Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

O Baricentro dos Polígonos Convexos

Rubens Gualberto de Oliveira

Salvador - Bahia
Março de 2016

O Baricentro dos Polígonos Convexos

Rubens Gualberto de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos.

Salvador - Bahia
Março de 2016

Sistema de Bibliotecas - UFBA

Oliveira, Rubens Gualberto de.
O baricentro dos polígonos convexos / Rubens Gualberto de Oliveira. - 2016.
85 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2016.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria analítica. 3. Baricentro. 4. Polígonos. I. Santos, Evandro Carlos Ferreira dos. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 516.3
CDU - 514.12

O Baricentro dos Polígonos Convexos

Rubens Gualberto de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos. (Orientador)
UFBA

Prof.ª Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva
UFBA

Prof.ª Dra. Mariana Cassol
UFBA

Dedico esta conquista à minha mãe, aos meus irmãos, aos meus filhos, aos meus amigos e às minhas mulheres.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me dado força nos momentos mais difíceis e me ajudado a nunca desistir desse sonho de me tornar Mestre em Matemática.

A todos os meus familiares e amigos que me incentivaram e sempre acreditaram em minha capacidade e em especial, a minha mãe Terezinha Gualberto de Santana e aos meus filhos, Diana Freitas Gualberto de Oliveira e Rubens Meireles Neres Gualberto de Oliveira, que representam o meu Porto Seguro, a minha fonte de inspiração e de energia para continuar trabalhando e estudando.

Aos meus amigos do PROFMAT da turma de 2013, em especial, ao Prof. Me. Marconi Silveira Camera e ao Prof. Me. Fábio Lima Pinto, pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis e pelo tempo que passamos juntos estudando durante todo o curso e sempre com o mesmo lema: "estudar, aprender e ensinar ao próximo o que aprendeu".

Ao Professor Me. Adriano Caribé Ribeiro pela sua simplicidade e humildade em ter compartilhado com toda a turma a sua experiência e o seu conhecimento vasto, sobre os conteúdos da matemática.

Aos professores do PROFMAT e em especial ao meu orientador Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos pelas dicas, paciência e apoio que sempre me passou durante todo esse trabalho.

Agradeço também, as professoras participantes da banca examinadora: Prof.ª Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva, a Prof.ª Dra. Mariana Cassol, pela atenção e pelas valiosas sugestões e a Prof.ª Joelina Esteves do Nascimento, que sempre acreditou em mim e que se disponibilizou para fazer a correção ortográfica desta dissertação e terás sempre o meu carinho e afeto.

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização e a conclusão deste sonho, o meu MUITO OBRIGADO!!!

“O professor só pode ensinar quando está disposto a aprender”.

Janoí Mamedes

Resumo

Nesta dissertação serão apresentadas considerações sobre o estudo do Baricentro dos Polígonos Convexos. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma nova abordagem para proporcionar um melhor entendimento e aprendizado, para os alunos, no que se refere ao baricentro de um triângulo e de outro polígono convexo qualquer. Para isto, serão apresentadas definições, propriedades, fórmulas, demonstrações e relatadas experiências para encontrar o baricentro de alguns polígonos convexos. Por fim, serão propostas diversas atividades pedagógicas para desenvolver-se em sala de aula, consolidando, assim, a proposta apresentada.

Palavras chaves: Baricentro, Centro de Massa, Centro de Gravidade.

Abstract

In this dissertation considerations will be presented on the study of the Centroid of Convex Polygons. This work aims to present a new approach to provide a better understanding and learning, for students, with regard to the centroid of a triangle and another convex polygon any. For this, will be presented definitions, properties, formulas, demonstrations and reported experiences to find the centroid of some convex polygons. Finally, various educational activities will be proposed to develop in the classroom, thus consolidating the proposal.

Words keys: Centroid, Center of mass, Center of Gravity.

Sumário

Introdução

É inegável a necessidade da relação intrínseca entre as áreas do conhecimento para um maior aprimoramento do desenvolvimento profissional, sobretudo nos dias atuais. Quando um corpo ou massa suporta-se sobre seu peso, ou seja, quando há a concentração de seu peso em um só determinado ponto, obtém-se o que se chama de baricentro ou centro de gravidade. O estudo da gravidade é de suma relevância como uma das forças mais importantes da natureza. "Quando o corpo está sob a ação da atração da gravidade, se esse for subdividido em infinitas partes, de maneira que cada parte tenha um infinitesimal de peso, a soma desses pesos infinitesimais é o peso total do corpo"; o centro desse peso é o baricentro. (PORTOPÉDIA, 2015, p.02)[22]

Em [16] o professor americano Clark Kimberling1[1] reúne provavelmente a maior coleção de centros do triângulo, segundo ele, a coleção histórica começou com os cientistas do século XIX. A coleção tem crescido para incluir os educadores, escritores e artistas. Ele diz que há muito tempo, alguém desenhou um triângulo e três segmentos através dele. Cada segmento começou em um vértice e parou no ponto médio do lado oposto. Os segmentos se encontraram em um mesmo ponto. A pessoa ficou impressionada e repetiu a experiência em uma diferente forma de triângulo. Novamente os segmentos se encontraram em um mesmo ponto. A pessoa ainda desenhou um terceiro triângulo, muito cuidadosamente, com o mesmo resultado. Ele disse aos amigos. Para sua surpresa e deleite que a coincidência funcionou para eles também. A notícia se espalhou, e a magia dos três segmentos foi considerada como a obra de um poder superior. Séculos passaram e alguém provou que as três medianas de fato encontram-se em um único ponto, agora chamadas de Centroide ou Baricentro. Mais séculos passaram, pontos mais especiais foram descobertos e uma definição de centro do triângulo emergiu. (Clark Kimberling)[16]

Esse trabalho tem como objetivo localizar e caracterizar o Baricentro ou Centroide (G) dos polígonos convexos, não só do ponto de vista da Geometria Euclidiana, mas também do ponto de vista da Geometria Analítica.

[1] Clark Kimberling nascido em 7 de novembro de 1942, em Hinsdale, Illinois é um matemático, músico e compositor. Ele foi um professor de Matemática desde 1970 na Universidade de Evansville. Seus interesses de pesquisa incluem centros do triângulo, sequências de número inteiro e Hinologia. Kimberling recebeu seu PhD em Matemática em 1970 pelo Illinois Institute of Technology, sob a supervisão de Abe Sklar, desde 1994, pelo menos, ele tem mantido uma lista dos centros do triângulo e suas propriedades. Na sua forma actual on-line, Livre dos centros do triângulo, esta lista é composto por vários milhares de entradas.

O desempenho dos alunos na Matemática, nos dias atuais, têm preocupado os professores, pois os alunos se sentem desestimulados a estudar matemática, sobretudo quando se trata de cálculos. Aproximar a Matemática do aluno e tornar palpáveis os cálculos da geometria analítica, incorporando-a à realidade dos fatos, é um desafio para nós professores de matemática. D'Ambrosio diz que: "O grande desafio que se encontra na educação é justamente sermos capazes de interpretar as capacidades e a própria ação cognitiva não da forma linear, estável e contínua que caracteriza as práticas educacionais mais correntes."[10]

Como uma figura geométrica deve ser deixada de ser analisada como um desenho e ser utilizada de fato na prática, pois o Baricentro ou o centro de gravidade dessas figuras geométricas, que no nosso caso aqui são os polígonos convexos, é um estudo que está na atividade da Construção Civil, nos cálculos de pesos sobre estruturas, na mecânica para cálculo da inércia, na medicina para identificar o peso ou a gravidade do corpo, dentre outros.
Em função dessa distorção entre a importância e relevância da aplicabilidade dos cálculos do baricentro nas mais diversas áreas de conhecimento e a superficialidade do seu ensino, onde, normalmente, os professores quando vão apresentar o Baricentro, se resumem em apenas encontrar as coordenadas do baricentro do triângulo e é isso que é apresentado em todos ou em quase todos os livros didáticos do 3^o ano do ensino médio. Nenhum desses livros [6], [8], [11], [20], [21] e [25] que tenhamos visto, por exemplo, apresenta a possibilidade de se encontrar o baricentro de outro polígono que não seja o triângulo. Estes fatos motivaram o estudo do baricentro dos polígonos convexos.

