



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

FÁBIO AUGUSTO DE ABREU

**Um estudo sobre a interseção de cilindros e
outros sólidos relacionados**

Campinas

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

FÁBIO AUGUSTO DE ABREU

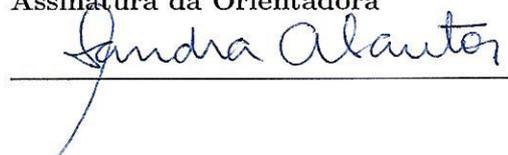
UM ESTUDO SOBRE A INTERSEÇÃO DE CILINDROS E OUTROS
SÓLIDOS RELACIONADOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Sandra Augusta Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO FÁBIO AUGUSTO DE ABREU, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. SANDRA AUGUSTA SANTOS.

Assinatura da Orientadora



A handwritten signature in blue ink, reading "Sandra Augusta Santos", is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive, with the first letter 'S' being particularly large and stylized.

CAMPINAS
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Ab86e Abreu, Fábio Augusto de, 1982-
Um estudo sobre a interseção de cilindros e outros sólidos relacionados /
Fábio Augusto de Abreu. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Sandra Augusta Santos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Arquimedes. 2. Cavalieri, Princípio de. 3. Geometria. I. Santos, Sandra
Augusta, 1964-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A study about the intersection of cylinders and related solids

Palavras-chave em inglês:

Archimedes

Cavalieri's principle

Geometry

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Sandra Augusta Santos [Orientador]

Suzana Lima de Campos Castro

Claudina Izepe Rodrigues

Data de defesa: 26-02-2016

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 26 de fevereiro de 2016
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS

Prof(a). Dr(a). SUZANA LIMA DE CAMPOS CASTRO

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Dedico este trabalho aos que me antecedem na tríade GI-RA-FA:
minha família, minha vida, Gissele e Raul.*

Agradecimentos

À minha esposa, Gissele, pelo companheirismo, pelo incentivo, pelo carinho, pelo amor, pela paciência e pela ajuda. Em todos os momentos, sempre comigo. Para sempre contigo.

Ao meu filho, Raul, luz que me guiou no fim deste trabalho.

Aos meus pais, que buscaram sempre proporcionar o melhor para mim e meus irmãos.

Aos meus queridos irmãos, pela união e apoio em todos os momentos, apesar da distância.

Aos meus sogros, Eliana e Paulo, e cunhados, Rafael e Ricardo, por me acolherem como um membro da família.

Ao Dimas, "primo", colaborador na pesquisa.

Ao Felipe, por me disponibilizar sua casa durante o curso de verão.

À minha orientadora, Sandra, por me aceitar orientar, pelo tema proposto e pela paciência em todo o trabalho.

Aos membros da banca por aceitarem participar da minha caminhada.

Aos professores/coordenadores/colaboradores do programa PROFMAT e em especial aos professores da UNICAMP, que apesar de todas as adversidades, contribuíram para instituí-lo e tornar possível o sonho de muitos que lutam por uma educação de qualidade.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual esse Mestrado dificilmente seria levado a termo.

Aos antigos amigos, da EMEF Ernani Barros Morgado, e aos novos, do IFMG Betim.

E por fim, a todos os meus colegas do curso Profmat, pela interação e coleguismo, em especial os parceiros da carona, Marcos, Jailton e Kiscinger (KS, obrigado pela ajuda com o \LaTeX), que faziam das viagens de sexta-feira momentos de descontração e estudo em grupo.

Resumo

A obra *Sobre a Esfera e o Cilindro de Arquimedes* apresenta a coincidente razão entre as áreas de uma esfera e do cilindro circunscrito a essa esfera e entre seus volumes. Partindo dessa premissa, este trabalho busca a extensão do resultado do matemático grego para novos pares de sólidos: os *duplos-bolos* e os prismas que os circunscrevem. Para chegar a esse objetivo, estuda-se um caso particular desses sólidos: o *bicilindro* e o cubo que o circunscreve – objetos que são relacionados na supracitada literatura do matemático grego e também em outras fontes históricas, como em um dos primeiros registros remanescentes da matemática chinesa, o *Nove Capítulos na Arte Matemática*. Um argumento recorrente que merece destaque no trabalho é o princípio de Cavalieri para volumes, que o aproxima aos estudantes de ensino médio, enquanto que demonstrações alternativas, utilizando-se do Cálculo Diferencial e Integral, podem ser melhor compreendidas por alunos de nível superior. Dessa forma, contribui-se para a aplicação desses conceitos na elaboração de sequências didáticas.

Palavras-chave: Arquimedes, Princípio de Cavalieri, Áreas e Volumes, Bicilindros, Duplos-bolos.

Abstract

Archimedes' book *On the Sphere and Cylinder* shows the same ratio between the surface areas of the sphere and its circumscribed cylinder, and between their volumes. Starting from this premise, this work seeks to the extension of the result obtained by the Greek mathematician to a new pair of solids: the *doublecake* and its circumscribing prism. To reach that, a particular case of it is examined: the *bicylinder* and its circumscribing cube – objects that are mentioned at the aforementioned literature of the Greek mathematician and also at other historical sources, as in one of earliest registers of Chinese mathematics, the *Nine Chapters on the Mathematical Art*. A recurring topic that deserves to be emphasized is the Cavalieri Principle for volumes, which make this dissertation accessible to high school students, whereas alternative demonstrations, using differential and integral calculus, could be better understood by college students. Thus, the work contributes to the use of these concepts at the elaboration of teaching sequences.

Keywords: Archimedes, Cavalieri's Principle, Surfaces and Volumes, Bicylinders, Doublecakes.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Bicilindro em destaque na intersecção de dois cilindros	11
Figura 2 – Medalha Fields	14
Figura 3 – Princípio de Cavalieri	16
Figura 4 – Cilindro e prisma	17
Figura 5 – Seção paralela à base do tetraedro	18
Figura 6 – Cone e tetraedro	19
Figura 7 – Princípio de Cavalieri para a esfera	19
Figura 8 – Cilindro e superfície lateral planificada	20
Figura 9 – Cone e superfície lateral planificada	21
Figura 10 – Casca esférica	22
Figura 11 – Visualização do bicilindro e do cubo circunscrito	24
Figura 12 – Construção da metade superior do bicilindro pelo método chinês.	25
Figura 13 – Bicilindro circunscrevendo a esfera.	25
Figura 14 – Um oitavo do cubo "original".	27
Figura 15 – Seções planas comparadas entre o Mhfg e a pirâmide.	28
Figura 16 – Princípio de Cavalieri para o bicilindro	28
Figura 17 – O bicilindro e suas faces (fatias)	30
Figura 18 – Vistas superior e frontal do bicilindro e sua planificação	30
Figura 19 – Bicilindro inscrito no cubo	31
Figura 20 – Intersecção de 4 cilindros.	33
Figura 21 – Duplo 8-bolo	33
Figura 22 – Duplo-bolo resultante da intersecção de 4 cilindros	34
Figura 23 – Construção do 3- e de 5-bolo	34
Figura 24 – Duplo 4-bolo irregular	35
Figura 25 – Duplo 5-bolo e prisma circunscrito	35
Figura 26 – Base do prisma circunscrito ao duplo 6-bolo.	36
Figura 27 – Princípio de Cavalieri no duplo 6-bolo	37
Figura 28 – Descrição geométrica para calcular o volume de uma fatia do duplo n-bolo	39
Figura 29 – Descrição geométrica do cálculo da área de uma fatia do duplo n-bolo	40
Figura 30 – Duplo 8-bolo	43

Sumário

	Introdução	11
1	ÁREAS E VOLUMES	13
1.1	Princípio de Cavalieri	16
1.1.1	Volume do cilindro	17
1.1.2	Volume do cone	17
1.1.3	Volume da esfera	19
1.2	Áreas	20
1.2.1	Área do cilindro	20
1.2.2	Área do cone	21
1.2.3	Área da esfera	21
1.2.4	Área da esfera via Cálculo Integral	22
2	O BICILINDRO E A RAZÃO ARQUIMEDIANA	24
2.1	Volume do bicilindro	25
2.1.1	Procedimento chinês	26
2.1.2	Outra aplicação do princípio de Cavalieri	28
2.1.3	Integral das seções do bicilindro	29
2.2	Área do bicilindro	29
2.3	A razão 2:3 para bicilindros	31
3	O DUPLO-BOLO E A RAZÃO ARQUIMEDIANA	33
3.1	O prisma que circunscreve o duplo-bolo	35
3.2	Volume do duplo-bolo	36
3.2.1	Via princípio de Cavalieri	37
3.2.2	Via Cálculo Integral	38
3.3	Área do duplo-bolo	39
3.4	A razão 2:3 para duplos-bolos	40
3.5	E quando $n \rightarrow \infty$?	41
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
	BIBLIOGRAFIA	44

Introdução

A razão entre as áreas das superfícies de uma esfera e do cilindro circunscrito a essa esfera, bem como a razão entre os volumes dos mesmos sólidos, descobertas por Arquimedes e publicadas no seu livro *Sobre a Esfera e o Cilindro*, servem como base para o desenvolvimento do presente trabalho. Inicialmente, como elemento de ligação com os Ensinos Fundamental e Médio, busca-se o resgate histórico dos conceitos matemáticos envolvidos, ou seja, as áreas e volumes da esfera, cilindro e cone serão obtidos, na maioria dos casos, utilizando fundamentos da matemática básica, sem elementos de cálculo diferencial e integral. A essa discussão, sucederá o estudo da mesma razão, agora envolvendo outros sólidos: o *bicilindro* - sólido proveniente da intersecção de dois cilindros retos de eixos ortogonais (figura 1) e o cubo que o circunscreve.

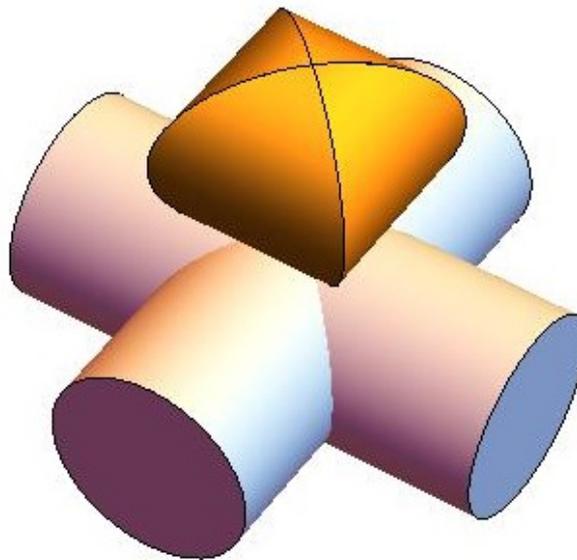


Figura 1 – Bicilindro em destaque na intersecção de dois cilindros (figura extraída de [18]).

A determinação do volume do bicilindro será feita de três maneiras. Inicialmente, uma demonstração vinda do outro lado do mundo, há mais de 1500 anos, mostra quão engenhosa era a matemática chinesa, utilizando-se inclusive das ideias do princípio de Cavalieri, que só viria a ser enunciado pelo matemático italiano em pouco mais de um milênio depois. Tal recurso (Princípio de Cavalieri), frequentemente apresentado em livros didáticos de Ensino Médio para algumas demonstrações de fórmulas de volume, também é a base para a segunda demonstração do volume do bicilindro. Para finalizar, a terceira demonstração, relativamente simples, utiliza-se de elementos básicos do Cálculo integral.

