



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

MATHEUS MOTA DIAS

**DE TRABALHOS DE ARQUIMEDES:  
ESTUDOS E APLICAÇÕES**

---

Londrina  
2016

MATHEUS MOTA DIAS

**DE TRABALHOS DE ARQUIMEDES:  
ESTUDOS E APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Márcia  
Fernandes Tucci de Carvalho

Londrina  
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Dias, Matheus Mota.

De trabalhos de Arquimedes: : estudos e aplicações / Matheus Mota Dias. - Londrina, 2016.  
95 f. : il.

Orientador: Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Arquimedes - Teses. 3. Pi - Teses. 4. Alavanca - Teses. I. Carvalho, Ana Márcia Fernandes Tucci de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

MATHEUS MOTA DIAS

**DE TRABALHOS DE ARQUIMEDES:  
ESTUDOS E APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Regina Célia Guapo Pasquini  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Adriana Helena Borssoi  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Londrina, 8 de março de 2016.

Dedico este trabalho a Deus, pois Dele,  
por Ele e para Ele são todas as coisas.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, agradeço à Deus pela oportunidade de participar um programa de mestrado, pela ajuda e capacitação em todos os momentos.

À minha orientadora, professora doutora Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho, por esses meses de grande trabalho, pela paciência, mostrando o caminho de como realizar uma pesquisa e claro, ampliando meus conhecimentos matemáticos.

Aos professores participantes da banca, um grande agradecimento. Seus apontamentos e observações foram importantes para melhorar este trabalho.

A todos os professores e colegas do programa PROFMAT pelos momentos compartilhados durante dois anos, pelo crescimento intelectual e também pela amizade.

Agradeço ao Colégio Estadual Vicente Rijo, na pessoa da professora Maria Aparecida da Silva de Carvalho por ter emprestado a balança de Arquimedes, utilizada na atividade de mesmo nome no trabalho.

E um agradecimento especial à minha esposa, Cristiane Lima Dias, pelo companherismo, incentivo e por me liberar por várias horas e noites de estudos. E ainda, minha filha, Ágape, que chegou em nossas vidas durante esse período e acrescentou ainda mais nossa alegria e sorriso no rosto.

“Eureka!”

**Arquimedes**

DIAS, Matheus Mota. **De Trabalhos de Arquimedes**: estudos e aplicações. 2016. 95 fls. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

## RESUMO

Este trabalho tem dois objetivos: o primeiro é realizar um estudo a respeito de três trabalhos de Arquimedes e suas consequências e/ou aplicações. Já o segundo objetivo é propor atividades para alunos do ensino médio e ensino superior que utilizem os temas estudados anteriormente e que contemplem os objetivos determinados pelos Parâmetros Curriculares Nacional. Os trabalhos escolhidos foram: Determinação de uma aproximação do número irracional  $\pi$  por meio do método de exaustão, Lei da Alavanca e Construção de um heptágono regular. Como consequências desses trabalhos, mostramos outras maneiras de calcular o número  $\pi$ , assim como sua irracionalidade; determinamos o volume de uma esfera e analisamos a construção de polígonos regulares de  $n$  lados com apenas compasso e régua sem medidas. A primeira atividade desenvolvida e aplicada para alunos do curso de Matemática – Licenciatura, da Universidade Estadual de Londrina, consiste em reproduzir os passos que Arquimedes realizou para determinar uma aproximação do número  $\pi$ , utilizando o perímetro dos polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência. Já a segunda atividade, foi proposta para alunos do Ensino Médio do Colégio Sesi Londrina, que utilizaram uma alavanca para analisar situações de equilíbrio alterando posições e quantidades de pesos, podendo, então, determinar a Lei da Alavanca. Os resultados das duas atividades foram analisados quantitativamente e pela maneira que os alunos expressaram suas respostas. A maioria dos alunos conseguiu responder satisfatoriamente todos os itens das atividades e também de maneiras distintas.

**Palavras-chave:** Arquimedes.  $\pi$ . Alavanca. Heptágono. Matemática.



DIAS, Matheus Mota. **Works of Arquimedes**: studies and applications. 2016. 95 pgs. Dissertation (Professional Masters in Mathematics in National Network) – State University of Londrina, Londrina, 2016.

### **ABSTRACT**

This work has two objectives: the first one is to do a study about three works of Archimedes and its consequences and/or applications. The second objective is to propose activities for students of high school and college education using the themes previously studied and which meet the objectives laid down by law. The works chosen were: Determination of an approximation of the irrational number  $\pi$  through the exhaust method, Lever Law and Construction of a regular heptagon. As a consequence of those works, we show other ways to calculate  $\pi$ , as well as its irrationality; we determine the volume of a sphere and analyze the construction of regular polygons of  $n$  sides with only compass and ruler without measures. The first activity developed and applied to students of Mathematics - licenciature, State University of Londrina, is to replicate the steps that Archimedes held to determine an approximation of the number  $\pi$ , using the perimeter of polygons inscribed and circumscribed to a circle. The second activity was proposed to high school students of the Colégio Sesi Londrina, who used a lever to analyze equilibrium situations by changing positions and amounts of weights and then, determine the law of the lever. The results of both activities were analyzed quantitatively and the way that students expressed their answers. Most students satisfactorily answered all items of activities and also in different ways.

**Key words:** Archimedes.  $\pi$ . Lever. Heptagon. Mathematics.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> – Arquimedes .....	12
<b>Figura 2</b> – Morte de Arquimedes .....	13
<b>Figura 3</b> – Arquimedes na banheira .....	14
<b>Figura 4</b> – Triângulo do polígono inscrito com suas medidas.....	18
<b>Figura 5</b> – Triângulo do polígono circunscrito com suas medidas .....	21
<b>Figura 6</b> – Alavanca em equilíbrio .....	38
<b>Figura 7</b> – Alavanca na situação 1 .....	39
<b>Figura 8</b> – Alavanca na situação 2 .....	39
<b>Figura 9</b> – Alavanca na situação 2 em equilíbrio .....	40
<b>Figura 10</b> – Alavanca na situação 3 .....	41
<b>Figura 11</b> – Alavanca na situação 3 ainda em equilíbrio .....	41
<b>Figura 12</b> – Alavanca em equilíbrio com esferas .....	42
<b>Figura 13</b> – Construção inicial .....	46
<b>Figura 14</b> – Construção do heptágono regular .....	48
<b>Figura 15</b> – Triângulo equilátero.....	52
<b>Figura 16</b> – Triângulo com incentro .....	52
<b>Figura 17</b> – Heptágono regular.....	53
<b>Figura 18</b> – Alavanca da atividade .....	65
<b>Figura 19</b> – Resolução da atividade 1 – item a1.....	70
<b>Figura 20</b> – Resolução da atividade 1 – item a2.....	71
<b>Figura 21</b> – Resolução da atividade 1 – item b1.....	71
<b>Figura 22</b> – Resolução da atividade 1 – item b2.....	72
<b>Figura 23</b> – Resolução da atividade 1 – item c.....	72
<b>Figura 24</b> – Resolução da atividade 1 – item d1.....	73
<b>Figura 25</b> – Resolução da atividade 1 – item d2.....	74
<b>Figura 26</b> – Resolução da atividade 1 – item f.....	75
<b>Figura 27</b> – Resolução da atividade 1 – item g.....	75
<b>Figura 28</b> – Resolução da atividade 1 – item i.....	76
<b>Figura 29</b> – Resolução da atividade 2 – situação 1a .....	78
<b>Figura 30</b> – Resolução da atividade 2 – situação 1b .....	78
<b>Figura 31</b> – Resolução da atividade 2 – situação 2 .....	79
<b>Figura 32</b> – Resolução da atividade 2 – situação 3 .....	80

<b>Figura 33</b> – Resolução da atividade 2 – item e) .....	80
<b>Figura 34</b> – Resolução da atividade 2 – exercício 1a .....	81
<b>Figura 35</b> – Resolução da atividade 2 – exercício 1b .....	82
<b>Figura 36</b> – Resolução da atividade 2 – exercício 2a .....	83
<b>Figura 37</b> – Resolução da atividade 2 – exercício 2b .....	83

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1</b> – Gráfico comparativo da atividade 1.....	77
<b>Gráfico 2</b> – Gráfico comparativo da atividade 2.....	84

## LISTA DE TABELAS

<b>Quadro 1</b> – Valores dos perímetros dos polígonos inscritos .....	19
<b>Quadro 2</b> – Valores dos perímetros dos polígonos circunscritos.....	22

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>1 DE TRABALHOS DE ARQUIMEDES</b> .....	17
1.1 DETERMINAÇÃO DE $\pi$ .....	17
1.1.1 Outras Maneiras Para o Cálculo de $\pi$ .....	24
1.1.2 Duas Demonstrações da Irracionalidade de $\pi$ .....	27
1.2 LEI DAS ALAVANCAS .....	37
1.2.1 Volume da Esfera .....	42
1.3 CONSTRUÇÃO DO HEPTÁGONO REGULAR .....	45
1.3.1 Construção de Polígonos .....	50
<b>2 ATIVIDADES</b> .....	54
2.1 ATIVIDADE 1 .....	54
2.1.1 Preparação da Atividade .....	54
2.1.2 Questionário com resolução .....	55
2.1.3 Aplicação do Questionário .....	63
2.2 ATIVIDADE 2 .....	64
2.2.1 Preparação da Atividade .....	65
2.2.2 Questionário com resolução .....	65
2.2.3 Aplicação do Questionário .....	68
<b>3 ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES</b> .....	70
3.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1 .....	70
3.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2 .....	77
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	85
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	86
<b>APÊNDICES</b> .....	88
APÊNDICE A – Atividade: Determinação do número $\pi$ .....	89
APÊNDICE B – Atividade: Lei da Alavanca .....	91

<b>ANEXOS</b> .....	93
ANEXO A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.....	94
ANEXO B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.....	95

## INTRODUÇÃO

Durante a leitura de um texto na disciplina de História da Matemática do programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) sobre Arquimedes de Siracusa, uma frase me chamou atenção. Ela dizia que este matemático grego era considerado o maior matemático de todos os tempos; até então, pensava em nomes como Pitágoras, Gauss e Euler. Surgiu daí o interesse em estudar sobre a vida e os trabalhos desenvolvidos por Arquimedes para, se possível, confirmar a tal frase.

Então, a primeira etapa deste trabalho foi realizar uma pesquisa sobre sua biografia, trabalhos desenvolvidos, contexto e fatos históricos, para assim, conhecer melhor esse importante personagem da história da matemática.

Muito do que se conhece sobre a vida do matemático grego Arquimedes é retirada dos escritos de Plutarco, escritor grego, sobre o general comandante do exército romano Marco Cláudio Marcelo (268 – 208 a.C.). De acordo com Boyer (1996), a cidade de Siracusa, na Grécia, foi alvo de ataques na Segunda Guerra Púnica (218 – 201 a.C.), guerra entre Roma e Cartago. Nesse período Arquimedes desenvolveu grandes experimentos físicos e tiveram grande importância na defesa da cidade, como por exemplo: construção de catapultas, polias e ganchos para destruir os navios que tentavam aportar em Siracusa e espelhos parabólicos para queimar os navios à grande distância.

**Figura 1:** Arquimedes



**Fonte:** <<http://matelvas.blogspot.com.br/2015/05/arquimedes.html>>. Acesso em: 05 jun. 2015.



Mesmo com todas essas invenções, Arquimedes as consideravam apenas diversões. Como diz o autor:

ele dava pouco valor a seus engenhos mecânicos, em comparação com o produto de seus pensamentos. Mesmo quando lidava com alavancas e outras máquinas simples, ele estava mais interessado muito mais interessado em princípios gerais que em aplicações práticas (BOYER, 1996, p. 89).

Conforme Alvarenga (2006, p.1):

Superou todos os outros [matemáticos] pela quantidade e dificuldade dos problemas que tratou, pela originalidade de seus métodos e pelo rigor de suas demonstrações.

O general romano Marcelo tinha grande admiração por Arquimedes, tanto que durante os ataques à cidade de Siracusa, ordenou que sua vida fosse poupada e após os saques, ficou com um planetário que retratava os movimentos dos corpos celestes. Mesmo assim, Arquimedes foi morto em 212 a.C. por um soldado romano pois, como diz a lenda, desobedeceu a uma ordem, já que o soldado estava o atrapalhando em seu trabalho. De acordo com os relatos de Plutarco, na época, Arquimedes tinha setenta e cinco anos; assim, conclui-se que nasceu em 287 a.C. (BOYER, 1996).

**Figura 2:** Morte de Arquimedes



**Fonte:** < <http://curiosidades.batanga.com/4675/arquimedes-y-su-famoso-eureka> >. Acesso em: 05 jun. 2015.

Seus trabalhos abrangem diversos assuntos e áreas, entre eles, segundo Aaboe (2013), matemática pura, astronomia, mecânica e engenharia. Ainda o autor afirma que Arquimedes ficou famoso entre seu povo devido suas realizações práticas

como por exemplo, mover um barco sem muito esforço por meio de polias, ou ainda, correr nu pelas ruas de Siracusa gritando “Eureka” (Achei, em grego) após descobrir a lei da flutuação.

A respeito desta última situação, o rei Hierão com a suspeita de que sua coroa de ouro teria sido trocada por prata, incumbiu Arquimedes para avaliar esta condição. E durante um de seus banhos, determinou a lei da flutuação, que um corpo imerso em um líquido sofre a ação de uma força, vertical e para cima, que alivia o peso do corpo. Assim, comparando pesos, Arquimedes conseguiu determinar que a densidade da coroa era menor do que a do ouro puro, confirmando suposição do rei (AABOE, 2013).

**Figura 3:** Arquimedes na banheira



**Fonte:** <<http://creativityseminar.blogspot.com.br>>. Acesso em: 05 jun. 2015.

Aaboe (2013, p.95) apresenta uma relação das obras escritas por Arquimedes que foram preservadas, em provável ordem cronológica:

- Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I;
- A Quadratura da Parábola;
- Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas II;
- Sobre a Esfera e o Cilindro;
- Sobre as Espirais;
- Sobre os Cones e os Esferóides;
- Sobre os Corpos Flutuantes;
- A medida de um Círculo;
- O Contador dos Grãos de Areia.

Em 1906, o livro, até então perdido, “*O Método*” foi encontrado por J.L. Heiberg em uma biblioteca na cidade de Constantinopla. Além deste, outros dois tratados foram descobertos por meio de traduções em árabe. O primeiro, *Livro dos Lemas*, contém uma demonstração da trisseção de um ângulo e o segundo, descoberto em 1927, contém a construção de um heptágono regular. (AABOE, 2013)

Após essa pesquisa histórica sobre Arquimedes, percebemos que seria necessário delimitar os trabalhos. O primeiro objetivo desta dissertação é realizar um estudo sobre três destes trabalhos de Arquimedes: Determinação do número  $\pi$ , Lei das Alavancas e a Construção do heptágono regular. Escolhemos estes trabalhos pela quantidade de bibliografia disponível e também da possibilidade de aplicação dos conceitos envolvidos em atividades. O segundo objetivo é aplicar os conceitos e ideias desenvolvidos por Arquimedes em atividades voltadas à alunos da educação básica e ensino superior e analisar suas respostas.

No capítulo 1, realizamos um estudo sobre estes três trabalhos de Arquimedes. O primeiro, é apresentada uma maneira de se calcular um valor aproximado do número irracional  $\pi$  por meio do método de exaustão. Ainda na seção, apresentamos outras maneiras do cálculo de  $\pi$  desenvolvidas por matemáticos no decorrer dos séculos. Ainda sobre o assunto, encerramos o capítulo com duas demonstrações da irracionalidade de  $\pi$ . O segundo trabalho refere-se à Lei da Alavanca, definimos uma alavanca e por meio de situações com pesos em diversas distâncias podemos entender o seu funcionamento. A partir dessa lei, podemos determinar o volume de uma esfera, utilizando o volume de um cilindro e de um cone. A construção de um heptágono regular utilizando régua sem medida e compasso é o terceiro trabalho estudado. Apesar de que está provada que é impossível essa construção, Arquimedes utiliza uma construção nêusis que permite, então, o feito. Estudamos ainda, sobre a construção de polígonos regulares com instrumentos euclidianos de  $p$  lados, com  $p$  primo.

No capítulo 2, mostramos duas atividades propostas aos alunos, de acordo com a escolaridade sugerida, com suas resoluções. E ainda, detalhamos os procedimentos das pesquisas e suas justificativas.

As análises das atividades se encontram no capítulo 3, onde apresentamos algumas resoluções de alunos, evidenciando os acertos e também as maneiras que encontraram para resolver os exercícios.

E terminamos com as considerações finais, no capítulo 4, retomando os objetivos do trabalho, conclusões das análises das respostas das atividades e aprendizado em geral durante esse trabalho.

## 1 DE TRABALHOS DE ARQUIMEDES

Neste capítulo, realizaremos um estudo de três trabalhos de Arquimedes: A determinação do valor do número  $\pi$ , Lei da Alavanca e a Construção de um heptágono regular. Após cada estudo é abordada uma aplicação e/ou consequência do trabalho realizado por Arquimedes, como a irracionalidade de  $\pi$ , o cálculo do volume de uma esfera e a construção de polígonos regulares com compasso e régua sem graduação.

### 1.1 DETERMINAÇÃO DE $\pi$

Para calcular a razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro, que hoje conhecemos pelo número irracional  $\pi$  (pi), Arquimedes utilizou o método conhecido como *Método de Exaustão*. Este método, segundo Boyer (1996), foi utilizado primeiramente por Eudoxo (408 a.C. – 355 a.C.) e ele aproxima o valor desejado por meio de séries ou termos de uma sequência. Este trabalho está contido na obra “*A medida do Círculo*”, que ainda segundo o autor, também contém a prova que a área de um círculo é igual à do triângulo retângulo com um cateto medindo o comprimento da circunferência do círculo e o outro cateto, o raio do círculo.

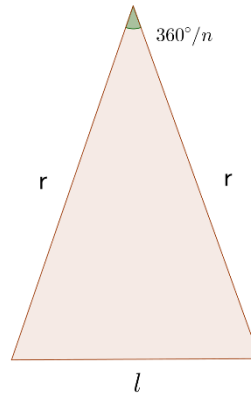
Então, para determinar o comprimento de uma circunferência, primeiramente, Arquimedes calculou o perímetro de um hexágono regular inscrito a esta circunferência e repetiu este processo dobrando o número de lados do polígono regular inscrito até obter o perímetro de um polígono inscrito de noventa e seis lados. Da mesma forma, calculou o perímetro dos polígonos de seis, doze, vinte e quatro, quarenta e oito e noventa e seis lados circunscritos a esta mesma circunferência. Obtendo assim, uma aproximação inferior e superior da medida do comprimento da circunferência. Podendo assim, determinar uma aproximação do número  $\pi$ , dividindo o valor do comprimento da circunferência pela medida do seu diâmetro.

Utilizaremos, neste trabalho, ferramentas e recursos da matemática moderna para a demonstração dos resultados, já que certos termos e conceitos não haviam ainda sido utilizados na época de Arquimedes.

Considere um polígono regular de  $n$  lados inscrito em uma circunferência de raio  $r$ . Podemos dividir esse polígono em  $n$  triângulos isósceles com vértices no centro da circunferência e como base, um dos lados do polígono. Ainda sobre esse triângulo,

as medidas de seus lados são:  $r$  (raio da circunferência),  $r$  e  $l$  (medida do lado do polígono); e a medida do ângulo oposto à base é  $360^\circ/n$ .