Este trabalho, sobre o tema Baricentro dos Polígonos Convexos, tem como objetivo apresentar uma nova abordagem para que se enriqueça o aprendizado dos alunos no que se refere ao baricentro de um triângulo e ao baricentro de outro polígono convexo. Para isso, nesse primeiro capítulo, veremos definições de polígono, polígono convexo, polígono côncavo, polígono regular e diagonais do polígono. Veremos também, as nomenclaturas dos polígonos. Será vista e demonstrada a fórmula de encontrar o número de diagonais de um polígono convexo e também a da fórmula de encontrar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo. E para que possamos entrar no estudo do baricentro veremos a definição da mediana de um triângulo, bem como o comprimento e as propriedades das medianas. No segundo capítulo faremos uma abordagem sobre Baricentro, onde apresentaremos a definição e as propriedades do baricentro do triângulo, será vista e demonstrada a fórmula de encontrar as coordenadas do baricentro de um triângulo e abordaremos também, o baricentro de outros polígonos que não seja triângulo. E no terceiro e último capítulo, proporemos metodologias de ensino do baricentro através de experiências relatadas e de sugestões de algumas atividades envolvendo medianas e baricentro para serem trabalhadas em sala. Para possibilitar aos alunos um melhor entendimento e compreensão do que seja o Baricentro de uma forma mais lúdica e prazerosa de aprender.

Capítulo 1

Polígonos

Neste capítulo, pretendemos apresentar as definições de Polígono, Polígono Convexo, Polígono Côncavo e falar um pouco sobre as Diagonais de um polígono.

1.1 Polígono

Inicialmente vamos ver algumas definições de polígonos, segundo alguns autores. Em BARBOSA[3], encontramos a definição de polígonos dessa forma:

> "Um polígono é uma poligonal em que as seguintes 3 condições são satisfeitas: (a) $A_n = A_1$, (b) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades, (c) cada vértice é extremidade de dois lados e (d) dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta."

Obs.: Na realidade, BARBOSA, queria dizer: "4 condições" e não "3 condições".

Já em DOLCE [13], encontramos a definição de polígonos dessa forma:

> "Polígono é a região plana limitada por uma linha poligonal fechada. Denotamos um polígono de forma similar a que denotamos uma linha poligonal. Isto é, um polígono A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} e A_n corresponde à região limitada pela reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$ *e* $\overline{A_nA_1}$(...)
>
> (...)Na literatura, também encontramos o termo polígono como sinônimo de linha poligonal fechada. Neste caso, a região plana limitada pelo polígono é chamada de seu interior e a união do polígono com seu interior é chamada de **região poligonal** ou **superfície poligonal**."

Na geometria, um polígono é uma figura fechada com lados e ângulos. A palavra "polígono" vem da palavra em grego "polúgonos" que significa: Poli (Muitos) + gonos (Ângulos), ou seja, ter Muitos Ângulos e/ou ter Muitos Lados. A definição usada por Euclides[1] para polígono era: "*uma figura limitada por linhas retas*".[37]

Para podermos entender melhor sobre polígonos, vamos primeiro definir Linha Poligonal Aberta e Fechada.

Dados n pontos, $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ \ldots,\ A_{n-1}\ e\ A_n$, em ordem e de forma que três pontos consecutivos não sejam colineares, a figura formada pela reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3},\ \overline{A_3A_4},\ \overline{A_4A_5},\ \ldots,\overline{A_{n-1}A_n}$, onde os pontos $A_1\, e\, A_n$, não coincidem e não são ligados, ou seja, $A_1 \neq A_n$ e não existe o segmento $\overline{A_nA_1}$, chama-se de LINHA POLIGONAL ABERTA e os pontos $A_1\, e\, A_n$ são os extremos da figura.

Exemplo de uma Linha Poligonal Aberta, ver $Figura\,$1.1.

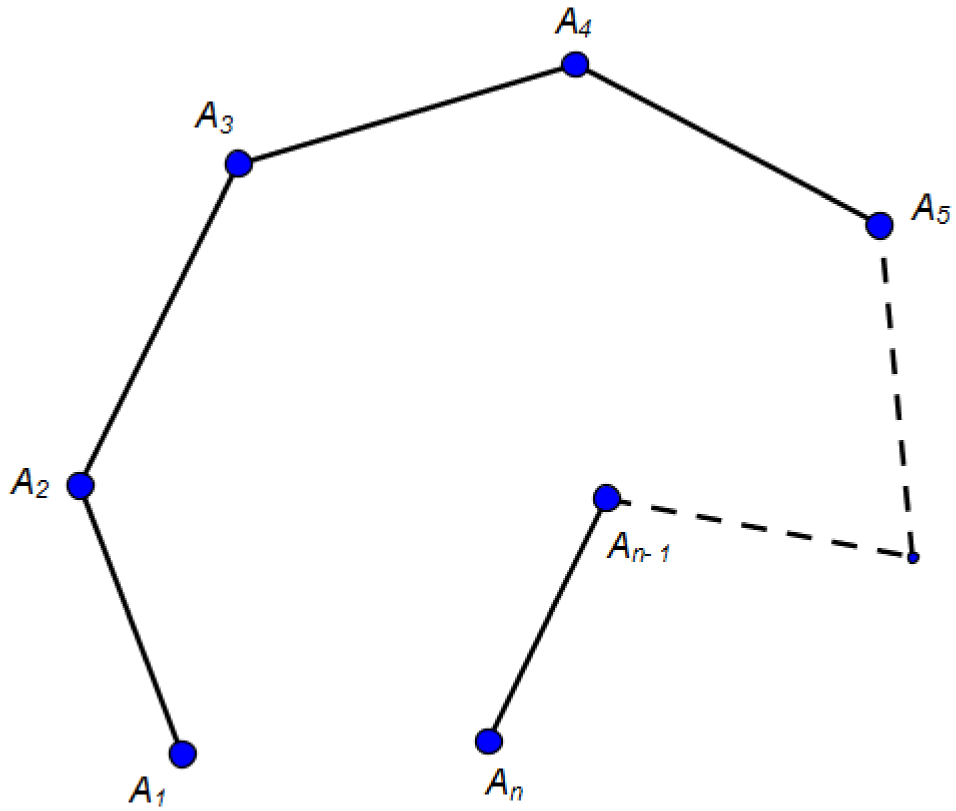


Figura 1.1: Linha Poligonal Aberta

Obs.: As linhas tracejadas indicam os vários segmentos que a Linha Poligonal pode ter.

[1]Euclides de Alexandria foi um matemático platônico e escritor, possivelmente grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria". Além de sua principal obra, Os Elementos, Euclides também escreveu sobre perspectivas, secções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor. Euclides é a versão aportuguesada de uma palavra grega que significa "Boa Glória".[5] [36]

Agora, dados n pontos, $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5, \ldots, A_{n-1}$ e A_n, em ordem e de forma que três pontos consecutivos não sejam colineares, a figura formada pela reunião dos segmentos: $\overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3},\ \overline{A_3A_4},\ \overline{A_4A_5}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$, chama-se de LINHA POLIGONAL FECHADA.

Exemplo de uma Linha Poligonal Fechada, ver $Figura$ 1.2.

