UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

VENÂNCIO BARROS CORREA

ENSINO – APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: uma experiência usando jogos de loterias

SÃO LUÍS – MA
2016

VENÂNCIO BARROS CORREA

ENSINO – APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: uma experiência usando jogos de loterias.

Dissertação apresentada ao programa de mestrado profissional em matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Luna Neres

SÃO LUÍS - MA
2016

Correa, Venâncio Barros

Ensino – aprendizagem de probabilidade no ensino médio: uma experiência usando jogos de loterias/ Venâncio Barros Corrêa – São Luís, 2016.

71f.

Orientador: Raimundo Luna Neres.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Mestrado Profissional em Matemática, 2016.

1. Probabilidade. 2. Loterias. 3.Resolução de Problemas. I. Título

CDU 519.2:373.5

VENÂNCIO BARROS CORREA

ENSINO – APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: uma experiência usando jogos de loterias

Dissertação apresentada ao programa de mestrado profissional em matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 04 de abril de 2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Raimundo Luna Neres UFMA/UNICEUMA
Orientador

Prof. Dr. Raimundo José Barbosa Brandão – UEMA

Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves - UFMA

São Luís
2016

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus, a minha esposa e a meus filhos, pela compreensão, incentivo, apoio e torcida.

AGRADECIMENTOS

A Deus que tem me dado força e até aqui tem me ajudado a superar as dificuldades na trajetória árdua de minha vida, que permitiu que vencesse mais essa batalha.

À minha esposa Gisele Lopes Dias, pelo companheirismo, incentivo em todos os momentos dando-me apoio à realização do mestrado e força para acreditar que os sonhos são possíveis.

À meus filhos: Francisco Vinicius Alves Corrêa, Fernando Victor Alves Correa, Elison Leone Corrêa da Silva, Amanda Ketelyn Alves Corrêa e Yan Marcos Dias Barros, que me proporcionam sonhos e vontade de vencer sempre qualquer obstáculos.

Aos Professores Mestres e Doutores que contribuíram nesta caminhada.

À minha mãe Eufênia Barros Corrêa, in memorian, pela educação e dedicação a todos os filhos. Ao meu pai Arnaldo Corrêa, in memorian, pelo exemplo de luta e de caráter.

Aos amigos colegas de turma: Edinaldo Fonseca Corrêa, Antônio de Jesus, Rondineli e Jeferson.

A meu grande amigo e companheiro de trabalho: José Antônio Farias de Sousa, “Estranjeiro” pelo apoio e incentivo.

A banca examinadora, em especial ao professor Dr. Raimundo Luna Neres, orientador deste trabalho.

A todos aos meus amigos de trabalhos, que diretamente ou indiretamente contribuíram com essa minha vitória.

RESUMO

Esta dissertação refere-se a uma experiência sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade com os alunos da 2ª série do ensino médio da Escola Estadual CE Maria do Socorro Almeida Ribeiro Anexo III, do município de Centro Novo do Maranhão, com base na Teoria de Resolução de Problemas de George Polya. Para possibilitar ao aluno interagir com o conteúdo de probabilidade de maneira contextualizada com o meio em que vive, optamos por trabalhar com a resolução de alguns problemas envolvendo jogos de loterias. Além disso, a metodologia a “lotofacinha”, uma loteria criada nos moldes da lotofacil, só que com menos números no bilhete, apenas 12, com a finalidade de dar um melhor entendimento no cálculo de probabilidade usando a própria lotofacil. Nosso objetivo é proporcionar aos alunos uma prática diferenciada ao utilizar os jogos de loterias como metodologia de ensino de probabilidade, para que isto ocorresse aplicamos dois problemas nos quais solicitamos aos alunos que os respondessem. Com relação à resolução dos problemas propostos, a turma do turno matutino obteve melhor desempenho em relação a turma do turno vespertino, mas ambas tiveram um bom rendimento, provando que a metodologia da resolução de problemas com aporte em Polya tem grande valia na solução de problemas matemáticos.

Palavras chave: probabilidade, loterias, resolução de problemas.

ABSTRACT

This paper refers to an experiment on the teaching and learning of probability with students of 2nd year of high school EC State School Maria do Socorro Almeida Ribeiro Annex III, the city of New Maranhão Center, based on Resolution Theory Problems George Polya. To enable the student to interact with the content probability in context with the environment they live in, we decided to work with the resolution of some issues involving lotteries games. Furthermore, the methodology "lotofacinha" lottery created in the mold of lotofacil, but with fewer numbers on the ticket, only 12, with the purpose of giving a better understanding of the probability calculation using the appropriate lotofacil. Our goal is to provide students with a differentiated practice to use the game as lotteries probability of teaching methodology to apply this to happen two problems in which we ask the students to respond. Regarding the resolution of the proposed problems, the class of the morning shift performed better over the class of the evening shift, but both had a good income, proving that the methodology of problem solving with investments in Polya has great value in solving problems mathematicians.

Keywords: probability, lotteries, problem solving.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante muitos séculos alguns matemáticos, dentre eles Girolamo Cardano e Fermat, tentaram compreender os problemas que ocorriam de maneira aleatória na natureza e no seu cotidiano, dado que os resultados obtidos desses problemas não dependiam da intervenção humana, (LOPES, 2005).

Além disso, os fenômenos aleatórios aconteciam de maneira espontânea, sem que se pudesse estabelecer uma ordem para essas ocorrências. Com o surgimento da probabilidade, foi possível fazer associações, incialmente essas associações foram utilizadas apenas com jogos de azar, Lopes (2005). Com o passar do tempo, a teoria da probabilidade passou a ser um importante instrumento para o desenvolvimento científico.

Considerando que atualmente a aplicação da probabilidade se faz presente em vários ramos do saber, desejamos investigar como deveremos trabalhar a probabilidade no ensino-aprendizagem no contexto da sala de aula, de forma contextualizada, participativa e crítica. Particularmente, no município de Centro Novo do Maranhão com alunos do ensino médio.

Ao estudarmos probabilidade, percebemos que a mesma é uma ferramenta essencial para o desenvolvimento e compreensão de determinados fenômenos presentes no nosso cotidiano e, é importante não apenas na sua conceituação formal, mas a sua aplicabilidade como ciência.

De acordo com a LDB e os PCN's (BRASIL, 1996, 1998, 2000, 2002) o estudo da probabilidade desenvolve no estudante formas particulares de pensamentos e raciocínios, envolvendo fenômenos aleatórios e certas atitudes que possibilitam o posicionamento crítico, ao fazer previsões e a tomada decisão.

Segundo Lopes (2005, apud os PCN's, 2000), a probabilidade é muito útil na sociedade atual, devido a necessidade que os indivíduos têm em compreender as informações veiculadas, fazer previsões que influenciam suas vidas pessoais e em comunidade.

Lopes (2005) afirma que no Ensino Médio, o ensino de probabilidade pode se constituir em um poderoso instrumento social, na medida em que pode permitir ao estudante uma melhor compreensão das estatísticas oficiais, tornando-o capacitado a exercer mais conscientemente sua cidadania.

No entanto, temos observado que no município de Centro Novo do Maranhão, na maioria das salas de aulas do Ensino Médio, o ensino de probabilidade vem se concentrando apenas em resolução de problemas de contagem. Embora, o ensino de contagem seja essencial para a resolução de alguns problemas de probabilidade, não devemos reduzir este ensino tão importante em apenas problemas de contagem (LOPES, 2005).

Por conseguinte, o ensino da teoria de probabilidade pode ser explanado, utilizando-se de jogos de loterias, "jogos de azar", as noções de acaso, certeza e incerteza, importantes na construção do conhecimento, tendo em vista o despertar do aluno para o desafio.

Neste trabalho, propomos uma metodologia de ensino e aprendizagem de probabilidade baseada na Resolução de Problemas com aporte em Polya, usando jogos de loterias com o objetivo de verificar como se processa a aprendizagem dos alunos do ensino médio em probabilidade, na escola CE Maria do Socorro Almeida Ribeiro Anexo III da cidade de Centro Novo do Maranhão / MA.

Salientamos que o termo "jogo" aqui utilizado refere-se a uma metodologia pedagógica no ensino da matemática.

1.1 Organização do Trabalho

Esta dissertação foi dividida em itens para melhor entendimento do leitor. Na introdução fazemos um breve histórico acerca dos jogos de azar, com uma análise sobre as loterias na antiguidade e da loteria no Brasil com a finalidade de compreender sua trajetória desde início aos dias atuais para que possamos ver a importância dos jogos lotéricos no cotidiano das pessoas.

Em seguida, a fundamentação teórica sobre autores de obras sobre resolução de problemas com aporte em Polya. Depois, apresentamos os procedimentos metodológicos que foram desenvolvidos durante a pesquisa. Apresentamos, também a análise dos dados obtidos a partir da experiência em duas turmas da segunda série do ensino médio de turnos diferentes da escola Centro de Ensino Maria do Socorro Almeida Ribeiro Anexo III da cidade de Centro Novo do Maranhão. E para finalizar, uma reflexão sobre a execução desse trabalho, constatando a viabilidade da aplicação da metodologia para uma aprendizagem de probabilidade com jogos de loterias.

2 JOGOS DE AZAR: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA

O elemento sorte sempre esteve presente na vida do homem. Na ciência ele recebe o nome de acaso, já em algumas religiões é denominado de providência divina. Talvez o momento que o homem mais confia na sorte é na hora em que realiza um jogo.

Huizinga (2000, p. 43) descreve o jogo como um elemento da cultura, como uma ação inerente ao homem, afirma:

> O jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana (2000, p. 43).

Apesar de serem conhecidos como jogos de azar e ter influenciado cassinos e apostadores e até mesmo viciados em jogos, seja para ganhar dinheiro seja por prazer, os bingos, as cartas e as loterias sempre atraíram muita gente. Talvez por isso seja um dos principais motivos de estudo de muitos matemáticos em todo mundo.

Os jogos de azar sempre foram admirados pelos homens. Ao se lançar a sorte sobre o jogo, as pessoas acreditam que podem obter um resultado favorável e, assim adquirir bens de maneira rápida. Esta sorte sempre intrigou os matemáticos, eles sabiam que existia um cálculo que envolvia os jogos, mas não possuíam um sistema de numeração que lhes facilitassem todos os tipos de operações (FRAGA, 2013).

Considerando que o homem tem certa atração por jogos, possivelmente vai buscar formas de conseguir vantagens e dentre elas as que lhe proporcione premiações, visando ganhar lucros monetários, bens materiais e recompensas.

Segundo Miranda (2007), as primeiras apostas que se têm informações, acontecia em forma de sorteios nas civilizações antigas.

A vida cotidiana está repleta de situações em que as pessoas julgam ser de sorte ou de azar. No entanto, independente do conhecimento matemático do indivíduo, podemos dizer que essas sensações são meramente intuitivas. A teoria da probabilidade pode ajudar a explicar tais sensações.

Segundo Fraga (2013), a história nos conta que jogar na loteria sempre foi um vício para o homem, pois adquirir bens materiais, sempre esteve no seu planejamento de vida. Ele ressalta ainda, que o homem desde muito tempo atrás procura sempre uma forma de ganhar prêmios e lucros, isso já era conhecido nas sociedades antigas, visto que, as aposta em jogos já eram registradas pelas civilizações antigas.

Para Miranda (2007), não é de hoje que o homem faz uma “fezinha”. Na verdade, os jogos de aposta, ainda que rústicos, surgiram há séculos, entre os povos hebreus, egípcios, hindus, chineses e romanos dentre outros. As loterias são jogos de azar bem populares que têm como base o sorteio aleatório de prêmios. Ainda segundo esse autor, o ser humano tem “simpatia” e gosto por premiações.

Ao longo do tempo os jogos de loterias vieram se popularizando, virando um passa tempo e ainda uma forma de ganhar dinheiro ou vantagens, para muitos de forma prazerosa ou viciada. Essa prática de jogar veio se aperfeiçoando ano após ano e no início do século XX, esse tipo de jogo se tornou popular e acabou considerado ilegal em muitos países até o fim da Segunda Guerra Mundial (MIRANDA, 2007).

Na década de 1960, os cassinos e loterias foram legalizados e passaram a angariar recursos para os impostos federais de muitos países (MIRANDA, 2007).

As primeiras loterias oficiais do mundo foram criadas nos Países Baixos, na Alemanha, na Itália, na Inglaterra e na França, durante o século XVI. A França foi o primeiro país a passar para o Estado a iniciativa de promover as loterias, em 1538. Atualmente, as loterias são gerenciadas pelos governos de vários países ou por subdivisões locais (MIRANDA, 2007).

2.1 Loterias no Brasil

A primeira loteria no Brasil de que se tem notícia foi criada em 1784, em Vila Rica, atual Ouro Preto (MG). O dinheiro arrecadado possibilitou a construção dos prédios da Câmara dos Vereadores e da Cadeia Pública. A prática foi adotada em todo país, sendo que o governo dava concessões para sua exploração preferencialmente às Santas Casas, aos orfanatos e aos hospitais para evitar abusos, mas também a particulares. Foi o imperador D. Pedro II quem regulamentou o funcionamento das loterias, pelo decreto nº 357, de 27 de Abril de 1844 (APARECIDA, 2012).

Em 1899, nos primeiros anos da República, parte da arrecadação obtida com os dividendos de loterias e jogos de azar foi incluída como receita no Orçamento Federal. No século XX, foram introduzidas várias novidades importantes, tanto nos métodos quanto na emissão de normas rígidas visando dar mais credibilidade aos jogos de loterias e transparência ao processo (APARECIDA, 2012).

Os primeiros revendedores, distribuidores, da Loteria Federal do Brasil de 1890 até 1950 foram: Antunes de Abreu, Campeões da Sorte, fundada em 1892, por Júlio Antunes de Abreu, pai do médico que inventou a abreugrafia. Casa Luongo, José Luongo, fundada em 1925. A preferida roda da sorte de Domingos Fernandes e a de Fasanello, Ricardo Fasanello. Na década de 50 foram nomeados novos distribuidores na capital paulista: entre eles : Nicola de Nicola Scatino, Monteiro de Cássio Monteiro, Petrelli de Petrelli, Vicente Pelegrini e Antônio Caporrino, em Suzano-SP, (APARECIDA, 2012).

No Rio de Janeiro eram distribuidores: Mundo Lotérico, Casa Esperança, Citimio Cataldo e Fasanello de Ricardo Fasanello e a Simpatia de José Costa, fundada em 1928, entre outros (APARECIDA, 2012).

Nas primeiras décadas do século XX a administração das loterias era feita por particulares, selecionados por concorrência pública e a duração da concessão era de cinco anos. O Grupo Peixoto de Castro era o mais forte concorrente e era quem detinha a concessão das loterias de todo o Brasil quando o Governo resolveu que este serviço deveria ser exercido pelo Poder Público e não mais por particulares (APARECIDA, 2012).

No Brasil, a história das loterias passou por um processo de transformação, sendo, a teoria da probabilidade uma importante ferramenta.

Em 1961, o então presidente Jânio Quadros determinou que o Governo fosse o único responsável pela realização de loterias no país e que o sistema de sorteios seria administrado pela Caixa Econômica Federal (MIRANDA, 2007).

Atualmente no Brasil, há oito tipos de jogos de Loterias administrados pela Caixa Econômica Federal: Mega Sena, Quina, Lotofácil, Lotomania, Dupla Sena, Loteca, Lotogol e Timemania. O tipo de aposta conhecida como “bolão” foi regulamentada no ano de 2012; dessa forma as apostas poderiam também ser feitas em grupos através da aquisição de cotas.

2.2 Loterias da Caixa

2.2.1 Mega-sena

Na mega-sena, os sorteios acontecem em dois dias da semana, quartas feiras e sábados, realizado pelo caminhão da sorte, em alguma cidade do pais ou no auditório da Caixa Econômica Federal em Brasília.

Segundo Fraga (2013, p.30), por ser uma loteria que paga o maior prêmio, a mega-sena talvez por isso atrai a maioria dos apostadores na esperança de ficar milionário. Constituída de sessenta dezenas numeradas, o prêmio máximo está condicionado ao acerto de seis números sorteados no conjunto {01, 02, 03, ..., 60}. Há ainda prêmios pagos para acertos da quadra e da quina proporcional ao número de ganhadores. No mesmo volante podem ser marcados entre seis e quinze números a um custo variável.

Calculando a probabilidade de acertar as seis dezenas sorteadas numa aposta simples da mega-sena é $\frac{1}{50063860} \cong$ 0,000002%, o que se torna muito difícil ganhar o prêmio máximo, no quadro 1 apesentamos alguns dados da loteria da mega-sena.

Quadro 1 – probabilidade de acertar na mega sena

Quantidades de jogos	Probabilidade de acerta (1 em)		
	Sena	Quina	Quadra
6	50.063.860	154.518	2.332
7	7.151.980	44.981	1.038
8	1.787.995	17.192	539
9	595.998	7.791	312
10	238.399	3.973	195
11	108.363	2.211	129
12	54.182	1.317	90
13	16.671	828	65
14	10.003	544	48
15	16.671	370	37

Fonte: Adaptação da Caixa Econômica Federal.

2.2.2 Quina

Na quina os sorteios são realizados diariamente, tornando-se mais popular ainda e com chances de ganhar prêmios diários, talvez por isso seja uma das loterias mais jogadas entre os apostadores.

A quina da loto como é mais conhecida Segundo Fraga (2013), a popularidade do jogo da quina está no fato de os sorteios acontecerem diariamente; no jogo é preciso acertar cinco dos oitenta números constantes no volante, ganha também quem acertar o terno e a quadra. No bilhete podemos marcar cinco, seis ou sete números e os valores da aposta variam de acordo com a quantidade marcada no volante.

2.2.3 Dupla sena

Na dupla-sena, acontecem sorteios duas vezes por semana e com dupla chance de se ganhar no mesmo volante e, provavelmente por isso, chame a atenção de muitos apostadores.

Segundo Fraga (2013) na dupla-sena, consta no bilhete de uma a cinquenta dezenas, porém, seus apostadores podem marcar de seis a quinze números e concorrem no mesmo volante a dois sorteios, primeira e segunda faixa de premiação; na primeira faixa ganha também quem fizer a quadra e a quina. A premiação máxima vai pra quem acertar as seis dezenas da primeira faixa e uma premiação extra, secundária, pra quem fizer as seis dezenas da segunda faixa.

2.2.4 Lotofacil

Conhecida como a loteria dos “pobres”, a lotofacil é uma das que mais oportuniza chances de premiação entre os seus apostadores, talvez por isso ela se torne a segunda mais jogada.

Para Fraga (2013, p.32),

> É o segundo jogo que atrai mais apostadores, atrás apenas da mega sena. É considerado ganhador do prêmio máximo quem acerta os 15 números sorteados dentre os 25 possíveis (1 a 25). Também é pago prêmio a quem acerta 11, 12, 13 ou 14 números e é permitida a marcação de 15, 16, 17 ou 18 números em um mesmo volante (com valores diferenciados, evidentemente).

