação do *Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Buscar a Verdade nas Ciências*, popularmente conhecido como *O Discurso do Método.*

> Se, por um lado, a filosofia de Descartes era inovadora e revolucionária para sua época, por outro sua obra matemática inseriu-se na corrente evolutiva que teve início com os algebristas árabes e prosseguiu com os matemáticos do Renascimento. As bases da teoria hoje conhecida por Geometria Analítica foram lançadas em seu trabalho matemático mais importante, A Geometria, de 1637. Esse texto nasceu como um conjunto de três apêndices ao Discurso do Método [...] A Geometria, que apenas mais tarde ganhou existência como obra independente, era aberto com a seguinte frase: 'Todos os problemas em geometria podem facilmente serem reduzidos a termos tais que basta o conhecimento dos comprimentos de algumas retas para que sejam construídos'. (MOL, 2004, p. 96, grifo nosso)

No campo da Matemática René Descartes na obra *Règles pour direction de lésprit,* de 1628, anunciava uma nova ciência que seria uma espécie de Matemática Universal. Essa maneira inovadora de pensar a Matemática é a precursora citada por MOL, *La Géométrie*, de 1637, e foi batizada por *Mathesis Universalis*, que difere muito da matemática praticada até o século XVI, conforme o trecho:

> A *Mathesis Universalis*, nada tem a ver com a matemática de seu tempo. Ela permitiria reduzir a análise de um fenômeno qualquer a problemas relacionados à "ordem" e a "relações", por meio de raciocínios dedutivos. Com a álgebra, qualquer dedução pode ser traduzida em termos de equações. Os problemas geométricos devem ser formulados em linguagem algébrica pra que se possa penetrar nas relações que existem entre os objetos do universo. Este passo é fundamental para legitimar o estudo da geometria por meio da álgebra, pois o que esta última permite apreender são as proporções envolvidas nos objetos geométricos. (ROQUE e CARVALHO, 2011, p. 247)

Nesta linha Mol (2004) explica que a primeira seção de *La Géométrie* era intitulada "como o cálculo aritmético se relaciona às operações de geometria", embasada em dois objetivos: buscar a tradução das operações aritméticas para a linguagem geométrica (procedimento indispensável para validar verdades matemáticas desde a época de Euclides) e libertar a geometria do uso de diagramas através de procedimentos algébricos.

Com isso a álgebra sofreu significativo avanço, tanto em termos de interpretação geométrica como em notação, chegando a um formato muito próximo do atual. Na citada obra, as variáveis eram denotadas pelas últimas letras do alfabeto, enquanto as letras iniciais do alfabeto eram reservadas para os parâmetros.

> O uso de letras do começo do alfabeto para parâmetros e das do fim como incógnitas, a adaptação da notação exponencial a essas, e o uso dos símbolos germânicos + e –, tudo isso fez com a notação de Descartes se assemelhasse à nossa, pois naturalmente tiramos a nossa dele. Havia, porém uma diferença importante na maneira de ver as coisas, pois ao passo que pensamos em parâmetros e incógnitas como números, Descartes pensava neles como segmentos. Num ponto essencial ele rompeu com a tradição grega, pois em vez de considerar x^2 e x^3, por exemplo, como uma área e um volume, ele também os interpreta como segmentos. (BOYER, 1996 p. 248)

Ainda não era possível perder de vista os procedimentos geométricos para aludir e verificar verdades matemáticas, então Descartes avança significativamente no sentido de entender números ao "trocar" quadrados e cubos de números que eram considerados áreas e volumes geométricos, respectivamente, por valores expressos por segmento de reta (BOYER, 1996). Com isso, a "álgebra geométrica" tornou-se flexível a ponto de lermos "x ao quadrado" sem visualizarmos ou associarmos a um quadrado. Agora é possível trabalhar com potências maiores sem se preocupar com a ausência de um significado geométrico. Descartes foi o primeiro a utilizar a notação moderna de potência (x^2, por exemplo) (KATZ, 2010).

2.9.2 Simon Stevin (1548-1620)

Finalizaremos nossa corrida pelo século XVII com o matemático belga Simon Stevin (1548-1620), um nome não tão lembrado, provavelmente porque suas descobertas estão desvinculadas do cálculo, mas que colaborou significativamente para a incorporação dos números negativos no meio acadêmico da época.

Stevin foi funcionário de um comerciante em Antuérpia, integrou o exército do príncipe Maurício de Nassau. Ele projetou um sistema de comportas para inundar determinadas áreas e eliminar qualquer inimigo, uma importante defesa da Holanda. Ele também inventou um carro de 26 passageiros com velas para uso ao longo da beira-mar (SÁ e ANJOS, 2010).

Na Matemática é lembrado por apresentar uma ideia relevante sobre frações e a sua utilização diária. Embora ele não tenha inventado frações decimais ajudou a padronizar o seu uso (SÁ e ANJOS, 2010).

No campo dos números negativos justificou o produto $(a–b).(c–d)$ geometricamente. Declarou que o fato de *menos vezes menos resultar em mais* é apenas um artifício de cálculo. Mas, não há registros que ele reconhecesse a existência de um número negativo. Porém, contribuiu para o processo de incorporação dos números negativos no meio acadêmico aceitando as raízes negativas de uma equação substituindo a raiz negativa x pela sua oposta $(- x)$. Além do mais, admitiu a adição entre $a + (- b)$ ao invés de $a - b$ (SÁ e ANJOS, 2010). Portanto, ao invés de dizer subtraia 5 ele dizia some –5.

Ao escrever uma definição para número como “aquilo pelo qual se explica a quantidade de alguma coisa” acreditamos que ele estava aquém de conceber um número como algo abstrato e consequentemente, também não concebia o número negativo como ente independente, apesar de observar de situações acerca dos números negativos, particularmente das regras de sinais, que hoje concebemos por verdade absoluta. Porém, ele não entrou no mérito do rigor matemático, se contentou em admitir que é um artifício indispensável para a lógica e exatidão dos cálculos.

Em um contexto mais abrangente podemos questionar se até então havia conhecimento teórico suficiente de Matemática, que poderia levar a uma definição para número inteiro equivalente a que concebemos hoje, produzindo assim, explicações para as *regras de sinais*.

Até este momento histórico, grandes e renomados matemáticos se depararam com números negativos e no mais, o que é registrado é a aceitação desses números em raízes ou coeficientes de equações. Portanto, acreditamos que houvessem inquietações dos matemáticos sobre as *regras de sinais* que vislumbravam sua validade, mas esbarravam na impossibilidade de fundamentá-las.

2.10. Idade Moderna, um contexto geral

O século XVIII assistiu a uma evolução filosófica, científica e cultural que o faria ser conhecido como o “Século das Luzes”. O Iluminismo institui entre os pensadores a crença no poder da razão como fonte de transformação da sociedade. Ganharam espaço os ideais democráticos e liberais que culminariam, no final do século, nas Revoluções Americana e Francesa (HOBSBA, 1981).

A divisão tradicional popularizada pela historiografia metódica dá como o início da Idade Contemporânea, a Revolução Francesa iniciada em 1789, final do século XVIII. Também no século XVIII inicia-se o um processo de modernização dos meios de produção acompanhado da evolução dos meios de transporte que culmina na intensificação do comércio. Este fenômeno social foi batizado de Revolução Industrial que marcaria profundamente as sociedades ocidentais, principalmente no aspecto econômico (MOL, 2013).

> A Revolução Industrial proporcionou um aumento global da renda e um processo de urbanização acelerado, resultando no aparecimento de grandes cidades. Novas tecnologias e processos transformaram muitas áreas de produção. (MOL, 2013, p. 114)

No entanto, é no século XIX o momento da expansão da atividade industrial pelo mundo, fazendo crescer de forma significativa a classe operária que vai ser relegada a uma condição de exploração severa. Tal condição vai acabar por gerar os movimentos e ideais operários como o socialismo (HOBSBAWM, 1981).

Compreender a Idade Contemporânea é compreender o processo de amadurecimento e consolidação da sociedade burguesa capitalista, sociedade que ainda é vigente até o presente século XXI, mesmo com suas profundas transformações (HOBSBAWM, 1981).

O domínio dos meios de produção interfere diretamente na ciência, em particular na matemática, pois a produção de papel e a indústria da impressão se beneficiaram de avanços tecnológicos que proporcionaram uma significativa redução do custo, abrindo a possibilidade da massificação do acesso a livros e jornais. No século XVIII os governos começaram a atuar sistematicamente no fomento da ciência, principalmente da Matemática (MOL, 2013).

A Matemática considerada elementar é constituída dos conteúdos ensinados na educação básica, a álgebra clássica superior, a geometria analítica e o cálculo das séries básicas dos cursos superiores de Matemática. “Segue-se, então, que todo aquele que pretender estudar com a atenção devida o que aconteceu em Matemática nos séculos XVIII, XIX e XX, precisa de requisitos avançados bem além do cálculo", segundo Eves (2011, p. 461).

Para ilustrar a impossibilidade de elencar fato a fato os acontecimentos dos três últimos séculos, Eves afirma de forma concisa que:

> A grande história da matemática de Moritz Cantor, que termina com o fim do século XVIII, consiste em quatro alentados volumes de cerca de mil páginas, em média, cada um. Já se estimou, com bastante moderação, que uma história da matemática do século XIX, com a mesma riqueza de detalhes, requereria pelo menos quatorze volumes com essa média de páginas. Ninguém ainda, contudo, arriscou uma estimativa semelhante quanto à história da matemática do século XX [...] e, a compreensão desse material pressupõe a formação profunda de um especialista. Ilustra bem o crescimento quase explosivo da pesquisa matemática nos tempos modernos. Outro dado estatístico que põe em relevo a intensa atividade matemática deste século dá conta de que mais da metade de toda a matemática conhecida foi criada durante os últimos 50 anos e que metade dos matemáticos de todos os tempos estão vivos hoje em dia. (EVES, 2011, p.461)

Vale ratificar que o cálculo se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas de elevado nível de dificuldade em tempos anteriores, sua ampla e surpreendente aplicabilidade atraiu muitos matemáticos da época, resultando daí uma profusão de artigos.

Entretanto, com passar do tempo foram surgindo várias evidências ligadas a conceitos fundamentais e básicos da Matemática que frequentemente eram utilizados. Era necessário empreender esforços no estudo dos fundamentos da Análise Matemática. Vários matemáticos em diversos locais se dedicaram a esse empreendimento, que alastrou-se de modo semelhante a outros ramos da Matemática. Foi necessário um refinamento de conceitos importantes levando a generalizações mais complexas. "Conceitos como os de espaço, dimensão, convergência e integrabilidade, [...] se tornaram muito abstratos. [...]" (EVES. 2011, p. 462) Toda essa movimentação foi capaz de produzir vários outros ramos e assuntos da Matemática, como a topologia, a Teoria de Conjuntos de grande relevância para o que conhecemos hoje como Fundamentos da Matemática.

A *nova* Matemática se desdobra em dois ramos: a matemática pura que é estudada por si só, e a matemática aplicada que estuda problemas aplicados a alguma situação de outra área do conhecimento (EVES, 2011).

O século XVII e seus posteriores vivem uma verdadeira explosão de descobertas matemáticas. O que se sabe sobre os números negativos, até então, era suficiente para o estudo do Cálculo que tomava quase que exclusivamente a atenção dos matemáticos e, talvez por isso, pouco se motivou a estudar ou indagar os negativos assim como outras áreas da Matemática.

2.11 A História dos Negativos: o século XVIII

Um novo horizonte sobre os números negativos começa aparecer no desenrolar do século XVIII, a partir dos estudos do matemático escocês Colin Maclaurin (1698 – 1746), entre outros fez um trabalho notável em geometria estudando curvas planas e escreveu uma memória importante na chamada *Teoria das Marés*. Quanto aos números negativos, em seu livro "*A Tretise of Algebra in Three Parts*" (1748) publicado postumamente, propôs, entre outras, definições sobre quantidades negativas (KATZ, 2010).

Nesta obra, Maclaurin expõe a ideia de que uma quantidade negativa é tão real quanto uma positiva, porém tomada em sentido oposto. Entretanto, ele afirmava que uma certa quantidade só poderia existir por comparação, jamais isoladamente. Para isso, ele enunciou: “se uma quantidade negativa não possui outra que lhe seja oposta não se pode desta subtrair outra menor”. Logo, Maclaurin admitia quantidades negativas apenas em relação ao zero de origem. (KATZ, 2010; EVES, 2011; SÁ e ANJOS, 2010).

Maclaurin tenta dar sentido aos números negativos com situações reais, muito semelhante ao que fazemos atualmente em sala de aula para justificar a existência desses números para nossos estudantes quando apresentamos os números negativos na escola. Ele usava termos como “excesso e déficit”, “dinheiro devido a um homem” e “elevação acima ou abaixo da linha do horizonte” (KATZ, 2010). Além do mais, ele denotava quantidades positivas as que são precedidas do sinal “+”, e negativas as que são precedidas do sinal “-”. Ele dizia que essas quantidades podem entrar num cálculo algébrico qualquer, acrescentando ou diminuindo alguma grandeza.

Em relação às operações com os números inteiros, Maclaurin é mais rigoroso que seus antepassados, em um trecho de sua obra ele justifica as *regras de sinais*. É considerado como o primeiro matemático que chegou perto de compreender os números negativos tornando-se, portanto, uma importante referência para as futuras gerações. Ele justifica que produto entre dois valores negativos é positivo da seguinte maneira: “Se $a - a = 0$, então $n.(a - a) = 0$, o primeiro termo do produto é $+na$ e o segundo só pode ser o $-na$. De forma análoga $-n\,.(a - a) = 0$, o primeiro termo é $-na$ e o segundo só pode ser $+na$. Portanto $(-n).(-a) = +na$ (KATZ, 2010).

O alemão Leonhard Paul Euler (1707 – 1783), também escreveu uma álgebra intitulada “*Vollstanddoge Anleitung zur Algebra”* (*Uma Introdução completa a Álgebra*), onde tenta dar uma prova para as *regras de sinais*, mas foi menos eficiente que Maclaurin.

> Comecemos multiplicar –*a* por +3. Como –*a* pode ser considerado uma dívida, é evidente que se tomarmos esta dívida três vezes, ela se torna três vezes maior, e consequentemente o produto requerido é –3*a*. Euler observa depois a generalização óbvia de que –*a* vezes *b* será –*ab* e passando de seguida para o caso do produto de dois números negativos. Aqui ele diz apenas que –*a* vezes –*b* não pode ser igual a –*a* vezes *b*, ou –*ab*, e portanto tem de ser igual a + *ab*. (KATZ, 2010, p. 785)

2.12 Os Números Negativos e o *status* de Número: Séculos XIX e XX

Até o início do século XIX, álgebra referia-se apenas a resolver equações, já nos meados deste século houve uma mudança de pensamento, e a álgebra passou a englobar diversas outras estruturas matemáticas, como: álgebra das matrizes, álgebra dos vetores, álgebra dos conjuntos, álgebra dos restos, entre outras. Dentro dessa mudança de noção podemos considerar uma movimentação que inclui várias descobertas e inovações na Matemática, ente elas, a *Construção do Conjunto dos Números Inteiros*, e com isso a sustentação matemática definitiva das regras de sinais (KATZ, 2010).

A nova tendência de estudos de Teoria dos Números e de resolubilidade de equações dos matemáticos do inicio do século XIX despontavam conceitos implícitos de Teoria dos Grupos (KATZ, 2010).

A nova ideia de álgebra consiste em determinar um conjunto de elementos com regras operatórias bem definidas, ou seja, corria um sentimento de liberdade algébrica entre os estudiosos. Neste contexto, alguns matemáticos tentaram axiomatizar as ideias fundamentais desta teoria e determinar até que ponto as propriedades dos números inteiros positivos podem ser generalizadas a outros tipos de quantidades (KATZ, 2010).

Os conhecimentos necessários para a construção do conjunto dos números inteiros começam ser introduzidos pelos trabalhos de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), que introduz diversos novos conceitos a uma teoria, dentre esses os primeiros conceitos de corpo além dos primeiros exemplos de grupos e matrizes.

Um desses matemáticos foi Ernest Kummer (1810 – 1893), por volta de 1845, na tentativa de estender as propriedades dos inteiros positivos a outros corpos de números, descobriu o que ele batizou de números complexos ideais (Teoria dos números complexos ideais). O próprio Kummer notou muitos aspectos semelhantes à teoria criada por

Gauss. Posteriormente, ele dedicou seus esforços para estudar a divisibilidade desses números. (KATZ, 2010).

Foi Arthur Cayley (1821 – 1895) quem apresentou a primeira definição de grupo abstrato em 1856, mas ele não foi bem preciso apesar de chegar muito próximo disso. Dezesseis anos depois Leopold Kronecker (1823 – 1891), aluno de Kummer, percebeu que era possível desenvolver uma teoria abstrata a partir dos trabalhos de seu professor e também chegou muito próximo da definição correta de Grupo. Provavelmente Kronecker não conhecia as publicações de Cayley, pois os trabalhos ficaram parecidos mudando basicamente as notações (BOYER 1996; KATZ, 2010).

No ano de 1822 surgiram novas publicações que tentam melhorar os trabalhos anteriores sobre grupos abstratos de Cayley e Kronecker. Neste passo, Walther von Dyck (1856 – 1934) foi o matemáticos que deu a definição moderna de *grupo abstrato*[9], e mostrou como construir um grupo utilizando geradores e relações. De igual forma, Heinrich Weber (1842 – 1913) definiu grupo abeliano[10] e provou o teorema fundamental dos grupos abelianos. Vale lembrar, que a notação usada nos dias atuais difere um pouco da usada por esses matemáticos, mas o texto usado por eles é eficiente para as definições (BOYER, 1996; KATZ, 2010).

Segundo Katz (1998, p. 872) a definição de "corpo" é oriunda do estudo de números determinados a partir das soluções de equações algébricas, encontrada nos trabalhos de Leopold Kronecker e Richard Dedekind (1831-1916). Kronecker "acreditava que a álgebra e a análise podiam ter uma fundamentação mais rigorosa, baseando todos os seus conceitos em construções, a começar pelos números inteiros". Kronecker é autor da célebre frase: "Deus fez os números inteiros – todo o resto é invenção dos homens". Ao estudar corpos de números ele buscava construir qualquer número a partir dos inteiros, consequentemente dos racionais, ou seja, um número irracional só faria sentido se fosse construído através de uma

---

[9] Definição moderna de grupo abstrato: Um conjunto $\mathbf{G}$ é um *grupo* quando uma operação (*) entre os elementos de $\mathbf{G}$ estiver definida e tem as seguintes propriedades:
a) Fechamento - Para todo $a \in \mathbf{G}$ e todo $b \in \mathbf{G}$, o resultado de $a*b$ também está em todo $\mathbf{G}$, ou seja, a operação é interna;

b) Associatividade - Para todo $a \in \mathbf{G}$ e todo $b \in \mathbf{G}$ e todo $c \in \mathbf{G}$ tem-se: $(a*b)*c = a*(b*c)$;

c) Elemento Identidade - Para todo $a \in \mathbf{G}$, existe $e \in \mathbf{G}$, tal que $e*a = a*e = a$;

d) Elemento Inverso - Para todo $a \in \mathbf{G}$, existe um elemento correspondente $a^{-1} \in \mathbf{G}$ tal que $a^{-1}*a = e$;

[10] Obs: *Grupo Abeliano* é o *grupo* que possui a propriedade comutativa: $b*a = a*b$;

relação bem definida com um número racional, sendo assim podia admitir um irracional sem se preocupar com sua irracionalidade (KATZ, 2010).

Por outro lado, Dedekind se incomodava com o fato de Kummer ter estudado apenas a divisibilidade entre os *números ideais*, isto o motiva a concentrar suas forças nesta empreitada, começando por definir um *número algébrico* (k)[11]. Posteriormente definiu *inteiro algébrico*, que diferencia da definição de número algébrico pelos coeficientes inteiros ao invés de racionais. Com isso ele sinaliza os primeiros passos no sentido de compreender definitivamente a estrutura dos números, conforme ressalta Katz (1998, p. 850), “Dedekind decidiu que já que não havia necessidade de qualquer invenção, como a de número ideal de Kummer, e que bastava considerar somente o sistema de números já existente”. Portanto, ele estudava corpos numéricos focando no próprio conjunto de elementos e não em um processo similar para construir todos os números. Após dar uma definição de corpo numérico[12] ele observou que o menor corpo de números é o conjunto dos números racionais e o maior é o conjunto dos complexos (KATZ, 2010). Porém, novamente foi Weber, quem definiu abstratamente *um corpo*, juntando as ideias de Kronecker e Dedekind.

Dedekind contribuiu em outras áreas não menos importantes da Matemática, como na Análise. Na reta numérica observou que a essência da sua continuidade não está ligada à densidade, mas à natureza da divisão da reta em duas partes, que chamou classes, através de um único ponto sobre a reta. A essa divisão da reta chamou de *corte*, que passaria a ser o apoio da Análise, pois com essa observação o *segredo da continuidade seria revelado*. Percebeu também que os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais. Esta conclusão é conhecida como Axioma de Cantor-Dedekind. Ilustrando a importância dos estudos dos números reais de Dedekind e outros importantes matemáticos.

> Uma vez que se pode fazer com que o grosso da matemática existente se alicerce no sistema dos números reais, é natural a curiosidade de saber se seus fundamentos podem penetrar mais fundo ainda. Nos fins do século XIX, com o trabalho de Richard Dedekind (1831-1916) [...] esses fundamentos se assentaram no muito mais simples e básico sistema dos números naturais. [...] assim o grosso da matemática pode ser fundamentado sobre uma plataforma na teoria dos conjuntos. (EVES, 2011 p. 611)

---

[11] k é o número complexo que satisfaz a equação algébrica de coeficientes racionais do tipo: $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_{n-1}{}^{n} + na = 0$

Na Inglaterra, no século XIX, um movimento voltado para as verdades matemáticas havia se instaurado. Este movimento era encabeçado pelo matemático Georg Peacock (1791 – 1858), que publicou em 1830 a obra *Treatise on Algebra*, que contestava o uso sem fundamentação adequada dos números negativos e imaginários (lembrando que esses números foram utilizados livremente desde a época do Renascimento, pois eram considerados necessários para os resultados algébricos). Nesta linha os matemáticos Francis Maseres (1731 – 1824) e Willian Frend (1757 – 1841) renunciaram especificamente a utilização dos negativos e imaginários (KATZ, 2010). Outro matemático que seguiu a linha de Peacock foi Augustus de Morgan (1806 – 1871).

O matemático William Rowan Hamilton (1805 - 1865) admitia que os números negativos e imaginários possuíam fraca fundamentação. Seu intuito era dar bases sólidas à álgebra assim como na geometria, para isso acreditava que eram necessários certos princípios intuitivos (KATZ, 2010). Para conseguir fundamentar os citados números, ele fez uma analogia (princípio indutivo) entre eles e o *tempo puro*, algo muito parecido com a própria construção do conjunto dos números inteiros, que podemos observar no Capítulo IV deste trabalho.

> Hamilton assumiu que havia um conjunto M de momentos que eram ordenados por $<$ tal que, para todos A e B em M, ou $A = B$ ou $A < B$ ou $A < B$. Definiu então uma relação de equivalência no conjunto de pares de momentos, fazendo (A, B) equivalente a (C, D), se as seguintes condições forem satisfeitas: Se o momento B for idêntico a A, então D tem que ser idêntico a C; se B for posterior a A, então D tem que ser posterior a C exatamente na mesma medida; e se B for anterior a A, então D tem que ser anterior a C exatamente na mesma medida; (KATZ, 2010, p. 881)

Vale ressaltar que Hamilton não utilizou a notação moderna para as relações de equivalência. Ele chamou de a o valor numérico que representa o tamanho do intervalo de tempo de A para B, consequentemente de C para D.

A legitimidade dos números negativos deve-se, definitivamente, a Hermann Hankel (1839-1873), matemático e professor alemão, nascido em Halle, e conhecido por seus estudos sobre sistemas numéricos reais, complexos e hipercomplexos. Após estudar sobre a língua grega, aprofundou seus conhecimentos na Matemática observando matemáticos antigos. Fez um estudo sistemático das regras de aritmética com o *Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze* (*Princípio da permanência de leis formais*) e escreveu outro trabalho importante, *Theorie der complexen Zahlensysteme* (*Teoria do Sistema dos números Complexos*). Nesta última obra ele formulou o Princípio de Permanência das Formas Equivalentes e das leis formais que estabelece um critério geral de algumas aplicações do conceito de número, que atinge o nível esperado de compreensão sobre os números relativos. Quando na universidade foi aluno de Kronecker (BOYER, 1996).

Hankel conseguiu aplicar as ideias que estavam se desenvolvendo com seus contemporâneos, conforme vimos anteriormente, mudando o ponto de vista do "concreto" para o "formal" no que se refere a números abstratos.

Cumpre destacar que Hankel tinha o propósito de definir a teoria sobre números complexos e foi apenas de passagem, em algumas de suas demonstrações, que ele desvendou por completo todas as dúvidas que pairavam sobre os números negativos (SÁ e ANJOS, 2010). Ele afirmava que os números não são descobertos e sim inventados ou imaginados, logo, aquele que procurar explicações lógicas na natureza, ou no mundo real, não conseguirá adquirir maturidade em conceitos matemáticos que, outrora, são definidos para um mundo ideal. Sob esta linha de raciocínio ele abandonou o ponto de vista do "concreto" baseado em exemplos práticos passando a adotar o "formal" a partir das propriedades aditivas e multiplicativas do conjunto dos números reais (SÁ e ANJOS, 2010; BOYER,1996; EVES, 2011).

Esta situação é comparável aos trabalhos de Hamilton que acreditava, no início, na existência de uma multiplicação em um espaço de três dimensões. Desvincular número de alguma grandeza e associá-lo a pares ordenados e tratá-lo com ente matemático abstrato munido de propriedades, foi o passo derradeiro dado por Hankel nas dúvidas que pairavam sobre as propriedades e regras acerca dos números negativos. Regras que já eram aceitas, mas incomodavam os matemáticos e com mais ênfase neste século onde o movimento de aritmetização da Análise toma corpo.