**Figura 4:** Triângulo do polígono inscrito com suas medidas



**Fonte:** o próprio autor

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo citado, obtemos:

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

que implica em,

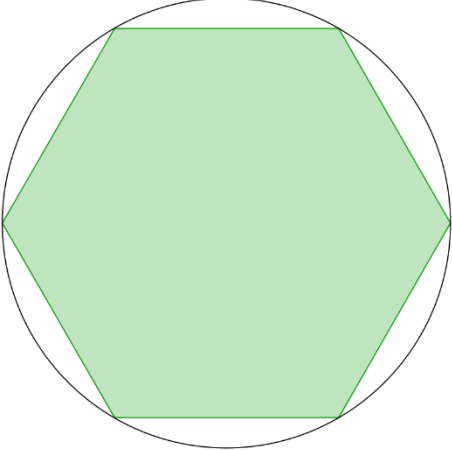
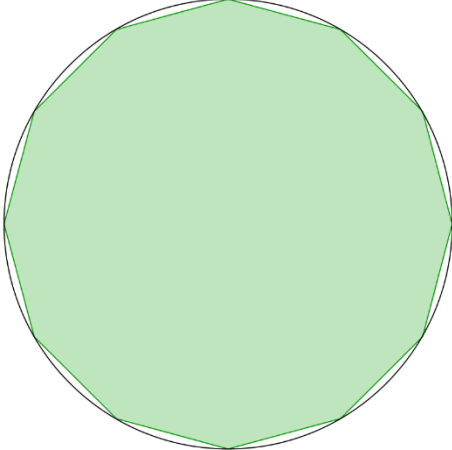
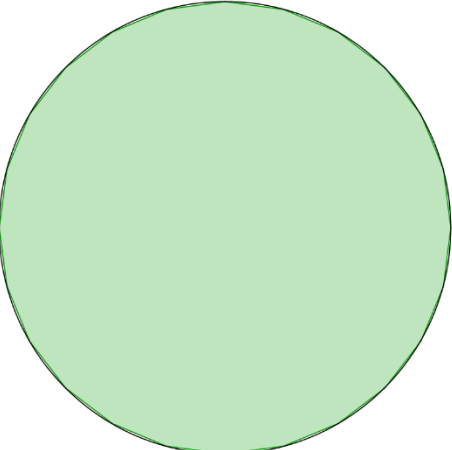
$$l = r \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}$$

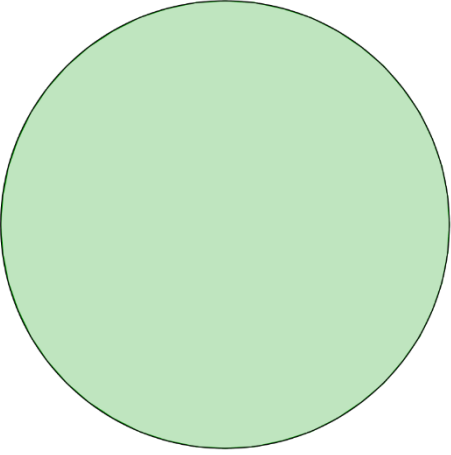
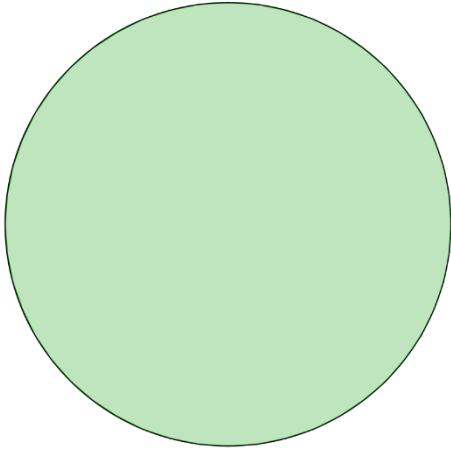
Agora, para obter a medida do perímetro do polígono regular de  $n$  lados inscrito na circunferência de raio  $r$ , ( $I_n$ ), basta multiplicar o valor encontrado anteriormente por  $n$ . Logo,

$$I_n = n \cdot r \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}$$

Na tabela a seguir estão os valores calculados dos perímetros dos polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio unitário ( $r = 1$ ) pela relação anterior, com aproximação de seis casas decimais.

**Quadro 1** – Valores dos perímetros dos polígonos inscritos.

Número de lados	Figura	Perímetro do polígono inscrito
6		$I_6 = 6$
12		$I_{12} = 6,211657$
24		$I_{24} = 6,265257$

48		$I_{48} = 6,2787$
96		$I_{96} = 6,282063$

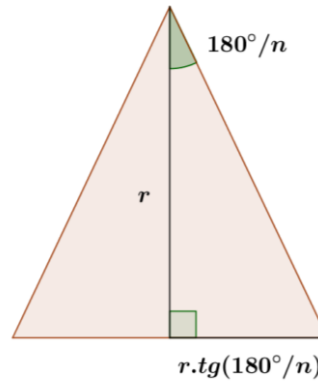
**Fonte:** o próprio autor

O mesmo processo foi realizado para os polígonos circunscritos à essa mesma circunferência, ou seja, Arquimedes calculou o perímetro do hexágono regular circunscrito e em seguida, foi dobrando o número de lados até obter o polígono de 96 lados.

Para este cálculo, considere um polígono regular de  $n$  lados circunscrito em uma circunferência de raio  $r$ . Dividimos esse polígono em  $n$  triângulos isósceles com vértices no centro da circunferência e como base um dos lados do polígono. Na figura 5, temos um desses triângulos com algumas de suas medidas. Note que a altura do triângulo é o raio da circunferência e ângulo oposto à base tem medida  $360^\circ/n$ .



**Figura 5:** Triângulo do polígono circunscrito com suas medidas



**Fonte:** o próprio autor

A altura desse triângulo também é mediatriz e o divide em dois triângulos retângulos com um dos catetos sendo o raio e ângulo adjacente medindo  $180^\circ/n$ . Utilizando a razão trigonométrica tangente, determinamos a base do triângulo:

$$\text{tg}(180^\circ/n) = \frac{\text{base}}{r}$$

$$\text{base} = r \cdot \text{tg}(180^\circ/n)$$

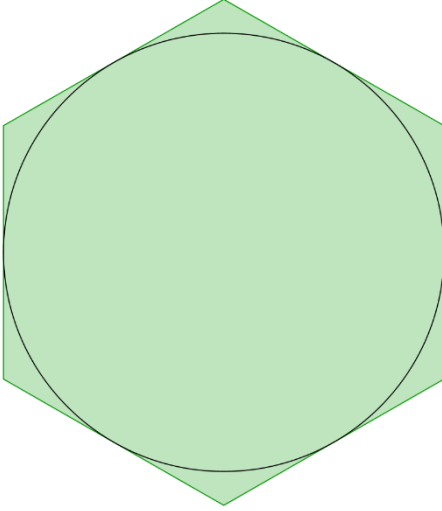
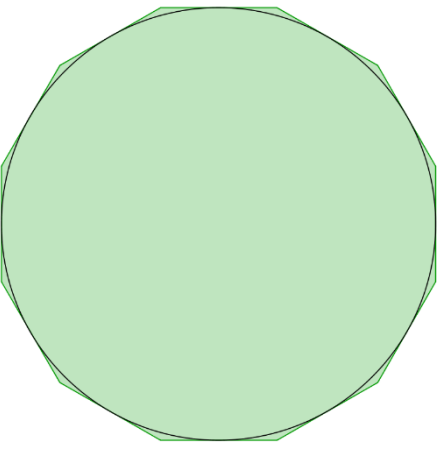
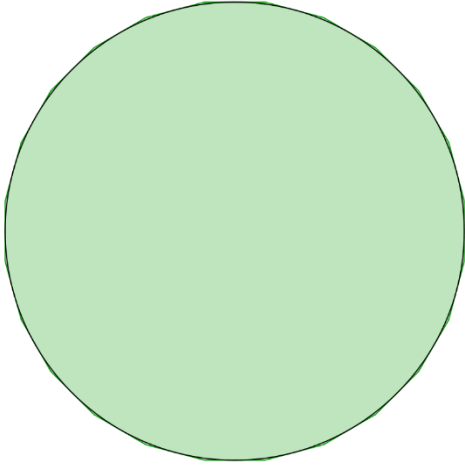
Portanto, para determinar o perímetro do polígono regular de  $n$  lados circunscrito,  $(C_n)$ , basta multiplicar a medida da base por  $2n$ .

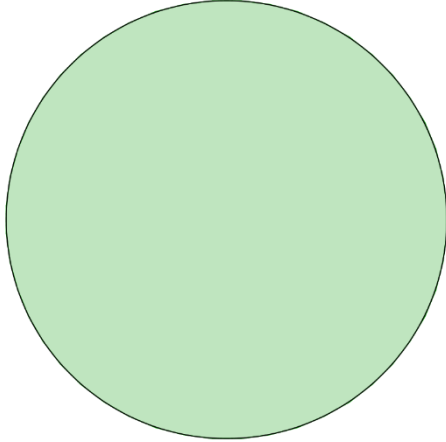
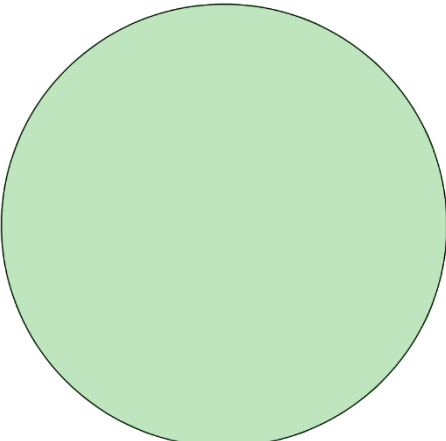
Logo,

$$C_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot \text{tg}(180^\circ/n)$$

Na tabela 2 estão os valores dos perímetros dos polígonos regulares circunscritos em uma circunferência de raio unitário ( $r = 1$ ) pela relação anterior, com aproximação de seis casas decimais.

**Quadro 2** - Valores dos perímetros dos polígonos circunscritos.

Número de lados	Figura	Perímetro do polígono circunscrito
6		$C_6 = 6,928203$
12		$c_{12} = 6,43078$
24		$C_{24} = 6,319319$

48		$C_{48} = 6,292172$
96		$C_{96} = 6,285429$

**Fonte:** o próprio autor

A partir da comparação entre os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito, Arquimedes pôde determinar a seguinte aproximação inferior e superior para o número  $\pi$ :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

ou em valores decimais,

$$3,140845 < \pi < 3,142857$$

que segundo Hernandes e Martins (2007) é uma aproximação melhor do que se tinha na época, dado que os egípcios haviam calculado o valor de 3,16 e inclusive na Bíblia, implicitamente  $\pi$  tem o valor 3.

### 1.1.1 Outras Maneiras Para o Cálculo de $\pi$

De acordo com Hernandes e Martins (2007), o método de determinação do número  $\pi$  de Arquimedes, ou seja, inscrever e circunscrever polígonos regulares, apresenta uma convergência demorada para  $\pi$ . Diversas expansões infinitas foram propostas por matemáticos no decorrer do tempo, o primeiro foi o francês François Viéte (1540 – 1603):

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \dots}$$

A demonstração dessa expressão de Viéte que apresentaremos a seguir está contida no livro “O romance das equações algébricas”, (GARBI, 2009, p. 56 e 57).

A partir da expressão

$$\text{sen}(\theta) = 2 \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

podemos determinar o seno de seu arco metade,

$$\text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) = 2 \text{sen} \left( \frac{\theta}{4} \right) \cos \left( \frac{\theta}{4} \right)$$

Assim, substituindo esse resultado na expressão inicial, obtemos que

$$\text{sen}(\theta) = 2 \cdot 2 \cdot \text{sen} \left( \frac{\theta}{4} \right) \cos \left( \frac{\theta}{4} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

e repetindo por  $n$  vezes esse processo,

$$\text{sen}(\theta) = 2^n \text{sen} \left( \frac{\theta}{2^n} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2^n} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2^{n-1}} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2^{n-2}} \right) \dots \cos \left( \frac{\theta}{4} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Note que o termo  $2^n \text{sen} \left( \frac{\theta}{2^n} \right)$  pode ser reescrito da forma  $\theta \left( \frac{\text{sen} \left( \frac{\theta}{2^n} \right)}{\frac{\theta}{2^n}} \right)$ .

Denotando  $x = \frac{\theta}{2^n}$ , temos

$$2^n \text{sen} \left( \frac{\theta}{2^n} \right) = \theta \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

E ainda, quando  $n$  cresce indefinidamente, o valor de  $\text{sen}(x)$  tende ao valor de  $x$ . Logo, para  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\text{sen}(x)}{x} \rightarrow 1$ . Portanto,

$$\text{sen}(\theta) = \theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \cos\left(\frac{\theta}{8}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \dots$$

Seja  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , assim a expressão pode ser escrita da forma

$$1 = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \dots$$

E ainda substituindo os valores de  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) =$

$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}$  e assim por diante, podemos ter o seguinte produto infinito

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \dots$$

ou ainda,

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \dots}$$

como queríamos mostrar.

Ainda de acordo com Hernandes e Martins (2007), temos uma outra expansão fracionária de produtos, de acordo com o matemático britânico John Wallis (1616 – 1703):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8 \dots}{1.3.3.5.5.7.7.9 \dots}$$

Outra expansão é na forma de fração contínua, criada pelo inglês William Brouncker (1620 – 1684):

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{\ddots}}}}$$

O matemático escocês James Gregory (1638 – 1675) demonstrou usando cálculo integral que

$$\operatorname{arctg}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

e substituindo  $x = 1$ , obtemos:

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Da mesma forma podemos substituir  $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ , assim temos:

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots\right)$$

Com esta última expressão, Edmund Halley (1656 – 1743), cujo o nome do cometa é dado a ele (Cometa Halley), conseguiu obter o valor do número  $\pi$  com 71 casas decimais corretas.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) também deu sua contribuição para determinar expressões do número  $\pi$  e elas são:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

e

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Além disso, Euler começou a utilizar o símbolo  $\pi$ , criado por britânico William Jones (1675 – 1749) em 1706, em seus trabalhos, tornando-se assim, uma notação padrão.

A partir da segunda metade do século XX, com o avanço tecnológico e computacional, foi possível calcular cada vez mais casas decimais do número  $\pi$ . Mesmo que,

o valor de  $\pi$  até 39 casas decimais seja suficiente para calcular a circunferência do universo com uma precisão equivalente ao raio do átomo de hidrogênio, isso não evitou que cientistas, usando computadores, tentassem calcular  $\pi$  com maior número possível de casas decimais. (SINGH, 2001, p.67)

Em 1949, foram calculadas corretamente 2.000 casas decimais, em 1961, 100.265. E em 1967, foram determinadas 500.000. Recentemente, os matemáticos David Bailey, Peter Borwein e Simon Plouffe conseguiram calcular 10 bilhões de casas decimais. (ANDRADE, 1999)

Ainda a respeito sobre o número  $\pi$ , sempre será possível calcular mais casas decimais corretas, já que ele é um número irracional, ou seja, possui expansão decimal infinita e não periódica. Apresentaremos a seguir, duas demonstrações, de Niven e de Lambert, a respeito da irracionalidade do número  $\pi$ .

### 1.1.2 Duas Demonstrações da Irracionalidade de $\pi$

A primeira demonstração da irracionalidade do número  $\pi$  é creditada ao matemático francês Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), em 1761, no livro *“Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques”* (FIGUEIREDO, 2002). Os argumentos para a demonstração a seguir estão presentes no artigo *“On Lambert’s proof of the irrationality of  $\pi$ ”* de M. Laczkovich (1997) e na monografia de Boff (2008).

Resumidamente, Lambert provou a seguinte relação:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{\ddots}}}}$$

Em seguida, demonstra que se  $x \neq 0$  for racional então o lado direito da igualdade será irracional. Assim, como  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$  é racional, logo  $\pi$  é irracional. A demonstração mais completa que será apresentada contém simplificações realizadas por Gauss.

Seja a família de funções

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} (k-1)!}{(k+n-1)! n!} = 1 - \frac{x^2}{k} + \frac{x^4}{k(k+1) \cdot 2!} - \frac{x^6}{k(k+1)(k+2) \cdot 3!} + \dots$$

onde  $k \in \mathbb{Q}$  e  $k \neq 0, -1, -2, \dots$

**Lema 1:** A série  $f_k$  converge para todo  $x$  e para todo  $k \neq 0, -1, -2, \dots$

Utilizaremos o teste da razão de séries, que nos diz que uma série  $\sum a_n$  de termos não nulos converge se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

Observe que, aplicando o teste da razão, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)} (k-1)!}{(k+n)! (n+1)!} \cdot \frac{(k+n-1)! n!}{(-1)^n x^{2n} (k-1)!} \right| = x^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(k+n)(n+1)} \right| = x^2 \cdot 0 = 0$$

Logo, a série é convergente. ■

**Lema 2:**  $f_{\frac{1}{2}}(x) = \cos(2x), \forall x \in \mathbb{R}$

Observe que, se  $k = \frac{1}{2}$ , então

$$k(k+1) \dots (k+n-1) \cdot n! = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \dots \left(\frac{2n-1}{2}\right) n!$$

Inserindo o produto de números pares  $2n \cdot 2(n-1) \dots 4 \cdot 2$  no numerador e no denominador, obtemos:

$$\frac{1}{2^n} \left( \frac{2n!}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 2) \dots (2 \cdot n)} \right) n! = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} \left( \frac{2n!}{n!} \right) n! = \frac{(2n)!}{4^n}$$



Assim,

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} (k-1)!}{(k+n-1)! n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\frac{(2n)!}{4^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} 4^n}{(2n)!} \quad (1.1.2.1)$$

Note que a série de Taylor para a função cosseno é

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

E portanto,

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} 4^n}{(2n)!} \quad (1.1.2.2)$$

Logo, comparando (1.1.2.1) e (1.1.2.2) temos que são iguais e concluímos que

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \cos(2x)$$

■

**Lema 3:**  $f_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{\text{sen}(2x)}{2x}, \forall x \in \mathbb{R}$

Da mesma maneira, se  $k = \frac{3}{2}$ , então

$$\begin{aligned} k(k+1) \dots (k+n-1) \cdot n! &= \frac{3}{2} \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{7}{2}\right) \dots \left(\frac{2n+1}{2}\right) n! = \\ &= \frac{1}{2^n} \left( \frac{(2n+1)!}{(1.1)(2.1)(2.2) \dots (2.n)} \right) n! = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} \left( \frac{(2n+1)!}{n!} \right) n! = \frac{(2n+1)!}{4^n} \end{aligned}$$

Logo,

$$f_{\frac{3}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} (k-1)!}{(k+n-1)! n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\frac{(2n+1)!}{4^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} 4^n}{(2n+1)!} \quad (1.1.2.3)$$

Do fato que a série de Taylor para a função seno é

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

E portanto,

$$\frac{\text{sen}(2x)}{2x} = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} 4^n}{(2n+1)!} \quad (1.1.2.4)$$

Assim, temos uma igualdade comparando (1.1.2.3) e (1.1.2.4), concluindo que

$$f_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{\text{sen}(2x)}{2x}$$

■

**Lema 4:**  $\frac{x^2}{k(k+1)} f_{k+2}(x) = f_{k+1}(x) - f_k(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Temos que,

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)n!}$$

$$f_{k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(k+1)(k+2) \dots (k+n)n!}$$

$$f_{k+2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(k+2) \dots (k+n+1)n!}$$

Assim, o lado esquerdo da igualdade desejado é:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{k(k+1)} \cdot f_{k+2}(x) &= \frac{x^2}{k(k+1)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(k+2) \dots (k+n+1)n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n+1)}}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n+1)n!} \end{aligned}$$

E o lado direito da igual será:

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(x) - f_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(k+1)(k+2) \dots (k+n)n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \left[ \frac{1}{(k+1)(k+2) \dots (k+n)n!} - \frac{1}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)n!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \left[ \frac{k}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n)n!} - \frac{1}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)n!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \left[ \frac{n}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)(k+n)n!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)(k+n)(n-1)!}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{k(k+1)} f_{k+2}(x) &= f_{k+1}(x) - f_k(x) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n+1)}}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n+1)n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)(k+n)(n-1)!}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $n+1 = m$ , obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^{2m}}{k(k+1)(k+2) \dots (k+m)(m-1)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)(k+n)(n-1)!}
\end{aligned}$$

Que é verdadeira; portanto, o lema está demonstrado. ■

**Lema 5:**  $\lim_{r \rightarrow \infty} f_r(x) = 1$

Isso é verdadeiro pois  $\forall x, \frac{x^{2n}}{p(r)} \rightarrow 0$  se  $r \rightarrow \infty$ , quando  $p(r)$  é um polinômio não-constante em  $r$ . Assim, cada parcela do somatório que contém a potência de  $x$  tenderá a zero.