É uma loteria que atrai muitas pessoas, pois as chances de se ganhar prêmios são mais evidentes e talvez por isso, os apostadores escolhem fazer seus volantes na esperança de conseguir uma grana extra, já que entre todas as outras loterias da Caixa é a que tem maior probabilidade de se ganhar a premiação máxima.

2.2.5 Timemania

Conhecida como a loteria dos clubes de futebol, a timemania é a mais nova loteria da caixa. Por apresentar uma probabilidade menor de ganhar seus prêmios, talvez por isso, ou então, ainda não está entre as mais atraentes para os apostadores.

Para Fraga (2013), a caçula das loterias, a timemania, apresenta de uma a oitenta dezenas no seu volante, onde o apostador marca no bilhete dez números e serão sorteados sete. No mesmo volante constam ainda nomes de oitenta clubes de futebol, onde a pessoa também escolhe um para marcar, chamado time de coração, ganhará o premio também no caso de acerto deste. A premiação máxima vai para quem fizer as sete dezenas, mas ganha também quem acertar o terno, a quadra, quina e a sena. Essa loteria foi criada com o intuito de abater dívidas fiscais dos clubes de futebol com a União.

2.2.6 Lotomania

A lotomania é uma das loterias com chances iguais para qualquer que seja seus apostadores, pois independente do palpite, consta de cem dezenas e todo apostador marca cinquenta números, nem mais nem menos, e são sorteados vinte entre esses 100 números que constam no volante. Os sorteios acontecem duas vezes na semana e por apresentar chances iguais para todos os apostadores e ser um dos volantes mais baratos entre os outros, atraem muitos jogadores.

Segundo Fraga (2013), dos cem números possíveis na lotomania, escolhe-se cinquenta e são sorteados vinte entre estes; ganha a premiação máxima quem acertar os vinte, mas ganhará também proporcionalmente quem fizer dezesseis, dezessete, dezoito e dezenove acertos. Nesta loteria o apostador ganhará premiação se também não acertar nenhum número. Tem ainda a aposta chamada “espelho” que possibilita ao sistema a marcação no mesmo volante os outros cinquentas números do volante principal.

2.2.7 Loteca

A loteca é ideal para quem assiste, acompanha e gosta de futebol, pois a marcação no volante lotérico tem base no placar da partida realizada entre as equipes, baseada em vitória e/ou empates entre as mesmas. É uma loteria indicada para quem entende de futebol, gosta de apostar e dar palpites sobre os resultados das partidas. O apostador marcará o seu palpite para cada um dos 14 jogos do concurso, assinalando uma das três colunas; coluna 1, coluna do meio (empate) e coluna 2, constante no volante.

A não realização de alguma das partidas na data prevista do evento, adiamento, cancelamento ou antecipação, o resultado será feito através de sorteio para fins de obter um placar na partida para efeito da aposta.

2.2.8 Lotogol

A lotogol é uma modalidade lotérica que propõe acertar placares de jogos entre equipes de futebol em partidas pré-determinadas pela Caixa. Seus apostadores são pessoas que acompanham o futebol e estão atentos às equipes que farão as partidas entre si, com a finalidade de identificar como ela jogará para assim poder palpitar. Os sorteios acontecem semanalmente; é uma modalidade de loteria não muito atraente para o publico, talvez pela dificuldade em acertar placares dos jogos.

Segunda Fraga (2013) no jogo são relacionados cinco partidas de futebol e o apostador faz a marcação do número de gols de cada equipe. Marcam-se no volante zero, um, dois, três e pelo símbolo “+”, mais de três gols. O ganhador do prêmio máximo é aquele que acertar os cinco placares. Também serão pagos prêmios para acertadores de três e quatro placares.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No desenvolvimento desse trabalho tomamos como aporte a Teoria de Resolução de Problemas (POLYA, 2005 e 2006), além desse autor também nos apoiamos em outros teóricos que contribuíram com o desenvolvimento de nossa pesquisa. Fraga (2013), na contribuição em relação aos jogos de loterias; Pozo (1998), na solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender; (MIRANDA 2007) na contribuição da história das loterias; (APARECIDA, 2012), nos históricos da loteria no Brasil; Borin (2004), na relação dos jogos e resolução de problemas; (LOPES, 1998, 2003 e 2005), no desenvolvimento da Probabilidade; (BORGES NETO, 2001), na Sequência Fedathi como proposta teórico-metodológica no ensino-aprendizagem de matemática.

Polya (1887-1985) foi o primeiro matemático a apresentar uma heurística, um método que se baseia em etapas para solucionar um problema matemático. Segundo ele, heurístico é um método ou processo criado com o objetivo de encontrar soluções para um problema matemático. Esse autor representa uma referência no assunto, uma vez que, suas ideais representam inovações em relação às ideais de resolução de problemas existentes até então. Muitas de suas ideais são aceitas até os dias atuais, servindo de alicerce para trabalhos na área de outros pesquisadores contemporâneo a ele.

Ele desenvolveu seu plano de ação por etapas, mostrando passo a passo como deveremos prosseguir para resolver um problema, concretizar sua resposta e verificar o resultado.

As etapas definidas por Polya foram:

> 1ª - Compreensão do Problema -. O primeiro passo é entender o problema e para isso é importante fazer perguntas, pois a resposta para essas perguntas pode ser o meio para esse fim. Perguntas como: qual é a incógnita? Ou seja, o que se quer resolver no problema? O que deve ser calculado? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Ou seja, quais são as condições que possuímos e que podemos usar na resolução do problema. É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar a incógnita? Existem condições redundantes ou contraditórias? Faça uma figura. Introduza notação adequada. Separe as

> condições em partes. Estas perguntas são necessárias para a compreensão das informações contidas no enunciado do problema (POLYA, 2006, p.04).

Na 2ª Etapa ele estabeleceu um Plano de Ação, ou seja,

> Fazer a relação entre os dados e a incógnita. Nesta etapa, é importante fazer as seguintes perguntas. Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado de uma forma um pouco diferente? Neste momento devemos buscar uma relação entre o problema atual e algum outro problema já resolvido, e que possa servir de orientação para a solução do problema atual. Conhece um problema correlato? Caso você encontre um problema semelhante ao seu e que você sabe resolver, tente aproveitá-lo analisando os caminhos percorridos até a sua solução e verificando as adaptações necessárias para fazer o problema atual. Considere a incógnita? Caso não existe nenhum problema parecido, divida o problema atual em partes, fazendo a conexão entre a incógnita e os dados correspondentes, inclusive criando incógnitas auxiliares para cada parte (POLYA, 2006, p.07).

Quando não encontramos uma metodologia para resolver um determinado problema, às vezes é preciso reformulá-lo de maneira que se possa ver outra forma de resolvê-lo. Caso ainda não consigamos resolver o problema dado. Imaginar um problema correlato mais acessível, mais simples e mais específico.

Na 3ª Etapa ele definiu a execução do plano, ou seja, executar o plano elaborado nas etapas anteriores, caso ocorra algum erro no momento da execução, voltar a etapa anterior e elaborar uma nova estratégia.

Na 4ª Etapa ele propôs uma revisão da solução, na qual se pergunta. É possível verificar o resultado? Se for possível, questione: a solução encontrada satisfaz o problema proposto?" É possível obter a solução de outra maneira? Isso é importante para se ter certeza que a solução encontrada satisfaz as hipótese do problema em estudo.

A revisão da solução é a etapa mais importante segundo Polya (2006), pois esta etapa propicia uma depuração e uma abstração da solução do problema.

Segundo Polya (2006, p.4) o objetivo da depuração é verificar a,

> Argumentação usada, procurando simplificá-la, pode-se chegar ao extremo de buscar outras maneiras de resolver o problema, possivelmente mais simples, mas menos intuitivas e só agora acessíveis ao resolvedor. Há uma crítica generalizada aos matemáticos pesquisadores por publicarem demonstrações artificiais ou abstratas e que certamente não representam a maneira como o resultado em demonstração foi descoberto. Contudo, é inegável que a revisão de depuração é muito proveitosa (POLYA, 2006, p.4).

A abstração tem como objetivo refletir sobre o processo de resolução procurando descobrir,

> A essência do problema e do método de resolução empregado; tendo-se sucesso nessa empreitada, poder-se-á resolver outros problemas mais gerais ou de aparência bastante diferente. Ela representa a possibilidade de aumento do "poder de fogo" do resolvedor (POLYA, 2006, p.07).

Um grupo de professores denominado Grupo Fedathi, tendo como seu principal articulador o professor Hermínio Borges, vem trabalhando com resolução de problemas, baseado na Teoria de Polya. No entanto, a proposta teórica – metodológica desse grupo objetiva abordar uma situação de ensino, considerando as fases do trabalho vivenciadas pelos professores no desenvolvimento de suas atividades de ensino, experiências e produções técnicas em sala de aula.

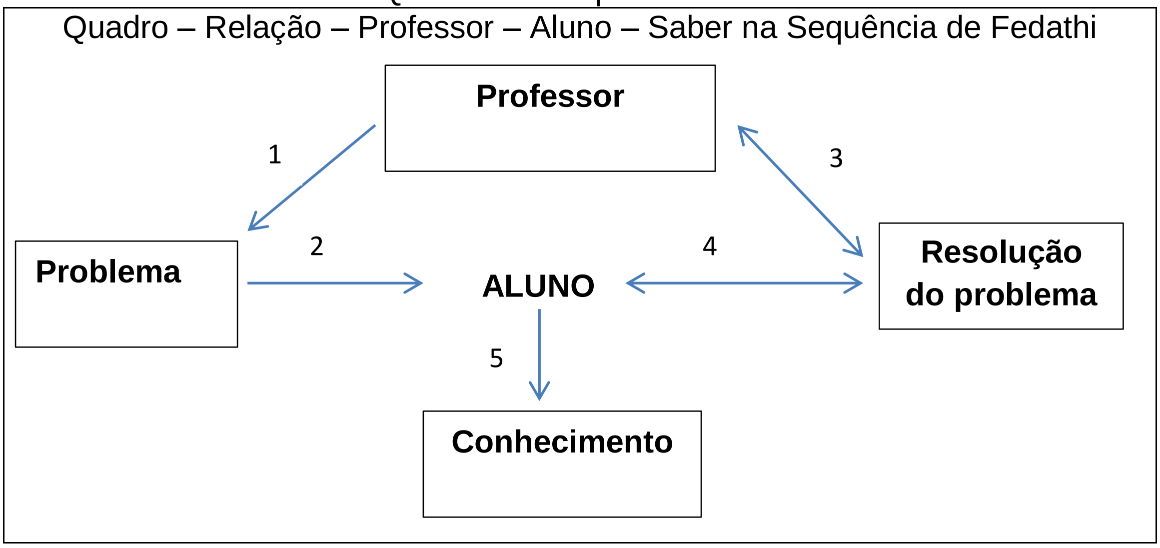
Para Borges Neto & Dias (2001): "O aluno reproduz ativamente os estágios que a humanidade percorreu para compreender os ensinamentos matemáticos, sem que, para isso, necessite dos mesmos milênios que a história consumiu para chegar ao momento atual".

> A importância desse ambiente na sala de aula se dá pelo fato de proporcionar aos educandos a construção dos conceitos de forma clara, através da resolução de problemas, onde suas produções serão objetos sobre o qual o professor vai tomar como base para fazer a mediação a fim de levá-lo a construir o novo conhecimento (BORGES NETO & DIAS, 2001, p. 17).

Acreditamos que nesse processo é importante considerar as experiências vivenciadas pelos educandos, pois, pode ser que o conhecimento trazido do meio social em que vive bem como o conhecimento adquirido anteriormente em outras atividades escolares deve ser o ponto de partida para ajudar nas situações de ensino promovidas pelo professor. Dessa forma, a inclusão da realidade social e do repertório do aluno deva motivar e facilitar o acesso ao conhecimento acumulado por ele além de favorecer os vínculos dos mesmos com o conhecimento.

Apresentamos no quadro 2, uma síntese entre o professor, o aluno e o saber na construção de um conhecimento consoante a Sequência de Fedathi.

Quadro 2 - sequencia do Fedathi



Fonte: Adaptação do quadro n. 01 (BORGES, 2201, p.18)

Observamos que o ensino começa com o,

> Professor que ministrará a aula e logo após ele deverá selecionar um problema de acordo com o conhecimento que pretende ensinar, podendo também ter uma situação apresentado pelo aluno (1); em seguida o professor deverá apresentar o problema para os alunos através de uma linguagem adequada (2); com o problema apresentado, os alunos irão explorá-lo na busca de uma solução (3); a solução encontrada será analisada pelo professor junto aos alunos (4). Os passos 3 e 4 acontecerão alternadamente até que se chegue a construção do conhecimento por parte do aluno (5). Esse momento corresponde à mediação entre o professor-aluno-saber (BORGES NETO & DIAS, 2001, p.18).

Os PCN (1998) elegem a resolução de problemas como peça central para o ensino da Matemática. Para a resolução de problemas existem vários procedimentos, mas segundo Polya (2005), “um problema significa buscar conscientemente por alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível”.

Com relação a problemas de probabilidade relacionados a jogos de loterias, estes são realidade para nossa sociedade, haja vista que, muitas pessoas acreditam que apostando, possam ser premiadas. Entretanto, muitos deles nem sabem que suas chances de ganhar são probabilísticas. Essa foi à razão de propormos trabalhar com os nossos alunos o ensino e aprendizagem de probabilidade, usando jogos de loterias, para que eles entendam melhor esse conteúdo.

Segundo os PCNs o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem,

> Quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. O tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim,

> perseverar na busca da solução; e, para isso, os desafios devem ser reais (BRASIL, 1997, p. 98).

Dessa forma, acreditamos que a resolução de problemas probabilísticos envolvendo os jogos lotéricos, como o da lotofacil, pode ser essencial para o aprendizado de alunos, que além de entender poderá facilitar no seu desenvolvimento cognitivo e de vivencia de vida.

Van de Walle (2009) afirma que a resolução de problemas é um veículo poderoso e eficaz para a aprendizagem. Os conceitos e os procedimentos matemáticos, em sua maioria – senão todos –, podem ser mais bem ensinados por meio da resolução de problemas. Para ele,

> Os estudantes devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Enquanto os estudantes descrevem e avaliam as resoluções para as tarefas [...] compartilham abordagens e fazem conjecturas [...] começam a ser autores de ideias e a desenvolver uma sensação de poder dar significado às ideias matemáticas, Van de Walle (2009, p. 74),

A resolução de problemas e o jogo podem ser utilizados como objetos de desenvolvimento, pois possuem algumas semelhanças que os aproximam enquanto estratégias de ensino, Moura (1994). A primeira semelhança seria encontrada no sujeito que executa a ação. Já a segunda semelhança estaria nas fases como eles se desenvolvem.

Num problema distinguem-se as fases: problema desencadeador; construção do conceito; e aplicação do conceito Moura (1994). E, no jogo, as fases: jogo desencadeador; reinvenção do jogo; e descoberta de estruturas.

Neste trabalho consideramos que,

> O jogo será conteúdo assumido com a finalidade de desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, possibilitando ao aluno a oportunidade de estabelecer planos de ação para atingir determinados objetivos, a executar jogadas segundo este plano e a avaliar a eficácia destas jogadas nos resultados. Desta maneira, o jogo aproxima-se da Matemática via desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas (MOURA, 1994, p. 21).

Para Moura (1994), também existe semelhanças entre a resolução de problemas e ao ato de jogar. As semelhanças entre o ato de jogar e resolver um problema, também ficam muito claras quando comparadas com as etapas definidas por Polya (2005) para a resolução de problemas.

Para (BORIN, 2004), a atividade de jogar desempenha papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, dedutivo e indutivo; da linguagem; da criatividade; da atenção e da concentração, essenciais para o aprendizado em Matemática. Durante a realização do jogo, o aluno passa a ser um elemento ativo do seu processo de aprendizagem, vivenciando a construção do seu saber e deixando de ser um ouvinte passivo.

Conforme Lopes (2005), a resolução de problemas, que é um princípio norteador da aprendizagem da matemática, pode possibilitar o desenvolvimento cognitivo do aluno nos processos de ensino e aprendizagem da probabilidade em sala de aula. Assim, é preciso entender que problema não é um exercício de aplicação de conceitos recém-trabalhados, mas o desenvolvimento de uma situação que envolve interpretação e estabelecimento de uma estratégia para a resolução.

Trabalhar com problemas em matemática significa colocar em ação certas capacidades de inferência e de raciocínio geral. Acreditamos que não faz sentido trabalharmos atividades envolvendo conceitos estatísticos e probabilísticos que não estejam vinculados a uma problemática.

> Portanto, não devemos propor coleta de dados desvinculada de uma situação-problema que não levará à possibilidade de uma análise real. Construir gráficos e tabelas desvinculadas de um contexto ou relacionadas a situações muito distantes do aluno pode estimular a elaboração de um pensamento, mas não garante o desenvolvimento de sua criticidade (POZO, 1998, p.43).

O elemento central do conhecimento profissional do professor é sem dúvida, o didático do conteúdo, porém não é o suficiente. Faz-se necessária uma combinação adequada entre o conhecimento sobre o conteúdo matemático a ser ensinado e o conhecimento pedagógico e didático de como ensiná-lo (Lopes, 2003).

O conhecimento didático do conteúdo é uma síntese entre os conteúdos a ensinar e os modos de fazê-lo, incluindo formas de representação das ideias, analogias importantes, ilustrações e exemplos próximos ao contexto (Lopes, 2003).

Está incorporada a esse conhecimento a habilidade em representar e formular o conteúdo conceitual e/ou procedimental, tornando-o compreensível aos alunos, gerando a compreensão do que torna a aprendizagem de um conceito mais ou menos difícil e de suas respectivas concepções.

> O professor, na sua atividade profissional diária, em geral, defronta-se com múltiplas situações para as quais não encontra respostas preestabelecidas. Para fazer-lhes face, tem de pôr em movimento um conhecimento que envolve elementos com origens diversas, incluindo acadêmicas e experiências, bem como aspectos de foro pessoal e contextual. Assim, acreditamos que no desempenho de suas ações professoral, o docente não só precisa mobilizar teorias e técnicas, mas também suas concepções, sentimentos e seu saber fazer, (LOPES, 2003, p. 27).

Dessa forma cada vez mais o professor se identifica com o conhecimento prático, pois integra o conhecimento teórico e experiencial, além disso permite-o trilhar nos vários contextos de sua prática docente.

Um profissional da Educação, que conceba o ensino como uma mera transmissão de conceitos já elaborados e construídos, que considere que a aprendizagem restringe-se apenas ao envolvimento e à capacidade do aluno, para Lopes (2003) talvez não leve em conta os componentes do conhecimento profissional como necessidades, para ele,

> Um desenvolvimento autônomo ocorre por iniciativa do próprio professor, pode ter a reflexão como estratégia, pode centrar-se no apoio profissional mútuo entre colegas e/ou coordenação. Pode ocorrer através da inovação curricular e/ou de cursos de formação e também por meio da investigação, quando a imagem do professor relaciona-se ao movimento de investigação-ação (Lopes, 2003, p. 28).

Poderíamos dizer, então, que a profissão docente requer dinamismo, um cidadão ativo e comprometido. O desenvolvimento desse profissional, conforme consideração anterior precisará ser analisada nos aspectos referentes à ação, à reflexão, à autonomia e à colaboração.