Atentos às ideias de Hankel, porém segundo linguagem e notação atual faremos, no Capítulo IV deste trabalho, uma C*onstrução do Conjunto dos Números Inteiros.*

São essas considerações que nos levam a acreditar que uma prova definitiva para a aceitação dos números negativos, com suas regras e propriedades operatórias dificilmente poderiam ter sido produzidas em épocas mais remotas. Embora toda esta exposição da história da Matemática possa parecer demasiada demais para os objetivos do nosso trabalho, sentimos a necessidade de apresentá-la para fundamentar nossas conclusões acerca das dúvidas que se possa ter a respeito da possibilidade de uma história encurtada. Pois, quando fazemos referência aos números inteiros e suas operações, sequer imaginamos que tantas e tantas voltas foram necessárias para que matemáticos pudessem apresentar a definição do que seja um número inteiro.

Pois, para conseguir tal fato, oficializado por Hankel, foi preciso ocorrer uma mudança de mentalidade acerca de números abstratos e a descoberta de novos conceitos matemáticos como a teoria dos grupos e corpos numéricos, além de desvincular número de quantidade ou medida de um segmento de reta. Mais explicitamente, que fosse necessário surgir novos ramos da Matemática. Em última análise, para que a *regra dos sinais* fosse finalmente aceita houve a necessidade de um período de 1500 anos, de Diofanto à Hankel.

A experiência mostra que crianças de Ensino Fundamental se comportam de modo análogo aos matemáticos dos séculos XVI, XVII e XVIII ao lidarem com os números negativos, ou seja, apenas aceitaram as regras. O nosso desafio é facilitar a compreensão dos números negativos juntamente com as regras de sinais recorrendo apenas ao conhecimento possível por crianças de sétimo ano. Enfrentaremos esta situação didática apresentando uma proposta que será descrita no próximo capítulo deste trabalho.

2.12.1 David Hilbert (1862 – 1843)

Voltamos a falar, agora com mais detalhes, sobre Hilbert, um notável matemático alemão nascido no século XIX em Königsberg, atualmente Kaliningrado, cidade onde realizou seus estudos, na Universidade de Königsberg. Além de um grande nome do seu tempo aos dias de hoje, Hilbert foi um dos últimos matemáticos universalistas. Suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da Matemática atual, como: formas algébricas, teoria algébrica dos números, fundamentos da geometria, equações integrais, Física teórica e fundamentos da Matemática (KATZ, 2010).

A referência ao seu nome, com mais detalhes deve-se a posição que ele ocupa neste trabalho. Pois, foi a partir das ideias de Descartes e com mais ênfase, de Hilbert que tivemos subsídios para elaborar uma proposta para construir um tratamento para o conjunto dos números inteiros e suas operações.

Hilbert publicou em 1899 a obra *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos da Geometria*), que tinha como objetivo central escolher um conjunto simples e completo, de axiomas independentes e, deduzir, a partir deles, teoremas geométricos.

Os conhecidos "Axiomas de Hilbert" para sua geometria foram divididos em cinco conjuntos: os axiomas de incidência, de ordem, das paralelas, de congruência, e de continuidade e completude. Foi a partir desses teoremas que ele foi capaz de atingir seu objetivo, deduzir vários teoremas Euclidianos e Aristotélicos do ponto de vista estritamente formal e rigoroso (KATZ, 2010).

Concluimos nossa exposição acerca do conhecimento que consideramos capaz de nos auxiliar a compreender aspectos da história dos números inteiros.

O próximo capítulo, que pode ser considerado o centro deste trabalho, vem com o intuito de cumprir o objetivo principal deste texto, apresentar a proposta almejada.

CAPÍTULO III

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS E SUAS OPERAÇÕES: UMA PROPOSTA DE TRATAMENTO.

3.1 Multiplicação e divisão de segmentos proposta por Hilbert e Descartes

No Capítulo I anunciamos a problemática sobre o tratamento do conjunto dos números inteiros, destacando as operações de multiplicação e divisão. Nossa experiência mostra que os problemas levantados derivam da falta de compreensão, por parte dos estudantes, das regras operacionais. Particularmente, no que se refere a encontrar uma justificativa, adequada àquela fase escolar, que seja capaz de explicar porque o produto entre dois números negativos resulta em um número positivo.

Nessa tônica, desenvolvemos uma sequência didática com a intenção de abordarmos o assunto apresentando uma proposta capaz de promover a compreensão dessas regras. Nesse capítulo traremos algumas Tarefas com objetivos diversos que abordam o Conjunto dos Números Inteiros e suas operações.

Por outro lado, o Capítulo I deste trabalho mostra que tal dificuldade é compreensível e aceitável uma vez que, dentro da própria Matemática, os números negativos foram aceitos à luz de muitos entraves e relutância após um longo período de tempo.

Acreditamos que o maior impasse vivenciado pelo professor ao abordar a multiplicação entre números negativos, conforme verificamos no Capítulo 1, é a quebra da sequência lógica na transição das regras operacionais de adição para as regras operacionais da multiplicação dos números inteiros. Lembrando que no tratamento de números naturais, anterior ao conjunto dos números inteiros, a operação de multiplicação possui uma sustentação na soma de parcelas sucessivas.

Cabe-nos relembrar os seis obstáculos histórico-epistemológicos observados em Glaeser (1981) sobre o desenvolvimento dos números inteiros, aos quais:

> 1- Inaptidão para manipular quantidades isoladas;
> 2- Dificuldade em dar sentido a quantidades negativas isoladas;
> 3- Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números;
> 4- Ambiguidade dos dois zeros: zero absoluto e zero origem;

> 5- Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido “concreto” atribuído aos seres numéricos;
> 6- Desejo de um modelo unificador. É a intenção de fazer funcionar um “bom” modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante. (TEIXEIRA, 1993, p.62)

O conteúdo Números Inteiros junto às suas operações é abordado no sétimo ano do Ensino Fundamental, conforme propõe as Diretrizes Curriculares da Educação para o Estado do Paraná. Nessa tônica, percebemos a dificuldade que o docente tem de transitar, dentro deste estudo, das regras da adição para a multiplicação (regras de sinais) sem perder a sequência adotada desde o início do estudo – estagnação no estágio das operações concretas (dificuldades 5 e 6). Os números negativos são apresentados de modo metafórico e, posteriormente, outorgada uma regra operatória de multiplicação (GLAESER, 1981).

Segundo o Dicionário Aurélio, *metáfora* possui o seguinte significado: “Tropo que consiste na transferência de uma palavra para um âmbito semântico que não é o do objeto que ela designa, e que se fundamenta numa relação de semelhança subentendida entre o sentido próprio e o figurado; translação”, que é a referência enquadrada nos moldes como os professores se referem a números negativos ao apresentá-los aos estudantes.

É evidente que, apresentar os números negativos tal como são para o matemático, como na *Construção* constante no Capítulo IV, não seja adequado a esta fase escolar. Pois, o tratamento formal exige um alto nível de abstração. Entretanto, trazemos a gênese da operação considerada, conclusivamente, assim como a matemática propõe em termos formais. E para realizarmos as operações e estabelecermos as regras necessárias para tal, procuramos adotar um contexto que pudesse abarcar todo o tratamento do conteúdo sem quebrar a sequência e superar o obstáculo 6 e, por conseguinte, deixar de causar o desconforto com o que vem sendo feito, segundo nossas considerações no Capítulo I.

Vale lembrar que uma análise das trajetórias percorridas pela humanidade na constituição dos objetos matemáticos, em uma visão crítica, tornou possível ampliarmos nossa visão sobre o conjunto dos números inteiros e suas operações. Sendo assim, ao reaver esses caminhos trilhados, assim como Cyrino e Pasquini (2010), buscamos uma conexão na qual eles possam lidar criticamente com problemas que pertençam a uma cultura matemática, como ela está organizada e articulada, de modo que possam produzir significados para os variados conceitos.

Cyrino e Pasquini (2010, p.38) afirmam que “a busca de modelos que expliquem simultaneamente a adição e a multiplicação de inteiros baseando-se em operações internas pode se constituir um obstáculo em sala de aula [...] (obstáculo 5 e 6)". Assim, elaboramos algumas tarefas que poderão ser propostas para estudantes do sétimo ano envolvendo os números inteiros que serão representados por segmentos. Essas tarefas envolvem construções geométricas que podem potencializar a compreensão das regras de sinais entre números inteiros e facilitar a superação dos obstáculos anunciados por Glaeser (1981).

Nossa proposta tem como base os estudos desenvolvidos por Cyrino e Pasquini (2010) que tratam do tema para um curso de formação de professores. As autoras se apropriam das ideias de Descartes e Hilbert para construir uma abordagem para as operações de multiplicação e divisão de números inteiros. Nossa contribuição deriva da adaptação desta proposta para o nível desejado, aliada a conceitos básicos necessários que estudantes desta fase escolar necessitam face aos pré-requisitos para o tratamento deste assunto. Outro autor que se dedicou ao tema utilizando esta mesma base foi Rodrigo Balestri (BALESTRI, 2007). Nosso trabalho foi além dos citados, pois consideramos a adição e a subtração destes números construindo uma proposta que depende de um modelo geométrico com base nas ideias que Descartes e Hilbert utilizadas para apresentar as *suas geometrias.*

Para melhor interpretarmos as atividades seguintes retomaremos de maneira mais fiel possível as ideias de Descartes e Hilbert, com uma adaptação, se necessária, de notação, particularmente, na multiplicação e na divisão, como faziam *o cálculo com segmentos*. Com relação às operações de adição e de subtração trazemos nossa contribuição mais explícita. Desenvolvemos uma forma de realizar essas operações mantendo o mesmo contexto, considerando os segmentos como representações para os números inteiros. E, mais ainda, com a possibilidade de mostrarmos a forma como o matemático apresenta a subtração, qual seja, como a soma com o inverso, apesar de não adentrarmos em detalhes dessa operação quanto à propriedades e resultados que possam decorrer da mesma.

3.1 Descartes e sua Geometria

Embora a história sobre Descartes junto a outros matemáticos de seu tempo fora contemplada no Capítulo II, voltamos com esse personagem que exerce papel fundamental para o desenvolvimento da proposta apresentada nesse trabalho.

A luz do século XVII, o francês, filósofo, cientista e matemático, René Descartes (1596-1650), pertencia a um período onde os matemáticos tinham grande dificuldade de aceitação dos números negativos. A história nos mostra um forte apelo à geometria para sustentar todo o trabalho que era desenvolvido acerca dos números, em outras palavras, número era um ente geométrico. Nesta época, a geometria ainda era capaz de dar sustentação às verdades matemáticas que eram questionadas. Neste contexto, Descartes coloca em seu livro *La Géométrie* as seguintes palavras:

> As linhas são símbolos mais simples que os números, porque se podem exprimir por linhas todas as relações de grandezas, ao passo que certas relações, como as de grandezas incomensuráveis entre si, não se podem exprimir por números. Além disso, a proposição existe entre duas linhas não está de modo algum limitada a estas próprias linhas, porque pode igualmente representar a mesma proporção existente entre dois números, entre duas superfícies ou entre dois sólidos. (DESCARTES, 1979, p. 59)

Como um exemplo, utilizando a notação que atualmente utilizamos para números, podemos exprimir a soma de dois números irracionais, que na época ainda careciam de entendimento, $\sqrt{2} + \sqrt{2} \ = \ 2\sqrt{2}$ que em representação decimal não pode ser expresso. Entretanto, quando representado como um segmento, podemos fazer referência do mesmo.

Com isso, Descartes facilita as suas demonstrações ao considerar que o produto de dois segmentos de retas pode ser expresso por outro segmento de reta e, não necessariamente, como a área de um retângulo, consequentemente, as grandezas envolvidas tornam-se homogêneas. (EVES, 2011; BOYER, 1996).

> Isto foi possível pela escolha de um segmento de reta arbitrário para unidade, então, o produto de dois segmentos pôde ser interpretado como um outro segmento [...], apesar de construir geometricamente a solução, este método é absolutamente inovador na geometria, pois permite operar com grandezas como se fossem números. (ROQUE e CARVALHO 2012, p.248).

Em *La géométrie,* René Descartes considera que:

> [...] assim como a aritmética não compreende mais que quatro ou cinco operações, que são a adição, a subtracção, a multiplicação, a divisão e a extracção de raízes, que pode tomar-se como uma espécie de divisão, assim também não há outra coisa a fazer em geometria, com respeito às linhas que se desejam conhecer, que juntar ou subtrair outras, ou ainda, conhecendo uma, que designarei por unidade para relacioná-la o melhor possível com os números, e que geralmente pode ser escolhida arbitrariamente e, conhecendo logo outras duas, determinar uma quarta que esteja para uma dessas duas como a outra está para a unidade, é o mesmo que a multiplicação; ou ainda encontrar uma quarta que esteja para uma dessas duas como a unidade está para a outra, o que é o mesmo que a divisão; ou, enfim, encontrar um, dois, ou vários meios proporcionais entre a unidade e alguma outra linha, o que é o mesmo que extrair a raiz quadrada, ou cúbica, etc. E não temerei introduzir estes termos de aritmética em geometria, a fim de tomar-me mais inteligível. (DESCARTES, apud. CYRINO E PASQUINI, 2010, p. 20)

Desse modo, Descartes mostra a necessidade de se amparar em conceitos geométricos para que os aritméticos possam ser considerados (CYRINO e PASQUINI, 2010). Em outras palavras, Descartes usa uma construção geométrica para dar um significado à multiplicação entre dois valores *a* e *b* onde o produto *ab* é um segmento de reta e não a área de um retângulo.

A seguir, apresentamos o modo pelo qual Descartes define o produto e a divisão de segmentos, associado às suas justificativas.

Iniciaremos com a multiplicação. Observando a figura a seguir, consideremos por exemplo, $\overline{AB}$ a unidade, e que se deva multiplicar o segmento $\overline{BD}$ pelo segmento $\overline{BC}$, para isso, só é necessário unir os pontos A e C, depois determinar o segmento $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{CA}$. Assim, o segmento $\overline{BE}$ será o produto desta multiplicação.

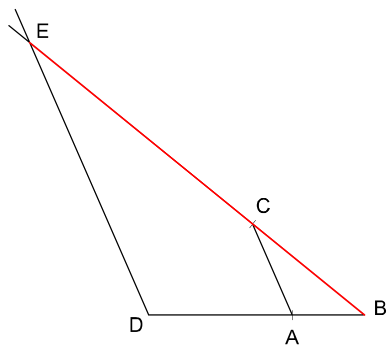
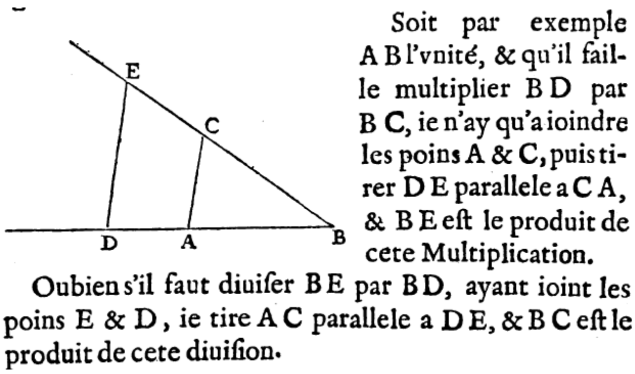


Figura 8 Multiplicação de segmentos por Descartes

Por uma construção análoga, Descartes descreve a divisão entre segmentos. Ou seja, podemos obter a divisão do segmento $\overline{BE}$ pelo segmento $\overline{BD}$, assumindo ainda, $\overline{AB}$ como a unidade, é necessário unir os pontos E e D, depois determinar $\overline{CA}$ paralela a $\overline{DE}$, sendo $\overline{BC}$ o produto desta divisão.



Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

Figura 9: Divisão de segmentos proposta por Descartes

Mas, o que garante de fato que Descartes possui sustentação para as suas ideias, ou seja, podemos considerar que a multiplicação ou a divisão de segmentos de Descartes é possível? Para isso recorremos há anos de história, trazendo o matemático Tales de Mileto. Sobre este matemático ainda cercam muitas conjecturas, sobre sua existência, suas ideias e incursões. O teorema a que atribuímos sua autoria é um resultado de grande importância da geometria euclideana, cuja demonstração foi alvo de diversos matemáticos posteriores a seu tempo. Este teorema apresenta-se em diversas formas e uma apresentação mais detalhada sobre o tema pode ser encontrada em Pereira (2005).

Para nossa exposição trazemos uma redação do enunciado do Teorema de Tales encontrada em um livro didático utilizado nas escolas paranaenses.

> Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em umas das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal. (SOUZA, 2013. p.258)

Com isso, a explicação para a multiplicação dos segmentos pode ser dada por este resultado, o teorema de Tales, ou seja, se considerarmos o segmento $\overline{AB}$ como a unidade, e desejamos multiplicar o segmento $\overline{BD}$ pelo segmento $\overline{BC}$, note que $\overline{AC}$ é paralelo a $\overline{DE}$ na construção. Logo, pelo Teroema de Tales é válida a proporção $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ então $\overline{BC}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{BE}$ e como $\overline{AB}$ é a unidade, o segmento $\overline{BE}$ será o produto desta multiplicação. Analogamente, podemos explicar a divisão.

Na sequência apresentamos as ideias de Hilbert para a multiplicação e a divisão.

3.2 Método de Hilbert para Multiplicação de Segmentos

Assim como Descartes, três séculos mais tarde, o matemático alemão David Hilbert constrói uma *geometria* apresentando um *cálculo de segmentos* no qual são válidas todas as regras de cálculo para os números reais. Usando as próprias palavras de Hilbert, em fonte traduzida, anunciamos o modo pelo qual ele define o *produto entre segmentos*.

> Para definir geometricamente o produto de um segmento *a* por outro *b*, servimo-nos da seguinte construção: escolhemos primeiramente um segmento qualquer, fixo em tudo o que o segue, e designemo-lo por 1. Desloquemos para um dos lados dum ângulo recto e a partir do vértice O, o segmento 1 e, além disso, também a partir de O, o segmento *b;* em seguida deslocamos para o outro lado o segmento *a*. Unamos as extremidades dos segmentos 1 e *a* por uma recta e conduzamos uma paralela a esta recta pela extremidade do segmento *b*; esta determinará um segmento *c* no outro lado do ângulo: chamemos a este segmento *c* o *produto* do segmento *a* pelo segmento *b* e designamo-lo por: *c=ab* (HILBERT, 2003, p. 58)

Uma ilustração, que traz uma representação geométrica para o descrito acima é apresentada na figura a seguir:

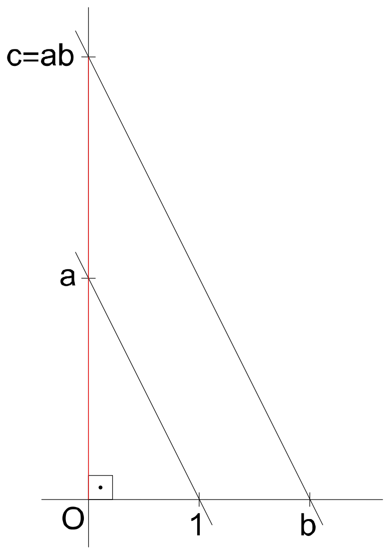


Figura 10: O produto de segmentos na construção proposta por Hilbert

Além de demonstrar a validade do seu método de *multiplicar segmentos* embasando-se no Teorema de Pascal[13] e mostrar que são válidas as propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação em relação à operação de adição, Hilbert

[13] Teorema de Pascal – Sejam A, B, C e A', B', C' dois ternos de pontos sobre cada uma de duas rectas que se intersectam num ponto distinto de qualquer daqueles pontos, respectivamente; se CB' é paralelo a BC' e CA' paralelo a AC', então é também BA' paralelo a AB'. (HILBERT, 2003. p.52)

fundamenta a *Teoria das Proporções* de Eudoxo, apresentada no *Livro V* de *Os Elementos* de Euclides.

É importante salientar que ambos os matemáticos, Descartes e Hilbert, sustentam suas ideias a partir do Teorema de Tales. Entretanto, as apresentações possuem uma diferença, essencialmente o ângulo formado entre as retas consideradas além da notação utilizada. Na geometria de Descartes o ângulo formado entre as duas retas é qualquer, já na geometria de Hilbert, as retas formam um ângulo reto. Dessa forma, adotamos as ideias de Hilbert para o desenvolvimento da proposta que construímos, já que desejamos considerar os números negativos e, para isso, utilizaremos o plano cartesiano para realizar as construções, embora não exista a necessidade de fazermos referência a todos os seus elementos.

3.3 A Proposta

Conforme anunciamos, apresentaremos a seguir a sequência de Tarefas que esperamos colaborar com o tratamento dos números inteiros, particularmente, com o ensino das operações com números negativos, a partir das ideias de Descartes e Hilbert. Para isso envolvemos alguns conceitos necessários para o estudo.

Convém observarmos que os conteúdos propostos pelas Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná (DCE) de Matemática trazem o conteúdo *ângulos* indicado para o sexto ano, mais ainda, por meio do Caderno de Expectativas de Aprendizagem, esse assunto traduz-se nos seguintes objetivos: “20. Compreenda o conceito de ângulo; 21. Reconheça, compare e classifique ângulos” (PARANÁ, 2011, p. 88). Em continuidade, esse estudo deve ser feito no sétimo ano e com os seguintes objetivos:

> 59. Identifique ângulos congruentes, complementares e suplementares.
> 60. Identifique ângulos consecutivos, adjacentes e opostos pelo vértice.
> 61. Transforme medidas de um ângulo em graus e seus submúltiplos.
> 62. Efetue operações com medidas de ângulos.
> 63. Identifique ângulos nos polígonos.
> 64. Compreenda a definição de bissetriz e represente-a.
> 65. Resolva situações-problema envolvendo ângulos.
> 66. Classifique triângulos quanto às medidas de lados e ângulo
> (PARANÁ, 2011, p.89).

Embora o documento supracitado não explicite como necessárias habilidades do uso do transferidor e esquadros para o trabalho com geometria, as DCE contemplam-nas como um dos objetivos no conteúdo de Grandezas e Medidas: “Classifique ângulos e faça uso do transferidor e esquadros para medi-los” (PARANÁ, 2008, p.78). O que nos leva a concluir que todo livro didático das escolas públicas paranaenses deve abordar este conteúdo.

É sobremodo importante assinalar que o nosso objetivo é utilizar o método de Hilbert de multiplicar segmentos com o objetivo de facilitar a compreensão das regras de sinais dos números inteiros. Portanto, recomendamos para aplicação de nossa proposta que o conteúdo específico *ângulos* seja contemplado antes do conteúdo específico *números inteiros* no sétimo ano.

Convém salientar que a linguagem matemática assim como os símbolos e notações utilizadas nas tarefas foram adaptadas às que utilizamos atualmente.

O conhecimento dos números negativos, no que se refere à sua apresentação, quando algo novo para o aluno, pode ser abordado de diferentes maneiras. Neste trabalho não nos dedicamos a essa etapa, pois a mesma pode ser encontrada em diversos livros didáticos para o Ensino Fundamental, particularmente, para o sétimo ano, como: temperatura abaixo de zero, andar abaixo do térreo, entre outros. E junto a isso a reta numérica. Assim como é tratado na obra referenciada e apresentada no Capítulo I deste trabalho.

Organizamos nossa proposta em forma de Tarefas e no texto que segue apresentamos, em cada uma, seu objetivo seguido de um comentário com o intuito de fornecer subsídios para a sua utilização. Sugerimos que os estudantes trabalhem em grupo.

Como requisito, assumimos que os estudantes tenham conhecimento da Reta Numérica, ou seja, da localização dos números inteiros sejam positivos ou negativos e o zero como origem.

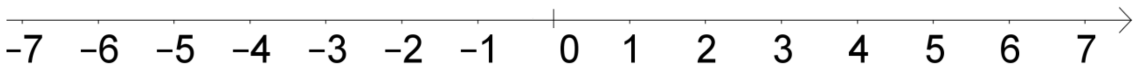


Figura 11: Reta Numerada

Na primeira tarefa especialmente, e também nas demais, há a necessidade de representarmos os números inteiros por meio de segmentos. E essa representação é o cerne da proposta. Considerando que é bem intuitiva esta representação quando tratamos de números (já que ao número associamos sua medida) acreditamos que esta representação será facilmente absorvida pelos estudantes. Entretanto, estamos lidando com números negativos, e para estes números especialmente, faremos uma adequação desta representação, ou seja, associaremos a posição do segmento considerando-o semelhantemente aos segmentos orientados, com origem e extremidade. Mas, para tal, não os denominaremos desta forma, chamaremos de *segmentos representantes.* Sendo assim, definimos o que segue:

Um ***segmento representante*** consiste de um segmento de reta orientado que representa um número inteiro. Se o número é positivo ele é representado por um ***segmento positivo*** consiste de um segmento orientado de uma reta horizontal, com extremidade à direita de sua origem. E, um ***segmento negativo***, consiste de um segmento orientado de uma reta horizontal com extremidade à esquerda de sua origem.

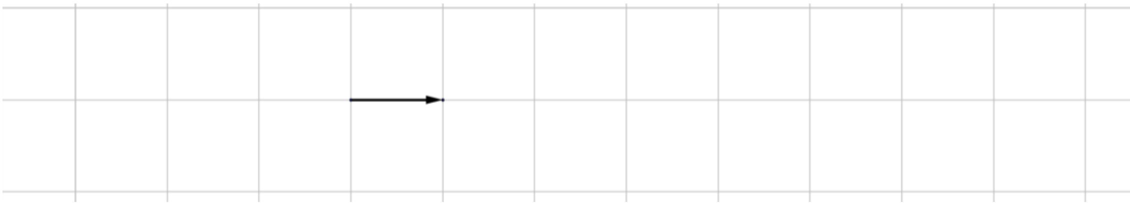
TAREFA 1: Números Inteiros e *segmentos representantes*

Objetivo: Estabelecer uma representação para os números inteiros por meio de *segmentos representantes*.

Comentário: Pretendemos com esta tarefa realizar a *adição de números inteiros* utilizando para isso os segmentos construídos com auxílio de régua e compasso, além de introduzir a ideia de *orientação de um segmento* ao considerarmos os números positivos e negativos. Convém salientar que esta orientação não será denotada do mesmo modo como costumeiramente fazemos na geometria euclidiana.[14] Se os estudantes tiverem dificuldade em realizar as atividades de subtração de segmentos propostas nos itens (c) e (d), podemos intervir. Nesta tarefa trabalhamos com a ideia de transporte de segmento, o que pode ser novidade para o aluno, sendo assim, o professor deverá auxiliá-lo. Se desejar o professor poderá remeter aos primórdios da geometria, onde os instrumentos de medição eram bem distintos dos atuais e transportar segmentos era uma ação comum à prática daqueles que estudavam matemática. Trabalharemos com segmentos orientados, definindo a origem e a extremidade de um segmento, ou seja, ao representarmos os números positivos na reta adotamos o sentido à direita (→). Já ao representarmos os números negativos adotamos o sentido à esquerda (←). Essa diferenciação se faz necessária para que na próxima tarefa possamos definir as operações de soma e subtração de números inteiros.