Uma extensão do resultado encontrado para o bicilindro será discutida ao introduzir sólidos formados pela intersecção de três ou mais cilindros, de eixos concorrentes

e coplanares, formando ângulos congruentes entre si. Tais sólidos serão aqui denominados *duplo bolos*, com inspiração no termo *doublecake* utilizado em [12] e traduzido dessa maneira em [14]. Para relacionar áreas e volumes, considerar-se-á o prisma reto que circunscribe o duplo bolo, cuja base possui número de lados igual ao dobro do número de cilindros que se intersectam.

1 Áreas e Volumes

Arquimedes de Siracusa (287- 212 a.C.) foi um dos mais notáveis matemáticos gregos, a quem são atribuídas diversas invenções e descobertas. Seu trabalho em Hidrostática foi pioneiro e, pautado nele, outros resultados importantes foram atingidos. Na matemática, foi fundamental sua contribuição para o desenvolvimento do que viria a ser conhecido por Cálculo Diferencial e Integral, estudado por Newton e Leibniz. Como destacado em [11], não podemos, efetivamente, considerá-lo o “descobridor” do cálculo devido a alguns fatores indispensáveis, dentre eles: a introdução explícita do conceito de limite (os gregos mantinham uma distância abismal do infinito, como menciona [15]) e o uso de um algoritmo computacional geral para calcular áreas e volumes (esses cálculos eram feitos a partir de cada problema proposto e não se utilizava de resultados mais gerais e previamente estabelecidos). Sua obra *Sobre a Esfera e o Cilindro*, vol. 1, é estruturada com muito rigor, a partir de definições, postulados e proposições. Dentre essas proposições, destacam-se as

Proposição 33. *A superfície de toda esfera é quatro vezes o maior círculo contido nela.*

Proposição 34. *Toda esfera é quatro vezes o cone que tem como base o maior círculo da esfera e como altura, o raio da esfera.*

As demonstrações dessas proposições podem ser encontradas em [4, 15] e são baseadas em um procedimento chamado *dupla redução ao absurdo*. Essa argumentação intrigou muitos estudiosos, uma vez que não permite “descobrir” um valor para o que se está querendo encontrar, mas apenas confirmar que tal valor é o correto. Por exemplo: na demonstração da Proposição 34, Arquimedes prova que o volume da esfera não pode ser diferente de $(4/3)\pi R^3$. Não se sabia como Arquimedes tinha o conhecimento prévio desses valores. Como é destacado em [4], somente no início do séc. XX foi encontrado um manuscrito de um livro de Arquimedes intitulado *O Método*, no qual ele mostra mecanicamente como chegou a alguns resultados. Ainda salienta que esses resultados não são definitivos por não haver uma demonstração. Segue um trecho da carta de Arquimedes a Eratóstenes, na qual ele afirma ter descoberto o “Método”:

"...julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de um certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de Matemática por meios mecânicos... Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento..." [5]

Das proposições acima, resulta um corolário que é o elemento motivador deste

trabalho:

Corolário. *E, sendo provadas essas proposições, é óbvio que todo cilindro, que tem como base o maior círculo da esfera e, como altura, o diâmetro da esfera é uma vez e meia a esfera e sua superfície, com as bases, é uma vez e meia a superfície da esfera.*

Dessa forma, Arquimedes relacionou os volumes e as superfícies da esfera e de seu cilindro circunscrito. Logo,

$$\frac{\text{Área(cilindro)}}{\text{Área(esfera)}} = \frac{\text{Volume(cilindro)}}{\text{Volume(esfera)}} = \frac{3}{2} = 1.5. \quad (1.1)$$

Com esse resultado, Arquimedes colocava definitivamente seu nome na história da Matemática, tendo sido, inclusive, o escolhido para estampar a mais importante premiação matemática mundial: a *medalha Fields*.



Figura 2 – Medalha Fields (figura extraída de <http://goo.gl/gwCS6w>).

A medalha Fields foi desenhada pelo escultor canadense Robert Tait McKenzie. Em sua frente (figura a esquerda em 1), tem-se o busto de Arquimedes, seu nome (em grego) e a inscrição (em latim) *TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI*, que significa “*Superar os limites da inteligência e conquistar o universo*”. Na parte de trás (figura a direita em 1), aparece o desenho de uma esfera inscrita em um cilindro com a frase (novamente em latim): *CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE*, que significa “*Matemáticos de todo o mundo reunidos prestam homenagem por obras notáveis*” [5]. O desenho da esfera inscrita em um cilindro remete ao resultado acima descrito em (1.1), que agora será demonstrado.

Na terminologia atual, é fácil chegar ao resultado (1.1), utilizando as conhecidas fórmulas de áreas e volumes. Além da esfera inscrita ao cilindro, também será analisado o cone inscrito no cilindro, cujas bases são coincidentes.

Sejam S_1 , S_2 e S_3 os sólidos descritos por:

S_1 : Cilindro reto equilátero, ou seja, altura e diâmetro da base possuem a mesma medida $2R$;

S_2 : Esfera de raio R ;

S_3 : Cone reto de altura igual ao diâmetro $2R$ da base.

Considerando as medidas acima, o cilindro circunscreve tanto a esfera quanto o cone. Assim, os cálculos dos volumes de tais sólidos estão descritos a seguir,

$$V_{S_1} = A_b \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3, \quad (1.2)$$

$$V_{S_2} = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad (1.3)$$

$$V_{S_3} = \frac{1}{3}A_b \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R = \frac{2}{3}\pi R^3. \quad (1.4)$$

Logo,

$$V_{S_1} : V_{S_2} : V_{S_3} = 3 : 2 : 1. \quad (1.5)$$

Analogamente, os cálculos das áreas são dados por:

$$A_{S_1} = 2A_b + A_L = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2, \quad (1.6)$$

$$A_{S_2} = 4\pi R^2, \quad (1.7)$$

$$A_{S_3} = A_b + A_L = \pi R^2 + \pi Rg = \pi R^2 + \pi R \cdot R\sqrt{5} = \pi R^2(1 + \sqrt{5}). \quad (1.8)$$

Portanto,

$$A_{S_1} : A_{S_2} : A_{S_3} = 3 : 2 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (1.9)$$

Tomando os resultados referentes ao cilindro e à esfera nas equações (1.5) e (1.9), chega-se ao resultado de Arquimedes (1.1).

As fórmulas utilizadas acima podem ser demonstradas sem usar elementos do cálculo integral, com exceção à área da esfera, para qual será dada uma visão intuitiva da demonstração, com aplicabilidade no Ensino Médio, mas que não pode ser reconhecida pelo rigor.

Para demonstrar as fórmulas que calculam os volumes do cilindro, do cone e da esfera, utiliza-se o *Princípio de Cavalieri*.

1.1 Princípio de Cavalieri

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes) [10] (cf. figura 3).

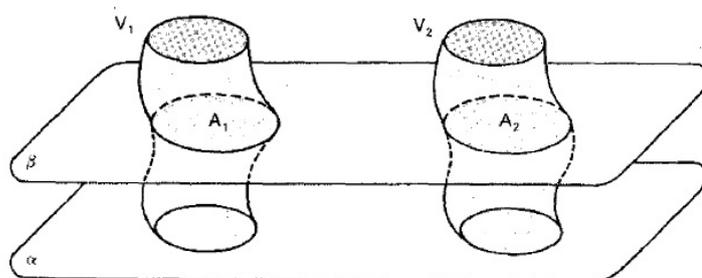


Figura 3 – Princípio de Cavalieri (figura extraída de [10]).

Esse é o enunciado mais frequente em livros didáticos para o resultado do matemático italiano para volumes. Tratado como postulado no Ensino Médio, o princípio de Cavalieri é um, ou melhor, dois teoremas (na essência, usam do mesmo raciocínio, mas relacionam diferentes indivisíveis), como bem destaca Cecilia Yumi Kurokawa em sua dissertação de Mestrado (PROFMAT) [20] e apresenta suas demonstrações.

No já citado “Método” de Arquimedes, a ideia dos indivisíveis presente no trabalho de Cavalieri já aparecia, mas como o geômetra grego não trabalhava com a ideia de limite (como mencionado acima, ele “fugia” do infinito), tinha que formalizar as suas demonstrações por meio da dupla redução ao absurdo, um processo longo e exaustivo. A partir do séc. XVI, alguns matemáticos tentaram evitar essa argumentação e passaram a explorar as possibilidades de tomar limites. Dentre esses matemáticos, destacam-se Simon Stevin, Luca Valerio, Johann Kepler e Galileu Galilei, padrinho matemático de Cavalieri e que o incentivou a publicar seu raciocínio de indivisíveis [7].

As novidades propostas por Cavalieri, que diferenciavam seu raciocínio, segundo [11], eram basicamente duas:

- Estabelecimento de uma relação biunívoca entre os elementos indivisíveis de *duas* figuras geométricas dadas, ao invés de considerar como indivisíveis infinitas partes de uma figura dada. Se tal correspondência estabelecesse uma razão (constante), então Cavalieri podia concluir que as áreas ou volumes das figuras dadas tinham a mesma razão. Certamente um raciocínio muito eficaz quando se conhece a área ou o volume de uma das figuras.
- Sobre os infinitesimais, Cavalieri considerava uma figura geométrica composta de um número indefinido de indivisíveis de uma dimensão inferior, ou seja, ele considerava

segmentos de reta paralelos e equidistantes compondo uma área e seções planas paralelas e equidistantes compondo um volume. Isso difere do raciocínio "tradicional" da época, que considerava uma figura geométrica sendo composta de indivisíveis de mesma dimensão (áreas ou volumes infinitesimais), isto é, subdividia-se um(a) volume(área) em infinitésimos(as) volumes (áreas).

Nas subseções seguintes o Princípio (Teorema) de Cavalieri para volumes será utilizado muitas vezes. O objetivo é demonstrar algumas fórmulas que calculam volumes de sólidos tradicionais (esfera, cilindro, cone, entre outros) e também de alguns não tão óbvios (bicilindro e duplo-bolo) da geometria espacial.

1.1.1 Volume do cilindro

Considere um cilindro de altura h e área da base $B_1 = B$ e um prisma de altura h e área da base $B_2 = B$. O cilindro e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes isto é, com mesma área.

Suponha que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α e estão contidos num dos semi-espacos determinados por α .

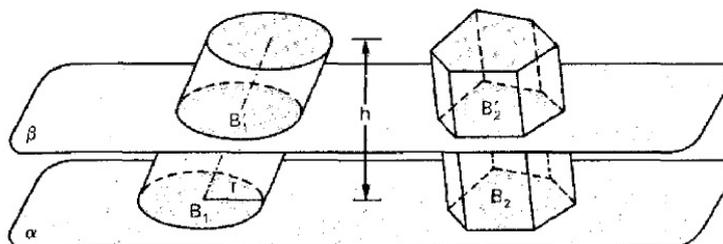


Figura 4 – Cilindro e prisma (figura extraída de [10]).

