

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Allan Kardec de Souza Filho

Perspectiva, Geometria e Trigonometria

Rio de Janeiro

2013

Allan Kardec de Souza Filho

Perspectiva, Geometria e Trigonometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Leonardo Tadeu Silveiras Martins

Doutor em Matemática - UFF

Rio de Janeiro

2013

de Souza Filho, Allan Kardec

Perspectiva, Geometria e Trigonometria / Allan Kardec de Souza
Filho - 2013

xx.p

1. Matemática 2. Ensino de Matemática. I.Título.

CDU 536.21

Allan Kardec de Souza Filho

Perspectiva, Geometria e Trigonometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 10 de abril de 2013

BANCA EXAMINADORA

Leonardo Tadeu Silvaes Martins

Doutor em Matemática - UFF

Marcelo Ferreira Farias

Doutor em Matemática - UFRJ

Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Allan Kardec de Souza Filho

Perspectiva, Geometria e Trigonometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 10 de abril de 2013

BANCA EXAMINADORA



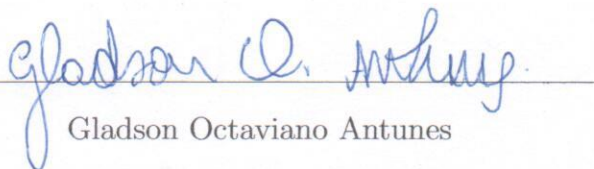
Leonardo Tadeu Silveiras Martins

Doutor em Matemática - UFF



Marcelo Ferreira Farias

Doutor em Matemática - UFRJ



Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Resumo

Nas últimas décadas os aparelhos eletrônicos se desenvolveram em um ritmo acelerado. Inúmeras opções tecnológicas nos oferecem facilidades e entretenimentos de variados tipos. Os efeitos visuais, por exemplo, estão cada vez mais próximos de se confundirem com a realidade. Filmes, jogos, fotografias, ambientes virtuais,... Todo esse processo pode ser interpretado como a necessidade de representação em telas planas de nosso mundo tridimensional. Para isso, uma técnica já antiga na indução de interpretações cerebrais ainda é utilizada: a perspectiva.

Embora seja uma técnica comumente associada ao Estudo das Artes, esse Trabalho de Conclusão de Curso mostra como é possível, com conceitos matemáticos trabalhados no Ensino Médio, interpretar algumas de suas características. A representação de pontos do espaço em telas de projeção é estudada com elementos geométricos e trigonométricos; planos e retas se encontram e geram formas conhecidas dos alunos da Educação Básica. A semelhança de triângulos é utilizada na caracterização da proporcionalidade entre objetos e imagens. Prismas auxiliam na identificação de simetrias e são interpretados por inúmeros pontos de vista. O Ciclo Trigonométrico é trabalhado como uma alternativa na orientação de segmentos de retas.

Todos esses conceitos são desenvolvidos de forma gradativa. A partir deles, é exemplificado como um vértice de uma pirâmide, com coordenadas cartesianas conhecidas, é projetado em uma tela plana. A imagem passa a ser identificada em relação a eixos devidamente escolhidos durante o desenvolvimento.

Uma série de atividades é proposta para caracterização da Fundamentação Teórica. Nelas, alunos do terceiro ano do Ensino Médio são convidados a revisar conceitos amplamente exigidos em Exames Vestibulares além de entenderem melhor como artistas e técnicos trabalham no desenvolvimento dos efeitos visuais.

Uma análise complementar é feita pelo Professor Anderson Stumpf no Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “Multiplicação de Matrizes e Perspectiva”.

Palavras-chave: Perspectiva, Ponto de Fuga, Geometria, Trigonometria, Geogebra, Tecnologia.

Agradecimentos

Aos meus pais, Allan e Yolanda, que acreditaram em mim muito antes de me sentir capaz. Por fazerem com que simples contagem de degraus funcionasse como uma semente de descoberta matemática. Por apoiarem minhas escolhas apesar de contrariados. Por me exemplificarem o infinito diante do amor que sentem.

A minha irmã Anne, com certeza a pessoa mais inteligente que tive a oportunidade de conviver. Por celebrar cada conquista minha como se fosse dela mesma. Por me conhecer como ninguém e me amar assim mesmo.

Aos meus filhos, Alice e Pedro, por serem os melhores educadores oferecidos pela vida. Por me permitirem retribuir, de forma contínua, a gratidão acima expressada a meus pais e irmã. Por mostrarem a relatividade da distância, do tempo e da saudade. Por me lembrarem quem sou, todos os dias, quando amo sem precisar de agenda. Por serem quem são.

A minha Thaís, ninho de meus sonhos. Por servir de inspiração para todo crescimento. Por fazer de cada ausência uma esperança e de cada encontro um para sempre. Por partilhar dissabores e por saborear descobertas. Por me mostrar como é possível ser uma parte do amor e ser tão infinito como ele.

Aos irmãos educadores Alexandre e Paulo por “dividirem o pão” das angústias e das conquistas. Por cada parceria na escola da Vida. Por tornarem nossa profissão uma jornada que merece ser cumprida. Por fazerem de nossa amizade uma das grandes inspirações para tudo isso.

Ao Professor Anderson Stumpf pela parceria em alguns projetos profissionais e ao amigo Anderson Stumpf pelo reconhecimento e respeito em tantos momentos da vida.

Ao Professor Leonardo Silves, por orientar como quem mostra caminhos e caminha do lado. Por mostrar pegadas além de deixá-las. Por ouvir e por escutar.

Aos meus professores escolares e universitários, por me ensinaram o que fazer e não fazer. Por não saberem o quanto são importantes na minha vida. Por cada conhecimento estimulado, por cada saber transformador, mas, principalmente, agradeço

por todas as vezes que despertaram em mim o apetite.

Aos meus colegas de todas as salas de aula, cúmplices do mundo escolar. Por encenarem comigo cada tragédia, cada romance, cada comédia,... desse espetáculo chamado vida.

Aos meus alunos de ontem e amigos de sempre. Por despertarem em mim uma vocação e por me ensinarem, a cada momento, como torná-la suficiente.

A todos que eu não soube reconhecer a importância.

A Deus, que já foi citado em todo esse agradecimento.

Sumário

1	Introdução	7
1.1	A arte de ver	7
1.2	Representações tridimensionais	13
1.3	Objetivos deste trabalho	19
2	Fundamentação Teórica	20
2.1	Definições	20
2.2	Geometria em Perspectiva	23
2.3	Trigonometria em perspectiva	28
2.4	Em perspectiva	34
2.5	Outra visão	42
3	Proposta de Atividade	45
4	Palavras finais	67
	Bibliografia	68
	Recursos multimeios utilizados	68

1 Introdução

1.1 A arte de ver

De todos os lados informações estão disponíveis. Imagens, sons, sabores, odores, texturas,...¹ Características de um Universo que se mostra e não depende das percepções humanas. Sinais de uma Natureza repleta de revelações alcançáveis e expostas sem restrições de qualquer preferência. Paralelamente, cada ser humano possui uma curiosidade nata repleta de motivações e vontades para buscar entendimentos sobre o contexto de sua existência. Uma necessidade de conhecer aquilo que o precede e de confirmar o prazer² que sente durante esse processo.

Receber e interpretar informações como quem interage com o meio externo e se descobre integrante do mesmo!

Comparar como quem associa elementos e deslumbra diferenças e igualdades!

Confrontar impressões com os demais e assim notar a existência de inúmeros pontos de vista!

Memorizar e partilhar ganhando maturidade intelectual para repetir os processos acima citados e chegar a novas conclusões!

Mesmo entre os homens primitivos, já era a inteligência humana dotada de uma faculdade especial: o senso numérico. Esta faculdade permite reconhecer, de forma puramente visual, se uma reunião de objetos foi aumentada ou diminuída, isto é, se sofreu modificações numéricas.

Não se deve confundir senso numérico com a faculdade de contar. Só a inteligência humana pode atingir o grau de abstração capaz de permitir a conta, ao passo que o sentido do número é observado entre muitos animais. Alguns pássaros, por exemplo, na visualização dos ovos que deixam no ninho, podem distinguir dois de três. Certas vespas

¹“Os cinco sentidos são os guias da alma.” Leonardo da Vinci [7]

²“Todos os homens têm, por natureza, desejo de conhecer: uma prova disso é o prazer das sensações. (...) É da memória que deriva aos homens a experiência: pois as recordações repetidas da mesma coisa produzem o efeito de uma única experiência.” Aristóteles [6]

chegam a diferenciar cinco e dez.

Da semente visual do senso numérico, toda uma ciência lógica foi desenvolvida num processo gradativo de evolução. As formas geométricas e os números passaram a interagir cada vez mais. Crescia assim uma aliança responsável pelo desenvolvimento da Matemática, pois além de representar o visual passou a interpretar o cosmos e suas interações.

Informações estritamente sensitivas foram transformadas em deduções fundamentais para o progresso humano e trouxeram um entendimento melhor do mundo real.

Mas, o que é considerado real? Aquilo que é visto? O mecanismo do processo visual já é bastante conhecido pelos especialistas nos dias de hoje. Vários aparelhos são utilizados para ampliação de nossas capacidades, como telescópios e microscópios. Alguns atendem nossas necessidades, como óculos e lentes de correção. Outros são capazes de registrar imagens como máquinas fotográficas e de filmagem. Intervenções médicas são capazes de eliminar ou atenuar patologias. Mas, ainda somos vítimas de ilusões causadas por falsas interpretações cerebrais.

Por exemplo, cômodos possuem dimensões aparentemente ampliadas devido à existência de espelhos. Não é raro encontrarmos lojas com limitação de medidas se valendo dessa técnica na valorização de seus produtos e espaços.

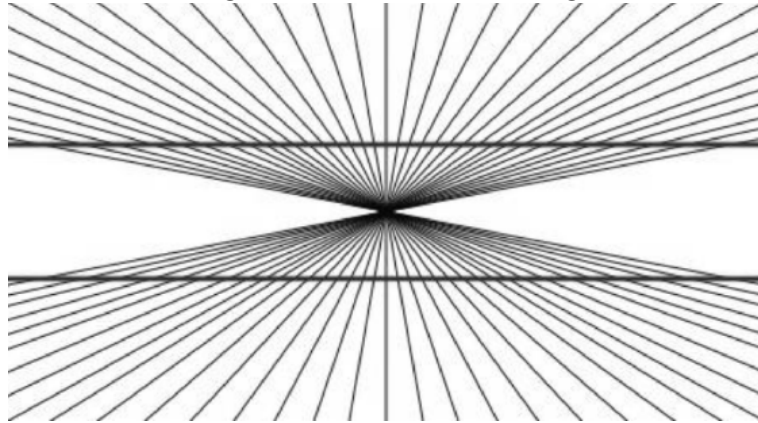
As chamadas miragens do deserto são, inicialmente, causadas pela incapacidade de percebermos que raios de luz se desviam ao cruzar camadas de ar com temperaturas variáveis. Logo, interpretamos que o azul do céu se localiza em uma duna de areia, isso é sugestivo para quem busca água. Cores, movimentos, texturas, formas e outras características visuais se interagem e nos levam à grandes ilusões interpretativas.

O cérebro extrai características constantes dos objetos a partir das informações que recebe. Embora a imagem na retina seja a fonte principal de dados no processo de visão, é na interpretação de um suposto ambiente tridimensional é na interação entre os elementos visualizados que vários tipos de ilusões de distância e profundidade acontecem.

Então, ver consiste em completar o que está acessível ao aparelho ocular com aquilo que o cérebro julga “estar vendo”. A visão não é a imagem na retina. É uma interpretação criada no cérebro, baseado na informação sobre as características encontradas e nas interpretações sobre o que está sendo visto.

Um exemplo clássico são as chamadas ilusões de ótica.

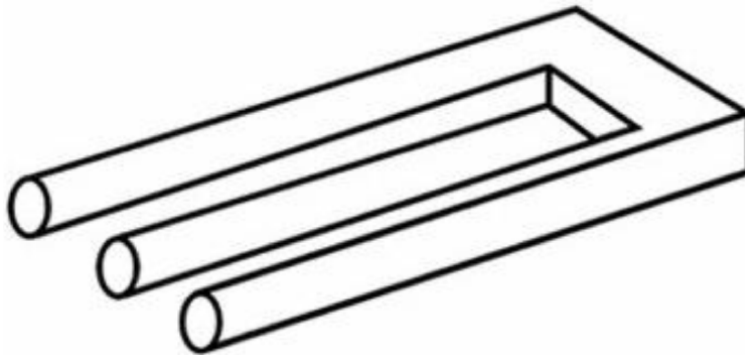
Figura 1.1: Ilusão de Hering



Fonte: Wikipedia³

No desenho acima, temos a interpretação de que existem duas linhas não paralelas. Contudo, com auxílio de réguas, podemos confirmar que ambas são horizontais. Esse caso é conhecido como ilusão de Hering.

Figura 1.2: Blivet ou Poiuyt



Fonte: Wikipedia⁴

Nesse outro exemplo, que recebe o nome de blivet ou poiuyt, temos a impressão de que existem três pontas cilíndricas de um lado que se transformam, misteriosamente, em uma base retangular no outro.

³Disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/Hering_illusion. Acesso em 09/04/2013.

⁴Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/Blivet>. Acesso em 09/04/2013.

Figura 1.3: M.C.Escher



Fonte: Wikipedia⁵

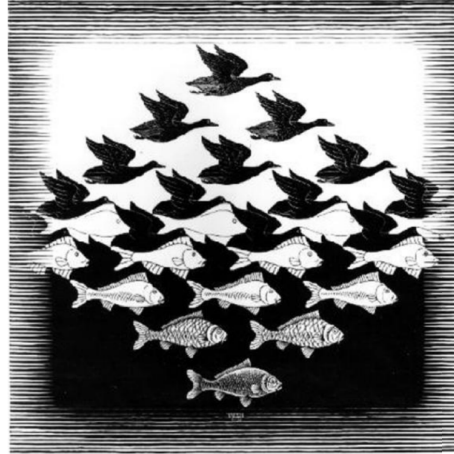
Uma das principais referências na arte de induzir ilusões visuais é o artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher, (1898-1972). Notável pelas suas xilogravuras, litografias e meios-tons.

Contudo, ficou famoso pela capacidade de representar construções impossíveis, preenchimento regular do plano, explorações do infinito e as metamorfoses: padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente para formas completamente diferentes.

Foi numa visita à Alhambra, na Espanha, que o artista conheceu e se encantou pelos mosaicos de construção árabe. Encantado pela forma como cada figura se entrelaçava a outra e se repetia, formando belos padrões geométricos, teve a inspiração para os seus trabalhos mais famosos, que consistiam no preenchimento regular do plano, normalmente utilizando imagens geométricas e não figurativas.

⁵Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/File:EscherSelf1929.jpg>. Acesso em 09/04/2013.

Figura 1.4: “Sky and Water I”, de M. C. Escher

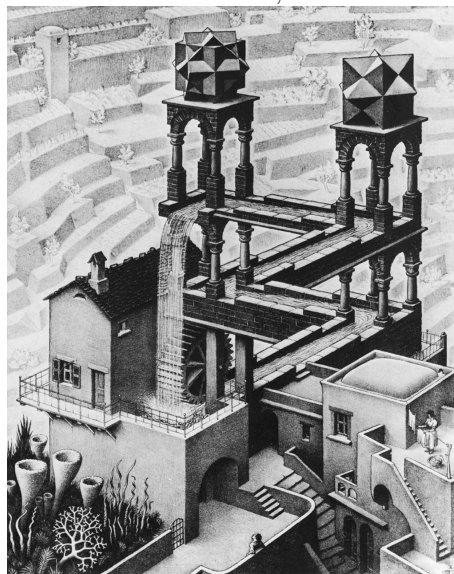


Fonte: Sítio Oficial de M.C.Escher⁶

A partir de uma malha de polígonos, regulares ou não, fazia surgir figuras de homens, peixes, aves ou lagartos. Tudo representado num plano bidimensional.

Também gostava de representar o espaço, que é tridimensional, num plano bidimensional, como a folha de papel. Com isto ele criava figuras impossíveis, representações distorcidas e paradoxais. Posteriormente foi considerado um grande matemático geométrico⁷.

Figura 1.5: “Waterfall”, de M. C. Escher



Fonte: Sítio Oficial de M.C.Escher⁸

⁶Disponível em <http://www.mcescher.com>. Acesso em 09/04/2013.

⁷“O espaço é o objeto que o geômetra deve estudar.” Poincaré[8]

⁸Disponível em <http://www.mcescher.com>. Acesso em 09/04/2013.

Esta é uma das suas pinturas mais famosas, a chamada “Waterfall” (“Cas-cata”) de Escher. Induz a confusa interpretação sobre o sentido real do movimento da água. Em alguns pontos a água aparenta subir, em contradição com a sensação trazida por outros pontos do desenho.

Na Arte Fotográfica também existem inúmeros exemplos de como iludir usando técnicas relativamente simples. Registro de imagens com distâncias distintas a lentes fotográficas podem induzir falsas interpretações.

Figura 1.6: Quem é maior, o Professor Anderson Stumpf ou a pirâmide?



Fonte: Acervo pessoal de Anderson Stumpf

Figura 1.7: Quando os filhos do Professor Allan Filho crescem demais!



Fonte: Acervo pessoal de Allan Kardec de Souza Filho

1.2 Representações tridimensionais

Na antiguidade egípcia as pinturas e desenhos normalmente utilizavam uma escala para objetos e personagens de acordo com seu valor espiritual ou temático logo, o Faraó era representado maior do que os seus súditos. Além disso, os elementos retratados tinham a forma mais fácil de reconhecimento, ou seja, eram desenhados de perfil.

Figura 1.8: Perspectiva na Antiguidade Egípcia



Fonte: “Wikimedia Commons”⁹

Durante a Idade Média, as tentativas de representações tridimensionais foram pouco precisas. Os objetos eram justapostos sem considerar suas relações espaciais.