[14] Para destacar essa conotação usaremos o itálico no decorrer do texto.

Atividade I - Dado o segmento unitário 1, construa os segmentos que representam os números a seguir:



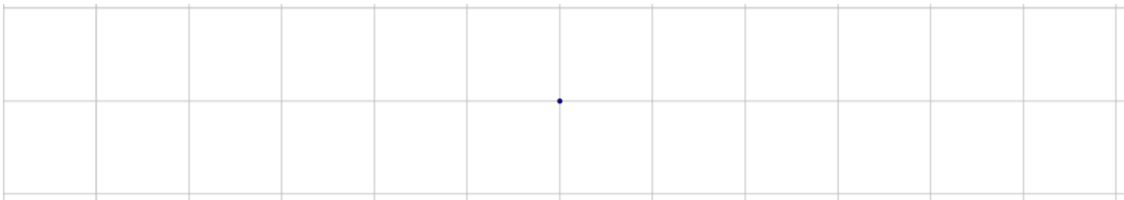
(a) 3

(b) 5

(c) – 3

(d) – 5

(e) 0



Comentário: Como nossa intenção será diferenciar os segmentos que representam os números positivos e negativos pela sua representação por um segmento, devemos introduzir o conceito de orientação, e acreditamos que seja de fácil compreensão. Pois, anteriormente a essa tarefa, os estudantes já tiveram contato com a reta com os números inteiros localizados.

Partimos para a próxima atividade desta tarefa, que propõe *a soma de números inteiros*. Podemos usar a motivação: *Nós já sabemos como somar números positivos. E agora que já conhecemos os números negativos, como devemos proceder para somá-los?*

TAREFA 2: Adição de números inteiros

Objetivo: Realizar a operação de adição de números inteiros por meio de segmentos representantes. Estabelecer uma regra para a adição de segmentos

Agora use os segmentos que você construiu e faça as operações indicadas com eles:

(a) + 3 + 5

(b) + 5 + (– 3)

(c) + 3 + (– 5)

(d) – 3 + (– 5)

(e) + 3 + (– 3)

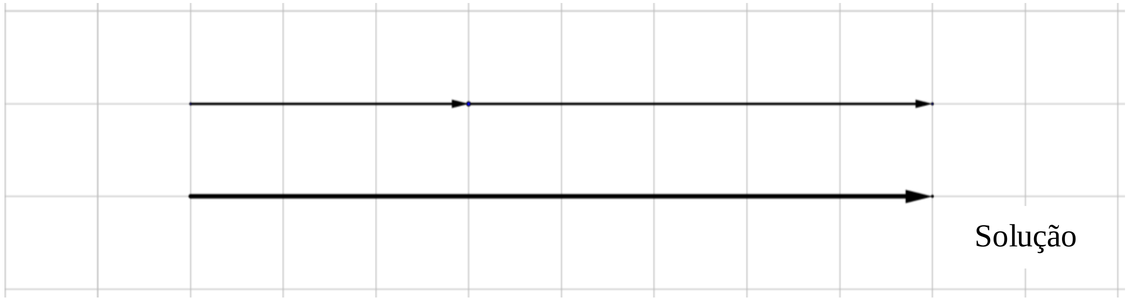
Com essa tarefa esperamos que o estudante perceba que, em todos os casos acima, para efetuarmos a adição dos números, por segmentos representantes, procedemos da seguinte forma:

Na **adição** de *segmentos representantes* constrói-se o primeiro segmento e a partir da extremidade constrói-se o segmento que representa o segundo número. A soma, ou o **resultado** da operação será representado pelo *segmento representante* com origem do primeiro e extremidade do segundo.

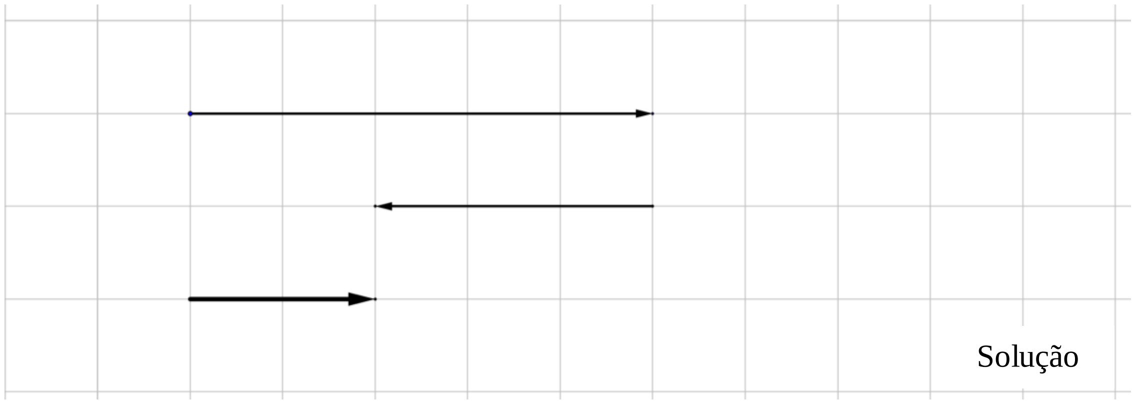
A seguir apresentamos a solução da Atividade II proposta anteriormente:

Solução:

(a) + 3 + 5

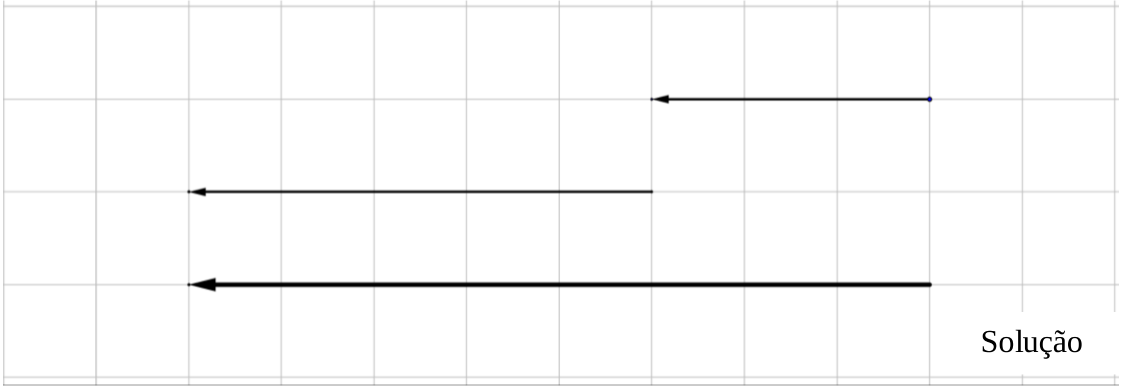


(b) + 5 + (– 3)

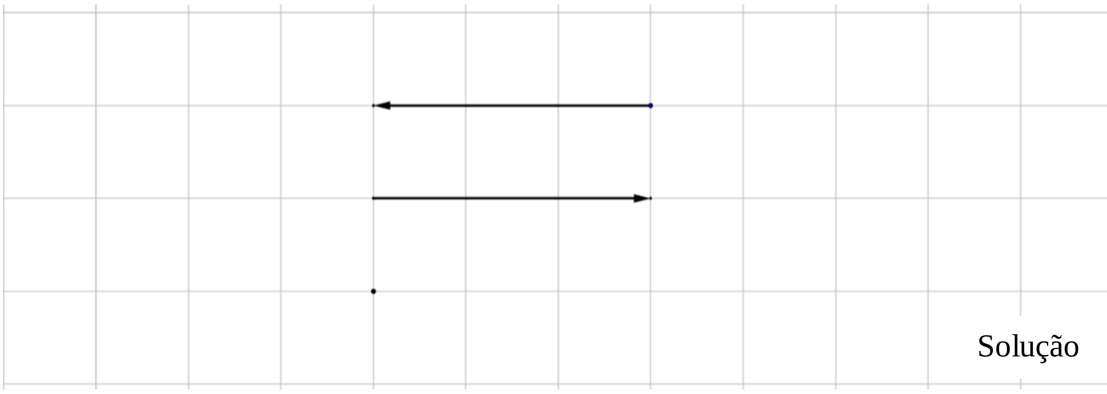


(c) + 3 + (– 5)

(d) – 3 + (– 5)



(e) + 3 + (–3)



Na sequência apresentamos a subtração. Como devemos proceder para subtrairmos dois números inteiros? A seguir, propomos a seguinte tarefa para a subtração:

TAREFA 3: Subtração de números inteiros

Objetivos: Realizar a operação de subtração de números inteiros por meio de segmentos representantes. Estabelecer uma regra para a subtração de segmentos. Estabelecer uma regra para a subtração de números inteiros.

Comentário: Nesta tarefa trabalharemos com a subtração de números inteiros e para isso propomos as construções necessárias dentro do estabelecido. A partir da construção da subtração de *segmentos representantes* deduziremos o modo como devemos proceder nesta operação.

Agora, use os segmentos que você construiu e faça as operações com eles:

(a) + 5 – (+3)

(b) + 3 – (+5)

Comentário: É provável que o estudante proceda da mesma forma com na adição, ou seja, para realizar a subtração "(+ 5) – (+3)" ele apresentará a mesma construção de "+ 5 + (– 3)". Cabe ao professor chamar a atenção para isto mostrando que são construções diferentes, já que as operações também o são, e explorar esse caso.

Com isso, introduzimos a regra para efetuarmos a subtração dos números inteiros representados por segmentos. Procedemos da seguinte forma:

Na **subtração** de *segmentos representantes* constrói-se o primeiro segmento e a seguir, constrói-se o segundo segmento fazendo coincidir as extremidades de ambos. A diferença obtida, ou o **resultado** da operação será representado pelo *segmento representante* com a mesma origem do primeiro e com a extremidade coincidindo com a origem do segundo.

Dando sequência, partimos para outros casos:

A partir do que você estudou na tarefa anterior, faça as seguintes operações:

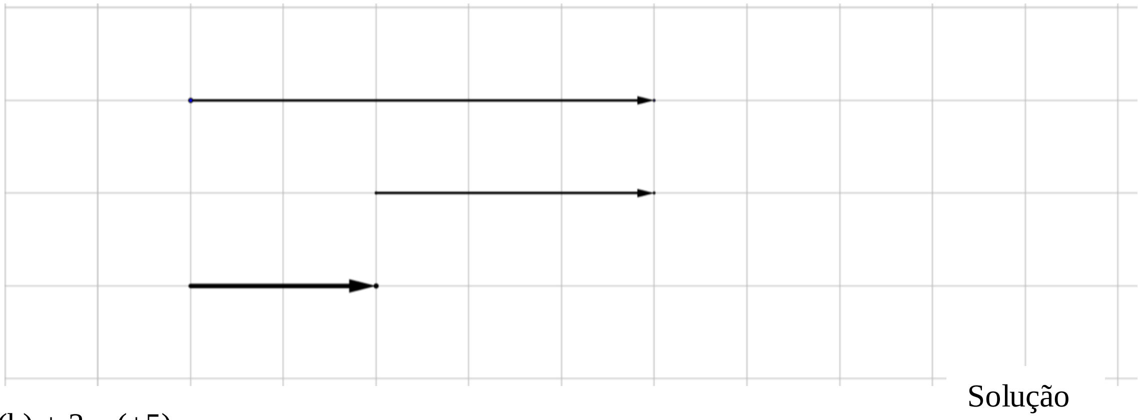
(c) + 5 – (– 3)

(d) – 5 – (+ 3)

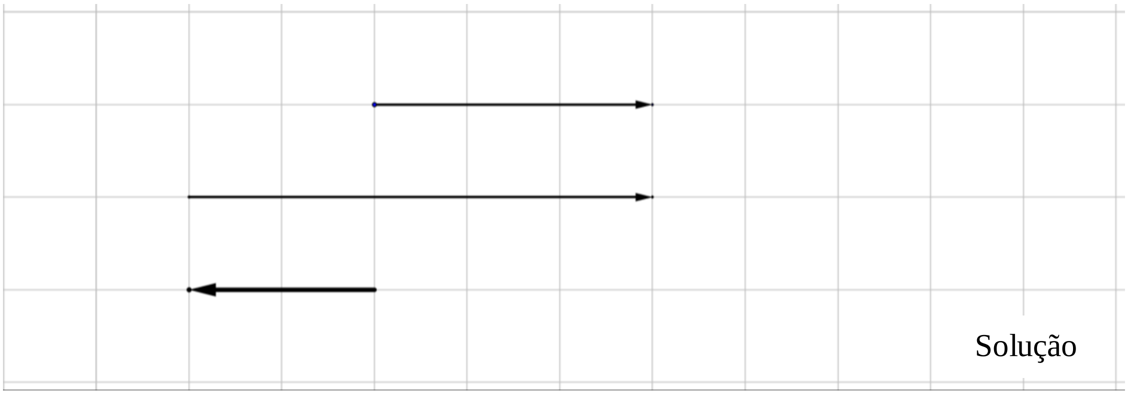
(e) – 5 – (– 3)

Solução:

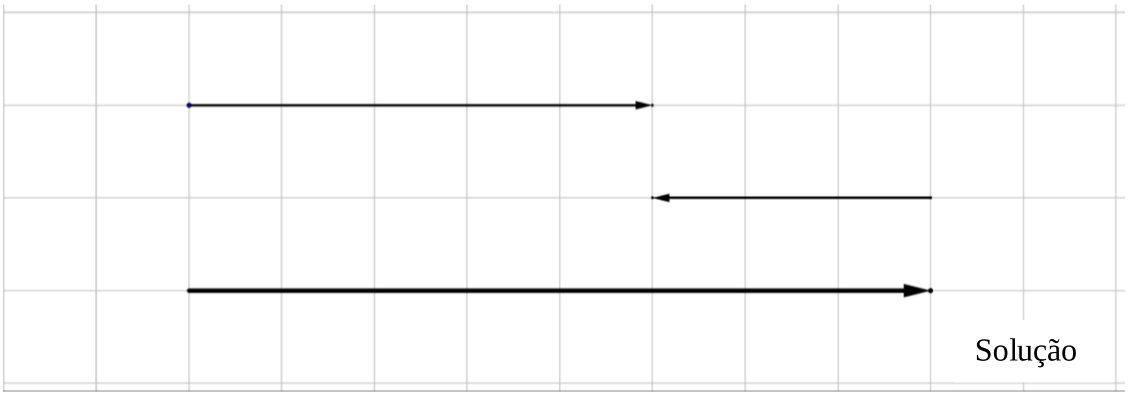
(a) + 5 – (+3)



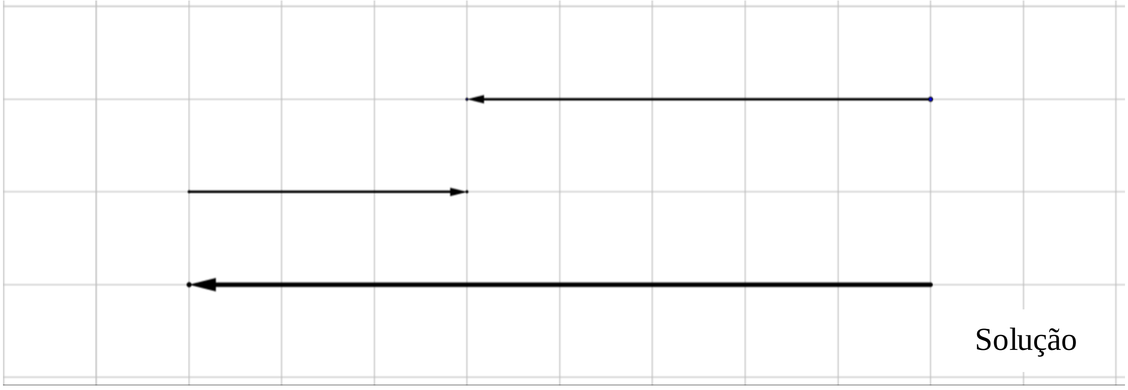
(b) + 3 – (+5)



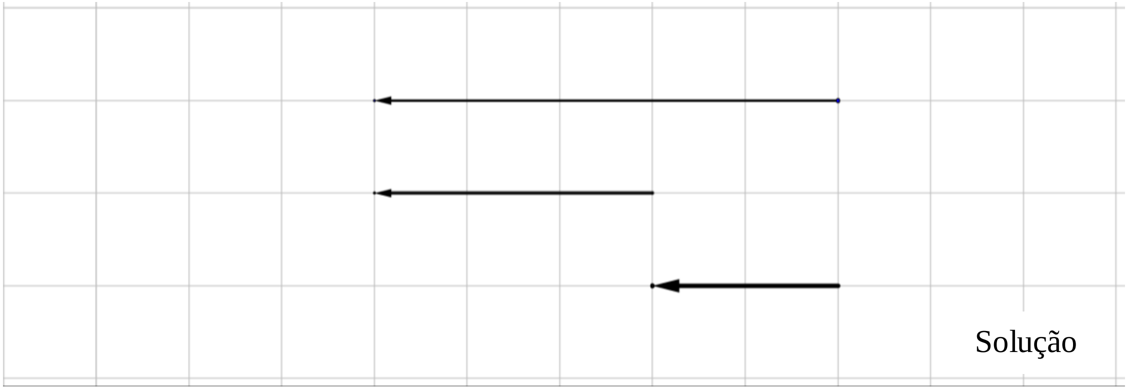
(c) + 5 – (– 3)



(d) – 5 – (+ 3)



(e) – 5 – (– 3)



Ao final sistematizamos os resultados obtidos da soma e da subtração de números inteiros fazendo um resumo e uma análise dos resultados obtidos e das diferentes possibilidades que obtivemos. Contemplamos esta síntese na tarefa a seguir:

TAREFA 4: Conclusão

Objetivo: Sintetizar os resultados obtidos acerca das operações de adição e subtração.

Compare todas as construções que você fez para realizar as operações, quais conclusões você pode retirar?

Comentário: Na perspectiva das tarefas anteriores, e com a intenção de sistematizarmos os conhecimentos abordados, esperamos que as conclusões para as atividades propostas anteriormente possam apresentar o seguinte:

Solução:

1. Para a adição.

Ao somarmos dois números inteiros positivos obtemos um número positivo.

Ao somarmos dois números negativos obtemos um número negativo.

Ao somarmos números de sinais contrários, o resultado será:

- um número positivo se, entre os dois números somados, a maior medida é do segmento que representa o número positivo;
- um número negativo se, entre os dois números somados, a maior medida é do segmento que representa o número negativo.

2. Para a subtração:

Ao subtrairmos dois números de sinais contrários obtemos um número com o mesmo sinal do primeiro.

Ao subtrairmos dois números de sinais iguais, o resultado será:

- um número com o mesmo sinal do primeiro se este representar o segmento de maior medida;
- um número com sinal contrário ao segundo se este for o que representa o segmento de maior medida.

Para um fechamento do estudo e com o intuito de definirmos “honestamente” a subtração, para os estudantes do ensino fundamental, devemos comparar os casos obtidos anteriormente, dois a dois, àqueles que possuem o mesmo resultado, ou melhor, o que chamaremos de *operações equivalentes.* São eles:

$+5-(+3)=+2=+5+(-3)$, caso das tarefas 2(b) e 3(a)

$+3-(+5)=-2=+3+(-5)$, caso das tarefas 2(c) e 3(b)

$+3+5=+8=+3-(-5)$, caso das tarefas 2(a) e 3(c)

$-3-(+5)=-8=-3+(-5)$, caso das tarefas 2(d) e 3(d)

A partir do exposto acima, com as conclusões e as observações apresentadas anteriormente, podemos definir a subtração de dois números inteiros, assim como definimos formalmente em Matemática, ou seja:

$a-b=a+(-b)$, com a e b números inteiros.

Ou seja, a operação subtração de números inteiros será definida como a soma de um número com o oposto do outro, nessa ordem.

Por fim, finalizamos nossa exposição sobre as operações de adição e subtração de números inteiros. Passamos agora a considerar os conceitos e ideias necessários para a multiplicação e a divisão nesse conjunto. Iniciamos com uma tarefa que traz à tona o conceito de paralelismo entre retas.

TAREFA 5: Reconhecimento de retas paralelas

Objetivo: Reconhecer posições relativas entre retas. Compreender que retas paralelas formam ângulos congruentes com uma reta transversal.

Comentário: O conceito de *paralelismo* é abordado na vida escolar dos estudantes desde as séries iniciais. Portanto, é esperado que os estudantes identifiquem essa posição entre duas retas sem dificuldades. Além disso, com base nesta posição podemos considerar outras, retas concorrentes e retas coincidentes. É importante que o professor retome esses conceitos, e isso pode ser feito por meio de uma discussão sustentada pelo questionamento:
Quais são as possíveis posições relativas entre duas retas?
Quando duas retas são consideradas paralelas?
Quando duas retas são consideradas concorrentes?
Uma reta recebe qual classificação quando comparada com ela mesma?

Particularmente, na proposta que apresentaremos, é importante que estudantes possuam a habilidade de construir retas paralelas com esquadros. Para isso apresentamos a seguir algumas atividades cuja finalidade é promover essa habilidade. Esperamos que os estudantes não tenham dificuldade nesta atividade, uma vez que são apenas revisões de conceitos já conhecidos, e, ao final da atividade que eles compreendam que, se duas retas *r* e *s* formam o mesmo ângulo com uma reta *t* concorrente a *r* e a *s*, então as retas *r* e *s* são paralelas. Conforme a figura a seguir:

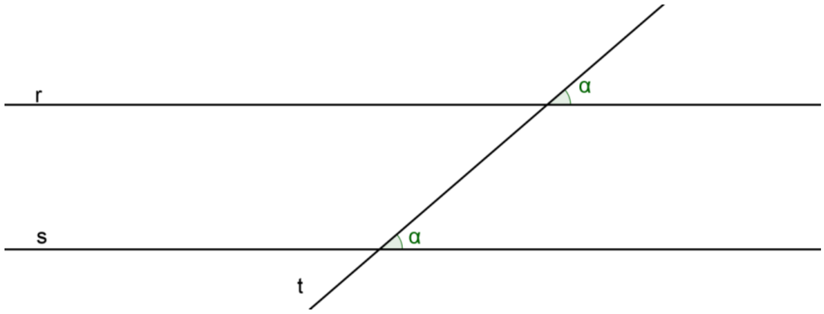


Figura 12: Retas paralelas

Atividade I. Observe a figura a seguir e responda:

A figura abaixo é parte de um mapa da cidade de Ribeirão Claro – PR e o segmento em destaque, denominado “Matemática10”, é uma nova rua a ser construída. Esta rua ligará a Vila Carlos Storti com a Vila São Vicente Paloti por meio das ruas: Rua Dr. Oswaldo Giacóia e Rua Elda B. Bechara. Na Vila Carlos Storti localiza-se o único hospital da cidade, e na Vila São Vicente Paloti existe o Santuário São Vicente Paloti. A *Rua Matemática10* tem a finalidade de facilitar o fluxo de fiéis que moram na Vila Carlos Storti que pretendem visitar o Santuário e ao mesmo tempo facilitar o acesso das pessoas que moram na região do Santuário ao único hospital da cidade.

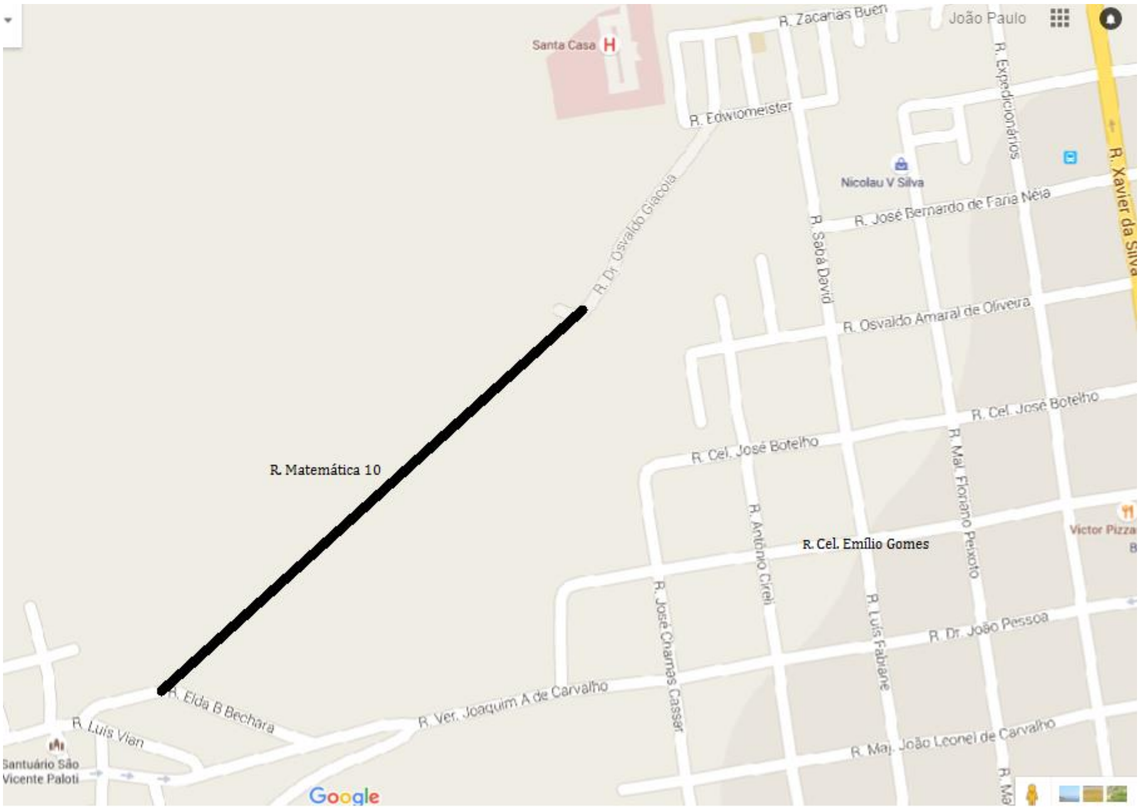


Figura 13: Mapa de Ribeirão Claro[15]

O prefeito da cidade aproveitando a situação resolveu ampliar a cidade loteando a região compreendida entre a *Rua Matemática10* e a cidade de Ribeirão Claro, prolongando as ruas: Oswaldo Amaral de Oliveira, Cel. José Botelho e Cel. Emílio Gomes, até a *Rua Matemática 10*.