Qualquer plano β paralelo a α , que secciona o cilindro, também secciona o prisma e as seções (B'_1 e B'_2 , respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases ($B'_1 \equiv B_1$, $B'_2 \equiv B_2$ e $B_1 \equiv B_2 \equiv B$). Logo, $B'_1 \equiv B'_2$. Então, pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma (cf. Figura 4) têm volumes iguais:

$$V_{cilindro} = V_{prisma} = B_2 \cdot h = B \cdot h = \pi r^2 \cdot h. \quad (1.10)$$

1.1.2 Volume do cone

Um resultado relativo a tetraedros deve ser considerado para dar suporte à demonstração da fórmula do volume do cone.

Lema 1.1. Quando se secciona um tetraedro por um plano paralelo à base, a razão entre as áreas da secção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.

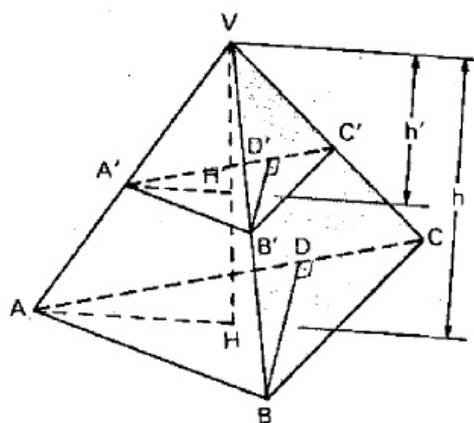


Figura 5 – Seção paralela à base do tetraedro (figura extraída de [10]).

Demonstração. Considerando a Figura 5, é fácil ver que os triângulos $VH'A'$ e VHA são semelhantes, pois as retas $\overleftrightarrow{A'H'}$ e \overleftrightarrow{AH} são paralelas, pelo fato de serem intersecções de planos paralelos a um terceiro. Logo,

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}.$$

Como os ângulos da secção ($\triangle A'B'C'$) e os ângulos da base ($\triangle ABC$) são congruentes, pois seus lados são respectivamente paralelos, segue que a secção e a base são triângulos semelhantes. Da mesma forma, $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$. Assim,

$$\frac{h'}{h} = \frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{B'D'}{BD},$$

sendo $B'D'$ e BD duas respectivas alturas da secção e da base.

Finalmente, tem-se que

$$\frac{\text{Área}(\triangle A'B'C')}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{\frac{1}{2}(A'C') \cdot (B'D')}{\frac{1}{2}(AC) \cdot (BD)} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{h'^2}{h^2}$$

□

Considere agora um cone de altura $H_1 = h$ e área da base $B_1 = B$ e um tetraedro de altura $H_2 = h$ e área da base $B_2 = B$. O cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes.

Suponha que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α e que os vértices estão num mesmo semi-espço dos determinados por α .

Qualquer plano secante β paralelo a α , que secciona o cone e dista h' do seu vértice, também secciona o tetraedro, e sendo as áreas das seções B'_1 e B'_2 , respectivamente,

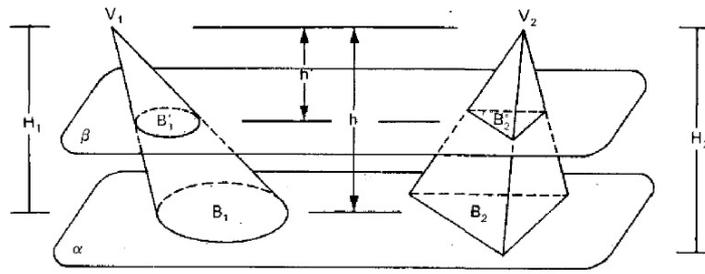


Figura 6 – Cone e tetraedro (figura extraída de [10]).

tem-se pelo Lema 1.1 que

$$\frac{B_1'}{B_1} = \frac{h'^2}{h^2}, \frac{B_2'}{B_2} = \frac{h'^2}{h^2} \implies \frac{B_1'}{B_1} = \frac{B_2'}{B_2}.$$

Como $B_1 = B_2 = B$, segue que $B_1' = B_2'$. Então, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais

$$V_{cone} = V_{tetraedro} = \frac{1}{3}B_2h = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2h. \tag{1.11}$$

1.1.3 Volume da esfera

Considere um cilindro equilátero de raio da base r (altura $2r$) e seja S o ponto médio do eixo do cilindro. Tome dois cones tendo como bases as do cilindro e S como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado *clépsidra*). O sólido que está dentro do cilindro e fora da clépsidra será designado por X (tal sólido é chamado *anticlépsidra*).

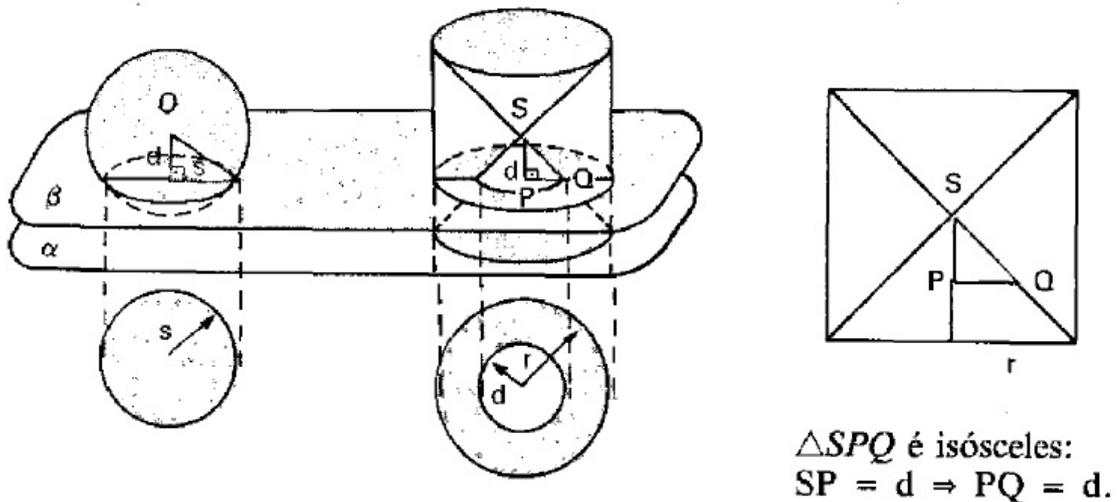


Figura 7 – Princípio de Cavalieri para a esfera (figura extraída de [10]).

Considere agora uma esfera de raio r tangente a um plano α que contém a base do cilindro que originou o sólido X e tal que os dois sólidos, esfera e sólido X , estejam num mesmo semi-espaco dos determinados por α .

Qualquer plano β secante à esfera e paralelo a α , distando d ($< r$) do centro da esfera (e, conseqüentemente, do vértice comum do sólido X , o ponto S), também secciona o sólido X de modo que

$$\text{Área da seção na esfera} = \text{Área}(\text{círculo}) = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2),$$

$$\text{Área da seção no sólido } X = \text{Área}(\text{coroa circular}) = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2).$$

Dessa forma, as áreas das seções na esfera e no sólido X são iguais. Então, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm volumes iguais. Assim

$$V_{\text{esfera}} = V_X = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (1.12)$$

1.2 Áreas

O estudo das áreas de superfícies curvas e até mesmo o próprio conceito de superfície podem se mostrar muito complexos se abordados com maior generalidade. Dessa forma, optou-se por apresentar as demonstrações clássicas, utilizando conceitos elementares encontrados em livros como [10, 22].

1.2.1 Área do cilindro

Considere um cilindro circular reto de altura h , cuja base é um círculo de raio R . Sua superfície é formada por dois círculos de raio R mais a *superfície lateral*, reunião de segmentos de comprimento h perpendiculares à base, levantados a partir dos pontos da circunferência básica. Cortando o cilindro ao longo de um desses segmentos, é possível “desenrolar” sua superfície lateral, sem alterar a área, de modo a obter um retângulo de base $2\pi R$ e altura h , como mostra a Figura 8.

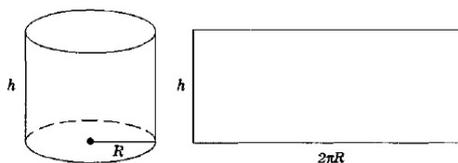


Figura 8 – Cilindro e superfície lateral planificada (figura extraída de [22]).

Logo, a área da superfície lateral do cilindro é igual à área desse retângulo, ou seja, $2\pi Rh$. Assim,

$$A_{\text{cilindro}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R). \quad (1.13)$$

1.2.2 Área do cone

O procedimento utilizado na demonstração anterior é aqui repetido, ou seja, desenvolver a superfície lateral de um cone no plano sem alterar sua área. Considere o cone reto de altura h , com base num círculo de raio R . Sua área é formada pela base (círculo) e pela superfície lateral, que é a reunião de todos os segmentos de reta ligando o vértice do cone aos pontos da circunferência da base. Num cone reto, esses segmentos têm o mesmo comprimento l , denominado *geratriz* do cone. Tomando o triângulo formado pela altura do cone, um raio da base e uma geratriz, todos adjacentes, fica claro que o mesmo é retângulo, de hipotenusa l , como ilustrado na Figura 9.

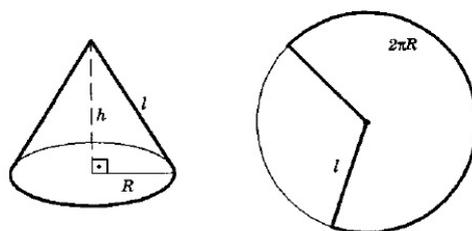


Figura 9 – Cone e superfície lateral planificada (figura extraída de [22]).

$$l = \sqrt{h^2 + R^2}. \quad (1.14)$$

Assim, desenvolvendo a superfície lateral num plano, obtém-se um setor circular de raio l o qual subentende um arco de circunferência de comprimento $2\pi R$. A área lateral A_L do cone é igual à área desse setor, a qual é diretamente proporcional ao comprimento de arco que ele subentende. Logo,

$$\frac{A_L}{\pi l^2} = \frac{2\pi R}{2\pi l} = \frac{R}{l} \implies A_L = \pi l R. \quad (1.15)$$

1.2.3 Área da esfera

Diferentemente do cilindro e do cone, não é possível desenvolver a superfície da esfera num plano, ou seja, fazer cortes nela e depois aplicá-la no plano, sem dobrar nem esticar, mantendo inalterada sua área. Para chegar a uma fórmula para a área da esfera, mesmo que não seja de forma rigorosa, é preciso a noção de limite. A demonstração formal da área da superfície esférica utiliza-se do Cálculo Integral e está contemplada na próxima subseção. Já o procedimento usado por Arquimedes para chegar à área da esfera pode ser acompanhado em [15].

Considere uma esfera de raio R . Dado um número positivo h , considere outra esfera de mesmo centro, porém de raio $R + h$. O volume V_Y da região entre essas duas esferas concêntricas é dado por

$$V_Y = \frac{4}{3}\pi(R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi[(R+h)^3 - R^3] = \frac{4}{3}\pi[3R^2h + 3Rh^2 + h^3].$$

A partir desse cálculo, pode-se escrever que

$$\frac{V_Y}{h} = \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3Rh + h^2). \quad (1.16)$$

Tal região Y pode ser vista como uma “casca” esférica de espessura h , como mostra a Figura 10.