⁹Disponível em http://commons.wikimedia.org/wiki/File:BD_Hunefer.jpg. Acesso em 09/04/2013.

Figura 1.9: “Reconstrução do Templo de Jerusalém”, de William of Tyre



Fonte: Wikipedia¹⁰

A pintura anterior, “Reconstrução do Templo de Jerusalém” de William of Tyre do século XIII, tem as arestas paralelas dos objetos e as representações humanas ainda sem o efeito de profundidade.

Durante o Renascimento surgiu, oficialmente, a perspectiva, que passou a ser considerada uma técnica de representação gráfica. O espaço passa a ser ilimitado e tridimensional. Logo, exige alguns truques ilusionistas quando se deseja representá-lo em um plano bidimensional.

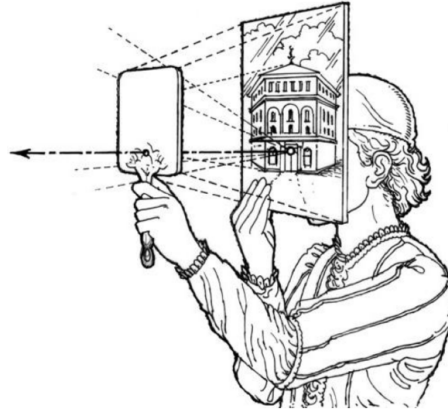
O arquiteto florentino Filippo Brunelleschi (1377-1446) é considerado o precursor da aplicação de princípios matemáticos na simulação da profundidade. Representou objetos em telas planas com técnicas que simulam o tridimensional com aparentes distâncias e posições. Essa forma de representação ficou conhecida como perspectiva.

Brunelleschi realizou na praça da Catedral de Florença, na Itália, um desenho sobre uma pequena tela. O desenho era a visão urbana de um espectador que estivesse à porta da Catedral. Depois, com o auxílio de um espelho, olhou através de um buraco feito

¹⁰Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Reconstruction_of_the_temple_of_Jerusalem.jpg. Acesso em 09/04/2013.

no centro da tela. Movimentando o espelho devidamente, conseguiu coincidir a imagem do desenho refletida pelo espelho com a realidade visualizada.

Figura 1.10: Brunelleschi e espelho



Fonte: MaItaly¹¹

Deduziu, a partir dessa técnica, a representação um objeto tridimensional a partir de um ponto - o ponto de fuga. Todas as linhas de projeção da pintura convergiam para esse ponto.

Figura 1.11: “Ponto de Fuga”, de Ivan Cabral



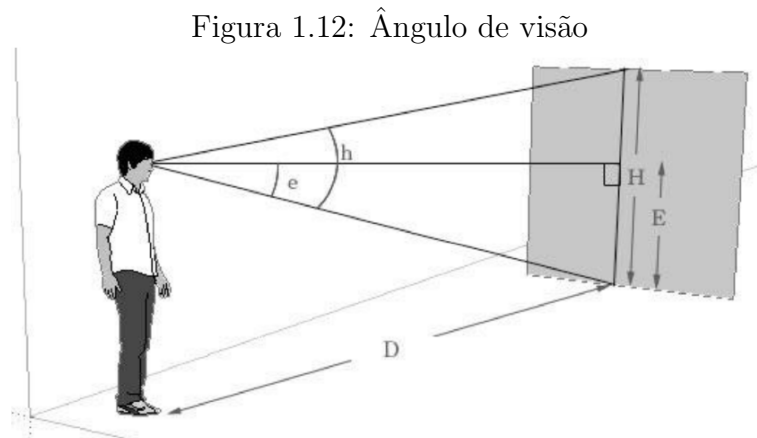
Fonte: Sorriso pensante¹²

¹¹Disponível em <http://maitaly.wordpress.com/2011/04/28/brunelleschi-and-the-re-discovery-of-linear-perspective/>. Acesso em 09/04/2013.

¹²Disponível em <http://www.ivancabral.com/2012/02/charge-do-dia-ponto-de-fuga.html>. Acesso em 09/04/2013.

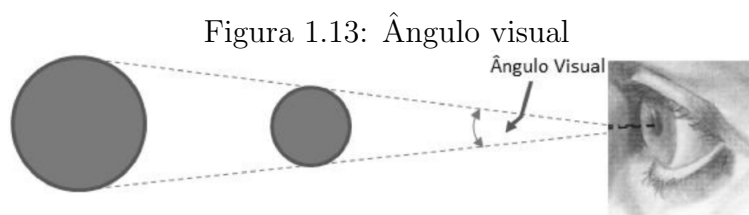
Os elementos localizados entre linhas de projeção são interpretados pelo tamanho. Os menores representam os mais distantes.

A geometria criada por Euclides (360 a.C.-295 a.C), no que diz respeito à perspectiva, tinha por base a questão do ângulo visual, afirmando que um objeto tinha um tamanho aparente a partir do ângulo sob o qual era observado. Assim, um objeto era duas vezes maior quando visto por um ângulo duas vezes maior.



Fonte: Math Central¹³

Atentou para a questão do comprimento e não se limitou apenas com o estudo do ângulo visual. Assim, demonstrou que o tamanho aparente de um objeto é inversamente proporcional à sua distância do olho.



O estudo da perspectiva contribuiu mais decisivamente para os físicos e para os pintores¹⁴.

A tridimensionalidade na pintura se tornou um conjunto de especulações e técnicas com a finalidade da representação racional do espaço. Em uma dessas técnicas,

¹³Disponível em <http://mathcentral.uregina.ca/qq/database/qq.09.08/j/Jolie1.html>. Acesso em 09/04/2013.

¹⁴“A prática deve sempre ser construída sobre a teoria, para a qual a perspectiva é o sinal e o portal de entrada, e sem perspectiva nada pode ser feito bem nos campos da pintura.”Leonardo da Vinci[9]

famosa pela utilização de Albrecht Dürer (1471-1528)¹⁵, o pintor visualizava o objeto a ser desenhado através de um quadrado (janela) de vidro, por sua vez quadriculado. A observação era a partir de um ponto fixo (ponto de vista) para não haver distorção da imagem.

Figura 1.14: “Artista e Mulher reclinada”, de Albrecht Dürer



Fonte: Sítio do The Metropolitan Museum of Art¹⁶

Uma técnica equivalente foi criada para forçar o observador a se colocar sob um determinado ponto de vista e ter, em qualquer outra posição, a imagem deformada e incompreensível. Este foi um método descrito nos estudos de Piero della Francesca (1415-1492) sobre perspectiva. Recebeu o nome de anamorfose e foi muito utilizada na pintura mural dos séculos XVI e XVII para criar ilusões de ótica na pintura sobre superfícies curvas, como as abóbadas das igrejas.

¹⁵“...desde que a Geometria é o verdadeiro fundamento de toda a pintura...decidi ensinar os seus rudimentos e princípios a todos os iniciados na arte...Espero que o meu sistema não seja criticado...porque pode beneficiar não só os pintores mas também ourives, escultores, pedreiros, carpinteiros e todos aqueles que trabalham com a medida.”Dürer [10]

¹⁶Disponível em <http://www.metmuseum.org/Collections/search-the-collections/90039053>. Acesso em 09/04/2013.

Figura 1.15: Abóbada da Igreja de Santo Inácio, em Roma, por Andrea Pozzo, 1685

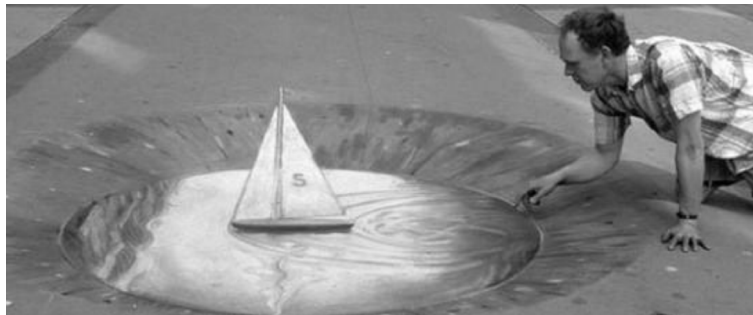


Fonte: Wikipedia¹⁷

Essa técnica é muito utilizada nos dias atuais pelo artista inglês Julian Beever que cria desenhos tridimensionais com giz.

Seus desenhos são minuciosamente projetados e milimetricamente executados. Em média, o artista leva cerca de três dias para completar as obras maiores.

Figura 1.16: Julian Beever e um dos seus desenhos feitos em uma rua plana.



Fonte: Sítio oficial de Julian Beever¹⁸

A perspectiva e suas técnicas continuaram evoluindo ao longo dos anos. Nos dias atuais são muito utilizadas por programadores de jogos ou desenhistas de animação. Objetos tridimensionais são projetados em telas, neste caso, monitores digitais.

¹⁷Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sant%27Ignazio_-_affresco_soffitto_-antmoose.jpg. Acesso em 09/04/2013.

¹⁸Disponível em <http://www.julianbeever.net/>. Acesso em 09/04/2013.

Figura 1.17: Tela do Jogo Sonic, SEGA Corporation



Figura 1.18: Cenário do Filme de Animação Toy Story, Pixar Animation Studios



1.3 Objetivos deste trabalho

Por mais que o conceito de perspectiva esteja presente em desenhos ou fotografias e por mais que sejamos capazes de percebê-lo e interpretá-lo, nem sempre valorizamos os conceitos matemáticas em torno do processo.

O objetivo desse trabalho é apresentar uma análise matemática e um programa de atividades que farão alunos e professores utilizarem as habilidades adquiridas em geometria e trigonometria para explorar o problema da representação em perspectiva¹⁹.

Uma abordagem equivalente está no trabalho “Multiplicação de Matrizes e Perspectiva” do professor Anderson Stumpf que, por meio de outras ferramentas matemáticas, apresenta uma visão complementar sobre o mesmo tema.

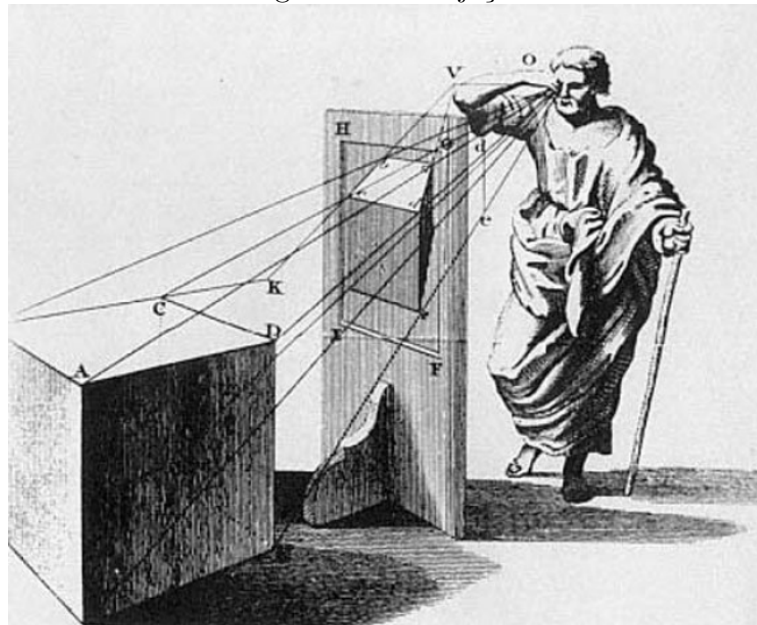
¹⁹“Por toda a parte, existe Geometria” Platão[11]

2 Fundamentação Teórica

2.1 Definições

Projetar pode ser caracterizado como a visualização de objetos tridimensionais em planos. Uma maneira de exemplificar isso é colocar uma tela retangular entre um observador e um objeto visualizado.

Figura 2.1: Projeção



Chamaremos o ponto no qual se localiza o olho ou a lente do observador de *centro de observação* e cada uma das retas que ligam o centro de observação e o objeto de *reta projetante* ou simplesmente *projetante*.

Cada projetante encontra a tela em um ponto, conhecido como *imagem*, de forma que cada ponto do objeto original tem uma única imagem na tela, contudo, não podemos garantir o contrário. Algumas imagens podem resultar de dois ou mais pontos distintos no objeto original. Nesse caso, os dois pontos definem uma reta ao qual pertence o centro de observação.

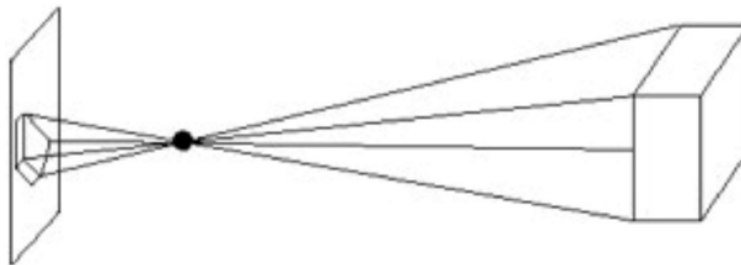
A projeção de todos os pontos do objeto gera a imagem projetada. O domínio da técnica de projeção, ainda que feita de forma intuitiva pelo artista, é o requisito

necessário à criação de desenhos bidimensionais capazes de induzir “interpretações tridimensionais”.

No desenho anterior temos um cubo, o poliedro regular de oito vértices, seis faces quadradas e doze arestas. A projeção dos oito vértices determina oito pontos, que, por sua vez, são vértices de seis quadriláteros no plano; cada um destes quadriláteros representa a projeção de uma face do cubo

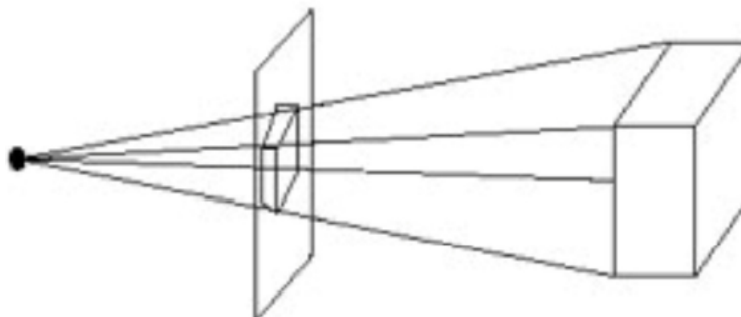
Quando o centro de observação encontra-se entre o plano de projeção e o objeto temos uma situação mais fiel ao que acontece fisicamente numa máquina fotográfica ou no processo visual humano. Nesse caso a imagem formada é invertida.

Figura 2.2: Câmera ou olho humano



Caso o plano de projeção se encontre entre o centro de observação e o objeto, forma-se uma imagem com a mesma orientação do objeto.

Figura 2.3: Simulação de projeção

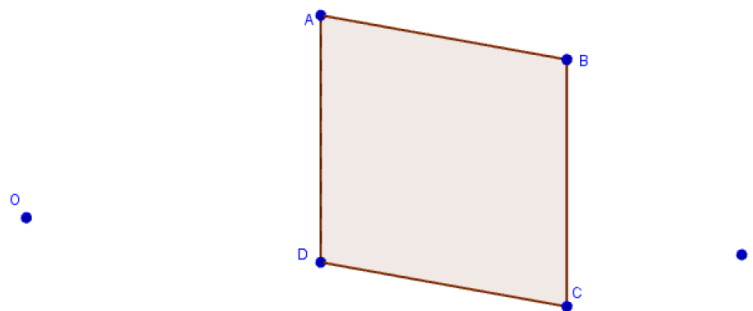


Esse caso pode representar a situação onde uma pessoa, à frente de um monitor de vídeo, observa uma imagem que, interpretada pelo cérebro, aparenta um objeto atrás do vídeo.

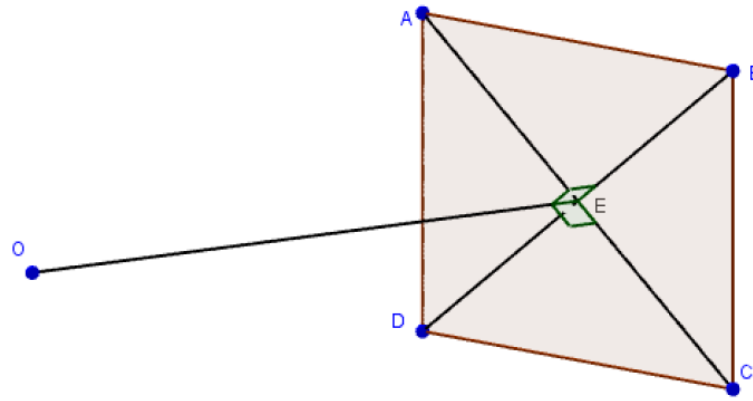


Para fins de simplificação das situações possíveis, escolheremos esse último caso para análise e representaremos um ponto genérico do objeto observado por P , ao qual chamaremos de *ponto objeto*. A análise desse ponto servirá de base para a interpretação de objetos mais complexos.

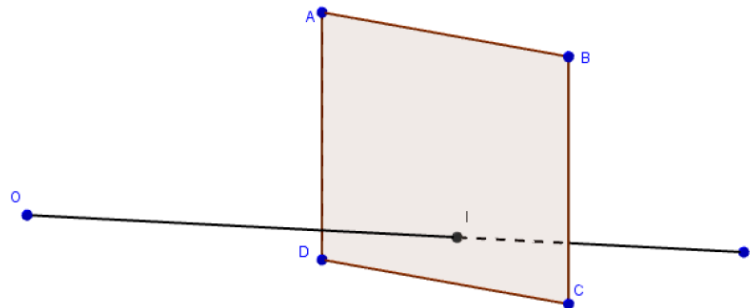
Seja um plano de projeção π colocado entre o centro de observação O e o ponto objeto P . Por definição, este plano é ilimitado, representando assim uma situação teórica inexistente em problemas práticos de projeção, na qual estaremos restritos a uma tela.



Chamaremos precisamente de *tela* um retângulo $ABCD$ contido no plano de projeção de tal forma que a projeção ortogonal de O sobre π coincida com o centro E do retângulo, isto é, o encontro de suas diagonais.