O desenvolvimento profissional do professor de matemática segundo (PONTE, 1998) acontece em um contínuo movimento de dentro para fora e tende a considerar a teoria e a prática de forma interligada, não privilegiando uma em detrimento da outra.

O ensino de probabilidade estar diretamente relacionado com o profissional que, interliga a teoria à prática no dia a dia do aluno com a realidade e o meio em que vive, facilitando assim uma aprendizagem significativa.

3 INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

Fazemos aqui uma pequena introdução sobre a teoria da probabilidade para dar sustentação ao desenvolvimento de nossa pesquisa. A probabilidade teve sua origem com a necessidade de avaliar chances de ganhar em jogos de azar no século XVI, sendo depois aplicada em diversas áreas do conhecimento, tais como: estatística aplicada, economia, engenharia, física, química, sociologia, psicologia, biologia, negócios, entre outras..

Existem experimentos que repetidos em condições fixadas, não produzem sempre o mesmo resultado. Esses experimentos são chamados de aleatórios ou não determinísticos e são objetos de estudo da teoria da probabilidade.

De acordo com Hoel et al (1978), inicialmente podemos admitir como impossível fazer qualquer afirmação exata sobre os experimentos aleatórios. Entretanto, podemos observar que muitos deles exibem uma regularidade estatística. Isto pode ser ilustrado considerando o lançamento de uma moeda.

Para qualquer lançamento individual de uma moeda não podemos fazer previsão certa, mas as observações mostram que para um grande número de lançamentos a proporção de caras parece oscilar em torno de algum número fixo *p* entre *0* e *1* , sendo *p* muito próximo de *1/2* se a moeda for equilibrada.

Chamamos de Experimento aleatório a um experimento ε**,** em que, antes de ser executado, não se pode prever com certeza que esse particular resultado ocorrerá. Como por exemplo, O experimento ε**:** Lançamento de uma moeda honesta duas vezes e anota-se a face voltada para cima.

Para esse experimento temos o seguinte espaço amostral associado: $\Omega = \{(cara, coroa), (coroa, cara), (cara, cara), (coroa, coroa)\}$.

Um espaço amostral é o conjunto Ω de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Ω pode ser finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável.

No caso discreto e finito, em que, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$. Se cada ponto amostral $\omega_i \in \Omega$, for igualmente provável, então $\{\omega_i\}$ é chamado de *evento simples*, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Um evento é qualquer subconjunto do espaço amostral Ω. Quando o espaço amostral Ω contiver *k* elementos, então, teremos 2^k eventos associados a Ω.

Se tomarmos Ω como um espaço amostral com *n* eventos simples, igualmente possíveis. E sendo *A* um evento de Ω. Então a probabilidade de *A,* denotada por *P(A)*, é definida por: $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$, em que:

n_A = nº de elementos de *A* ou nº de casos favoráveis a ocorrência de *A;*

n_Ω = *n* = nº de elementos de Ω ou nº total de eventos simples associados a Ω.

Uma probabilidade $P(\cdot)$ como foi definida satisfaz os seguintes axiomas:

(i) $0 \le P(A) \le 1$;

(ii) $P(\Omega) = 1$;

(iii) Para cada sequência de eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ mutuamente excludentes $(A_i \cap A_j = \phi$, quando $i \neq j)$,
$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

É importante observar que $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$, é apenas uma consequência da suposição de que todos os resultados sejam igualmente prováveis, e ela é aplicada apenas quando essa suposição for atendida.

Como em nosso objeto de pesquisa utilizamos análise combinatória, fazemos aqui também algumas considerações sobre combinações. Ou seja, o número total de combinações de *r* objetos escolhidos dentre *n* é denotado por $\binom{n}{r}$ ou C_n^r, sendo que, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

O número $\binom{n}{r}$, também chamado de coeficiente binomial, é igual a quantidade de subconjuntos de *r* elementos de um conjunto com *n* elementos. E, valem as propriedades dos coeficientes binomiais:

(a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$; e *(b)* $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada na pesquisa foi de natureza qualitativa e seguimos, de acordo com a natureza do objeto e dos objetivos de estudo, uma abordagem empírica – analítica que, de acordo com (FIORENTINI E LORENZATO, 2009), se ocupa dentre outros temas, de técnicas de ensino da matemática, de desempenho/desenvolvimento e motivação do aluno em busca de novos saberes.

Das três escolas existentes no município de Centro Novo que funcionam o Ensino Médio, uma delas, a escola CE Mª do Socorro Almeida Ribeiro, funciona nos três turnos, na localidade Limão, um anexo dessa escola funciona somente no turno noturno e na localidade do Chega Tudo, a escola CE Mª do Socorro Almeida Ribeiro funciona nos turnos vespertino e noturno.

Para autorização do desenvolvimento dessa pesquisa, entramos em contato com a direção e com os professores da escola pessoalmente. Conseguimos informações dos três diretores e dos professores de Matemática das três escolas e parte dos alunos da escola da sede, onde desenvolvemos a nossa experiência em sala de aula.

Uma pesquisa científica,

> Objetiva a produção de novos conhecimentos por meio da utilização de procedimentos científicos. Contribui para o trato dos problemas e processos do dia a dia nas mais diversas atividades humanas, no ambiente do trabalho, nas ações comunitárias, no processo de formação e outros. O conhecimento torna-se uma premissa para o desenvolvimento do ser humano e a pesquisa como a consolidação da ciência. (SILVA, 2008, p.23)

Na rede estadual de ensino do Estado do Maranhão, o conteúdo de probabilidade é trabalhado na 2ª série do ensino médio na disciplina de Matemática, na escola CE Mª do Socorro Almeida Ribeiro localizada na sede do município. Com referência ao nosso objeto de pesquisa: ensino de probabilidade usando jogos de loterias foi desenvolvido com base na Teoria de Resolução de Problemas, Polya (2006).

A pesquisa foi desenvolvida em duas turmas de 2ª série do ensino médio, sendo uma no turno matutino com 36 alunos e outra no turno vespertino com 32 alunos na escola CE Mª do Socorro Almeida Ribeiro, da sede.

Aplicamos inicialmente um questionário (Apêndice A) para verificar o que os alunos já conheciam sobre o tema. Depois de recolhê-los preenchidos, trabalhamos primeiramente, na turma da 2ª série do turno matutino com duas aulas de 50 minutos cada e no dia seguinte mais uma aula de 50 minutos na mesma turma; onde aplicamos dois problemas de probabilidade (Apêndice B), ambos relacionados a jogos lotéricos, para serem resolvidos à luz da Teoria de Polya, com a finalidade de verificarmos a aprendizagem dos mesmos de acordo com a aula ministrada anteriormente. No dia dessa aula estavam presentes todos os 36 alunos da 2ª série da turma do turno matutino.

O mesmo questionário (Apêndice A) também foi aplicado à turma da 2ª série do turno vespertino, aplicando a mesma proposta utilizada com os alunos do turno matutino. Depois de recolher os questionários preenchidos, foi iniciada a aula na turma da 2ª série do turno vespertino com duração de 100 minutos e no dia seguinte mais uma aula de 50 minutos na mesma turma, onde foi entregue aos alunos dois problemas de probabilidade (Apêndice B), ambos relacionados também a jogos de loterias, para serem resolvidos com base na Teoria de Resolução de Problemas. Nessa turma da 2ª série do turno vespertino, participaram todos os 32 alunos.

O primeiro problema não é exatamente de loteria da Caixa, foi criado pelo pesquisador e elaborado com a finalidade de dar suporte ao problema seguinte, relacionado à loteria. O segundo problema de probabilidade aplicado aos alunos é baseado na loteria da lotofácil. Para a resolução, ambos precisavam de conhecimento prévio de combinatória, pois nesses tipos de problemas de probabilidade com jogos de loterias, tanto o espaço amostral quanto os eventos calcula-se de maneira mais eficaz e menos trabalhosa, utilizando as combinações, visto que são números combinados numa determinada quantidade em um bilhete.

Na aula do dia seguinte, nas duas turmas comentamos as resoluções dos problemas feitas pelos alunos, de forma que eles também puderam debater sobre as respostas apresentadas, tiraram dúvidas sobre como traçar o plano para a resolução de problemas, como inicialmente foi ensinado nas aulas anteriores, ou seja, se utilizando da combinatória com a finalidade de colher informações a respeito da metodologia de resolução de problemas com jogos de loterias seguindo as etapas de Polya.

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Inicialmente, enfatizamos que o ensino de Matemática usando a metodologia de Resolução de Problemas, segundo relato dos professores da escola pesquisada, não é uma prática comum entre eles. Quando indagados, responderam que não tinham conhecimento aprofundado dessa Teoria, por isso não a utilizavam como metodologia de ensino. Esse fato veio fortalecer nossa investigação.

A maioria dos alunos não gosta de desafio matemático, isso é até preocupante porque, apenas uma pequena parte se declara gostar de desafio, enquanto a maioria ao declarar não gostar de ser desafiado mostra que não entende matemática ou nem estão preocupado com a mesma. Lembramos que a matemática é fundamental importância na vida diária das pessoas.

A seguir apresentamos os problemas aplicados aos alunos da 2ª série do ensino médio, objeto de nossa pesquisa, inicialmente do turno matutino, assim como uma análise das resoluções apresentadas por eles.

PROBLEMA 1.

Um bilhete de apostas de uma loteria tem 12 números, conforme a Figura 1, o apostador pode marcar de 8 a 10 dezenas e, ganha o prêmio máximo aquele que acertar as 8 dezenas. Qual a probabilidade de acertar as 8 dezenas, marcando num bilhete:

a) Exatamente todos os 8 números marcados?

b) Exatamente 10 números?

Figura 6.1: Bilhete de uma loteria

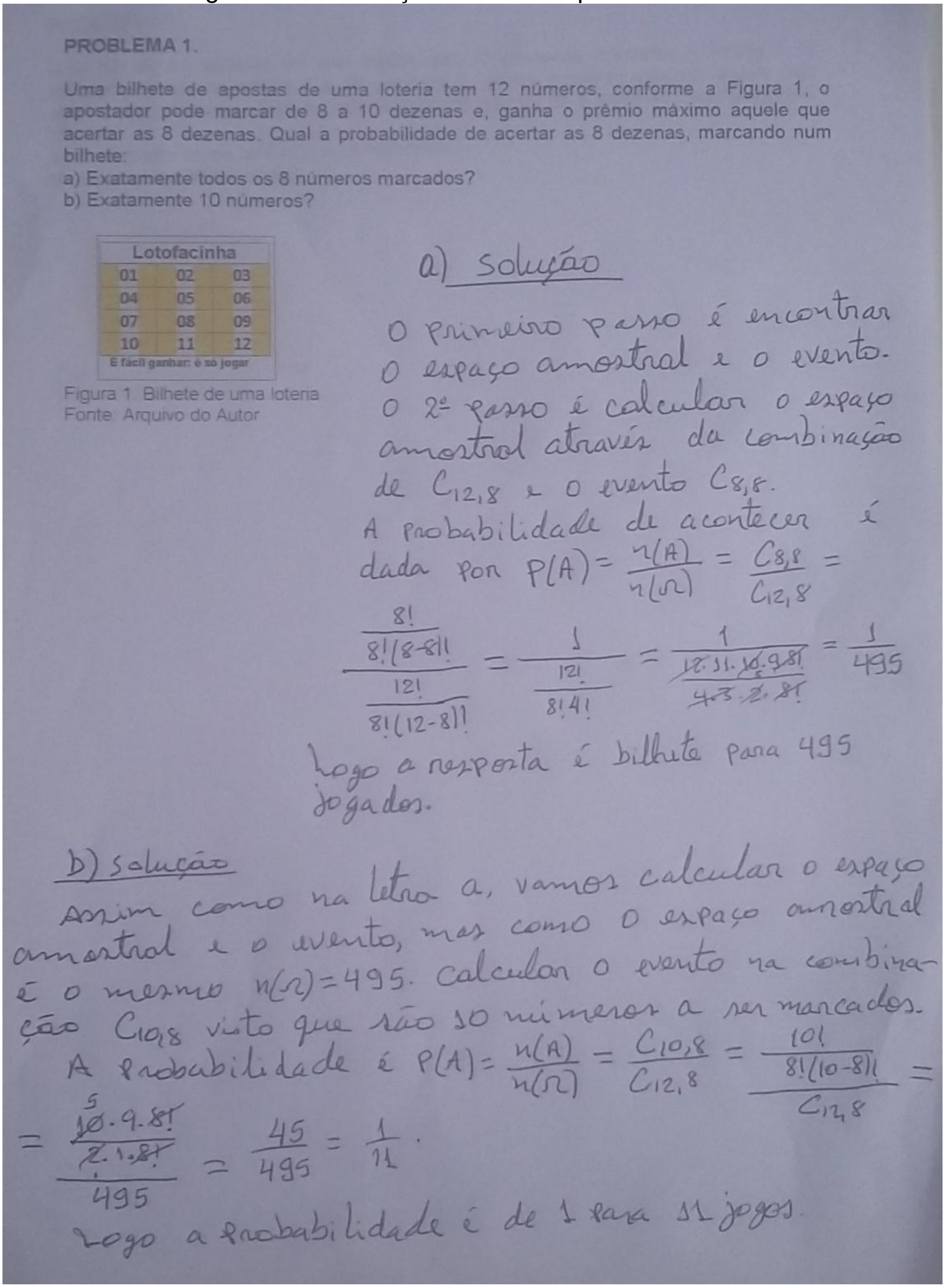
Lotofacinha		
01	02	03
04	05	06
07	08	09
10	11	12
É fácil ganhar: é só jogar		

Fonte: Arquivo do autor

Na Figura 6.2, apresentamos a resolução construída pelo aluno G. J. Observamos que ele seguiu os passos descritos por Polya, primeiro leu o problema, fez os entendimentos do que estava querendo saber, ou seja, a incógnita, depois traçou seu plano de ação e, em seguida executou seguindo as etapas propostas por Polya, com isso pôde esquematizar e desenvolver as operações necessárias para chegar ao resultado corretamente solicitado no referido problema.

Por outro lado, acreditamos que esse aluno entendeu os procedimentos metodológicos discutidos em sala de aula. Pois, Identificou claramente o que foi pedido em cada alternativa, soube identificar os casos possíveis (espaço amostral) e os casos favoráveis (evento do espaço amostral, ou seja, um subconjunto do espaço amostral), conforme se observa na Figura 6.2.

Figura 6.2: Resolução construída pelo aluno G. J.



PROBLEMA 1.

Uma bilhete de apostas de uma loteria tem 12 números, conforme a Figura 1, o apostador pode marcar de 8 a 10 dezenas e, ganha o prêmio máximo aquele que acertar as 8 dezenas. Qual a probabilidade de acertar as 8 dezenas, marcando num bilhete:

a) Exatamente todos os 8 números marcados?

b) Exatamente 10 números?

Lotofacinha		
01	02	03
04	05	06
07	08	09
10	11	12

É fácil ganhar: é só jogar

Figura 1. Bilhete de uma loteria
Fonte: Arquivo do Autor

a) Solução

O primeiro passo é encontrar o espaço amostral e o evento. O 2º passo é calcular o espaço amostral através da combinação de $C_{12,8}$ e o evento $C_{8,8}$.

A probabilidade de acontecer é dada por $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{8,8}}{C_{12,8}} =$

$$\frac{\frac{8!}{8!(8-8)!}}{\frac{12!}{8!(12-8)!}} = \frac{1}{\frac{12!}{8!4!}} = \frac{1}{\frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{8!}}} = \frac{1}{495}$$

Logo a resposta é bilhete para 495 jogados.

b) Solução

Assim como na letra a, vamos calcular o espaço amostral e o evento, mas como o espaço amostral é o mesmo $n(\Omega) = 495$. Calcular o evento na combinação $C_{10,8}$ visto que são 10 números a ser marcados.

A probabilidade é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10,8}}{C_{12,8}} = \frac{\frac{10!}{8!(10-8)!}}{C_{12,8}} =$

$$= \frac{\frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{8!}}}{495} = \frac{45}{495} = \frac{1}{11}.$$

Logo a probabilidade é de 1 para 11 jogos.

Fonte: arquivo do autor.

Observamos que G.J., ao construir o seu plano de ação, usou análise combinatória, conteúdo essencial para ser aplicado neste tipo de problema, ou seja, fez os cálculos com uso das combinações simples para encontrar os casos possíveis $\binom{12}{8}$ e os casos favoráveis $\binom{8}{8}$.

De posse dos casos favoráveis e dos casos possíveis, entendeu que precisava calcular o quociente entre as relações encontradas, ou seja, $\frac{\binom{8}{8}}{\binom{12}{8}}$. Assim, foi possível verificar, segundo Polya, se o resultado construído estaria correto. O espaço amostral, nesse caso, é 495, pois trata-se de apenas um bilhete, e os casos favoráveis somente 1 que é o evento do espaço amostral possível de acontecer.

Por outro lado, pela resolução que G.J. apresentou, ficou claro para esse pesquisador, que ele entendeu que para acertar os números marcados em um único jogo, a probabilidade de acerto seria uma em 495 possíveis.

Analisando a resolução apresentada por G. J para o item (b) observamos que ele também seguiu as orientações elaboradas por Polya, visto que seguiu as etapas, fielmente, para encontrar os casos possíveis (espaço amostral) e os casos favoráveis de acontecer (um evento do espaço amostral). Mostrou que através das combinações simples poderia encontrar o espaço amostral, analogamente ao que fez no item (a). Entretanto, o evento agora planejado seria baseado na combinação simples $\binom{10}{8}$ pois, neste caso, o evento teria dois números marcados a mais no bilhete, ou seja, o subconjunto do espaço amostral, neste caso seria de 45.