[15] Fonte: http://maplink.com.br/Transito/PR/ribeirao_claro

(5.1) A cidade de Ribeirão Claro – PR foi projetada para ter as ruas da região central paralelas ou perpendiculares entre si. Verifique, utilizando o jogo de esquadros, que as Ruas Oswaldo Amaral de Oliveira, Cel. José Botelho e Cel. Emílio Gomes, que são ruas da região central da cidade, são realmente paralelas.

(5.2) Construa segmentos de retas no mapa que representem a ampliação das Ruas Oswaldo Amaral de Oliveira, Cel. José Botelho e Cel. Emílio Gomes, até a Rua Matemática 10. Os segmentos construídos são paralelos entre si? ( ) sim ( ) não

(5.3) Com a sua construção as Ruas Oswaldo Amaral de Oliveira, Cel. José Botelho e Cel. Emílio Gomes estão prolongadas. Meça, utilizando o transferidor, os ângulos entre cada uma dessas ruas e a Rua Matemática 10.

(a) Os ângulos possuem a mesma medida? ( ) Sim ( ) Não

(b) Este fato tem relação com o paralelismo das ruas? Justifique.

____

____

(c) Pelo que estudamos até agora você está convencido de que retas paralelas formam o mesmo ângulo com uma reta não paralela a elas? ( ) Sim ( ) Não

(d) Considere que sabemos que algumas retas formam um mesmo ângulo com uma outra reta não paralela a elas, então podemos garantir que estas retas são paralelas? ( ) Sim ( ) Não

TAREFA 6: Retas Paralelas, Concorrentes e seus Ângulos

Objetivo: Correlacionar e identificar que retas formadoras de ângulos congruentes com uma reta transversal são paralelas entre si.

Comentário: esta tarefa finaliza as atividades que devem subsidiar nossa abordagem das operações de multiplicação e divisão de números inteiros a partir das ideias de Hilbert, por meio de segmentos. Esperamos que os estudantes identifiquem a propriedade essencial para a validade da construção, que é o Teorema de Tales.

---

1. A partir do que você concluiu na tarefa anterior, trace retas paralelas a reta r, passando pelos pontos B, C e D.

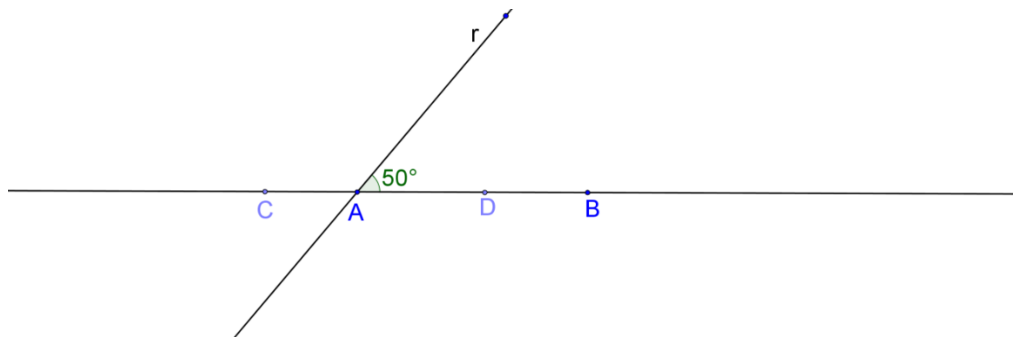


Figura 14: Tarefa 6

TAREFA 7: Segmentos Proporcionais

Objetivo: Compreender o Teorema de Tales.

Comentário: Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná para Matemática o *Teorema de Tales* é estudado no 9º ano do Ensino Fundamental. Porém, com as tarefas a seguir pretendemos verificar, mesmo que intuitivamente, a proporcionalidade existente entre segmentos culminando no *Teorema de Tales*. Essa é uma oportunidade para que, ainda que por inspeção, a proporcionalidade de segmentos presente no teorema possa ser construída. Mais adiante, este resultado será necessário para validarmos os procedimentos para trabalharmos com as operações de multiplicação e divisão de números inteiros, usando as ideias de Hilbert, conforme anunciamos no início deste capítulo.

A Tarefa a seguir explora o Teorema de Tales. O professor deverá começar com uma discussão sobre o paralelismo existente nas linhas da folha de um caderno pautado.

(1) Em uma página pautada do seu caderno completamente sem escritos reforce as duas primeiras linhas da página de vermelho utilizando uma régua. Denomine essas duas retas de *a* e *b*.

Solução:

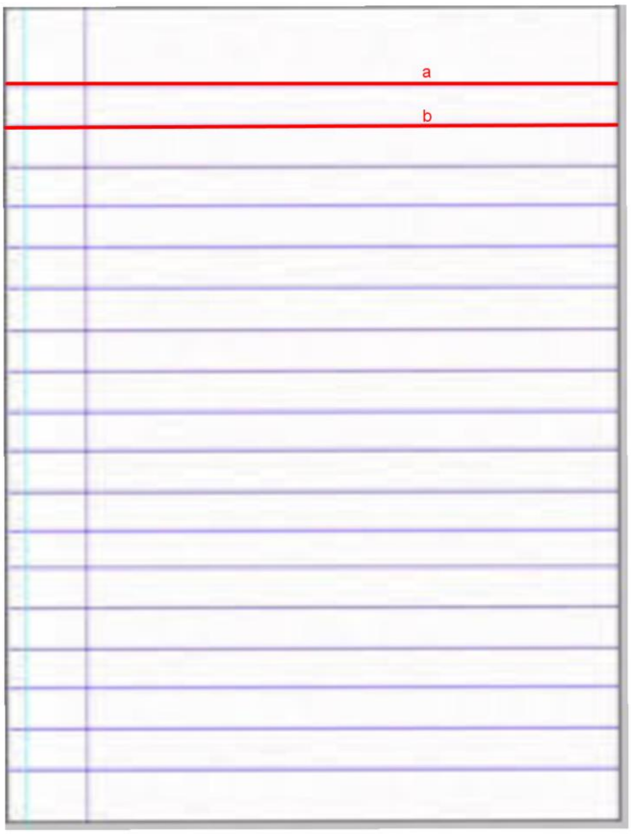


Figura 15: Duas paralelas

3- Escolha da maneira que você quiser mais quatro linhas abaixo e reforce essas linhas de azul. Denomine-as de *c*, *d*, *e*, *f*.

Solução:

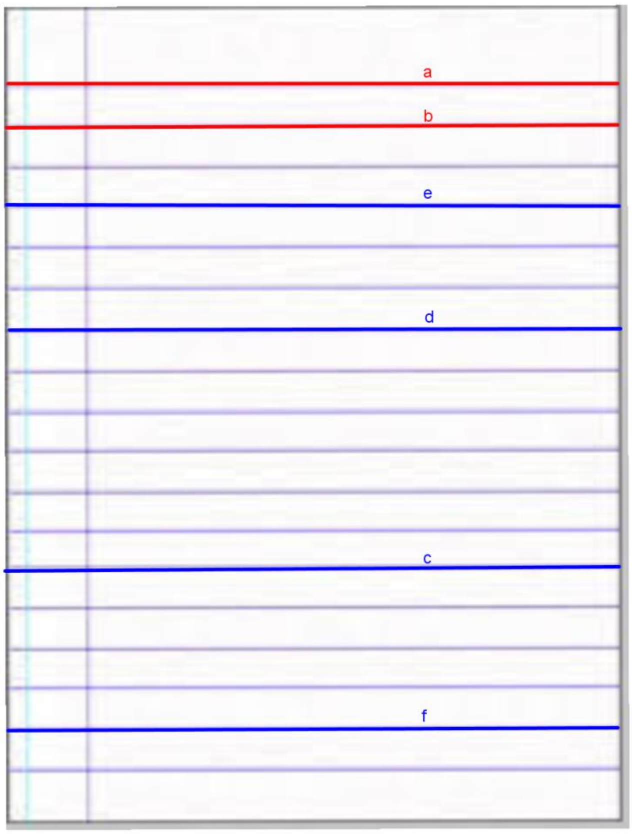


Figura 16: Uma possível construção

4. Trace duas retas transversais de modo que elas intersectem nas seis retas desenhadas. Denomine essas retas de t_1 e t_2.

4.1. Denomine as intersecções de t_1 com as retas *a, b, c, d, e* e *f* de A, B C, D, E e F, respectivamente.

4.2. Denomine as intersecções de t_2 com as retas *a, b, c, d, e* e *f* de A', B' C', D', E', F', respectivamente.

Solução:

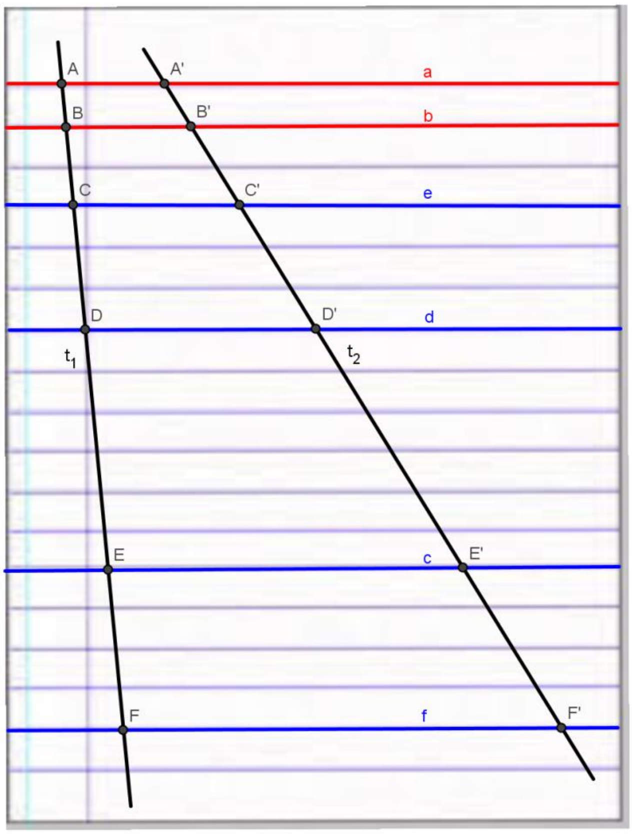


Figura 17: Uma possível construção

5- Com o auxílio do compasso[16] verifique quantas vezes o segmento $\overline{AB}$ *cabe* em:

$\overline{BC} =$ _____ $\overline{AB}$

$\overline{CD} =$ _____ $\overline{AB}$

$\overline{DE} =$ _____ $\overline{AB}$

$\overline{EF} =$ _____ $\overline{AB}$

6- Com o auxílio do compasso verifique quantas vezes o segmento $\overline{A'B'}$ *cabe* em:

$\overline{B'C'} =$ _____ $\overline{A'B'}$

$\overline{C'D'} =$ _____ $\overline{A'B'}$

$\overline{D'E'} =$ _____ $\overline{A'B'}$

$\overline{E'F'} =$ _____ $\overline{A'B'}$

[16] O professor deve pedir, em aula anterior, que os alunos tragam compasso.

7- Compare as soluções das atividade 5 e 6. O que você pode concluir sobre:

$\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} =$ ____ $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} =$ ____

$\dfrac{\overline{C'D'}}{\overline{A'B'}} =$ ____ $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} =$ ____

$\dfrac{\overline{D'E'}}{\overline{A'B'}} =$ ____ $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}} =$ ____

$\dfrac{\overline{E'F'}}{\overline{A'B'}} =$ ____ $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{AB}} =$ ____

(8) Se você tivesse escolhido outras linhas azuis os resultados seriam diferentes nas tarefas 5 e 6? (   ) Sim   (   ) Não

A próxima etapa é concluir o resultado: Teorema de Tales. Cabe ao professor sistematizar o resultado que apresentamos a seguir:

Teorema de Tales:
Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em umas das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal. [17]

Comentário: Vale comentar que, embora as notações atribuídas aos elementos acima, para as retas e os segmentos, possam parecer impositivas, isto se faz necessário. É importante que o professor combine isso com os estudantes, pois, se cada um atribuir uma letra diferente, será impossível fazer referência aos mesmos elementos. Com isso, o professor pode ressaltar a importância da notação matemática.

Finalizaremos essa atividade comparando as construções de todos os estudantes. Outro ponto a considerar refere-se à posição da folha do caderno. Como na construção a posição difere da obtida na tarefa, é importante que o professor movimente a folha e leve o aluno a concluir que sua posição não interfere no resultado obtido quanto à proporcionalidade.

[17] Fonte: (SOUZA, 2013. p.258)

A próxima tarefa aborda a multiplicação de números inteiros por meio de *segmentos representantes.*

TAREFA 8: A Multiplicação de números inteiros.

Objetivo: Realizar a operação de multiplicação de números inteiros por meio de segmentos representantes. Estabelecer uma regra para a multiplicação de segmentos. Estabelecer uma regra para a multiplicação de números inteiros.

Comentários: Nesta tarefa apresentamos a multiplicação de números inteiros a partir das ideias de Hilbert. E os números negativos serão inseridos neste contexto. Hilbert apresentou seu método apenas para números positivos, embora mencione que o mesmo poderia ser realizado para números reais (Hilbert, 2003). Incluímos aqui um tratamento que contempla as regras para a multiplicação entre dois números inteiros quaisquer. Sugerimos iniciar a atividade com uma conversa com os estudantes sobre as atividades anteriores considerando as duas retas concorrentes que são os pilares das tarefas. Prosseguiremos nossa exposição destacando que Hilbert sabia das propriedades que acabamos de verificar, inclusive sobre o Teorema de Tales.

Por simplicidade, faremos como ele, colocando as duas retas perpendiculares concorrendo no ponto de origem, marcando na reta horizontal à direita, os valores positivos e, na esquerda, os negativos. Na reta vertical os valores positivos são colocados para cima e os negativos para baixo, produzindo assim o *plano cartesiano*. Entretanto, nosso estudo não depende da localização de pontos no plano, não iremos além dos pontos pertencentes aos *eixos do plano cartesiano*. Além disso, consideraremos o segmento +1 como nossa *unidade de medida,* localizado na horizontal, ou no *eixo das abscissas*. Assim como é apresentado na figura a seguir:

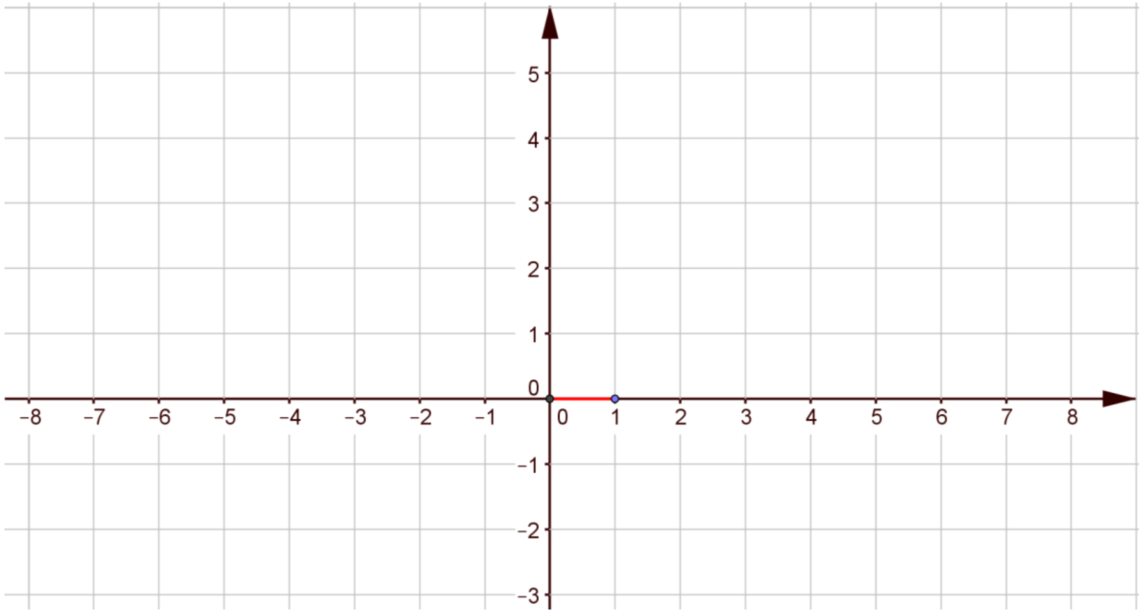


Figura 18: Par de Retas Numeradas e Perpendiculares

Para a realização do que é proposto nesta tarefa, sugerimos a adoção de um papel quadriculado. Já na folha quadriculada, pediremos para os estudantes desenharem duas retas concorrentes e perpendiculares além de adotarem como unidade de medida a medida do lado do quadradinho demarcado no próprio papel. E, finalmente, explicaremos o método utilizado por Hilbert para multiplicar segmentos tomando como exemplo a multiplicação (+ 2) . (+ 3) seguindo os passos a seguir:

Passo1- Localize na reta horizontal o segmento que representa a unidade, um ponto com extremidade em (+ 1).

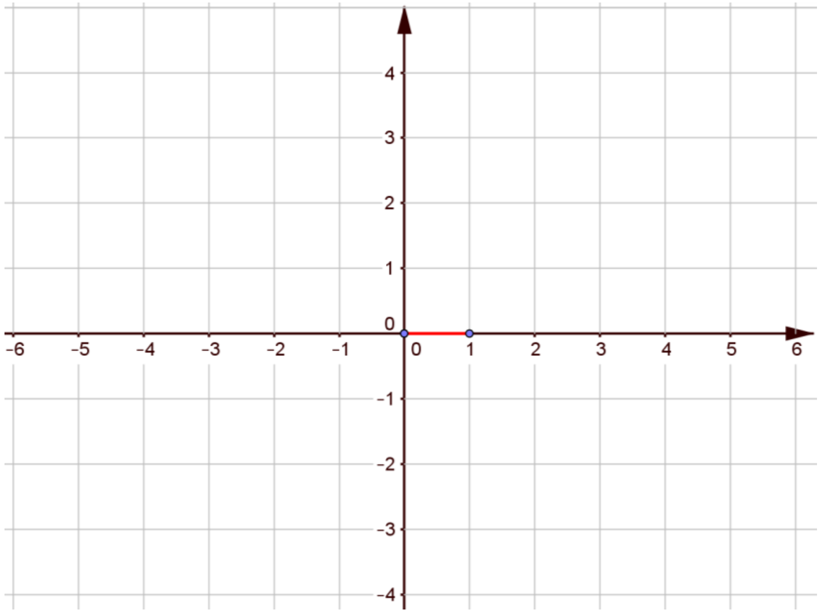


Figura 19: Método de Hilbert , passo 1

Passo 2 - Localize na reta vertical o segmento que representa o primeiro número que você deseja multiplicar, neste caso (+ 2).

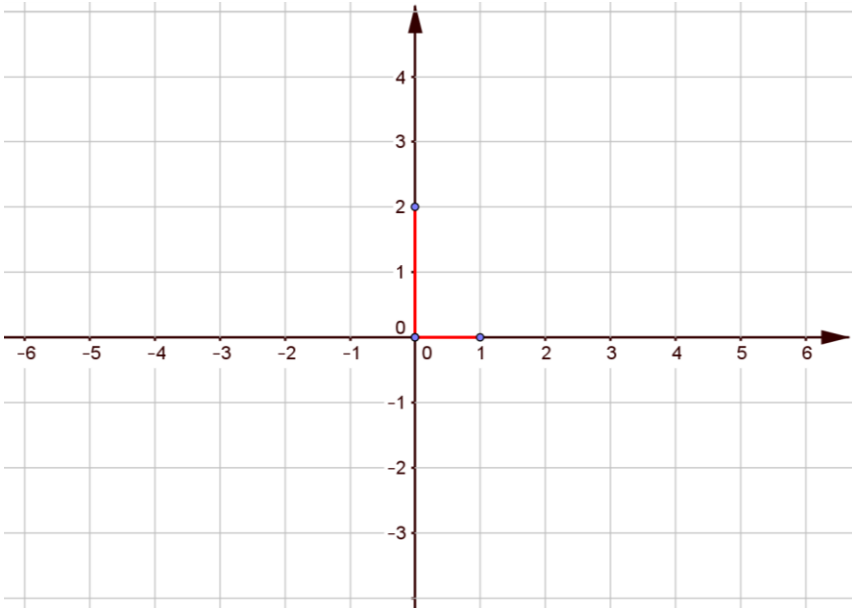


Figura 20: Método de Hilbert , passo 2

Passo 3 - Una as extremidades desses dois segmentos obtendo um segmento de reta.

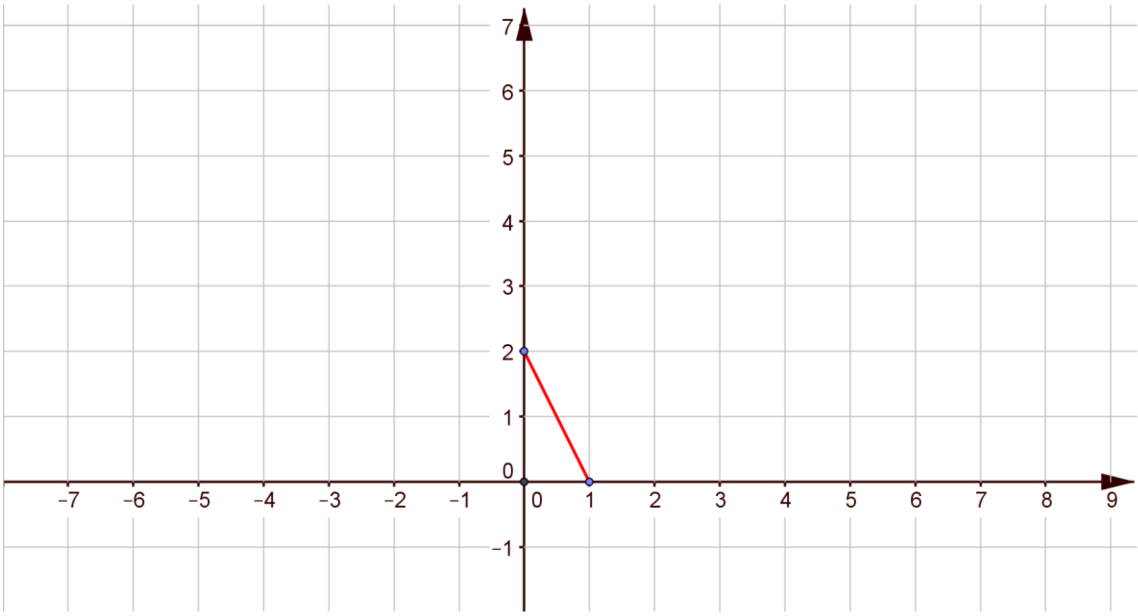


Figura 21: Método de Hilbert, passo 3

Passo 4 - Localize o número (+3) na reta horizontal, determinando o segmento que o representa.

Passo 5 - Trace uma reta paralela ao segmento construído no passo 3, passando pela extremidade do segmento obtido no Passo 4.

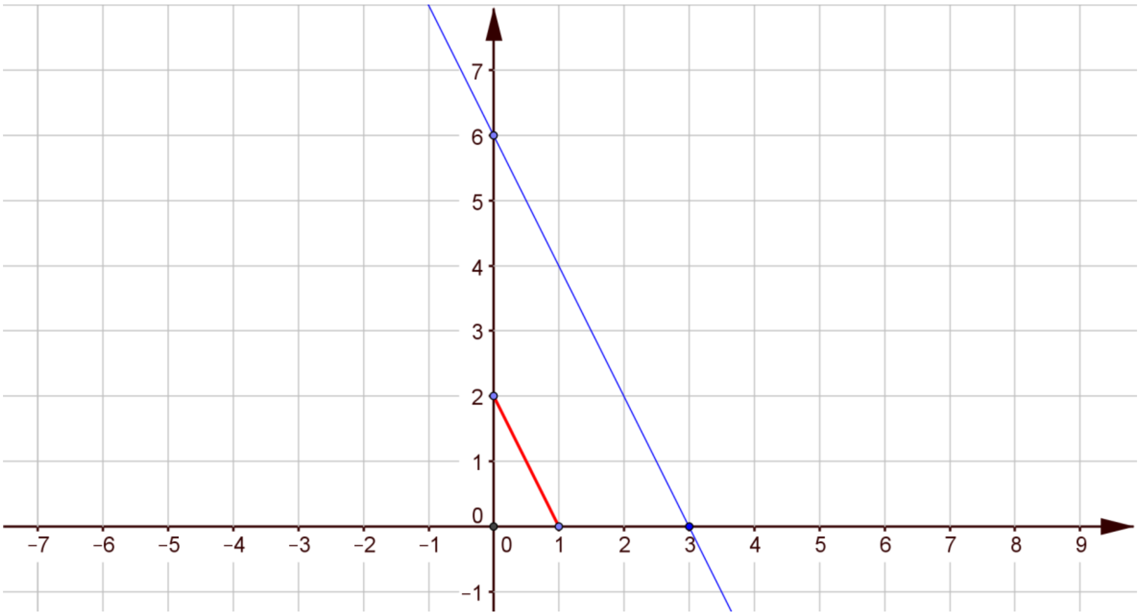


Figura 22: Método de Hilbert, passo 4

Passo 6 - Marque o ponto de intersecção desta reta com a reta vertical.

RESULTADO: O ponto demarcado no passo 6 é o resultado da operação:

(+ 2).(+ 3) = + 6.

1- Realize as multiplicações a seguir utilizando os segmentos que representam cada número: a) (+ 3) . (+ 2) b) (– 2) . (+ 3) c) (+ 2) . (– 3) d) (– 2) . (– 3) e) (– 1) . (– 1)

A seguir cada uma das construções esperadas.