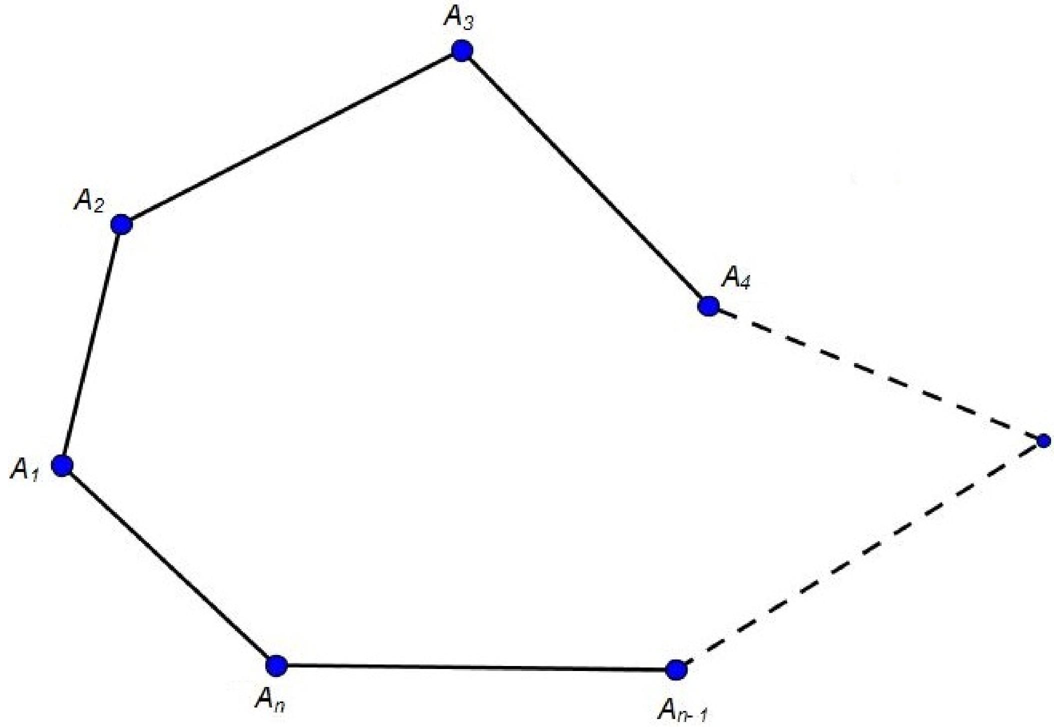


Figura 1.2: Linha Poligonal Fechada

Obs.: As linhas tracejadas representam os vários segmentos que o polígono pode ter.

Logo, matematicamente, definimos polígonos como sendo uma superfície plana limitada por uma linha poligonal fechada. Com isso, temos que os polígonos são figuras fechadas e que o número de lados de um polígono coincide com o número de ângulos internos.

Vamos denominar aqui o polígono como sendo qualquer figura fechada e formada por apenas segmentos de reta, onde esses segmentos de retas são interligados um ao outro apenas pelas suas extremidades.

Os polígonos possuem os seguintes elementos: Lados, Vértices, Ângulos Internos, Ângulos Externos e Diagonais.

Exemplos de figuras que são Polígonos, ver $Figura\,1.3$.

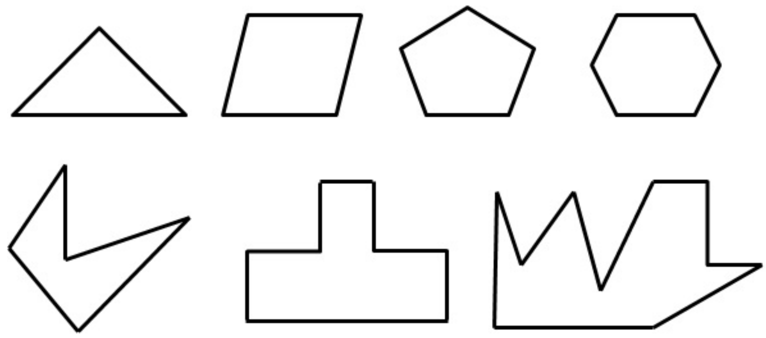


Figura 1.3: Exemplos de polígonos

Pois todas as figuras acima em $Figura\,1.3$ são figuras fechadas e formadas por apenas seguimentos de reta, ou seja, todas são figuras poligonais fechadas.

Assim como temos figuras que são chamadas de polígonos, existem figuras que não são polígonos. Segue em $Figura\,1.4$ as figuras **A** , **B** e **C** que não são polígonos.

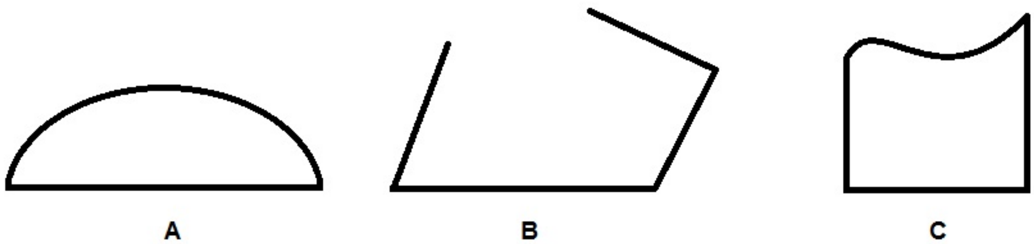


Figura 1.4: Não são Polígonos

As figuras **A** e **C** são figuras fechadas, mas não são fechadas por apenas segmentos de reta, logo não são polígonos. E a figura **B** é uma figura que só tem segmentos de reta, ou seja, é uma linha poligonal, mas não é uma figura fechada, logo, é uma linha poligonal aberta, mas não é um polígono.

Ou simplesmente podemos afirmar que as três figuras não são polígonos devido a:

Figura **A** – não é uma Linha Poligonal.
Figura **B** – é uma Linha Poligonal Aberta.
Figura **C** – não é uma Linha Poligonal.

Pois, para ser Polígono a figura terá de ser uma Linha Poligonal Fechada.

Os polígonos, de um modo geral, são nomeados de acordo com o número de lados e/ou a quantidade de ângulos internos que eles possuem.

Exemplo:

- Polígonos que possuem três ângulos internos, três lados e três vértices, são denominados de Triângulos.
- Polígonos que possuem quatro ângulos internos e quatro lados são denominados de Quadriláteros.

Na *Figura* 1.5, temos uma tabela onde podemos encontrar a nomenclatura de alguns polígonos com os seus respectivos número de lados.

N° de Lados	Nome do Polígono	N° de Lados	Nome do Polígono	N° de Lados	Nome do Polígono
02	Não Existe	20	Icoságono	38	Triacontakaioctágono
03	Triângulo	21	Icosikaihenagono	39	Triacontakaienágono
04	Quadrilátero	22	Icosikaidigono	40	Tetracontágono
05	Pentágono	23	Icosikaitrigono	50	Pentacontágono
06	Hexágono	24	Icosikaitetragono	60	Hexacontágono
07	Heptágono	25	Icosikaipentágono	70	Heptacontágono
08	Octógono	26	Icosikaihexágono	80	Octacontágono
09	Eneágono	27	Icosikaiheptágono	90	Eneacontágono
10	Decágono	28	Icosikaioctágono	100	Hectágono
11	Undecágono	29	Icosikaieneágono	200	Di-hectágono
12	Dodecágono	30	Triacontágono	300	Tri-hectágono
13	Tridecágono	31	Triacontakaihenágono	400	Tetra-hectágono
14	Tetradecágono	32	Triacontakaidigono	500	Penta-hectágono
15	Pentadecágono	33	Triacontakaitrigono	600	Hexa-hectágono
16	Hexadecágono	34	Triacontakaitetragono	700	Hepta-hectágono
17	Heptadecágono	35	Triacontakaipentágono	800	Octa-hectágono
18	Octadecágono	36	Triacontakaihexágono	900	Enea-hectágono
19	Eneadecágono	37	Triacontakaiheptágono	1000	Quilógono

Figura 1.5: Nomenclatura de alguns Polígonos

Como podemos observar, a menor quantidade de lados que um polígono pode ter são três lados, pois não é possível se obter ou construir um polígono com apenas dois lados.