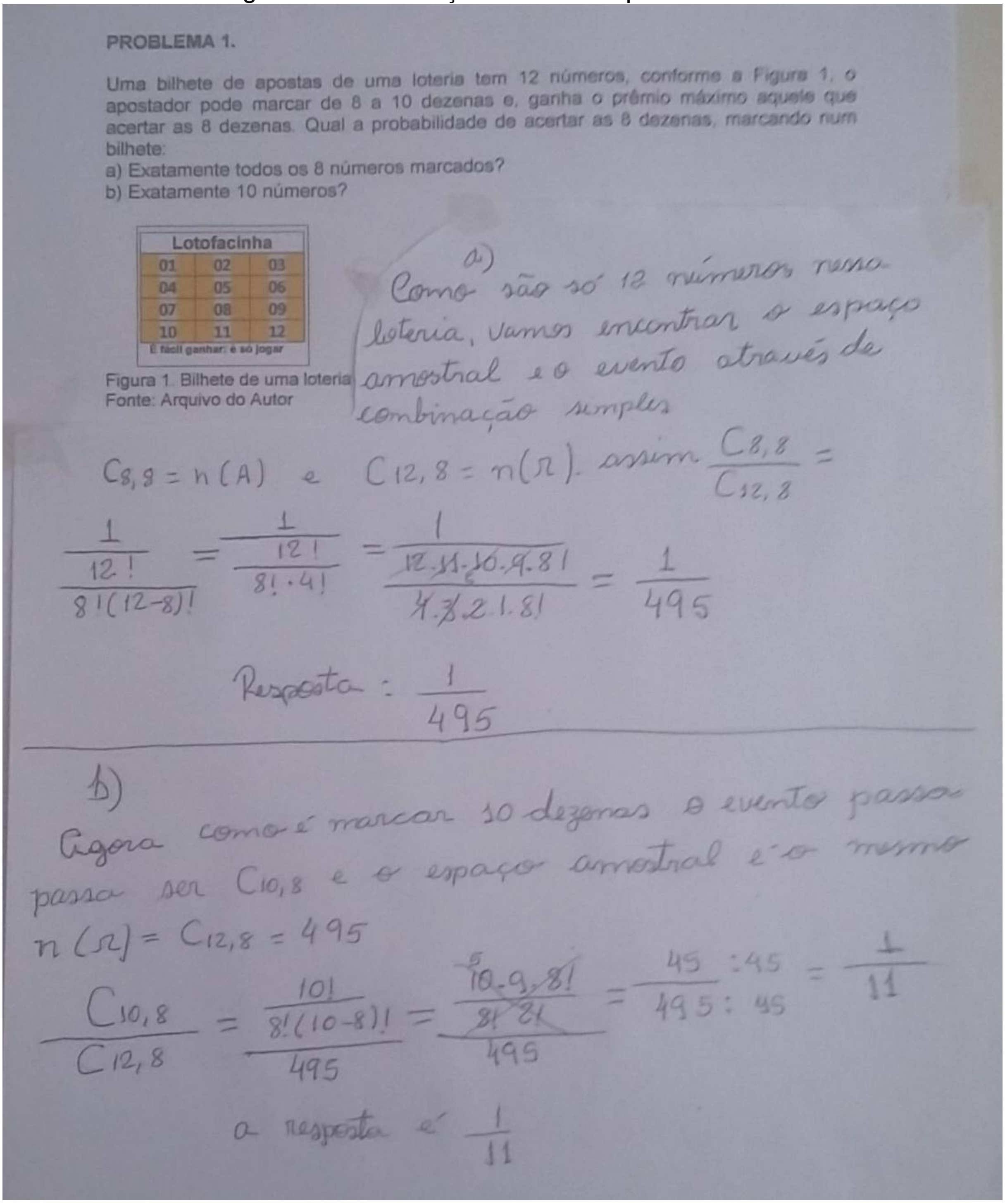
A execução do aluno foi bem sucedida, pois conseguiu encontrar os casos favoráveis e os possíveis, assim como a razão entre os casos favoráveis (eventos) e casos possíveis (espaço amostral), ou seja, $\frac{\binom{10}{8}}{\binom{12}{8}}$ construindo, dessa forma, corretamente sua resolução, a probabilidade de $\frac{45}{495}$, ou seja, $\frac{1}{11}$.

Acreditamos que o aluno tenha observado que em se aumentando a marcação no bilhete de 8 para 10, também aumentaria as chances de acertar, ou seja, as probabilidades aumentariam na mesma proporção.

Durante nossa intervenção solicitamos que a aluna M. S. lesse o problema até não pairar mais nenhuma dúvida quanto ao entendimento do mesmo. Posteriormente, cumprida essa etapa, pedimos que procurasse fazer uma relação entre os dados do problema e as possíveis incógnitas que necessitaria identificar para construir sua resposta e depois de definidos esses passos, executar as operações requeridas para chegar à resolução pretendida. Após construir a resolução, pedimos a aluna que, se possível, pudesse verificar de alguma forma se a resolução construída estaria correta, questionasse e se perguntasse se os procedimentos que utilizou na resolução do problema eram satisfatórios para chegar corretamente a resposta.

Na Figura 6.3, apresentamos a resolução construída pela aluna M.S., observamos que ela utilizou os passos descritos por Polya, pois seguiu os procedimentos metodológicos discutidos em sala de aula. Fez a identificação em cada alternativa (a) e (b) do que queria calcular. E, soube identificar o espaço amostral e o evento através da análise combinatória.

Figura 6.3 - Resolução construída pelo aluno M.S.



PROBLEMA 1.

Uma bilhete de apostas de uma loteria tem 12 números, conforme a Figura 1. o apostador pode marcar de 8 a 10 dezenas e, ganha o prêmio máximo aquele que acertar as 8 dezenas. Qual a probabilidade de acertar as 8 dezenas, marcando num bilhete:

a) Exatamente todos os 8 números marcados?

b) Exatamente 10 números?

Lotofacinha		
01	02	03
04	05	06
07	08	09
10	11	12

É fácil ganhar: é só jogar

Figura 1. Bilhete de uma loteria
Fonte: Arquivo do Autor

a) Como são só 12 números nessa loteria, vamos encontrar o espaço amostral e o evento através de combinação simples

$C_{8,8} = n(A)$ e $C_{12,8} = n(\Omega)$. assim $\frac{C_{8,8}}{C_{12,8}} =$

$$\frac{1}{\frac{12!}{8!(12-8)!}} = \frac{1}{\frac{12!}{8!\cdot 4!}} = \frac{1}{\frac{12.11.10.9.8!}{4.3.2.1.8!}} = \frac{1}{495}$$

Resposta: $\frac{1}{495}$

b) Agora como é marcar 10 dezenas o evento passa passa ser $C_{10,8}$ e o espaço amostral é o mesmo

$n(\Omega) = C_{12,8} = 495$

$$\frac{C_{10,8}}{C_{12,8}} = \frac{\frac{10!}{8!(10-8)!}}{495} = \frac{\frac{10.9.8!}{8!\,2!}}{495} = \frac{45 : 45}{495 : 45} = \frac{1}{11}$$

a resposta é $\frac{1}{11}$

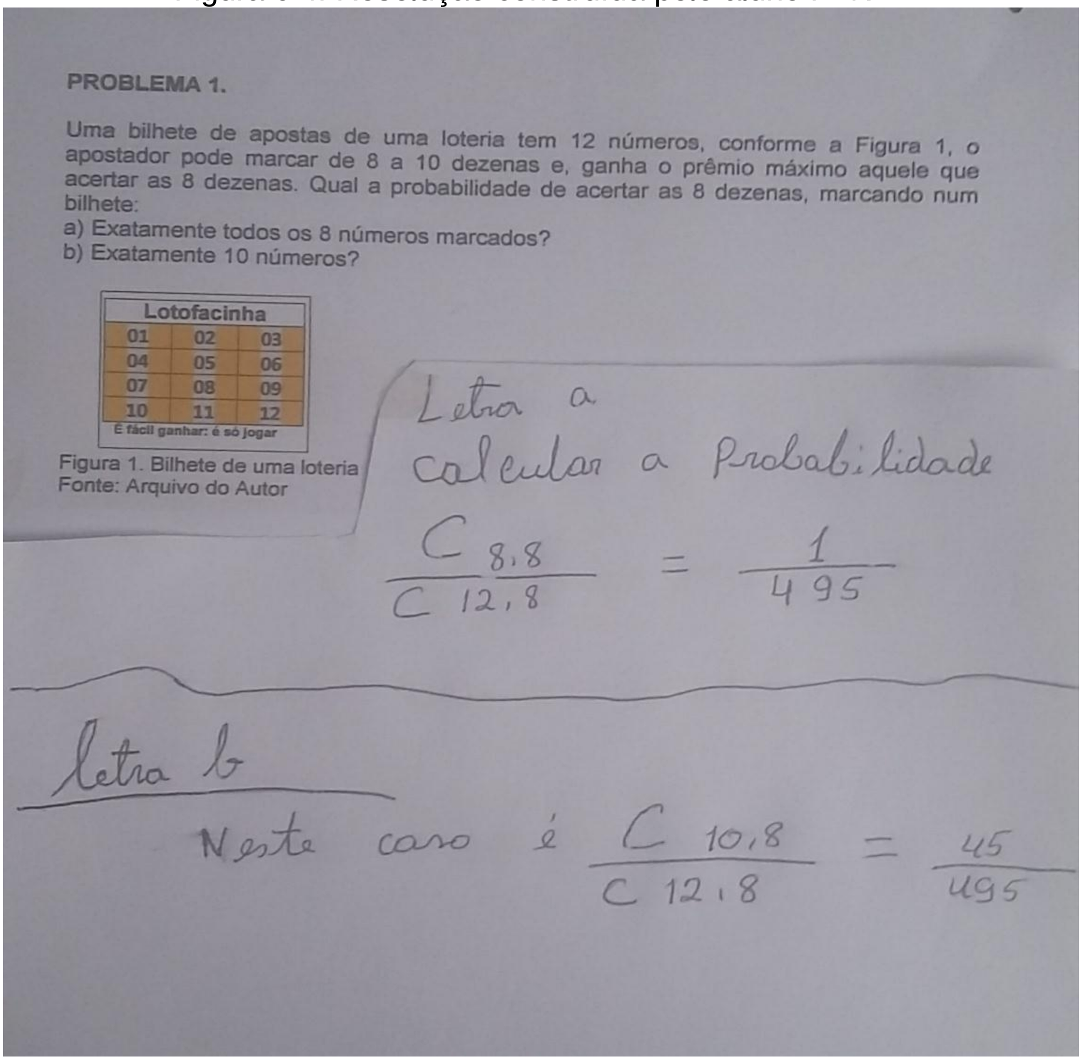
Fonte: Arquivo do autor

Com referência ao item a, se utilizou de análise combinatória para encontrar o espaço amostral e o evento, e a partir daí construir a resolução do problema. Para encontrar os casos possíveis utilizou a combinação simples $\binom{12}{8}$ e da mesma forma para encontrar os casos favoráveis, a combinação de $\binom{8}{8}$.

Em relação ao item (b), ela procedeu de forma análoga para a execução do mesmo e encontrar sua resposta. Como o espaço amostral já era conhecido do resultado do item (a) a partir daí buscou encontrar o resultado, ou seja, a probabilidade pedida $\frac{45}{495}$, ou seja, $\frac{1}{11}$.

Na Figura 6.4, apresentamos a resolução construída pelo aluno P. N. Observamos que ele conseguiu resolver o item (a) usando combinação simples, mas da forma que ele construiu a resposta deu a entender que ele fez de forma direta sem esquematizar um plano de ação para resolver o problema, ou seja, a metodologia da resolução do problema. Para responder ao item (b) também o fez de forma direta, acreditamos que por intuição, mas o certo é que ele conseguiu resolver o problema, entretanto, deu a entender que não o fez de forma segura, não seguindo as etapas de resolução de problemas sugeridas por Polya.

Figura 6.4: Resolução construída pelo aluno P. N.

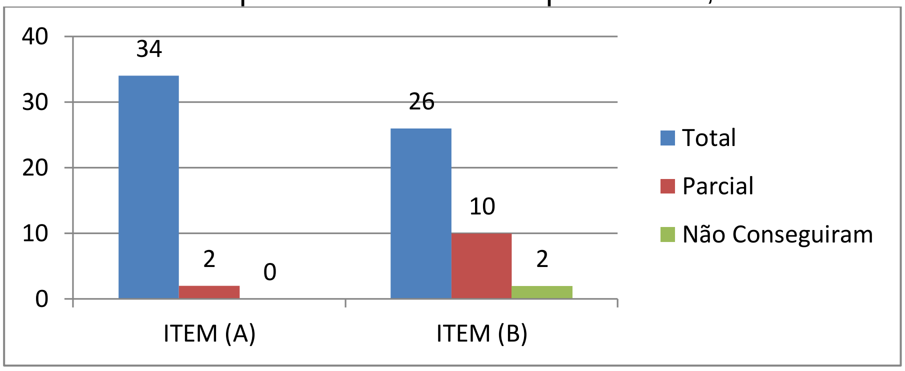


Fonte: Arquivo do autor

Observamos que tanto no item (a) quanto no item (b), pela forma da resolução apresentada pelo aluno P.N., o mesmo não conseguiu fazer um bom entendimento do problema na íntegra, apesar de ter conseguido encontrar a resposta, deduzimos que pela forma que utilizou a combinação simples $\frac{\binom{8}{8}}{\binom{12}{8}}$ e $\frac{\binom{8}{8}}{\binom{12}{8}}$ não existiu um argumento para fazermos uma analise mais detalhada da resolução.

A seguir apresentamos graficamente os desempenhos dos 36 alunos presentes no dia da aplicação dessa atividade em relação às resoluções construídas para os itens a e b.

Gráfico 1 - Desempenho dos alunos no problema 1, turno matutino



Fonte: Arquivo do autor

Os dados no gráfico revelam que aproximadamente 94% dos alunos conseguiram resolver corretamente o item (a) do problema investigado, no entanto, apenas aproximadamente 72% conseguiram resolver corretamente o item b. Mostrando assim um bom desempenho dos alunos em resolução de problemas usando a metodologia sugerida por Polya. Na turma, 6% dos alunos que não conseguiram resolver corretamente o problema proposto, quando o fizeram foi apenas de forma parcial, aproximadamente 22% em relação ao item a, e 6% em relação ao item b.

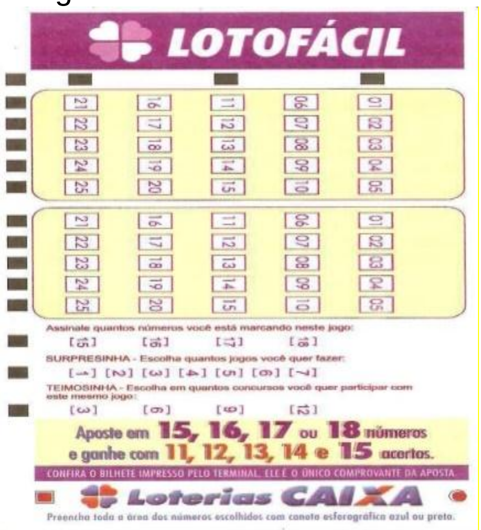
PROBLEMA 2

Para jogar na lotofacil, o apostador poderá marcar de 15 a 18 dezenas das 25 contidas no bilhete conforme a Figura 2, dessa forma, se um apostador marcar somente 15 números qual a probabilidade dele acertar:

a) Exatamente todos os 15 números marcados?

b) Exatamente 13 números?

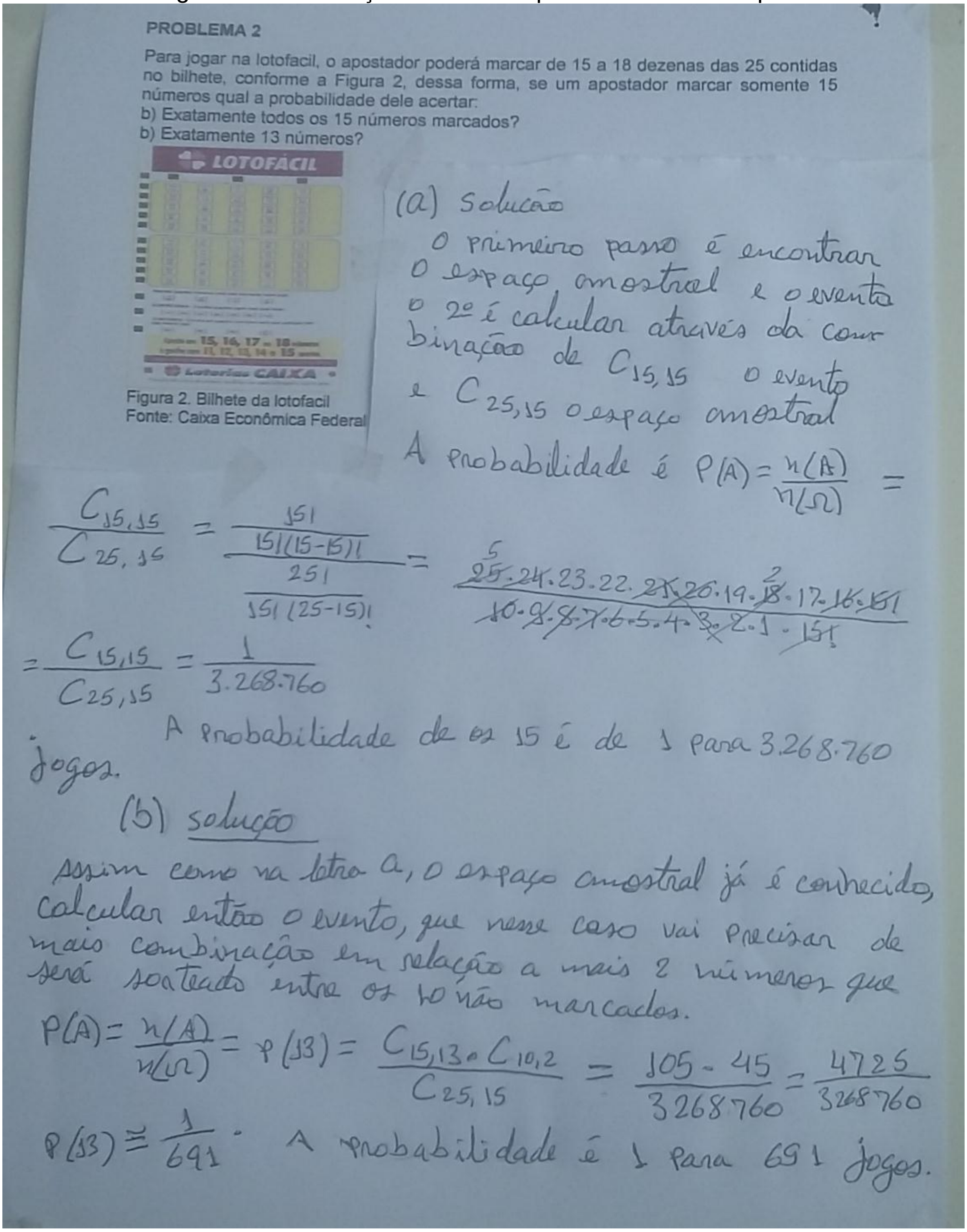
Figura 6.5: Bilhete da lotofacil



Fonte: Caixa Econômica Federal

Mostraremos na Figura 6.6 a resolução apresentada do problema 2 feita pelo aluno G.J. Analisamos que ele utilizou os passos da resolução de problemas descritos por Polya, pela forma que apresentou a solução, fazendo primeiramente a leitura e a organização do plano de ação para a execução do mesmo, seguindo as quatro etapas de Polya, com isso esquematizou e desenvolveu as operações necessárias para chegar ao resultado de forma correta exigido no problema. Ele identificou o evento e o espaço amostral se utilizando das combinações, assunto necessário e visto na aula anterior para solucioná-lo.

Figura 6.6: Resolução construída pelo aluno G. J. do problema 2



PROBLEMA 2

Para jogar na lotofacil, o apostador poderá marcar de 15 a 18 dezenas das 25 contidas no bilhete, conforme a Figura 2, dessa forma, se um apostador marcar somente 15 números qual a probabilidade dele acertar:
b) Exatamente todos os 15 números marcados?
b) Exatamente 13 números?