Solução:

a) (+ 3) . (+ 2)

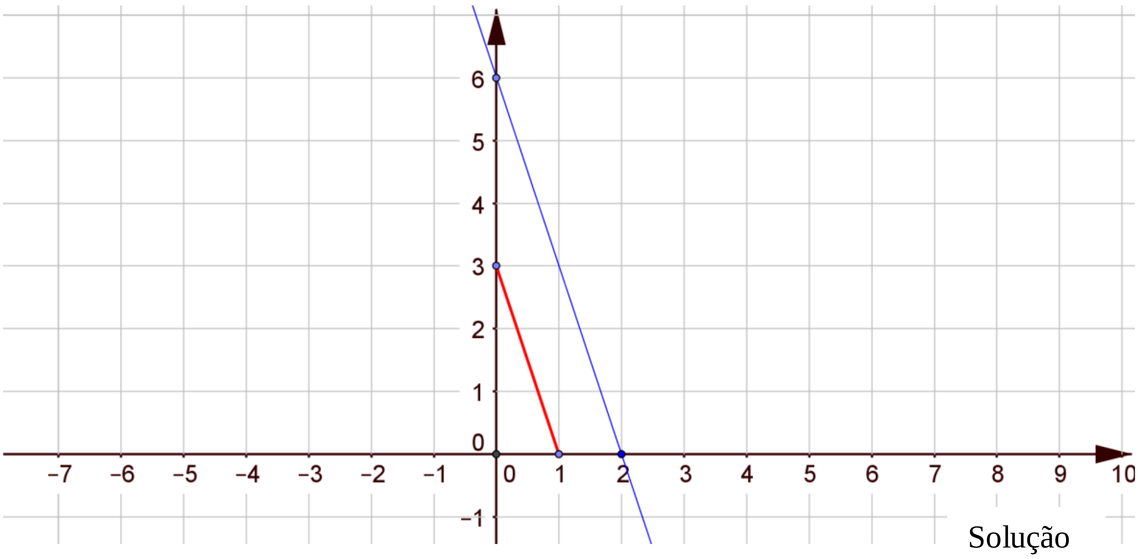


Figura 23: (+ 3) . (+ 2) = +6

b) (– 2) . (+ 3)

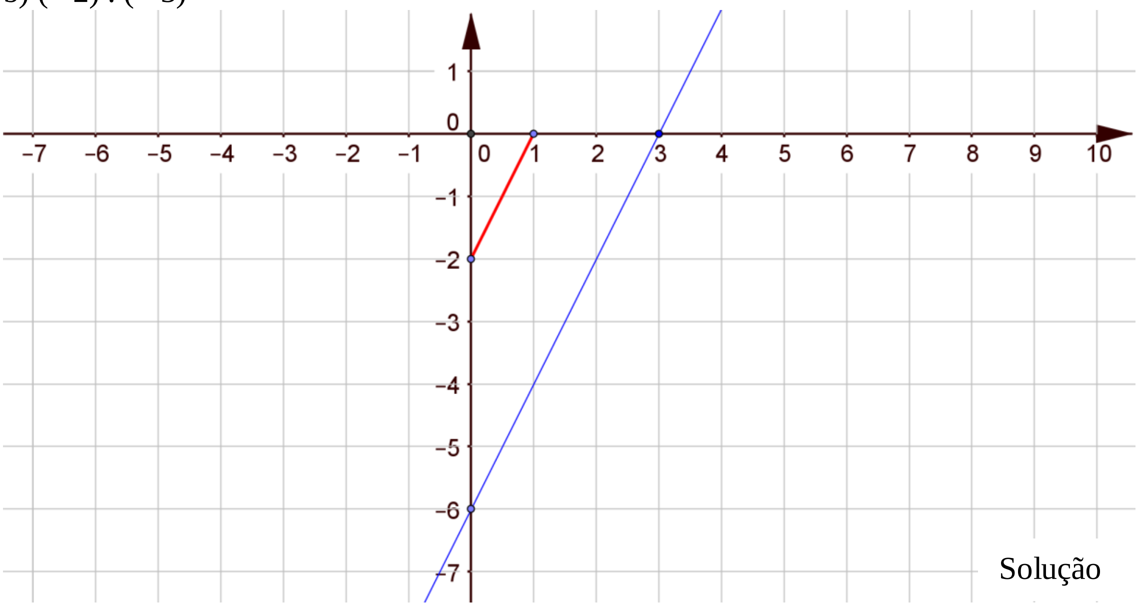


Figura 24: (– 2) . (+ 3) = -6

c) (+ 2) . (– 3)

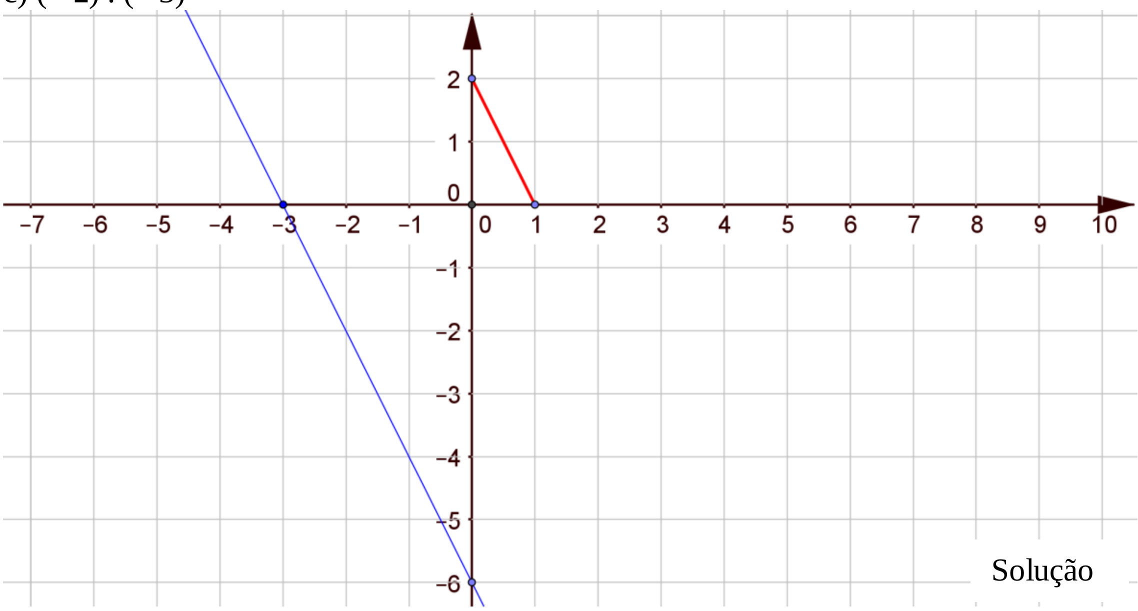


Figura 25: (+ 2) . (–3) = – 6

d) (– 2) . (– 3) = + 6

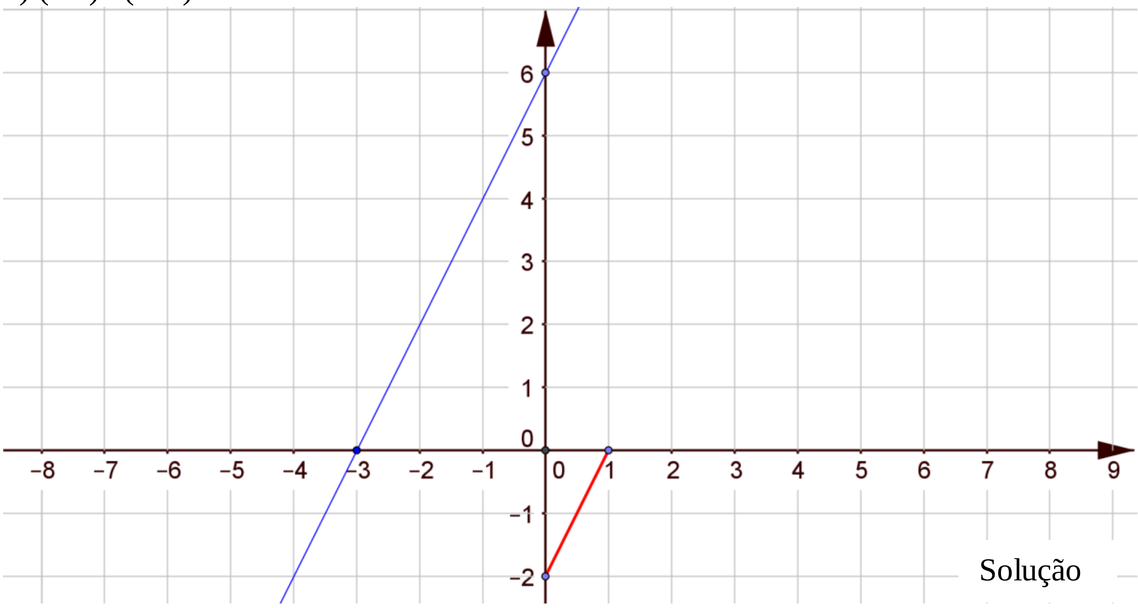


Figura 26: (– 2) . (– 3) = + 6

e) (– 1) . (– 1) = + 1

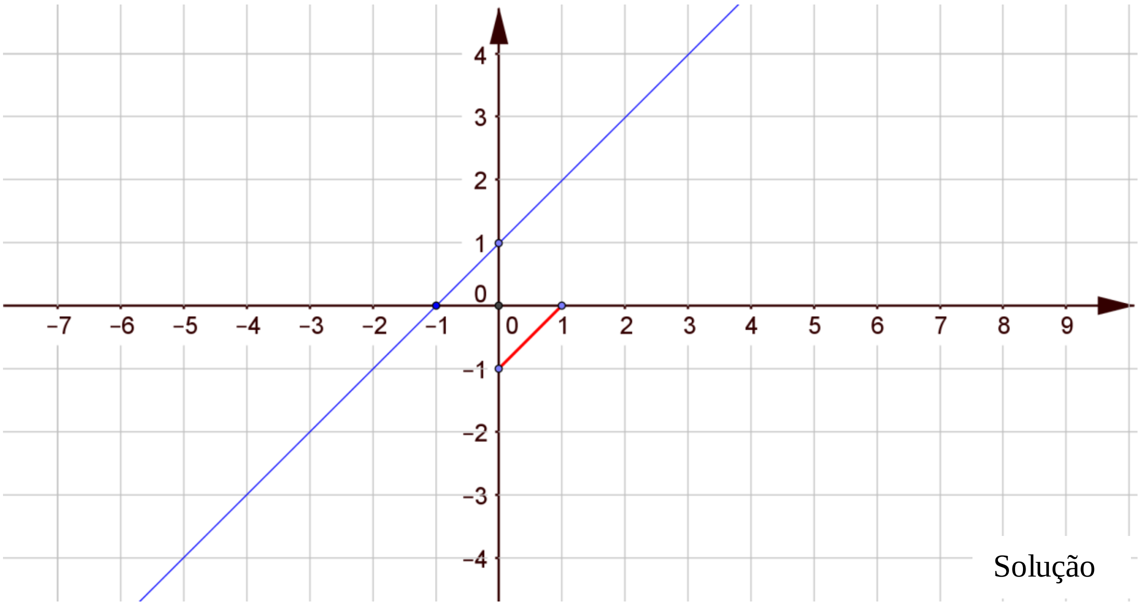


Figura 27: (– 1) . (– 1) = + 1

2. Após realizar a tarefa anterior você observou alguma regularidade quanto ao sinal do produto em cada multiplicação realizada? É possível prever o sinal do produto entre dois fatores se conhecermos seus sinais?

3. Observando o método de Hilbert para a multiplicação de segmentos podemos prever o sinal do resultado de uma multiplicação apenas conhecendo o sinal de seus fatores. Registre o que você observou no quadro abaixo.

Sinal de *a*	**Sinal de *b***	**Sinal de *a* . *b***
(+)	**(+)**	
(+)	**(–)**	
(–)	**(+)**	
(–)	**(–)**	

4. Escreva com suas próprias palavras as conclusões que você chegou para as regras de multiplicação entre números inteiros.

Comentário: Para a atividade 4 a solução fica a cargo do estudante, no entanto, cabe ao professor sistematizar e comentar as repostas para tal, segundo os objetivos desta tarefa.

Conclusão:

Na multiplicação de números inteiros com sinais iguais resulta um número positivo.

Na multiplicação de números inteiros com sinais diferentes resulta um número negativo.

A seguir apresentaremos a tarefa que explora a divisão.

TAREFA 6: Divisão de Números Inteiros.

Objetivos: Realizar a operação de divisão de números inteiros por meio de *segmentos representantes*. Estabelecer uma regra para a divisão de *segmentos representantes*. Estabelecer uma regra para a divisão de números inteiros.

Comentários: Apresentaremos a seguir a construção geométrica que nos permite dividir números inteiros. Seguiremos as mesmas ideias, representaremos os segmentos que representam os números inteiros nas retas, mas, seguindo outra ordem. Essa ordem, se observada, possui os mesmos passos da multiplicação, na ordem inversa.

Seguindo uma metodologia parecida com a que fizemos para a multiplicação de segmentos, pediremos aos estudantes que desenhem duas retas concorrentes e perpendiculares, além de adotarem como unidade de medida o próprio papel, ou a medida do lado do quadradinho. E, finalmente, apresentaremos os passos da divisão. Tomaremos como base a divisão (+ 6) : (+ 2) seguindo os passos a seguir:

Passo 1 - Represente o segmento da unidade no eixo horizontal.

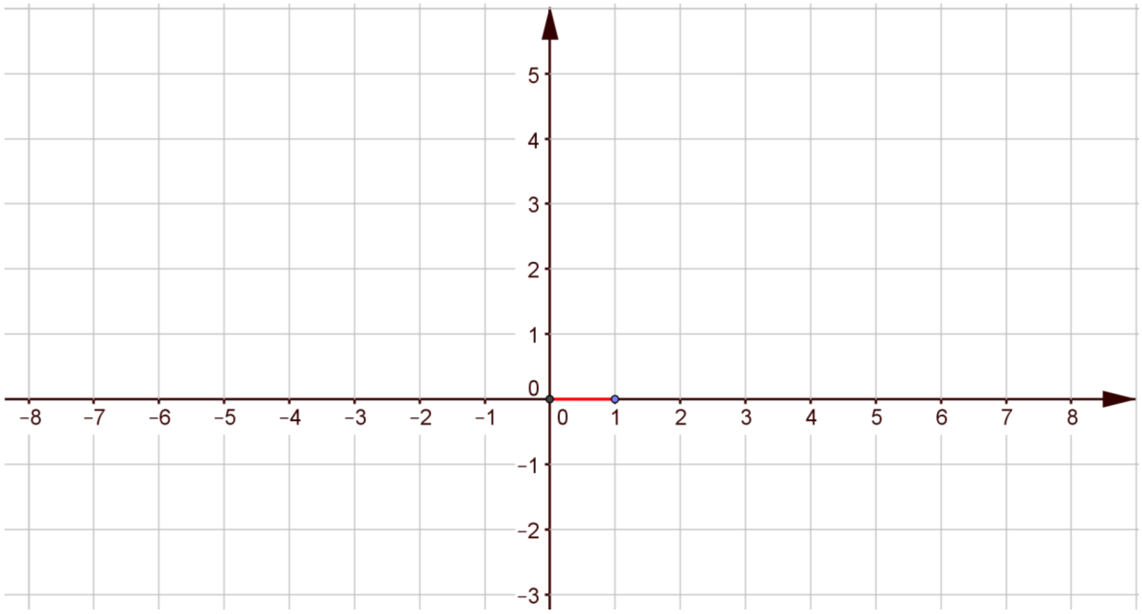


Figura 28: Para de Retas Numeradas e Perpendiculares

Passo 2 - Construa na reta horizontal o *segmento representante* (+1).

Passo 3 - Construa na reta horizontal o *segmento representante* (+ 2) e na vertical o *segmento representante* (+ 6) e trace um segmento que coincida com as extremidades destes *segmentos representantes*.

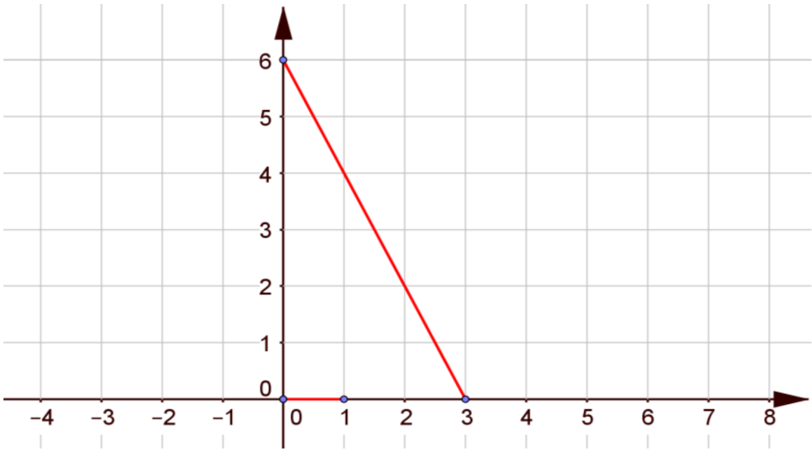


Figura 29: Método da Divisão de Segmentos de Hilbert: passo 1

Passo 4 - Trace uma reta paralela ao segmento encontrado no passo 3 passando pela extremidade do segmento unidade (+ 1).

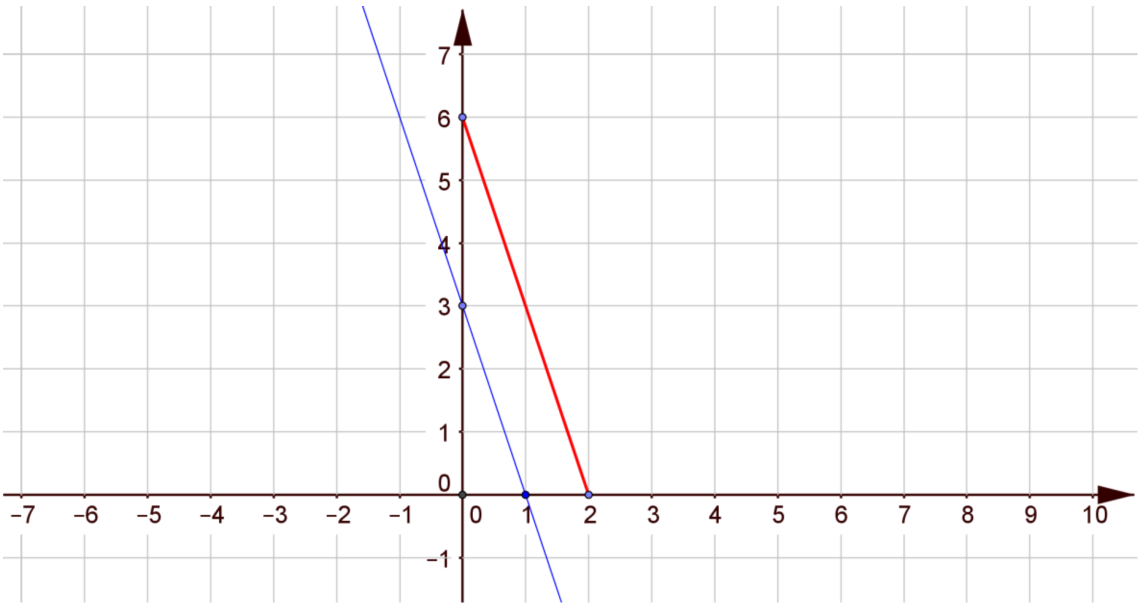


Figura 30: Método da Divisão de Segmentos de Hilbert: passo 2

Passo 5 - A intersecção da reta traçada no passo 4 com a reta vertical determina a extremidade do *segmento representante* do quociente da divisão (+6) : (+2). Portanto, o resultado de (+6) : (+2) = (+3).

Comentário: na sequência os estudantes deverão realizar as divisões indicadas por meio das construções que as representam.

Atividade I. Represente as multiplicações abaixo usando um sistema de eixos coordenados para cada uma:

a) (– 6) : (+ 3)

b) (+ 6) : (– 3)

c) (– 6) : (– 3)

d) (– 1) : (– 1)

Solução:

a) (– 6) : (+ 3)

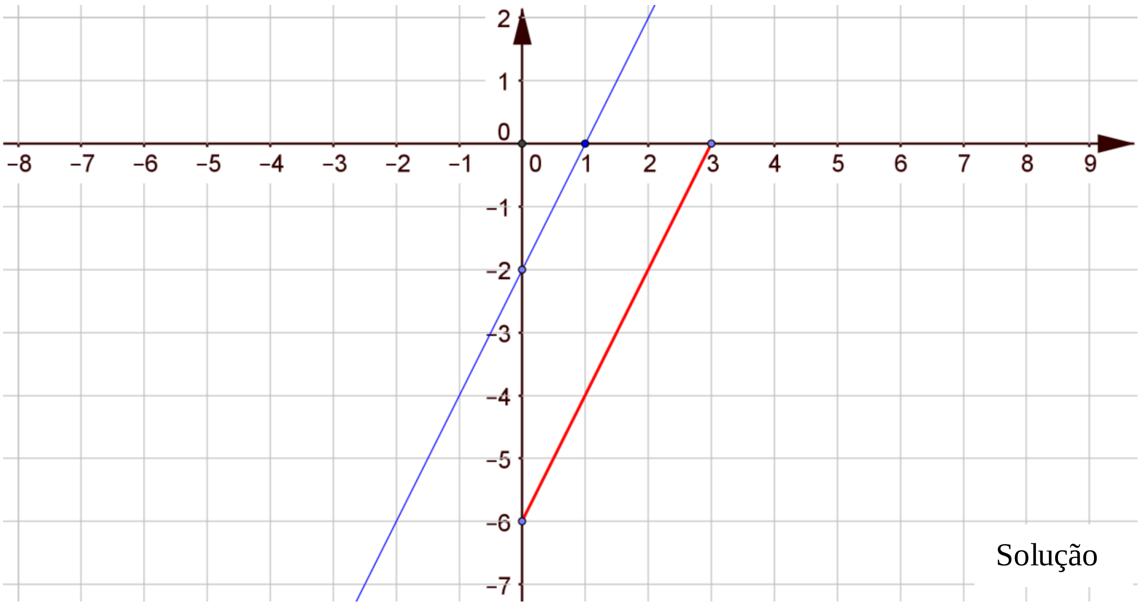


Figura 31: (– 6) : (+ 3) = – 2

b) (+ 6) : (– 3)

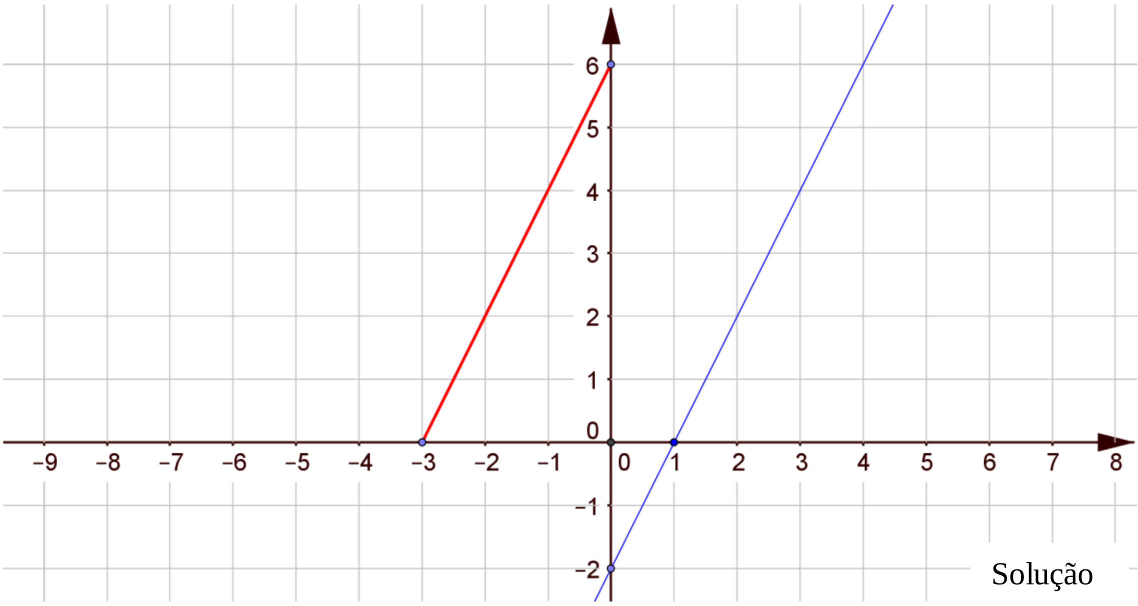


Figura 32: (+ 6) : (– 3) = –2

c) (– 6) : (– 3)

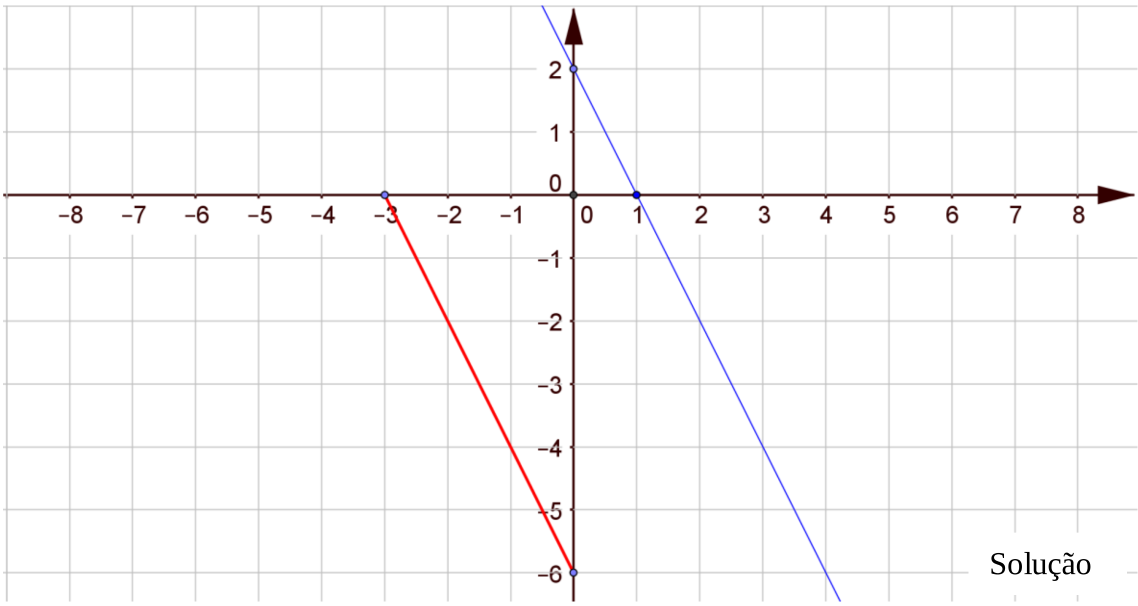


Figura 33: (– 6) : (– 3) = + 2

d) (– 1) : (– 1)

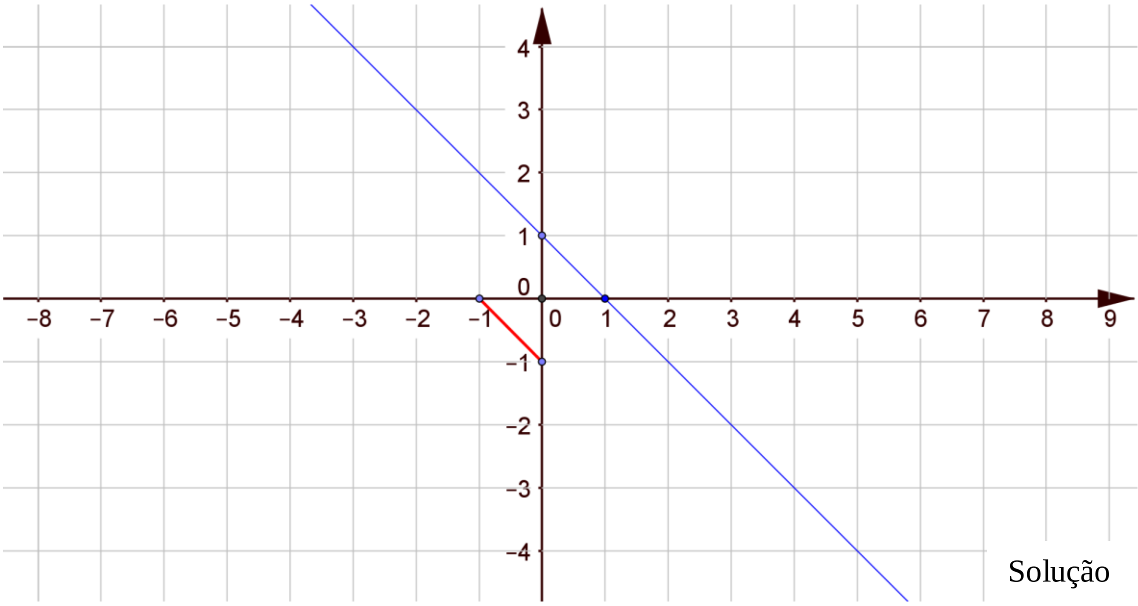


Figura 34: (–1) : (–1) = +1

(2) Após realizar a tarefa anterior o que você observou quanto ao sinal do quociente das divisões? É possível prever o sinal do quociente entre dois números inteiros se conhecermos seus sinais?