A reta projetante é determinada pelos pontos O e P e intersecta o plano de projeção no ponto imagem I , que é a projeção, propriamente dita do ponto objeto P .



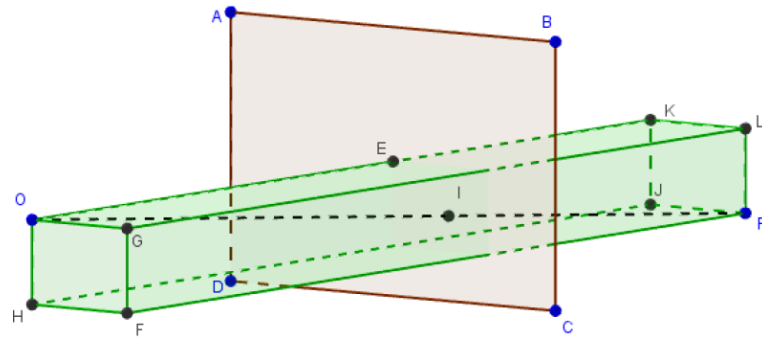
Nosso objetivo neste trabalho é construir um ferramental matemático que permita localizar com precisão o ponto imagem I a partir do conhecimento da posição dos pontos de observação O , objeto P e do plano de projeção π (ou, tela de projeção $ABCD$).

2.2 Geometria em Perspectiva¹

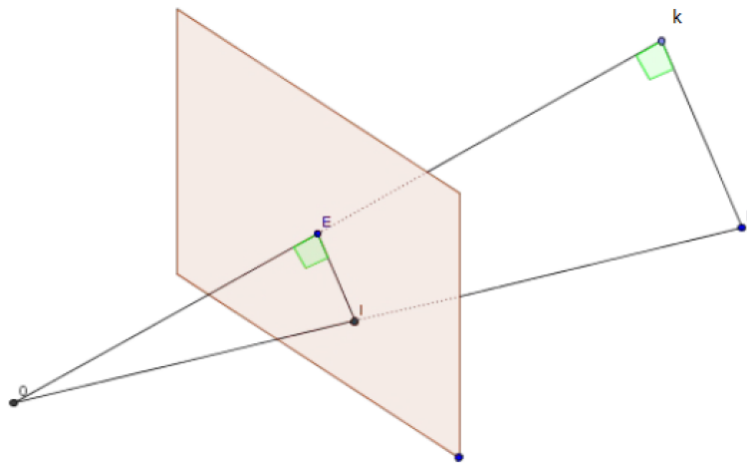
Neste texto, denotaremos por XY um segmento de extremos nos pontos X e Y e por \overline{XY} a medida deste segmento, relativa a uma unidade fixada.

Considere o paralelepípedo reto-retângulo (isto é, no qual todas as faces são retangulares) construído de forma que O e P sejam diagonalmente opostos e todas as faces sejam paralelas ou perpendiculares à tela de projeção.

¹“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.” Jacques Bernoulli



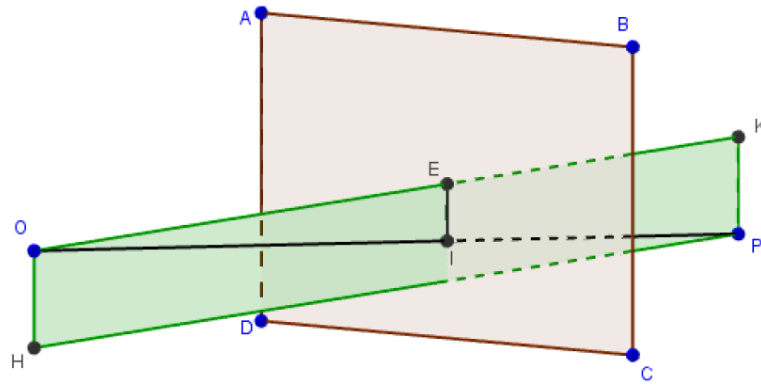
O ponto E , como já foi citado, é a projeção ortogonal do ponto O no plano de projeção, logo, o segmento EI é perpendicular ao segmento OE . O segmento KP é a diagonal da face $KLPJ$ e, como o paralelepípedo é reto-retângulo, o segmento KP é perpendicular ao segmento OK . Sendo assim, os triângulos ΔOKP e ΔOEI são semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos.



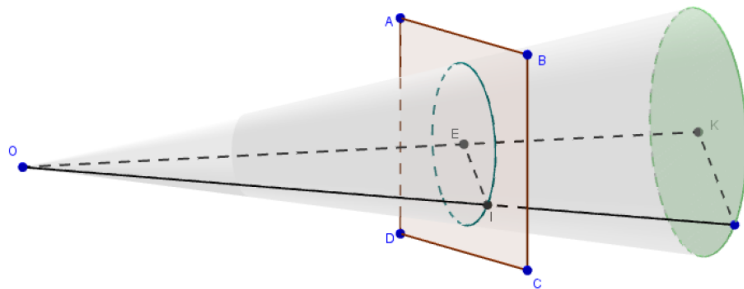
Podemos encontrar a medida \overline{EI} do segmento EI utilizando a proporcionalidade entre os segmentos.

$$\frac{\overline{EI}}{\overline{KP}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OK}} \therefore \overline{EI} = \frac{\overline{OE} \cdot \overline{KP}}{\overline{OK}}.$$

Observe que essa construção nem sempre é possível, pois, caso o ponto P esteja no mesmo plano vertical ou horizontal que passa por O , o paralelepípedo fica indefinido. O retângulo $OKPH$, de lados paralelos ou perpendiculares à tela de projeção e com pontos O e P diagonalmente opostos garante a semelhança, pois os triângulos ΔOKP e ΔOEI possuem os mesmos ângulos. Tal procedimento é equivalente ao anterior e fornece a mesma relação utilizada na determinação de \overline{EI} .



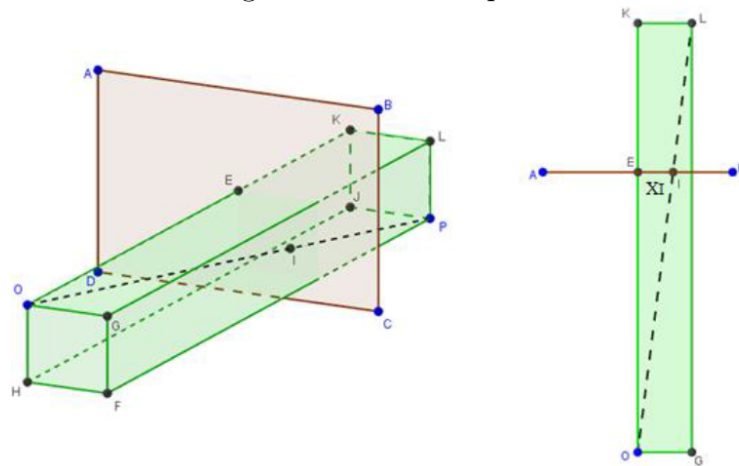
Mas esta forma de análise não atende inteiramente aos nossos objetivos; não podemos precisar a localização do ponto I simplesmente pela distância \overline{EI} . Traçando em π a circunferência de centro E e raio encontraremos infinitos pontos imagens com a mesma distância \overline{EI} a E .



Para saber quais dos pontos da circunferência corresponderia ao ponto imagem I que deveríamos escolher, ficamos na dependência de uma situação real, de maquetes ilustrativas ou de representações gráficas feitas com programas de Geometria Dinâmica. Contudo, esses artifícios nem sempre estão acessíveis, o que dificulta o processo.

Precisamos de um novo processo que forneça, de forma precisa e sem a necessidade de escolhas, a localização do ponto imagem. O ponto imagem I é um ponto qualquer de um plano dado (o plano π), portanto é coerente pensar que sua localização deva ser determinada por pelo duas informações posicionais numéricas independentes (a discussão anterior nos mostrou que apenas uma é insuficiente.). Com essa intenção, vamos estudar as chamadas *vistas de projeção*. Funcionam como se olhasse-mos de diferentes posições a mesma situação, buscando assim mais de uma informação que nos leve à localização do ponto.

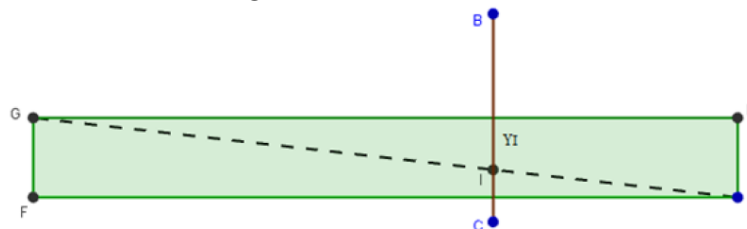
Figura 2.4: Vista superior



Pela *vista superior*, acima exemplificada, podemos analisar o triângulo $\triangle OKL$ retângulo em K . A hipotenusa OL encontra o plano de projeção em um ponto que dista do segmento OK a mesma distância que o ponto I dista da face $OHJK$. Vamos chamar essa distância de X_I .

$$\frac{X_I}{KL} = \frac{OE}{OK} \therefore X_I = \frac{KL \cdot OE}{OK}.$$

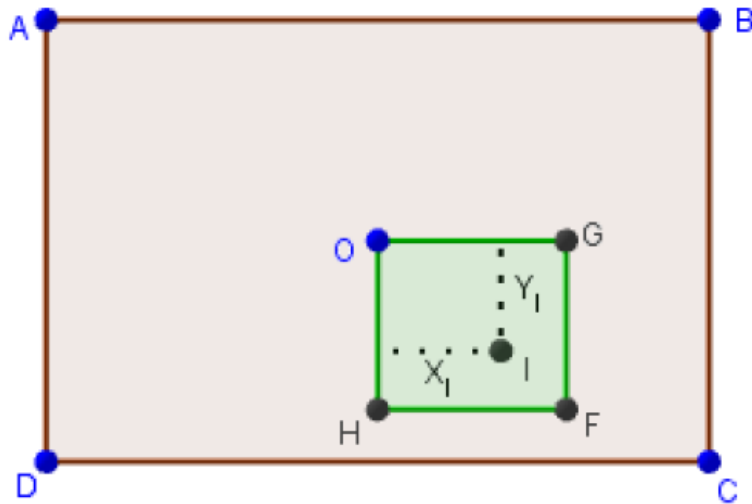
Figura 2.5: Vista lateral



A *vista lateral* acima permite, de forma equivalente à anterior, a análise do triângulo $\triangle GLP$ retângulo em L . A hipotenusa GP encontra o plano de projeção em um ponto que dista do segmento GL a mesma distância que o ponto I dista da face $OGLK$. Vamos chamar essa distância de Y_I .

$$\frac{Y_I}{KJ} = \frac{OE}{OK} \therefore Y_I = \frac{KJ \cdot OE}{OK}.$$

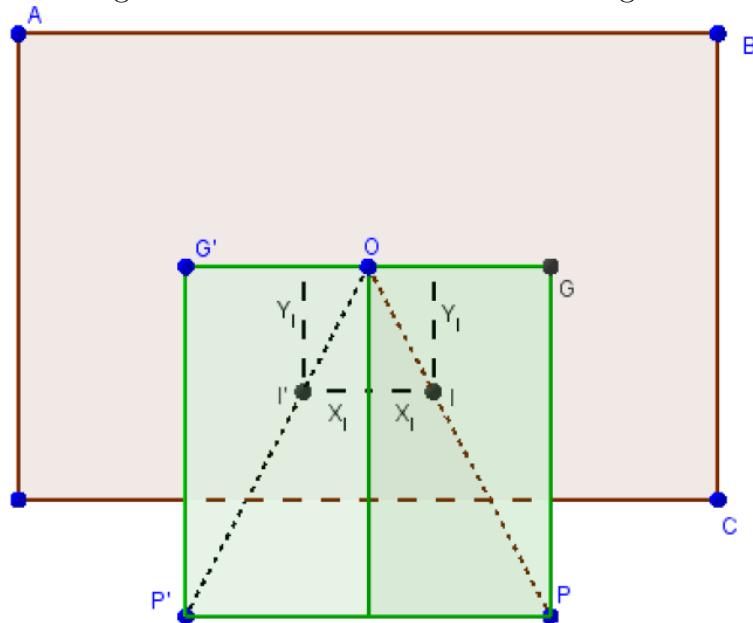
Figura 2.6: Vista frontal



A localização do ponto imagem passa a ser determinada por duas medidas, X_I e Y_I , que podem ser definidas, respectivamente, as *medidas das projeções horizontal e vertical* do ponto imagem I . Essas medidas das projeções são facilmente identificadas na vista frontal acima.

Considere agora um novo ponto objeto P' , simétrico ao ponto objeto original P em relação à face $OKJH$ do paralelepípedo. Repetindo o processo para P' encontramos as medidas das projeções do ponto Imagem I' .

Figura 2.7: Vista frontal com duas imagens



A repetição do processo para determinação das medidas das projeções de I' mostram que as projeções se repetem, isto é, I e I' possuem as mesmas medidas das

projeções horizontal e vertical:

$$\frac{X_{I'}}{\overline{KL'}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OK}} \therefore \overline{X_{I'}} = \frac{\overline{KL'} \cdot \overline{OE}}{\overline{OK}}.$$

Como $\overline{KL'} = \overline{KL}$, temos $X_{I'} = X_I$.

$$\frac{Y_{I'}}{\overline{KJ'}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OK}} \therefore \overline{Y_{I'}} = \frac{\overline{KJ'} \cdot \overline{OE}}{\overline{OK}}.$$

Como $\overline{KJ'} = \overline{KJ}$, temos $Y_{I'} = Y_I$.

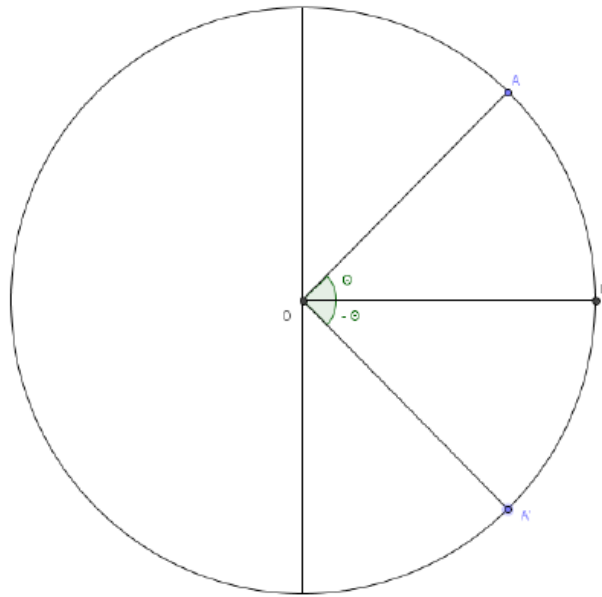
Sendo assim, para um ponto objeto escolhido P , mais baixo do que o ponto O e não localizado no plano vertical que passa por O e é perpendicular ao plano de projeção, sempre teremos um ponto objeto P' com imagem I' de mesmas medidas das projeções que I . Ou seja, a simetria em relação à face $OKJH$ faz com que I e I' tenham as mesmas medidas das projeções X_I e Y_I .

Precisamos distinguir segmentos com orientações distintas. Mas como, utilizando elementos geométricos, conseguiremos diferenciar pontos simétricos em relação à face $OHJK$?

Uma forma eficiente de diferenciá-los é a orientação trigonométrica.

2.3 Trigonometria em perspectiva

Na trigonometria, acrescentamos às medidas dos ângulos um sinal, que corresponde ao “sentido” com que o arco descrito pelo ângulo é percorrido no círculo. Usualmente, ângulos com sinal positivo representam percursos no sentido anti-horário, e ângulos negativos no sentido oposto.

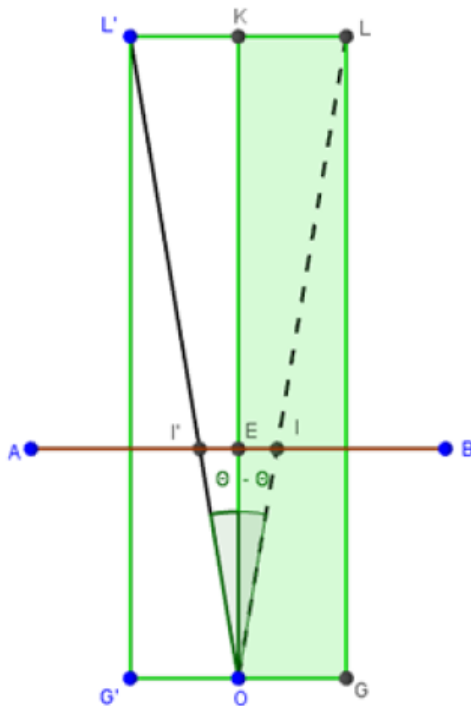


$$\widehat{BOA} = \theta$$

$$e$$

$$\widehat{BOA'} = -\theta$$

Vamos retomar a análise da Vista Superior, com a representação das duas imagens I e I' equidistantes do centro E da tela de projeção.