Figura 2. Bilhete da lotofacil
Fonte: Caixa Econômica Federal

(a) Solução

O primeiro passo é encontrar o espaço amostral e o evento o 2º é calcular através da combinação de $C_{15,15}$ o evento e $C_{25,15}$ o espaço amostral

A probabilidade é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} =$

$$\frac{C_{15,15}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{15!}{15!(15-15)!}}{\frac{25!}{15!(25-15)!}} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15!}$$

$$= \frac{C_{15,15}}{C_{25,15}} = \frac{1}{3.268.760}$$

A probabilidade de os 15 é de 1 para 3.268.760 jogos.

(b) solução

Assim como na letra a, o espaço amostral já é conhecido, calcular então o evento, que nesse caso vai precisar de mais combinação em relação a mais 2 números que será sorteado entre os 10 não marcados.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = P(13) = \frac{C_{15,13} \cdot C_{10,2}}{C_{25,15}} = \frac{105 \cdot 45}{3268760} = \frac{4725}{3268760}$$

$P(13) \cong \frac{1}{691}$. A probabilidade é 1 para 691 jogos.

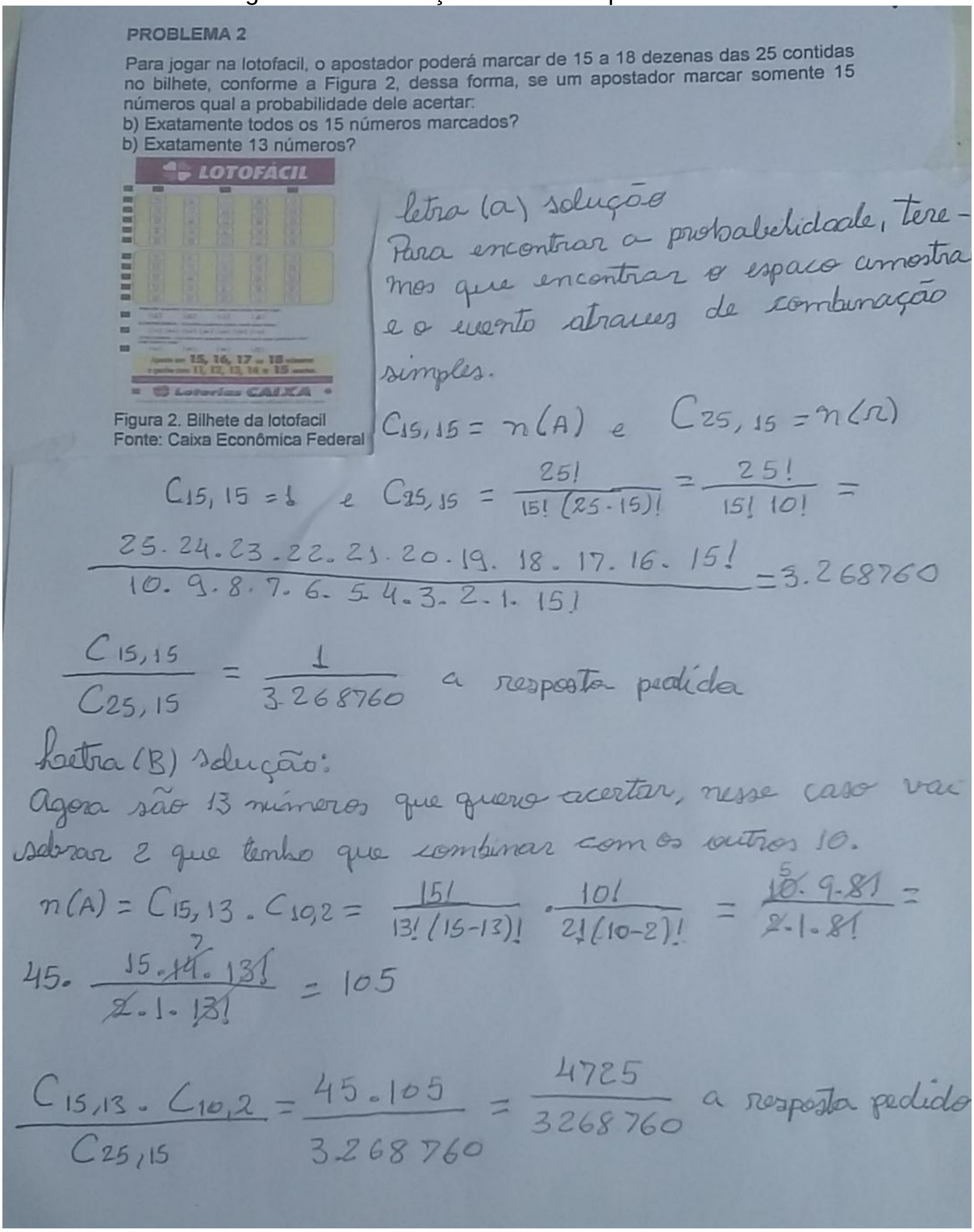
Fonte: Arquivo do autor

Neste problema no item (a) assim como no (b), o aluno G.J, também teve êxito nas quatro etapas de resolução e conseguiu observar que este problema poderia ser solucionado com a fórmula da combinação simples. Lembramos que este assunto já havido sido trabalhado na aula anterior que oferecemos sobre resolução de problemas com jogos de loterias, portanto, podemos concluir que o aluno já tinha adquirido conhecimentos e algumas técnicas de resolução.

Conseguiu encontrar o evento que neste caso, a combinação $\binom{15}{15}$ e o espaço amostral, a combinação de $\binom{25}{15}$ no item (a) e a partir daí executou seu plano e encontrou a resposta no caso, a probabilidade que era $\frac{1}{3268760}$, desse mesma forma procedeu com a resolução do item (b) fazendo a leitura e o entendimento, encontrando o evento $\frac{\binom{15}{13}\binom{10}{2}}{\binom{25}{15}}$ e isso mostra que o aluno seguiu as etapas da teoria da resolução de problemas de Polya para encontrar a resposta correta.

Na figura 6.7, mostramos a resolução desenvolvida pela aluna M. S. nesse problema observamos que ela seguiu a teoria da resolução de problemas de Polya, fazendo a leitura, entendendo o problema, organizando seu plano de ação e executando-o, tendo a compreensão do mesmo. Acreditamos que a aluna entendeu os procedimentos metodológicos discutidos em sala de aula. Pois, fez a identificação em item (a e b) contida no problema, soube identificar e encontrar o espaço amostral e o evento através da combinatória para chegar a resposta.

Figura 6.7: Resolução construída pela aluna M.S.



PROBLEMA 2

Para jogar na lotofacil, o apostador poderá marcar de 15 a 18 dezenas das 25 contidas no bilhete, conforme a Figura 2, dessa forma, se um apostador marcar somente 15 números qual a probabilidade dele acertar:
b) Exatamente todos os 15 números marcados?
b) Exatamente 13 números?

Figura 2. Bilhete da lotofacil
Fonte: Caixa Econômica Federal

letra (a) solução
Para encontrar a probabilidade, teremos que encontrar o espaço amostral e o evento através de combinação simples.

$C_{15,15} = n(A)$ e $C_{25,15} = n(\Omega)$

$C_{15,15} = 1$ e $C_{25,15} = \frac{25!}{15!\,(25-15)!} = \frac{25!}{15!\,10!} =$

$\frac{25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15!}{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1.15!} = 3.268760$

$\frac{C_{15,15}}{C_{25,15}} = \frac{1}{3.268760}$ a resposta pedida

Letra (B) solução:
Agora são 13 números que quero acertar, nesse caso vai sobrar 2 que tenho que combinar com os outros 10.

$n(A) = C_{15,13} \cdot C_{10,2} = \frac{15!}{13!\,(15-13)!} \cdot \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}.9.8!}{\cancel{2}.1.8!} =$

$45 \cdot \frac{15.\overset{7}{\cancel{14}}.\cancel{13!}}{\cancel{2}.1.\cancel{13!}} = 105$

$\frac{C_{15,13} \cdot C_{10,2}}{C_{25,15}} = \frac{45.105}{3.268760} = \frac{4725}{3268760}$ a resposta pedido

Fonte: Arquivo do autor

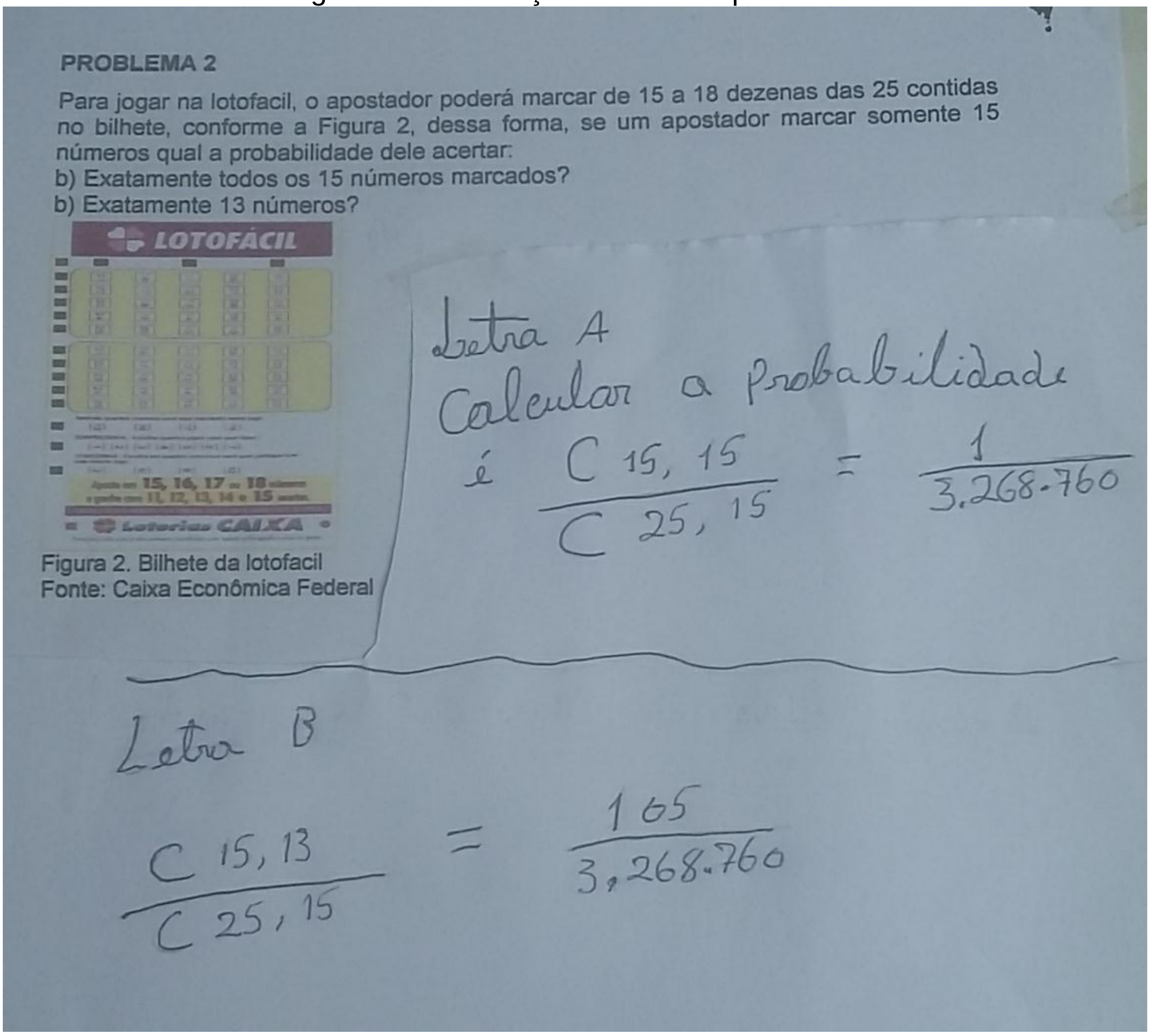
Vimos como um potencial, ou seja, outro destaque nesse problema 2, da aluna M.S., ela desenvolveu seu plano de acordo com o entendimento, fazendo sua execução de acordo com as etapas de Polya, obtendo um resultado satisfatório tanto no item (a) quanto na letra (b) dos problemas propostos. Observando sua resolução, analisamos que ela tem bom domínio na combinatória, passo interessante para resolução de problemas dessa natureza, ou seja, de jogos lotéricos. Na organização de seu plano de ação utilizou de maneira coerente a combinação simples $\binom{15}{15}$ encontrando o evento e a combinação $\binom{25}{15}$ para encontrar o espaço amostral e assim chegar a resposta esperada.

Outo fator importante na sua resolução com relação a do item (b) foi observado na objetividade que ela tratou as formas de encontrar o evento fazendo uso dos produtos da combinação simples. Menos da metade dos alunos conseguiram passar da execução ou entendimento dessa parte, que era uma das principais para a resolução desse problema. A aluna M.S. utilizou de forma sistemática sua solução para encontrar o evento fazendo de forma correta o produto das combinações, ou seja, a $\binom{15}{13}\binom{10}{2}$ que era encontrar o evento. Já que o espaço amostral era o mesmo, ela se apropriou e conseguiu chegar ao resultado com o entendimento de acordo com as etapas de resolução de problemas.

De acordo com a figura 6.8, onde está apresentada a resolução construída pelo aluno P. N., observamos que ele conseguiu resolver o item (a) do problema pela forma de combinação simples, mas como o fez de forma direta mesmo encontrando a resposta, deu margem para cometer erros.

Com referência ao item (b) esse aluno também não conseguiu resolver de maneira correta. Acreditamos que teve dificuldades com a leitura, à compreensão e o entendimento para aplicação de um plano para se chegar à resposta esperada, pois não seguiu de forma correta as etapas necessárias de acordo com teoria da resolução de problemas de Polya.

Figura 6.8: Resolução construída pelo aluno P.N.



Fonte: Arquivo do autor

Analisamos que o aluno P.N., não seguiu as orientações de Polya quanto à resolução de problemas, neste caso, teria que haver uma compreensão maior, mais aprofundada na construção da resolução, ou seja, teria que ter um entendimento mais condizente do assunto para poder executar seu plano de ação, ao invés de calcular $\frac{\binom{15}{13}}{\binom{25}{15}}$ para que encontrar o evento $\frac{\binom{15}{13}\binom{10}{2}}{\binom{25}{15}}$ e chegar a resposta.

Percebemos que apenas cinco do total de alunos pesquisados não conseguiram êxito na resolução do primeiro problema proposto, resultado considerado satisfatório pelo pesquisador. No segundo problema, com relação ao item (a) nas resoluções apresentadas podemos destacar que alguns alunos tiveram dificuldade de entendimento dos passos de resolução de problemas sugeridos por Polya, no entanto, muitos conseguiam elaborar seu plano para resolução, mas ficavam tão confiantes com o resultado obtido que esqueciam que esta etapa era importante para obter uma resolução satisfatória.

Com referência ao item (b) do segundo problema o aluno G.J., teve êxito, interpretou o problema, desenvolveu um plano, executou-o e fez o retrospecto; da mesma forma, a aluna M.S. foi destaque, pois conseguiu alcançar com êxito a resolução correta.

A etapa que os alunos apresentaram maior dificuldade foi a da Compreensão do Problema, ou seja, a primeira etapa sugerida por Polya. Muitos alunos tiveram dificuldade de entender o que se pedia no enunciado, haja vista que do total dos alunos pesquisados na turma, apenas 30 conseguiram resolver parcialmente o problema e 6 não conseguiram de jeito nenhum.

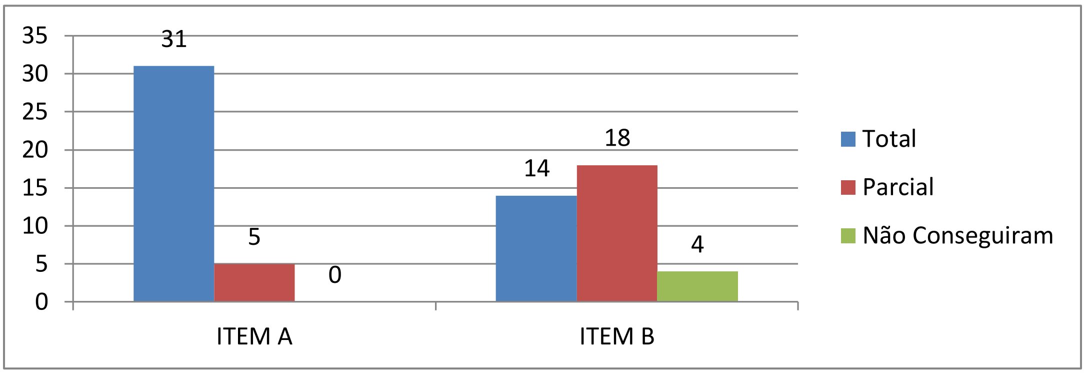
Por outro lado, observamos que alguns alunos não perceberam que para resolver o item (b) do segundo problema, eles teriam que fazer uma melhor leitura e entendimento do problema em relação ao item (a), visto que, não se tratava de uma combinação simples direta para encontrar o evento, ou seja, o subconjunto do espaço amostral. No caso da lotofacil, teriam que observar que dos 15 números sorteados, só teriam que acertar 13 e por isso havia dois números "sobrando", mas que não fazia parte dos 10 restantes e, como poderia ser também qualquer um desses restantes, seria necessário fazer outra combinação de números no caso $\binom{10}{2}$.

Quer dizer que para obtermos a probabilidade de acertarmos as 13 dezenas em 15, teríamos que calcular com a dezena que se errou, combinar com as que não seriam sorteadas, multiplicar-se pela combinação de 15 dezenas para se tirar 13. Isto dará o número de eventos. Dividindo tudo pelo espaço amostral que é formado por $\binom{25}{15}$.

Assim, para contabilizar quantas combinações há em 13 dezenas acertadas entre as 15 temos $\binom{13}{13}$ e ainda terá duas dezena fora da contagem. Ela é uma entre as 10 restantes. Ou seja, combina-se 10 para se tirar 2 na $\binom{10}{2}$, ou seja, $P(13) = \frac{\binom{15}{13}\binom{10}{2}}{\binom{25}{15}} = \frac{45\,.\,105}{3268760} \cong \frac{1}{691}$.

A seguir, apresentamos graficamente o desempenho dos alunos da 2ª série do turno matutino, com referência ao segundo problema.

Gráfico 2 - Desempenho dos alunos no problema 2, turno matutino



Fonte: Arquivo do autor

O gráfico nos mostra que os alunos tiveram um bom desempenho na resolução do item (a) do problema proposto, pois aproximadamente 89% resolveram corretamente, cerca de 11% não conseguiram em sua totalidade, porém, no item (b) o caso foi bem diferente, apenas 33% tiveram êxito; aproximadamente 50% resolveram parcialmente e os demais, 12% dos alunos, não conseguiram de forma nenhuma. Essa situação reflete o que muitos alunos disseram no questionário respondido por eles, que não gostavam de desafio matemático.

A seguir apresentamos os problemas aplicados aos alunos da 2ª série do ensino médio, turno vespertino, objeto de nossa pesquisa, assim como uma análise das resoluções apresentadas por eles.

Nesta turma também aplicamos os mesmos problemas aplicados aos alunos do turno matutino.