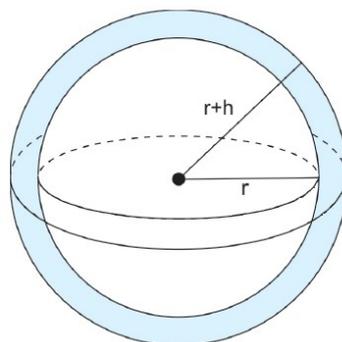


Figura 10 – Casca esférica (figura extraída de [25]).

Então é aceitável que, quanto menor for essa espessura, mais próximo o volume da casca fica da área da esfera de raio R . Além disso, as parcelas $3Rh$ e h^2 em (1.16) ficam cada vez mais insignificantes à medida que h diminui. Na notação de limites, ficaria $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_X}{h} = A_{esfera}$ e $\lim_{h \rightarrow 0} 3Rh = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0$ e, portanto, de (1.16) temos:

$$A_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 0 + 0) = 4\pi R^2. \quad (1.17)$$

1.2.4 Área da esfera via Cálculo Integral

Um resultado importante relativo ao cálculo de áreas de superfícies de revolução [29] será utilizado no cálculo da área da superfície esférica, a qual é gerada pela rotação de uma semi-circunferência ao redor da reta que contém seu diâmetro.

Seja C uma curva plana descrita parametricamente pelas equações $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, com f' , g' funções contínuas em $[a, b]$. Se C é percorrida uma única vez à medida que t varia de a até b , então o comprimento da curva C é

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

A área da superfície de revolução obtida pela rotação da curva C em torno do eixo x é dada por

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

A esfera de raio r é obtida pela rotação do semicírculo $x = r \cos t$, $y = rt$, $0 \leq t \leq \pi$ ao redor do eixo x . Portanto

$$\begin{aligned} A_{esfera} &= \int_0^\pi 2\pi r t \sqrt{(-rt)^2 + (r \cos t)^2} dt \\ &= 2\pi r \int_0^\pi t \sqrt{r^2(2t + \cos^2 t)} dt \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\pi t dt \\ &= 2\pi r^2 [-\cos t]_0^\pi \\ &= 2\pi r^2 \{ -[(-1) - 1] \} \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

2 O bicilindro e a razão Arquimediana

A maneira mais simples de visualizar um bicilindro é pela intersecção de dois cilindros retos iguais cujos eixos intersectam-se perpendicularmente, como foi mostrado na Figura 1.

A primeira menção ao bicilindro vem do já citado Arquimedes. Em uma de suas cartas a Eratóstenes, propõe que o volume do bicilindro é $2/3$ do volume do cubo nele circunscrito (Figura 11), justamente a razão a ser encontrada no final desse capítulo. Nessa carta, Arquimedes afirma que, juntamente ao enunciado de alguns teoremas, estão suas demonstrações, tanto mecânicas (via Método), quanto geométricas (via exaustão/dupla redução ao absurdo - as demonstrações rigorosas feitas à época eram assim chamadas, pois baseavam-se na teoria das proporções geométricas criadas por Eudoxo, como é destacado em [5]). Mas é justamente essa parte da sua obra que foi perdida (ou, quem sabe, ainda não descoberta). Em [15], uma sugestão de como Arquimedes teria calculado o volume do bicilindro através do método empírico é apresentada.

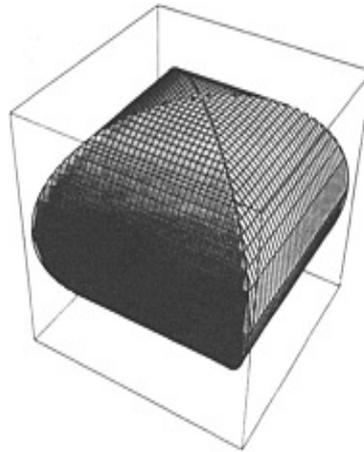


Figura 11 – Visualização do bicilindro e do cubo circunscrito (figura extraída de [8]).

Apesar de alguns *softwares* tornarem a visualização do bicilindro relativamente simples, vale lembrar que, segundo [19], Liu Hui, célebre matemático chinês do século III d.C., foi o primeiro a conceber uma figura que representava corretamente o bicilindro, ao qual se referiam por *móuhefānggài* (que vem da expressão em chinês para “dois guarda-chuvas quadrados” [33] e será designado, a partir de agora, por **Mhfg**). O estudo desse sólido se fez necessário a partir da tentativa de calcular o volume da esfera. E, curiosamente, a concepção do **Mhfg** não foi feita através da intersecção de cilindros, como foi proposto no início do capítulo (e também por Arquimedes). Para obtê-lo, Liu Hui considerou a esfera como uma pilha de círculos de raios variados (sendo no máximo igual ao raio da esfera) e substituiu cada círculo pelos quadrados que os circunscreviam. A Figura 12 mostra o

procedimento descrito acima e os caracteres chineses que representam o nome do sólido, enquanto que na Figura 13 destaca-se que, devido ao método utilizado para construir o bicilindro, fica evidente que o mesmo circunscreve a esfera.

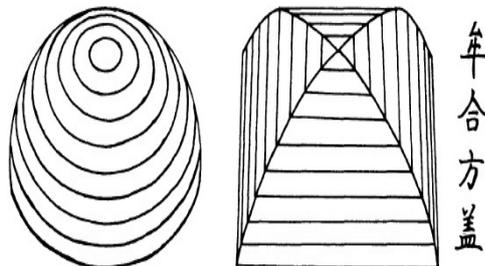


Figura 12 – Construção da metade superior do bicilindro pelo método chinês (figura extraída de [19]).

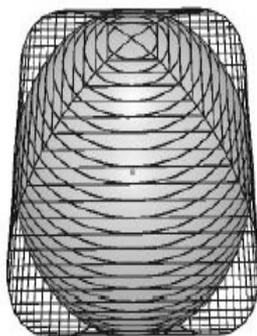


Figura 13 – Bicilindro circunscrevendo a esfera (figura extraída de <https://goo.gl/JN0iha>).

Vale lembrar que, atualmente, o bicilindro é conhecido como *sólido de Steinmetz*, devido ao engenheiro alemão Charles Proteus Steinmetz. A origem desse nome não é muito certa, mas diz-se que em uma reunião entre intelectuais, na qual ele estava presente, fora desafiado a calcular o volume do bicilindro e o fizera em menos de dois minutos [16, 31].

2.1 Volume do bicilindro

Serão apresentadas a seguir três demonstrações para o cálculo do volume do bicilindro: a primeira é destacada tanto pela relevância histórica, quanto pela elegância dos argumentos e segue o raciocínio desenvolvido na China há 1500 anos atrás. A segunda é uma aplicação mais imediata do princípio de Cavalieri, com possibilidade de desenvolvê-la no Ensino Médio. E, finalmente, a última demonstração será feita a partir do Cálculo Integral.

2.1.1 Procedimento chinês

Um dos registros mais importantes dos primórdios da Matemática chinesa é o livro *Jiu Zhang Suanshu (Nove Capítulos na Arte Matemática)* que compilava toda a matemática chinesa até então (séc. III d.C.). Esta é uma coletânea de 246 problemas (divididos em nove capítulos) e respostas, sem preocupações com demonstrações, apenas destacando procedimentos sem justificativas. Essa obra era estudada pelos matemáticos chineses, os quais faziam seus comentários a respeito dos resultados, confirmando-os ou mostrando erros, gerando novos documentos a respeito do desenvolvimento da Matemática (como funcionaram as cartas de Arquimedes aos seus contemporâneos Dositheus e Eratóstenes). Um desses registros, de 263 d.C., devido ao matemático chinês já citado, Liu Hui, é de grande valia para o estudo do bicilindro. Liu Hui foi o primeiro a se preocupar em justificar os métodos utilizados nas resoluções de problemas. No capítulo 1 de *Nove Capítulos*, um dos métodos colocados para resolver um problema de área de círculo assume que o valor de π é 3. A respeito disso, Liu Hui escreveu o que pode ser considerado um (pioneiro!) comentário de cunho pedagógico:

Aqueles que transmitem esse método às próximas gerações nunca se importaram em examiná-lo profundamente, e sim apenas repetir o que eles aprenderam de seus predecessores, assim passando o erro a frente. Sem uma explicação clara e uma justificativa definitiva é muito difícil separar a verdade da falácia.[30]

Para descobrir uma aproximação razoável para π , ele se utilizou de um método muito parecido com o da exaustão de Arquimedes, que consistia em circunscrever e inscrever o círculo com polígonos regulares para obter uma aproximação por excesso e por falta, determinando assim intervalos cada vez menores que continham o valor de π . A diferença é que Liu Hui apenas inscrevia polígonos e obteve um valor com duas casas decimais de precisão, o que o fez crer que a utilização do valor 3.14 para π fosse suficiente para efeitos práticos [30].

O problema 24 do capítulo 4 de *Nove Capítulos* aponta para a fórmula $(9/16)d^3$ para o volume da esfera de diâmetro d . Liu Hui descobriu que estava incorreto, mesmo utilizando $\pi \approx 3$. Em seus estudos, percebeu que, para chegar a essa fórmula, o equívoco estava em considerar que a razão entre os volumes da esfera e do cilindro circunscrito fosse $\pi/4$. Sua justificativa para esse erro consiste na construção do já citado **Mhfg**. Pela Figura 13, cada seção plana produz um círculo e o quadrado que o circunscreve. Dessa forma, a razão entre as suas áreas é $\pi/4$ e, conseqüentemente, a razão entre os volumes da esfera e do **Mhfg** também será $\pi/4$. Nota-se aqui o uso implícito do princípio de Cavalieri, mais de um milênio antes do italiano. Assim

$$\frac{V_{esfera}}{V_{Mhfg}} = \frac{\pi}{4}. \quad (2.1)$$

Como o bicilindro tem volume menor que o cilindro, por (2.1), fica claro o erro em assumir que a razão entre os volumes da esfera e do cilindro circunscrito seja $\pi/4$, já

que deveria ser menor que $\pi/4$ (tal razão já foi determinada no texto (1.1) e seu valor é $2/3$).

Dessa forma, Liu Hui deparou-se com o desafio de calcular o volume do **Mhfg** para, assim, chegar ao da esfera. Como não conseguiu, traduziu em forma de poema seu insucesso [32]. Coube a Tsu Ch'ung-chih e seu filho, Tsu Ch'eng-chih, após dois séculos, descobrir o volume do **Mhfg** e, conseqüentemente, o da esfera.