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_r(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{x^2}{r} + \frac{x^4}{r(r+1) \cdot 2!} - \frac{x^6}{r(r+1)(r+2) \cdot 3!} + \dots \right] = 1$$

■

**Teorema:** Se  $x \neq 0$  e  $x^2$  é racional, então  $f_k(x) \neq 0$  e  $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}$  é irracional para todo  $k \in \mathbb{Q}, k \neq 0, -1, -2, \dots$

Demonstração:

Seja  $x \neq 0$  um número real tal que  $x^2$  seja racional, e  $k \in \mathbb{Q}, k \neq 0, -1, -2, \dots$ . Por absurdo, suponha que  $f_k(x) = 0$ . Se  $f_{k+1}(x) = 0$ , então  $f_j(x) = 0$  para todo  $j \geq k$ , pela recorrência obtida no Lema 4. Isto contraria o Lema 5. Então  $f_{k+1}(x) \neq 0$ . Novamente, pela recorrência obtida no Lema 4,

$$\frac{f_{k+2}(x)}{f_{k+1}(x)} = \frac{k(k+1)}{x^2} \in \mathbb{Q}$$

Por isto é suficiente considerar a hipótese de absurdo  $\frac{f_{j+1}(x)}{f_j(x)} \in \mathbb{Q}$  para algum  $j$ .

Seja  $q$  um inteiro positivo tal que  $\left(\frac{bq}{k}\right), \left(\frac{kq}{x^2}\right)$  e  $\left(\frac{q}{x^2}\right)$  sejam também inteiros.

Definimos  $G_0 = f_k(x)$  e  $G_n = \frac{q^n}{k(k+1)\dots(k+n-1)} f_{k+n}(x)$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Então,  $G_0 = ay$ ,  $G_1 = \left(\frac{bq}{k}\right)y$ , e calculamos

$$G_{n+2} = \left(\frac{kq}{x^2} + \frac{qn}{x^2}\right) G_{n+1} - \left(\frac{q^2}{x^2}\right) G_n$$

para  $n = 0, 1, \dots$

Os coeficientes da última equação são inteiros, então  $G_n$  é um múltiplo inteiro de  $y$  para cada  $n$ . Como  $f_{k+n}(x) \rightarrow 1$  e  $\frac{q^n}{k(k+1)\dots(k+n-1)} \rightarrow 0$ , logo,  $G_n \rightarrow 0$ . Do fato que  $f_{k+n}(x) \rightarrow 1$  implica que  $G_n > 0$  para  $n$  suficientemente grande. Múltiplos inteiros positivos de  $y$  não podem convergir para zero. A contradição significa que  $f_k(x)$  e  $f_{k+1}(x)$  não podem ser múltiplos inteiros de mesma quantidade.

**Corolário 1:** Se  $x \neq 0$  e  $x \in \mathbb{Q}$ , então  $tg(x)$  é irracional.

Seja o número  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 \neq 0$  e racional e  $k = \frac{1}{2}$ , logo

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{f_{\frac{3}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)}{f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\text{sen}\left(\frac{2x}{2}\right)}{\frac{2x}{2} \cos\left(\frac{2x}{2}\right)} = \frac{tg(x)}{x}$$

Mas como  $x \in \mathbb{Q}$ , portanto,  $tg(x)$  é irracional.

■

**Corolário 2:**  $\pi$  é irracional.

Do fato de que o valor de  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$  é um número racional, logo,  $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{I}$ . Mas como 4 é um número natural, assim,  $\pi$  é irracional. ■

Concluindo o que queríamos, mostrar que o número  $\pi$  é irracional.

Já no ano de 1794, o matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) provou que o número  $\pi^2$  é irracional, que é um resultado ainda mais forte.

Utilizando um método desenvolvido na demonstração da transcendência do número  $e$ , em 1947, o matemático I. Niven (1915 – 1999) demonstrou a irracionalidade de  $\pi$ . A demonstração que segue está publicada no “*Bulletin of the American Mathematical Society*, n° 53, 1947, p.409”.

Consideremos a função

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n > 0$ . Note que para  $0 < x < 1$ , temos  $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$

**Lema 1:**  $f_n^{(k)}(0)$  é um inteiro para qualquer  $k$  natural, onde  $f_n^{(k)}$  é a  $k$ -ésima derivada de  $f_n$ .

Observe que a função  $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$  é o produto de duas funções  $g_n(x) = x^n$  e  $h_n(x) = \frac{1}{n!}(1-x)^n$ .

Utilizaremos a fórmula de Leibnitz para a derivada de um produto de duas funções  $g$  e  $h$ :

$$(g \cdot h)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} g^{(j)} \cdot h^{(k-j)}$$

Assim,

$$f_n^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k (x^n)^{(j)} [(1-x)^n]^{(k-j)}$$

Note que

$$(g_n)^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } j < n \\ n!, & \text{se } j = n \\ 0, & \text{se } j > n \end{cases}$$

Substituindo este resultado na k-ésima derivada da função  $f_n$  obtemos:

$$f_n^{(k)}(0) = 0, \text{ se } k < n$$

ou

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! [(1-0)^n]^{(k-n)} = \binom{k}{n}, \text{ se } k \geq n$$

Mas como os coeficientes binomiais são números inteiros, então, a k-ésima derivada da função  $f_n$  no ponto  $x = 0$  é um número inteiro. ■

**Lema 2:**  $f_n^{(k)}(1)$  é um número inteiro  $\forall k \in \mathbb{N}$

Temos que  $f_n(x) = f_n(1-x)$ , pois

$$f_n(1-x) = \frac{(1-x)^n (1-(1-x))^n}{n!} = \frac{(1-x)^n x^n}{n!} = f_n(x)$$

Assim,

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x).$$

Substituindo  $x = 1$ , obtemos  $f_n^{(k)}(1) = (-1)^k f_n^{(k)}(0) = (-1)^k \cdot 0 = 0$ , ou seja, é um número inteiro para cada  $k$ , pelo Lema 1. ■

**Teorema:** O número  $\pi$  é irracional

Demonstração:

Para provar que  $\pi$  é irracional, basta mostrar que  $\pi^2$  é irracional, pois o quadrado de um número racional deve ser racional. Assim, por absurdo, suponha que  $\pi^2$  seja um número racional, ou seja, pode ser escrito da forma  $\pi^2 = \frac{a}{b}$ , com  $a$  e  $b$  inteiros positivos.

Definimos a função  $G(x)$ ,

$$G(x) = b^n \left[ \pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right]$$

com a função  $f_n$  dada anteriormente e coeficientes inteiros.

Do fato que  $f_n^{(k)}(0)$  e  $f_n^{(k)}(1)$  são inteiros, então  $G(0)$  e  $G(1)$  também são, já que todos os fatores envolvidos são inteiros.

A segunda derivada da função  $G$  é dada por

$$G''(x) = b^n \left[ \pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(6)}(x) - \dots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x) \right]$$

Utilizando a função  $G$  com a sua segunda derivada obtemos a expressão

$$G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x)$$

Agora, seja a função

$$H(x) = G'(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi G(x) \cos(\pi x)$$

Então a primeira derivada de  $H$  é dada por

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x) \cos(\pi x) + G''(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi G'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 G(x) \operatorname{sen}(\pi x) \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)] \operatorname{sen}(\pi x) \\ &= \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo Integral:

“Se  $H: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[0,1]$  e derivável em  $(0,1)$ , então  $\int_0^1 H'(x) dx = H(1) - H(0)$ ”

Temos

$$\begin{aligned} \pi^2 a^n \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx &= H(1) - H(0) \\ &= G'(1) \operatorname{sen}(\pi) - \pi G(1) \cos(\pi) - G'(0) \operatorname{sen}(0) + \pi G(0) \cos(0) \\ \pi^2 a^n \int_0^1 f_n \operatorname{sen}(\pi x) dx &= \pi [G(1) + G(0)] \\ \pi a^n \int_0^1 f_n \operatorname{sen}(\pi x) dx &= G(1) + G(0) \end{aligned}$$

Portanto,  $\pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx$  é um número inteiro.

Mas, note que, para  $0 < x < 1$ ,

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$$

Assim, multiplicando a desigualdade por  $\pi a^n \operatorname{sen}(\pi x)$ :

$$0 < \pi a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) < \frac{\pi a^n \operatorname{sen}(\pi x)}{n!}$$

Aplicando a integral definida na desigualdade:

$$0 < \pi a^n \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \frac{\pi a^n}{n!} \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx$$

Atente ao fato que

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(u) du = \frac{2}{\pi}$$

Portanto,

$$0 < \pi a^n \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \frac{2a^n}{n!}$$

Note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a^n}{n!} = 0$$

Então, podemos determinar um valor para  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$ .



E conseqüentemente,

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \frac{2a^n}{n!} < 1$$

Que é um absurdo, pois o resultado da integral é um número inteiro e não existem números inteiros entre 0 e 1.

Portanto,  $\pi^2$  é irracional, e logo,  $\pi$  é irracional. ■

## 1.2 LEI DAS ALAVANCAS

Antes de analisarmos o trabalho de Arquimedes sobre as alavancas, precisamos, primeiramente, definir o que é uma alavanca.

A alavanca consiste um corpo rígido, geralmente linear, capaz de girar ao redor de um eixo horizontal fixo em relação à Terra. O eixo de rotação é em geral ortogonal à alavanca, com os dois ficando usualmente no plano horizontal quando a alavanca está parada em relação à Terra. É como se fosse uma balança, mas agora com a possibilidade de colocarmos pesos a distâncias diferentes do fulcro. (ASSIS, 2008, p.165)

A lei da alavanca está presente no trabalho intitulado “*Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas*”. De acordo com Aaboe (2013) é a partir de um axioma (simples, como diz o autor) que a tal lei é demonstrada. Além disso, a obra apresenta a determinação dos centros de gravidade de um triângulo, de um trapezóide e de um segmento parabólico.

Enunciaremos, a seguir, a Lei das Alavancas:

A alavanca estará em equilíbrio se o produto do peso  $A$  pela distância  $a$  entre o fulcro e o ponto de suspensão de  $A$  for igual ao produto do peso  $B$  e sua distância  $b$  do fulcro. (Aaboe, 2013, p.118)

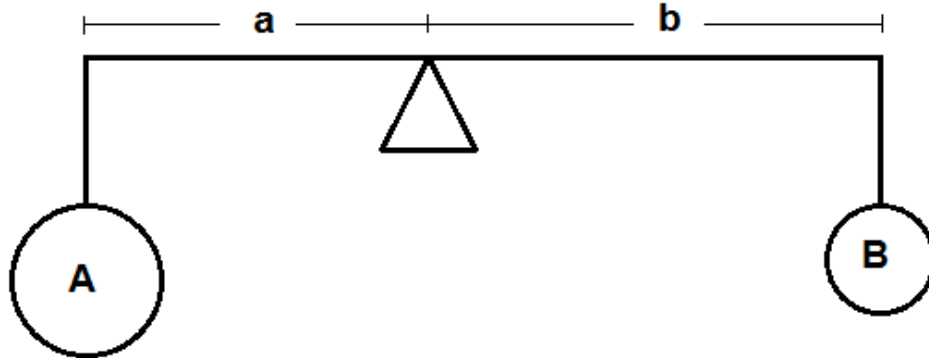
Em símbolos,

$$A \cdot a = B \cdot b$$

Esses produtos,  $A \cdot a$  e  $B \cdot b$ , são chamados de *momentos*.

Na figura 6, temos a representação de uma alavanca em equilíbrio, com os pesos  $A$  e  $B$ , e suas distâncias em relação ao fulcro,  $a$  e  $b$ , respectivamente.

**Figura 6:** Alavanca em equilíbrio



**Fonte:** o próprio autor

O axioma que Arquimedes utilizou para determinar a Lei da Alavanca é o postulado 6 da sua obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, ele diz que:

Se grandezas a certas distâncias estão em equilíbrio, (outras) grandezas iguais a elas também vão estar em equilíbrio nas mesmas distâncias. (ASSIS, 2008, p.125)

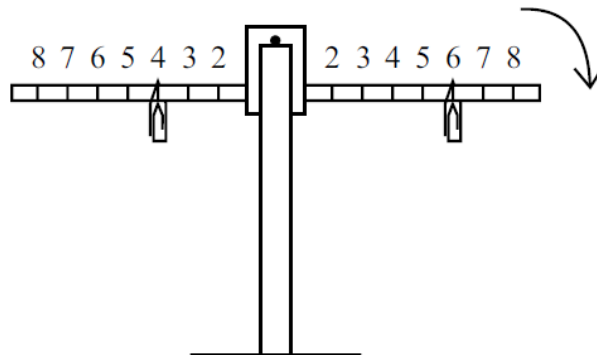
Outra tradução para este mesmo postulado é:

Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias. (ASSIS, 2008, p.226)

A seguir, mostraremos três situações que mostram alavancas com diferentes pesos e posições e como estes alteram o equilíbrio da alavanca.

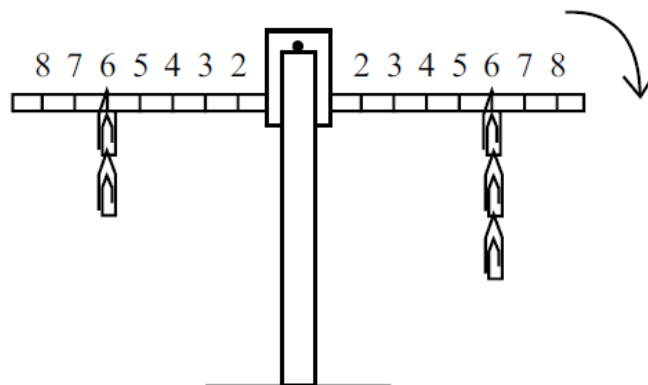
Situação 1: Um peso a 4 cm a esquerda do fulcro e um mesmo peso, a 6 cm a direita fulcro (Figura 7). Pelo postulado 6 de Arquimedes (citado anteriormente), esta situação não está em equilíbrio, no caso, a alavanca tenderá para o lado direito, pois tem maior “momento” em relação ao lado oposto.

Isso nos mostra que mesmo com pesos iguais nos dois braços da alavanca, o equilíbrio não é garantido. As distâncias em relação ao fulcro devem ser levadas em consideração. (ASSIS, 2008)

**Figura 7:** Alavanca na situação 1

Fonte: ASSIS (2008, p.167)

Situação 2: Utilizando-se 5 pesos na alavanca, sendo 2 destes à 6 cm do fulcro no braço esquerdo e os outros 3 do outro lado à 6 cm do fulcro. Observa-se que a alavanca dessa maneira tenderá para o lado com maior “momento”, no caso, o lado direito. Considerando que o peso do objeto fixado na alavanca seja  $x$ , temos que o “momento” do lado esquerdo é  $12x$  e o do lado direito,  $18x$ . (Figura 8)

**Figura 8:** Alavanca na situação 2

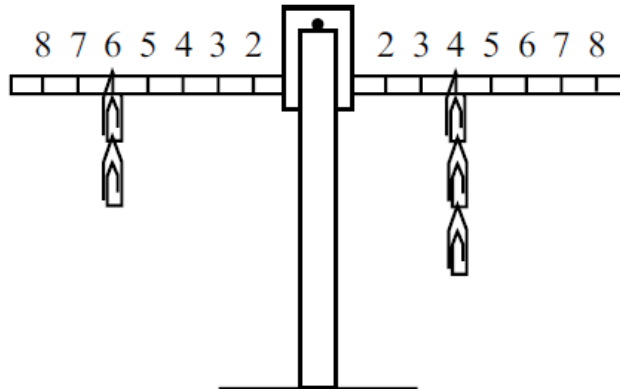
Fonte: ASSIS (2008, p.169)

Assim, mesmo em posições simetricamente opostas a alavanca pode estar em desequilíbrio. Deve-se levar em conta, além das posições, a quantidade de pesos. (ASSIS, 2008)

Portanto, para se colocar a alavanca em equilíbrio, uma opção é alterar a posição dos 3 pesos do braço direito, transferindo-os para a posição que fica à 4 cm do fulcro, onde o valor do “momento” é  $12x$ , igualando ao “momento” do braço esquerdo (Figura 9). Outra opção é alterando a posição dos pesos do braço esquerdo,

transferindo-os para a posição que fica à 9 cm do fulcro, onde o valor do “momento” é  $18x$ , igualando ao “momento” do braço direito. Ou mais simplesmente, podemos retirar um peso do braço direito, ou também, acrescentar um peso no braço esquerdo.

**Figura 9:** Alavanca na situação 2 em equilíbrio



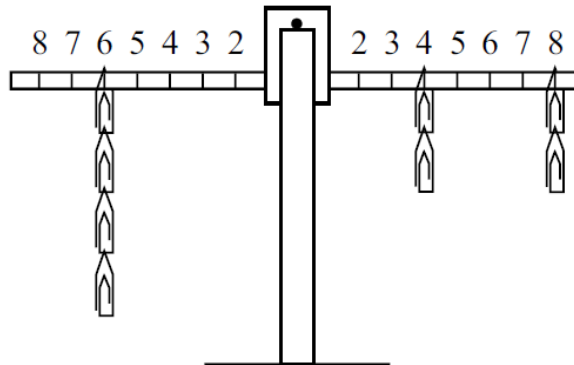
**Fonte:** ASSIS (2008, p.169)

Generalizando essas situações podemos dizer que quando colocamos  $N_A$  corpos de um mesmo peso  $P$  em um lado da alavanca à uma distância  $d_A$  do fulcro e do lado oposto,  $N_B$  corpos de mesmo peso  $P$  à uma distância  $d_B$  do fulcro. A alavanca permanecerá na horizontal, ou seja, em equilíbrio, se

$$\frac{d_B}{d_A} = \frac{N_A}{N_B}$$

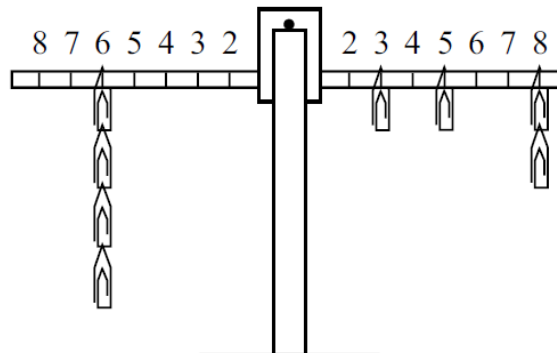
que segundo (ASSIS, 2008), é a lei da alavanca de Arquimedes.

**Situação 3:** Considerando que o peso do objeto fixado na alavanca seja  $x$ , analisando a figura 10, observamos que o momento do lado esquerdo dessa alavanca é  $24x$ , pois possui 4 objetos de peso  $x$  a uma distância de 6 cm do fulcro. Agora, no braço direito da alavanca, estão pesos distribuídos em dois locais, dois objetos à 4 cm e outros dois objetos à 8 cm do fulcro. O “momento” do braço direito é calculado pela soma das duas situações. Obtemos então,  $(2x).4 + (2x).8$ , ou seja,  $24x$ . Podemos afirmar, dessa maneira, que a alavanca está em equilíbrio.