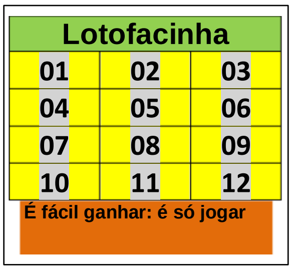
PROBLEMA 1

Um bilhete de apostas de uma loteria tem 12 números, conforme a Figura 1, o apostador pode marcar de 8 a 10 dezenas e, ganha o prêmio máximo aquele que acertar as 8 dezenas. Qual a probabilidade de acertar as 8 dezenas, marcando num bilhete:

a) Exatamente todos os 8 números marcados?

b) Exatamente 10 números?

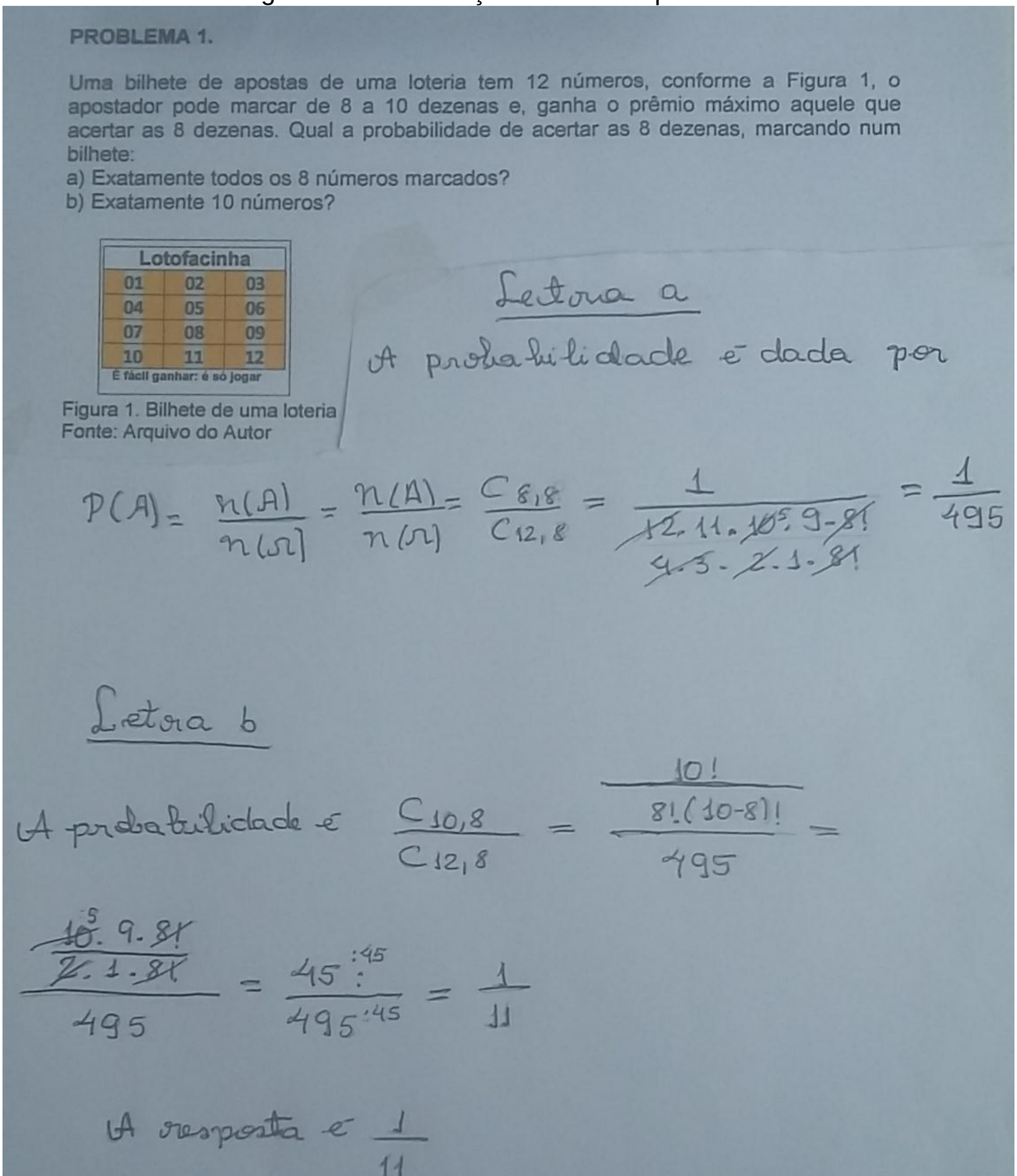
Figura 6.9: Bilhete de loteria.



Fonte: Arquivo do autor

Apresentamos na figura 6.10, a resolução realizada pela aluna J.L., aluna da turma da 2ª série do ensino médio do turno vespertino; observamos que ela teve entendimento e compreensão para a execução de seu plano de ação e revisão do resultado. Acreditamos que ela entendeu os conteúdos discutidos em sala de aula, pois fez a identificação em cada item (a e b), soube identificar o espaço amostral e o evento através da combinatória, necessária para esse tipo de resolução do problema.

Figura 6.10: Resolução construída pela aluna J.L.



PROBLEMA 1.

Uma bilhete de apostas de uma loteria tem 12 números, conforme a Figura 1, o apostador pode marcar de 8 a 10 dezenas e, ganha o prêmio máximo aquele que acertar as 8 dezenas. Qual a probabilidade de acertar as 8 dezenas, marcando num bilhete:

a) Exatamente todos os 8 números marcados?

b) Exatamente 10 números?

Lotofacinha		
01	02	03
04	05	06
07	08	09
10	11	12

É fácil ganhar: é só jogar

Figura 1. Bilhete de uma loteria
Fonte: Arquivo do Autor

Letra a

A probabilidade é dada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{8,8}}{C_{12,8}} = \frac{1}{\frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10}^{5}\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{4\cdot 3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{8!}}} = \frac{1}{495}$$

Letra b

A probabilidade é $\frac{C_{10,8}}{C_{12,8}} = \frac{\frac{10!}{8!(10-8)!}}{495} =$

$$\frac{\frac{\cancel{10}^{5}\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{8!}}}{495} = \frac{45^{:45}}{495^{:45}} = \frac{1}{11}$$

A resposta é $\frac{1}{11}$

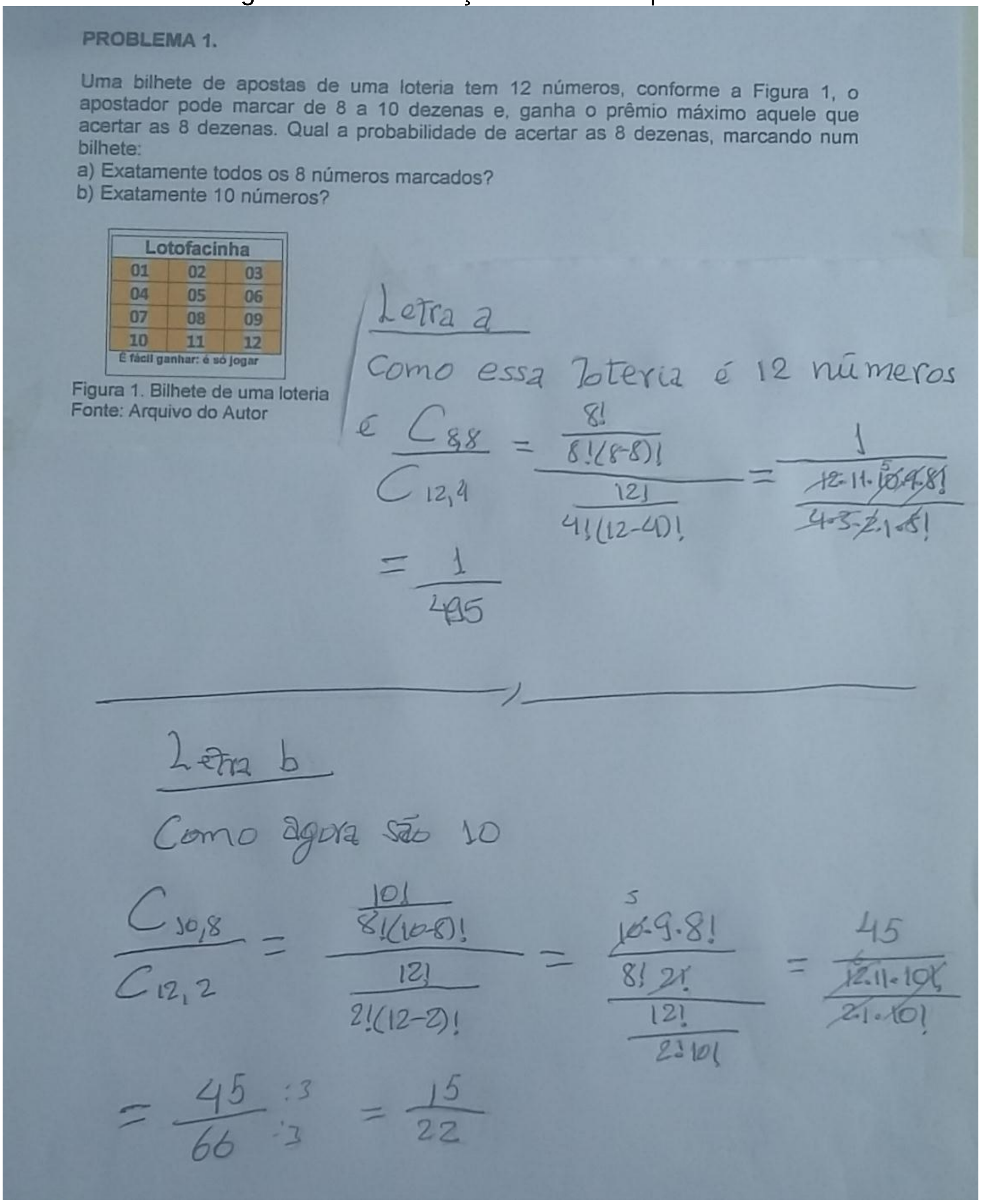
Fonte: Arquivo do autor

Diante do exposto na construção da resolução do problema 1 no item (a), a aluna J.L., resolveu corretamente, ou seja, ela fez a leitura, o entendimento seguiu corretamente as etapas de resolução de problemas da teoria de Polya, usando a fórmula da combinação simples $\binom{8}{8}$ encontrou o evento e a $\binom{12}{8}$ para encontrar o espaço amostral; dessa forma, foi possível chegar ao resultado. Percebemos que a aluna entendeu o problema pela forma como demonstrou a resolução, mostrando o entendimento do conteúdo tendo como base da aula anterior.

Já no item (b), a aluna J.L., também respondeu corretamente, seguindo os passos do problema anterior, ou seja, por meio da aplicação teoria da resolução de problemas. Foi possível a identificação mostrada na forma apresentada, na argumentação através da fórmula de combinação simples para se chegar ao resultado, encontrando o evento na $\binom{15}{15}$ e do espaço amostral $\binom{25}{15}$.

Analisamos a figura 6.11, na resolução apresentada pelo aluno M.A., observamos que ele conseguiu resolver o problema do item (a) pela forma de combinação simples, mas observamos um fato curioso, embora tenha chegado à resposta esperada, o fez de forma diferente, ou seja, uma coincidência nas combinações do espaço amostral encontrado, que neste caso, só foi possível pelo fato das combinações $\binom{12}{8}$=$\binom{12}{4}$. Dessa forma, a esquematização de seu plano de ação da metodologia da resolução do problema ficou confusa. Já no item (b), não conseguiu ter êxito pelo fato do não entendimento da metodologia da resolução de problemas com aporte a Polya.

Figura 6.11: Resolução construída pelo aluno M.A



PROBLEMA 1.

Uma bilhete de apostas de uma loteria tem 12 números, conforme a Figura 1, o apostador pode marcar de 8 a 10 dezenas e, ganha o prêmio máximo aquele que acertar as 8 dezenas. Qual a probabilidade de acertar as 8 dezenas, marcando num bilhete:

a) Exatamente todos os 8 números marcados?

b) Exatamente 10 números?

Lotofacinha		
01	02	03
04	05	06
07	08	09
10	11	12

É fácil ganhar: é só jogar

Figura 1. Bilhete de uma loteria

Fonte: Arquivo do Autor

Letra a

Como essa loteria é 12 números

é $\frac{C_{8,8}}{C_{12,4}} = \frac{\frac{8!}{8!(8-8)!}}{\frac{12!}{4!(12-4)!}} = \frac{1}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8!}}$

$= \frac{1}{495}$

Letra b

Como agora são 10

$\frac{C_{10,8}}{C_{12,2}} = \frac{\frac{10!}{8!(10-8)!}}{\frac{12!}{2!(12-2)!}} = \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!\,2!}}{\frac{12!}{2!\,10!}} = \frac{45}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 1 \cdot 10!}}$

$= \frac{45}{66} \begin{matrix} :3 \\ :3 \end{matrix} = \frac{15}{22}$

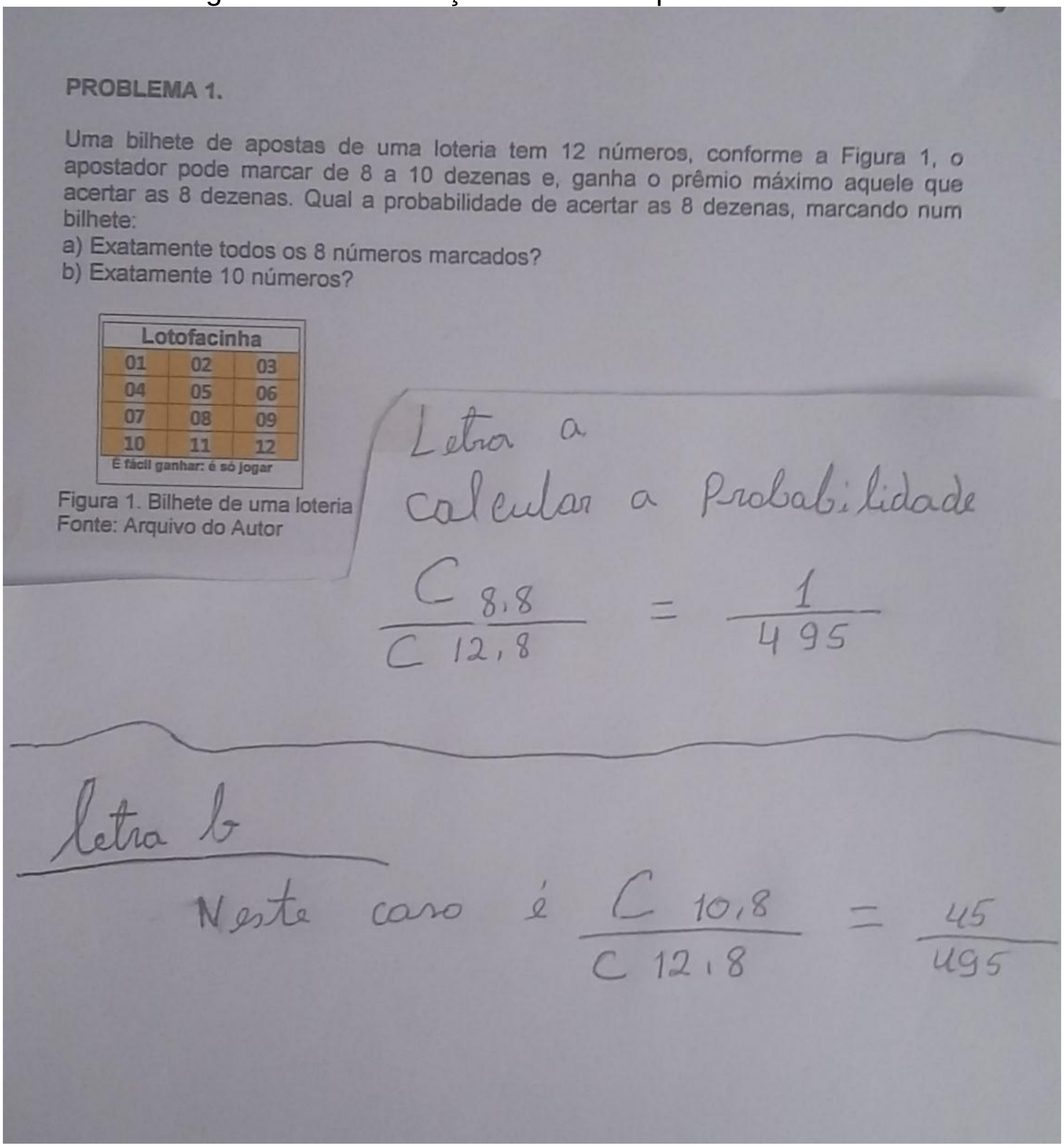
Fonte: Arquivo do autor

Observando a resolução do aluno M.A., também da mesma turma do turno vespertino, percebemos que ele encontrou a resposta de maneira correta do item (a), utilizou da combinatória para chegar à resposta mesmo de forma distorcida, mas pelo fato de que no espaço amostral, as combinações $\binom{12}{8}$ = $\binom{12}{4}$ tornou possível o resultado. Encontrou o evento na combinação de$\binom{8}{8}$, entretanto, no espaço no amostral utilizou a combinação $\binom{12}{4}$, ao invés de $\binom{12}{8}$; acreditamos que ele não entendeu a fórmula da combinatória adequada para construir seu plano de resolução do problema.

No item (b) ele seguiu o mesmo raciocínio do item (a), mas como nesse caso as combinações no espaço amostral $\frac{\binom{12}{8}}{\binom{12}{2}}$ não coincidiam, ele não conseguiu chegar a resposta esperada, sendo mais um dos alunos a responder de maneira correta o item (a) do primeiro problema e não conseguir responder corretamente o item (b) ou seja, faltou-lhe o entendimento da teoria da resolução de problemas de Polya.

Apontamos na figura 6.12, a resolução construída pelo aluno F.S. Observamos que ele não conseguiu resolver o problema do item (a) e nem do item (b) de forma correta, utilizou de forma errada as combinações simples para encontrar tanto o evento quanto o espaço amostral, ou seja, não mostrou entendimento da teoria da resolução de problemas com aporte a Polya e talvez por isso não teve conhecimento e nem compreensão para fazer a execução do plano de ação de forma adequada.

Figura 6.12: Resolução construída pelo aluno F.S.



PROBLEMA 1.

Uma bilhete de apostas de uma loteria tem 12 números, conforme a Figura 1, o apostador pode marcar de 8 a 10 dezenas e, ganha o prêmio máximo aquele que acertar as 8 dezenas. Qual a probabilidade de acertar as 8 dezenas, marcando num bilhete:

a) Exatamente todos os 8 números marcados?

b) Exatamente 10 números?