Para isso, observada a simetria do **Mhfg**, dividiu-o em oito *octantes*, cujas bases são quadradas de lado r (já que a esfera tem raio r), duas de suas faces são perpendiculares à base quadrada e correspondem a um quarto de um círculo de raio r e as outras duas faces são curvas. Esse octante está inscrito num cubo de aresta r , que corresponde a um oitavo do cubo que circunscreve todo o **Mhfg**, como mostra a Figura 14. O volume da diferença entre esses sólidos será calculado através do equivalente ao hoje conhecido por princípio de Cavalieri, enunciado por Tsu Ch'ung-chih em versos:

*Se volumes são construídos de blocos empilhados
E as áreas correspondentes são iguais
Então os volumes não podem ser diferentes.* [32]

A uma altura h da base do octante (e conseqüentemente do cubo que o circunscreve), a sua seção plana é um quadrado de lado s , a saber, e a seção do cubo é um quadrado de lado r . Pela Figura 15, nota-se um triângulo retângulo de catetos h e s e hipotenusa r . Dessa forma, pelo teorema de Pitágoras (que já havia sido demonstrado por Liu Hui ([30]) e era conhecido por teorema *gou-gu*), $s^2 = r^2 - h^2$. Assim, a área da diferença entre a seção do cubo e do octante (parte sombreada na Figura 15) é $r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$. Logo, pelo princípio de Cavalieri, o volume do sólido interno ao cubo e externo ao octante do **Mhfg** é igual ao de um sólido cuja seção plana a uma altura h seja um quadrado de lado h . Tal sólido era conhecido por *yángmǎ* e é muito familiar: uma pirâmide de base quadrada invertida, como mostra a Figura 15. Mas o volume da pirâmide também já havia sido demonstrado por Liu Hui no séc.III ([30]). Ou seja,

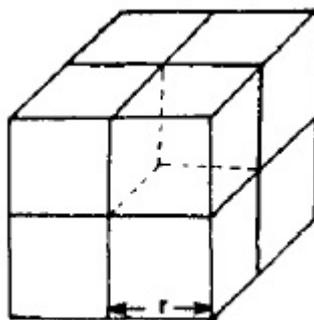


Figura 14 – Um oitavo do cubo "original"(figura extraída de [21]).

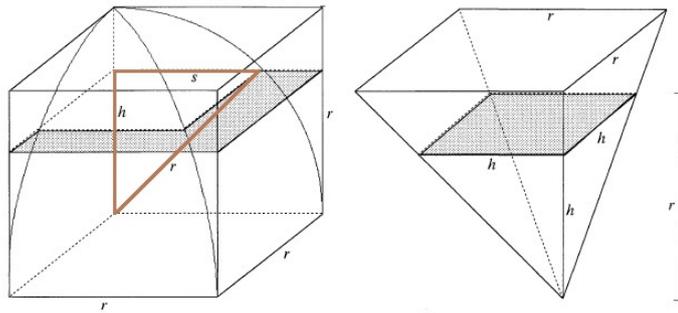


Figura 15 – Seções planas comparadas entre o **Mhfg** e a pirâmide (figura extraída de [30]).

$$V_{cubo} - V_{octante} = V_{pirâmide} \Rightarrow r^3 - \frac{1}{8} \cdot V_{\mathbf{Mhfg}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot r \Rightarrow V_{\mathbf{Mhfg}} = \frac{16}{3} r^3. \quad (2.2)$$

Logo, o volume do **Mhfg** (ou seja, do bicilindro) é $(16/3)r^3$.

Para complementar o raciocínio de Tsu Ch’ung-chih, pelo resultado anterior e pela equação (2.1), segue que

$$\frac{V_{esfera}}{V_{\mathbf{Mhfg}}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{V_{esfera}}{(16/3)r^3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2.1.2 Outra aplicação do princípio de Cavalieri

Seguindo a linha das demonstrações dos volumes até aqui e também pela simplicidade dos argumentos (como é destacado em [8]), utiliza-se, novamente, o Princípio de Cavalieri para determinar o volume do bicilindro. Para facilitar os cálculos, suponha que os eixos x e y sejam os eixos de dois cilindros que possuem raio da base r . Dessa forma, os eixos dos cilindros intersectam-se na origem e o bicilindro é simetricamente cortado pelo plano xy . Assim, para efeitos de cálculo, considerar-se-á apenas a parte de cima do bicilindro ($0 \leq z \leq r$) e o cálculo da área da intersecção de um plano paralelo ao xy e do bicilindro será em função da distância h desse plano com o plano xy . Portanto, a intersecção do plano $z = h$ com o bicilindro é um quadrado de lado $2\sqrt{r^2 - h^2}$ e sua área é $4(r^2 - h^2)$.



Figura 16 – Princípio de Cavalieri para o bicilindro (figura extraída de [8]).

Para utilizar o Princípio de Cavalieri, é preciso adotar um outro sólido cujo cálculo do volume seja elementar e tal que todo plano $z = h$ ($0 \leq h \leq r$) intersecte tal sólido numa região de área igual à calculada para a intersecção do bicilindro. Para isso, tome a parte de cima do cubo que circunscreve o bicilindro, ou seja, um paralelepípedo de base quadrada (lado $2r$) contida no plano xy e altura r . Em seguida, retire uma pirâmide cuja base é o quadrado “de cima” e o vértice é a origem. Segue que o plano $z = h$ intersecta tal sólido formando um “anel quadrado”, cuja área é $(2r)^2 - (2h)^2 = 4(r^2 - h^2)$. Logo, pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm o mesmo volume, ou seja,

$$V_{\text{bicilindro}} = 2 \cdot (V_{\text{paralelepípedo}} - V_{\text{pirâmide}}) = 2 \cdot \left(4r^2 \cdot r - \frac{1}{3} 4r^2 \cdot r \right) = \frac{16}{3} r^3. \quad (2.3)$$

2.1.3 Integral das seções do bicilindro

Em cursos de cálculo, vê-se que a integral definida de uma função em um determinado intervalo pode ser utilizada para computar várias grandezas diferentes, como por exemplo, áreas, distâncias percorridas por determinados objetos, volumes, comprimentos de curvas e centros de massa [29]. No presente trabalho, serão fundamentais duas dessas interpretações. A primeira delas é apresentada a seguir.

Seja S um sólido que está entre $z = a$ e $z = b$. Se $A(x)$ é a área da seção transversal de S no plano passa por z e é perpendicular ao eixo z , onde A é uma função contínua, então o volume de S é

$$V = \int_a^b A(x) dz$$

Considere as mesmas condições da subseção anterior, ou seja, seções planas paralelas ao plano xy em $z = h$. Além disso, cada uma dessas seções tem área $4(r^2 - h^2)$ e, para formar o bicilindro, a variação de z está entre $-r$ e r . Dessa forma, tem-se que

$$\int_{-r}^r 4(r^2 - z^2) dz = 4 \left[zr^2 - \frac{z^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{16}{3} r^3.$$

2.2 Área do bicilindro

Considerando ainda os dois cilindros de raio r cujos eixos coincidem com os eixos ordenados x e y , o raciocínio para determinar a área do bicilindro consiste em planificar suas faces. Para isso, a Figura 17 permite visualizar separadamente as quatro faces do sólido.

Com base nessa visualização, a ideia é calcular a superfície de uma fatia e assim determinar a área total do bicilindro. Assim, é necessário encontrar equações que parametrizem a fatia no plano, para proceder com a integração.

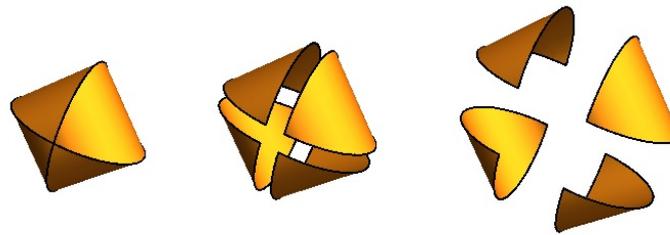


Figura 17 – O bicilindro e suas faces (fatias) (figura adaptada de [24]).

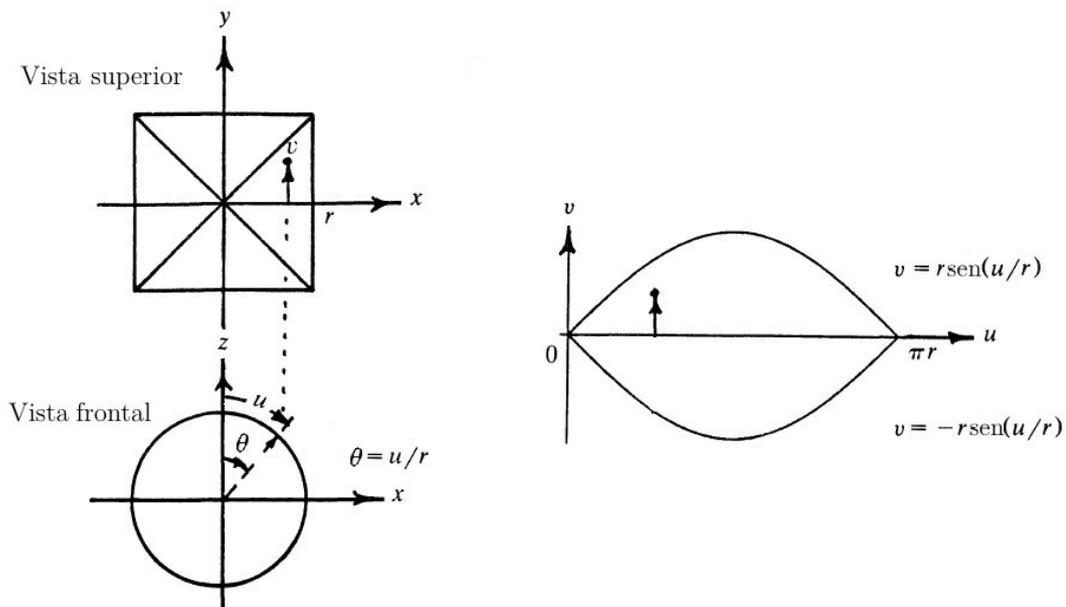


Figura 18 – Vistas superior e frontal do bicilindro e sua planificação (figura extraída de [8]).

A Figura 18 mostra as vistas de cima e de frente do sólido a fim de possibilitar uma parametrização para a fatia desenrolada em um plano auxiliar (uOv) . Uma curva senoidal delimita a planificação da fatia, que tem um formato de lente. As equações paramétricas que seguem referem-se à face cortada pelo semiplano $xz, x \geq 0$.

$$x = r \left(\frac{u}{r} \right), \quad y = v, \quad z = r \cos \left(\frac{u}{r} \right), \quad (2.4)$$

em que

$$0 \leq u \leq \pi r \quad e \quad -r(u/r) \leq v \leq r(u/r). \quad (2.5)$$

Logo, para determinar a área da superfície do bicilindro, basta calcular a área da “lente senoidal” à direita na Figura 18 usando (2.5). Para isso utiliza-se de uma outra aplicação computacional de integral definida, citada na subseção anterior, e presente em

[29] que interpreta a integral definida $\int_a^b f(x) dx$ como a área sob a curva $y = f(x)$, com f contínua, de a até b .

Segue que a área da metade superior da lente é dada por

$$\int_0^{r\pi} r \frac{u}{r} du = -r^2 \left[\cos \frac{u}{r} \right]_0^{r\pi} = 2r^2. \quad (2.6)$$

Assim, a área da lente é $4r^2$ e, portanto,

$$\text{Área}(\text{bicilindro}) = 16r^2. \quad (2.7)$$

2.3 A razão 2:3 para bicilindros

Para finalizar o segundo capítulo, a verificação de que a razão encontrada por Arquimedes (1.1) também é válida para o bicilindro e o cubo que o circunscreve (Figura 19). Para isso, é necessário calcular o volume e a área da superfície do cubo de aresta $a = 2r$, o que é muito simples.