**Figura 10:** Alavanca na situação 3

Fonte: ASSIS (2008, p.168)

Distribuindo os dois objetos que estão no braço direito à 4 cm do fulcro nas seguintes posições: um objeto à 3 cm e outro à 5 cm do fulcro, notamos que o momento deste braço não é alterado, já que  $(2x).4 = 8x = (x).3 + (x).5$ . Portanto, a alavanca permanece em equilíbrio com essa alteração. (Figura 11)

**Figura 11:** Alavanca na situação 3 ainda em equilíbrio

Fonte: ASSIS (2008, p.168)

O autor (ASSIS, 2008) ainda afirma, que a partir das experiências anteriores, que os pesos em suas posições distantes ao fulcro atuam sobre a alavanca de uma forma linear. Pois se fosse de uma outra natureza (quadrática, exponencial, senoidal, etc.) a alavanca não estaria em equilíbrio nos dois exemplos anteriores. Além disso,

Os pesos atuam proporcionalmente às distâncias que estão do fulcro e de forma independente entre si. Ou seja, os efeitos dos pesos em suas distâncias do fulcro seguem a lei da adição. Isto é expresso na física dizendo que a lei da alavanca segue o princípio de superposição. (ASSIS, 2008, p.173)

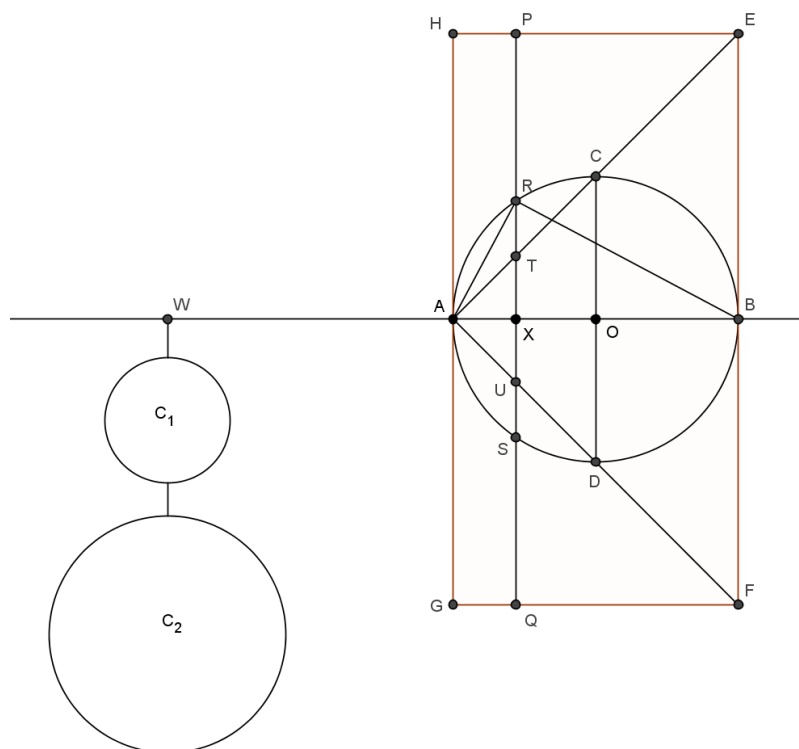
### 1.2.1 Volume da Esfera

Arquimedes utilizou a Lei da Alavanca para determinar o volume de uma esfera. Era conhecido na época, como afirma Aaboe (2013), que Eudoxo havia demonstrado que o volume de um cone é um terço do volume de seu cilindro circunscrito. Então, Arquimedes conseguiu relacionar o volume da esfera com os volumes desses dois sólidos já conhecidos (cone e cilindro).

Portanto, a ideia de Arquimedes para determinar o valor da área ou volume de um sólido geométrico relacionando com a Lei das Alavancas era seccionar a região em um número grande de fatias paralelas e utilizar esses pedaços nas extremidades de uma alavanca de tal forma a estabelecer o equilíbrio.

Segue a demonstração, conforme Aaboe (2013, p.119) e representada na figura 12, que foi construída com o software GEOGEBRA:

**Figura 12:** Alavanca em equilíbrio com esferas



**Fonte:** o próprio autor

Dado um círculo com centro no ponto  $O$  e raio  $r$ , construímos dois diâmetros perpendiculares ( $AB$  e  $CD$ ). Traçamos o segmento  $AE$ , que passa por  $C$  e o ponto  $E$  é

a intersecção do segmento perpendicular à  $AB$  passando por  $B$ . Da mesma forma, traçamos o segmento  $AF$ , que passa por  $D$  e o ponto  $F$  é a intersecção do segmento perpendicular à  $AB$  passando por  $A$ .

Note que os ângulos  $B\hat{A}E$  e  $B\hat{A}F$  medem  $45^\circ$  pois os triângulos  $AOC$  e  $AOD$  são retângulos e isósceles. Do fato que estes triângulos são semelhantes aos triângulos  $ABE$  e  $ABF$ , respectivamente, temos que,

$$EB = BF = 2r$$

Em seguida, construímos o retângulo  $EFGH$ , que tem como base  $GF = 2r$  e altura  $EF = 4r$ .

A partir de um ponto arbitrário  $X$  de  $AB$ , traçamos a perpendicular  $PQ$ . Este segmento intersecta o círculo nos pontos  $R$  e  $S$  e os segmentos  $AE$  e  $AF$  em  $T$  e  $U$ , respectivamente. Assim, definimos,  $XT = AX = x$  e  $XR = y$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $AXR$ , obtemos

$$AR^2 = x^2 + y^2$$

Note que o triângulo  $ARB$  é retângulo pois o ângulo  $A\hat{R}B$  subtende o diâmetro  $AB$ , logo temos a seguinte relação métrica no triângulo retângulo,

$$AR^2 = x \cdot 2r$$

Comparando as duas igualdades anteriores, temos

$$x^2 + y^2 = x \cdot 2r \tag{1.2.1.1}$$

Prolongamos  $AB$  até o ponto  $W$ , de tal forma que  $WA = 2r$ . Sobre o eixo  $WB$  rotacionamos a figura por completo, obtemos uma esfera de raio  $r$  (a partir do círculo), um cone de raio  $BE$  e altura  $AB$  (a partir do triângulo  $EAF$ ) e um cilindro de raio  $BE$  e altura  $AB$  (a partir do retângulo  $EFGH$ ).

Observe que a reta que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$ , durante a rotação, forma um plano que intersecta as seguintes figuras: a esfera em um círculo ( $C_2$ ) de raio  $y$ , o cone em um círculo ( $C_1$ ) de raio  $x$  e o cilindro em um círculo de raio  $2r$ .

Agora, dividimos a equação (1.2.1.1) por  $(2r)^2$ :

$$\frac{x^2 + y^2}{(2r)^2} = \frac{x \cdot 2r}{(2r)^2} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{(2r)^2} = \frac{x}{2r}$$

Multiplicamos o lado esquerdo da igualdade anterior por  $\frac{\pi}{\pi}$ :

$$\frac{\pi(x^2+y^2)}{\pi(2r)^2} = \frac{x}{2r} \implies \frac{\pi x^2 + \pi y^2}{\pi(2r)^2} = \frac{x}{2r} \quad (1.2.1.2)$$

Podemos interpretar a equação (1.2.1.2) da seguinte maneira: considerando  $WB$  como uma alavanca de fulcro  $A$ , a equação será a condição de equilíbrio desta alavanca pois a razão da soma das áreas de  $C_1$  e  $C_2$ , ou seja,  $\pi x^2 + \pi y^2$ , pela área do círculo de raio  $2r$ ,  $\pi(2r)^2$ , é igual à razão entre a distância de  $A$  até  $X$ ,  $x$ , e a distância entre  $A$  e  $W$ , que tem medida  $2r$ , (Figura 12). Assim, temos dois discos circulares no braço esquerdo suspensos em  $W$  que se equilibram com o círculo suspenso em  $X$  no braço direito. Lembrando ainda que, esta condição é possível para qualquer posição do segmento  $PQ$ , desde que fique entre os segmentos  $HG$  e  $EF$ .

Do fato que estes círculos são extraídos do cilindro, da esfera e do cone, assim montamos a situação da alavanca para todas posições possíveis para  $PQ$ . Obtemos assim uma alavanca em equilíbrio com a esfera e o cone no braço esquerdo e no braço direito, o cilindro. E ainda, como o centro de gravidade do cilindro está no ponto  $O$ , temos a seguinte expressão, sendo *esfera* = volume da esfera, *cone* = volume do cone e *cilindro* = volume do cilindro:

$$\frac{\text{esfera} + \text{cone}}{\text{cilindro}} = \frac{AO}{AW} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

ou ainda,

$$2.(\text{esfera} + \text{cone}) = \text{cilindro}$$

Como dito no início desta seção, já era conhecido que o volume de um cilindro é três vezes o volume do cone inscrito a este mesmo cilindro. Logo,

$$2. \text{esfera} + 2. \text{cone} = 3. \text{cone}$$

$$2. \text{esfera} = \text{cone}(EAF)$$

Do fato que o raio do cone  $EAF$  é  $2r$  e o raio do cone  $CAD$  é  $r$ , então o volume de  $EAF$  é 8 vezes o volume de  $CAD$ . Logo,

$$2. \text{esfera} = 8. \text{cone}(CAD)$$



ou seja,

$$esfera = 4 \cdot cone(CAD)$$

Assim, o volume de uma esfera é igual a quatro vezes o volume do cone cuja base é o círculo máximo e cuja altura é o raio dessa esfera.

De maneira análoga, podemos mostrar que o volume de uma esfera é dois terços do volume de seu cilindro circunscrito.

Dado que

$$2 \cdot (esfera + cone) = cilindro$$

e que o volume de um cilindro é três vezes o volume do cone inscrito a este mesmo cilindro, então

$$2 \cdot \left( esfera + \frac{1}{3} \cdot cilindro \right) = cilindro$$

$$2 \cdot esfera = \frac{1}{3} \cdot cilindro$$

O cilindro desta equação possui raio com medida  $BE = 2r$  e altura  $AB = 2r$ , e o cilindro circunscrito à esfera possui raio  $OC = r$  e altura  $AB = 2r$ . Portanto, o volume do primeiro cilindro é quatro vezes maior que o cilindro circunscrito à esfera. Substituindo este fato na equação anterior, temos

$$2 \cdot esfera = \frac{4}{3} \cdot cilindro_{circ}$$

$$esfera = \frac{2}{3} \cdot cilindro_{circ}$$

como queríamos demonstrar.

### 1.3 CONSTRUÇÃO DO HEPTÁGONO REGULAR

Nesta seção, apresentaremos a construção de um heptágono regular, que está descrita no trabalho de Arquimedes intitulado *Livro dos Lemas*. Segundo Boyer (1996), temos o conhecimento deste livro por meio de uma tradução feita em árabe por *Thabit ibn Qurrah*, já que o original em grego não se preservou durante os séculos.

Este livro, que em latim é *Liber assumptorum*, contém outros trabalhos incluindo uma demonstração da Trissecção de um ângulo.

A seguir, apresentaremos a construção de Arquimedes de um heptágono regular, de acordo com Aaboe (2013, p.109):

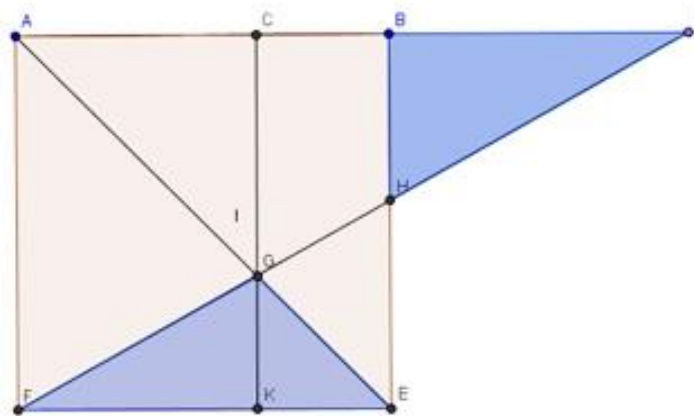
Primeiramente, construiremos a Figura 13, pois ela será a base para a construção do heptágono regular. Dado um segmento de reta  $AB$ , obtemos um quadrado  $AFEB$ . Traçamos a diagonal  $AE$  e a semirreta  $\overrightarrow{AB}$ .

Traçamos um segmento  $FD$ , com  $D \in \overrightarrow{AB}$ , à direita de  $B$ , de tal maneira que a área da região entre o segmento  $FD$ , a diagonal  $AE$  e o lado  $FE$  seja igual à área da região entre o segmento  $FD$ , o lado  $BE$  e o segmento  $BD$ . Este último passo é chamado construção *neusis*, que significa, a inserção de um comprimento dado, neste caso, a igualdade entre as áreas. Os triângulos com áreas congruentes estão hachurados na figura. É esse passo que a construção de Arquimedes se destaca de todas as outras. O autor nos afirma que

não sei precisamente como Arquimedes se propunha a decidir quando a igualdade (em área) dos dois triângulos é conseguida, e o texto árabe certamente não contém pistas sobre isso (AABOE, 2013, pg.115)

Chamamos  $G$ , o ponto em que  $FD$  intersecta a diagonal  $AE$  e de  $H$ , a intersecção de  $FD$  com o lado  $BE$ . Assim, traçamos uma reta paralela a  $BE$  passando por  $G$ , intersectando  $FE$  em  $K$  e  $AB$  em  $C$ . Completando, portanto, a construção da Figura 13.

**Figura 13:** construção inicial



**Fonte:** o próprio autor

Temos que os quatro pontos  $A, B, C$  e  $D$  são colineares e satisfazem duas relações.

A primeira delas é encontrada a partir dos triângulos  $FGE$  e  $HBD$ . Como esses triângulos possuem a mesma área, temos que

$$GK.FE = BH.BD$$

Podemos escrever esta igualdade com razões,

$$\frac{BH}{GK} = \frac{FE}{BD}$$

Note que o triângulo  $GKF$  é semelhante ao triângulo  $HBD$ , pois  $G\hat{K}F = H\hat{B}D = 90^\circ$  e  $G\hat{F}K = H\hat{D}B$  (ângulos alternos internos).

Logo, obtemos

$$\frac{BH}{GK} = \frac{BD}{FK}$$

A partir das igualdades, concluímos que

$$\frac{FE}{BD} = \frac{BD}{FK}$$

Multiplicando a relação anterior por  $BD.FK$  em ambos os lados, temos

$$FE.FK = BD^2$$

Do fato que  $FE = AB$  e  $FK = AC$ , logo obtemos a *primeira relação*:

$$AB.AC = BD^2 \tag{1.3.1}$$

Já para a segunda relação analisaremos os triângulos  $FKG$  e  $DCG$ , que são semelhantes pois  $F\hat{K}G = D\hat{C}G = 90^\circ$  e  $K\hat{F}G = C\hat{D}G$  (ângulos alternos internos), portanto

$$\frac{GK}{FK} = \frac{GC}{CD}$$

Multiplicando ambos os lados por  $FK.CD$

$$GK.CD = FK.GC$$

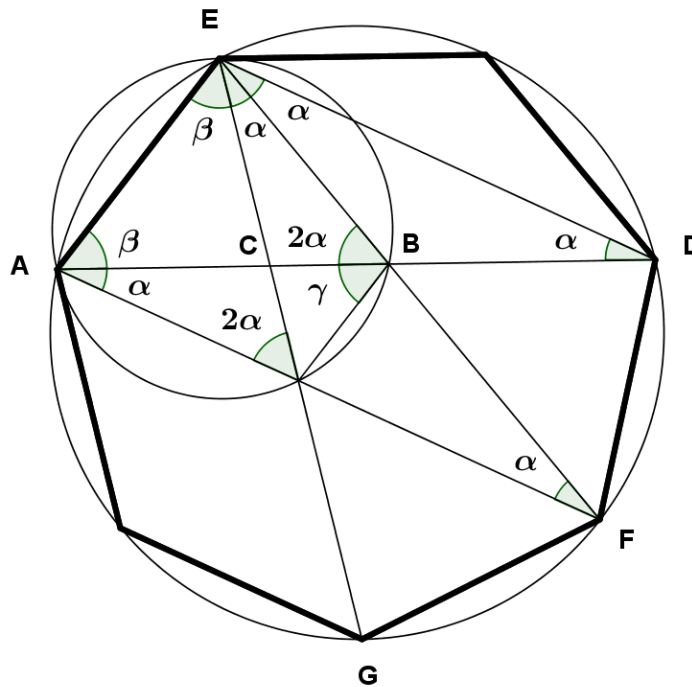
Note que  $AE$  é a diagonal do quadrado  $AFEB$ , assim, os ângulos  $G\hat{A}C = G\hat{E}K = 45^\circ$  e portanto,  $GC = AC$  e  $GK = KE$ . Também temos que  $FK = AC$  e  $GK = CB$ . Substituindo essas relações na igualdade anterior, obtemos

$$CB \cdot CD = AC^2 \quad (1.3.2)$$

Assim, temos a *segunda relação* entre os pontos colineares  $A, B, C$  e  $D$ .

Na Figura 14, o segmento  $AD$ , com os pontos  $B$  e  $C$ , é o mesmo segmento da construção anterior, representada pela Figura 13, ou seja, valem as relações anteriores, (1.3.1) e (1.3.2).

**Figura 14:** construção do heptágono regular



**Fonte:** o próprio autor

Agora, construímos o ponto  $E$  tal que

$$CE = CA$$

e

$$BE = BD$$

Em seguida, construímos a circunferência circunscrita ao triângulo  $AED$ . Provaremos que  $AE$  é o lado do heptágono regular inscrito nesta circunferência.

Note que o triângulo  $EBD$  é isósceles ( $BE = BD$ ), assim, temos  $B\hat{E}D = B\hat{D}E = \alpha$ . Da mesma forma, o triângulo  $ACE$  é isósceles ( $CE = CA$ ) e os ângulos  $C\hat{A}E = A\hat{E}C = \beta$ .

Prolongamos os segmentos  $EB$  e  $EC$  até que intersectem a circunferência em  $F$  e  $G$ , respectivamente. Construimos o segmento  $AF$  e denotamos  $H$ , a intersecção com o segmento  $EB$ . Construimos o segmento  $HB$ .

Observe que ângulos inscritos em uma circunferência são iguais à metade do arco por eles subtendido. A partir dessa informação, temos que os arcos menores  $AE = DF = 2\alpha$ , pois  $A\hat{D}E = B\hat{E}D = \alpha$ . Então,  $F\hat{A}D = A\hat{F}E = \alpha$ .

O ângulo  $E\hat{B}A = 2\alpha$  pois é suplementar ao ângulo  $E\hat{B}D$ .

A partir da relação (1.3.2), temos que

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Utilizando a informação que  $AC = EC$ , obtemos

$$\frac{CD}{EC} = \frac{EC}{CB}$$

Isso implica que o triângulo  $BEC$  é semelhante ao triângulo  $EDC$ , pelo fato que  $E\hat{C}B = E\hat{C}D$  e o segmento  $EC$  é comum aos dois triângulos. Portanto,  $E\hat{D}C = B\hat{E}C = \alpha$ , e ainda, o arco menor  $GF$  é então  $2\alpha$ . Temos então que os arcos  $AE = DF = GF = 2\alpha$ .

Os arcos  $ED = AG = 2\beta$ , pois  $E\hat{A}D = A\hat{E}G = \beta$ . Note que a circunferência está dividida nos arcos  $AE, ED, DF, FG, GA$ , seu comprimento mede

$$2\alpha + 2\beta + 2\alpha + 2\alpha + 2\beta = 6\alpha + 4\beta$$

Para concluir a demonstração, devemos mostrar que  $\beta = 2\alpha$ , pois assim a circunferência medirá  $14\alpha$ , logo o arco  $AE$  será um sétimo da medida da angular da circunferência.

Note que o segmento  $HB$  subtende o ângulo  $\alpha$  em  $H\hat{A}B$  e em  $H\hat{E}B$ , assim, os pontos  $A$  e  $E$  estão sobre uma circunferência que tem  $HB$  como corda. Portanto, o quadrilátero  $AHBE$  é inscritível, e traçamos a circunferência circunscrita (que passa pelos pontos  $A, E$  e  $B$ ).

Nesta circunferência, os ângulos inscritos  $B\hat{A}E$  e  $A\hat{E}H$  que têm medida  $\beta$  subtendem as cordas  $EB$  e  $AH$ , respectivamente, logo, o comprimento destas cordas são iguais. Observe também, o ângulo  $A\hat{H}E = 2\alpha$ , pois subtende a corda  $AE$  e é igual ao ângulo  $A\hat{B}E$  que subtende a mesma corda.

Utilizaremos a relação (1.3.2) da forma

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{AC}$$

Como  $EB = BD = AH$  e  $AC = EC$ , temos

$$\frac{AB}{AH} = \frac{EB}{EC}$$

Portanto, são semelhantes os triângulos  $EBC$  e  $ABH$ . Também temos,

$$B\hat{A}H = B\hat{E}C = \alpha$$

e conseqüentemente,

$$A\hat{B}H = E\hat{B}C = 2\alpha$$

Esse era resultado que buscávamos, já que  $A\hat{B}H = A\hat{E}H$  (ângulos opostos à corda  $AH$ ). Portanto  $\beta = 2\alpha$ .

Assim, a medida angular da circunferência é  $14\alpha$  e  $AE$  é a medida do comprimento de um lado do heptágono regular inscrito nessa circunferência.