(3) Observando a divisão de números inteiros, preencha a tabela abaixo.

Sinal de *a*	**Sinal de *b***	**Sinal de *a : b***
(+)	**(+)**	
(+)	**(–)**	
(–)	**(+)**	
(–)	**(–)**	

(4) Concluindo, escreva com suas próprias palavras as conclusões sobre as regras de divisão entre números inteiros.

Novamente, deixamos a cargo do estudante essa solução e reforçamos que cabe ao professor sistematizar os resultados obtidos.

Conclusão:

Na divisão de números inteiros com sinais iguais resulta um número positivo. *Na divisão de números inteiros com sinais diferentes resulta um número negativo.*

CAPÍTULO IV

CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Em linhas gerais abordaremos neste capítulo o conjunto dos números inteiros, ou mais especificamente a definição de número inteiro. Trataremos da teoria matemática que envolve os números inteiros, suas operações e propriedades e, herança dos matemáticos que viveram nos séculos XVIII e XIX, Richard Dedekind e Hermann Hankel, além de Georg Cantor e Giuseppe Peano, conforme vimos no Capítulo II deste trabalho.

Foi no Capítulo II, que entendemos a evolução histórica que mostra o processo de compreensão e conceituação dos números, no que tange aos contextos, a qual assemelha-se àquela que nos é apresentada nas escolas quando propriamente estudamos esse conceito. Ou seja, o ser humano dotado de percepções e inteligência admite os números naturais fruto do processo de contagem. E essa visão perceptiva norteou o estudo de números até o século XIX. Este modo de enxergar os números foi uma barreira para a construção rigorosa dos números, principalmente dos negativos e dos complexos. Porém, a ausência dessa fundamentação teórica não impediu os avanços da matemática nos séculos adiante, com maior ou menor produção. Porém, a complexidade da "matemática dos números" conduziu a problemas, cuja compreensão e solução, o entendimento intuitivo não era suficiente (FERREIRA, 2013).

Foi no século XIX que repercutiram os estudos relacionados a números que desencadearam contribuições capazes de sustentar a Matemática produzida até então. Uma ilustração desse fato é a diversidade da produção de diferentes obras, por diferentes autores, que tratam dos números naturais, racionais, inteiros e reais, com cronologia não necessariamente nesta ordem.

Em contraponto à apresentação que a escola nos oferece quanto à ordem dos conteúdos, os conjuntos numéricos tiveram em nível de formalização uma história diferente. Em síntese, a definição de número real é construída assumindo-se que os números racionais são conhecidos, a definição de número racional que os números inteiros são conhecidos e a definição de número inteiro a partir dos números naturais.

Por outro lado, um número natural é definido em termos de conjuntos por meio dos axiomas, os Axiomas de Peano, que foram apresentados pela primeira vez em 1889 na obra *Arithmetices Principia nova methodo exposita*, pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932). Esses axiomas representavam a tentativa de reduzir a aritmética comum ao puro simbolismo e estudar números em uma perspectiva diferente da comum englobandoos à teoria dos conjuntos. Motivo pelo qual faremos uma breve revisão sobre a Teoria dos Conjuntos para posteriormente tratarmos da construção dos conjuntos numéricos, particularmente do conjunto dos números inteiros.

4.1 Conjuntos

Conjunto é um conceito fundamental em todos os ramos da matemática. Intuitivamente, um conjunto é uma coleção ou classe de objetos bem definidos. E esses objetos, que não são necessariamente números ou numerais, são denominados de elementos ou membros de um conjunto. Os conjuntos são geralmente denotados por letras maiúsculas (A, B, C, D) e a notação genérica de elementos de conjuntos por letras minúsculas (*a, b, c, d*) (LIPSCHUTS, 1972).

Cumpre assinalar que nosso objetivo nesse capítulo é estudar o conceito rigoroso de número inteiro, portanto, adotaremos a noção intuitiva de conjuntos estudada na educação básica das escolas brasileiras, especialmente dos conjuntos numéricos e das propriedades básicas das operações com conjuntos. Utilizaremos também a notação usual para os conjuntos numéricos N (Conjunto dos Números Naturais), Z (Conjunto dos Números Inteiros), Q (Conjunto dos números Racionais) e IR (Conjunto dos Números Reais).

Com intuito de evidenciar os conhecimentos necessários sobre conjuntos, de acordo com nosso objetivo (construção dos números inteiros), assumiremos algumas definições básicas no estudo da Teoria dos Conjuntos, como a definição de conjunto vazio ou nulo, conjunto unitário, conjuntos finitos e infinitos e conjunto universo. Além disso, usaremos as notações usuais da Teoria dos Conjuntos, $\in, \notin, \subset, \supset, \not\subset, \bigcup$ e $\bigcap$, propostas por Georg Cantor, com seus respectivos significados.

4.2 Subconjuntos

Dizemos que o conjunto *A* é um subconjunto do conjunto *B* se cada membro de *A* também é um membro de *B*. Ou seja: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Indicamos esta relação escrevendo: $A \subset B$, que pode ser lida como “A está contida em B” (LIPSCHUTZ, 1972).

Exemplo 4.2.1 O conjunto $M = \{1, 5, 9\}$ é subconjunto do P = {1, 3, 5, 7, 9}, pois cada membro de *M* também pertence a *P*. Portanto, $M \subset P$.

4.3 Igualdade de Conjuntos

O conjunto *A* é igual ao conjunto *B* se ambos têm os mesmos elementos, isto é, se cada elemento pertencente a *A* pertencer também a *B*, e se cada elemento que pertence a *B* pertencer também a *A*. Indicamos a igualdade de conjuntos por $A{=}B$.

Quando dados dois conjuntos *E* e *F* em que todos os elementos do conjunto *E* estão também no conjunto *F*, ou seja, $E \subset F$. Além disso, todos os elementos do conjunto *F* estão também em *E*, com $F \subset E$, dizemos que $E = F$.

Cumpre examinarmos neste passo que Lipschutz (1972, p.4) define igualdade de conjuntos como: "Dois conjuntos *A* e *B* são iguais, isto é $A{=}B$, se, e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$".

Conclusão 4.3.1 Se *A* não é um subconjunto de *B*, isto é, se $A \not\subset B$, deve haver pelo menos um elemento em *A* que não seja um membro de *B*.

Conclusão 4.3.2 O conjunto vazio, denotado pelo símbolo Ø, é considerado como um subconjunto de qualquer conjunto. De fato, dado um conjunto B qualquer, não há nenhum elemento em Ø que não esteja em B.

Conclusão 4.3.3 O conjunto *A* é subconjunto de si mesmo.

4.4 Subconjunto Próprio

Lipschuts (1972, p.5) afirma que "como cada conjunto *A* é subconjunto de si mesmo, denominamos *B* de *subconjunto próprio de A* se, primeiro, *B* é um subconjunto de *A* e, segundo, não é igual a *A*". Ou seja, *B* é um subconjunto próprio de *A* se $A \subset B$ e $A \neq B$.

4.5 Conjunto de Conjunto

É possível que ocorra de os objetos de um conjunto também serem conjuntos. Por exemplo, o conjunto de todos os subconjuntos de *A*. A fim de evitar a expressão "conjunto de conjuntos" é comum denominar-se de "família de conjuntos" ou "classe de conjuntos" (LIPSCHUTS, 1972).

Exemplo 4.5.1 Em geometria é comum referirmo-nos a "família de linhas" ou "família de curvas" porque linhas e curvas são constituídas por conjuntos de pontos.

Exemplo 4.5.2 O conjunto {{1,2}, {3}, {5,6,8}} é uma família de conjuntos. Seus "elementos" são os conjuntos {1,2}, {3} e {5, 6, 8}.

4.6 Conjunto de Potência

Segundo Lipschuts (1972, p.7) "a família de todos os subconjuntos de qualquer conjunto *S* é chamada de conjunto potência de *S*. Designa-se o conjunto potência de *S* por 2^S" ou, segundo FERREIRA (2013, p.6) "[...] conjunto das partes de *S*, ou conjunto potência de *S*, denotado por P*(S)*, é o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de *S*".

Exemplo 4.6.1 Seja $B = \{x, y\}$. Assim $2^B = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, B\}$

Se um conjunto finito *S* possui *n* elementos, pode-se provar que o conjunto potência de *S* tem 2^n elementos. Esta é uma das razões pela qual a classe de subconjuntos de *S* é chamada de conjunto potência de *S* e é designada de 2^S (LIPSCHUTS, 1972). De fato, usando Indução Finita, podemos considerar como $P(n)$ a afirmação de que se um conjunto possui *n* elementos então ele tem 2^n subconjuntos.

Prova por indução:

i) Para $n = 1$, $P(n)$ é verdadeira, pois se $X = \{a\}$, $P(X) = \{\varnothing,\{a\}\}$, logo, o número de elementos de $P(X)$ será: $2 = 2^1$.

ii) Supomos $P(n)$ verdadeira para um conjunto com *n* elementos, ou seja, que se *X* possui *n* elementos então $P(X)$ possui 2^n elementos. Mostraremos que o conjunto das partes de *X* possui 2^{n+1} elementos, quando *X* tem n+1 elementos.

Para um conjunto com n+1 elementos, vamos fixar um elemento $a \in X$, seja $X' = X - \{a\}$, existem dois tipos de subconjuntos de X:

As partes em que a não participa, ou seja, as partes de X' (portanto, número de elementos de $P(X')$ é 2^n, pois X' tem n elementos)

E os subconjuntos que contem a, que também são 2^n elementos, pois com exceção do vazio todos os outros, ou seja, $2^n - 1$ subconjuntos de X' formarão um novo conjunto onde a pertence a cada um deles e obviamente X terá um subconjunto $\{a\}$, daí segue.

O número de elementos de $P(X)$ é $2^n + 2^n - 1 + 1 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, o que prova que $P(n)$ é verdadeira para um conjunto X com n+1 elementos.

Exercício 4.6.3 Prove: Se A é um subconjunto do conjunto nulo, então $A = \varnothing$ (LIPSCHUTS, 1972).

Solução**:** O conjunto nulo Ø é um subconjunto de qualquer conjunto, em particular do conjunto A, logo $\varnothing \subset A$. Por hipótese A é um subconjunto de Ø, logo $A \subset \varnothing$. Portanto $A = \varnothing$.

Exercício 4.6.4 O que quer dizer o símbolo $\{\{2,3\}\}$? (LIPSCHUTS, 1972).

Solução**:** É um conjunto unitário constituído do conjunto dos elementos 2 e 3. Observe que $\{2;3\}$ pertence ao conjunto $\{\{2;3\}\}$, portanto não é um subconjunto de $\{\{2;3\}\}$. Podemos dizer que $\{\{2;3\}\}$ é um conjunto de conjuntos.

Exercício 4.6.5 Achar o conjunto potência do conjunto $A = \{5; \{1;2\}\}$.

Solução**:** Inicialmente observamos que A possui dois elementos, logo 2^A terá 2^2=4 elementos.

$2^A = \{ \varnothing; \{5\}; \{\{2;3\}\}; A\}$.

4.7 Par Ordenado, Produto Cartesiano e Relações Binárias

Definição 4.7.1 Dados dois elementos a e b, chama-se *Par Ordenado* um terceiro elemento que se indica por (a, b). O elemento a chama-se o primeiro elemento (ou a primeira coordenada) do par ordenado (a, b) e o elemento b chama-se o segundo elemento (ou a segunda coordenada) do par ordenado (a, b).

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Observação 4.7.1.1 Não se deve confundir o par ordenado (a, b) com o conjunto $\{a, b\}$. De fato, como dois conjuntos que possuem os mesmos elementos são iguais, temos $\{a, b\} = \{b, a\}$ sejam quais forem a e b. Por outro lado, se $a \neq b$ temos $(a, b) \neq (b, a)$.

Depois dessas breves noções preliminares, Ferreira (2013, p.6) define par ordenado por outro enfoque.

Definição 4.7.2 "Dados um conjunto não vazio A e $a, b \in A$, definimos o *Par Ordenado* (a,b) como sendo o conjunto $\{\{a\}; \{a, b\}\}$ - observe que $(a,b) \subset$P(A)".

> Esta definição tem por objetivo tornar preciso matematicamente o conceito de par ordenado que, desde o Ensino Fundamental, admitimos intuitivamente como um "um par de objetos onde a ordem tem importância". Com a definição acima, mostramos [...] que par ordenado é aquilo que concebíamos intuitivamente. (FERREIRA, 2013, p.6)

Teorema 4.7.2.2 Sejam A um conjunto e $a, b, c, d \in A$. Temos que: dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$ (FERREIRA, 2013).

> **Demonstração**: Se $a = c$ e b = d, então é claro que $(a,b) = (c,d)$. Reciprocamente, suponhamos que $(a,b) = (c,d)$, isto é, que $\{\{a\};\{\text{a},b\}\} = \{\{c\};\{c,d\}\}$.
>
> Consideremos dois casos:
>
> 1º caso: $a = b$.
>
> Nesta situação, $(a,b) = (a,a) = \{\{a\};\{a,a\}\}=\{\{a\}\}$. Assim, nossa hipótese fica $\{\{a\}\}=\{\{c\};\{c,d\}\}$. Então o conjunto $\{c,d\}$ é um elemento de $\{a\}$, logo só pode ser igual a $\{a\}$, o que acarreta $c = d = a$. Como $a = b$, obtemos $a = c$ e $b = d$.
>
> 2º caso: $a \neq b$
>
> Analisaremos então a igualdade $\{\{a\};\{a,b\}\}=\{\{c\};\{c,d\}\}$:
>
> Se fosse $\{a,b\}=\{c\}$, teríamos $a = b = c$, contradizendo a hipótese $a \neq b$. Logo $\{a,b\} = \{c,d\}$, de onde pode-se concluir que $c \neq d$. Daí, o elemento $\{a\}$ não pode ser $\{c,d\}$, logo $\{a\}=\{c\}$, de onde obtemos $a = c$. De $\{a,b\}=\{c,d\}$, como $b \neq a = c \neq d$, segue que $b = d$. (FERREIRA, 2013, p.7)

Definição 4.7.3 Dados dois conjuntos A e B, chama-se *Produto Cartesiano* de A por B e denota-se por $A \times B$ ao conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) cujo primeiro elemento pertence a A e cujo segundo elemento pertence a B:

$A \times B = \{ (a, b) ; a \in A \text{ e } b \in B \}$.

Exemplo 4.7.3.1 Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, \text{J}\}$, temos:

$A \times B = \{ (1, 4) , (1, \text{J}) , (2, 4) , (2, \text{J}) , (3, 4) , (3, \text{J}) \}$.

Observação 4.7.3.2 Note que, em geral, temos $A \times B \neq B \times A$. Além do mais, $A \times B = B \times A$, se, $A=B$, ou $A= \emptyset$ ou $B= \emptyset$.

Definição 4.7.4 Dado um conjunto A, o *Produto Cartesiano* de A por A, denotado por $A \times A$, é o conjunto de todos os pares ordenados compostos por elementos de A, isto é, $A \times A = \{(x,y) \mid x,y \in A\}$ (FERREIRA, 2013).

Definição 4.7.5 Dados dois conjuntos A e B, chama-se *Relações Binárias* ou simplesmente *Relação* de A em B a todo subconjunto R do Produto Cartesiano $A \times B$. Os conjuntos A e B são denominados, respectivamente, conjunto de partida e conjunto de chegada da relação R.

$$R \text{ é relação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow R \subset (A \times B).$$

Definição 4.7.6 Uma relação binária R num conjunto A é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times A$, isto é, $R \subset (A \times A)$

Para indicar que $(a, b) \in R$, escrevemos aRb e lemos "*a erre b*" ou "*a* relaciona-se com *b* segundo *R*". Se $(a, b) \notin R$ escrevemos $a \not{R} b$ e lemos "*a* não *erre b*" ou "*a* não se relaciona com *b* segundo *R*".

Exemplo 4.7.6.1 Se $A = \{1, 2, 3\}$ e B = {4, J}, temos:

$A \times B$ = {(1, 4); (1, J); (2, 4); (2, J); (3, 4); (3, J)}.

$R_1 = \varnothing$

R_2 = {(2, F)}

R_3 = {(1, 4); (2, 4); (1, J)}

Note que todos os elementos dos conjuntos R_1, R_2 e R_3 também são elementos do conjunto $A \times B$. Portanto todos são relações de A em B.

Exemplo 4.7.6.2 $S = \{(p, q) \in Z \times Z \,;\, p - q = 3k, k \in Z\}$ é uma relação sobre Z. Explicitando alguns elementos de S, obtemos:

$S = \{(4, 1); (11, 2); (-37, 2), \ldots\}$, Como, se $k \in Z$ então $p - q \in Z$, temos que, S é uma relação de Z em Z.

4.8 Propriedades das Relações em um conjunto A

Uma relação R sobre A, ou seja, de A em A, pode apresentar ou não as seguintes propriedades fundamentais:

Reflexiva: xRx , para todo $x \in A$.

Exemplo 4.8.1 A = $\{a, b, c\}$; $R_1 = \{(a, a); (b, b); (a, c); (c, c)\}$ é reflexiva, pois todo elemento A se relaciona com ele mesmo pela relação R_1.

Exemplo 4.8.2 A = {a, b, c}; R_2 = {(a, a); (b, b); (b, a)} não é reflexiva, pois o elemento $c \in A$ não se relaciona com ele mesmo pela relação R_2, ou seja $(c, c) \notin R_2$.

Simétrica: $xRy \Rightarrow yRx$, para todos $x, y \in A$.

Exemplo 4.8.3 $A = \{a, b, c\}$; $R_3 = \{(a, a); (a, b); (b, a)\}$ é simétrica.

Exemplo 4.8.4 $A = \{a, b, c\}$; $R_4 = \{(b, b), (c, a)\}$ não é simétrica. Seria simétrica se $(a, c) \in R_4$.

***Antissimétrica*:** xRy e $yRx \Rightarrow x = y$, para todos $x,y \in A$.

Exemplo 4.8.5 $A = \{a, b, c\}$; $R_5 = \{(a, a), (b, b), (a, c), (a, b)\}$ é antissimétrica.

Exemplo 4.8.6 $A = \{a, b, c\}$; $R_6 = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$ não é antissimétrica. Seria antissimétrica se $(b, a) \notin R_6$ ou $(a, b) \notin R_6$.

***Transitiva*:** xRy e $yRz \Rightarrow xRz$, para todos $x,y,z \in A$.

Exemplo 4.8.7 $A = \{a, b, c\}$; $R_7 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}$ é transitiva.

Exemplo 4.8.7 $A = \{a, b, c\}$; $R_8 = \{(b, b), (a, b), (b, c)\}$ não é transitiva. Seria transitiva se $(a, c) \in R_8$.

4.9 Relações de Equivalência e Classe de Equivalência

Definição 4.9.1 Uma relação R em A diz-se *Relação de Equivalência* se possuir as seguintes propriedades:

(i) ***Reflexiva:*** *aRa, para todo* $a \in A$;

(ii) ***Simétrica:*** se $a,b \in A$ e aRb, então bRa;

(iii) ***Transitiva:*** Para $a,b,c \in A$, se aRb e bRc, então aRc.

Exemplo 4.9.1.1 Considere um conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$. Verifiquemos se as relações abaixo são de equivalência no conjunto A:

a) $R = \{(-1, -1); (0, 0); (1, 1); (-1, 1); (1, -1)\}$

Solução: Verifiquemos as três propriedades:

(i) $\forall\, x \in A$ então xRx, o que mostra que R é reflexiva.

(ii) $\forall\, x, y \in A$, se xRy então yRx. De fato, observe que $(1, -1) \in R$ e $(-1, 1) \in R$, logo R é simétrica.

(iii) $\forall$ *x, y, z* $\in$ *A*, se *xRy* e *yRz*, então *xRz*. A relação *R* é transitiva, pois, observe que (–1, 1) e (1, –1) $\in$ *R*, então (–1, –1), portanto a propriedade (iii) é verificada em *R*.
Logo, *R* é uma relação de equivalência.

b) $S = \{(a, a); (a, b); (b, c); (a, c); (b, a)\}$
Solução: Neste caso,
(i) Note que a propriedade (i) não é verificada pois $(b, b) \notin S$ e (c, c) $\notin S$.
Logo, *S* não é uma relação de equivalência.

Exemplo 4.9.1.2 Considere o conjunto dos números naturais (N). Verifiquemos se a relação de igualdade sobre os naturais é uma relação de equivalência.
Solução: Verifiquemos as três propriedades:
(i) $\forall$ $x \in$ N então *xRx* - No conjunto dos números naturais $x = x$, logo fica verificada a propriedade (i)
(ii) $\forall$ *x, y* $\in$ N, se *xRy* então *yRx* - No conjunto dos números Naturais se $x = y$, então, $y = x$, temos que propriedade (ii) fica verificada.
(iii) *x,y,z* $\in$ N, se *xRy* e *yRz*, então *xRz*. No conjunto dos números Naturais se $x = y$ e $y = z$, então, $x = z$, temos que a propriedade (iii) fica verificada.
Portanto, a relação de igualdade no conjunto dos números naturais é uma relação de equivalência.

Definição 4.9.2 Sejam *R* uma relação de equivalência num conjunto *A* e $a \in A$ um elemento fixado arbitrariamente. O conjunto $\bar{a} = \{x \in A / xRa\}$ chama-se **classe de equivalência** de *a* pela relação *R*. Ou seja, $\bar{a}$ é o conjunto constituído por todos os elementos de *A* que são equivalentes ao elemento *a* (FERREIRA, 2013).
Exemplo 4.9.2.1 Considere um conjunto $A = \{a, b, c\}$ e a relação de equivalência sobre *A* definida por: $R = \{(a, a); (b, b); (c, c); (a, b); (b, a)\}$.
As classes de equivalência dadas pela relação *R* são:
$\bar{a} = \{a, b\}$

$\bar{b} = \{b, a\}$

$\bar{c} = \{c\}$
Teorema 4.9.3 Sejam *R* uma relação de equivalência em um conjunto *A* e *a* e *b* elementos quaisquer de *A*, então:

i) $a \in \overline{a}$

ii) $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow aRb$

iii) $\overline{a} \neq \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$

***Demonstração*:**

i) *R* é uma relação de equivalência do conjunto *A* se, e somente se, $(a, a) \in R$ logo $a \in \overline{a}$.

ii) Se $\overline{a} = \overline{b}$ então para todo elemento $x \in A$ tal que $a\ R\ x$ temos que $b\ R\ x$. Ora *aRa*, portanto, por hipótese, *aRb*. Reciprocamente, se *aRb* então *bRa*, por simetria, portanto $a \in \overline{b}$ e $b \in \overline{a}$. Por outro lado, tomemos um elemento *x* pertencente ao conjunto *A* que se relaciona com *a* ($x \in \overline{a}$). Se *aRx*, então *xRa*, também sabemos que *aRb* (por hipótese), logo por transitividade e simetria temos que:

$$xRa \text{ e } aRb \Rightarrow xRb \Rightarrow bRx$$

Logo $x \in \overline{b}$, portanto, todo elemento de $\overline{a}$ também é elemento de $\overline{b}$ e a recíproca é verdadeira (e a prova é idêntica) o que garante que $\overline{a} = \overline{b}$.

iii) Prova por contraposição: Suponhamos que exista $c \in (\overline{a} \cap \overline{b})$. Então, *aRc* e *bRc*. Pela transitividade, *aRb* e, consequentemente, por (ii), segue que $\overline{a} = \overline{b}$, contrariando a hipótese (FERREIRA, 2013).

Uma conclusão importante do item ii) do Teorema 4.9.3, segundo Ferreira (2013, p.11) “é que dado um elemento arbitrário *x* da classe de equivalência de $\overline{a}$, então $\overline{x} = \overline{a}$, isto é, todo elemento de uma certa classe de equivalência $\overline{a}$ tem a mesma classe de equivalência do elemento *a*. Dizemos então que $\overline{a}$ pode ser representada por $\overline{x}$, $\forall\, x \in \overline{a}$.

Definição 4.9.4 Seja *R* uma relação de equivalência num conjunto *A*. O conjunto constituído das classes de equivalência em *A* pela relação *R* é denotada por A/R e denominada conjunto quociente de *A* em *R*.

Assim, $A/R = \{\overline{a} \mid x \in A\}$

Exemplo 4.9.4.1 Seja Z o conjunto dos números naturais e *R* a relação dada por: *aRb* quando o resto das divisões de *a* e de *b* por 2 forem iguais. Por exemplo, $(5, 21) \in R$, assim como

(12, 208) ∈ *R*. Vamos mostrar que *R* é uma relação de equivalência e na sequência, determinar $N/_R$.