Como exemplo ver *Figura* 1.6.

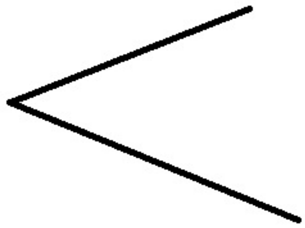


Figura 1.6: Não é Polígono

Obs.: Não é um polígono, pois em *Figura* 1.6 temos uma figura aberta, ou seja, é uma Linha Poligonal Aberta.

1.2 Polígonos Convexos e Côncavos

Além da nomenclatura que os polígonos possuem, eles podem ser classificados em dois tipos de polígonos, os que são denominados de polígonos convexos e os que são chamados de polígonos não convexos ou polígonos côncavos. Vamos aqui, defini-los e dá exemplos de cada um deles.

1.2.1 Polígonos Convexos

Em [29] diz que um polígono é convexo quando qualquer reta que passe sobre um dos lados deixa o polígono inteiramente contido em um dos semiplanos.Também podemos dizer que um polígono é convexo quando todos os ângulos internos forem menores que 180^o.

Em MUNIZ NETO [18], encontramos a definição de Polígono Convexo como sendo:

> "Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1,\ A_2,\ \dots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1,\ A_2,\ \dots, A_n$ é um polígono (convexo) se, para $1 \leq\ i\ \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_i\, A_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, ..."

Em BARBOSA[3], diz que: *"Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contém os seus lados."*

Um polígono é convexo, se e somente se, todo segmento de reta, que tem as suas extremidades dentro da região interna do polígono, tem todos os seus pontos pertencentes a região interna do polígono, ou seja, não existe ponto que pertence ao segmento de reta e que esteja fora da região interna do polígono.

Exemplo disso é a região poligonal a seguir, ou simplesmente polígono, ver $Figura\,1.7$. Repare que os pontos **A** e **B** estão dentro da região do polígono, forma um segmento de reta $\overline{AB}$ e qualquer ponto **C** pertencente a este segmento de reta é um ponto que pertence à região interna do polígono. Neste caso, a região é chamada de Região Convexa, ou seja, é um Polígono Convexo.

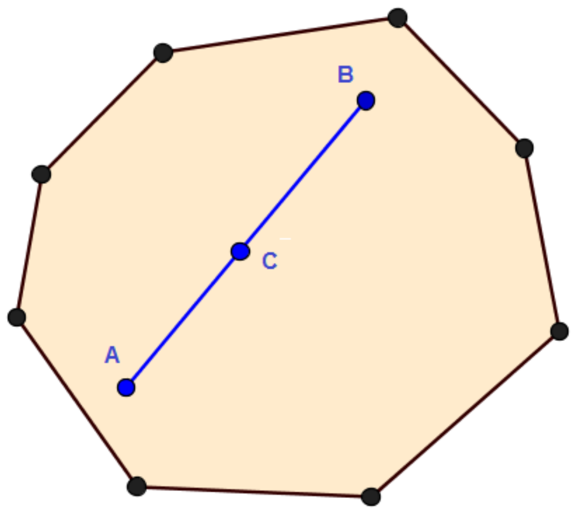


Figura 1.7: Polígono Convexo

Todas as figuras em $Figura\,1.8$ são figuras poligonais fechadas e são classificadas como Polígonos Convexos.

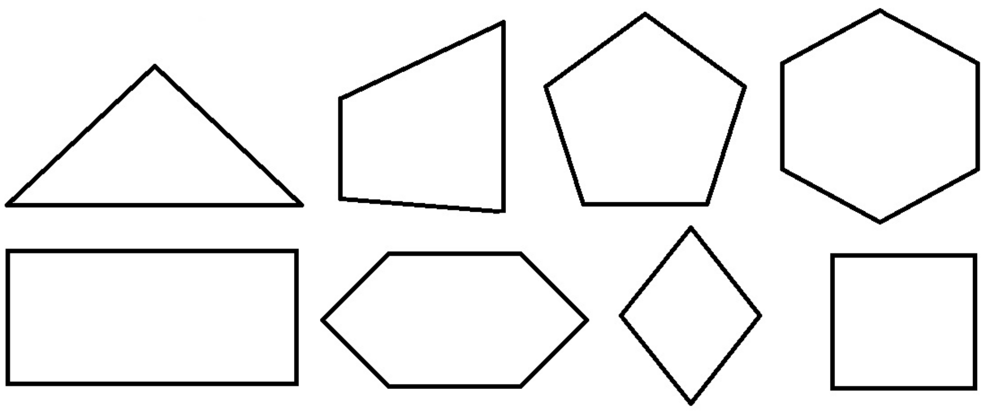


Figura 1.8: São Polígonos Convexos

1.2.2 Polígonos Não Convexos ou Côncavos

Um polígono é côncavo ou não convexo, se existe pelo menos um segmento de reta, que tenha as suas extremidades pertencentes a região interna do polígono, mas que exista pelo menos um ponto, desse segmento, que não pertença a região interna do polígono, ou seja, existe pelo menos um ponto que pertence ao segmento de reta e que está fora da região interna do polígono.

Exemplo disso é a região poligonal a seguir, ou simplesmente polígono, ver $Figura$ 1.9. Repare que os pontos **P** e **Q** estão dentro da região do polígono e forma um segmento de reta $\overline{PQ}$, mas existe um ponto **X** pertencente ao segmento $\overline{PQ}$, que é um ponto que não pertence à região interna do polígono. Neste caso, a região é chamada de Região Côncava, ou seja, é um Polígono Não Convexo ou Côncavo.

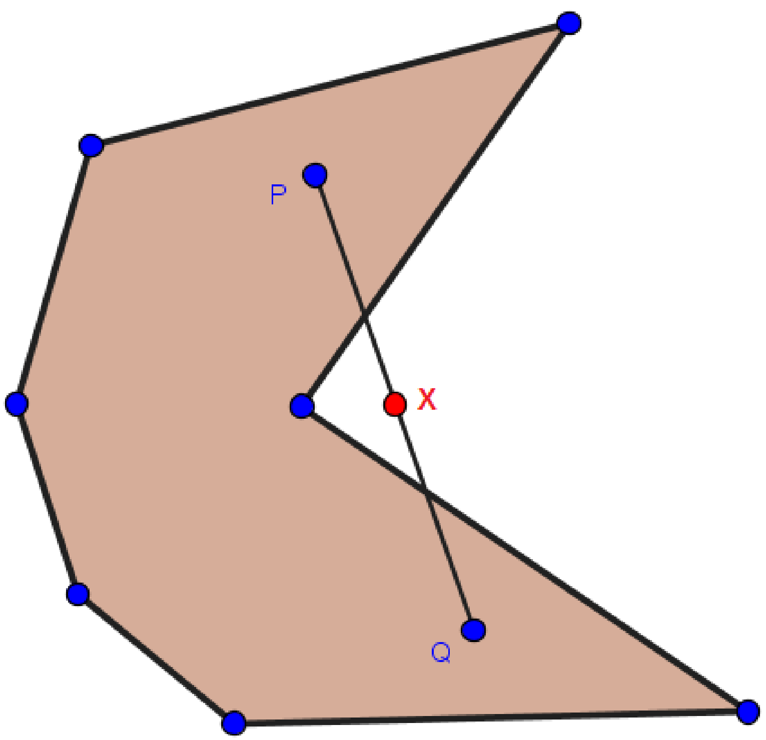


Figura 1.9: Polígono Não Convexo ou Côncavo

Também podemos dizer que um Polígono é Côncavo ou Não Convexo se existir algum ângulo interno maior que 180^o.