### 1.3.1 Construção de Polígonos

“Todos os polígonos regulares podem ser inscritos numa circunferência. Entretanto, nem todo polígono regular é construtível com régua e compasso.” (Pimentel, 2013, p.44)

Os geômetras gregos estudaram a divisão de um círculo em  $n$  lados. Segundo Ferreira (2010), foram construídos com apenas régua sem medida e compasso (instrumentos euclidianos) os polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 20, ... lados. O matemático alemão Frederich Gauss (1777 – 1855) demonstrou, em 1796, que a construção, com apenas régua e compasso, de alguns polígonos é impossível.

Ele concluiu que a construção de um polígono regular de  $p$  lados, com  $p$  primo só é possível se, e somente se, este número  $p$  é um número de Fermat. (Aaboe, 2013)

A respeito desses números, os números de Fermat são da forma:

$$p = 2^{2^n} + 1$$

com  $n \in \mathbb{N}$

Logo, os cinco primeiros números de Fermat são: 3, 5, 17, 257 e 65537, que são números primos. Já o sexto número,  $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ , não é primo, pois como demonstrado por Euler, em 1732, é o produto entre 641 e 6700417. Segundo Hefez (2011), atualmente, não se conhece outros primos de Fermat além dos cinco primeiros.

Assim, pela afirmação de Gauss, a construção de um heptágono regular é impossível apenas com régua sem graduação e compasso, já que 7 não é um número de Fermat, pois não existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $7 = 2^{2^k} + 1$ .

Este fato não exclui a construção de Arquimedes, já que ele utiliza uma construção nêusis, que teoricamente é possível, mas não com os instrumentos euclidianos. Como afirma Aaboe (2013, p.105)

É um erro comum supor que os gregos se limitavam inteiramente a construções com régua e compasso. De maneira geral os geômetras gregos não reconheciam tais restrições em seus trabalhos. Arquimedes elaborou processos elegantes tanto para a trissecção de qualquer ângulo quanto para a construção de um heptágono regular.

De maneira mais ampla podemos enunciar o seguinte teorema sobre a construção de polígonos regulares:

*“Um polígono regular de  $n$  lados pode ser construído por régua e compasso se, e somente se,  $n = 2^r$  ou  $n = 2^r \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_s$  onde  $r \geq 0$  e  $p_1 < p_2 < \dots < p_s$  são números primos de Fermat.”*

Para a demonstração desse teorema, Gauss utiliza uma relação entre a divisão da circunferência em  $n$  partes congruentes com a resolução da equação  $x^n = 1$ . As  $n$  raízes complexas dessa equação formam os vértices do polígono desejado inscrito em uma circunferência de raio unitário. (AABOE, 2013)

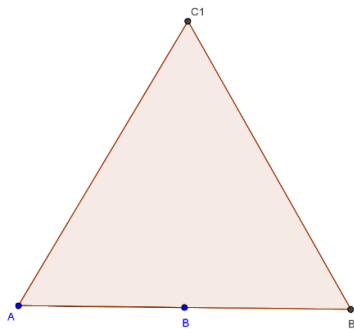
Por exemplo, pode-se construir um polígono regular de 4 lados com apenas régua e compasso, pois basta tomarmos  $r = 2$ . Da mesma forma, é possível construir

um dodecágono regular, basta tomarmos  $r = 2$  e  $s = 1$ . Já o eneágono (9 lados) não é possível pois  $9 = 3 \cdot 3$  e os números de Fermat usados não são distintos.

Além da construção de Arquimedes, existem outras maneiras de se construir um heptágono regular. Uma delas é a partir da medida dada do seu lado. A construção em questão, será apresentada de acordo com Rivera (1986).

A partir da medida dada  $AB$ , prolongamos este segmento até que tenhamos o segmento  $AB_1$ , tal que  $AB_1 = 2 \cdot AB$ . Em seguida, construímos um triângulo equilátero  $AB_1C_1$  com base  $AB_1$ . (Figura 15)

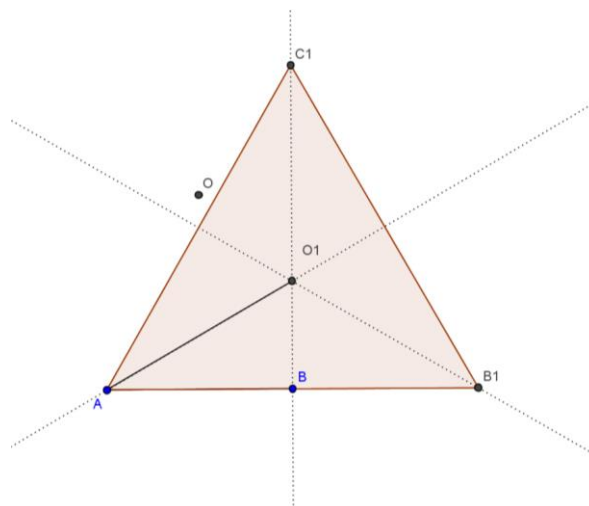
**Figura 15:** Triângulo equilátero



**Fonte:** o próprio autor

Nesse triângulo, determinamos o seu incentro (encontro das bissetrizes), chamamos este ponto de  $O_1$ . Então, construímos o ponto  $O$ , que é a intersecção de dois arcos com medida de raio  $AO_1$  de centros  $A$  e  $B$ .

**Figura 16:** Triângulo com incentro

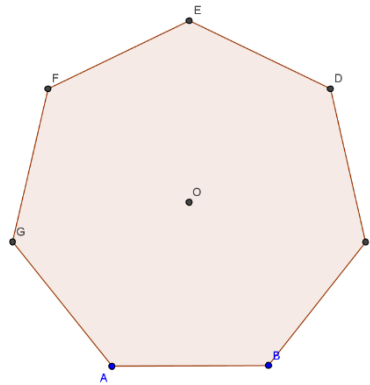




**Fonte:** o próprio autor

Determinamos a circunferência de centro no ponto  $O$  e raio  $OA$ , como a circunferência circunscrita ao heptágono regular com lado dado  $AB$ . Em seguida, transportamos a medida  $AB$  sobre esta circunferência, obtendo os pontos  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  e  $G$ .

**Figura 17:** Heptágono regular



**Fonte:** o próprio autor

Portanto, a partir da medida de um segmento  $AB$ , determinamos um heptágono regular com esta medida de lado.

A partir dos estudos destes três trabalhos de Arquimedes (Determinação do número  $\pi$ , Lei da alavanca e Construção do heptágono regular) pudemos compreender os conceitos matemáticos e físicos envolvidos e desenvolvidos por Arquimedes. E conseqüentemente, elaborar atividades que possam ser aplicadas em uma sala de aula tanto para o ensino básico como o ensino superior.

## 2 ATIVIDADES

Foram elaboradas duas atividades que abordam os conteúdos desenvolvidos nos trabalhos de Arquimedes estudados anteriormente. Elas tem como objetivo fazer que os alunos compreendam os conceitos matemáticos e físicos propostos e também conheçam sobre a vida e trabalhos de Arquimedes. Para resolver as questões destas atividades o aluno pode utilizar de diferentes mecanismos de respostas, dando um caráter mais aberto para perguntas.

A seguir, mostramos os dois questionários com as respectivas soluções e o modo de aplicação de cada um.

### 2.1 ATIVIDADE 1

Conteúdos matemáticos:	Geometria e Trigonometria
Professor:	Matheus Mota Dias
Tempo previsto de aplicação:	120 minutos
Objetivos:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilizar o método de exaustão.</li> <li>- Determinar perímetro de polígonos inscritos e circunscritos.</li> <li>- Determinar uma aproximação do número pi.</li> </ul>
Sugestões de aplicação:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- O professor pode resgatar conceitos matemáticos que envolvem as construções.</li> <li>- Os alunos podem utilizar calculadoras para determinar um valor mais aproximado para os perímetros e para o número pi.</li> </ul>

A atividade em questão tem como objetivo conduzir e mostrar ao aluno como funciona o método de exaustão utilizado por Arquimedes para determinar, por meio de aproximações dos perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito de 3, 6, 9, 12, 24, 48 e 96 lados, o valor aproximado do número irracional  $\pi$ . Podendo também, analisar o erro da aproximação, comparando com o valor obtido por uma calculadora científica.

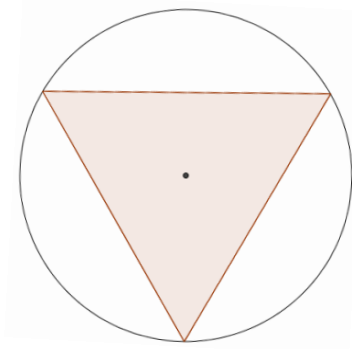
#### 2.1.1 Preparação da Atividade

A sequência de atividades foi preparada de modo que para cada número de lados do polígono, o aluno possa calcular o perímetro dos polígonos inscrito e

circunscrito a uma circunferência de raio unitário e observar que o comprimento dessa circunferência pertence ao intervalo com os valores dos perímetros como extremos. Obtendo assim, uma aproximação numérica do número  $\pi$ .

### 2.1.2 Questionário com resolução

a) Determine a medida do perímetro do triângulo equilátero inscrito a uma circunferência de raio unitário (Use uma aproximação de 4 casas decimais).



Resolução:

*Podemos subdividir o triângulo inscrito em 3 triângulos isósceles com dois vértices nos vértices do triângulo maior e o terceiro vértice no centro da circunferência. Esses triângulos formados são isósceles com dois lados medindo o raio da circunferência e outro, medida do lado do triângulo original. Em relação aos ângulos internos desses triângulos, temos, dois ângulos de  $30^\circ$  e um de  $120^\circ$ .*

*Aplicando a Lei dos Cossenos em um desses triângulos, obtemos:*

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 1 + 1 + 1$$

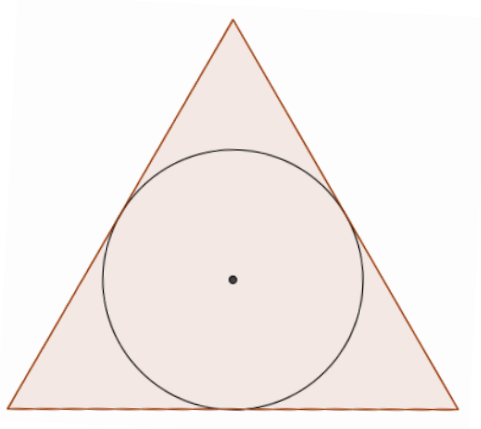
$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3}$$

*Portanto, o perímetro do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio unitário mede:*

$$I_3 = 3\sqrt{3} = 5,1962$$

b) Na figura abaixo, temos um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência de raio unitário. Determine a medida de seu perímetro.



Resolução:

*A partir do triângulo equilátero, utilizamos um triângulo retângulo com altura o raio da circunferência (perpendicular à base do triângulo) e base sendo a metade da base do triângulo equilátero. O ângulo oposto ao lado do triângulo mede  $60^\circ$  pois é metade do ângulo inscrito ( $120^\circ = 360^\circ/3$ ).*

*Portanto, utilizando a razão trigonométrica tangente, obtemos:*

$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{\text{raio}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{1}$$

$$\text{lado} = 2\sqrt{3}$$

*Assim, o perímetro do triângulo equilátero circunscrito à circunferência de raio unitário é:*

$$C_3 = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 10,3923$$

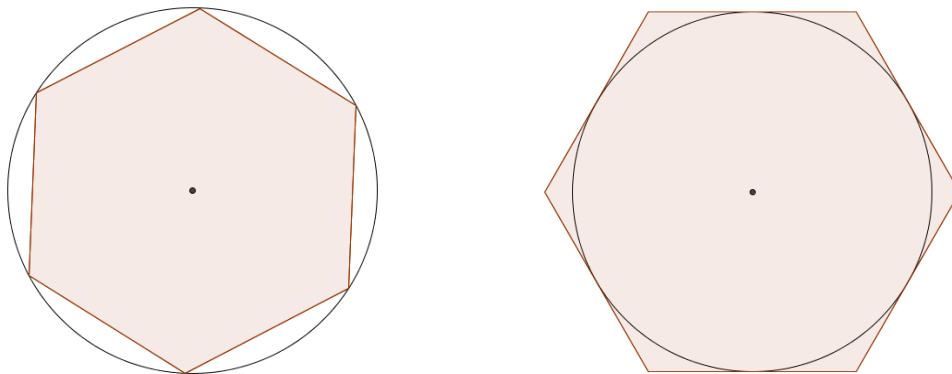
c) Assim, o comprimento da circunferência que está entre os triângulos inscrito e circunscrito pertence ao intervalo \_\_\_\_\_

Resolução:

*Pelos valores calculados nos itens anteriores podemos determinar o seguinte intervalo para o comprimento da circunferência de raio unitário:*

$$[5,1962 ; 10,3923]$$

d) Agora, se dobramos o número de lados dos polígonos, ainda na circunferência de raio unitário, qual é a medida do perímetro de cada um deles?



Resolução:

Hexágono inscrito:

*Podemos subdividir o hexágono inscrito em 6 triângulos isósceles com dois vértices nos vértices do hexágono e o terceiro vértice no centro da circunferência. Esses triângulos formados são equiláteros pois os ângulos internos desses triângulos, são iguais a  $60^\circ$ . Logo, os lados desses triângulos medem o mesmo comprimento, ou seja, a medida do raio da circunferência é igual à medida do lado do hexágono.*

*Portanto, o perímetro do hexágono equilátero inscrito em uma circunferência de raio unitário mede:*

$$I_6 = 6 \cdot 1 = 6$$

Hexágono circunscrito:

*A partir do hexágono circunscrito, utilizamos um triângulo retângulo com altura o raio da circunferência (perpendicular à base do triângulo) e base sendo a metade da base do triângulo equilátero. O ângulo oposto ao lado do triângulo mede  $30^\circ$  pois é metade do ângulo inscrito ( $60^\circ = 360^\circ/6$ ).*

Portanto, utilizando a razão trigonométrica tangente, obtemos:

$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{\text{raio}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{1}$$

$$\text{lado} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Assim, o perímetro do hexágono regular circunscrito à circunferência de raio unitário é:

$$C_6 = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 6,9282$$

e) Com os hexágonos (inscrito e circunscrito), o comprimento da circunferência está no intervalo \_\_\_\_\_

Resolução:

*Pelos valores calculados nos itens anteriores podemos determinar o seguinte intervalo para o comprimento da circunferência de raio unitário:*

$$[6 ; 6,9282]$$

f) Da mesma forma, dobrando novamente o número de lados, determine o perímetro dos polígonos de 12 lados.

Resolução:

Dodecágono inscrito:

*Podemos subdividir o dodecágono inscrito em 12 triângulos isósceles com dois vértices nos vértices do dodecágono e o terceiro vértice no centro da circunferência. Esses triângulos formados são isósceles com dois lados medindo o raio da circunferência e outro, medida do lado do dodecágono original. Em relação aos ângulos internos desses triângulos, temos, dois ângulos de  $75^\circ$  e um de  $30^\circ$ .*

Aplicando a Lei dos Cossenos em um desses triângulos, obtemos:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ$$

$$x^2 = 1 + 1 - \sqrt{3}$$

$$x^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Portanto, o perímetro do dodecágono inscrito em uma circunferência de raio unitário mede:

$$I_{12} = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 6,2116$$

Dodecágono circunscrito:

A partir do dodecágono circunscrito, utilizamos um triângulo retângulo com altura o raio da circunferência (perpendicular à base do triângulo) e base sendo a metade da base do triângulo equilátero. O ângulo oposto ao lado do triângulo mede  $15^\circ$  pois é metade do ângulo inscrito ( $30^\circ = 360^\circ/12$ ).

Portanto, utilizando a razão trigonométrica tangente, obtemos:

$$\operatorname{tg}(15^\circ) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{\text{raio}}$$

$$0,267949 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{1}$$

$$\text{lado} = 0,535898$$

Assim, o perímetro do dodecágono regular circunscrito à circunferência de raio unitário é:

$$C_{12} = 12 \cdot 0,535898 = 6,4308$$

g) Outra vez, dobre os lados, o que acontece quando consideramos polígonos de 24 lados.

Resolução:

Polígono de 24 lados inscrito:

Podemos subdividir o polígono de 24 lados inscrito em 24 triângulos isósceles com dois vértices nos vértices do polígono e o terceiro vértice no centro da circunferência. Esses triângulos formados são isósceles com dois lados medindo o raio da circunferência e outro, medida do lado do polígono original. Em relação aos ângulos internos desses triângulos, temos, dois ângulos de  $82,5^\circ$  e um de  $15^\circ$ .

Aplicando a Lei dos Cossenos em um desses triângulos, obtemos:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 15^\circ$$

$$x^2 = 1 + 1 - 1,931851$$

$$x^2 = 0,068149$$

$$x = \sqrt{0,068149}$$

$$x = 0,261053$$

Portanto, o perímetro do polígono de 24 lados inscrito em uma circunferência de raio unitário mede:

$$I_{24} = 24 \cdot 0,261053 = 6,2653$$

Polígono de 24 lados circunscrito:

A partir do polígono regular de 24 lados circunscrito, utilizamos um triângulo retângulo com altura o raio da circunferência (perpendicular à base do triângulo) e base sendo a metade da base do triângulo equilátero. O ângulo oposto ao lado do triângulo mede  $7,5^\circ$  pois é metade do ângulo inscrito ( $15^\circ = 360^\circ/24$ ).

Portanto, utilizando a razão trigonométrica tangente, obtemos:

$$\operatorname{tg}(7,5^\circ) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{\text{raio}}$$

$$0,131652 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{1}$$

$$\text{lado} = 0,263304$$



Assim, o perímetro do polígono regular de 24 lados circunscrito à circunferência de raio unitário é:

$$C_{24} = 24 \cdot 0,263304 = 6,3193$$

h) O matemático grego Arquimedes (287 – 212 a.C.) em um de seus trabalhos, *A medida do Círculo*, inscreveu e circunscreeu um polígono de 96 lados em uma circunferência de raio unitário. Quais as medidas que ele obteve do perímetro destes polígonos?

Resolução:

Polígono de 96 lados inscrito:

Podemos subdividir o polígono de 96 lados inscrito em 96 triângulos isósceles com dois vértices nos vértices do polígono e o terceiro vértice no centro da circunferência. Esses triângulos formados são isósceles com dois lados medindo o raio da circunferência e outro, medida do lado do polígono original. Em relação aos ângulos internos desses triângulos, temos, dois ângulos de  $88,125^\circ$  e um de  $3,75^\circ$ .

Aplicando a Lei dos Cossenos em um desses triângulos, obtemos:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 3,75^\circ$$

$$x^2 = 1 + 1 - 1,995717$$

$$x^2 = 0,004282$$

$$x = \sqrt{0,004282}$$

$$x = 0,065438$$

Portanto, o perímetro do polígono de 96 lados inscrito em uma circunferência de raio unitário mede:

$$I_{96} = 96 \cdot 0,065438 = 6,282$$

Polígono de 96 lados circunscrito:

A partir do polígono regular de 96 lados circunscrito, utilizamos um triângulo retângulo com altura o raio da circunferência (perpendicular à base do triângulo) e base sendo a metade da base do triângulo equilátero. O ângulo oposto ao lado do triângulo mede  $1,875^\circ$  pois é metade do ângulo inscrito ( $3,75^\circ = 360^\circ/96$ ).

Portanto, utilizando a razão trigonométrica tangente, obtemos:

$$\operatorname{tg}(1,875^\circ) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{\text{raio}}$$

$$0,032736 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \text{lado}}{1}$$

$$\text{lado} = 0,065472$$

Assim, o perímetro do polígono regular de 96 lados circunscrito à circunferência de raio unitário é:

$$C_{96} = 96 \cdot 0,065472 = 6,2853$$

i) Atualmente, sabemos calcular o comprimento de uma circunferência. Qual é a medida do comprimento de uma circunferência de raio unitário?

Resolução:

Podemos determinar o comprimento de uma circunferência por meio da relação  $C = 2\pi r$ . Assim, uma circunferência de raio unitário tem comprimento:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 1$$

$$C = 2\pi$$

$$C = 6,2832$$

j) Compare esse valor com os resultados do perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados obtido em h).