Lotofacinha		
01	02	03
04	05	06
07	08	09
10	11	12

É fácil ganhar: é só jogar

Figura 1. Bilhete de uma loteria
Fonte: Arquivo do Autor

Letra a

calcular a Probabilidade

$$\frac{C_{8,8}}{C_{12,8}} = \frac{1}{495}$$

letra b

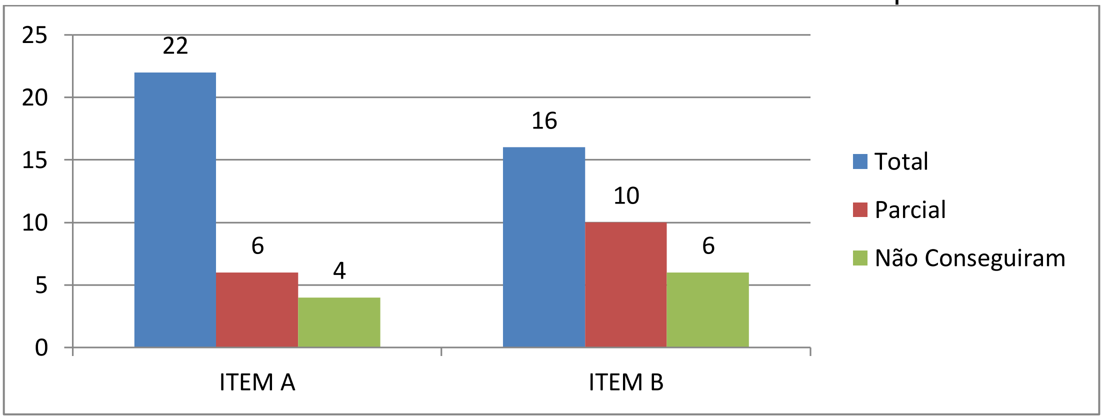
Neste caso é $\frac{C_{10,8}}{C_{12,8}} = \frac{45}{495}$

Fonte: Arquivo do autor

Observando pela forma de como o aluno F.S., tentou resolver o item (a) do 1º problema, além de não ter conseguido chegar à resposta correta, ele utilizou a combinatória de forma diferente, demonstrando que ainda, não obteve o entendimento da teoria da resolução de problemas. Na resolução do item (b), ele continuou usando o mesmo raciocínio que tinha utilizado no item (a), não conseguindo encontrar o evento e nem o espaço amostral correto, percebemos que devido ter feito a combinação de forma inadequada para solução o problema, ou seja, não conseguiu compreender a metodologia para estabelecer seu plano e chegar a solução pedida no problema de acordo com a teoria da resolução de problemas com aporte a Polya.

O gráfico apresenta o desempenho dos alunos da 2ª série do turno vespertino, onde podemos ver, observar e analisar o resultado da turma.

Gráfico 3 - Problema 1 da 2ª série do turno vespertino



Fonte: Arquivo do autor

De acordo com gráfico e analisando o desempenho dos alunos da turma da 2ª série do turno vespertino com relação ao primeiro problema; observamos que no item (a) a maioria dos alunos conseguiram responder, cerca de 69%, já 19% responderam parcialmente e o reatente, 12% deixaram em branco, isso quer dizer que aqueles que deixaram em branco, não compreenderam a metodologia da resolução de problema. Por outro lado, a maior parte dos alunos que conseguiram responder corretamente, nos faz entender que a referida metodologia tem uma boa aceitação e expectavas positivas nas soluções dos problemas matemáticos.

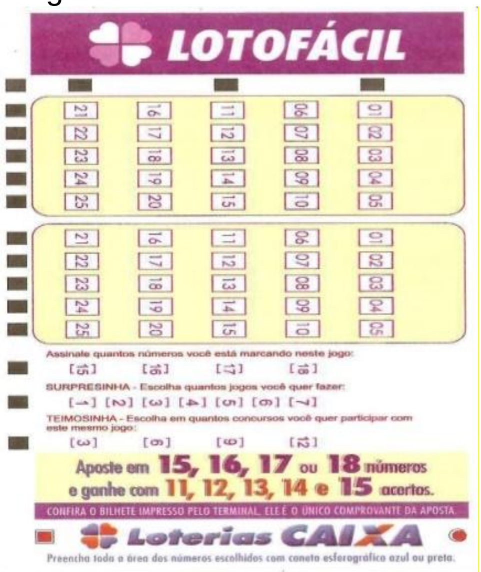
PROBLEMA 2

Para jogar na lotofacil, o apostador poderá marcar de 15 a 18 dezenas das 25 contidas no bilhete conforme a figura 2, dessa forma, se um apostador marcar somente 15 números qual a probabilidade dele acertar:

a) Exatamente todos os 15 números marcados?

b) Exatamente 13 números?

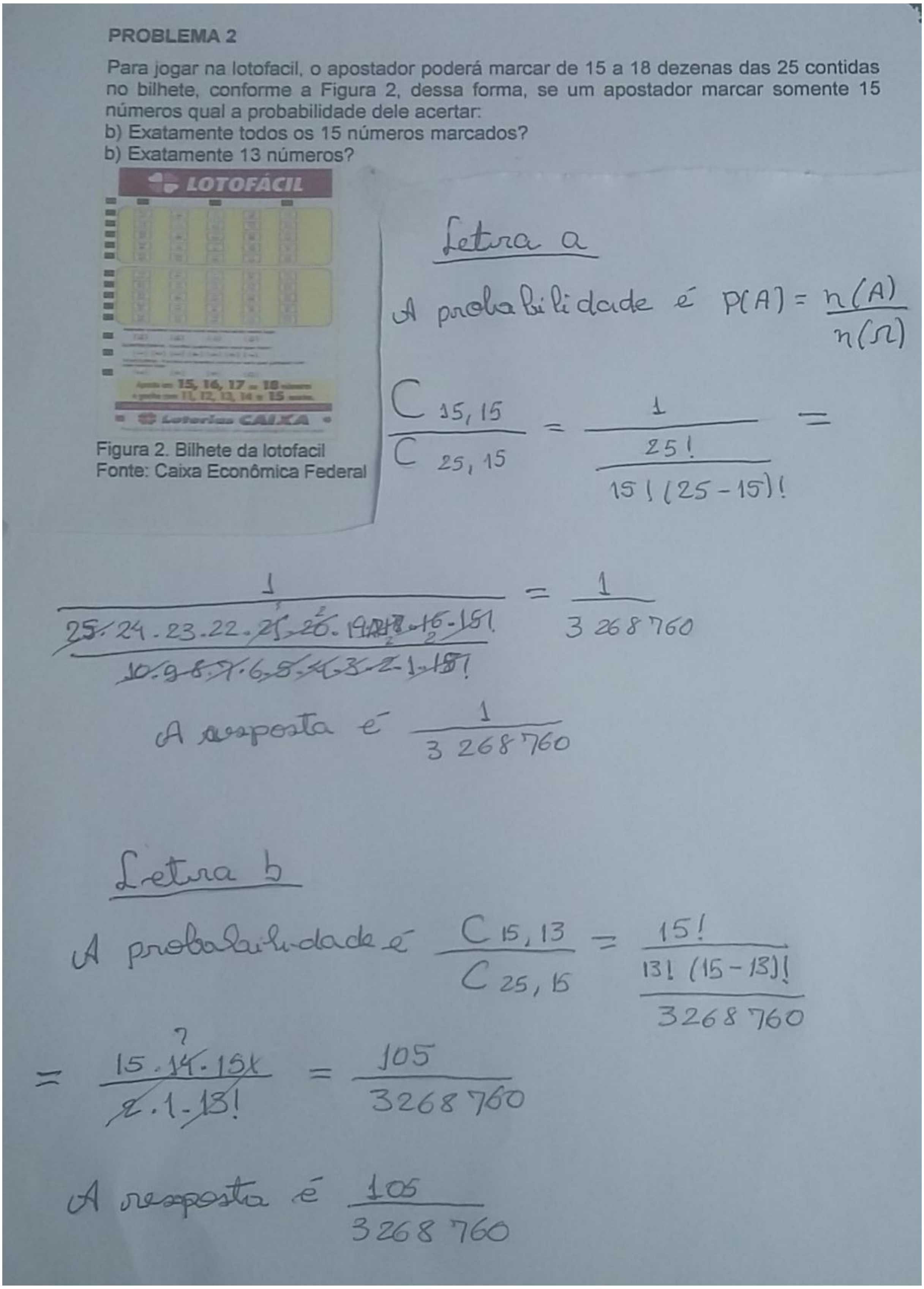
Figura 6.13: Bilhete da lotofacil



Fonte: Caixa Econômica Federal

Apresentamos na Figura 6.14, construção da resolução do problema pela aluna J.L., e pela solução apresentada, observamos que ela conseguiu resolver o problema do item (a) pela forma de combinação simples, usando o entendimento da combinatória para encontrar o evento e o espaço amostral, mostrando o entendimento da teoria da resolução de problemas, mas no item (b) não conseguiu ter êxito, talvez pelo fato de não ter feito uma leitura mais atenciosa do problema e consequentemente, não usou o produto das combinações necessária para resolver, visto que, eram 15 números marcados mas só 13 eram pra ser acertados. Nesse caso tinha que haver mais uma combinação de $\binom{10}{2}$ para fazer o produto com combinação de $\binom{15}{13}$, para resolver o problema, e com isso não chegarem à resposta esperada.

Figura 6.14: Resolução construída pela aluna J.L



PROBLEMA 2

Para jogar na lotofacil, o apostador poderá marcar de 15 a 18 dezenas das 25 contidas no bilhete, conforme a Figura 2, dessa forma, se um apostador marcar somente 15 números qual a probabilidade dele acertar:

b) Exatamente todos os 15 números marcados?

b) Exatamente 13 números?

Figura 2. Bilhete da lotofacil
Fonte: Caixa Econômica Federal

Letra a

A probabilidade é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

$$\frac{C_{15,15}}{C_{25,15}} = \frac{1}{\frac{25!}{15!(25-15)!}} =$$

$$\frac{1}{\frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15!}} = \frac{1}{3\,268\,760}$$

A resposta é $\frac{1}{3\,268\,760}$

Letra b

A probabilidade é $\frac{C_{15,13}}{C_{25,15}} = \frac{\frac{15!}{13!(15-13)!}}{3268760}$

$$= \frac{15 \cdot \overset{7}{\cancel{14}} \cdot \cancel{13!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{13!}} = \frac{105}{3268760}$$

A resposta é $\frac{105}{3268760}$

Fonte: Arquivo do autor

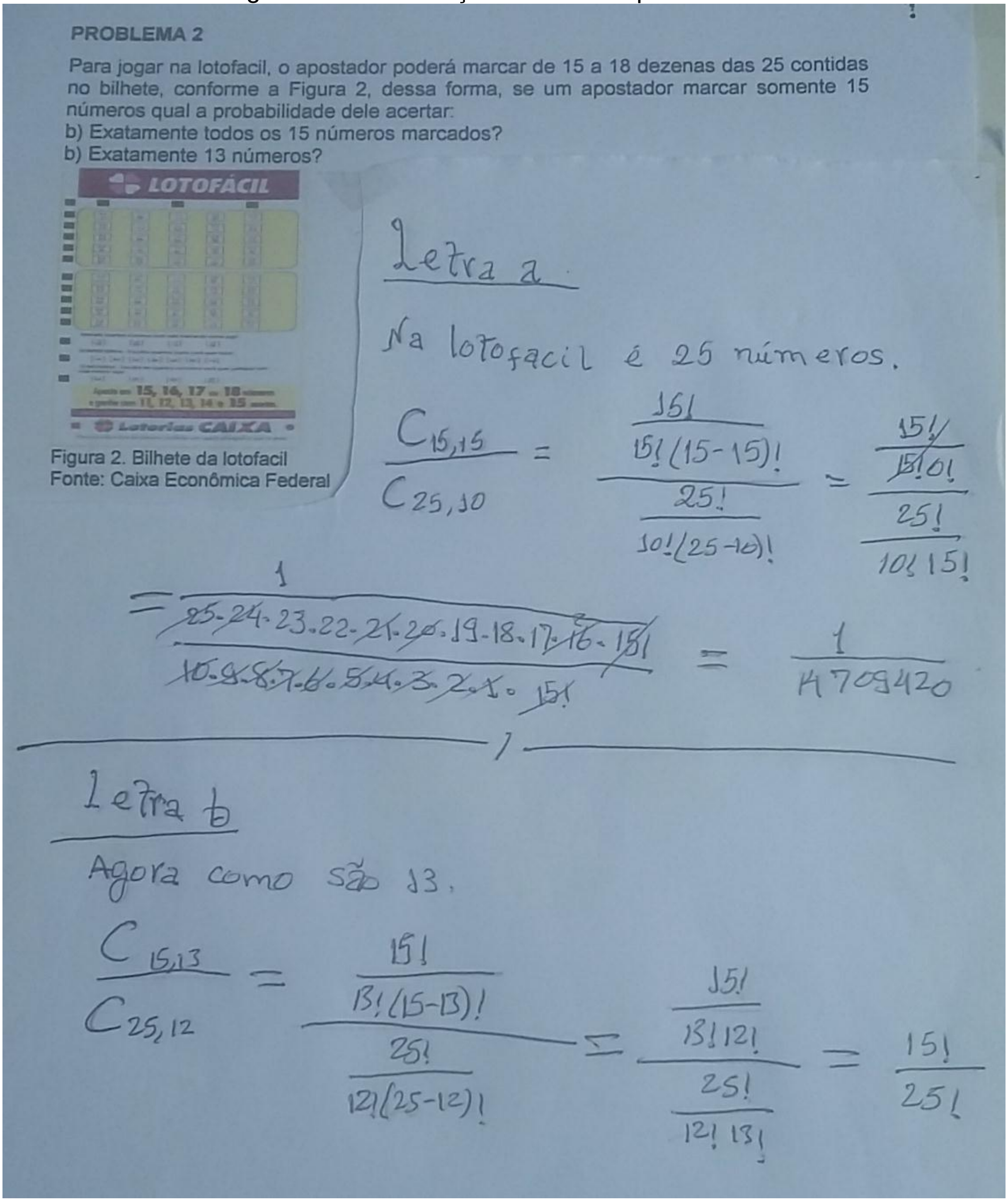
Analisando a resolução do problema 2 no item (a), a aluna J.L. procedeu corretamente com a fórmula da combinação simples, $\frac{\binom{15}{15}}{\binom{25}{15}}$. Percebemos que ela fez e a execução completa das quatro etapas de Polya da resolução de problemas, isso ficou demonstrado pela forma em que a aluna apresentou a referida solução, encontrando o evento e o espaço amostral e a probabilidade pedida. Assim mais 12 alunos da turma fizeram a resolução do item (a), porém isso não aconteceu com uma boa parte dos alunos da turma, visto que 14 responderam parcialmente, não responderam corretamente ou chegaram a resposta esperada, e 6 deixaram em branco, ou seja, não responderam.

No item (b) do problema 2, a aluna J.L., não respondeu corretamente, neste caso faltou o entendimento do problema, ou melhor, houve falha na execução do plano das quatro etapas da resolução de problemas com aporte a Polya, observamos o ocorrido, pela forma que utilizou a combinação simples, ou seja, faltou relacionar neste caso os outros dois números para combinar com os dez não marcado no bilhete e fazer a relação com o produto das combinação dos quinze da primeira parte, ou melhor, fazer a $\binom{10}{2}\binom{15}{13}$ e encontrar o evento, visto que o espaço amostral já era conhecido como ela mesma descreveu na solução.

No item (b) nenhum aluno da turma conseguiu responder o problema de forma correta, dos 32 envolvidos, 10 seguiram praticamente o mesmo raciocínio da aluna J.L., outros dois responderam em parte de forma diferente, fazendo a combinação somente $\binom{15}{12}$ e também sendo falho na resolução, e o restante, 20 alunos da turma deixaram em branco.

Na figura 6.15, percebemos a construção da resolução pelo aluno M.A., observamos que ele não conseguiu resolver o problema do item (a) de forma correta, embora tenha usado a combinação simples, ele cometeu erros na execução do calculo, ou seja, efetuou a execução do plano de modo que o resultado não chegou à resposta esperada, e dessa forma entendemos que o aluno não teve o entendimento da teoria da resolução de problemas, já no item (b) procedeu também sem ter êxito pela forma em que estabeleceu seu plano de ação para encontrar o evento, por isso, acreditamos que o aluno não teve domínio da compreensão da resolução do problema e por esse motivo, seu plano de ação não teve coerência.

Figura 6.15: Resolução construída pelo aluno M.A.



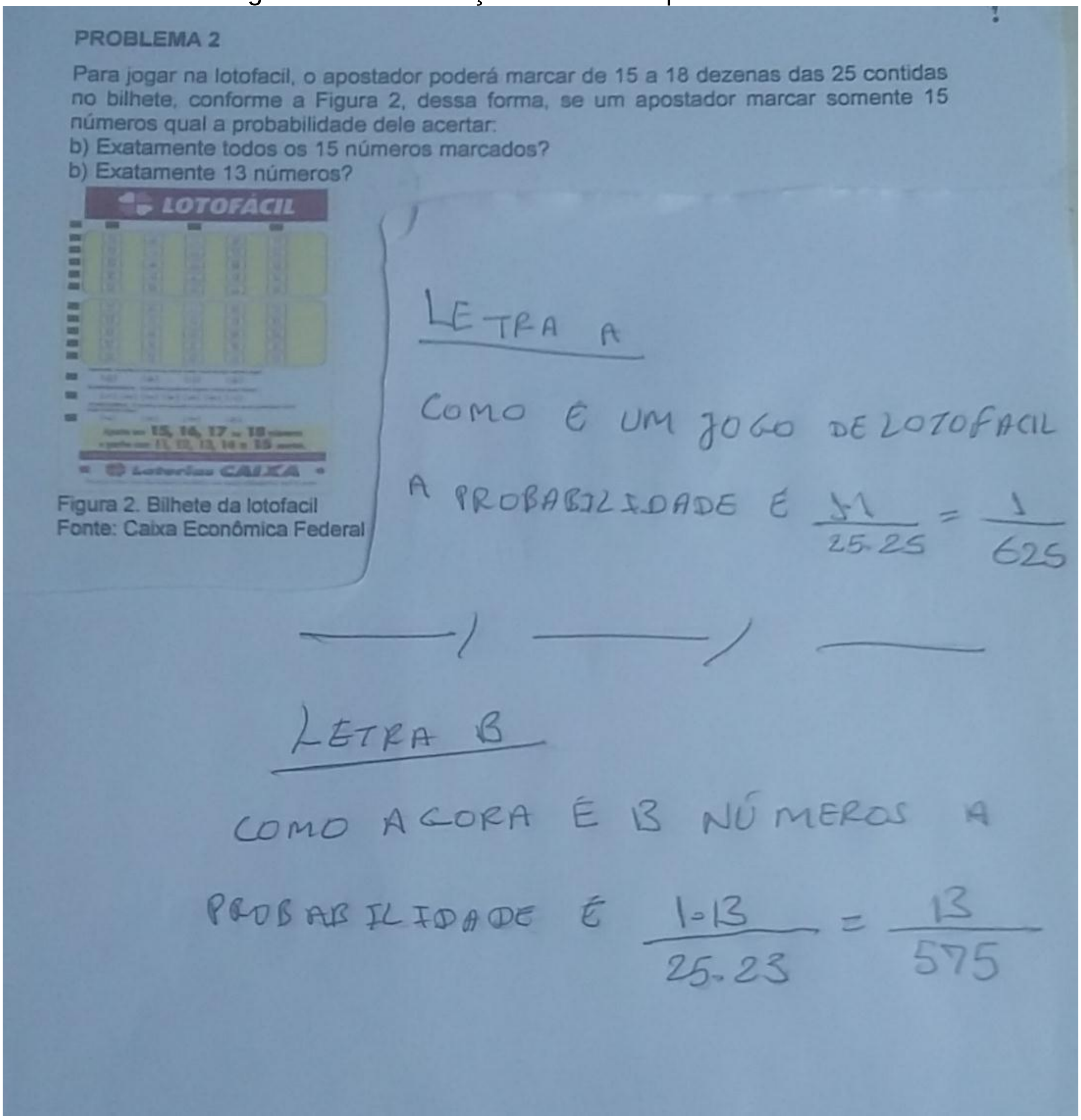
Fonte: Arquivo do autor

Analisando o segundo problema do aluno M.A., fazendo uma análise pela construção apresentada, percebemos que ele não relacionou os procedimentos necessários do item (a) para chegar à resposta pela forma que a desenvolveu. Utilizou seu plano de ação fazendo uso da combinação simples de forma destorcida, ou seja, em vez de usar $\binom{25}{15}$ no evento, ele usou $\binom{25}{10}$ e com isso a execução do seu plano para a solução do problema foi incorreta. Deduzimos que talvez por não ter tido compreensão do problema com base em Polya, não conseguiu responder corretamente.