Todas as figuras em $Figura$ 1.10 são figuras poligonais fechadas e são classificadas como Polígonos Não Convexos ou Côncavos.

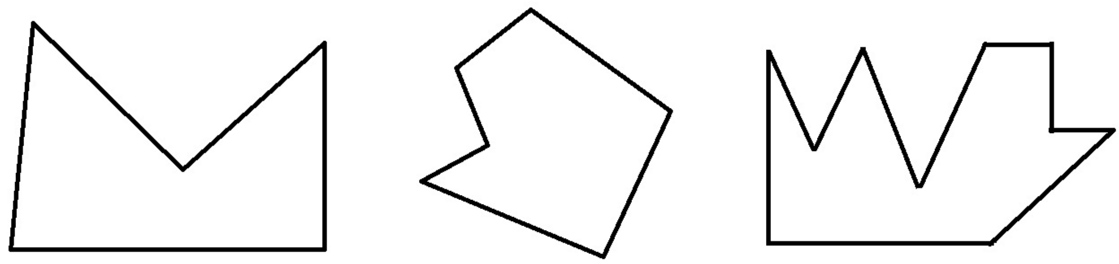


Figura 1.10: São Polígonos Não Convexos ou Côncavos

Agora que já sabemos a definição de polígonos convexos e de polígonos côncavos, vamos nos reservar, de agora em diante, a estudar apenas os polígonos convexos.

1.3 Diagonais de um Polígono Convexo

Os polígonos convexos possuem os seguintes elementos: Lados, Vértices, Ângulos Internos, Ângulos Externos e Diagonais. Dos elementos citados vamos dar ênfase no significado de Diagonal e como calcular o número de Diagonais de um polígono convexo qualquer.

Um polígono convexo de n lados, com $n > 3$, possuem diagonais, onde definimos diagonal de um polígono como sendo qualquer segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. Logo, se X e Y são dois vértices de um polígono e se $\overline{XY}$ não é um lado do polígono então é uma diagonal [29] [33].
O polígono que possui três lados, que é o triângulo, não possui nenhuma diagonal e ele é o único que não possui, pois os demais possuem diagonais. Ver $Figura$ 1.11.

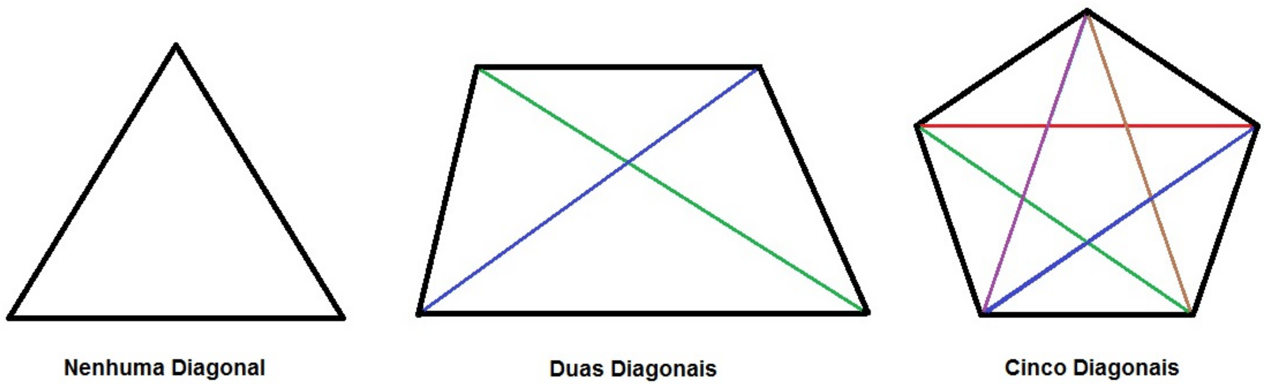


Figura 1.11: Polígonos Convexos e suas Diagonais

Podemos encontrar o número de diagonais de um polígono convexo de n lados, pela fórmula:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Onde:

- d é o número de diagonais;
- n é o número de lados do polígono convexo.

Demonstração.

*Seja um polígono convexo de n lados com $n > 3$, vamos começar por um quadrilátero qualquer, podemos observar na Figura 1.12, que de cada vértice parte apenas uma diagonal. Por exemplo, do vértice D, parte apenas a diagonal $\overline{DB}$, pois $\overline{DA}$ e $\overline{DC}$ não são diagonais desse polígono, devido **A** e **C** serem vértices consecutivos de **D**, $\overline{DA}$ e $\overline{DC}$ são lados do polígono. Logo, os lados de um polígono não são diagonais do polígono. Do mesmo modo, acontece com os outros vértices do quadrilátero, ou seja, dos vértices, **A**, **B** e **C**, partem apenas uma diagonal de cada um deles. Então, contando todas as diagonais traçadas, encontramos duas diagonais, logo, um quadrilátero qualquer, possuem duas diagonais.*

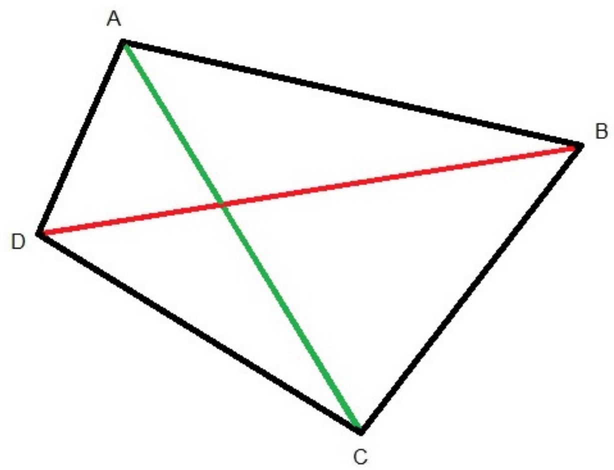


Figura 1.12: Quadrilátero e suas Diagonais

Considerando agora um pentágono qualquer, podemos observar na Figura 1.13, que de cada vértice partem apenas duas diagonais. Por exemplo, do vértice $\boldsymbol{D}$*, partem as diagonais* $\overline{DA}$ *e* $\overline{DB}$ *pois* $\overline{DC}$ *e* $\overline{DE}$ *não são diagonais desse polígono, devido* $\boldsymbol{C}$ *e* $\boldsymbol{E}$ *serem vértices consecutivos de* $\boldsymbol{D}$*,* $\overline{DC}$ *e* $\overline{DE}$ *são lados do polígono. Já sabemos que os lados de um polígono não são diagonais do polígono. Do mesmo modo, acontece com os outros vértices do quadrilátero, ou seja, dos vértices,* $\boldsymbol{A}$*,* $\boldsymbol{B}$*,* $\boldsymbol{C}$ *e* $\boldsymbol{E}$*, partem apenas duas diagonais de cada um deles. Então, contando todas as diagonais traçadas, encontramos cinco diagonais, logo, um pentágono qualquer, possuem cinco diagonais.*

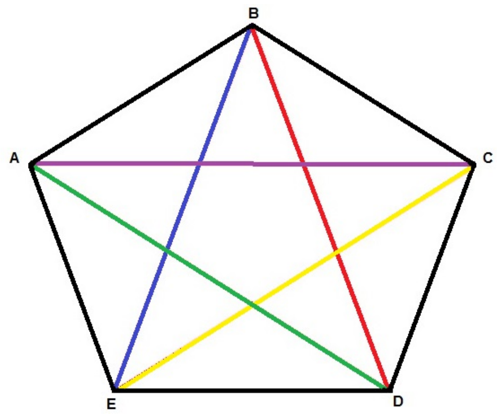


Figura 1.13: Pentágono e suas diagonais

Vamos considerar agora, um polígono convexo qualquer de n *lados conforme a* $Figura$ 1.14*, é fácil verificar que de cada vértice irá partir* $(n-3)$ *diagonais, como o número de vértices de um polígono convexo é igual ao número de lados, então o polígono possui* n *vértices. Mas dos* n *vértices deste polígono, existem três vértices que não formam uma diagonal, que são dois vértices consecutivos que cada vértice possui, que forma dois lados do polígono e o próprio vértice que forma um ponto, logo, o número de diagonais traçada de cada vértice é igual a* $(n-3)$*, ou seja,* $d = n-3$*.*