Resolução:

O valor calculado no item anterior pertence ao intervalo com extremos os perímetros do polígono inscrito e circunscrito de 96 lados respectivamente.

$$I_{96} < C < C_{96}$$

$$6,282 < 6,2832 < 6,2853$$

k) Arquimedes determinou o valor de  $\pi$ , através da aproximação dos perímetros dos polígonos de 96 lados, inscrito e circunscrito. Qual o erro dos cálculos de aproximação realizados por Arquimedes?

Resolução:

*Para ambas as aproximações (inferior e superior), o erro acontece a partir da terceira casa decimal, milésimo. Assim,*

$$0,0012 < erro < 0,0021$$

### 2.1.3 Aplicação do Questionário

A atividade sobre a determinação de um valor aproximado do número  $\pi$  utilizando o método da exaustão foi aplicada em duas turmas do primeiro ano do curso de matemática – licenciatura da Universidade Estadual de Londrina, totalizando 24 alunos participantes. Os exercícios foram resolvidos em duplas, para que houvessem discussões dos resultados e foi permitido o uso da calculadora, já que queríamos comparar o número de casas decimais corretas da aproximação do número  $\pi$ . O tempo para realizar a atividade foi de duas aulas, ou seja, 2 horas. Os alunos foram bem receptivos para essa atividade sabendo que era para uma pesquisa de Mestrado e utilizamos os termos de consentimento livre e esclarecido (TCLE) de todos os participantes. Uma cópia deste termo está no anexo B.

A respeito do aluno de graduação do curso de matemática – licenciatura, tem-se no Plano Político Pedagógico (PPP) da Universidade Estadual de Londrina referente a este curso, no capítulo I, Art 3º que

É necessário que tenham conhecimento sólido das diversas áreas da matemática, conhecendo seu desenvolvimento histórico e suas aplicações, assim como um conjunto variado de experiências matemáticas, incluindo a resolução de problemas, a realização de trabalho investigativo, a construção de modelos de situações reais, entre outras experiências. (Resolução CEPE nº 0230/2009 – Universidade Estadual de Londrina)

Assim, a atividade proposta utilizando o método de exaustão de Arquimedes vem ao encontro com a Resolução citada anteriormente. Além do aspecto histórico, a partir das situações com os polígonos, os alunos devem generalizar os cálculos para o número de 96 lados, já que no momento da atividade não possuíam compasso ou

outro material para a construção. Essa é uma característica que deve ser trabalhada durante o curso, já que está no PPP, Capítulo I, Art 5º, 2º parágrafo:

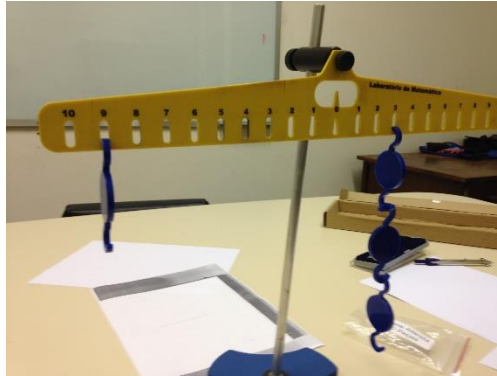
É importante que os conteúdos matemáticos sejam tratados de modo que o futuro profissional seja capaz de explorar situações-problema, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica, comunicar-se matematicamente por meio de diferentes linguagens, conceber que a validade de uma afirmação está relacionada à consistência da argumentação, compreender noções de conjectura, teorema, demonstração, examinar consequências do uso de diferentes definições, analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativa, ter confiança pessoal em desenvolver atividades matemáticas e apreciar a estrutura abstrata que está presente na Matemática e sua função social. (Resolução CEPE nº 0230/2009 – Universidade Estadual de Londrina)

De certa forma, seguindo os passos de Arquimedes, os alunos e futuros professores de matemática, puderam determinar uma aproximação do número pi, utilizando conhecimentos geométricos e trigonométricos.

## 2.2 ATIVIDADE 2

Conteúdos:	Produto e Equilíbrio
Professor:	Matheus Mota Dias
Tempo previsto de aplicação:	100 minutos
Objetivos:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Compreender o equilíbrio de uma alavanca por meio de situações experimentais.</li> <li>- Determinar a Lei da Alavanca.</li> <li>- Utilizar a Lei da Alavanca em exercícios de fixação.</li> </ul>
Sugestões de aplicação:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- O professor pode resgatar conceitos matemáticos e físicos que envolvem as situações.</li> <li>- Verificar se os alunos compreenderam o funcionamento da alavanca e como montar as situações.</li> </ul>

A segunda atividade aplicada utiliza uma alavanca (Figura 18) com marcações nos dois braços e que utiliza pesos de plástico e tem como objetivo conduzir e mostrar ao aluno por meio de situações de equilíbrio e desequilíbrio como funciona a “Lei da Alavanca”, determinada por Arquimedes. Em seguida, propomos exercícios que utilizam esta lei para serem resolvidos.

**Figura 18:** Alavanca da atividade

**Fonte:** o próprio autor

### 2.2.1 Preparação da Atividade

A sequência de atividades foi preparada de modo que a partir de algumas situações, os alunos possam, primeiramente, utilizando os pesos de plástico do material, montar e representar em cada braço da alavanca as situações, analisando os motivos para o desequilíbrio ou equilíbrio e propor alterações para que a alavanca fique ou permaneça em equilíbrio acrescentando ou retirando pesos, ou ainda, alterando as posições dos pesos. Para que possam, enfim, determinar a lei da alavanca, assim como concluiu Arquimedes.

### 2.2.2 Questionário com resolução

Vamos realizar algumas situações utilizando uma balança e pesos. Monte as situações conforme os valores das tabelas e responda os itens abaixo.

#### a) SITUAÇÃO 1

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
7	1	1	1

- O que aconteceu com a balança?

Resolução:

*A balança não fica em equilíbrio, ela tende para o lado esquerdo.*

- Qual explicação podemos dar para esse resultado?

Resolução:

*Mesmo com pesos iguais nos dois braços, o peso na posição 7 do braço esquerdo exerce maior força. Ou ainda, o “momento” do braço esquerdo é 7 e do braço direito é 1.*

- Para que a balança fique em equilíbrio (horizontal), o que pode ser feito?

Resolução:

*Existem várias possibilidades para tornar a balança em equilíbrio:*

- mover o peso do braço esquerdo para a posição 1;
- mover o peso do braço direito para a posição 7;
- acrescentar um peso na posição 6 no braço direito.

**b) SITUAÇÃO 2**

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
4	3	4	2

- O que aconteceu com a balança?

Resolução:

*A balança não fica em equilíbrio, ela tende para o lado esquerdo.*

- Qual explicação podemos dar para esse resultado?

Resolução:

*Mesmo com pesos em posições simétricas nos dois braços, a quantidade maior de pesos na posição 4 do braço esquerdo exerce maior força. Ou ainda, o “momento” do braço esquerdo é 12, enquanto do braço direito é 8.*

- Para que a balança fique em equilíbrio (horizontal), o que pode ser feito?

Resolução:

*Existem várias possibilidades para tornar a balança em equilíbrio:*

- remover um peso da posição 4 no braço esquerdo;
- acrescentar um peso na posição 4 do braço direito;
- mover um peso da posição 4 no braço direito para a posição 8.

c) **SITUAÇÃO 3**

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
9	1	3	3

- O que aconteceu com a balança?

Resolução:

*A balança fica em equilíbrio.*

- Qual explicação podemos dar para esse resultado?

Resolução:

*Apesar que a balança possui quantidades de pesos diferentes em posições diferentes, a balança ficou em equilíbrio pois os “momentos” dos dois braços são iguais a 9. Um peso na posição 9 exerce a mesma força do que três pesos na posição 3.*

e) A partir dessas situações, explique, com suas palavras, quando que uma balança fica em equilíbrio.

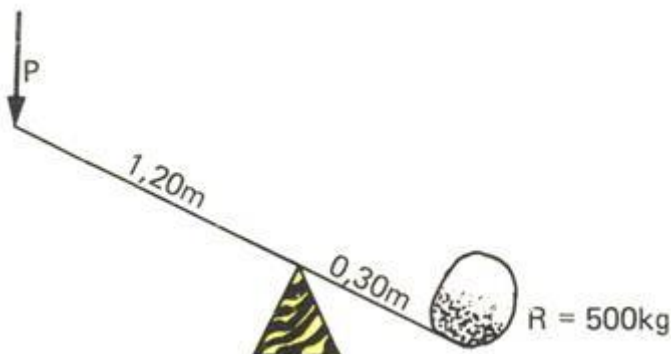
Resolução:

*Uma balança fica em equilíbrio quando possui:*

- mesma quantidade de pesos em mesma posição nos braços;
- mesmo valor do produto entre quantidade de pesos e distância do fulcro, momento, de cada braço.

Uma situação prática de equilíbrio é a GANGORRA.

1) Na figura abaixo, uma pedra de 500 kg está em uma extremidade de uma gangorra e sua distância até o ponto de apoio é de 0,30 m. Para que a gangorra fique em equilíbrio, qual deve ser a massa no outro extremo da gangorra, que está 1,20 m afastado do ponto de apoio?



Resolução:

*Pela Lei da Alavanca de Arquimedes, o equilíbrio acontece quando o valor do momento de cada braço é igual. Assim, primeiramente calculamos esses valores.*

*Momento do Lado Esquerdo: Massa . 1,20*

*Momento do Lado Direito: 500 . 0,30 = 150*

$$\text{Massa} \cdot 1,20 = 150$$

$$\text{Massa} = \frac{150}{1,20}$$

$$\text{Massa} = 125 \text{ kg}$$

2) Na figura abaixo, a gangorra de 6 metros de comprimento está em equilíbrio. Supondo que a massa da pessoa na posição A seja de 80 kg e a massa da pessoa B, na posição oposta, é 40 kg, qual deverá ser a distância de A ao ponto O?



Resolução:

*Da mesma forma, pela Lei da Alavanca de Arquimedes, o equilíbrio acontece quando o valor do momento de cada braço é igual. Assim, calculamos esses valores.*

*Lado Esquerdo: Massa . 1,20*

*Lado Direito: 500 . 0,30 = 150*

$$\text{Massa} \cdot 1,20 = 150$$

$$\text{Massa} = \frac{150}{1,20}$$

$$\text{Massa} = 125 \text{ kg}$$

### 2.2.3 Aplicação do Questionário

A atividade sobre a lei da alavanca foi aplicada com alunos dos três anos do ensino médio do Colégio Sesi Londrina, totalizando 18 alunos. Os exercícios foram resolvidos em duplas, para que houvessem discussões das situações e sugestões



para as alterações. O tempo proposto para a atividade foi de duas aulas de 50 minutos cada. Previamente, entregamos os termos de consentimento livre e esclarecido (TCLE) para que os responsáveis autorizassem, este termo está no anexo A.

A partir das situações utilizando pesos em quantidades e posições diferentes na alavanca, os alunos puderam perceber, refazendo os “passos” de Arquimedes, como esse conhecimento foi concebido. Isto é um dos critérios obrigatórios no ensino da matemática:

O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (BRASIL, 1999, p.15)

E ainda, essa atividade além de utilizar o contexto histórico, propõe que os alunos investiguem as situações de equilíbrio da alavanca. Podendo desenvolver criatividade, raciocínio lógico, entre outras habilidades, como afirma o documento:

resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (BRASIL, 1999, p.33)

Portanto, essa atividade vai ao encontro do que se espera de um aluno de ensino médio, tanto na parte cognitiva, quanto na parte motivacional, apresentando um contexto, aplicação e instrumentos alternativos.

### 3 ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES

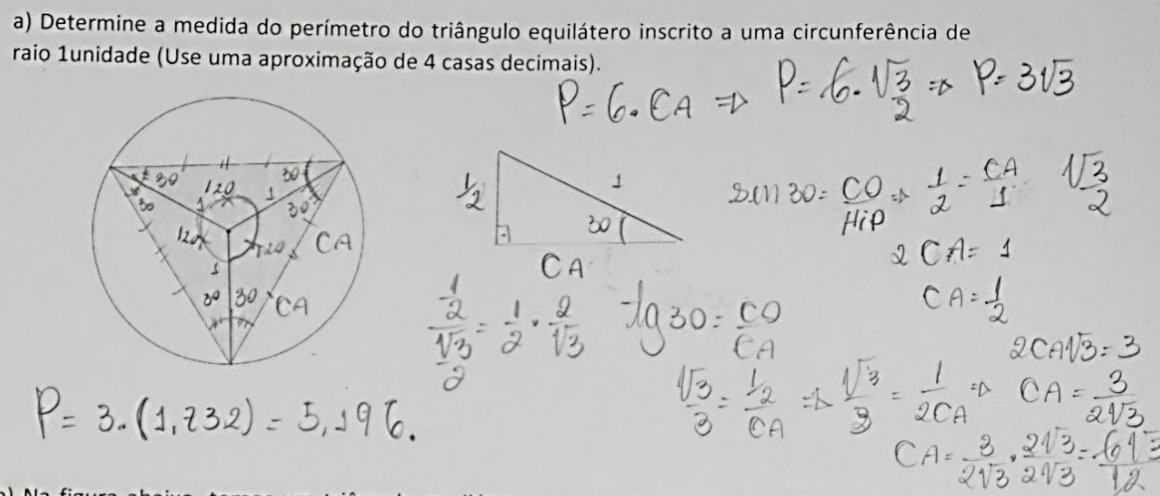
Neste capítulo analisaremos as resoluções das duas atividades propostas e apresentadas no capítulo anterior. Destacamos os acertos e também as diferentes maneiras de resolução.

#### 3.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1

A primeira questão, determinar o perímetro do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio unitário, foi respondida corretamente por todos os 24 alunos. Podemos destacar duas maneiras de resolução: utilizando trigonometria do triângulo retângulo (Figura 19) e a outra, proporção e teorema de Pitágoras (Figura 20).

**Figura 19:** Resolução da atividade 1 – item a1

a) Determine a medida do perímetro do triângulo equilátero inscrito a uma circunferência de raio 1 unidade (Use uma aproximação de 4 casas decimais).



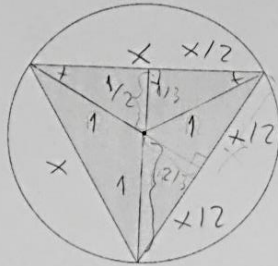
$P = 6 \cdot CA \Rightarrow P = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = 3\sqrt{3}$   
 $\sin 30 = \frac{CO}{Hip} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CA}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $2CA = 1 \Rightarrow CA = \frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$   
 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2CA} \Rightarrow CA = \frac{3}{2\sqrt{3}}$   
 $2CA\sqrt{3} = 3$   
 $CA = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{12}$   
 $P = 3 \cdot (1,732) = 5,196.$

b) Na figura abaixo, temos um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio unitário.

Fonte: arquivo pessoal

**Figura 20:** Resolução da atividade 1 – item a2

a) Determine a medida do perímetro do triângulo equilátero inscrito a uma circunferência de raio unitário (Use uma aproximação de 4 casas decimais).



$$\begin{aligned} 1 &= 2/3 \\ y &= 1/3 \\ \frac{2}{3}y &= \frac{1}{3} \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4} \\ \frac{3}{4} &= \frac{x^2}{4} \\ x &= \sqrt{3} \\ 2p &= 3 \cdot x = 3\sqrt{3} \\ 2p &= 3\sqrt{3} \\ 2p &= 5,1961 \end{aligned}$$

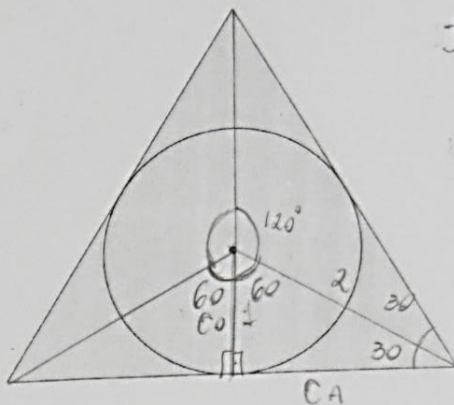
b) Na figura abaixo, temos um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência de raio unitário.

**Fonte:** arquivo pessoal

Na segunda questão, determinar o perímetro do triângulo equilátero circunscrito em uma circunferência de raio unitário, também todos os alunos responderam corretamente. Em seguida, mostramos duas maneiras de resolução: utilizando trigonometria do triângulo retângulo (Figura 21) e a outra, proporção e semelhança de triângulos (Figura 22).

**Figura 21:** Resolução da atividade 1 – item b1

b) Na figura abaixo, temos um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência de raio uma unidade. Determine a medida de seu perímetro.



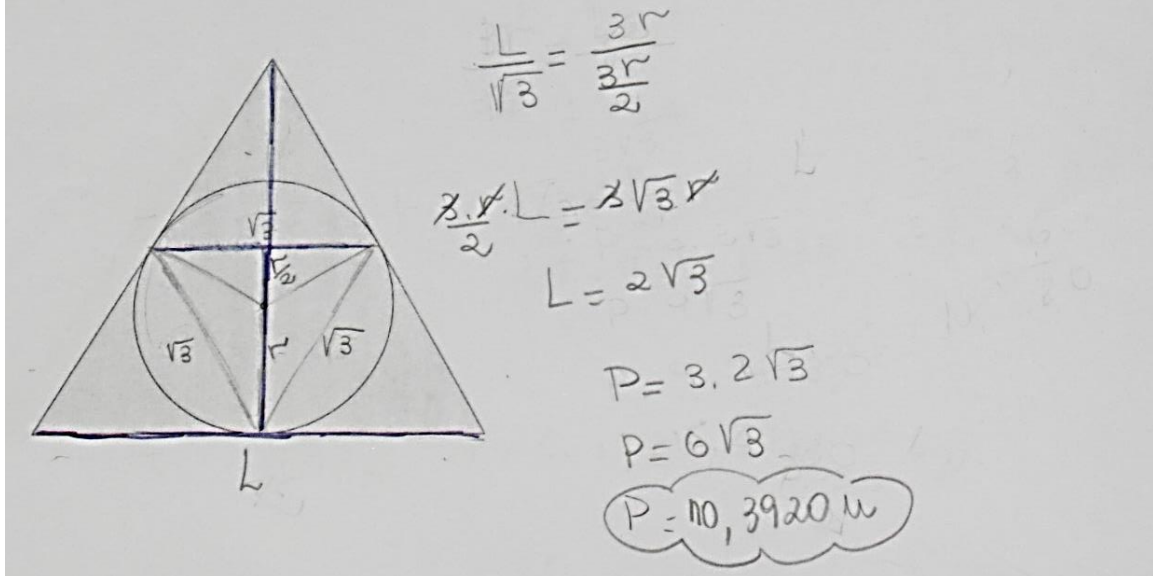
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30 &= \frac{CO}{CA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{CA} \Rightarrow \sqrt{3}CA = 3 \\ CA &= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ CA &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 6 \cdot CA \\ &= 6 \cdot \sqrt{3} \\ &= 6 \cdot 1,732 \\ &= 10,39 \end{aligned}$$

**Fonte:** arquivo pessoal

**Figura 22:** Resolução da atividade 1 – item b2

b) Na figura abaixo, temos um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência de raio unitário. Determine a medida de seu perímetro.



Fonte: arquivo pessoal

O objetivo da terceira questão era relacionar os valores calculados nas duas questões anteriores como aproximações para o comprimento da circunferência de raio unitário, que ainda é desconhecido. Apesar de que os 24 alunos responderam corretamente, alguns já utilizaram a relação  $C = 2\pi r$  para determinar o comprimento da circunferência e comprovar que este valor pertence ao intervalo encontrado (Figura 23).