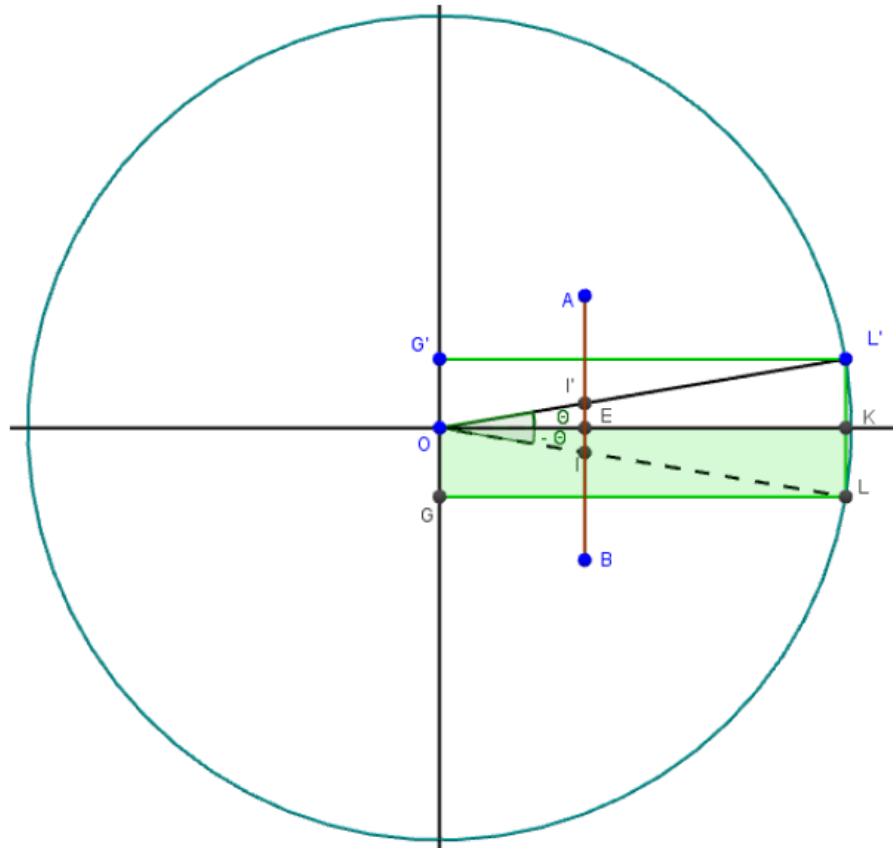


$$\widehat{L'OK} = \theta$$

$$e$$

$$\widehat{KOL} = -\theta$$

Redesenhando com a inclusão do círculo trigonométrico temos



Dessa forma, o cálculo das projeções $X_{I'}$ e X_I , pode ser feito a partir da tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

Então, no triângulo $\Delta OKL'$ temos:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\overline{KL'}}{\overline{OK}} = \frac{X_{I'}}{\overline{OE}} \therefore X_{I'} = \overline{OE} \cdot \operatorname{tg}(\theta).$$

No triângulo ΔOKL temos:

$$\operatorname{tg}(-\theta) = \frac{\overline{KL}}{\overline{OK}} = \frac{X_I}{\overline{OE}} \therefore X_I = \overline{OE} \cdot \operatorname{tg}(-\theta).$$

Como, pelos conhecimentos trigonométricos temos:

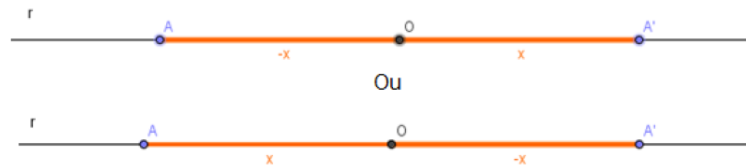
$$\operatorname{tg}(\theta) = -\operatorname{tg}(-\theta),$$

podemos concluir

$$X_{I'} = \overline{OE} \cdot \operatorname{tg}(-\theta) = -\overline{OE} \cdot \operatorname{tg}(\theta) = X_I \therefore X_{I'} = X_I.$$

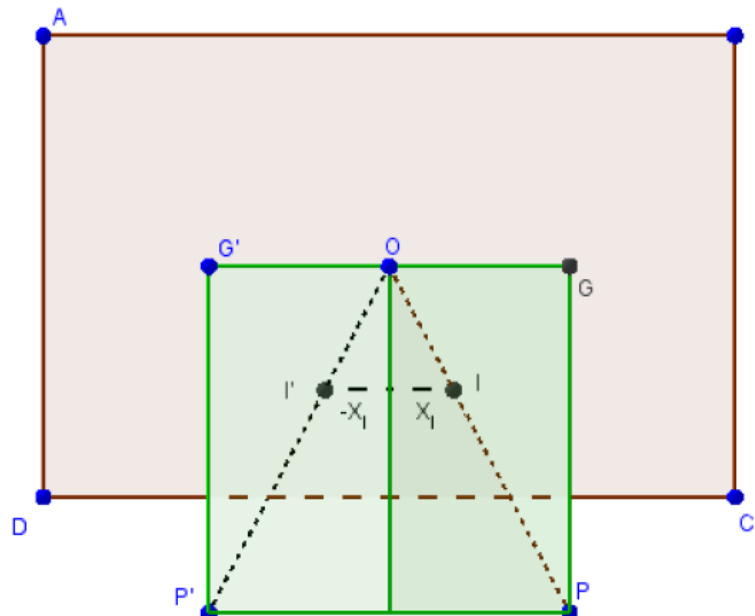
Vimos, pela trigonometria, o significado do sinal na orientação de ângulos, mas qual o significado do sinal na orientação de segmentos?

Seja uma reta r e um ponto O qualquer pertencente a mesma. A partir desse ponto podemos apoiar sobre a reta dois segmentos de mesmo tamanho mas para lados opostos encontrando assim os pontos A e A' . Esses pontos são caracterizados como simétricos em relação a O . A utilização do sinal na orientação de segmentos nos permite diferenciá-los apesar de terem o mesmo tamanho. Caso um deles seja considerado positivo o outro, por estar oposto, recebe o sinal negativo.



Dessa forma podemos dizer que as projeções de I e I' possuem a mesma medida em valor absoluto, mas são diferenciadas pelo sinal, devido à orientação que possuem em relação à face $OKJH$. Caso escolhamos um dos sentidos como positivo o outro passa a ser o negativo.²

Figura 2.8: Vista frontal com projeções orientadas

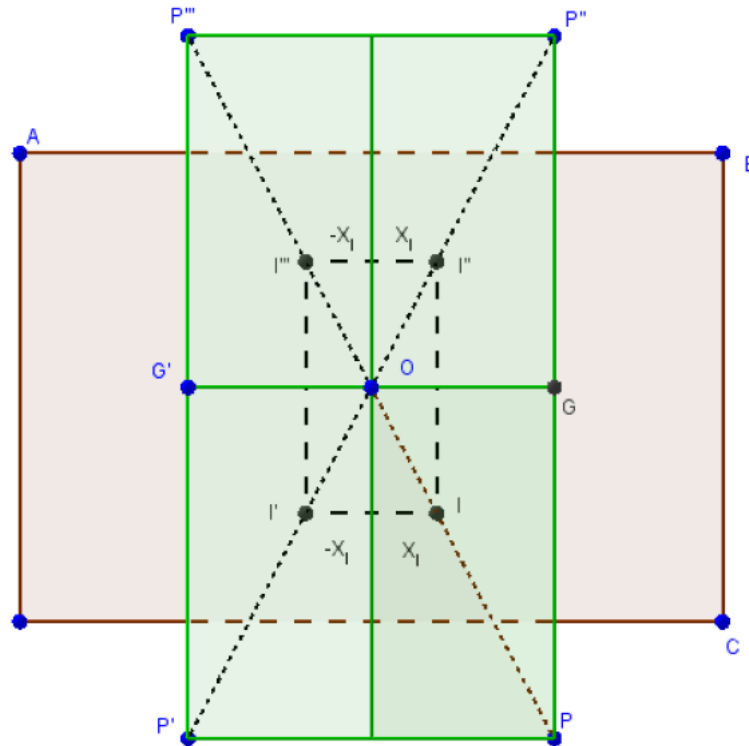


Mas, se escolhermos pontos P'' e P''' , simétricos de P e P' , respectivamente, em relação à face $OKLG$ do paralelepípedo, e repetirmos todo o processo da seção anterior,

²“Os sinais + e - modificam a quantidade diante da qual são colocados como o adjetivo modifica o substantivo.” Cauchy

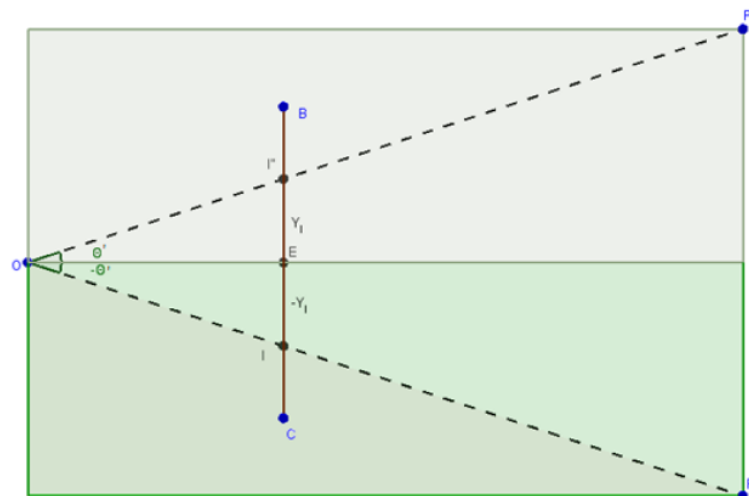
teremos o surgimento dos pontos I'' e I''' . Estes também possuem medidas das projeções equivalentes ao ponto original P .

Figura 2.9: Vista frontal com projeções horizontais orientadas



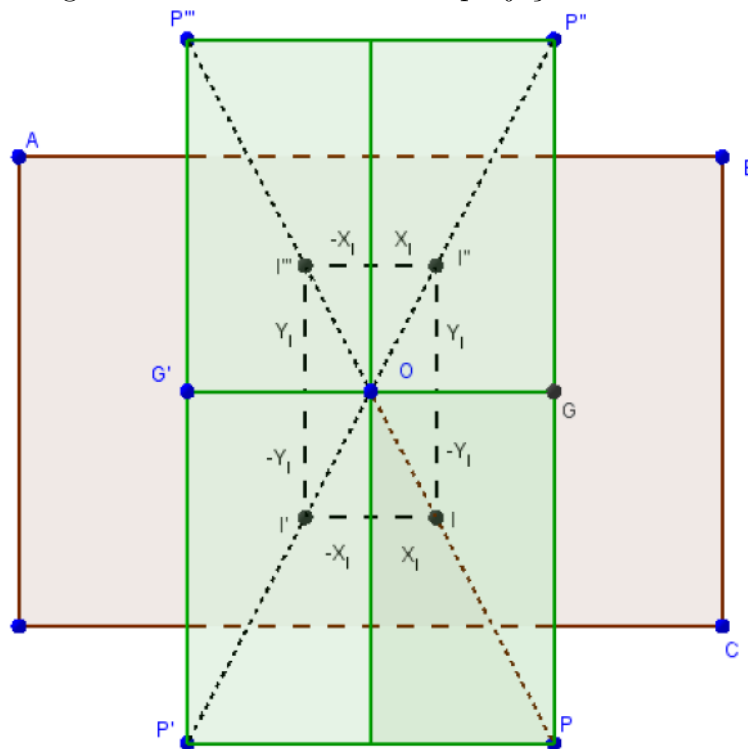
No desenho anterior apenas as projeções horizontais estão diferenciadas. Contudo, todo o raciocínio de diferenciação, utilizando orientações trigonométricas, pode ser aplicado com as projeções horizontais.

Figura 2.10: Vista lateral com as projeções horizontais orientadas



Logo, caso orientemos o sentido ascendente como positivo, o sentido oposto, descendente, passa a ser representado como negativo.

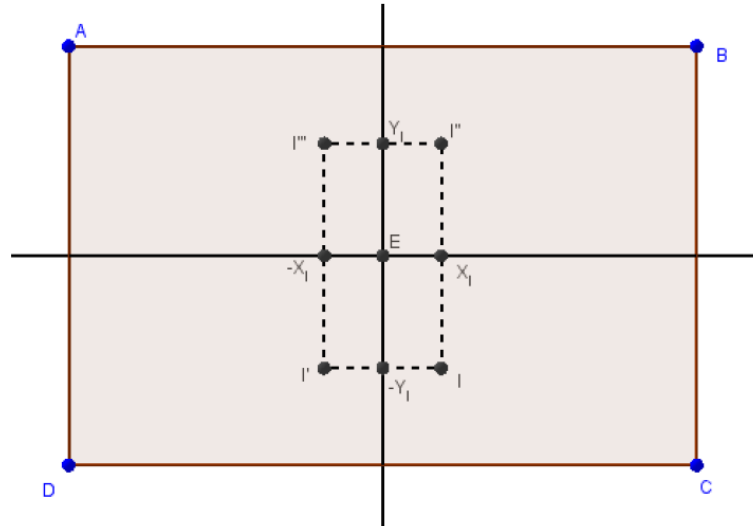
Figura 2.11: Vista frontal com projeções orientadas



- I tem projeção horizontal X_I e projeção vertical $-Y_I$.
- I tem projeção horizontal $-X_I$ e projeção vertical $-Y_I$.
- I'' tem projeção horizontal $-X_I$ e projeção vertical Y_I .
- I''' tem projeção horizontal X_I e projeção vertical Y_I .

Então, dois pontos objetos de retas projetantes distintas passam a ter pontos imagens diferenciados pelo par X_I e Y_I . Ou seja, na condição citada, não há pontos imagens com o mesmo par de projeções orientadas.

É possível representar as projeções dos pontos imagens em retas paralelas aos lados do retângulo $ABCD$ que passam pelo ponto E .

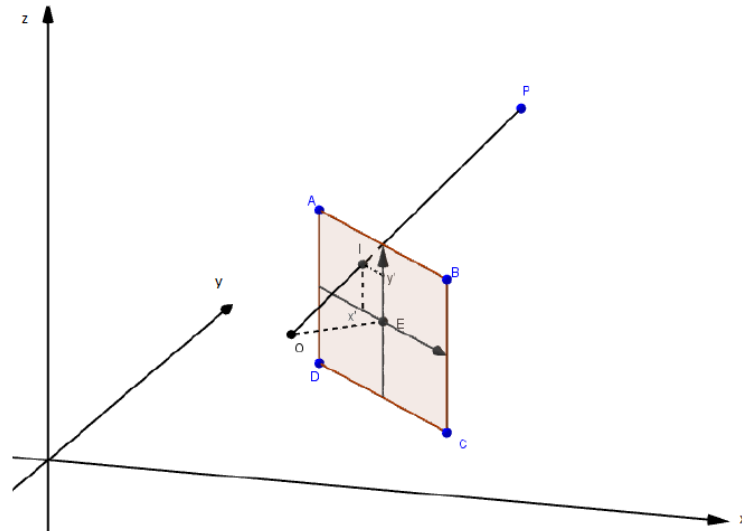


Tal representação é equivalente à utilizada no estudo da Geometria Analítica onde o eixo horizontal é chamada de *eixo das abscissas* e o eixo vertical de *eixo das ordenadas*. As medidas das projeções são as *coordenadas cartesianas* e podem ser representadas por pares ordenados.

$$\begin{array}{ll}
 I = (X_I, -Y_I) & I'' = (-X_I, Y_I) \\
 I' = (-X_I, -Y_I) & I''' = (X_I, Y_I)
 \end{array}$$

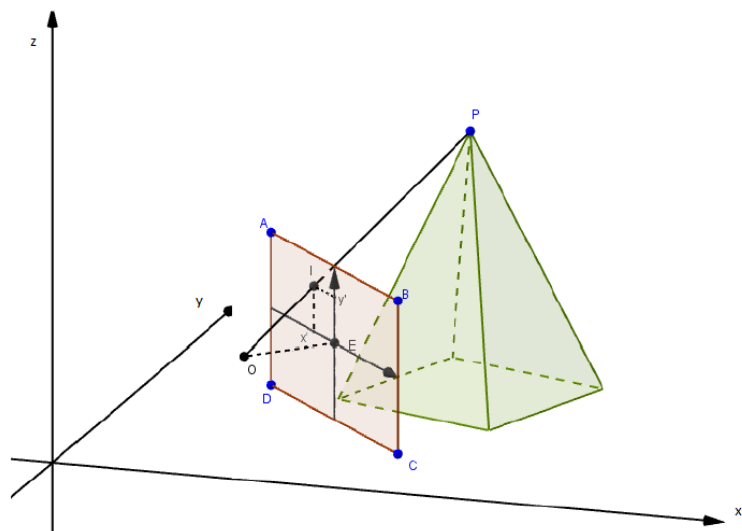
2.4 Em perspectiva

As abordagens anteriores mostraram que, nas condições citadas, para qualquer posicionamento do centro de observação O e do ponto objeto P , sempre é possível representar o Ponto Imagem I com coordenadas horizontal e vertical relativas aos eixos gerados no plano de projeção π , contendo a tela $ABCD$. Vamos representá-las por $I = (x', y')$.



Vamos agora tomar como o centro de observação o ponto O , cujas coordenadas em um sistema cartesiano tridimensional sejam $O = (x_O, y_O, z_O)$. Como trabalhamos anteriormente, o ponto de encontro das diagonais de $ABCD$, que chamaremos de E é a projeção ortogonal de O sobre $ABCD$. Para simplificar o processo de análise e torná-lo mais acessível ao estudante do Ensino Médio vamos posicioná-lo com a mesma altura que o ponto de observação O . Logo, $E = (x_E, y_E, z_O)$.

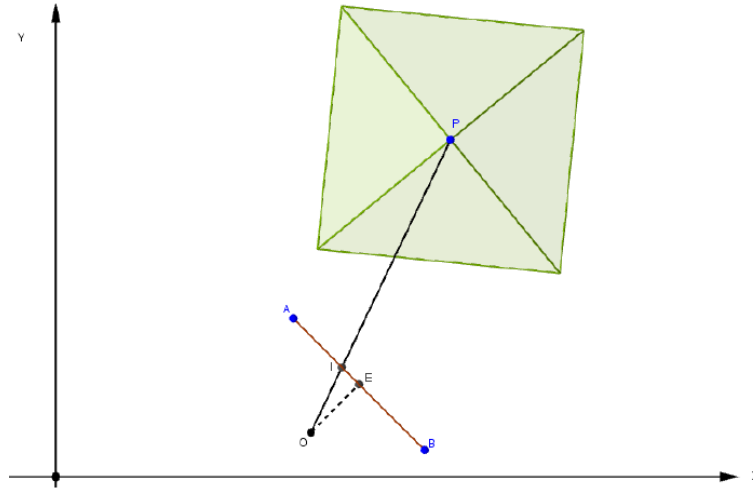
Da mesma forma, nosso ponto objeto P será representado por suas coordenadas $P = (x_P, y_P, z_P)$. Na figura seguinte, tomaremos como P o vértice da pirâmide quadrangular regular.