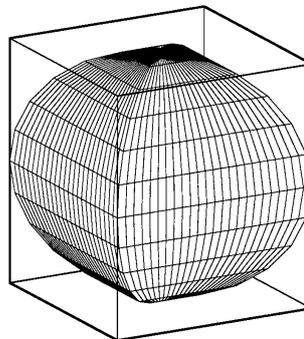


Figura 19 – Bicilindro inscrito no cubo (figura extraída de [17])

Para o cubo, segue que

$$V_{\text{cubo}} = a^3 = (2r)^3 = 8r^3 \quad (2.8)$$

e

$$A_{\text{cubo}} = 6a^2 = 6 \cdot (2r)^2 = 24r^2. \quad (2.9)$$

Assim, por (2.3) e (2.8),

$$\frac{V_{\text{bicilindro}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{(16/3)r^3}{8r^3} = \frac{2}{3} \quad (2.10)$$

e por (2.7) e (2.9), segue que

$$\frac{A_{bicilindro}}{A_{cubo}} = \frac{16r^2}{24r^2} = \frac{2}{3}, \quad (2.11)$$

confirmando as expectativas quanto à razão Arquimediana!

3 O duplo-bolo e a razão Arquimediana

Para iniciar uma extensão do resultado do capítulo anterior, é necessário conceber visualmente a intersecção de três ou mais cilindros, nas condições expostas na introdução, ou seja, tais cilindros têm raios de mesma medida (r) e eixos coplanares formando ângulos congruentes. Um exemplo está mostrado nas Figuras 20 e 21, na qual a intersecção de 4 cilindros, cujos eixos estão no plano- xy e formam ângulos de 45° entre si, formam o duplo 8-bolo, ou seja, um duplo-bolo com 8 faces congruentes.

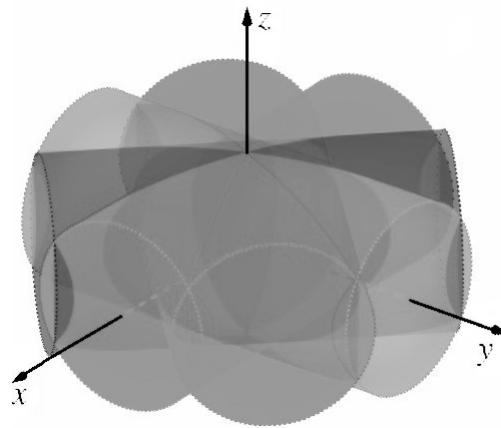


Figura 20 – Intersecção de 4 cilindros.

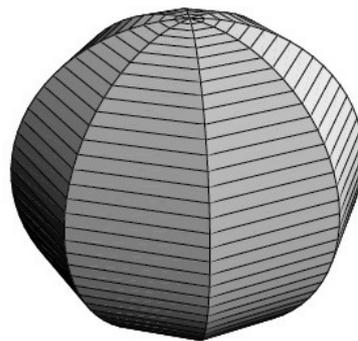


Figura 21 – Duplo 8-bolo (figura extraída de [12]).

Naturalmente, o sólido formado será simétrico com relação ao plano xy e, portanto, será dividido em duas partes congruentes para simplificar, tanto a visualização, quanto os cálculos. Cada metade do duplo-bolo será composta por *fatias*, em quantidade igual ao dobro do número de cilindros que se intersectam. Utilizando como exemplo o duplo 8-bolo da Figura 3.1duplo8bolo, é possível visualizar cada metade do sólido formado (designadas, a partir de agora, por *bolos*) e também suas 8 fatias, como detalha a Figura 22.

Percebe-se também que a seção do sólido no plano- xy é um $2n$ -gono regular de apótema r , o qual pode ser dividido em $2n$ triângulos isósceles congruentes (de altura relativa à base igual a r), que compartilham um vértice comum (a intersecção dos eixos dos cilindros) e, nele, possuem um ângulo (oposto à base) de $2\pi/2n = \pi/n$. Tais triângulos são as bases de cada fatia. Além disso, utilizando-se desse procedimento de construção dos duplo-bolos (via intersecção de cilindros), obter-se-á apenas tais sólidos com um número par de fatias.

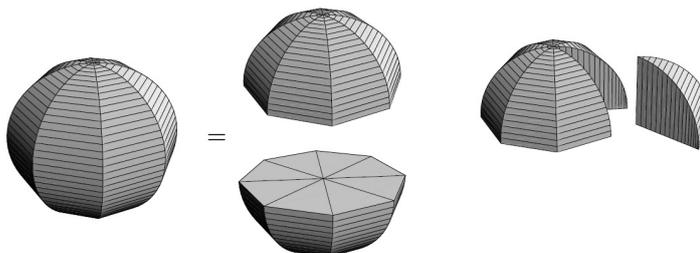


Figura 22 – Duplo-bolo resultante da intersecção de 4 cilindros (figura extraída de [12]).

Para generalizar a construção de bolos com número n ímpar de fatias, a ideia é partir da fatia para construir o bolo. Para isso, basta cortar do cilindro (de raio r) uma fatia do tamanho e da forma apropriados e construir o bolo com cópias dessas. A construção dos 3- e 5-bolos está ilustrada na Figura 23, na qual, à esquerda é destacada a forma como a fatia é “recortada” do cilindro. Somente metade da superfície exterior do cilindro é mostrada, para facilitar a visualização da “casca” da fatia. Já à direita da Figura 23, cópias das fatias encontradas à esquerda formam são justapostas para montar o bolo. Observe que a base da fatia construída é um triângulo isósceles, cuja altura relativa à base é igual a r e o ângulo oposto à base é igual a $2\pi/n$.

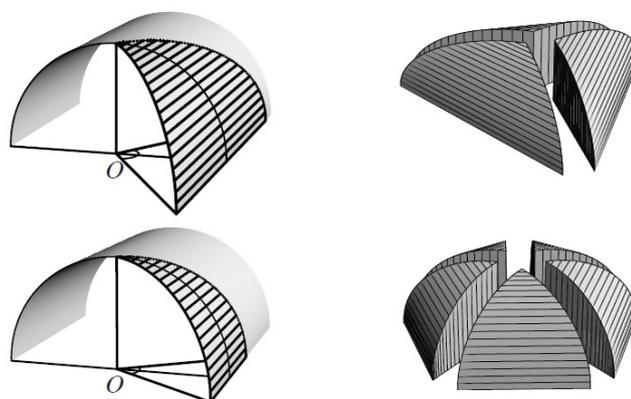


Figura 23 – Construção do 3- e de 5-bolo (figura extraída de [12]).

Note que é possível construir um duplo-bolo utilizando fatias de modo que esse ângulo não seja o mesmo para todas as fatias (desde que a soma desses ângulos para

todas as fatias seja exatamente igual a 2π). Ou até mesmo os cilindros que se intersectam podem ter raios da base distintos. Nesses casos, define-se o sólido formado/construído como *duplo-bolo irregular*. Em [13] alguns exemplos podem ser encontrados, como o da Figura 24, que corresponde a parte de cima (bolo) de um bicilindro irregular, pois os dois cilindros que se intersectam tem raios da base com comprimentos diferentes.

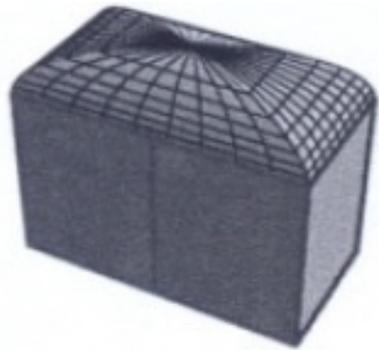


Figura 24 – Duplo 4-bolo (bicilindro) irregular (figura extraída de [13]).

3.1 O prisma que circunscreve o duplo-bolo

No capítulo anterior viu-se que o bicilindro (duplo 4-bolo) pode ser circunscrito por um cubo de aresta $2r$. Pela generalização desse objeto (duplo-bolo), faz-se necessário o estudo dos prismas que os circunscrevem. Como mostrado na Figura 23, cada duplo-bolo é construído através de justaposições de fatias de um cilindro de raio r . Isso permite concluir que tais sólidos são circunscritos por prismas retos de base n -gonal regular (de apótema r) e altura $2r$. Um exemplo é mostrado na Figura 25.

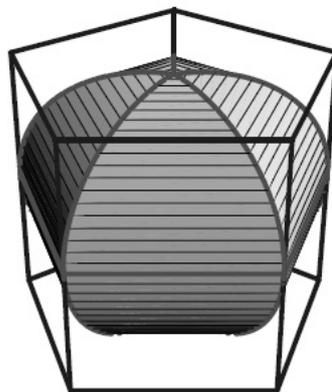


Figura 25 – Duplo 5-bolo e prisma circunscrito (figura extraída de [12]).

Para generalizar, considere a base desse prisma um n -gono regular de apótema a igual a r . Note que essa base é congruente à seção central do duplo-bolo. Para calcular o

volume e a área desse prisma em função de r , inicia-se o processo através do cálculo da área da base. Para visualizar a argumentação dos cálculos, tome um hexágono regular como o da Figura 26 a seguir. Dessa forma, $l = 2r \operatorname{tg}(\pi/n)$ e, portanto,

$$A_{base} = nr^2 \operatorname{tg}(\pi/n). \quad (3.1)$$

Como o prisma é reto de altura $2r$ e suas n faces laterais retângulos de base l e altura $2r$, seguem os cálculos para o volume (V_{prisma}) e área (A_{prisma}) do prisma circunscrito ao duplo n -bolo:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = nr^2 \operatorname{tg}(\pi/n) \cdot 2r = 2nr^3 \operatorname{tg}(\pi/n). \quad (3.2)$$

e

$$A_{prisma} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot nr^2 \operatorname{tg}(\pi/n) + n \cdot 2r \tan(\pi/n) \cdot 2r = 6nr^2 \operatorname{tg}(\pi/n). \quad (3.3)$$

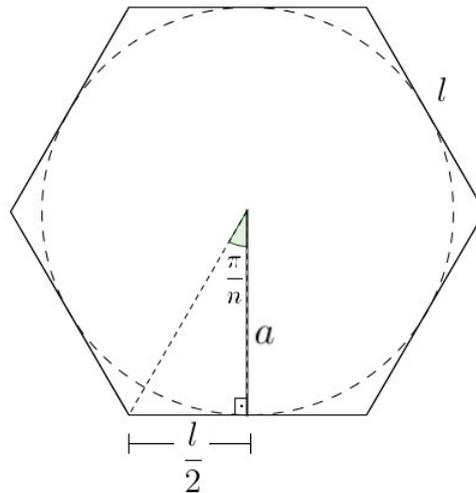


Figura 26 – Base do prisma circunscrito ao duplo 6-bolo.