**Figura 23:** Resolução da atividade 1 – item c

c) Assim, o comprimento da circunferência está no intervalo  $5,196 < 6,282 < 10,39$

$$P = 2 \cdot \pi \cdot R$$

$$= 2 \cdot 3,141$$

$$= 6,282$$

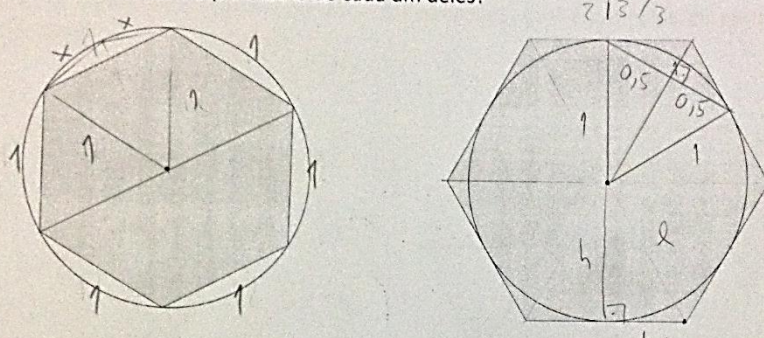
Fonte: arquivo pessoal

Agora, com o número de lados dos polígonos dobrado, ou seja, um hexágono, os alunos calcularam corretamente o perímetro do polígono inscrito e do polígono circunscrito. Duas maneiras foram utilizadas para os cálculos: a primeira, usando o

fato que o raio da circunferência tem a mesma medida do lado do hexágono inscrito e utilizando Teorema de Pitágoras (Figura 24) e a outra maneira, por meio das razões trigonométricas seno e cosseno (Figura 25). Obtendo em todas as resoluções o intervalo  $[6; 6,9282]$ .

**Figura 24:** Resolução da atividade 1 – item d1

d) Agora, se dobramos o número de lados dos polígonos, ainda na circunferência de raio unitário, qual é a medida do perímetro de cada um deles?



$2p = 6$

$2\sqrt{3}/3$

$1 = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$2\sqrt{3} = 2$

$l = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$l = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$2p = 12 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$2p = 4\sqrt{3}$

$l^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$h^2 = l^2 - \frac{1}{4}$

$h^2 = \frac{3l^2}{4}$

$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

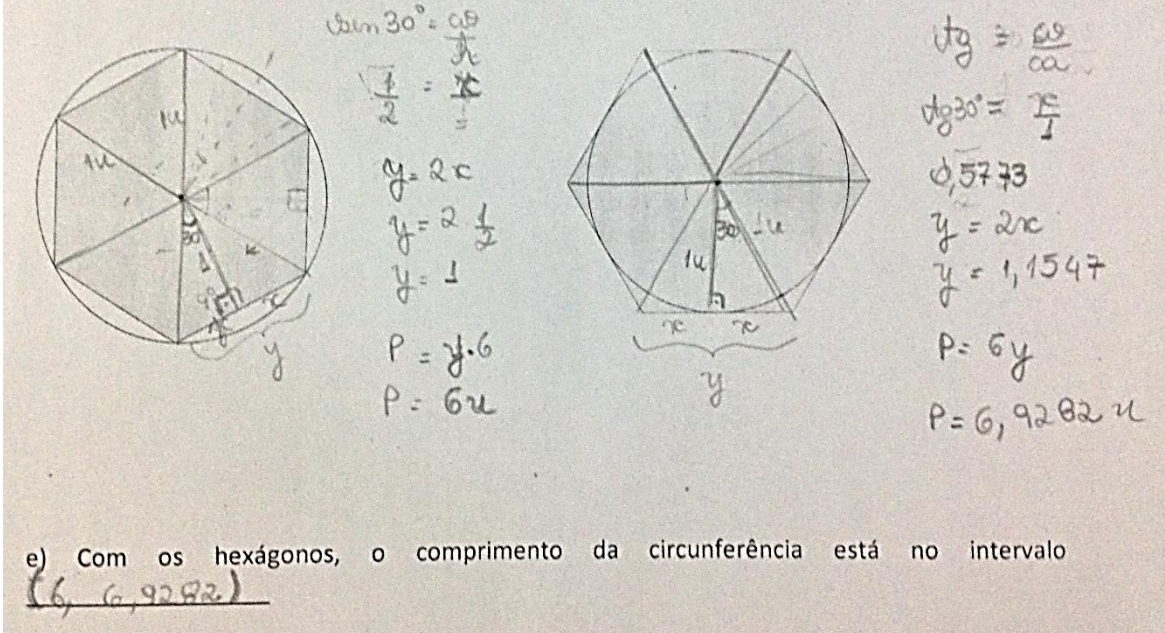
$2p = 6,9282$

e) Com os hexágonos (inscrito e circunscrito), o comprimento da circunferência está no intervalo entre 6 e 6,9282

**Fonte:** arquivo pessoal

**Figura 25:** Resolução da atividade 1 – item d2

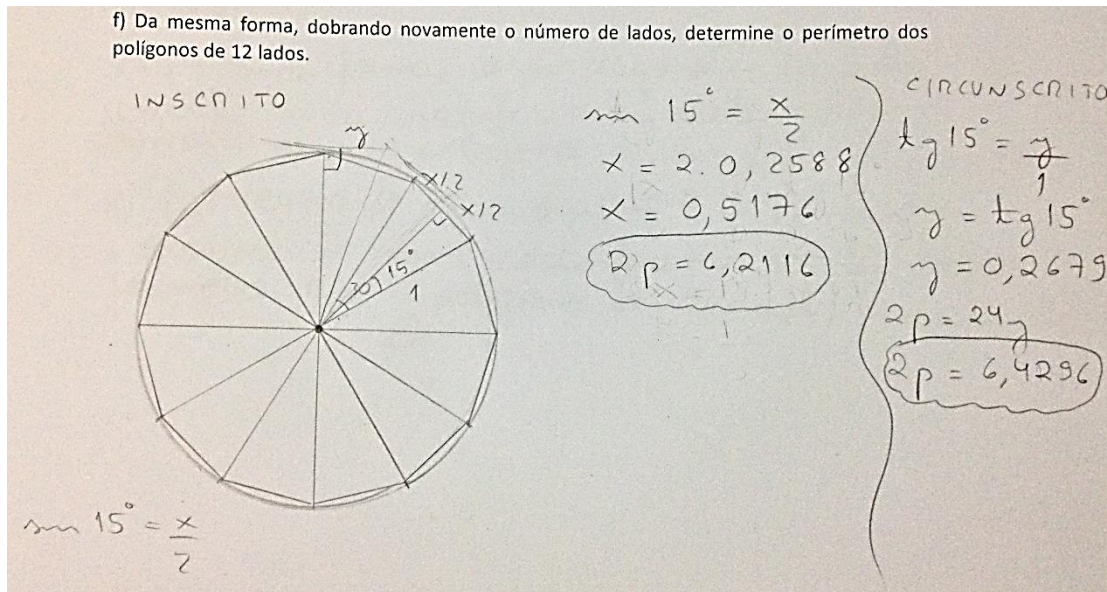
d) Agora, se dobramos o número de lados dos polígonos, qual é a medida do perímetro de cada um deles?



**Fonte:** arquivo pessoal

A próxima questão, sobre o perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito de 12 lados, não continha as figuras. Dos 24 alunos participantes, 4 não conseguiram resolver a atividade, 13 resolveram com auxílio de figuras construídas pelos mesmos e apenas 7 resolveram a partir do raciocínio desenvolvido nos itens anteriores. Na Figura 26, temos uma resolução de um aluno que para calcular o perímetro do dodecágono regular inscrito utilizou uma figura para compreender a situação e para o cálculo do perímetro do polígono circunscrito utilizou o raciocínio dos itens anteriores.

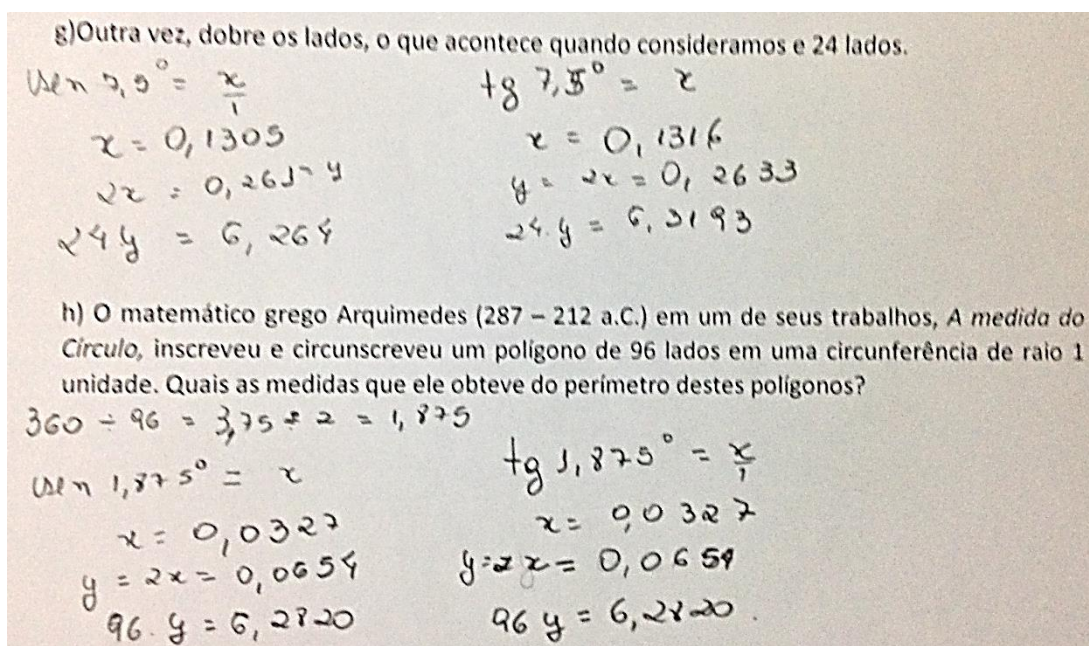
**Figura 26:** Resolução da atividade 1 – item f



Fonte: arquivo pessoal

Continuando com o método de exaustão, dobrando o número de lados do polígono em questões, os alunos calcularam os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito de 24 e 96 lados. Novamente, as questões não continham as figuras e todos os alunos que resolveram, 11, não construíram figuras, resolveram pelo método algébrico e trigonométrico. Em seguida, mostramos uma resolução dessas questões.

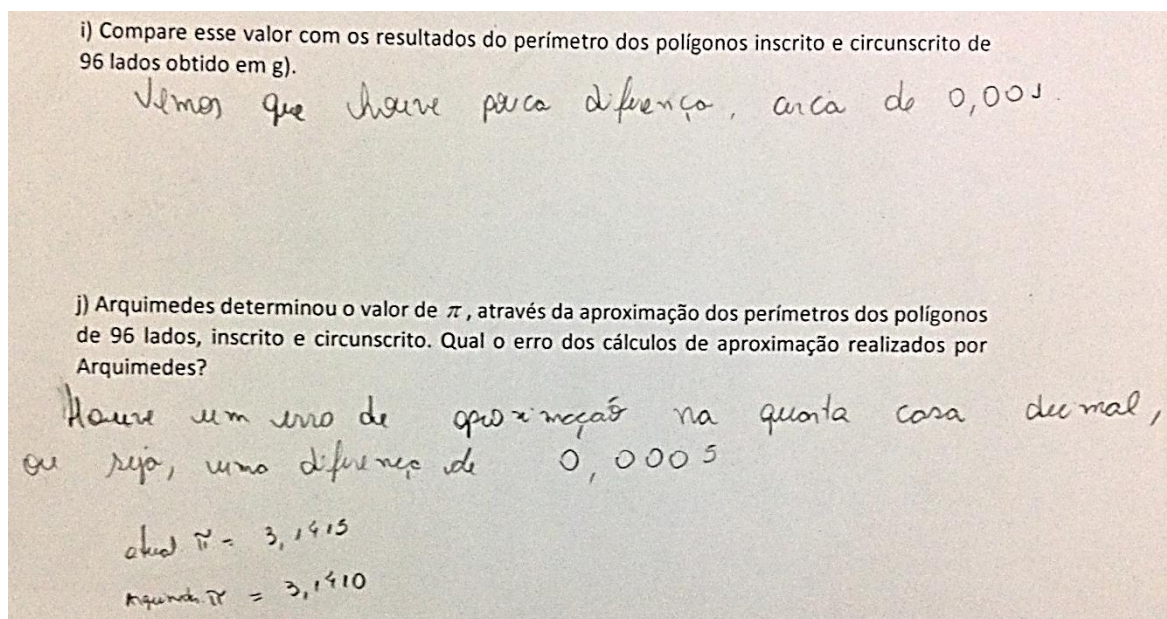
**Figura 27:** Resolução da atividade 1 – item g



Fonte: arquivo pessoal

E na última questão, o aluno deveria comparar os valores encontrados no item anterior (perímetros do polígono inscrito e circunscrito de 96 lados) com o valor que hoje calculamos para o comprimento da circunferência,  $C = 2\pi r$ . Novamente, apenas 11 alunos conseguiram resolver as questões corretamente, concluindo que pelo método desenvolvido por Arquimedes é possível obter uma aproximação até a quarta decimal do valor do número pi.

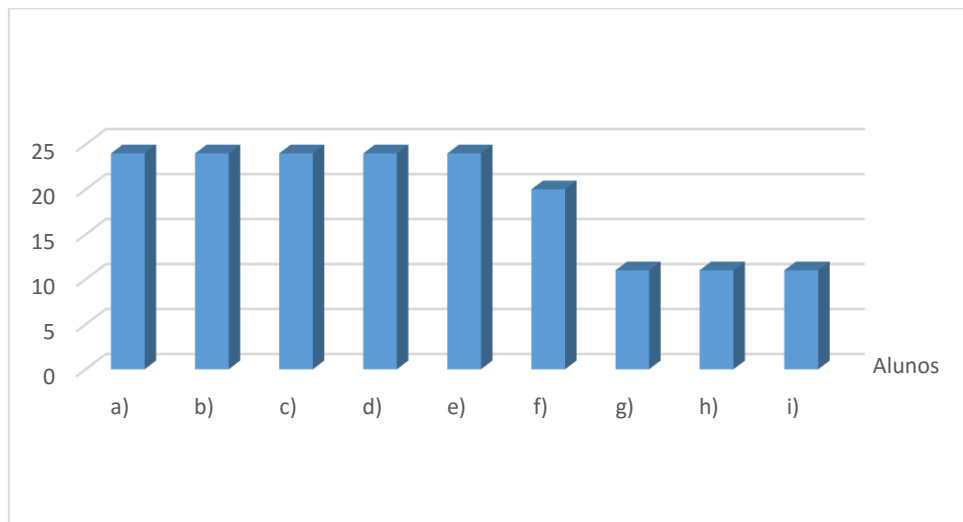
**Figura 28:** Resolução da atividade 1 – item i



**Fonte:** arquivo pessoal

De maneira geral, o Gráfico 1 mostra o número de alunos que acertaram cada item da atividade proposta. Os cinco primeiros itens todos os alunos tiveram êxito, passando para 20 alunos no item f) e terminando com 11 alunos resolvendo os três últimos itens. Um fator para que mais da metade dos alunos não concluíssem a atividade foi o tempo da aplicação e também que alguns alunos chegaram atrasados para a aula.



**Gráfico 1:** Gráfico comparativo da atividade 1

**Fonte:** Elaborada pelo autor.

### 3.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2

Na primeira situação a dupla deveria analisar, após a montagem da situação, o motivo do desequilíbrio da alavanca e ainda o que poderia ser feito para a alavanca ficasse em equilíbrio. Das nove duplas participantes, todas conseguiram perceber a inclinação da balança para esquerda. Para a justificativa deste fato, 8 duplas disseram que foi por causa do peso do braço esquerdo estar mais distante do centro do que o peso do braço oposto (Figura 29). Já uma dupla explicou por meio do termo físico “momento”.

Para o terceiro item, ainda da primeira situação, alteração da balança para o equilíbrio, foram apresentados dois tipos de respostas: mover um dos pesos de um braço para a mesma posição do braço contrário e acrescentar pesos em um braço para compensar a distância (Figura 30). O manuseio com a balança proporcionou essas respostas, pois os alunos puderam realizar diversos experimentos e analisar seus resultados.

Figura 29: Resolução da atividade 2 – situação 1a

a) SITUAÇÃO 1

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
7	1	1	1

- O que aconteceu com a balança?  
Mesmo com a mesma quantidade de pesos, o braço esquerdo ficou mais baixo
- Qual explicação podemos dar para esse resultado?  
Como a distância do ponto de origem dos dois pesos é diferente, a balança não ficará em equilíbrio
- Para que a balança fique em equilíbrio (horizontal), o que pode ser feito?  
Sem alterar a quantidade, basta igualar as posições dos pesos

Fonte: arquivo pessoal

Figura 30: Resolução da atividade 2 – situação 1b

a) SITUAÇÃO 1

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
7	1	1	1

- O que aconteceu com a balança?  
inclinou para baixo em relação ao braço esquerdo
- Qual explicação podemos dar para esse resultado?  
Que se colocarmos 2 pesos de mesma peso em posições direita e esquerda diferentes em relação ao ponto 0, o peso que estiver mais distante do 0 irá para baixo
- Para que a balança fique em equilíbrio (horizontal), o que pode ser feito?  
Colocar um peso na posição 6 no braço direito ou colocar o peso da direita na posição 7

b) SITUAÇÃO 2

Fonte: arquivo pessoal

Na segunda situação era pedido para que os alunos analisassem a posição da balança com pesos diferentes em uma mesma posição. O primeiro item foi respondido corretamente por 100% das duplas. A justificativa para esse desequilíbrio para o lado esquerdo, segundo item, foi por causa de ter mais peso de um dos lados (Figura 31).

Figura 31: Resolução da atividade 2 – situação 2

b) SITUAÇÃO 2

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
4	3	4	2

- O que aconteceu com a balança?  
ficou desequilibrada pendendo para o lado do esquerdo
- Qual explicação podemos dar para esse resultado?  
o lado esquerdo tem 1 unidade de peso a mais que o direito
- Para que a balança fique em equilíbrio (horizontal), o que pode ser feito?
  - Adicionar 1 peso ao braço direito
  - Mover os pesos do braço direito para a posição 6

Fonte: arquivo pessoal

A situação 3, que envolvia o equilíbrio da alavanca, foi resolvida corretamente pelas nove duplas. Os alunos conseguiram perceber que mesmo com apenas um peso no braço esquerdo, mas naquela posição conseguiu equilibrar com o braço direito e seus três pesos. Mostramos na Figura 32 a resolução de uma das duplas.

**Figura 32:** Resolução da atividade 2 – situação 3

c) SITUAÇÃO 3

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
9	1	3	3

- O que aconteceu com a balança?

*ficou em equilíbrio*

- Qual explicação podemos dar para esse resultado?

*por mais que o lado direito possui maior massa, ele está relativamente próximo ao eixo fixo, enquanto o menor peso foi posicionado proporcionalmente mais distante do eixo.*

**Fonte:** arquivo pessoal

Já sobre o item sobre a explicação, nas palavras dos alunos, sobre o equilíbrio da balança, apenas uma equipe deixou em branco a resposta. Os que responderam, fizeram corretamente, de acordo com suas explicações. Podemos observar que analisaram as situações anteriores e determinaram que o equilíbrio é obtido “quando o peso multiplicado pela distância se iguala ao outro lado” (Figura 33). Nesta figura ainda tem um desenho explicando uma situação de equilíbrio.

**Figura 33:** Resolução da atividade 2 – item e)

e) A partir dessas situações, explique, com suas palavras, quando que uma balança fica em equilíbrio.

*quando o peso multiplicado pela distância se iguala ao outro lado:*

$4 \times 5 = 2 \times 10$

**Fonte:** arquivo pessoal

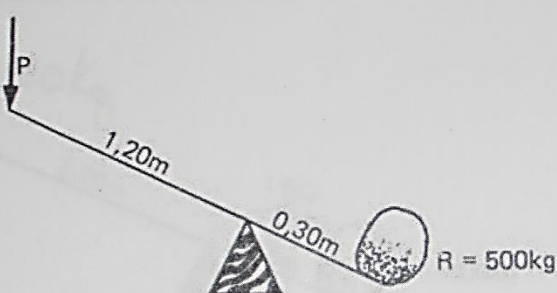
Após as análises das situações, propomos dois exercícios de fixação para que utilizassem o conceito de equilíbrio trabalhado anteriormente. O primeiro exercício

envolvia uma gangorra com uma pedra de 500 quilos distante 0,30 m do fulcro e perguntava qual a massa de um objeto distante 1,20 m do fulcro para que tornasse a gangorra em equilíbrio. Sete duplas responderam de acordo com a Lei da Alavanca de Arquimedes, utilizando os momentos (Figura 34), resultando 125 kg. Duas duplas obtiveram um valor de 2000 kg (Figura 35) que foi calculado a partir de proporções. Estas não se atentaram que com uma distância maior em relação ao fulcro é necessário um peso menor para levantar o mesmo peso do outro lado.