Nosso objetivo é determinar $I = (x', y')$ relativos ao sistema de coordenadas bidimensionais do plano de projeção π , ou tela de projeção $ABCD$. Queremos que estas coordenadas x' e y' dependam apenas das coordenadas dos pontos P , O e E .

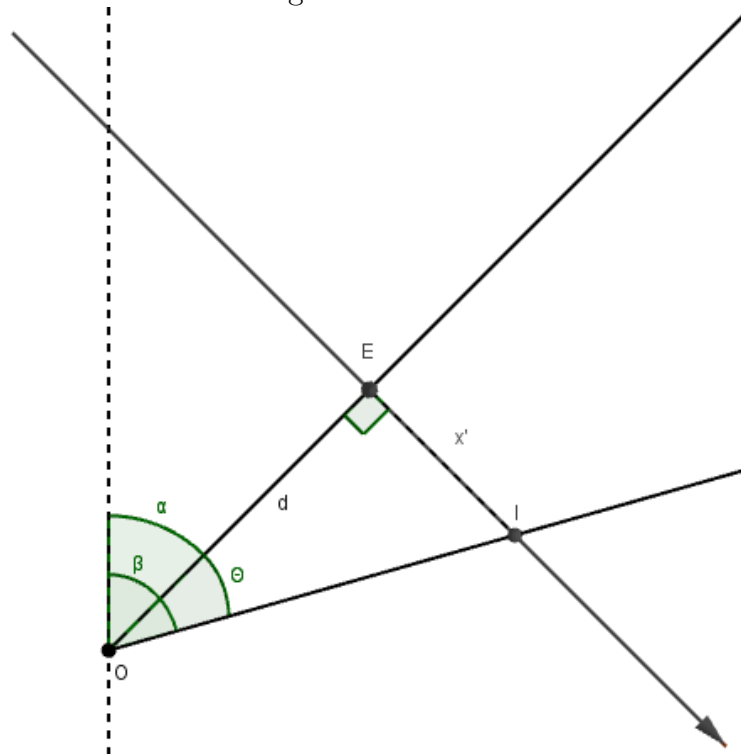
A medida \overline{OE} do segmento OE representa a distância entre o centro de observação O e a tela de projeção $ABCD$. Para simplificar a notação, faremos $\overline{OE} = d$.

Vamos analisar a vista superior do caso proposto.



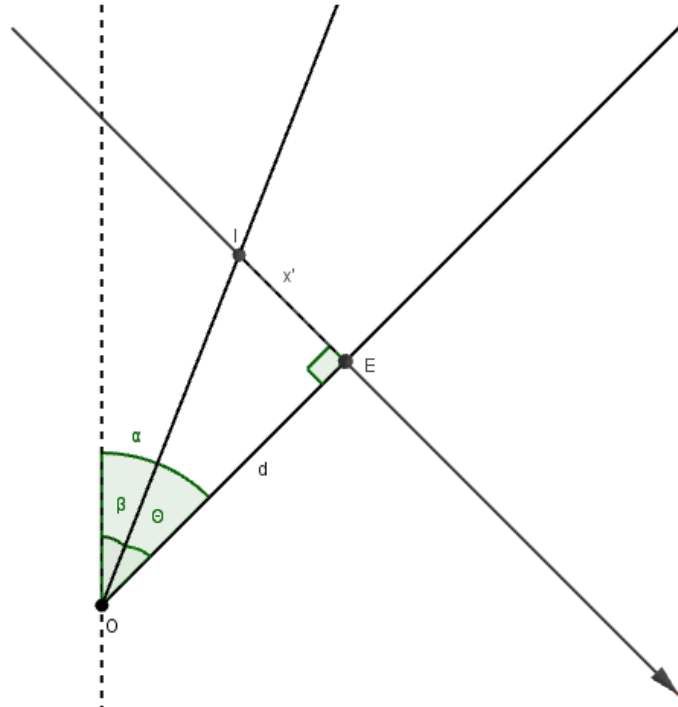
A projeção do segmento orientado EI no plano horizontal $z = z_O$ é a coordenada x' desejada. Para obtê-la, vamos trabalhar com os ângulos α , β e γ , respectivamente as projeções em $z = z_O$ dos ângulos entre o segmento OE e a direção do eixo y , entre o segmento OI e a direção do eixo y e entre os segmentos OE e OI .

Figura 2.12: $\theta > 0$



É importante enfatizar que dependendo da posição da reta \overleftrightarrow{OI} o valor do

ângulo θ pode ser positivo ou negativo. Observe que θ é a medida do ângulo $E\hat{O}I$ no sentido trigonométrico, isto é, percorrido de E para I . Na figura anterior, temos $\theta > 0$.

Figura 2.13: $\theta < 0$ 

Na figura acima, o percurso de E para I é no sentido horário, logo negativo.

Assim,

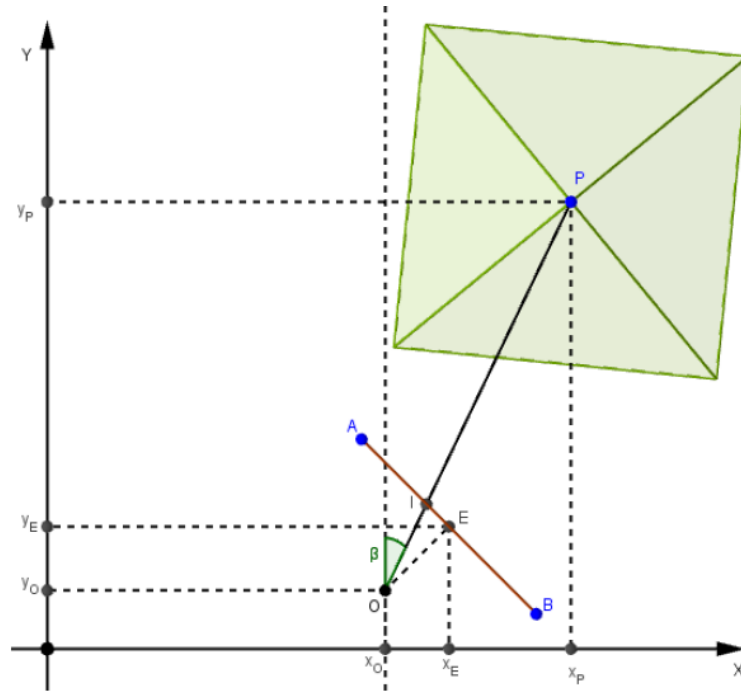
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x'}{d} \therefore x' = d \cdot \operatorname{tg} \theta$$

$$\theta = \beta - \alpha \therefore \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha),$$

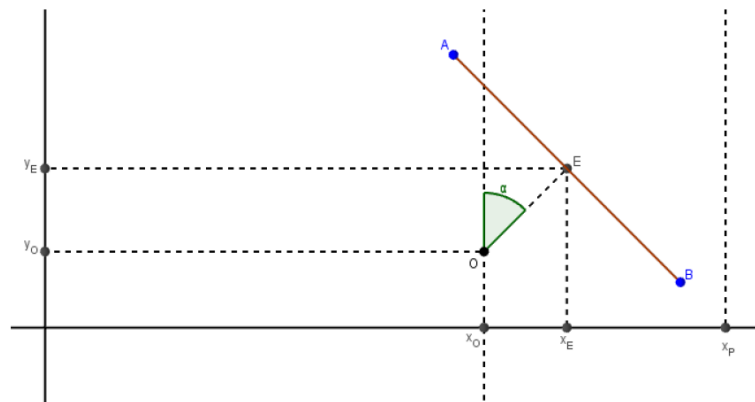
logo

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + (\operatorname{tg} \beta) \cdot (\operatorname{tg} \alpha)}. \quad (2.1)$$

Vamos encontrar os valores de $\operatorname{tg} \alpha$ e $\operatorname{tg} \beta$ utilizando as coordenadas dos pontos P , O e E .



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_P - x_O}{y_P - y_O} \quad (2.2)$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_E - x_O}{y_E - y_O} \quad (2.3)$$

Assim, substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1),

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{x_P - x_O}{y_P - y_O} - \frac{x_E - x_O}{y_E - y_O}}{1 + \left(\frac{x_P - x_O}{y_P - y_O} \right) \cdot \left(\frac{x_E - x_O}{y_E - y_O} \right)}$$

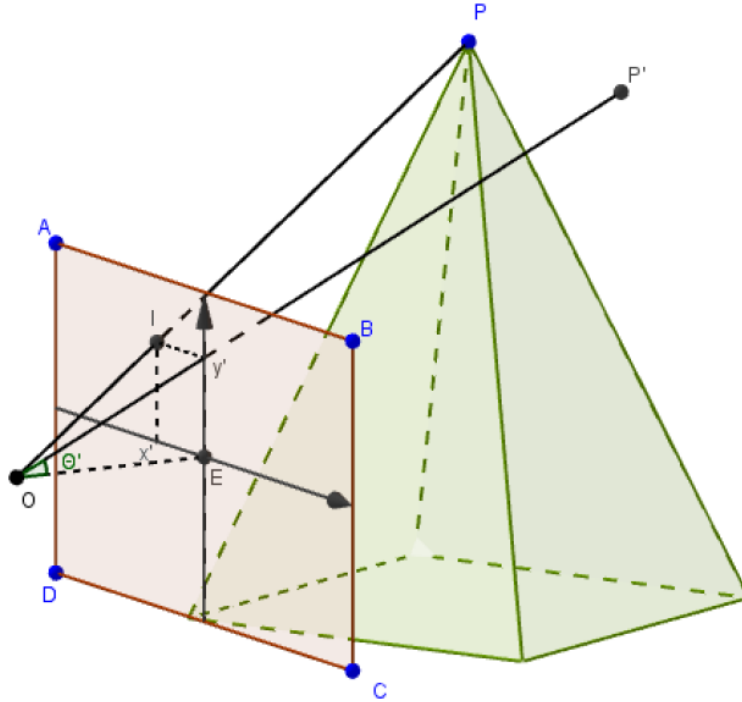
$$\therefore \operatorname{tg} \theta = \frac{(x_P - x_O)(y_E - y_O) - (x_E - x_O)(y_P - y_O)}{(y_P - y_O)(y_E - y_O) + (x_P - x_O)(x_E - x_O)},$$

logo

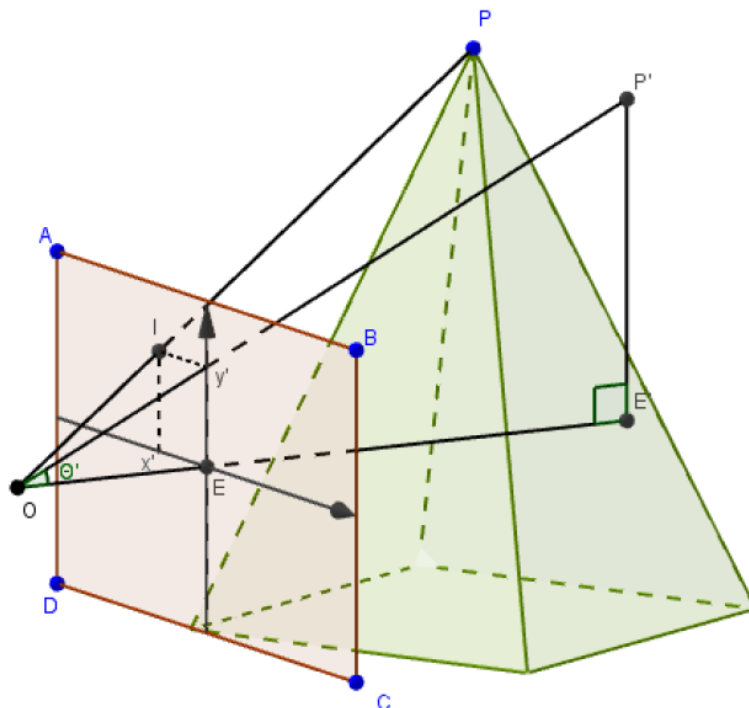
$$x' = d \cdot \frac{(x_P - x_O)(y_E - y_O) - (x_E - x_O)(y_P - y_O)}{(y_P - y_O)(y_E - y_O) + (x_P - x_O)(x_E - x_O)},$$

lembrando que $d = \overline{OE} = \sqrt{(x_O - x_E)^2 + (y_O - y_E)^2}$.

Para encontrarmos y' vamos projetar o ponto objeto P no plano vertical que passa pelos pontos O e E . A projeção P' determina um segmento que encontra a tela de projeção $ABCD$ num ponto de mesma coordenada y' do ponto imagem I .



O prolongamento do segmento OE encontra a vertical baixada de P' no ponto E' , formando assim o triângulo retângulo $OP'E'$ de ângulo $P'\widehat{OE}' = \theta'$.



$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{y'}{d} = \frac{\overline{P'E'}}{\overline{OE'}} \quad \text{e} \quad \overline{P'E'} = z_P - z_O \therefore y' = \frac{d \cdot (z_P - z_O)}{\overline{OE'}}.$$

Para encontrarmos o valor de $\overline{OE'}$ vamos, novamente, utilizar a vista superior.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{MN}} \therefore \overline{MN} = \frac{x_P - x_O}{\operatorname{tg} \alpha},$$

logo

$$\begin{aligned} \overline{PN} &= y_P - y_O - \overline{MN} \therefore \overline{PN} = y_P - y_O - \frac{x_P - x_O}{\operatorname{tg} \alpha} \therefore \\ \therefore \overline{PN} &= \frac{(y_P - y_O) \cdot \operatorname{tg} \alpha - (x_P - x_O)}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Como

$$\cos \alpha = \frac{\overline{NE'}}{\overline{PE}},$$

temos

$$\overline{NE'} = \overline{PN} \cdot \cos \alpha \therefore \overline{NE'} = \frac{(y_P - y_O) \cdot \operatorname{tg} \alpha - (x_P - x_O)}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \cos \alpha.$$

e, como

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{x_P - x_O}{\overline{ON}},$$

temos

$$\overline{ON} = \frac{x_P - x_O}{\text{sen } \alpha}.$$

Mas $\overline{OE} = \overline{ON} + \overline{NE'}$, e assim,

$$\begin{aligned} \overline{OE'} &= \frac{x_P - x_O}{\text{sen } \alpha} + \frac{(y_P - y_O) \cdot \text{tg } \alpha - (x_P - x_O)}{\text{tg } \alpha} \cdot \cos \alpha \\ \therefore \overline{OE'} &= \frac{x_P - x_O}{\text{sen } \alpha} + \frac{(y_P - y_O) \text{tg } \alpha - (x_P - x_O)}{\text{sen } \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \\ \therefore \overline{OE'} &= \frac{(x_P - x_O)(1 - \cos^2 \alpha) + (y_P - y_O) \text{sen } \alpha \cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \\ \therefore \overline{OE'} &= \frac{(x_P - x_O) \text{sen}^2 \alpha + (y_P - y_O) \text{sen } \alpha \cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \\ \therefore \overline{OE'} &= (x_P - x_O) \text{sen } \alpha + (y_P - y_O) \cos \alpha \\ \therefore \overline{OE'} &= (x_P - x_O) \frac{(x_E - x_O)}{d} + (y_P - y_O) \frac{(y_E - y_O)}{d} \\ \therefore \overline{OE'} &= \frac{(x_P - x_O)(x_E - x_O) + (y_P - y_O)(y_E - y_O)}{d}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d(z_P - z_O)}{\overline{OE'}} = \frac{d(z_P - z_O)}{\frac{(x_P - x_O)(x_E - x_O) + (y_P - y_O)(y_E - y_O)}{d}} \\ \therefore y' &= \frac{d^2(z_P - z_O)}{(x_P - x_O)(x_E - x_O) + (y_P - y_O)(y_E - y_O)}. \end{aligned}$$

Então, para o centro de observação $O = (x_O, y_O, z_O)$, o ponto objeto $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $E = (x_E, y_E, z_O)$, com coordenadas relativas aos eixos cartesianos, encontramos o ponto imagem $I = (x', y')$ com coordenadas horizontal e vertical relativas aos eixos perpendiculares gerados no plano de projeção $ABCD$ com origem em E dadas por:

$$\begin{aligned} x' &= d \cdot \frac{(x_P - x_O)(y_E - y_O) - (x_E - x_O)(y_P - y_O)}{(y_P - y_O)(y_E - y_O) + (x_P - x_O)(x_E - x_O)} \\ y' &= \frac{d^2(z_P - z_O)}{(x_P - x_O)(x_E - x_O) + (y_P - y_O)(y_E - y_O)}, \end{aligned}$$

onde $d = \sqrt{(x_O - x_E)^2 + (y_O - y_E)^2}$.

Dessa forma, conseguimos atender os nossos objetivos, pois esse processo determina, de forma precisa, a localização do ponto imagem.