Observando o item (b), novamente percebemos que ele cometeu erros tanto para encontrar o evento quanto o espaço amostral, ou seja, faltou fazer-lhe a conexão entre as combinações para que o evento fosse encontrado de forma correta, ele se utilizou da combinação simples $\binom{15}{13}$, mas faltou fazer com outra parte da combinação $\binom{10}{2}$ que era a parte restante dos quinze que não estava marcado no bilhete, e por isso houve esse erro ao encontrar o evento; da mesma forma, ouve erro para encontrar o espaço amostral, visto que, ele utilizou de forma distorcida a combinação simples em vez de usar $\binom{25}{15}$ no espaço amostral, ele usou $\binom{25}{12}$ que acabou comprometendo a resposta final do problema num todo, ou seja, ele não conseguiu fazer o entendimento e a compreensão do problema para a executar a luz da teoria da resolução de problemas de Polya.

A construção da figura 6.16, apresentamos a resolução que foi construída pelo aluno F.S., observamos que ele não conseguiu resolver o problema do item (a) e nem do item (b) de forma correta, ou seja, é um caso análogo a que já tinha feito no problema 1, utilizou de forma errada as combinações simples para encontrar tanto o evento quanto o espaço amostral, e dessa forma, demostrou que não obteve entendimento da teoria da resolução de problemas com aporte a Polya.

Figura 6.16: Resolução construída pelo aluno F.S.

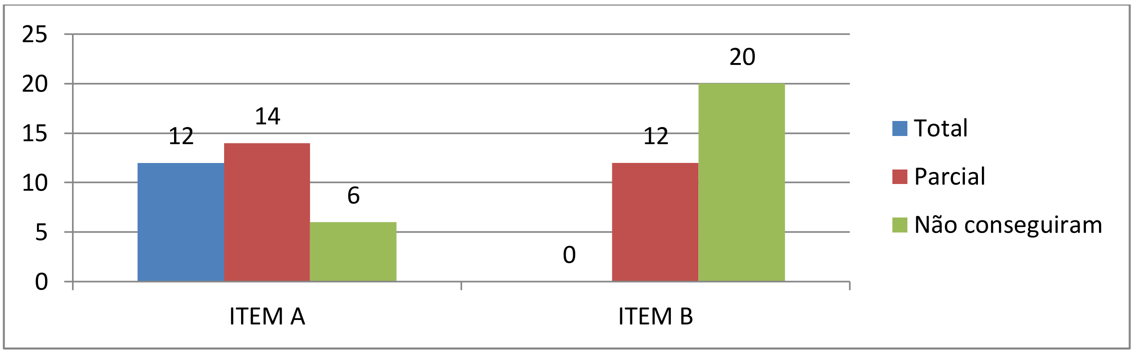


Fonte: Arquivo do autor

Observando a resolução do aluno F.S., vimos que ele não seguiu de maneira correta nenhuma das etapas da resolução de problemas de Polya. Ele usou de forma inadequada a execução do seu plano de ação para encontrar o evento e da mesma forma o espaço amostral; acontecendo de maneira igual para no item (b) do mesmo problema, onde usou a probabilidade sem fazer as combinações necessárias para se solucioná-lo. Acreditamos que esse aluno não teve compreensão, ou melhor, o entendimento da teoria da resolução de problemas com aporte a Polya, para poder desenvolver seu plano de ação na construção da resposta dos problemas.

O gráfico vai nos mostra o resultado do desempenho do problema 2 da turma da 2ª série do turno vespertino com relação ao desempenho dos alunos.

Gráfico 4 - Problema 2 da turma da 2ª série do turno vespertino.

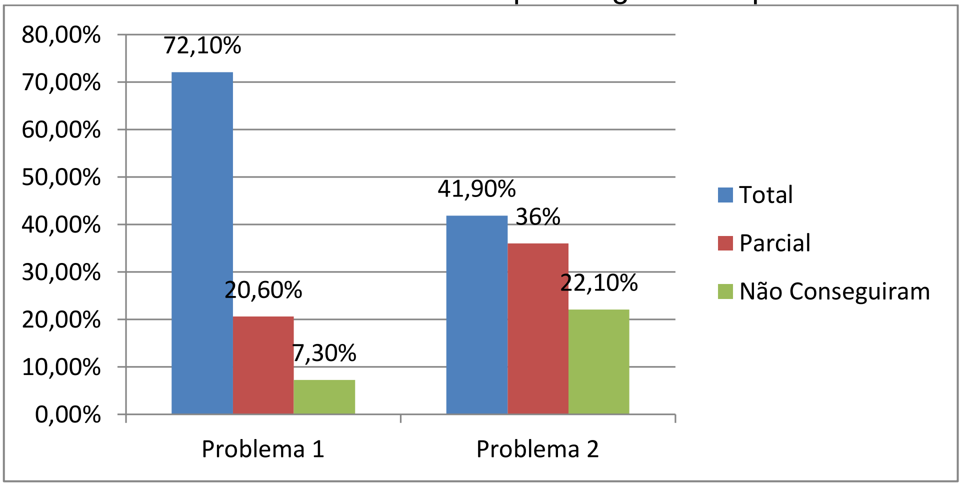


Fonte: Arquivo do autor

Percebemos no gráfico, uma realidade diferente do problema 2 no item (a) em relação ao item (b); no primeiro item quase metade da turma resolveram, mas no segundo item, nenhum aluno conseguiu responder de maneira correta; mostrando um preocupação em relação ao entendimento do assunto. No item (a) cerca de 38% dos alunos conseguiram responder corretamente, enquanto, 44% responderam parcialmente e o restante 18% não responderam ou deixar em branco. Já item (b), o resultado foi desastroso, porque nenhum aluno respondeu correto, enquanto 63% responderam de forma parcialmente ou deram um resultado diferente do esperado e restante, 37% não responderam ou deixaram em branco.

De modo geral, o gráfico abaixo nos faz entendermos que o resultado ficou num patamar de bom para regular, tendo em vista que muitos conseguiram responder utilizando as quatro etapas de resolução de problemas de Polya, porém uma boa parte não, mas isso não tirou o brio da maioria que se dedicou e aprenderam; e de certa forma acreditamos que será de grande valia para este trabalho de pesquisa, a participação nesta experiência.

Gráfico 5 - Resultado de desempenho geral dos problemas



Fonte: Arquivo do autor

O Gráfico mostra o desempenho no geral com relação aos dois problemas solucionados dos alunos das duas turmas pesquisadas, após a verificação das resoluções nas duas turmas, comprovando dessa forma que a metodologia da resolução de problemas é essencial para ser utilizada pelos professores em sala de aula.

Observamos que mais de 72% dos alunos conseguiram responder o 1ºproblema em sua totalidade e, quase 42% responderam o 2º problema. Já 20% responderam parcialmente o primeiro problema e 36% o segundo e apenas 7% não conseguiram responder o problema um e 22% o segundo.

Partindo desse princípio podemos dizer que o resultado no geral foi satisfatório, pois a maioria dos alunos conseguiram ter o entendimento fazer um plano e executar o mesmo e chegar a resposta e verificar a solução, ou seja, seguir as quatro etapas da metodologia de resolução de problemas proposto por Polya.

De forma geral, percebemos que a maioria dos alunos conseguiu responder os problemas, isso quer dizer, que a metodologia da resolução de problemas seguindo as quatro etapas com aporte a Polya, tem uma eficiência comprovada na sala de aula pelos alunos que participaram. E por isso, acreditamos ser eficiente, prova disso, são as resoluções apresentadas nos dois problemas pelos alunos das duas turmas em que aconteceu a experiência em sala de aula na escola CE Mª do Socorro Almeida Ribeiro Anexo III.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observamos que estudo da probabilidade objetiva estimulação e a percepção de que boa parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e de incerteza se manifestam intuitivamente e podem ser exploradas na escola em situações nas quais os alunos podem fazer experimentos em espaços equiprováveis.

Acreditamos que a metodologia da resolução de problemas, segundo Polya, quando utilizada de forma correta, desenvolve no aluno o hábito de pensar e ajuda resolver muitos problemas.

Em geral, os que não conhecem as quatro etapas de resolução de problemas proposta por Polya, utilizam-se da metodologia de "tentativa e erro", o que se torna muito trabalhoso e nem sempre favorece chegar a um resultado satisfatório, isso talvez seja um dos diversos motivos dos quais muitos alunos encontram dificuldades na resolução de problemas, fato observado na pesquisa com os alunos da 2ª série do turno vespertino da escola CE Maria do Socorro Almeida Ribeiro Anexo III de Centro Novo do Maranhão.

Acreditamos que a metodologia de resolução de problemas vem facilitar o professor a mediar à construção das resoluções dos problemas propostos aos alunos, objetivando facilitar o ensino aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo.

Igualmente, é preciso possibilitar um entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas que estão implícitas em representações probabilísticas, procedimentos ou conceitos. Ao ensinar o conteúdo de probabilidade, defendemos que o professor deve utilizar as quatro etapas de resolução de problemas segundo Polya, pois, dessa forma, o aluno poderá, através dessas etapas elencadas por Polya, mais facilmente conseguir resolver os problema que lhes são sugeridos.

Constatamos isso em nossa pesquisa, nos problemas que foram aplicados em sala de aula, as resoluções apresentadas, mostraram que os alunos conseguiram aplicar satisfatoriamente a metodologia de Polya e chegar a resposta corretamente. Portanto, admitimos que essa Metodologia possa ser trabalhada de forma continua em sala de aula, contribuindo para uma formação de alunos críticos, criativos e capazes de pensar em resolver problemas dos mais diversos no seu dia-a-dia.

Acreditamos também que o professor ao utilizar essa metodologia de ensino de probabilidade, proporcionará aos alunos um entendimento melhor dos conceitos e soluções relacionados à chance, incerteza e aleatoriedade, que aparecem na vida diariamente, particularmente na mídia e relacionado aos jogos de loterias.

Existe um universo muito rico de jogos de sorte no Brasil e no mundo que podem ser explorados pelo professor de Matemática do Ensino Médio em suas aulas de probabilidade e combinatória. O cálculo das chances de vitória de cada jogo e a comparação entre eles mostram o encontro da Matemática com a vida real e com o lúdico. Esta percepção pode levar o estudante a encontrar uma motivação para os seus estudos, o que ajudará bastante ele e o professor na construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS

APARECIDA, Regiane. **História das loterias no Brasil**. Disponível em<www.infoescola.com/historia/historia-das-loterias-no-brasil/>. Acesso em 19/04/2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio - Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: Ministério da Educação,1998, 2000, 2002.

BORGES NETO, H. et al. **A Sequência Fedathi como proposta teórico-metodológica no ensino-aprendizagem de matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas**. In: Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste. Educação, Desenvolvimento Humano e Cidadania. São Luís; UFMA, Anais, 2001.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: CAEM-IME, USP, 2004. 100 p.

FRAGA, R. R. **O estudo das loterias**: uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio. Dissertação (Mestrado em Matemática) Programa PROFMAT. IMPA. Rio de Janeiro, 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

HOEL, Paul G.; PORT, Sidney C.; STONE, Charles J. Introdução à teoria da probabilidade. **Rio de janeiro: Interciência**, 1978.

HUIZINGA, Johan. Homo Ludens. O jogo como elemento da cultura. Perspectiva: São Paulo. 2000.

LOPES, C.A.E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil**. 2003. 290 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2003.

LOPES, C.A.E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental**: uma análise curricular. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LOPES, C.A.E. **Literacia estatística** e INAF 2002. In: FONSECA, M.C.F.R. (Org.). Letramento no Brasil: habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2005.

MARTINS, Maria Eugénia Graça. **Introdução à Probabilidade e à Estatística**: Com complementos de Excel. Departamento de Estatística e Investigação Operacional da FCUL Sociedade Portuguesa de Estatística. 2005.

MIRANDA, Juliana. **A história das Loterias**. http://www.sitedecuriosidades.com/curiosidade/a-historia-das-loterias.html. Acesso em 20/04/2015.

MOURA, M. O. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. São Paulo: FDE, 1994. (Série Ideias, 10). Disponível em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf. Acesso em: 14 jun. 2015.

PONTE, J.P. **Da formação ao desenvolvimento profissional**. In: ACTAS do PROFMAT. Lisboa: APM, 1998.

POLYA, G. George. **A Arte de Resolver Problemas:** Um Novo Aspecto do Método Matemático/ G. Polya; tradução Heitor Lisboa de Araújo. Editora Interciência Ltda. Rio de Janeiro, 2005.

POLYA, G. George. **A Arte de Resolver Problemas**: Um Novo Aspecto do Método Matemático/ G. Polya; tradução Heitor Lisboa de Araújo. Editora Interciência Ltda. Rio de Janeiro, 2006.

POZO, J.I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

SILVA, Renata; TAFNER, Elisabeth Penzlien. **Apostila de metodologia científica**. Brusque: ASSEVIM – Associação Educacional do Vale do Itajaí-Mirim, jan. 2008.

SHINE, Carlos Yuzo. Aulas de Matemática Olímpicas. Rio de Janeiro: SBM, 2009, 280p.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE A – questionários aplicados aos alunos.

QUESTIONÁRIO APLICADO A ALUNOS DO ENSINO MÉDIO DA ESCOLA CE Mª DO SOCORRO ALMEIDA RIBEIRO ANEXO III DO MUNICÍPIO DE CENTRO NOVO DO MARANHÃO / MA

IDENTIFICAÇÃO:

NOME DO(A) ALUNO(A): ____

CURSO: _____________________________ SÉRIE ____________

TURNO:_____________________

1 – EM QUAL TIPO DE ESCOLA VOCÊ CURSOU O ENSINO FUNDAMENTAL?
( ) PÚBLICA MUNICIPAL ( ) PARTICULAR

2 – VOCÊ ESTUDOU TÓPICOS RELACIONADOS À PROBABILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL? EM CASO AFIRMATIVO, RESPONDA A QUESTÃO 3.
( ) SIM ( ) NÃO

3 – DESSES RELACIONADOS, QUAIS VOCÊ LEMBRA:
( ) MOEDAS ( ) JOGO DE DADOS ( ) JOGO DE CARTAS ( ) JOGOS DE LOTERIAS ( ) OUTRO DETERMINAR ____________________

4 – VOCÊ OU ALGUÉM DE SUA FAMÍLIA, FAZ JOGOS DE LOTERIAS?

5 - QUAL A QUE FAZ COM MAIS FREQUÊNCIA:
( ) MEGA SENA ( ) DUPLA SENA ( ) QUINA ( ) LOTOFACIL ( ) LOTOMANIA ( ) TIMEMANIA ( ) LOTECA ( ) LOTOGOL

6 – VOCÊ GOSTA DE RESOLVER DESAFIOS MATEMÁTICOS?
( ) SIM ( ) NÃO

Obrigado pela participação!

APÊNDICE B – Problemas

PROBLEMA 1.

Uma loteria seu bilhete de apostas tem 12 números, o apostador pode marcar até dez dezenas e, ganha o prêmio máximo aquele que acertar 08 dezenas. Qual a probabilidade de se acertar as 8 dezenas, marcando no seu bilhete:

a) Exatamente 8 dezenas?
b) Exatamente 10 dezenas?

Lotofacinha		
01	02	03
04	05	06
07	08	09
10	11	12

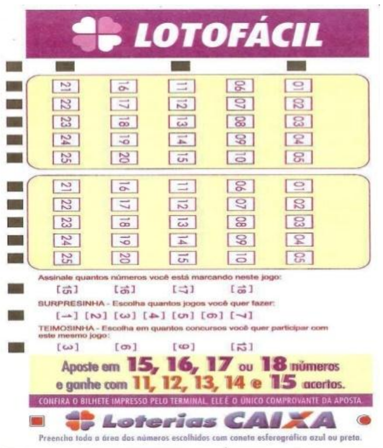
É fácil ganhar: é só jogar

PROBLEMA 2

Para jogar na lotofacil, o apostador poderá marcar de 15 a 18 dezenas das 25 contidas no bilhete, dessa forma, se um apostador marcar somente 15 números qual a probabilidade dele acertar:

b) Exatamente todos os 15 números marcados?
b) Exatamente 13 números?

Figura 2. Bilhete da lotofacil



PROBLEMA 3

Na loteria da quina da caixa, distam de 80 dezenas, um apostador fazendo uma aposta com 5 dezenas, qual a probabilidade de acertar:

a) Exatamente as 5 dezenas?
b) Exatamente 4 dezenas?

PROBLEMA 4

No jogo de uma loteria chamado “lotinha” contem de 01 a 06 número (cada número possui a mesma probabilidade). A regra do jogo é: marca-se no bilhete 4 números e serão 4 números sorteado. Qual é a probabilidade do jogador marcar no bilhete 4 números e acertar:

a) Exatamente os 4 números?
b) Exatamente os 3 números?

b) Em caso negativo e tomando a aposta simples (dois números) como base, quais deveriam ser os valores da tabela acima?

PROBLEMA 5

A lotofacil é uma loteria da Caixa Econômica Federal, na qual seu volante é composto por 25 dezenas, onde o apostador marca quinze dezenas, aposta simples, ou dezesseis, dezessete ou dezoito. Serão sorteados quinze das vinte e cinco, a pessoa ganha acertando 11, 12, 13 14 e 15 dezenas, esta ultima que é o prêmio máximo.

Pergunta-se:

a) Paulo Sérgio faz 100 jogos, fazendo aposta simples para um único sorteio, enquanto Samuel faz um jogo marcando 18 dezenas para o mesmo sorteio. Quem tem a maior chance de ganhar algum prêmio: Paulo Sérgio ou Samuel?

b) Gabriel fez um jogo da lotofacil, e vai concorrer na teimosinha para os próximos 10 sorteios e Zeca faz 10 jogos para concorrer a único sorteio, ambos fazendo aposta simples; generalizando, na lotofacil, é melhor fazer “p” bilhetes para um único sorteio ou um bilhete por sorteio, durante “p” sorteios?