3.2 Volume do duplo-bolo

O cálculo do volume do duplo n -bolo pode ser feito nos mesmos moldes do bicilindro. Ou seja, é possível encontrar a área da seção plana (paralela a xy) em uma determinada altura h e compará-la com a área da seção plana de um sólido de volume conhecido (ou simples de se calcular), para assim utilizar novamente o princípio de Cavalieri. Assim como nas subseções 2.1.2 e 2.1.3, é imediato chegar ao volume do duplo n -bolo através da integral da superfície das seções do sólido.

Para efeitos de cálculo, o plano base que contém os eixos dos cilindros continuará seguindo o exposto no capítulo anterior, ou seja, o plano xy .

3.2.1 Via princípio de Cavalieri

É natural procurar uma analogia ao que acontece com o bicilindro, já que é um caso particular de duplo-bolo ($n = 4$). Sendo assim, o sólido que será utilizado para comparar áreas com as seções do duplo n -bolo será o resultante da retirada de duas pirâmides do prisma circunscrito ao duplo n -bolo, de modo que suas bases sejam as mesmas do prisma e o vértice de ambas seja o centro do prisma/duplo n -bolo, o que está ilustrado na Figura 27. Tal sólido será aqui denominado por *anticlépsidra poligonal* e denotado por AcP .

Assim, é necessário calcular a área da seção a uma altura $z = h$ para $0 \leq h \leq r$ (pois os sólidos são simétricos em relação ao plano xy) e a área correspondente à seção da anticlépsidra poligonal a essa mesma altura h .

Vale lembrar que as seções referidas em ambos os sólidos são aquelas formadas pelas intersecções de planos paralelos ao plano xy e ao duplo n -bolo/ AcP . Um exemplo dessas seções pode ser visto na Figura 27, a qual nos inspirou a elaborar o desenvolvimento apresentado a seguir.

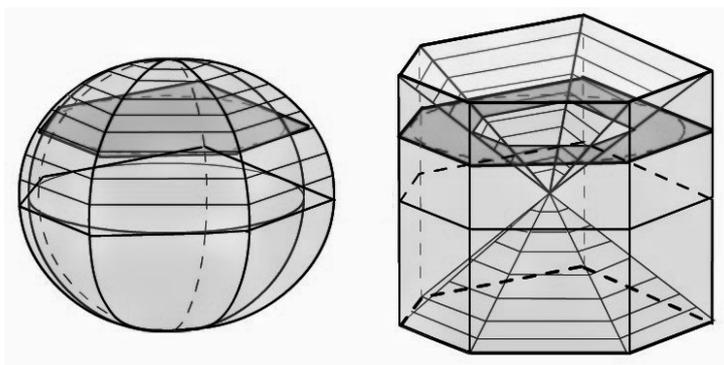


Figura 27 – Princípio de Cavalieri no duplo 6-bolo irregular (figura extraída de [27]).

Para a seção do duplo n -bolo, um n -gono regular de lado l' , é suficiente conceber o triângulo retângulo de catetos iguais ao apótema (a') da seção e a altura (distância do plano que gerou a seção à origem) e hipotenusa igual ao raio do cilindro gerador do duplo n -bolo (como exemplificado na Figura 23). Segue que

$$a' = \sqrt{r^2 - h^2} \tag{3.4}$$

e

$$l' = 2a' \operatorname{tg}(\pi/n) = 2\sqrt{r^2 - h^2} \cdot \operatorname{tg}(\pi/n). \tag{3.5}$$

Assim, a área da seção do duplo n-bolo (A'), calculada através do produto de seu apótema pelo semiperímetro é dada por:

$$A' = a' \cdot p' = \sqrt{r^2 - h^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - h^2} \cdot \text{tg}(\pi/n) = n(r^2 - h^2)\text{tg}(\pi/n). \quad (3.6)$$

Para calcular a área da seção da AcP produzida a mesma altura h do plano xy , faz-se a diferença entre as áreas da seção do prisma, descrita em (3.1) e da seção da pirâmide invertida (A''). Note que, se a altura h for máxima, ou seja, $h = r$, apótema da base e altura da pirâmide têm a mesma medida. Logo, por semelhança de triângulos, o apótema numa seção da pirâmide e a altura h são congruentes. Logo,

$$A'' = a'' \cdot p'' = h \cdot \frac{n}{2} \cdot 2h \cdot \text{tg}(\pi/n) = nh^2\text{tg}(\pi/n) \quad (3.7)$$

e, portanto,

$$A_{AcP} = A_{base} - A'' = nr^2\text{tg}(\pi/n) - nh^2\text{tg}(\pi/n) = n(r^2 - h^2)\text{tg}(\pi/n). \quad (3.8)$$

Assim, por (3.6) e (3.8), segue que $A' = A_{AcP}$ e, pelo princípio de Cavalieri, $V_{DB} = V_{AcP}$ (em que V_{DB} denota o volume do duplo n-bolo).

Mas $V_{AcP} = V_{prisma} - 2 \cdot V_{pirâmide}$ e, por (3.2), pode-se concluir que

$$V_{db} = 2nr^3\text{tg}(\pi/n) - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot nr^2\text{tg}(\pi/n) \cdot r = \frac{4}{3} nr^3\text{tg}(\pi/n). \quad (3.9)$$

3.2.2 Via Cálculo Integral

Por (3.6), é possível calcular o volume do duplo n-bolo através da integral das seções planas paralelas ao plano xy . Uma forma de visualizar geometricamente os argumentos para chegar na fórmula supracitada encontra-se na Figura 28.

É possível notar que o n-gono regular correspondente à seção do duplo n-bolo a uma altura h e formado por n triângulos isósceles de altura relativa a base $\sqrt{r^2 - h^2}$ (correspondente ao apótema (a') da seção, como foi visto em (3.4)) e base $2\sqrt{r^2 - h^2} \cdot \tan(\pi/n)$ (correspondente ao l' em (3.5)). Como as seções são obtidas através da intersecção dos planos $z = h$, $-r \leq h \leq r$ com o duplo n-bolo, então o volume desse sólido é dado por

$$\begin{aligned} V_{DB} &= \int_{-r}^r n \cdot 2\sqrt{r^2 - z^2} \cdot \sqrt{r^2 - z^2} \text{tg}(\pi/n) dz \\ &= 2n \int_0^r (r^2 - z^2)\text{tg}(\pi/n) dz \\ &= 2n\text{tg}(\pi/n) \left[zr^2 - \frac{z^3}{3} \right]_0^r \\ &= \frac{4}{3} nr^3\text{tg}(\pi/n). \end{aligned}$$

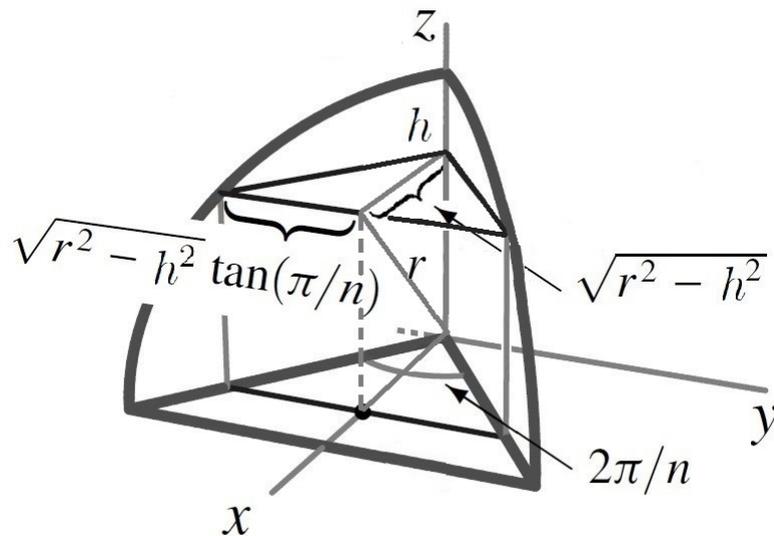


Figura 28 – Descrição geométrica para calcular o volume de uma fatia do duplo n-bolo (figura extraída de [12]).

3.3 Área do duplo-bolo

Para determinar a área do duplo n-bolo, é preciso lembrar que a superfície cilíndrica pode ser construída pela rotação de uma superfície plana. A área de uma fatia pode ser calculada pela sua planificação.

Suponha que a superfície da fatia seja desdobrada de tal modo que o arco da circunferência de raio r ao longo do meio da fatia coincida com a reta $y = 0, z = r$, paralela ao eixo x (ver Figura 29). Dessa forma, quando o comprimento ao longo desse arco é $u = r\theta$, as coordenadas x e z são $r\theta$ e $r \cos \theta$, respectivamente.

Como a fatia é proveniente de uma superfície plana, segue que sua intersecção com o plano tangente no ponto $(x, y, z) = (r\theta, 0, r \cos \theta)$ é o segmento de reta paralelo ao eixo y , com comprimento $2r\theta \operatorname{tg}(\pi/n)$. Assim, a fatia planificada é a região entre as curvas $z = \pm r\theta \operatorname{tg}(\pi/n) = \pm r(u/r) \operatorname{tg}(\pi/n)$ para $0 \leq u \leq \frac{r\pi}{2}$.

Logo, a área do duplo n-bolo é

$$A_{db} = 2n \int_0^{r\pi/2} 2r \frac{x}{r} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} dx = 4nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \quad (3.10)$$

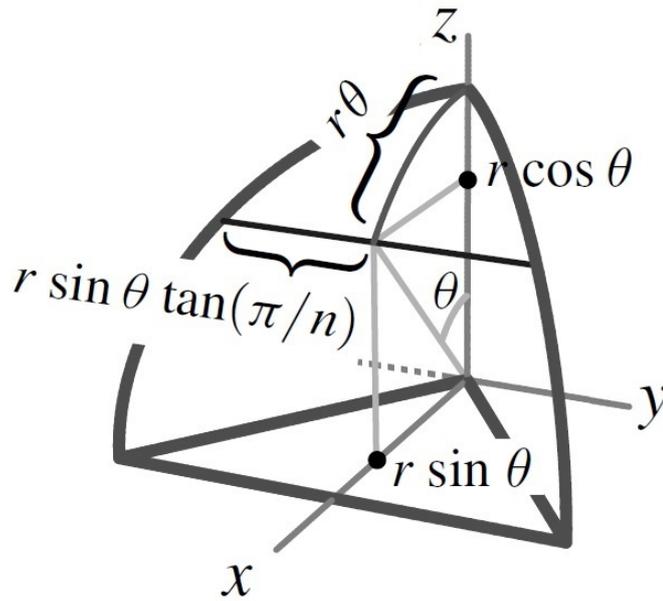


Figura 29 – Descrição geométrica do cálculo da área de uma fatia do duplo n-bolo (figura extraída de [12]).

3.4 A razão 2:3 para duplos-bolos

Para comprovar a validade da razão arquimediana para esse par de objetos (duplo-bolo/prisma), é necessário avaliar o quociente entre seus volumes e também entre suas áreas.