As relações encontradas para x' e y' podem ser extremamente úteis em um processo de modelagem tridimensional (ou 3D) que visa o desenvolvimento de uma representação matemática de qualquer superfície tridimensional de um objeto. Basta criarmos

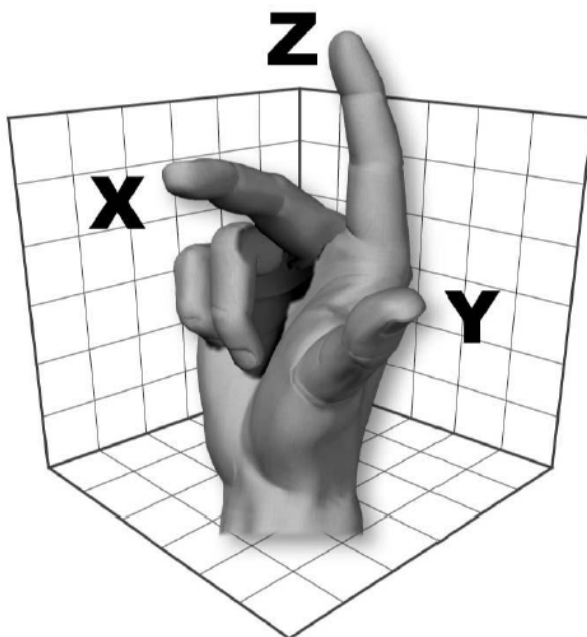
um procedimento padrão onde coordenadas cartesianas tridimensionais são transformadas, pelas fórmulas encontradas, em coordenadas cartesianas bidimensionais na Tela de Projeção.³

2.5 Outra visão

A criação de formas, objetos, personagens, cenários que, embora planejados, induzam a interpretação tridimensional exige ferramentas computacionais avançadas e direcionadas para este tipo de tarefa.

Trata da simulação de soluções para problemas científicos, analisando os fenômenos, desenvolvendo modelos matemáticos para sua descrição e elaborando códigos computacionais para obtenção das soluções.

O produto final é chamado de modelo tridimensional.



No trabalho do professor Anderson Stumpf, Multiplicação de Matrizes e Perspectiva, encontramos referências à outra técnica de modelagem computacional. Observe a operação matricial seguinte.

³“Matemática, de modo algum, são fórmulas, assim como a música não são notas.”Y. Jurquim

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_O \\ 0 & 1 & 0 & -y_O \\ 0 & 0 & 1 & -z_O \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz é chamada de matriz de projeção, a segunda de matriz de rotação e a quarta de matriz de translação.

Se

$$\cos \theta = \frac{x_E - x_O}{d}$$

$$\cos \theta = \frac{y_E - y_O}{d},$$

o resultado é a matriz coluna abaixo

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(x_E - x_O)(x_P - x_O) - (y_E - y_O)(y_P - y_O) - 1}{d} \\ \frac{(x_E - x_O)(y_P - y_O) - (x_P - x_O)(y_E - y_O)}{d} \\ z_P - z_O \\ \frac{(x_P - x_O)(x_E - x_O) + (y_P - y_O)(y_E - y_O)}{d^2} \end{bmatrix}$$

Reparem que a razão entre B e D gera a fórmula da coordenada x' enquanto a razão entre C e D , a fórmula da coordenada y' , ambas encontradas no item anterior.

$$x' = \frac{B}{D} = d \cdot \frac{(x_P - x_O)(y_E - y_O) - (x_E - x_O)(y_P - y_O)}{(y_P - y_O)(y_E - y_O) + (x_P - x_O)(x_E - x_O)}$$

$$y' = \frac{C}{D} = \frac{d^2(z_P - z_O)}{(x_P - x_O)(x_E - x_O) + (y_P - y_O)(y_E - y_O)},$$

É possível escrever o mesmo processo de uma forma mais usual. Basta considerar as coordenadas de uma forma diferente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/d \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_O \\ 0 & 1 & 0 & -y_O \\ 0 & 0 & 1 & -z_O \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nesta configuração, o eixo y é o vertical (para cima), x e z são horizontais e a projeção é feita sobre o plano $z = d$. Esta é a forma comumente utilizada em técnicas computacionais de geração de imagens tridimensionais.

3 Proposta de Atividade

As aulas propostas abaixo têm por objetivo revisar conceitos de Geometria e Trigonometria a partir de uma motivação associada a projeções em telas planas e representações em perspectiva.

1ª aula: Vistas de sólidos espaciais

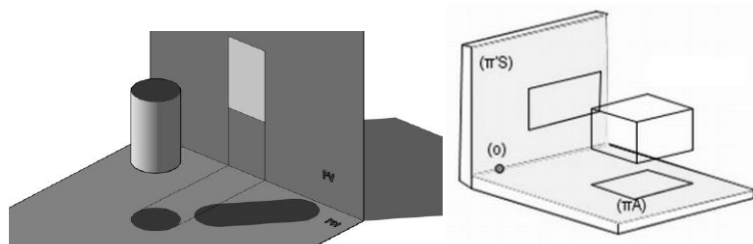
Esta aula visa desenvolver a percepção espacial do aluno, principalmente a capacidade de representar um objeto por meio de diferentes pontos de vista.

1. Começar a aula com a exposição de vários objetos tridimensionais;

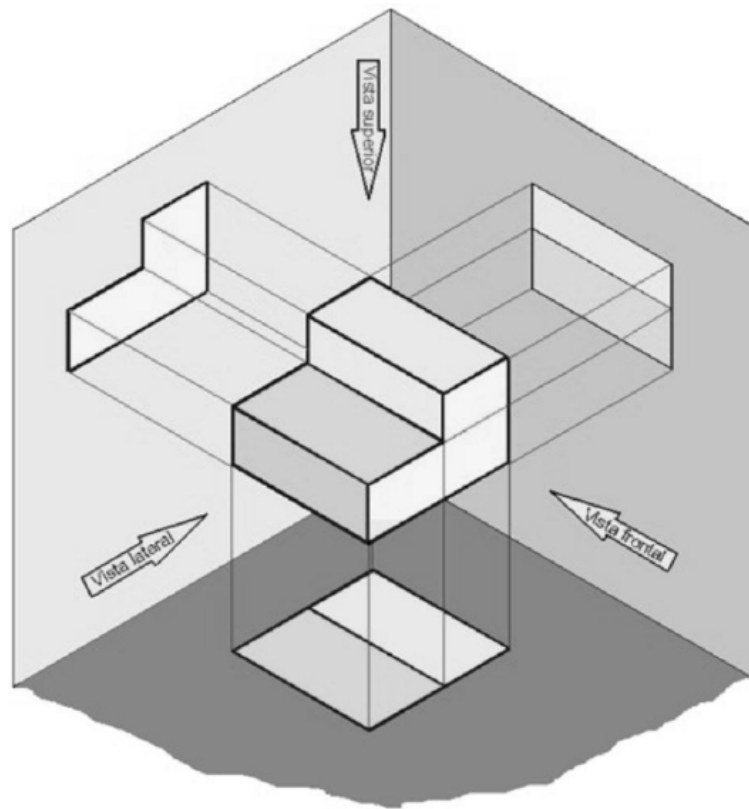
Exemplos: Latas cilíndricas, caixas de presentes, caixas de sapatos, bolas,... (de preferência objetos que possam ser associados à sólidos clássicos do ensino de Geometria Espacial)

2. Convidar os alunos a desenhá-los;
3. Debater com a turma sobre a dificuldade de se desenhar sólidos em folhas ou quadros de aula planos;
4. Convidá-los a olhar os objetos de diferentes pontos de vista. De cima, de baixo, de frente e de lado;
5. Propor novos desenhos pelos referenciais das vistas dos objetos expostos;
6. Debater sobre o que viram e como o conjunto de vistas ajuda a definir um sólido;

Exemplos: Como é a visão lateral de uma lata? E de uma caixa?...



7. Apresentar e exemplificar o conceito de Vistas;



8. Mostrar exercícios ilustrativos de Geometria Espacial onde podemos nos valer de “vistas” ou da visualização de figuras planas internas para a interpretação do problema;

Exemplos: Determine a medida da geratriz de um cone equilátero de altura $\sqrt{3}$ cm.

A vista lateral de um cone equilátero é o triângulo equilátero. Logo a geratriz é o lado do triângulo. Por trigonometria do triângulo retângulo temos que $L = \frac{H}{\cos 30^\circ}$, então $L = 2$ cm.



2^a aula: Interpretação visual e percepção da perspectiva

Esta aula pretende apresentar aos alunos a dificuldade de representação plana de informações tridimensionais. Faz referências à História da Arte e das perspectivas.

1. Dividir os alunos em duplas;
2. Levá-los para algum ambiente externo da escola;
3. Convidar um dos integrantes da dupla para segurar uma folha de papel transparente A4 enquanto o outro tenta desenhar aquilo que está vendo na estrutura da escola através do papel;

Exemplos: corredores, salas, pátios, quadras... (não é necessário precisão dos traços, o objetivo é a percepção do conceito de perspectiva)

4. Debater sobre a percepção da profundidade e mostrar algumas imagens associadas;

Exemplos:

Figura 3.1: “Última Ceia de Jesus com seus Apóstolos”, de Leonardo da Vinci



Fonte: Wikipedia¹

Figura 3.2: “A Noite Estrelada”, de Van Gogh



Fonte: Wikipedia²

¹Disponível em [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Leonardo_da_Vinci_\(1452-1519\)_-_The_Last_Supper_\(1495-1498\).jpg](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Leonardo_da_Vinci_(1452-1519)_-_The_Last_Supper_(1495-1498).jpg). Acesso em 09/04/2013.

²Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Van_Gogh_-_Starry_Night_-_Google_Art_Project.jpg. Acesso em 09/04/2013.

Figura 3.3: “Ponto de fuga”, de Ivan Cabral



Fonte: Sorriso pensante³

Chamar a atenção de que esse processo foi fundamental no Renascimento na tentativa de se fazer quadros com essa impressão de profundidade;

5. Apresentar o filme produzido pelo Ministério da Cultura intitulado “O Mundo da Matemática - Perspectiva” disponibilizado em http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital1/episodios/ep_14.html
6. Falar como o cérebro interpreta o pequeno como longe e das ilusões de ótica que nascem disso; Mostrar alguns exemplos como em <http://www.tricks-and-illusions.com/2008/04/new-perspective-optical-illusion.html>
7. Mostrar que hoje esse conceito é muito útil nas animações e nos jogos



³Disponível em <http://www.ivancabral.com/2012/02/charge-do-dia-ponto-de-fuga.html>. Acesso em 09/04/2013.



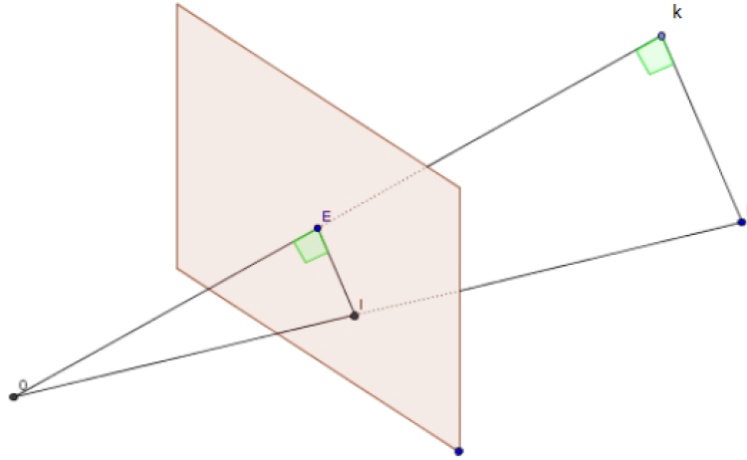
8. Orientar como desenhar sólidos clássicos na ajuda de resoluções de problemas (cubos, pirâmides, esferas, prismas e cones);

3ª aula: Estudo geométrico de projeções em telas

Esta aula visa mostrar, com o auxílio da Geometria Plana, a análise de Projeções em Telas.

1. Mostrar com lanternas e folhas transparentes como um ponto objeto P tem uma Imagem I na tela de Projeção. Enfatizar como a mudança das posições do Foco de Luz ou do Ponto Objeto mudam a posição do Ponto Imagem;
2. Pedir a alguns alunos que segurem outros papéis transparentes e mostrar os vários pontos de incidência da luz nesses papéis;
3. Citar que apenas um desses papéis representa a tela de projeção e os demais servem apenas para a visualização de outros pontos no espaço que, caso fossem Pontos Objetos, teriam o mesmo Ponto Imagem;
4. Com o auxílio do *software* Geogebra mostrar uma simulação da situação ilustrada anteriormente (esta simulação está disponível para *download*; veja a lista “**Recursos multimeios utilizados**” no fim deste trabalho);
5. Criar situações numéricas para que os alunos calculem o valor da distância do Ponto Imagem ao ponto central da tela E usando conceitos da Geometria ou Trigonometria;

Exemplo: Determine a medida do segmento \overline{EI} sabendo que $\overline{OE} = 4$ cm, $\overline{OK} = 20$ cm e $\overline{OP} = 25$ cm.



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo OKP temos, $\overline{KP}^2 + 20^2 = 25^2$ logo $\overline{KP} = 15$ cm. Por semelhança dos triângulos OEI e OKP temos

$$\frac{4}{20} = \frac{\overline{EI}}{15} \therefore \overline{EI} = 3 \text{ cm.}$$

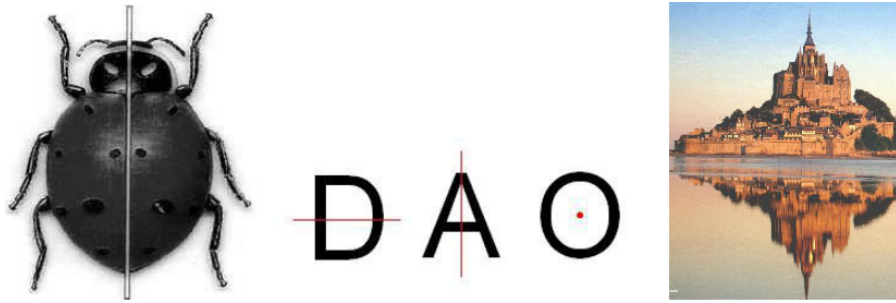
6. Questionar se encontrar a medida do segmento EI é suficiente na identificação do ponto imagem, em outras palavras, se é o único segmento com esta medida que possui E como um dos extremos;
7. Questionar a denominação da figura geométrica que nasce da junção de todos os pontos I de mesma distância ao ponto E e contidos no plano de projeção;

4^a aula: Simetrias e projeções

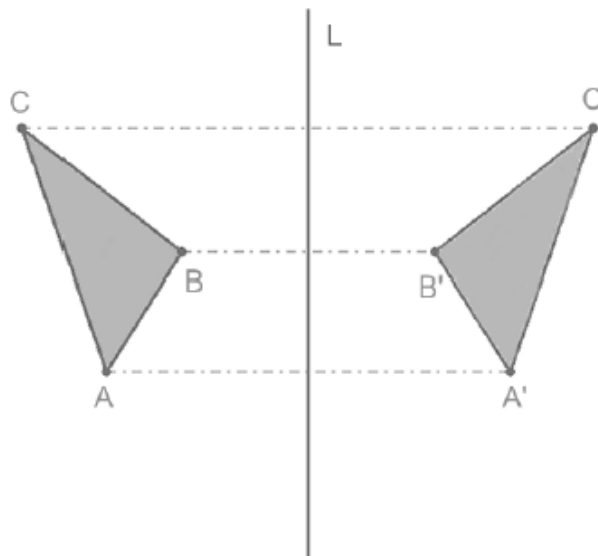
O objetivo dessa aula é a percepção da importância das projeções horizontal e vertical na determinação de uma imagem.

1. Apresentar imagens de objetos ou símbolos simétricos e caracterizar tipos de simetria como horizontais, verticais, centrais ou axiais.

Exemplos:



2. Interpretar as simetrias axiais e avaliar o conceito de sentido associado às medidas;



3. Separar os alunos em duplas e entregar a cada grupo dois cartões, um com a vista superior e o outro com a vista lateral, como na representação abaixo;

Figura 3.4: Vista superior

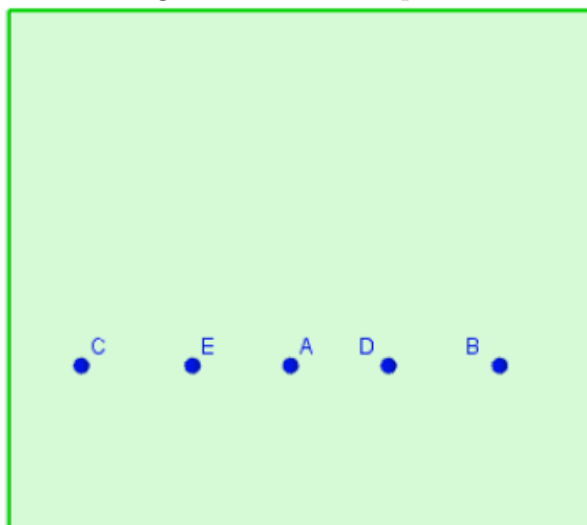
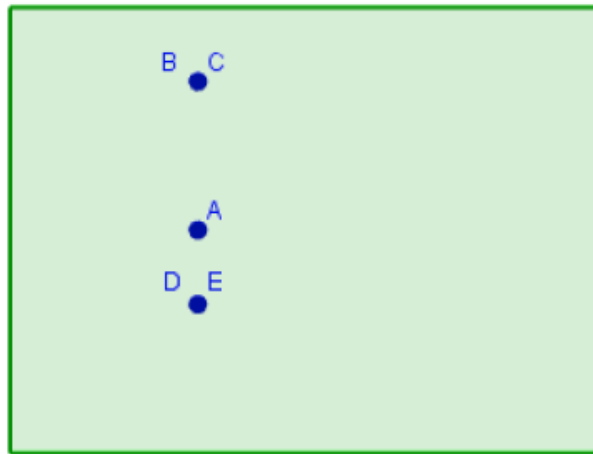
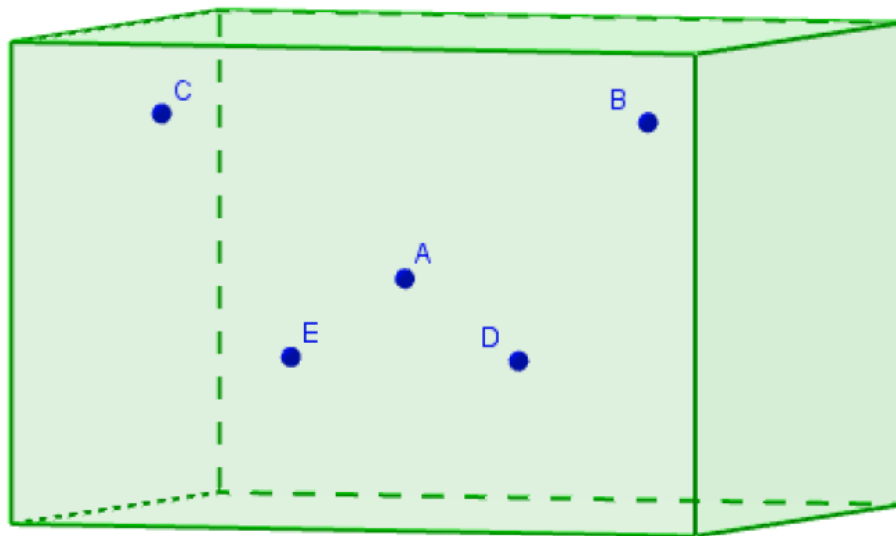