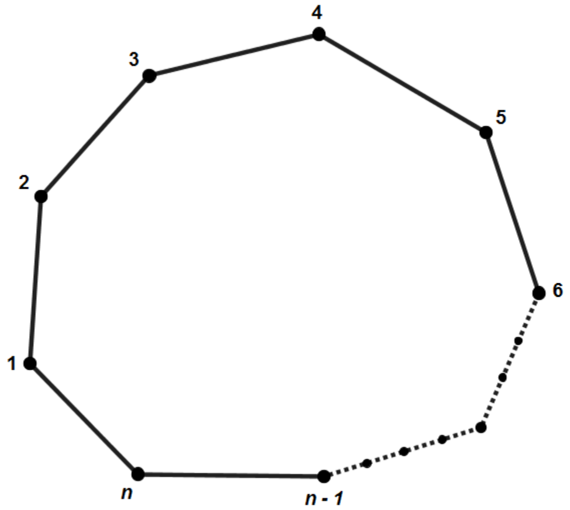


Figura 1.14: polígono Convexo de n lados e n vértices

No entanto, como são n vértices, então temos $n.(n-3)$ diagonais, mas cada diagonal tem as extremidades em dois vértices, logo, cada diagonal foi contada duas vezes, ou seja, uma diagonal com segmento de reta $\overline{DA}$ é a mesma diagonal com segmento de reta $\overline{AD}$, ambas representam a mesma diagonal. Então, temos que dividir por dois, logo a fórmula para determinar a quantidade de diagonais de um polígono convexo de n lados é dada por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

1.4 A Soma dos ângulos internos de um Polígono Convexo

Todo polígono convexo de n lados possui n ângulos internos, ou seja, a quantidade de ângulos internos que um polígono convexo tem, é igual a quantidade de lados desse polígono. Com isto, conhecendo a quantidade de lados do polígono, podemos encontrar a soma dos ângulos internos desse polígono.

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo depende da quantidade de lados que ele possui, logo, existe uma relação entre a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com a quantidade de seus lados. Pois, sabendo o número de lados de um polígono convexo podemos encontrar o valor da soma dos ângulos internos pela fórmula:

$$Si = (\,n-2\,).180^o$$

Onde:

- Si é a soma dos ângulos internos
- n é o número de lados do polígono convexo.

Primeiro, vamos demonstrar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180^o, isto na Geometria Euclidiana (Curvatura Zero). Pois na Geometria Não Euclidiana, ou seja, na Geometria Esférica (Curvatura positiva), a soma dos ângulos internos do triângulo é maior que 180^o e na Geometria Hiperbólica (Curvatura Negativa), a soma dos ângulos internos do triângulo é menor que 180^o.

Segue abaixo na *Figura* 1.15 e na *Figura* 1.16 exemplos dos triângulos na Geometria Euclidiana e na Não Euclidiana.

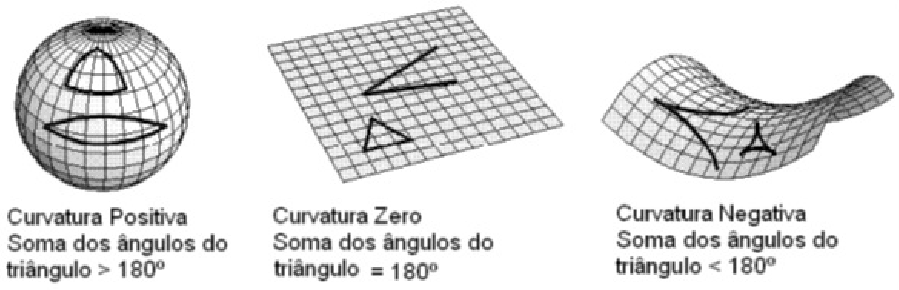


Figura 1.15: Triângulos na Geometria Euclidiana e na Não Euclidiana.

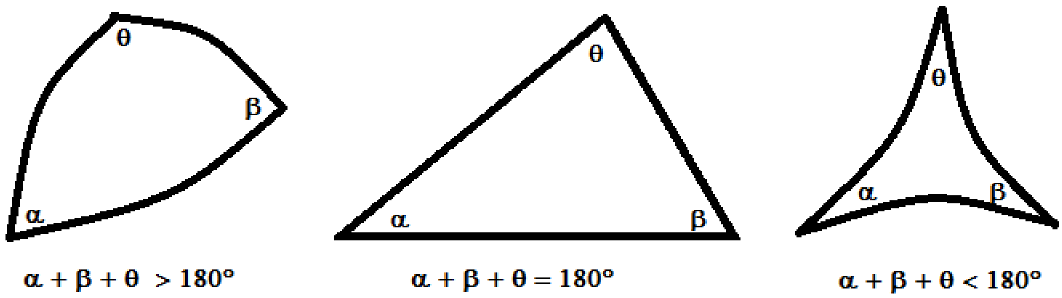


Figura 1.16: Soma dos ângulos internos dos triângulos na Geometria Euclidiana e na Não Euclidiana.

> "A Geometria Euclidiana é para superfícies planas, então como podemos definir situações geométricas sobre uma superfície curva, como por exemplo, a superfície da Terra? Para isso a geometria Euclidiana não é satisfatória, como é fácil de perceber. Sabe-se que na geometria Euclidiana a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo dá sempre 180º. Quando traçamos um triângulo sobre uma superfície curva isso já não é mais verdade. Foi preciso então criar uma nova geometria que pudesse resolver esses problemas." (FRANCO, 2011)[14].

Mas não vamos nos aprofundar na Geometria Não Euclidiana, pois o nosso estudo está direcionado a Geometria Euclidiana. Mas, para quem estiver interessado em maiores detalhes sobre a Geometria Não Euclidiana, poderá consultar em FRANCO [14] e/ou COUTINHO [9] para se aprofundar melhor nessa Geometria Não Euclidiana.

Logo, na Geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180^o. Essa demonstração também poderá ser vista em [18], [28] e [32].

Demonstração.

- *Seja o triângulo* ABC *e os seus ângulos internos* α, β *e* θ;
- *Traçando uma reta* r *paralela ao lado* $\overline{AC}$ *do triângulo, ou seja,* $r // \overline{AC}$;
- *Traçando as semi retas* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CB}$, *como mostra a Figura* 1.17.