Por (3.9) e (3.2), segue que

$$\frac{V_{db}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{4}{3} nr^3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{2nr^3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} = \frac{2}{3}. \quad (3.11)$$

E por (3.10) e (3.3), segue que

$$\frac{A_{db}}{A_{prisma}} = \frac{4nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{6nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} = \frac{2}{3}. \quad (3.12)$$

É válida a observação de que em [2], os duplos-bolos são designados por *globo Arquimediano* e os bolos, por *cúpulas Arquimedianas*. Já em [3], os mesmos autores demonstram a razão Arquimediana através de outros argumentos e com a análise de uma classe mais generalizada de sólidos: os *circunsólidos* (sólidos que circunscvem esferas), na qual se encaixam os duplos-bolos, como bem ilustra a Figura 2.2fig2.2b.

3.5 E quando $n \rightarrow \infty$?

É natural pensar intuitivamente que o duplo-bolo e seu prisma circunscrito se aproximem, respectivamente, de uma esfera e um cilindro, quanto maior for o número de fatias (n). Para corroborar essa ideia intuitiva, vamos calcular o limite das expressões em (3.2), (3.3), (3.9) e (3.10) para n tendendo a ∞ . De modo a facilitar esses cálculos, um limite recorrente será calculado inicialmente: $\lim_{n \rightarrow \infty} ntg(\pi/n)$, que pode ser reescrito como $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{tg(t\pi)}{t}$, e, pela *regra de L'Hôpital*(*), segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ntg(\pi/n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tg(t\pi)}{t} \stackrel{(*)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi \sec^2(t\pi)}{1} = \pi \sec^2(0 \cdot \pi) = \pi. \quad (3.13)$$

Dessa forma, basta utilizar o resultado encontrado em (3.13) para mensurar os limites mencionados no início.

Considere primeiro as fórmulas para volume e área da superfície do prisma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nr^3 tg(\pi/n) = 2r^3 \lim_{n \rightarrow \infty} ntg(\pi/n) \stackrel{(3.13)}{=} 2\pi r^3, \quad (3.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 6nr^2 tg(\pi/n) = 6r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} ntg(\pi/n) \stackrel{(3.13)}{=} 6\pi r^2. \quad (3.15)$$

Como as relações (3.14) e (1.2) coincidem, assim como as relações (3.15) e (1.6), pode-se conjecturar que o prisma tende ao cilindro reto equilátero de raio da base r e altura $2r$ quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, calculando esses limites para as fórmulas do volume e área da superfície do duplo-bolo, tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} nr^3 tg(\pi/n) = \frac{4}{3} r^3 \lim_{n \rightarrow \infty} ntg(\pi/n) \stackrel{(3.13)}{=} \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (3.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4nr^2 tg(\pi/n) = 4r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} ntg(\pi/n) \stackrel{(3.13)}{=} 4\pi r^2. \quad (3.17)$$

Novamente, como as relações (3.16) e (1.3) coincidem, assim como as relações (3.17) e (1.7), pode-se conjecturar, também, que o duplo-bolo tende à esfera de raio r quando $n \rightarrow \infty$.

4 Considerações Finais

Ao longo deste trabalho buscou-se demonstrar a razão arquimediana para o par de sólidos esfera-cilindro e confirmá-la para outro par de sólidos: duplo-bolo - prisma circunscrito. Para tal, foram utilizados conceitos de geometria espacial, com destaque para o princípio de Cavalieri, presente no currículo do Ensino Médio na maioria das vezes como uma ferramenta que compara e calcula volumes. Sua aplicabilidade no caso em que relaciona áreas também deveria ser explorada nesse nível de ensino, uma vez que o raciocínio utilizado tem a mesma lógica. Ademais, conteúdos de Ensino Superior foram explorados, com ênfase no Cálculo Diferencial e Integral, que figura no programa da grande maioria dos cursos superiores da área de exatas.

Para conseguir atingir o quociente $2/3$ nos capítulos anteriores, foi necessário estabelecer fórmulas para o volume e área dos bicilindros e, de forma mais geral, dos duplos-bolos. É interessante notar que, mesmo as faces dos duplos-bolos sendo curvas, as fórmulas que calculam seu volume e área independem de π . Após as demonstrações da razão arquimediana em (3.11) e (3.12), fica simples chegar a essa conclusão, mas para a grande maioria dos estudantes do Ensino Médio essas fórmulas demandariam necessariamente a utilização da famosa razão entre o comprimento e o raio de uma circunferência, já que comumente os objetos circulares (círculos e elipses, por exemplo) e redondos (esfera, cilindro e cone, dentre outros) estudados nas geometrias plana e espacial, dependem de π nas mais variadas fórmulas de mensuração: perímetros, áreas e volumes.

Devido à abrangência do trabalho, com conteúdos nos diferentes níveis de ensino da Matemática, espera-se contribuir para o desenvolvimento de sequências didáticas para utilização nos Ensinos Médio e Superior. Destaco a dinâmica de trabalho apresentada por Márcio Eduardo Primo, em sua dissertação de Mestrado (PROFMAT) [28] para o cálculo do volume do bicilindro via princípio de Cavalieri. Nela, o autor faz uso do *software* GeoGebra para criar o bicilindro, comparar o seu volume (e formato) com o da esfera e traçar seções planas no duplo 4-bolo, tornando as visualizações mais claras aos estudantes.

Os sólidos de Steinmetz são comumente mencionados (e mensurados) em livros de cálculo em diversas oportunidades: nos momentos iniciais do aprendizado de aplicações de integração para cálculo de volumes dos mais variados sólidos; na introdução de integrais duplas (para cálculo da área) e triplas (volume), com a utilização de coordenadas cilíndricas; na utilização do Teorema de Green para cálculo de áreas de regiões, entre outras. Vale a pena observar a utilização do bicilindro em [13], servindo como ponto de partida para introduzir a parametrização da fatia desse sólido e conseqüente generalização da construção de sólidos com fatias dos mais variados tipos. Um exemplo de dinâmica de trabalho relacionada a

esse artigo é o projeto Cúpulas e Guarda-sóis ¹, desenvolvido por alunos da UNIFEI no primeiro semestre de 2015, sob supervisão do Prof. Dr. Rodrigo Lima e com o auxílio do *software* Mathematica. Dessa atividade foram extraídas as imagens da Figura 30, que mostra, a esquerda, a cúpula da Catedral Metropolitana de Morelia (México) e, à direita, a estrutura presente no Parlamento Alemão em Berlim.



Figura 30 – Modelagens produzidas por estudantes de Cálculo, de sólidos construídos a partir da rotação de fatias iguais.

¹ Disponível em <https://goo.gl/IhxqOH> . Último acesso: 28/01/2016.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Aaboe, A., and Berggren, J. L. Didactical and other remarks on some theorems of archimedes and infinitesimals. *Centaurus* 38, 4 (1996), 295–316.
- [2] Apostol, T. M., and Mnatsakanian, M. A. A fresh look at the method of Archimedes. *American Mathematical Monthly* (2004), 496–508.
- [3] Apostol, T. M., and Mnatsakanian, M. A. Solids circumscribing spheres. *The American Mathematical Monthly* (2006), 521–540.
- [4] Ávila, G. Arquimedes, o rigor e o método. *Matemática Universitária*, 4 (1986), 27–45.
- [5] Ávila, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. *Revista do Professor de Matemática*, 10 (1987), 11–19.
- [6] Bourke, P. Intersecting cylinders. <http://paulbourke.net/geometry/cylinders/>. Último acesso em 31/01/2016.
- [7] Boyer, C. B. *História da Matemática*, 3ª ed. São Paulo: Blusher, 2010.
- [8] DETEMPLE, D. W. An Archimedean property of the bicylinder. *College Mathematics Journal* (1994), 312–314.
- [9] Dijksterhuis, E. J. *Archimedes*. Princeton (NJ), Princeton University Press, 1987.
- [10] Dolce, O., and Pompeo, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica*. São Paulo: Atual, 2005.
- [11] Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. New York, Springer, 1979.
- [12] Figueiredo, V. L. X., Mello, M. P., and Santos, S. A. Doublecakes: an Archimedean ratio extended. *The College Mathematics Journal* 38, 2 (2007), 135–138.
- [13] Figueiredo, V. L. X., Mello, M. P., and Santos, S. A. Beyond domes, umbrellas and tents. *The Mathematical Gazette* 94, 529 (2010), 51–61.
- [14] Figueiredo, V. L. X., and Santos, S. A. E a quadratura foi para o espaço... Relatório técnico, Universidade Estadual de Campinas, 2005. http://www.ime.unicamp.br/re1_pesq/2005/ps/rp18-05.pdf. Último acesso em 31/01/2016.
- [15] Heath (ed.), T. L. *The Works of Archimedes*. New York, Dover Publications, 2002.

- [16] Hildebrand, A. J., Kong, L., Turner, A., and Uppal, A. Applications of n-dimensional integrals: Random points, broken sticks and intersecting cylinders. IGL project - Relatório técnico, University of Illinois, 2012. <http://www.math.illinois.edu/igl/Projects-Fall2012/Hildebrand2/report.pdf>. Último acesso em 31/01/2016.
- [17] Hogendijk, J. P. The surface area of the bicylinder and Archimedes' method. *Historia Mathematica* 29, 2 (2002), 199–203.
- [18] Kabai, S. “Intersecting Cylinders.” Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/IntersectingCylinders/>. Último acesso em 31/01/2016.
- [19] Kiang, T. An old Chinese way of finding the volume of a sphere. *The Mathematical Gazette* (1972), 88–91.
- [20] Kurokawa, C. Y. Áreas e volumes: de Eudoxo e Arquimedes a Cavalieri e o cálculo diferencial e integral. 136f. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, jan. 2015.
- [21] Lam, L-Y e Shen, K. The Chinese concept of Cavalieri's Principle and its applications. *Historia Mathematica Toronto* 12, 3 (1985), 219–228.
- [22] Lima, E. L. *Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.
- [23] Lo Bello, A. J. The volumes and centroids of some famous domes. *Mathematics Magazine* (1988), 164–170.
- [24] Marchandise, J. “Intersection and Union of Cylinders.” Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/IntersectionAndUnionOfCylinders/>. Último acesso em 31/01/2016.
- [25] Medeiros, L. A. Área e volume da esfera. 54f. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, mar. 2014.
- [26] Miranda, V. C., and Rafael, P. Métodos y estrategias para calcular volúmenes de ciertas intersecciones de cilindros. *Anais do XIII CIAEM, Recife* (2011).
- [27] Mnatsakanian, M. A. Pillow cuts. <http://www.its.caltech.edu/~mamikon/PillowCuts.html>. Último acesso em 31/01/2016.
- [28] Primo, M. E. O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades. 79f. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, mar. 2013.
- [29] Stewart, J. Cálculo. 7a edição. *São Paulo: Cengage Learning* (2014), v1.

-
- [30] Straffin, P. D. Liu Hui and the first golden age of Chinese mathematics. *Mathematics Magazine* 71, 3 (1998), 163–181.
- [31] Sutton, R. M. The “Steinmetz problem” and school arithmetic. *The Mathematics Teacher* (1957), 434–435.
- [32] Wagner, D. B. Liu Hui and Tsu Keng-Chih on the volume of a sphere. *Chinese Science*, 3 (1978), 59–79.
- [33] Weisstein, E. W. “Steinmetz Solid.” From Mathworld - A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/SteinmetzSolid.html>. Último acesso em 31/01/2016.