Solução: Provar que *R* é uma relação de equivalência.

i) *aRa*, ∀ *a* ∈ N, a reflexidade é obvia para (*a*, *a*).

ii) Se *aRb* então *bRa*, A simetria segue do fato de que, se *a* possui o mesmo resto na divisão por 2 que *b* então *b* possui o mesmo resto de divisão por 2 que *a*.

iii) Se *aRb* e *bRc* então *aRc*. Suponha que o resto das divisões de *a* e *b* por 2 é o número natural *k*, assim como o resto das divisões *b* e *c* por 2 que também é *k*, portanto o resto da divisão de *a* por 2 é o mesmo que o da divisão de *c* por 2, logo *aRc*.

Determinar $N/_R$.

Há dois possíveis restos para uma divisão de um número natural por 2, zero ou um. Denotaremos por $\bar{0}$ e $\bar{1}$ o conjunto dos números naturais que possuem restos zero e um, respectivamente, na divisão por 2.

$\bar{0}=\{0, 2, 4, 6, 8, 10,...\}$

$\bar{1}=\{1, 3, 4, 5, 7, 9,...\}$

Assim sendo $N/_R=\{\bar{0}, \bar{1}\}$. Porém, pelo Teorema 4.9.3, item (ii), a resposta poderia ser escrita sem prejuízo:

$N/_R=\{\bar{0}, \bar{1}\}=\{\bar{6}, \overline{13}\}=\{\bar{4}, \bar{7}\}=\{\overline{24}, \overline{69}\}=...$

4.10 Conjunto dos Números Inteiros

Apenas admitir a existência de números negativos e incorporá-los ao conjunto dos números naturais não é compatível do ponto de vista do rigor matemático. Por um lado, as operações de adição e multiplicação são "bem definidas" no conjunto dos números naturais, ou seja, a adição ou a multiplicação de dois números naturais resulta em um número natural em ambos os casos, mas, a subtração não é uma operação "bem definida" neste conjunto. É fácil observar isso, pois, se considerarmos os números 2 e 3 naturais, a subtração 3 – 2 = 1, resulta em um número natural. Entretanto, 2 – 3 não é um número natural. O que seria então? Já sabemos, intuitivamente, que resulta em um número negativo. Chamamos a atenção para o intuitivamente, pois em nossa formação nunca nos foi apresentada uma definição de número negativo. E como dissemos anteriormente, esse é o escopo desse capítulo. Apresentar uma definição para o número negativo, mais precisamente, para o Conjunto dos Números Inteiros.

Ao fruto dessa leitura, seguindo a literatura pertinente à Matemática, chamaremos de uma construção para o Conjunto dos Números Inteiros.

Para isso, como dissemos no início do capítulo, usaremos a estrutura aritmética do conjunto dos Números Naturais, através das noções de Teoria dos Conjuntos e de Relação de Equivalência (FERREIRA, 2013).

Nesse sentido deve-se dizer que tomaremos como base o Conjunto dos Números Naturais (N), observando os Axiomas de Peano, as propriedades da adição e da multiplicação dos números naturais.

Segundo LIMA (2013) os axiomas de Peano são:

a) Todo número natural tem um único sucessor;

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

c) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo zero, que não é sucessor de nenhum outro;

d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset N$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então X= N.

Teorema 4.10.1 Sejam *m*, *n* e *p* números naturais arbitrários. Valem as seguintes propriedades de adição:

(i) Propriedade associativa da adição: $m+(n+p)= (m+n)+p$.

(ii) Propriedade comutativa da adição: $m+n = n+m$.

(iii) Lei do cancelamento: $m+p = n+p \Rightarrow m+n$.

Teorema 4.10.2 Sejam *m*, *n* e *p* números naturais arbitrários. Valem as proposições abaixo:

(i) $mn \in N$, isto é, a multiplicação é de fato, uma operação em N.

(ii) Existência de um elemento neutro multiplicativo: $1.n=n.1=n$.

(iii) Distributividade em relação à adição: $m(n+p) = mn+mp$ *e* $(n+p).m = mn+mp$.

(iv) Associativade na multiplicação: $m(np)=(mn)p$.

(v) $mn=0 \Rightarrow m=0$ *ou* $n=0$.

(vi) Comutatividade na multiplicação: $mn = nm$.

(vii) Cancelamento Multiplicativo: $mp = np \Rightarrow m = n$.

Já adiantando e respondendo às expectativas, podemos dizer que um número inteiro será definido com uma classe de equivalência dada pela relação de equivalência no conjunto N×N. Portanto, o Conjunto dos números inteiro, denotado por Z, será o conjunto dessas classes de equivalência (FERREIRA, 2013).

Teorema 4.10.3 "A relação ~ em N×N definida por $(a, b) \sim (c, d)$ quando $a+d=b+c$ é uma relação de equivalência" (FERREIRA, 2013, p.36).

***Demonstração*:**

(i) Reflexiva: $(a, b) \sim (a, b)$ pois $a+b=b+a$. Observando a propriedade comutativa da adição em N.

(ii) Simétrica: $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$. Observando a comutatividade da adição em N temos: $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow a+d=b+c \Rightarrow d+a=c+d \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$.

(iii) Transitiva: $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$. Observando a comutatividade, a associatividade e a Lei do cancelamento da adição em N temos:

$^{(1)}\ (a, b) \sim (c, d) \Rightarrow a+d=b+c$

$(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow c+f=d+e \Rightarrow a+c+f=a+d+e \Rightarrow a+c+f=(a+d)+e \Rightarrow^{(1)} a+c+f=(b+c)+e \Rightarrow a+c+f=b+c+e \Rightarrow a+f=b+e \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$.

Seguindo as ideias de FERREIRA (2013) denotaremos por $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência do par ordenado (a, b) pela relação de ~, isto é:

$\overline{(a,b)}=\{(x, y) \in N \times N \mid (x, y) \sim (a, b)\}$.

Exemplo 4.10.3.1 $\overline{(7,2)}=\{ (5, 0); (6, 1); (8, 3); (10, 5); (15, 10);...\}$

Exemplo 4.10.3.2 $\overline{(2,7)}=\{ (0, 5); (1, 6); (3, 8); (5, 10); (10, 15);...\}$

Note que $\overline{(7,2)} = \overline{(5,0)}$ e $\overline{(2,7)} = \overline{(0,5)}$, pelo Teorema 4.9.3. - (ii).

Sendo assim, qualquer classe de equivalência oriunda da relação ~ terá um par ordenado que representa esta classe de equivalência que possui um de seus elementos igual a zero.

Paradoxalmente à nossa visão estritamente formal, se admitirmos a nossa visão intuitiva de números inteiros e de subtração, notamos que

$$(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow a+d = b+c \Leftrightarrow a-b=c-d,$$

Ou seja, dois pares são equivalentes, segundo a definição do Teorema 10.3, quando a diferença entre suas coordenadas, na mesma ordem, coincide. Portanto a subtração, mesmo sem ser mencionada, é o germe da construção do Conjunto dos Números Inteiros (FEREIRA, 2013).

Definição 4.10.4 "O conjunto N×N/~, constituído pelas classes de equivalência $\overline{(a,b)}$, se denotada por Z e será chamada de **Conjunto dos Números Inteiros.**" (FERREIRA, 2013, p. 37). Temos:

$$Z = \{N \times N/\sim\} = \{\overline{(a,b)} \mid (a, b) \in N \times N\}$$

4.11 Adição de Números Inteiros

Definição 4.11.1 "Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ em Z, definimos soma $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$ com sendo $\overline{(a+c, b+d)}$ " (FERREIRA, 2013, p. 38).

> [...] permitindo-nos usar, por um momento, a noção intuitiva de subtração de Z, temos: $(a, b) \sim (x, y)$ [...], expressa pelo fato de que $a–b = x–y$. Vamos utilizar esta observação com ponto de partida para buscar uma definição rigorosa de adição de inteiros. Vejamos como deveria ser $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$.
>
> Se $\overline{(a,b)}$ expressa, em essência, a "diferença" $(a–b)$ e $\overline{(c,d)}$ expressa por $(c–d)$, a matemática elementar nos dá $(a–b) + (c–d) = (a–c) + (b–d)$. Esta última expressão se traduz, no nosso contexto, como a classe $\overline{(a,b) + (c,d)}$. (FERREIRA, 2013, p. 36)

Pela definição observamos que a adição depende da classe de equivalência dos pares ordenados envolvidos e não do par ordenado específico que representa a classe. Vamos tomar como exemplo a soma $\overline{(3,5)} + \overline{(4,1)} = \overline{(7,6)}$.

Observa-se que $\overline{(3,5)}$ ={(4, 6); (0, 2); (m, m+2)...}, $\overline{(4,1)}$ ={(5, 2); (3, 0); (n+3, n);...} e $\overline{(7,6)}$ ={(9, 8); (5, 4); (3, 2); (k+1, k);...}, com $m,n,k \in$ N. Escolhendo um representante qualquer das classes de equivalência de $\overline{(3,5)}$ e de $\overline{(4,1)}$ deve-se ter uma soma $\overline{(x,y)}$ tal que $\overline{(x,y)} \in \overline{(7,6)}$. Numericamente é fácil constatar este fato.

Particularmente, observamos que a soma $\overline{(3,5)} + \overline{(4,1)} = (m+n+3,\ m+2+n) = ((m+n)+3,\ (m+n)+2) = ((m+n+2)+1,\ m+n+2)$ tomando $m+n+2=k$, teremos $\overline{(3,5)} + \overline{(4,1)} = (k+1, k)$. Logo, para este exemplo observamos que não importa a representante da classe de equivalência envolvido na operação de adição, mas a classe que ele representa.

Mostraremos agora que o fato constatado acima vale em geral, provando assim que a relação de adição nos números inteiros está bem definida.

Teorema 4.11.2 "Dados $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$, isto é, a adição de números inteiros está bem definida" (FERREIRA, 2013, p. 38).

***Demonstração*:** Inicialmente temos que:

(1) $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \Rightarrow (a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a+b' = b+a'$ e

(2) $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')} \Rightarrow (c, d) \sim (c', d') \Leftrightarrow c+d' = d+c'$.

Por outro lado temos da definição que $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}$ e $\overline{(a',b')} + \overline{(c',d')} = \overline{(a'+c', b'+d')}$. Daí segue:

$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')} \Leftrightarrow \overline{(a+c, b+d)} = \overline{(a'+c', b'+d')} \Leftrightarrow$ $(a+c, b+d) \sim (a'+c', b'+d') \Leftrightarrow (a+c)+(b'+d') = (b+d)+(á+c')$.

Provaremos esta última igualdade que é equivalente a provar o teorema.

Das equações (1) e (2) temos:

$(a+c)+(b'+d') = (a+b')+(c+d') = (b+a')+(d+c') = (b+d)+(a'+c')$, como queríamos demonstrar (FERREIRA, 2013).

Teorema 4.11.3 A operação de adição em Z é comutativa, associativa e tem $\overline{(0,0)}$ como elemento neutro. Vale também a lei do cancelamento, como em N. Além disso, vale a propriedade do elemento oposto (ou simétrico, ou inverso aditivo): dado $\overline{(a,b)} \in$ Z, existe um único $\overline{(c,d)} \in$ Z tal que $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$. Este $\overline{(c,d)}$ é o elemento $\overline{(b,a)}$. (FERREIRA, 2013 e MACHADO, 2014)

Demonstração: Dadas as classes de equivalência $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)}$ pertencentes a Z. Temos:

(1) ***Propriedade Comutativa*:** Devemos mostrar que $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}$.

Pela definição 4.11.1 e pela propriedade comutativa da adição em N, temos:

$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)} = \overline{(c+a, d+b)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}$, como queríamos.

(2) ***Propriedade Associativa*:** Temos que mostrar a igualdade $\overline{(a,b)}+(\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)})=$ $(\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)})+\overline{(e,f)}$.

Pela definição 4.11.1 e pela propriedade associativa da adição em N, temos:

$$\overline{(a,b)}+(\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)})=\overline{(a,b)}+\overline{(c+e,d+f)}=$$

$$\overline{(a+(c+e),b+(d+f))}=\overline{((a+c)+e,(b+d)+f)}=$$

$$\overline{(a+c,b+d)}+\overline{(e,f)}=(\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)})+\overline{(e,f)}$$

(3) ***Existência do Elemento Neutro*** $\overline{(0,0)}$ em Z.

$\overline{(a,b)}+\overline{(0,0)}=\overline{(a+0,b+0)}=\overline{(0+a,0+b)}=\overline{(a,b)}$

(4) ***Lei do cancelamento da adição*** em Z. Temos que provar que $\overline{(a,b)}+\overline{(e,f)}=\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)}\Rightarrow\overline{(a,b)}=\overline{(c,d)}$.

$\overline{(a,b)}+\overline{(e,f)}=\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)}\Rightarrow\overline{(a+e,b+f)}=\overline{(c+e,d+f)}\Rightarrow$

$(a+e)+(d+f)=(b+f)+(c+e)\Rightarrow(a+d)=(b+c)\Rightarrow(a,b)=(c,d)\Rightarrow\overline{(a,b)}=\overline{(c,d)}$

(5) ***Propriedade do elemento oposto*:** Temos que mostrar que dado $\overline{(a,b)}$ existe um único $\overline{(c,d)}$ tal que $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(0,0)}$ e este $\overline{(c,d)}$ é o elemento $\overline{(b,a)}$.

Iniciamos provando a existência desse elemento oposto.

Tomemos $\overline{(c,d)}=\overline{(b,a)}$. Daí segue:

$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(e,f)}\ \Rightarrow\ \overline{(a,b)}+\overline{(b,a)}=\overline{(e,f)}\ \Rightarrow\ \overline{(a+b,b+a)}=\overline{(e,f)}\ \Rightarrow$

$(a+b)+f=(b+a)+e\ \Rightarrow\ f=e\ \Rightarrow\ 0+f=0+e\ \Rightarrow\ (0,0)=(e,f)\ \Rightarrow\ \overline{(e,f)}=\overline{(0,0)}\ \Rightarrow$

$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(0,0)}$.

Sendo assim existe um elemento $\overline{(c,d)}=\overline{(b,a)}$ tal que $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(0,0)}$.

Unicidade: Suponha que exista outro elemento $\overline{(c',d')} \in$ Z diferente de $\overline{(c,d)}$ tal que $\overline{(a,b)} + \overline{(c',d')} = \overline{(0,0)}$. Temos:

(i) $\overline{(c,d)} \neq \overline{(c',d')} \Rightarrow c+d' \neq d+c'$;

(ii) $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a+c,b+d)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow a+c+0 = b+d+0 \Rightarrow a+c = b+d$;

(iii) $\overline{(a,b)} + \overline{(c',d')} = \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a+c',b+d')} = \overline{(0,0)} \Rightarrow a+c'+0 = b+d'+0 \Rightarrow$ $a+c' = b+d' \Rightarrow b+d' = a+c'$.

Somando membro a membro as equações (ii) e (iii) temos:

$a+c+b+d' = b+d+a+c' \Rightarrow c+d' = d+c'$, o que contradiz (i). Portanto, $(c,d) = (c',d')$, como queríamos demonstrar.

4.12 Subtração de Números Inteiros

Definição 4.12.1 Dado α ∈ Z, o único β ∈ Z tal que α+β $=\overline{(0,0)}$ chama-se simétrico de α (ou oposto de α ou inverso aditivo de α). Sua unicidade permite que introduzamos um símbolo para ele: –α (lê-se "menos α") (FERREIRA, 2013).

Assim α+(–α) $=\overline{(0,0)}$. Portanto segue do Teorema 4.11.3 (5), que se α=$\overline{(a,b)}$, então (–α) = $\overline{(b,a)}$. Segundo Ferreira (2013, p.40) "a existência e a unicidade do oposto de um número inteiro permite que definamos uma terceira operação em Z, denominada subtração".

Definição 4.12.2 A subtração em Z, denotada por (–), é a operação definida da seguinte forma: Se α,β ∈ Z, então: α–β= α+(–β). Assim, a subtração de α–β nada mais é que a soma de α com o simétrico de β. (FERREIRA, 2013 e MACHADO, 2014)

Proposição 4.12.3 Para α, β, γ ∈ Z, com α=$\overline{(a,b)}$, β=$\overline{(c,d)}$ e γ=$\overline{(e,f)}$ valem as seguintes afirmações (MACHADO, 2014).

(i) –(– α) = α

***Demonstração*:** se α=$\overline{(a,b)}$, então –α=$\overline{(b,a)}$, daí segue: –(– α)= $-\overline{(b,a)} = \overline{(a,b)}$ = α

(ii) –α+β=β –α.

***Demonstração*:** –α+β = $\overline{(b,a)} + \overline{(c,d)} = \overline{(b+c,a+d)} = \overline{(c+b,d+a)} = \overline{(c,d)} + \overline{(b,a)}$ = β – α

(iii) α –(–β)= α+β;

Demonstração: α–(–β) = $\overline{(a,b)} - \overline{(d,c)} = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$ = α+β.

(iv) –α–β)= –(α+β);

Demonstração: –α–β = $\overline{(b,a)} + \overline{(d,c)} = \overline{(b+d,a+c)} = -\overline{(a+c,b+d)} = -(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}) =$ –(α+β).

(v) α–(β+γ) = α–β–γ;

Demonstração: α–(β+γ) = $\overline{(a,b)} - (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)} - (\overline{(c+e,d+f)} =$
$\overline{(a,b)} + \overline{(d+f,c+e)} = \overline{(a,b)} + \overline{(d,c)} + \overline{(f,e)}$ = α–β–γ.

4.13 Multiplicação de Números Inteiros

Definição 4.13.1 Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ em Z, definimos o produto $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}$ como sendo o inteiro $\overline{(ac+bd,ad+bc)}$.

Segundo Machado (2014) a noção intuitiva das classes de equivalência $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ que são respectivamente a "subtração" (*b*–*a*) e (*d*–*c*), e geram o produto (*a*–*b*).(*c*–*d*) = *a*.*c*+*b*.*d* – (*a*.*d*+*b*.*c*), nos dá a motivação para a Definição 4.13.1.

Como no caso da adição, devemos verificar se a multiplicação está bem definida. Dada a analogia com o caso aditivo.

Teorema 4.13.2 A multiplicação em Z está bem definida, isto é, se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(a',b')}.\overline{(c',d')}$.

Demonstração (MACHADO, 2014):

(1) $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \Rightarrow a+b'=b+a' \Rightarrow ca+cb'=cb+ca'$;

(2) $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \Rightarrow a+b'=b+a' \Rightarrow da+db'=db+da' \Rightarrow db+da'= da+db$;

Somando membro a membro as equações (1) e (2) para obter a igualdade (3):

$ac+bd+a'd+b'c = ad+bc+a'c+b'd \Rightarrow$

$\overline{((ac+bd),(a'd+b'c))} = \overline{((a'c+b'd),(ad+bc))} =$

$(ac+bd)+(ad+bc) = (a'd+b'c)+(a'c+b'd) \Rightarrow$

$\overline{((ac+bd),(ad+bc))} = \overline{((a'c+b'd),(a'd+b'c))} \Rightarrow \overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(a',b')}.\overline{(c,d)}$; (3)

Temos ainda:

(4) $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')} \Rightarrow c+d'=d+c' \Rightarrow a'c+a'd'= a'd+ a'c'$;

(5) $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')} \Rightarrow c+d'=d+c' \Rightarrow b'c+b'd'= b'd+b'c' \Rightarrow b'd+b'c'=b'c+b'd'$.

Somando membro a membro as equações (4) e (5) para determinarmos a equação (6):

$a'c+a'd'+b'd+b'c'=a'd+b'c+a'c'+b'd' \Rightarrow$

$\overline{(a'd'+b'c', a'c+b'd)} = \overline{(a'd+b'c, a'c'+b'd')} \Rightarrow$

$a'd'+b'c'+a'c'+b'd'=a'd+b'c+b'd+a'c \Rightarrow$

$\overline{(a'd'+b'c', a'c'+b'd')} = \overline{(a'd+b'c, a'c+b'd)} \Rightarrow$

$\overline{(a',b')}.\overline{(c',d')} = \overline{(a',b')}.\overline{(c,d)}$. (6)

Comparando a as equações (3) e (6) concluímos que: $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(a',b')}.\overline{(c',d')}$, como queríamos.

Exercício 4.13.2.1 Efetue:

$\overline{(5,3)}.\overline{(8,1)} = \overline{(5.1+3.8, 5.8+3.1)} = \overline{(29,43)}$.

Intuitivamente temos: $\overline{(5,3)}.\overline{(8,1)} = (5-3).(8-1) = (2).(7) = 14 = (43-29)$.

Teorema 4.13.3 A multiplicação em Z é comutativa, associativa, tem $\overline{(1,0)}$ como elemento neutro multiplicativo e é distributiva em relação à adição. Além disso vale a propriedade do cancelamento multiplicativo, isto é, se α,β,γ ∈ Z, com γ ≠ $\overline{(0,0)}$ e αγ = βγ, então α = β (FERREIRA, 2013).

Para as demonstrações abaixo usamos o Teorema 4.10.2. (i, ii, iii, iv, v, vi e vii)

Demonstração: Dados α, β, γ, θ ∈ Z, com α = $\overline{(a,b)}$, β = $\overline{(c,d)}$, γ = $\overline{(e,f)}$ e θ = $\overline{(1,0)}$, temos:

(i) *Propriedade Comutativa*:

$\alpha\beta = \overline{(a,b)}\ \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(ca+db, da+cb)} = \beta\alpha$;

(ii) *Propriedade Associativa:*

$\alpha(\beta\gamma) = \overline{(a,b)}.\overline{(ce+df, cf+de)} = \overline{(a(ce+df)+b(cf+de), a(cf+de)+b(ce+df))} =$

$\overline{(ace+adf+bcf+bde, acf+ade+bce+bdf)} =$

$\overline{((ac+bd)e+(ad+bc)f, (ac+bd)f+(ad+bc)e)} = (\alpha\beta)\gamma$;

(iii) *Existência do Elemento Neutro Multiplicativo* θ = $\overline{(1,0)}$:

$\alpha\theta = \overline{(a,b)}.\overline{(1,0)} = \overline{(a.1+b.0, a.0+b.1)} = \overline{(a,b)} = \alpha$;

Unicidade do Elemento Neutro Multiplicativo θ=$\overline{(1,0)}$:

Suponha que exista um $\overline{(x,y)}$ ∈ Z, com $\overline{(x,y)} \neq \overline{(1,0)}$, tal que α $\overline{(x,y)}$ = α.

Inicialmente temos que $\overline{(x,y)} \neq \overline{(1,0)}$ isso garante que $x+0 \neq y+1$, logo $x \neq y+1$. Daí segue:

$\alpha = \overline{(a,b)}.\overline{(x,y)} = \overline{(ax+by,ay+bx)} = \overline{(a,b)} \Leftrightarrow$

$ax+by+b = ay+bx+a \Leftrightarrow ax+b(y+1)=bx+a(y+1) \Leftrightarrow$

$\overline{(ax,bx)} = \overline{(a(y+1),b(y+1))} \Rightarrow (ax,bx) = (a(y+1),b(y+1))$.

Da última igualdade segue que $ax = a(y+1)$ e $bx = b(y+1)$, logo $x = y+1$, contrariando a hipótese. Portanto, $\overline{(1,0)}$ é o único elemento neutro multiplicativo no conjunto dos números inteiros.

(iv) ***Propriedade Distributiva em relação à Adição*****:** $\alpha(\beta+\gamma)= \alpha\beta+\alpha\gamma$.

$\alpha(\beta+\gamma) = \overline{(a,b)}.(\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)}.\overline{(c+e,d+f)} =$

$\overline{(a(c+e)+b(d+f),a(d+f)+b(c+e))} = \overline{(ac+ae+bd+bf,ad+af+bc+be)} =$

$\overline{((ac+bd)+(ae+bf),(ad+bc)+(af+be))} =$

$\overline{((ac+bd),(ad+bc))} + \overline{((ae+bf),(af+be))} = \overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(a,b)}.\overline{(e,f)} = \alpha\beta+\alpha\gamma;$

(v) ***Cancelamento Multiplicativo*****:** $\alpha.\gamma=\beta.\gamma \Rightarrow \alpha=\beta$, *com* $\gamma\neq\overline{(0,0)}$.

Inicialmente temos que $\gamma\neq\overline{(0,0)}$, então $\overline{(e,f)}\neq\overline{(0,0)}$, portanto $e \neq f$, sem perda de generalidade suponhamos $e > f$. Ou seja, $e = f + p$, com $p\in$N*.

$\alpha\gamma=\beta\gamma = \overline{(ae+bf,af+be)} = \overline{(ce+df,cf+de)} \Rightarrow ae+bf+cf+de = af+be+ce+df \Rightarrow e(a+d)+ f(b+c) = e(b+c)+ f(a+d)$.

Como $e = f + p$ faremos a substituição na última igualdade:

$(f+p).(a+d)+ f(b+c) = (f+p).(b+c)+ f(a+d) \Rightarrow$

$fa+fd+pa+pd+fb+fc = fb+fc+pb+pc+fa+fd \Rightarrow$

$pa+pd = pb+pc \Rightarrow p(a+d) = p(b+c) \Rightarrow a+d = b+c \Rightarrow$

$(a,b) = (c,d) \Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \Rightarrow \alpha = \beta$.

Proposições 4.13.5 Dados α, β, $\gamma \in$ Z, com $\alpha=\overline{(a,b)}$, $\beta=\overline{(c,d)}$, $\gamma=\overline{(e,f)}$, são válidas as seguintes proposições:

(P_1) Se $\alpha.\beta=\overline{(0,0)}$, então $\alpha=\overline{(0,0)}$ ou $\beta=\overline{(0,0)}$.

Demonstração**:** $\alpha\beta=\overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(ac+bd,ad+bc)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow ac+bd+0 = ad+bc+0 \Rightarrow ac+bd = ad+bc$.

Suponhamos que $\overline{(a,b)} \neq \overline{(0,0)}$, isto é $a \neq b$. Dessa forma, tomemos, sem perda de generalidade, $a > b$, e assim, $a=b+p$, com $p\in$N*. Daí segue na última igualdade:

$(b+p)c+bd = (b+p)d+bc \Rightarrow bc+pc+bd = bd+pd+bc \Rightarrow pc = pd \Rightarrow c = d \Rightarrow c+0 = d+0 \Rightarrow \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$.