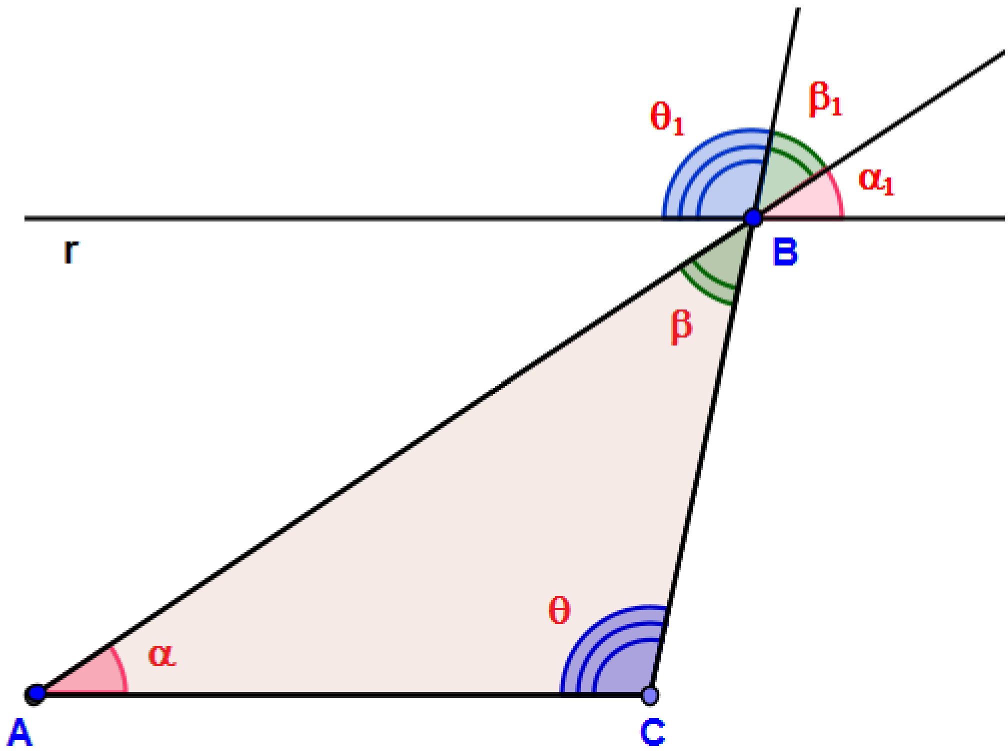


Figura 1.17: Triângulo e seus ângulos internos

Logo, temos que:

$\alpha = \alpha_1$ *e* $\theta = \theta_1$, *pois são ângulos correspondentes e ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas e uma transversal são congruentes.[15]*
$\beta = \beta_1$, *pois são ângulos opostos pelo vértice, logo são congruentes.*

Como: $\alpha_1 + \beta_1 + \theta_1 = 180^o$, *pois eles formam um ângulo raso;*

Então: $\alpha + \beta + \theta = 180^o$;

Agora vamos demonstrar que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo de n lados é encontrada pela fórmula:

$$Si = (\,n-2\,).180^o$$

Demonstração.

Seja um polígono convexo de n *lados com* $n > 3$*, podemos decompô-lo em triângulos, traçando diagonais a partir de um vértice qualquer, como mostra alguns Polígonos na* $Figura$ 1.18 *como exemplo. Essa demonstração poderá ser vista no vídeo [30].*

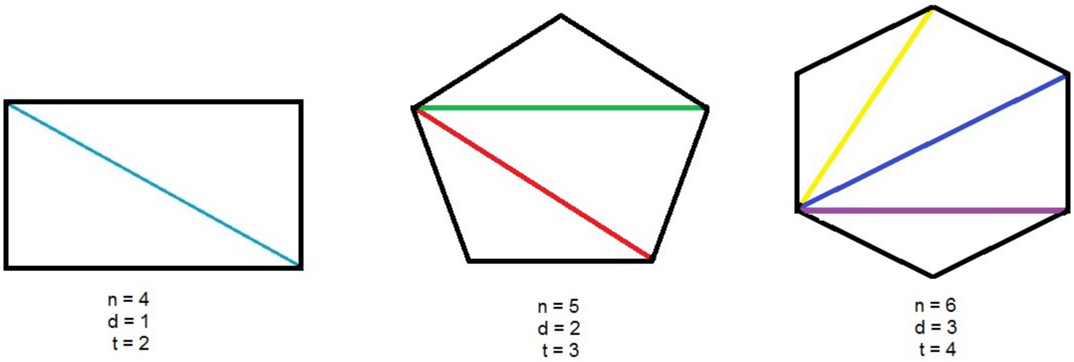


Figura 1.18: Polígonos divididos em triângulos

Onde:

- n *é o número de lados do polígono convexo;*
- d *é o número de diagonais traçadas por um vértice;*
- t *é o número de triângulos formados.*

Logo, para um polígono convexo de n *lados, cada vértice vai poder traçar* $(\,n-3\,)$ *diagonais, pois dos* n *vértices deste polígono, existem três vértices que não formam uma diagonal, que são os dois vértices consecutivos que cada vértice possui que forma dois lados do polígono e o próprio vértice que forma um ponto, logo, o número de diagonais traçada de um vértice é igual a* $(\,n-3\,)$*, ou seja,* $d = n-3$*. E a quantidade de triângulos formados a partir das diagonais traçadas por um vértice é igual a quantidade de diagonais traçadas mais um, ou seja* $t = d+1$*. Logo podemos obter uma relação entre o número de lados do polígono convexo e a quantidade de triângulos em que podemos decompô-lo.*
$t = d+1$*, como* $d = n-3$*, temos:*

$t = (n-3)+1 \; = n-3+1 \; = n-2$*, ou seja,* $\quad t = n-2$.

Logo, todo polígono convexo de n lados, possui $(\,n-2\,)$ *triângulos que o compõe. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a* 180^o*, já demonstrado na* ***Demonstração Anterior****, então a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é igual à soma das medidas dos ângulos internos de todos os* $(\,n-2\,)$ *triângulos que o compõe, ou seja,*

$$Si = (\,n-2\,).180^o$$

A soma dos ângulos externo, denotado por Se, de qualquer polígono convexo é sempre igual a 360^o.

$$Se = 360^o$$

1.5 Polígono Regular

Um Polígono que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos internos também congruentes é chamado de Polígono Regular. Em $Figura\,1.19$ podemos ver alguns polígonos regulares:

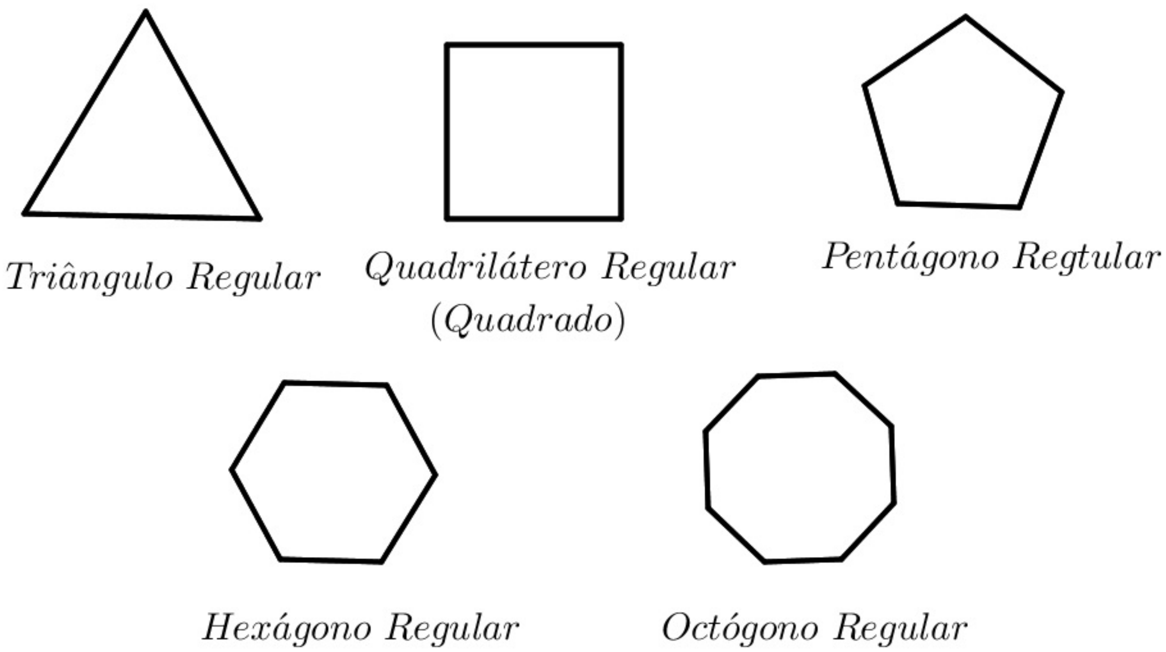


Figura 1.19: Polígonos Regulares

O Triângulo Regular é também chamado de Triângulo Equilátero.