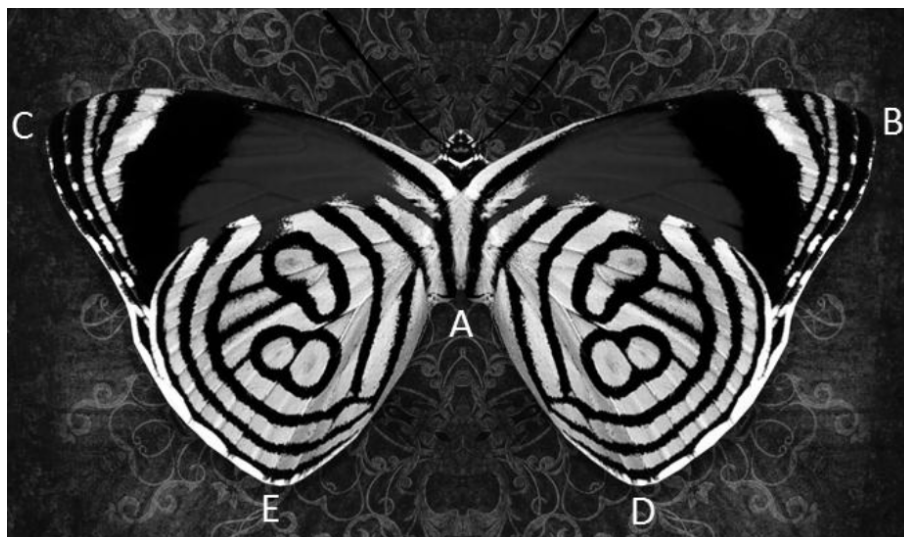
Figura 3.5: Vista lateral



4. Pedir que os alunos desenhem uma possível vista frontal associada às vistas representadas nos cartões;
5. Mostrar que as vistas citadas podem representar uma caixa com os pontos A , B , C , D e E como a representação abaixo;

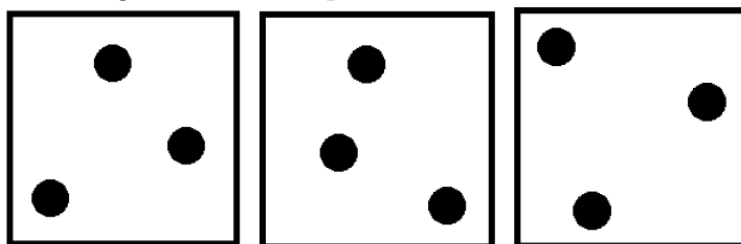


6. Mostrar que, contextualizando, os pontos A , B , C , D e E podem estar associados à, por exemplo, uma borboleta como na figura abaixo;



7. Fornecer a cada aluno da dupla, sem que o outro veja, um cartão com três pontos distribuídos de forma aleatória.

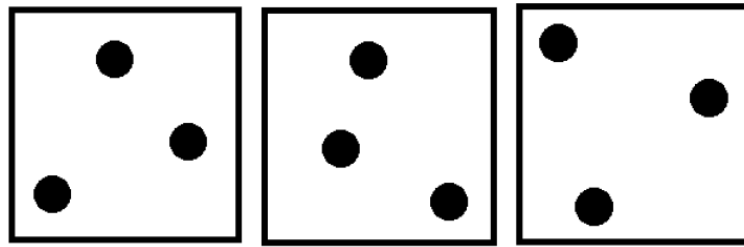
Figura 3.6: Exemplos de Cartões aleatórios



Cada aluno terá que escrever, com as próprias palavras, como os três pontos estão distribuídos e entregar para o colega da dupla. O desafio é reproduzir, usando apenas as informações escritas, o desenho do cartão escondido.

8. Discutir com a turma sobre as dificuldades de execução da tarefa anterior;
9. Pedir que os alunos peguem o cartão que possui o desenho da vista superior e tracem segmentos unindo os pontos A e B , A e C , A e D e, finalmente, A e E ;
10. Repetir o procedimento no cartão que possui a vista lateral na construção de segmentos que possuam as mesmas extremidades;
11. Debater sobre o significado desses segmentos;
12. Questionar sobre as diferenças desses segmentos de uma vista para outra;
13. Pedir que os alunos refaçam, na vista frontal desenhada por eles, segmentos congruentes aos traçados na vista frontal;

14. Inserir eixos perpendiculares que ajudem na análise dos pontos



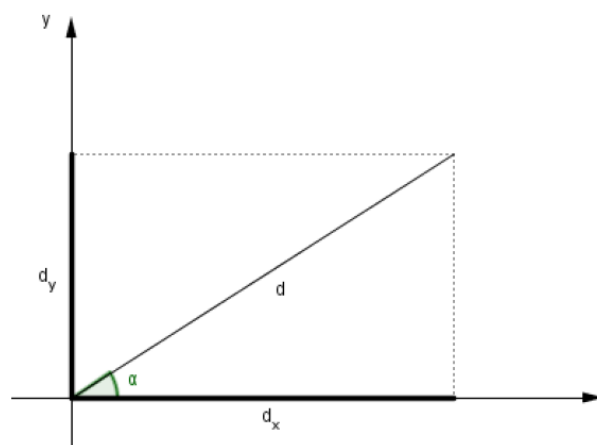
15. Debater como os eixos auxiliam na localização dos pontos;
16. Repetir a atividade 7. Os cartões podem ser trocados entre os grupos ou, simplesmente, rotacionados para novas visualizações;
17. Comentar sobre a necessidade de se “explicar” para um aparelho eletrônico como se deseja que determinado ponto apareça na tela.

5^a aula: Trigonometria do triângulo retângulo e projeções

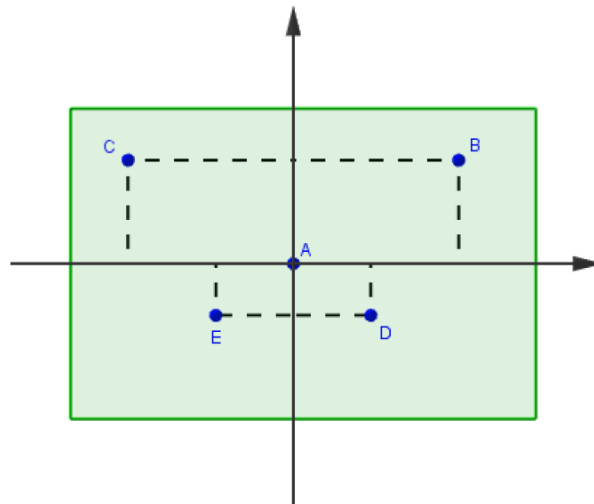
O objetivo dessa aula é mostrar, usando a trigonometria do triângulo retângulo, como encontrar os valores das projeções cartesianas e sua aplicabilidade em outras áreas científicas.

1. Recordar os conceitos da Trigonometria do Triângulo Retângulo e aplicar na determinação dos valores das projeções cartesianas de um segmento ou vetor;

Figura 3.7: $d_x = d \cdot \cos \alpha$ e $d_y = d \cdot \sin \alpha$



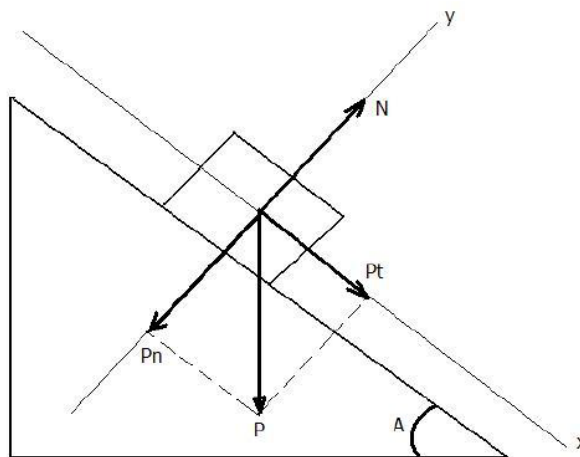
2. Refazer os grupos da aula anterior e entregar a cada grupo uma folha com o desenho abaixo.



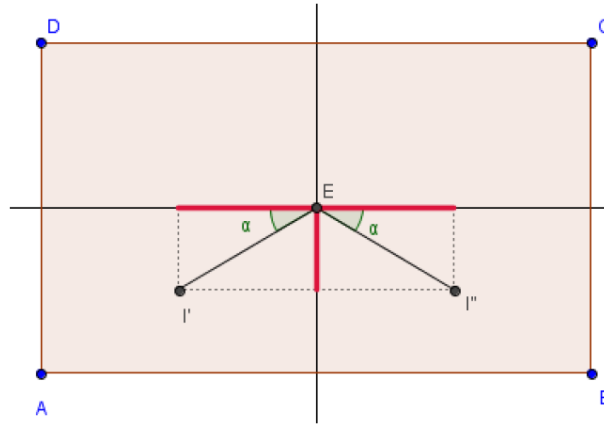
Lembrar que esse desenho é a vista frontal da atividade proposta na aula anterior. Pedir aos alunos que encontrem o valor das projeções cartesianas de A , B , C , D e E com o auxílio de réguas, transferidores e calculadoras científicas.

3. Citar, num paralelo com a Física, a necessidade de se utilizar projeções de grandezas vetoriais como forças, velocidade, aceleração...

Exemplo: Decomposição do vetor Peso em corpos colocados em planos inclinados.



4. Entregar um novo desenho onde os pontos I' e I'' possuem projeções de comprimentos iguais. Cada grupo deverá identificar esse cartão com os nomes dos integrantes;



Pedir aos alunos que encontrem as medidas das projeções de EI' e EI'' com dados numéricos. Caso, seja necessário, pode-se trabalhar com vários valores.

Exemplo: $\overline{EI'} = 2$ cm, $\overline{EI''} = 2$ cm e $\alpha = 30^\circ$.

$$\overline{EI'_x} = \overline{EI''_x} = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\overline{EI'_y} = \overline{EI''_y} = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1$$

5. Ressaltar que os pontos I' e I'' determinam as projeções de mesmas medidas;
6. Os cartões devem ser guardados para uso na aula posterior;

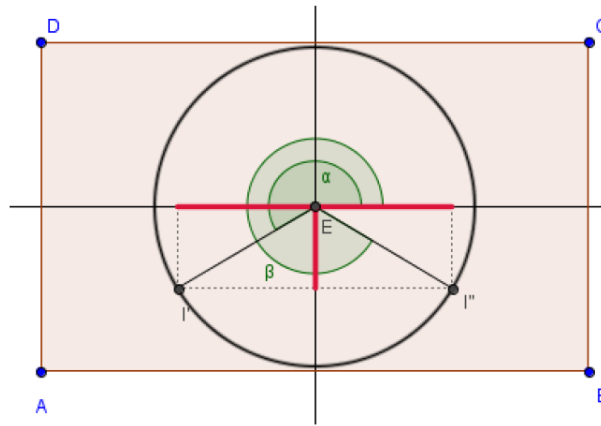
6ª aula: Ciclo trigonométrico

O objetivo dessa aula é estender o conceito trigonométrico para o estudo do Ciclo Trigonométrico e mostrar sua importância como ferramenta valiosa na orientação das projeções estudadas.

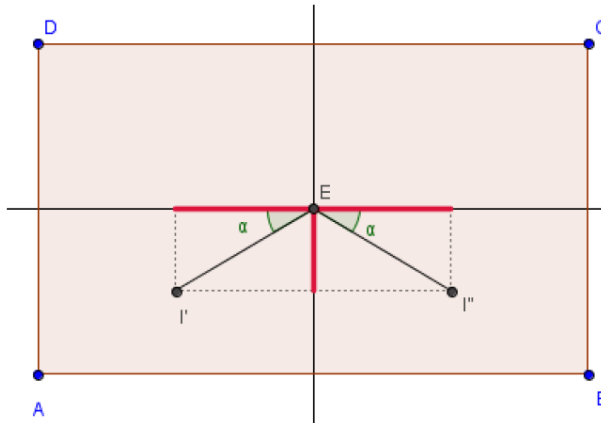
1. Recordar o conceito de Ciclo Trigonométrico;
2. Enfatizar a definição de ângulos equivalentes e suas relações trigonométricas;
3. Voltar aos grupos e ao questionamento das aulas anteriores;
4. Induzir os alunos na percepção de como o Ciclo Trigonométrico é uma ferramenta capaz de nos ajudar na diferenciação das projeções;

$$\overline{EI'_x} = \overline{EI'} \cdot \cos \alpha \quad \text{e} \quad \overline{EI''_x} = \overline{EI''} \cdot \cos \beta$$

$$\overline{EI'_y} = \overline{EI'} \cdot \text{sen } \alpha \quad \text{e} \quad \overline{EI''_y} = \overline{EI''} \cdot \text{sen } \beta$$



5. Entregar o cartão utilizado na aula anterior;



6. Pedir que os alunos encontrem as medidas das projeções de e com os dados utilizados na aula anterior mas diferenciando pelos sinais;

Exemplo: $\overline{EI'} = 2 \text{ cm}$, $\overline{EI''} = 2 \text{ cm}$ e $\alpha = 30^\circ$.

$$\overline{EI'_x} = 2 \cdot \cos 210^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\overline{EI''_x} = 2 \cdot \cos 330^\circ = \sqrt{3}$$

$$\overline{EI'_y} = 2 \cdot \text{sen } 210^\circ = -1$$

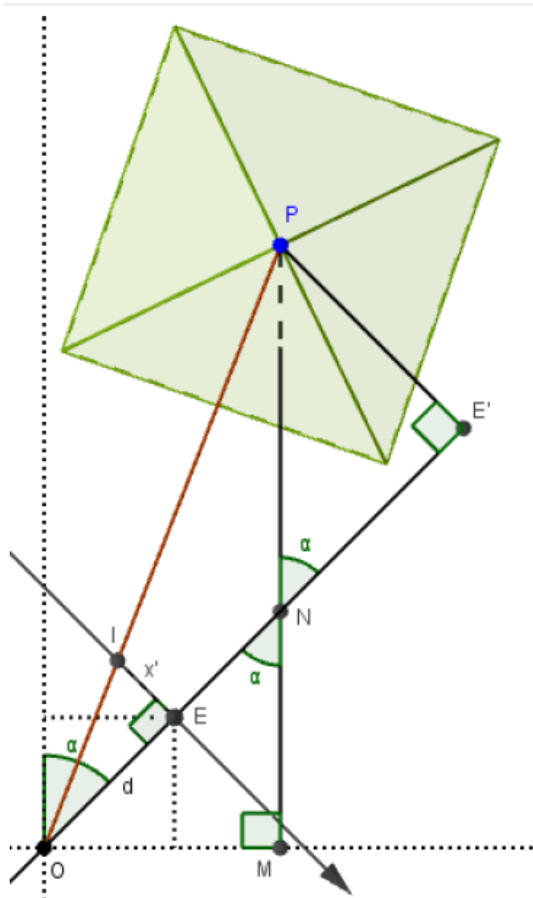
$$\overline{EI''_y} = 2 \cdot \text{sen } 330^\circ = -1$$

7. Os alunos resolveriam outros exercícios com ângulos de funções trigonométricas conhecidas;
8. Ressaltar que os pontos I' e I'' não determinam mais projeções de mesmas medidas, se consideradas com sinal;

7ª aula: Prática para a determinação da projeção x'

Os alunos serão submetidos a uma análise geométrica de uma situação problema e depois perceberão que estão diante de um método capaz de fornecer a coordenada x' da projeção de um ponto tridimensional na tela.

1. Expor o desenho abaixo e solicitar que encontrem a medida de x' para os seguintes dados: $\alpha = 45^\circ$, $\overline{PM} = 9$ cm, $\overline{OM} = 3$ cm e $d = 2\sqrt{2}$ cm. Durante o processo o professor pode fornecer algumas dicas de como chegar a esse resultado;



Resolução sugerida: Como $\alpha = 45^\circ$ temos $\overline{OM} = \overline{MN} = 3$ cm e $\overline{ON} = \frac{\overline{MN}}{\text{sen } 45^\circ} = 3\sqrt{2}$ cm.