**Figura 34:** Resolução da atividade 2 – exercício 1a

Uma situação prática de equilíbrio é a GANGORRA.

1) Na figura abaixo, uma pedra de 500 kg está em uma extremidade de uma gangorra e sua distância até o ponto de apoio é de 0,30 m. Para que a gangorra fique em equilíbrio, qual deve ser a massa no outro extremo da gangorra, que está 1,20 m afastado do ponto de apoio?



$$X \cdot 1,20 = 500 \cdot 0,30$$

$$X = \frac{150}{1,20}$$

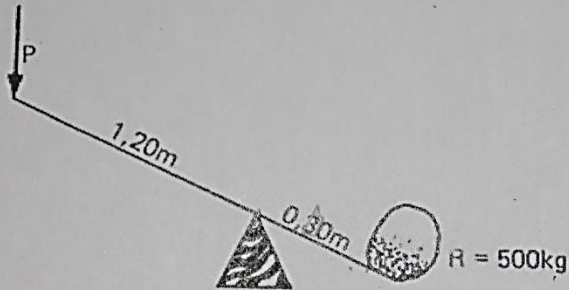
$$X = 125 \text{ kg}$$

**Fonte:** arquivo pessoal

### Figura 35: Resolução da atividade 2 – exercício 1b

Uma situação prática de equilíbrio é a GANGORRA.

1) Na figura abaixo, uma pedra de 500 kg está em uma extremidade de uma gangorra e sua distância até o ponto de apoio é de 0,30 m. Para que a gangorra fique em equilíbrio, qual deve ser a massa no outro extremo da gangorra, que está 1,20 m afastado do ponto de apoio?



$$\frac{x}{1,20} \times \frac{500}{0,30}$$

$$0,30x = 600$$

$$x = 2000 \text{ kg}$$

Fonte: arquivo pessoal

O segundo exercício proposto continha também uma gangorra, só que agora com dois pesos conhecidos (80 kg e 40 kg) e apenas o comprimento inteiro da gangorra AB é informado, 6 metros. Das nove duplas participantes, oito responderam corretamente. A única dupla que não respondeu, deixou em branco a folha de resposta. Evidenciamos aqui duas resoluções, a primeira (Figura 36) utilizou os produtos dos momentos com incógnitas x e y. Já a segunda resolução (Figura 37) destacou que a proporção entre os pesos, “a pessoa B precisa estar o dobro da distância do A, já que o peso é o dobro”.

**Figura 36: Resolução da atividade 2 – exercício 2a**

2) Na figura abaixo, a gangorra de 6 metros de comprimento está em equilíbrio. Supondo que a massa da pessoa na posição A seja de 80 kg e a massa da pessoa B, na posição oposta, é 40 kg, qual deverá ser a distância de A ao ponto O?

Handwritten calculations:

$$(6-x)40 = (6-y)80$$

$$240 - 40x = 480 - 80y$$

$$-40x = 240 - 80y$$

$$40x = 80y - 240$$

$$x = 2y - 6$$

$$x + y = 6$$

$$2x = 6 - x$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$\overline{AO} = 2 \text{ metros}$

Fonte: arquivo pessoal

**Figura 37: Resolução da atividade 2 – exercício 2b**

2) Na figura abaixo, a gangorra de 6 metros de comprimento está em equilíbrio. Supondo que a massa da pessoa na posição A seja de 80 kg e a massa da pessoa B, na posição oposta, é 40 kg, qual deverá ser a distância de A ao ponto O?

Handwritten calculations:

$$Mof = f \cdot D$$

ou seja

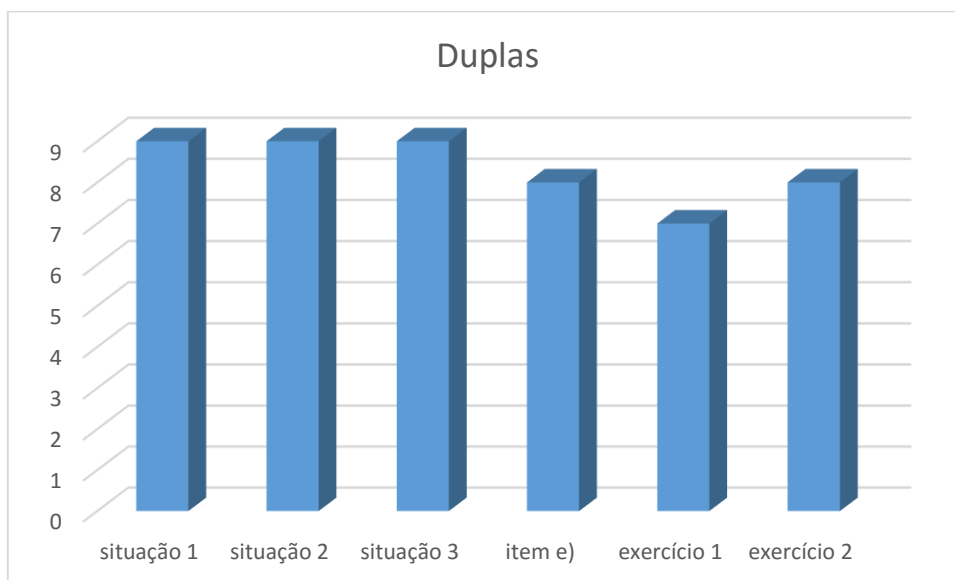
Da pessoa B precisa estar o dobro da distância do A já que o peso é o dobro

Fonte: arquivo pessoal

De uma maneira geral, os alunos conseguiram perceber a Lei da Alavanca de Arquimedes por meio de situações experimentais com uma alavanca presente no momento da aplicação. Além disso, resolveram satisfatoriamente a exercícios que exigiam a aplicação desta teoria. No gráfico 2 está a relação do número de acertos

em cada situação e exercício.

**Gráfico 2:** Gráfico comparativo da atividade 2



**Fonte:** Elaborada pelo autor.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudando a vida de Arquimedes pudemos observar seu espírito investigador, criativo e solucionador de problemas. Sempre envolto por histórias e lendas, mesmo assim sua contribuição para a matemática foi inegável.

Utilizando o método de exaustão, Arquimedes por meio dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos conseguiu uma aproximação do número pi. Neste trabalho, podemos confirmar que esse número é irracional, visto as demonstrações apresentadas. Assim, em seus trabalhos, já utilizava esse número tão conhecido e que chama atenção dos matemáticos por séculos.

Por meio de situações distribuindo pesos em diferentes posições e quantidades, Arquimedes analisou o equilíbrio de uma alavanca, podendo generalizar em uma fórmula, conhecida por Lei da Alavanca. Com essa descoberta física, conseguiu aplicar na Geometria Espacial, calculando o volume de uma esfera. E ainda, com o uso de uma régua sem medidas e compasso, Arquimedes conseguiu construir um polígono regular de sete lados, só de uma maneira particular.

Em ambas as atividades desenvolvidas, os alunos foram muito receptivos e interessados em resolvê-las. Com contexto histórico e refazendo os “passos” de Arquimedes, os alunos calcularam perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos para determinar uma aproximação com 4 casas decimais do número pi e também, compreenderam quando uma alavanca se apresenta em equilíbrio.

Isso mostra que é possível abordar um tema com uma abordagem contextualizada historicamente e que em etapas os alunos constroem um conceito que muitas vezes não é questionado de sua origem, ou muitas vezes, nem contemplado. Outro aspecto da análise das respostas é que para o mesmo item tiveram mais de uma maneira de resolução, como por exemplo, uma abordagem geométrica e uma abordagem trigonométrica.

Após esses estudos teóricos e práticos e suas aplicações, podemos afirmar que Arquimedes desenvolveu uma matemática tanto aplicada, resolvendo problemas da época, quanto uma matemática mais formal e abstrata.

## REFERÊNCIAS

- AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- ALVARENGA, M. L. **O método de exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático**. Disponível em: <<http://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/12006/maurolopesalvarenga.pdf>>. Acesso em: 05 jun. 2015.
- ANDRADE, L.N. **Novas fórmulas utilizadas no cálculo do valor de  $\pi$** . João Pessoa: UFPB, 1999
- ASSIS, A.K.T. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. Canadá: C. Roy Keys Inc., 2008
- BOFF, M.P. **Números irracionais e transcendentos na sala de aula de matemática. Trabalho de Conclusão de Curso**. Foz do Iguaçu: Unioeste, 2008
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC / SEM, 1999.
- FERREIRA, E.S. Nicomede e os três problemas clássicos gregos. **Revista Brasileira de História da Matemática** – vol. 10 n° 20 – pg 193-211
- FIGUEIREDO, D.G. **Números Irracionais e Transcendentos**. Rio de Janeiro: SBM, 2002
- GARBI, G.G. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011

HERNANDES, L.C.; MARTIN, M.E. **Irracionalidade e Transcendência dos números  $\pi$  e  $e$** . Campinas: Imecc-Unicamp, 2007

LACZKOVICH, M. On Lambert's proof of irrationality of  $\pi$ . **American Mathematical Monthly**, 5, 1997, p.439-443

PIMENTEL, J. **O ensino de Geometria por meio de construções geométricas**. Dissertação de mestrado profissional em matemática. UFES, Vitória, 2013

RIVERA, F.O. **Traçados em desenho geométrico**. Rio Grande: FURG, 1986

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos – 8ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.

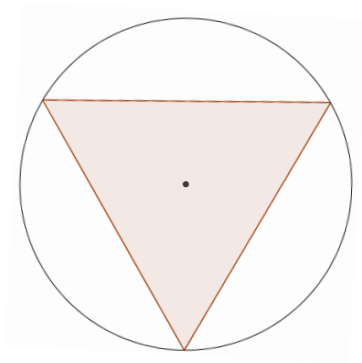
UEL. **Resolução CEPE nº 0230/2009** – Disponível em:  
<[http://www.uel.br/prograd/docs\\_prograd/resolucoes/2009/resolucao\\_230\\_09.pdf](http://www.uel.br/prograd/docs_prograd/resolucoes/2009/resolucao_230_09.pdf)>.  
Acesso em: 25 jan. 2016

## APÊNDICES

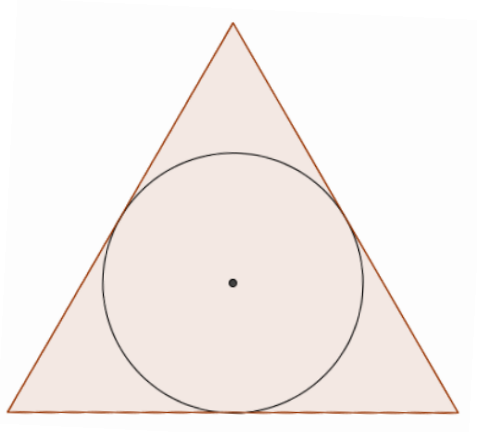
## APÊNDICE A

Atividade: Determinação do número pi

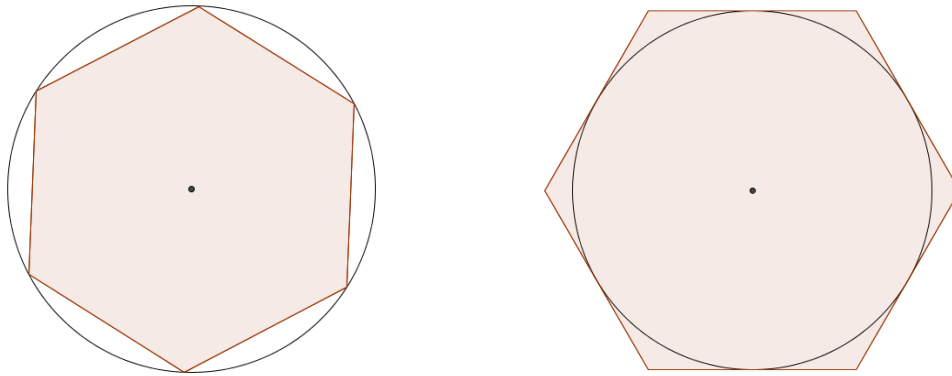
- a) Determine a medida do perímetro do triângulo equilátero inscrito a uma circunferência de raio unitário (Use uma aproximação de 4 casas decimais).



- b) Na figura abaixo, temos um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência de raio unitário. Determine a medida de seu perímetro.



- c) Assim, o comprimento da circunferência que está entre os triângulos inscrito e circunscrito pertence ao intervalo \_\_\_\_\_
- d) Agora, se dobramos o número de lados dos polígonos, ainda na circunferência de raio unitário, qual é a medida do perímetro de cada um deles?



- e) Com os hexágonos (inscrito e circunscrito), o comprimento da circunferência está no intervalo \_\_\_\_\_
- f) Da mesma forma, dobrando novamente o número de lados, determine o perímetro dos polígonos de 12 lados.
- g) Outra vez, dobre os lados, o que acontece quando consideramos polígonos de 24 lados.
- h) O matemático grego Arquimedes (287 – 212 a.C.) em um de seus trabalhos, *A medida do Círculo*, inscreveu e circunscreeveu um polígono de 96 lados em uma circunferência de raio unitário. Quais as medidas que ele obteve do perímetro destes polígonos?
- i) Atualmente, sabemos calcular o comprimento de uma circunferência. Qual é a medida do comprimento de uma circunferência de raio unitário?
- j) Compare esse valor com os resultados do perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados obtido em h).
- k) Arquimedes determinou o valor de  $\pi$ , através da aproximação dos perímetros dos polígonos de 96 lados, inscrito e circunscrito. Qual o erro dos cálculos de aproximação realizados por Arquimedes?

## APÊNDICE B

Atividade: Lei da Alavanca

Vamos realizar algumas situações utilizando uma balança e pesos. Monte as situações conforme os valores das tabelas e responda os itens abaixo.

### a) SITUAÇÃO 1

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
7	1	1	1

- O que aconteceu com a balança?
- Qual explicação podemos dar para esse resultado?
- Para que a balança fique em equilíbrio (horizontal), o que pode ser feito?

### b) SITUAÇÃO 2

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
4	3	4	2

- O que aconteceu com a balança?
- Qual explicação podemos dar para esse resultado?
- Para que a balança fique em equilíbrio (horizontal), o que pode ser feito?

### c) SITUAÇÃO 3

BRAÇO ESQUERDO		BRAÇO DIREITO	
POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS	POSIÇÃO	QUANTIDADE DE PESOS
9	1	3	3

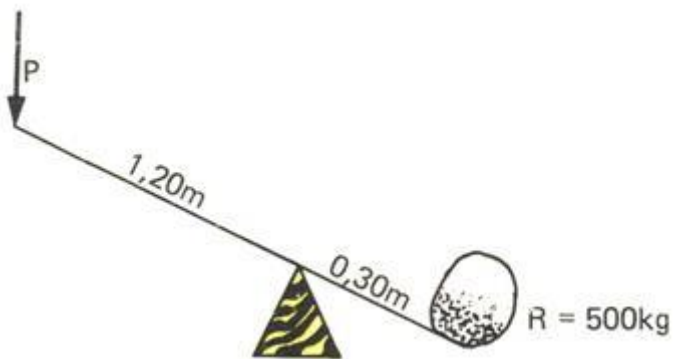
- O que aconteceu com a balança?

- Qual explicação podemos dar para esse resultado?

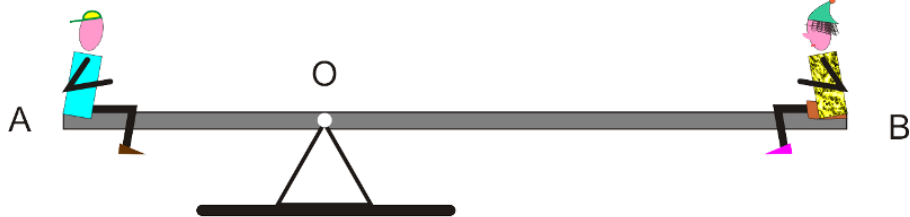
e) A partir dessas situações, explique, com suas palavras, quando que uma balança fica em equilíbrio.

Uma situação prática de equilíbrio é a GANGORRA.

1) Na figura abaixo, uma pedra de 500 kg está em uma extremidade de uma gangorra e sua distância até o ponto de apoio é de 0,30 m. Para que a gangorra fique em equilíbrio, qual deve ser a massa no outro extremo da gangorra, que está 1,20 m afastado do ponto de apoio?



2) Na figura abaixo, a gangorra de 6 metros de comprimento está em equilíbrio. Supondo que a massa da pessoa na posição A seja de 80 kg e a massa da pessoa B, na posição oposta, é 40 kg, qual deverá ser a distância de A ao ponto O?





**ANEXOS**

## ANEXO A

### Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

#### “Trabalho de Conclusão – PROFMAT – Matheus Mota Dias”

Prezado(a) Senhor(a):

Gostaríamos de convidá-lo (a) a participar da pesquisa “**Trabalho de Conclusão – PROFMAT – Matheus Mota Dias**”, realizada no Colégio Sesi. O objetivo da pesquisa é avaliar aspectos históricos de matemática, envolvendo a Lei da Alavanca. A sua participação é muito importante e ela se dará da seguinte forma, realizando as atividades propostas sobre a Lei da Alavanca de Arquimedes. Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária, podendo você: recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Informamos ainda que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade.

Os benefícios esperados são aprendizagem de aspectos históricos e matemáticos sobre a Lei da Alavanca.

Informamos que o(a) senhor(a) não pagará nem será remunerado por sua participação. Garantimos, no entanto, que todas as despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua participação na pesquisa.

Caso você tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos pode nos contatar (**Prof. Matheus Mota Dias, Rua Niterói, 318, ap. 307-A, Centro, Londrina, PR; 3028-4338, 9993-3040, mathematico@gmail.com**), ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Londrina, na Avenida Robert Kock, nº 60, ou no telefone 33712490. Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue a você.

Londrina, \_\_\_\_ de novembro de 2014.

Pesquisador Responsável: Matheus Mota Dias

RG:9.138.742-5      Telefone: 3028-4338 / 9993-3040

EU, \_\_\_\_\_, CPF: \_\_\_\_\_, responsável pelo menor \_\_\_\_\_ tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo que ele (ela) participe **voluntariamente** da pesquisa descrita acima.

Nome do menor: \_\_\_\_\_

Assinatura do menor: \_\_\_\_\_

Assinatura do responsável: \_\_\_\_\_

## ANEXO B

### Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

#### “Trabalho de Conclusão – PROFMAT – Frank Pereira Bortolotti”

Prezado(a) Senhor(a):

Gostaríamos de convidá-lo (a) para participar da pesquisa “**Dissertação – PROFMAT – MATHEUS MOTA DIAS**”, a ser realizada no programa Profmat, UEL. O objetivo da pesquisa é “determinar uma aproximação do número pi por meio do método da exaustão de Arquimedes”. Sua participação é muito importante e ela se daria da seguinte forma: realizando as atividades propostas sobre atividades matemáticas correlatas. Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo o(a) senhor(a): recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos, também, que suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa (ou para esta e futuras pesquisas) e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Esclarecemos ainda, que o(a) senhor(a) não pagará e nem será remunerado(a) por sua participação. Garantimos, no entanto, que todas as despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua participação. Os benefícios esperados são aprendizagem de aspectos históricos do Cálculo diferencial e integral. Quanto aos riscos, **acreditamos que não existem riscos de natureza física ou psíquica**. Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá nos contatar (**Prof. Matheus Mota Dias, Rua Niterói, 318, ap. 307-A, Centro, Londrina, PR; 3028-4338, 9993-3040, email: mathematico@gmail.com**), ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Londrina, situado junto ao LABESC – Laboratório Escola, no Campus Universitário, telefone 3371-5455, email: [cep268@uel.br](mailto:cep268@uel.br).

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida, assinada e entregue ao(à) senhor(a).

Londrina, 09 de outubro de 2014.

Matheus Mota Dias  
**Pesquisador Responsável**  
 RG: 9.138.742-5

\_\_\_\_\_ (Nome Completo), tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em participar **voluntariamente** da pesquisa descrita acima.

Assinatura: \_\_\_\_\_

Data: 03 de novembro de 2014