Analogamente, se supormos que $\overline{(c,d)} \neq \overline{(0,0)}$, concluiremos que $\overline{(a,b)} \neq \overline{(0,0)}$.

Para as demonstrações seguintes usamos o Teorema 4.11.3 *(5)*.

(P_2) $(-\alpha)\beta = -\alpha.\beta = \alpha.(-\beta)$

$(-\alpha)\beta = \overline{(b,a)}.\overline{(c,d)} = \overline{(bc+ad,bd+ac)} = \overline{(ad+bc,ac+bd)} = \overline{(a,b)}.\overline{(d,c)} = \alpha.(-\beta)$;

(P_3) $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$;

$(-\alpha).(-\beta) = \overline{(b,a)}.\overline{(d,c)} = \overline{(bd+ac,bc+ad)} = \overline{(ac+bd,ad+bc)} = \overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \alpha.\beta$

(P_4) $\alpha(\beta-\gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$

$\alpha.(\beta-\gamma) = \alpha.(\beta + (-\gamma)) = \alpha\beta + \alpha(-\gamma)$;

Observando (P_2) temos que $\alpha(-\gamma) = -\alpha\gamma$, logo $\alpha(\beta-\gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$, como queríamos demonstrar.

4.14 Relação de Ordem em Z

Para analisarmos a relação de ordem no conjunto dos números inteiros tomaremos as definições, proposições, teoremas e propriedades de ordem do conjunto dos números naturais assim como a sua simbologia.

Definição 4.14.1 Uma relação binária *R* em um conjunto não vazio *A* diz-se uma Relação de Ordem em *A* quando satisfizer as condições seguintes, para quaisquer $x,y,z \in A$:

(i) *Reflexibilidade: xRx;*

(ii) *Antissimetria:* se *xRy* e *yRx,* então *x=y;*

(iii) *Transitividade:* se *xRy* e *yRz,* então *xRz;*

Um conjunto não vazio *A*, munido de uma relação de ordem, diz-se conjunto ordenado (FERREIRA, 2013).

Definição 4.14.2 Dados $m,n \in$ N, dizemos que *mRn* se existir $p \in$ N tal que $n = m+p$ (FERREIRA, 2013).

Definição 4.14.3 Para $m,n \in$ N, se *mRn*, onde *R* é relação da Definição 4.9.6., dizemos que *m* é menor do que ou igual a *n* e passaremos a escrever o símbolo $\leq$ no lugar de *R*: assim, $m \leq n$ significará *mRn* (FERREIRA, 2013).

Definição 4.14.4 Se $m \leq n$, mas $m \neq n$, escrevemos $m < n$ e dizemos que *m é menor que n*. (FERREIRA, 2013)

Proposição 4.14.5 (Lei da Tricotomia) Para quaisquer $m,n \in$ N, temos que uma, e apenas uma, das relações ocorre:

(i) $m < n$

(ii) $m = n$

(iii) $m > n$

> A lei da tricotomia equivale a dizer que, dados m, $n \in$ N, tem-se, necessariamente $m \leq n$ ou $n \leq m$, isto é, dois naturais quaisquer são sempre comparáveis pela relação de ordem acima definida. Por isso, uma relação de ordem que satisfaz a lei da tricotomia é chamada de relação de ordem total [...] uma relação de ordem em um certo conjunto, que não é total [...] diz-se relação de ordem parcial.(FERREIRA, 2013, p.29)

Teorema 4.14.6 Sejam m, n e p naturais quaisquer. São válidas as seguintes implicações (FERREIRA, 2013):

(i) $m \leq n \Rightarrow m+p \leq n+p$

(ii) $m \leq n \Rightarrow mp \leq np$

Teorema 4.14.7 Sejam $m,n \in$ N. Então $m < n$ se, e somente se, $m+1 \leq n$.

Como nos casos da adição e multiplicação, é necessário verificar se a relação de ordem dos números inteiros está bem definida. Sendo assim, vamos comparar os elementos do conjunto usando uma motivação análoga àquelas que procederam as definições de adição e multiplicação (FERREIRA, 2013 e MACHADO 2014).

Definição 4.14.8 Dados os inteiros $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, escrevemos $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$, quando $a+d \leq b+c$.

Teorema 4.14.9 A relação da Definição 4.15.6. está bem definida, isto é, se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$, $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, e $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$, então $\overline{(a',b')} \leq \overline{(c',d')}$.

Temos:

(1) $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \Rightarrow a+b'=b+a'$

(2) $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')} \Rightarrow c+d'= d+c'$

(3) $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \Rightarrow a+d \leq b+c \Rightarrow a+(b'+d')+d \leq b+(b'+d')+c \Rightarrow$

$(a+b')+d'+d \leq b+b'+(c+d')$

Substituindo (1) e (2) na última igualdade, temos:

$(b+a')+d'+d \leq b+b'+(d+c') \Rightarrow a'+d' \leq b'+c' \Rightarrow \overline{(a',b')} \leq \overline{(c',d')}$.

Logo, a relação $\leq$ está bem definida no conjunto dos números inteiros.

Teorema 4.14.10 A relação $\leq$ definida acima é uma relação de ordem em Z, ou seja, é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Além disso, essa relação é compatível com as operações em Z, isto é, para $\alpha, \beta, \gamma \in$ Z arbitrários, vale:

(i) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

(ii) $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma$

(iii) (Lei da Tricotomia): Apenas uma das situações seguintes ocorre:

$\alpha = \overline{(0,0)}$ ou $\alpha > \overline{(0,0)}$ ou $\alpha < \overline{(0,0)}$.

Para as demonstrações seguintes consideremos $\alpha, \beta, \gamma \in$ Z, $\alpha = \overline{(a,b)}$, $\beta = \overline{(c,d)}$, $\gamma = \overline{(e,f)}$.

***Demonstração da relação de ordem*:**

(i) *Reflexiva:* É trivial que $\alpha=\alpha$, pois $\overline{(a,b)} \leq \overline{(a,b)}$.

(ii) *Antissimétrica:* $\alpha \leq \beta \Rightarrow a+d \leq b+c$ e $\beta \leq \alpha \Rightarrow c+b \leq d+a \Rightarrow b+c \leq a+d$.

Das desigualdades acima vemos que $b+c \leq a+d \leq b+c$, pela tricotomia em N, temos que $a+d=b+c$, portanto que $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.

(iii) *Transitiva:* Sem perda de generalidade, consideremos $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$. Assim:

$\alpha \leq \beta \Rightarrow a+d \leq b+c \Rightarrow \exists\ p \in$ N tal que $b+c = a+d+p$; (1)

$\beta \leq \gamma \Rightarrow c+f \leq d+e \Rightarrow \exists\ q \in$ N tal que $d+e = c+f+q$. (2)

Somando membro a membro as equações (1) e (2), obtemos

$b+c+d+e = a+d+p+c+f+q \Rightarrow b+e = a+f+(p+q)$

Como $(p+q) \in$ N podemos concluir que $a+f \leq b+e$, logo $\overline{(a,b)} \leq \overline{(e,f)}$, portanto $\alpha \leq \gamma$.

Provamos, portanto que a relação $\leq$ é uma relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

***Demonstração da compatibilidade*:**

(i) $\alpha \leq \beta \Rightarrow a+d \leq b+c \Rightarrow a+d+e+f \leq b+c+e+f \Rightarrow a+e+d+f \leq b+f+c+e \Rightarrow$

$\overline{(a+e,b+f)} \leq \overline{(c+e,d+f)} \Rightarrow \overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} \leq \overline{(c,d)} + \overline{(e,f)} = \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

(ii) Inicialmente temos que se $\gamma \geq \overline{(0,0)}$, então $e \geq f$, sem perda de generalidade. Portanto existe um natural q tal que $e = f+q$. Por outro lado como $\alpha \leq \beta$ temos que $a+d \leq b+c$, portanto existe um natural p tal que $b+c=a+d+p$. Daí segue:

$b+c = a+d+p \Rightarrow be+ce=ae+de+pe;$ (1)

$b+c = a+d+p \Rightarrow bf+cf=af+df+pf \quad \Rightarrow af+df+pf = bf+cf;$ (2)

$e = f+q \Rightarrow pe = pf+pq.$ (3)

Somando membro a membro as igualdes (1) e (2) temos:

$be+ce+af+df+pf = ae+de+pe+bf+cf.$

Substituindo (3) na equação acima obtemos:

$be+ce+af+df+pf = ae+de+pf+pq+bf+cf \Rightarrow be+ce+af+df = ae+de +bf+cf+ pq \Rightarrow$

$ae+de +bf+cf+ pq= be+ce+af+df.$

Extraindo o termo pq (que é maior do que zero ou igual a zero) do primeiro membro segue a desigualdade:

$ae+bf+cf+de \leq af+be+ce+df \Rightarrow \overline{(a,b)}.\overline{(e,f)} \leq \overline{(c,d)}.\overline{(e,f)} \Rightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma.$

(iii) Para provar a Lei da Tricotomia no conjunto dos números inteiros faremos uma prova por contradição. (MACHADO, 2014)

Suponha que $\alpha > \overline{(0,0)}$ e $\alpha < \overline{(0,0)}$, simultaneamente.

$\alpha > \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a,b)} > \overline{(0,0)} \Rightarrow a > b$, da mesma forma

$\alpha < \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a,b)} < \overline{(0,0)} \Rightarrow a < b$. O que é um absurdo pela lei da tricotomia dos números naturais.

Agora suponhamos $\alpha = \overline{(0,0)}$ e $\alpha > \overline{(0,0)}$, simultaneamente.

$\alpha > \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a,b)} > \overline{(0,0)} \Rightarrow a > b$, da mesma forma $\alpha = \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow a = b$. Outro absurdo, como queríamos.

Pelos mesmos argumentos podemos estender o teorema acima para a Lei da Tricotomia dos Números Inteiros, enunciado a seguir.

Teorema 4.14.11 “Para α, $\beta \in Z$, uma e apenas uma das situações seguintes ocorre: $\alpha=\beta$ ou $\alpha<\beta$ ou $\alpha>\beta$”. Segundo MACHADO (2014, p.41)

Definição 4.14.12 (MACHADO, 2014) Dado $\overline{(a,b)} \in Z$, dizemos que:

(i) $\overline{(a,b)}$ é positivo quando $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$;

(ii) $\overline{(a,b)}$ é não negativo quando $\overline{(a,b)} \geq \overline{(0,0)}$;

(iii) $\overline{(a,b)}$ é negativo quando $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$;

(iv) $\overline{(a,b)}$ é não positivo quando $\overline{(a,b)} \leq \overline{(0,0)}$.

Consequências da Definição 4.14.12

(1) Se $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$, então existe um $m \in$ N* tal que $a = b+m$, que equivale a $\overline{(a,b)} = \overline{(m,0)}$.

(2) Se $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$, então existe um $m \in$ N* tal que $b = a+m$, que equivale a $\overline{(a,b)} = \overline{(0,m)}$.

Dessa forma, temos que

Z={ $\overline{(0,m)}$ | m∈N*}∪{ $\overline{(0,0)}$ }∪{ $\overline{(m,0)}$ | m∈N*}, onde estas uniões são disjuntas. Além disso,

Z_-^*={ $\overline{(0,m)}$ | m∈N*}, Z_-={ $\overline{(0,m)}$ | m∈N*}∪{ $\overline{(0,0)}$ }

Z_+^*={ $\overline{(m,0)}$ | m∈N*}, Z_+={ $\overline{(m,0)}$ | m∈N*}∪{ $\overline{(0,0)}$ }

É preciso insistir também no fato de que Z_+ é uma cópia algébrica de N, como traduz o teorema seguinte.

Definição 4.14.13 Seja f : N → Z, dada por *f(m)* = $\overline{(m,0)}$. Então f é injetora e valem as seguintes propriedades:

(i) *f(m+n) = f(m) + f(n)*

(ii) *f(mn)=f(m).f(n)*

(iii) *Se m≤n, então f(m) ≤ f(n)*

***Demonstração*:** Inicialmente provaremos que *f* é injetora (MACHADO, 2014).

f(m)=f(n) $\Rightarrow \overline{(m,0)} = \overline{(n,0)} \Rightarrow m+0$ = n+0 ⇒ $m=n$.

(i) *f(m+n)* = $\overline{(m+n,0)} = \overline{(m+n,0+0)} = \overline{(m,0)} + \overline{(n,0)}$ = *f(m) + f(n).*

(ii) *f(mn)*= $\overline{(mn,0)} = \overline{(mn+0.0, m.0+0.n)} = \overline{(m,0)}.\overline{(n,0)}$ = *f(m).f(n).*

(iii) $m \le n \Rightarrow \overline{(m,0)} \le \overline{(n,0)} \Rightarrow$ *f(m) ≤ f(n).*

> [...] o conjunto *f* (N) = Z_+ tem a mesma estrutura algébrica de N. Por exemplo, 2+3=5, corresponde, via *f*, a $\overline{(2,0)} + \overline{(3,0)} = \overline{(5,0)}$. Do mesmo modo, 2.3=6, corresponde, via *f*, a $\overline{(2,0)}.\overline{(3,0)} = \overline{(6,0)}$. A relação $2 \le 3$ se preserva, via *f*, como $\overline{(2,0)} \le \overline{(3,0)}$ confirmando a ideia de que a ordem em Z é uma extensão da ordem em N. Dizemos que N é subconjunto de Z.
>
> A função *f* descrita acima, chama-se *imersão* de N em Z, o que mostra que Z é infinito.
>
> Notemos que, se $m \in$ N, o simétrico de $\overline{(m,0)}$ é $\overline{(0,m)}$, logo se identificarmos $\overline{(m,0)}$ com m através de *f*, obteremos $-m = -\overline{(m,0)} = \overline{(0,m)}$. (MACHADO, 2014, p.43)

Finalmente definimos o Conjunto dos Números Inteiros conforme segue:

Definição 4.14.14 Definimos o conjunto dos inteiros como

$$Z=\{-m \mid m\in N^*\}\cup\{0\}\cup N^* = \{\ldots, -m,\ldots, -2, -1, 0, 1, 2,\ldots, m,\ldots\}$$

Com esta definição finalizamos este capítulo, já que nosso objetivo principal era apresentar a definição de números inteiros. Desta forma, avançamos para as considerações finais deste trabalho.

5. Considerações Finais

Refletir constantemente sobre um trabalho, seja ele qual for, é passo fundamental para a obtenção do sucesso na sua realização. Como professor de Matemática para a educação Básica, entendemos que refletir sobre o ensinar, para que ensinar, como ensinar e para quem ensinar são ações fundamentais em nossa profissão. Neste processo de reflexão, ao longo de nosso tempo de atuação, deparamo-nos com várias inquietações que são movimentadas sobretudo, por nossas inseguranças ao lidar com o conhecimento matemático, do ponto de vista das justificativas para os procedimentos e as atitudes que tomamos em sala de aula, não somente ao apresentar algo novo, mas principalmente, ao ensinarmos conceitos que, por um lado sejam intuitivos, mas que reflexões acerca de procedimentos sobre os mesmos, causam-nos estranhezas e desconfortos.

Essa foi a força motriz para a realização desta dissertação de mestrado que assumiu como objetivo compreender os obstáculos didáticos encontrados no processo de ensino-aprendizagem dos números inteiros e, a partir desta compreensão auxiliar-nos e, aos professores dos sétimos ano do Ensino Fundamental que compartilham conosco o citado, na elaboração de suas aulas, quando o assunto a ser tratado é o conjunto dos números inteiros. Mais especificamente, a fim de justificar as *regras de sinais* na multiplicação e na divisão de números inteiros, sem recorrer recursos como a regra da amizade, promovendo uma exposição *honesta* para tal.

Deste modo, foram analisados materiais que norteiam o trabalho do professor, quais sejam, um livro didático de matemática do 7º ano, como ilustração da apresentação deste conteúdo nos livros e as Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática do Estado do Paraná, sem perder de vista a nossa experiência profissional, a fim de fundamentar nossas percepções. Pode-se observar que são utilizadas estratégias semelhantes na educação paranaense para apresentar os números inteiros e suas regras operatórias de adição, como a reta enumerada, a temperatura de algumas cidades, a movimentação de contas bancárias fictícias, entre outros. Entretanto, com esta breve análise constata-se que os problemas didáticos surgem na evolução natural do assunto para a multiplicação de números negativos.

De modo geral verifica-se que na apresentação da operação de multiplicação entre números negativos geralmente há um ilogismo em relação às operações de soma e subtração que já foram consideradas. Existe um quebra na sequência da exposição, já que fora usado um contexto para a apresentação destes números, outro para as operações de soma e subtração e outro para a multiplicação e divisão. E nestas duas últimas operações, o estudo se resume a apresentá-las para os estudantes, que por sua vez, recorrem à memorização de regras sem sequer justificá-las.

Nossas percepções são corroboradas por Glaeser (1981), ao identificar seis obstáculos relacionados à dificuldade de compreensão dos números inteiros e suas regras operatórias, dentre os quais destacamos os obstáculos 5 e 6, já citados no corpo deste trabalho e que acreditamos serem os mais comuns e desafiadores para o professor. Portanto, foram esses desafios que nos motivaram a buscar alternativas para superá-los e buscar por justificativas que pudessem ser apresentadas para nossos estudantes no que tange às operações realizadas com números inteiros.

Para auxiliar-nos nesta compreensão buscamos na história da Matemática o conhecimento sobre este assunto. O que nos mostrou quão longo e demorado foi o processo para que os números negativos passassem a ser considerados com o *status* de números. Isso nos faz estabelecer analogias entre as dificuldades encontradas hoje nas salas de aula, que também foram enfrentadas e que perduraram, mesmo que em diferentes situações, estendendo-se por volta de 1500 anos para serem superadas pelos matemáticos na história. Foi somente por meio desta fonte que percebemos a evolução da compreensão do que eram apenas consideradas *regras operatórias*, e que eram utilizadas, inicialmente, apenas como artifício para os cálculos desejados, evoluindo para o que hoje conhecemos como o Conjunto dos Números Inteiros.

Anteriormente a realização deste trabalho, estávamos convencidos que a compreensão rigorosa da regra era exclusiva de pessoas que possuem a preocupação e o interesse em estudar Matemática mais a fundo, com objetivos próprios, para se obter uma base de conhecimento e abstração próprios do matemático. Porém, entendemos que estes conhecimentos são importantes para a formação do professor de matemática para a Educação Básica. Pois, por meio da experiência que tivemos com este estudo pudemos conhecer o verdadeiro significado dos números inteiros. Acreditamos que este estudo deve ser desenvolvido junto aos aspectos históricos e epistemológicos, para que possam ser capazes de promover para estes professores compreensões acerca do tema. Assim como Cyrino e Pasquini (2010) ao apresentarem uma proposta semelhante para a formação de professores que ensinam Matemática. Com essa intenção que o capítulo IV traz uma Construção do Conjunto dos Números Inteiros, apresentada com a formalidade que lhe cabe, junto a vários exemplos ilustrativos que poderão facilitar o entendimento dos conceitos e ideias envolvidas no assunto. Concatenando com as DCE que colocam como

> importante entender a História da Matemática no contexto da prática escolar como componente necessário de um dos objetivos primordiais da disciplina, qual seja, que os estudantes compreendam a natureza da Matemática e sua relevância na vida da humanidade (PARANÁ, 2008, p. 66).

faz-se necessário que estes conhecimentos sejam incluídos nos cursos de formação de professores.

A História da Matemática exerceu outro papel em nossos estudos, pois foi a partir dos trabalhos de Descartes e Hilbert, que tivemos subsídios para elaborar uma sequência de tarefas com intuito de justificar as regras de sinais sem que haja quebra do modelo unificador. Visto que "a História da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos" (PARANÁ, 2008, p. 66). Vale salientar que este contato foi possível a partir do referencial Cyrino e Pasquini (2010), já citado neste trabalho.

Enfim, para cumprirmos o objetivo deste trabalho, produzimos uma sequência de tarefas que foi apresentada no Capítulo III deste trabalho, onde usamos construções geométricas com base na utilização de *segmentos orientados* (representantes) para produzir significados para todas as operações realizadas entre os números inteiros. E esse é o diferencial deste texto, já que não quebramos a sequência lógica, presente nos obstáculos apontados por Glaeser (1981) ao usar *segmentos representantes* para representar um número inteiro em todas as operações.

Resta-nos exprimir agora nossos objetivos futuros. Visto que não tivemos tempo para aplicar estas tarefas e analisar os resultados obtidos, pretendemos realizar esta atividade em breve, dando continuidade a este trabalho. E dada importância do tema, consideramos que muito há ainda a percorrer no campo da investigação empreendida, acenando-o como oportuno para que seja alvo de dedicação para outros investigadores.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, G. *A formação do Espírito Científico.* Contra-Ponto, São Paulo, 1996

BALESTRI, Rodrigo D. *Multiplicação e divisão de números inteiros por meio da história da matemática:* uma proposta para 7ª série do Ensino Fundamental.2006. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Edusp, 1996.

BRASIL, *Guia de Livros Didáticos*: PNLD 2014: Ensino Fundamental: Anos Finais. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013, 40p.

______. *Guia de Livros Didáticos: PNLD 2014*: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013, 104p.

______. *Diretrizes Curriculares de Matemática para os anos finais do ensino fundamental e para o ensino médio.* Ministério da Educação e do Desporto. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Curitiba: MEC/CNE, 2008.

CARDOSO, C. F. *Sociedades do Antigo Oriente Próximo*. São Paulo: Editora Ática, 1986.

CYRINO, M.C.C.T.; PASQUINI. R.C.G. *Multiplicação e divisão de números inteiros*: uma proposta para a formação de professores de Matemática. 2.ed. Londrina: SBHMat, 2010. Coleção História da Matemática para Professores, v.14.

DESCARTES, R. *Discurso do Método*. Tradução de Maria Ermantina Galvão. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

______. *Discurso do Método*. Lisboa, Portugal: 70. ed. 1979.

ENCICLOPÉDIA BRITÂNICA, *Simon Stevin,* Disponível em <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/565994/Simon-Stevin> Acessado em 24/03/2015 às 17:17

EVES, Howard. *Introdução à Historia da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FAZZIO, A.; WATARI, K. *Introdução à Teoria de Grupos:* aplicada em moléculas e sólidos. 2. Ed. Santa Maria: Editora da UFSM, 2009.

FERREIRA, J. *A Construção dos Números.* 3. ed. Rio da Janeiro: SBM, 2013.

FOSSA, John Andrew e ANJOS, Marta Figueiredo dos. *Sobre a incompatibilidade dos números negativos com o conceito grego de Arithmós*. Revista Brasileira de História da Matemática. V.7, n.14, p.163-171, 2007

FREITAG, B. et Al. *O livro didático em questão*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1993.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Positivo. 2010

GLAESER, Georges. *Epistemologia dos Números Relativos*. Boletim do GEPEM, Rio de Janeiro, n.17, p. 29-124, 1981.

GUNDLACH, B. H. História dos números e numerais. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

HILBERT, D. *Fundamentos da geometria*. Trad. da 7ª Edição (1930) por Maria P. Ribeiro, Paulino L. Fortes, A.J. Franco de Oliveira. Lisboa: Gradiva, 2003.

HOBSBA W.M. E. J. *A era das revoluções: Europa 1789-1848*. 3.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra. 1981.

HOFLING, E.M. *Notas para discussão quanto à implementação de programas de governo:* Em foco o Programa Nacional do Livro Didático. Educação e Sociedade, n.70, p.159 – 170, abr.2000.

IGLIORI, S. *A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática.* In: Educação Matemática – Uma introdução. Machado, S. (Org.) São Paulo: Ed. Da PUC/SP, 1999.

JANUARIO, Gilberto. *Análise de conteúdo de livros didáticos*: contribuições à prática do professor de Matemática. 2010. 72f. Monografia (Especialização em Formação de Professores – ênfase no Magistério Superior). Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de São Paulo. São Paulo

KATZ, V.J. *A History of Mathematics: an introduction.* 2ª ed. New York: Addson-Wesley education Publisher, 1998.

LAKATOS, I. *A lógica do descobrimento matemático.* Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 1978.

LE GOFF, Jacques. *As raízes medievais da Europa***.** Tradução de Jaime A. Clasen. Petrópolis: Vozes, 2007.

LIMA, E. L. *Funções de Uma Variável.* 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. v.1

______. *NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS*. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção Profmat.

______, et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIPSCHUTS S. *TEORIA DOS CONJUNTOS.* Tradução sob direção de Fernando Vilain Heusi da Silva. São Paulo, McGraw-Hill, 1972. Coleção Shaum.

LISBOA, M.L.C. *Produto de Números Negativos:* Identificando um Obstáculo, Curitiba, 2013. Disponível em: <http://www.mat.ufpr.br> Acesso em 22 março, 2015.

MACHADO, Gabriela Maria. *A construção dos números.* 2014. f.102. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, 2014.

MOL, R.S. *Introdução à História da Matemática.* Belo Horizonte: CAED-EFMG, 2013.

PEREIRA, A. C. C. Teorema de Thales: uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros didáticos de Matemática. 2005. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Unesp - Rio Claro/SP, 2005.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. *TÓPICOS DE HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA.* Rio da Janeiro: SBM, 2012. Coleção PROFMAT.

ROONEY. A. *A História da Matemática*: Desde a criação das Pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil, 2012.

ROSA, Carlos Eurico Galvão. *Produto de números negativos:* estratégias para tratar um obstáculo epistemológico. Curitiba 2013. Disponível em <http://www.mat.ufpr.br> Acesso em 22 de março, 2015.

SANTOS, J.P.L. *Introdução à Teoria dos Números.* Rio de Janeiro: IMPA, 2003. Coleção Matemática Universitária.

SCHUBRING, F. *Sobre o Conceito de Obstáculo Epistemológico*. Anais do I SIPEM –Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Serra Negra, 2000.

SOUZA, J.R. *Novo Olhar: MATEMÁTICA.* 2.ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, E. J. *Sobre a histórias dos números*. CEFETBA, 2010.

TEIXEIRA, L. R. M. *Aprendizagem Operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades*. Revista Pró - Posições, vol. 4, nº 1[10], UNICAMP. Março, 1993.

TURIN, Jussara. *LIVRO DIDÁTICO DE QUÍMICA – PNLD/2012:* Fatores que Influenciaram a escolha dos livros pelos professores da educação básica. 2013. 192 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

VANSAN, A.H. *EQUAÇÕES DIOFANTINAS*: UM PROJETO PARA A SALA DE AULA E O USO DO GEOGEBRA. 2014. 82 f. Dissertação (Mestrado – PROFMAT) – Universidade Estadual de Maringá, Paraná. 2014.