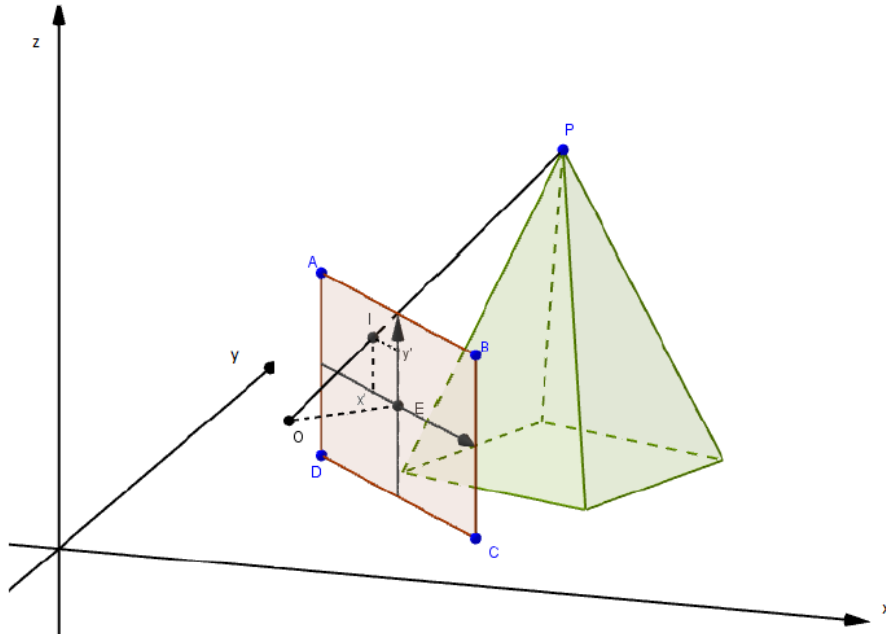
$$\overline{PN} = \overline{PM} - \overline{MN} = 9 - 3 = 6 \text{ cm}$$

$$\overline{PE'} = \overline{NE'} = \overline{PN} \cdot \text{sen } 45^\circ = 3\sqrt{2} \text{ cm e } \overline{OE'} = \overline{ON} + \overline{NE'} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

Os triângulos OEI e $OE'P$ são semelhantes, logo

$$\frac{x'}{PE'} = \frac{d}{OE'} \therefore \frac{x'}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \therefore x' = \sqrt{2}.$$

2. Mostrar, depois de resolvido, a interpretação do desenho como sendo a vista superior da situação seguinte:



3. Enfatizar como foi desnecessário o valor da coordenada z dos pontos citados na determinação de x' ;
4. Mostrar a fórmula de x' e enfatizar que a mesma é determinada a partir de procedimentos similares aos realizados no item 1;

$$x' = d \cdot \frac{(x_P - x_O)(y_E - y_O) - (x_E - x_O)(y_P - y_O)}{(y_P - y_O)(y_E - y_O) + (x_P - x_O)(x_E - x_O)},$$

5. Deduzir com os alunos as coordenadas dos pontos citados na questão proposta;

$$O = (0, 0, z_O), P = (3, 9, z_P), E = (2, 2, z_E)$$

O ponto E depende da análise trigonométrica seguinte

$$x_E = y_E = \frac{d}{\text{sen } 45^\circ} = 2$$

6. Encontrar x' usando a fórmula;

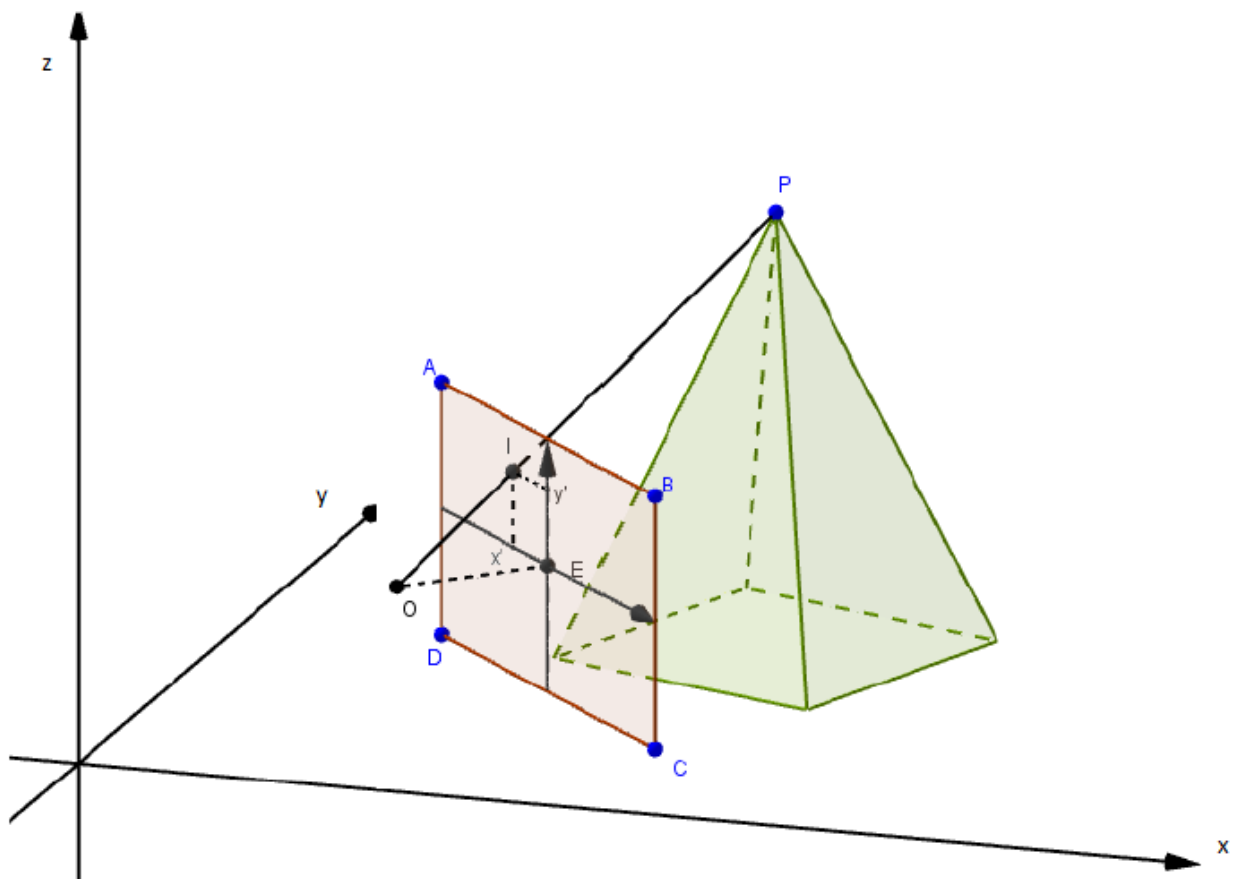
$$x' = 2\sqrt{2} \cdot \frac{(3-0)(2-0) - (2-0)(9-0)}{(9-0)(2-0) + (3-0)(2-0)} \text{ cm} = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{12}{24}\right) \text{ cm},$$

$$\text{logo } x = -\sqrt{2} \text{ cm}.$$

7. Discutir com os alunos a importância do sinal como diferenciador de outras posições de imagens equidistantes dos eixos x' e y' . Mostrar esses pontos.

8ª aula: Prática para a determinação da projeção x' e y'

1. Recordar o conceito de plano e espaço cartesiano (isto é, \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 respectivamente). Enfatizar a questão do uso de sinais nas coordenadas;
2. Voltar à situação tridimensional mostrada na aula anterior e enfatizar que um ponto objeto colocado em um espaço tridimensional, ao ser projetado, passa a ter uma representação plana, ou seja, bidimensional;



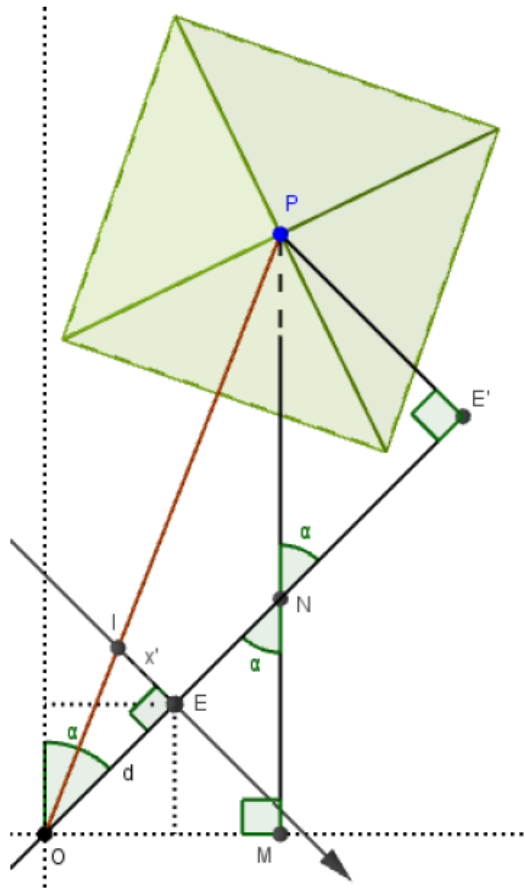
Os alunos devem determinar o valor de x' para $O = (2, 2, 2)$, $P = (5, 11, 5)$ e $E = (4, 4, 2)$

Mostrar aos alunos, após a resolução deles, que o problema proposto é um caso equivalente ao resolvido na aula anterior. Basta determinarmos as medidas dos

segmentos $\overline{PM} = 9$ cm, $\overline{OM} = 3$ cm e $d = 2\sqrt{2}$ cm e do ângulo $\alpha = 45^\circ$. A resolução é a mesma já realizada. Caracterizar esse processo como uma translação.

3. Inspirados pela determinação de x' , propor a determinação de y' para as mesmas coordenadas citadas;

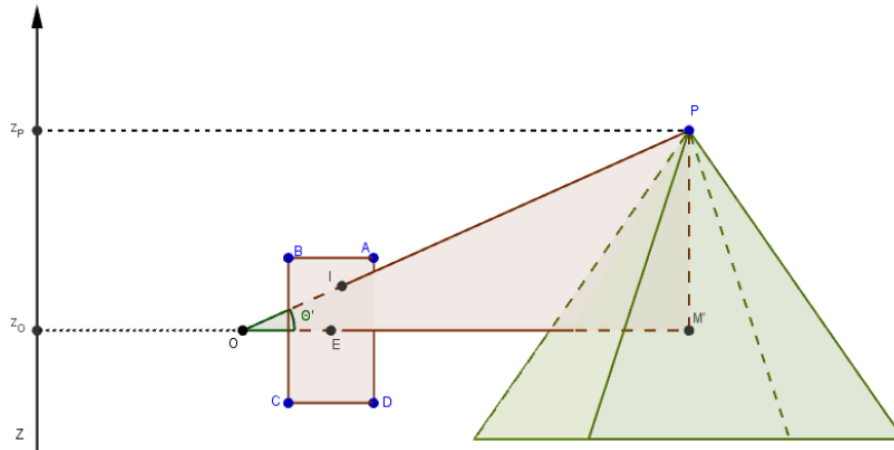
A medida \overline{OM} pode ser encontrada a partir do teorema de Pitágoras interpretado na vista superior da aula anterior. O cuidado necessário é a valorização do fato de que M' é a projeção horizontal de P .



$$\overline{OM'} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} \therefore \overline{OM'} = 3\sqrt{10}.$$

A medida \overline{OI} pode ser encontrada pela semelhança entre os triângulos OEI e $OE'M'$ (representado pelo triângulo $OE'P$ do desenho e na aula anterior)

$$\frac{x'}{\overline{M'E'}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OM'}} \therefore \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\overline{OI}}{3\sqrt{10}} \therefore \overline{OI} = \sqrt{10}.$$



$$\overline{PM'} = z_P - z_E = 5 - 2 = 3 \text{ cm.}$$

Aplicando a semelhança de triângulos na figura anterior, temos:

$$\frac{y'}{\overline{M'P}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OM'}} \therefore \frac{y'}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{10}} \therefore y' = 1.$$

4. Mostrar a fórmula de y' :

$$y' = \frac{d^2(z_P - z_O)}{(x_P - x_O)(x_E - x_O) + (y_P - y_O)(y_E - y_O)}$$

5. Encontrar y' usando a fórmula:

$$y' = \frac{(2\sqrt{2})^2(5 - 2)}{(5 - 2)(4 - 2) + (11 - 2)(4 - 2)} = \frac{8 \cdot 3}{3 \cdot 2 + 9 \cdot 2} = \frac{24}{24} = 1.$$

6. Discutir com os alunos a possibilidade, atendida pela fórmula, do ponto P estar mais baixo que ponto O . Nesse caso, o valor de y' é negativo;

7. Caso a turma esteja interessada demonstrar as fórmulas de x' e y' ;

9ª aula: Problema inverso

1. Mostrar imagens ou vídeos que nos induzam à percepção tridimensional;

Exemplos possíveis:

(a) Tapete que simula degraus de uma escada:



Fonte: Dylan Freeth Design⁴

(b) Tapetes publicitários que são colocados ao lado das traves do gol. Exibir o vídeo “Brasil 2 x 2 Itália, melhores momentos - Amistoso Internacional, 21/03/2013”, disponível em http://www.youtube.com/watch?v=Y25Ep_zfpN0.

(c) Desenhos realizados por artistas como Julian Beever

⁴Disponível em <http://www.dylanfreeth.com/index.php?/project/updown-rug/>. Acesso em 09/04/2013.



Fonte: Sítio oficial de Julian Beever⁵

2. Citar a anamorfose, técnica muito utilizada na pintura mural dos séculos XVI e XVII;
3. Caracterizar que, nesse caso, o processo é o inverso dos citados anteriormente;
4. Colocar os alunos em dupla com papéis transparentes e pedir que escrevam palavras de até 4 letras ocupando todo o papel transparente;

Exemplos: AMOR, LUA, CASA, VIDA...

5. Um dos integrantes da dupla segura o papel escrito enquanto o outro se posiciona de tal forma que fique com os olhos de um lado da folha vertical e com as mãos do outro;
6. O aluno que não está segurando a folha escolhe uma posição fixa de observação e tenta desenhar, numa folha horizontal, a projeção da palavra;
7. Mostrar o vídeo “Anamorfose com comentários e música”, disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=zQLEL4PHMd4>.
8. Juntar duas duplas e formar grupos de até 4 pessoas com a tarefa de cada grupo fazer um painel para ser colocado no chão ou parede de algum lugar da escola. A

⁵Disponível em http://www.julianbeever.net/index.php?option=com_phocagallery&view=category&id=2&Itemid=8. Acesso em 09/04/2013.

imagem precisa ser interpretada como tridimensional da partir de algum ponto de vista e deve ser realizada em até uma semana de prazo;

9. Avaliar o grupo a partir da realização da tarefa (A avaliação será considerada satisfatória caso o efeito tridimensional seja alcançado! O professor pode quantificar a tarefa de acordo com as determinações de avaliações adotados pela instituição. Tal atividade pode ser considerada como uma avaliação processual e ter pontuação adicional à média dos alunos).

4 Palavras finais

A Arte e a Matemática possuem muita coisa em comum. A análise e a perspicácia na obtenção da solução de um problema matemático também possui um valor estético. Uma série de resultados se encaixa num resultado final que surpreende e encanta.

É uma atividade governada pelas mesmas regras relacionadas às sinfonias de Beethoven, às pinturas de Da Vinci e à poesia de Homero. A dedicação permite o aparecimento de inúmeras obras de arte atingindo patamares tão altos quanto os atingidos pela imaginação.

Os artistas são profundos admiradores do belo e fiéis seguidores dessa inspiração. MEDIR O MUNDO também é uma postura admiradora da natureza e ENTENDER O MUNDO é a busca natural de todos os seres humanos motivados também pelo belo. Logo, há muita ARTE na matemática e muito MATEMÁTICA na arte.

É preciso resgatar em cada pessoa o interesse pelos porquês. Reencontrar o sentido em entender mesmo sem relacionar esse conhecimento com algo em especial. Reencontrar sentido naquilo que vemos todos os dias e não sabemos como funciona.

Esse trabalho é um exemplo de como estimular a descoberta a partir das características da Perspectiva, técnica capaz de nos apresentar um universo tridimensional em uma tela plana. De simular profundidade a partir de modelos matemáticos acessíveis aos alunos do Ensino Médio. De fascinar e atrair interesses.

Acreditamos que é preciso estimular a descoberta. Dessa forma buscamos resgatar o prazer pelo pensar matemático que está além do conceito matemático.

Bibliografia

- [1] Gelson Iezzi, *Trigonometria*, 3a. Edição, Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 3, Atual Editora, 2009.
- [2] Osvaldo Dolce, *Geometria Plana*, 3a. Edição, Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 9, Atual Editora, 2009.
- [3] ———, *Geometria Espacial*, 3a. Edição, Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 10, Atual Editora, 2009.
- [4] William H Calvin, *Como o cérebro pensa: a evolução da inteligência, ontem e hoje*, Rocco, 1998.
- [5] Hilton Andrade Mello, *Geometria nas Artes*.
- [6] Aristóteles, *Metafísica*, 350 a.C. Citações traduzidas a partir da versão disponível em <http://classics.mit.edu/Aristotle/metaphysics.html>.
- [7] José Ferrater Mora, *Dicionário de Filosofia*, Edições Loyola, 1994.
- [8] *Só Matemática - Frases Matemáticas*. Disponível em <http://www.somatematica.com.br/frases.php> (acessado em 09/04/2013).
- [9] Wikipedia (ed.), *Perspectiva (gráfica)*. Disponível em [http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva_\(gr%C3%A1fica\)](http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva_(gr%C3%A1fica)) (acessado em 09/04/2013).
- [10] J.R Newman, *The World of Mathematics*, Vol. 1, Tempus Washington, 1956.
- [11] Doherty Andrade, *Geometria Dinâmica*. Disponível em http://www.dma.uem.br/kit/textos/geometria_dinamica/ (acessado em 09/04/2013).

Recursos multimeios utilizados

- [12] Allan Kardec Souza Filho, *Recurso em GeoGebra utilizado na aula 3*. Disponível para download em <http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/perspectiva-geometria-e-trigonometria-e-multiplicacao-de-matrizes-e-perspectiva> (acessado em 09/04/2013).
- [13] International GeoGebra Institute (ed.), *GeoGebra 5.0 Beta Release (with 3D)*. Disponível para download em http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/roadmap (acessado em 09/04/2013).
- [14] Ministério da Educação (ed.), *O Mundo da Matemática - Perspectiva*”. Disponível em http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital1/episodios/ep_14.html (acessado em 09/04/2013).
- [15] *Brasil 2 x 2 Itália, melhores momentos - Amistoso Internacional, 21/03/2013*. Disponível em http://www.youtube.com/watch?v=Y25Ep_zfpN0 (acessado em 09/04/2013).

-
- [16] *Anamorfose com comentários e música*. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=zQLEL4PHMd4> (acessado em 09/04/2013).