O Quadrilátero Regular é também chamado de Quadrado.

1.6 Mediana de um Triângulo

Um segmento de reta que liga um vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice é chamado de Mediana do triângulo. Veja na *Figura* 1.20 a mediana do triângulo **ABC** em relação ao vértice **A**.

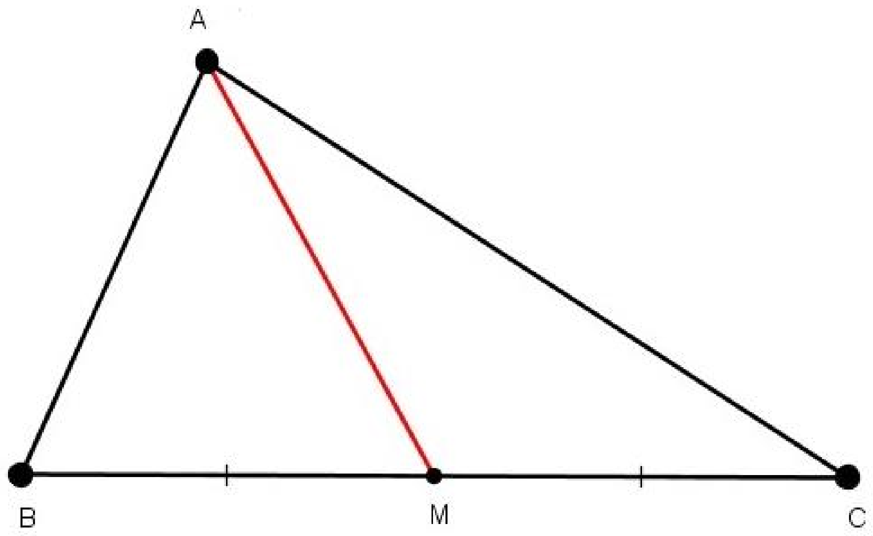


Figura 1.20: Triângulo e a Mediana em relação ao vértice A

Logo, como todos os triângulos possuem três vértices, então um triângulo possui três medianas, conforme a *Figura* 1.21.

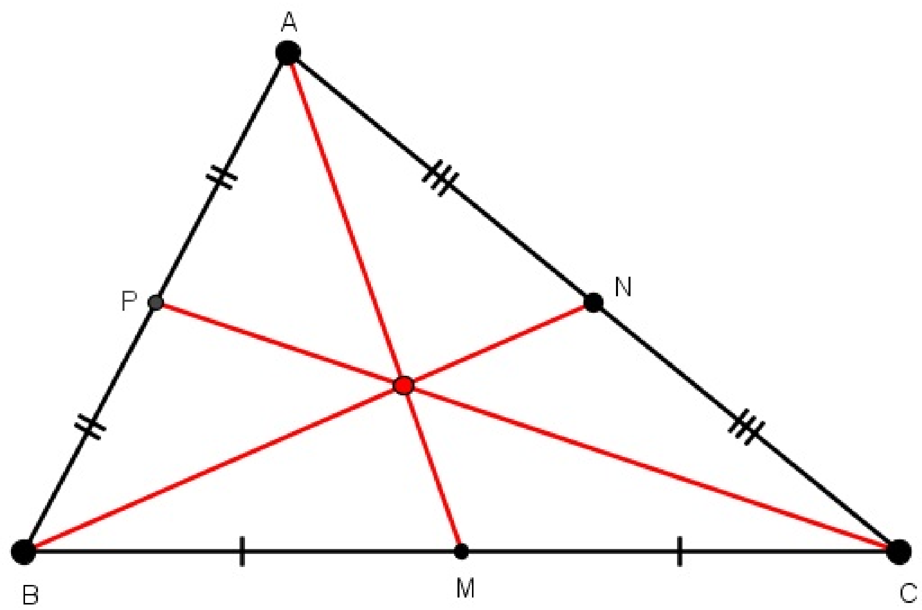


Figura 1.21: Triângulo com as suas três medianas

1.6.1 O Comprimento de uma Mediana

Podemos encontrar o comprimento de uma mediana através das coordenadas dos vértices e/ou através das medidas dos lados do triângulo.

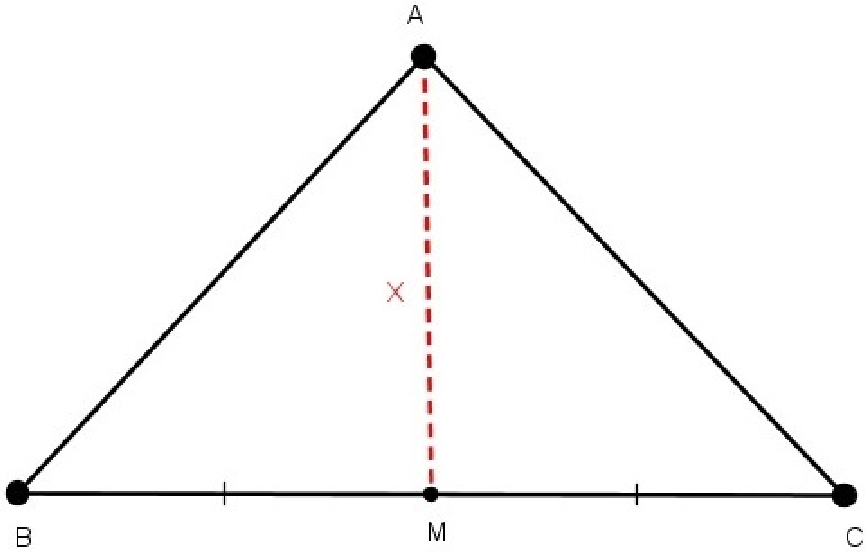


Figura 1.22: Mediana de um triângulo

Dadas às coordenadas dos vértices de um triângulo, $A\,(x_A\,,\,y_A)\,,\,B\,(x_B\,,\,y_B)\ e\ C\,(x_C\,,\,y_C)$, podemos encontrar o comprimento da mediana que vai do vértice A ao ponto médio $M\,(x_M\,,\,y_M)$, do segmento $\overline{BC}$.

Temos que as coordenadas do ponto médio $M\,(x_M\,,\,y_M)$ é igual a $M\left(\dfrac{x_B\ +\ x_C}{2}\ ,\ \dfrac{y_B\ +\ y_C}{2}\right)$, caso tenha curiosidade em ver a demonstração dessas fórmulas, assista ao vídeo[24], logo, o comprimento desta mediana é dada pela fórmula da distância entre dois pontos, ou seja, a distância entre os pontos A e M, que é dada por:

$X = \sqrt{(x_M\ -\ x_A)^2 + (y_M\ -\ y_A)^2}$

substituindo: x_M por $\left(\dfrac{x_B\ +\ x_C}{2}\right)$ e y_M por $\left(\dfrac{y_B\ +\ y_C}{2}\right)$, temos:

$X = \sqrt{\left(\dfrac{x_B + x_C}{2} - x_A\right)^2 + \left(\dfrac{y_B + y_C}{2} - y_A\right)^2}$, resolvendo vamos obter:

$X = \sqrt{\left(\dfrac{x_B\ +\ x_C\ -\ 2x_A}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y_B\ +\ y_C\ -\ 2y_A}{2}\right)^2}$ ou

$X = \sqrt{\left(\dfrac{2x_A\ -\ (x_B\ +\ x_C)}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2y_A\ -\ (y_B\ +\ y_C)}{2}\right)^2}$.

Agora, dadas às medidas dos lados do triângulo, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$, como mostra a $Figura$ 1.23.

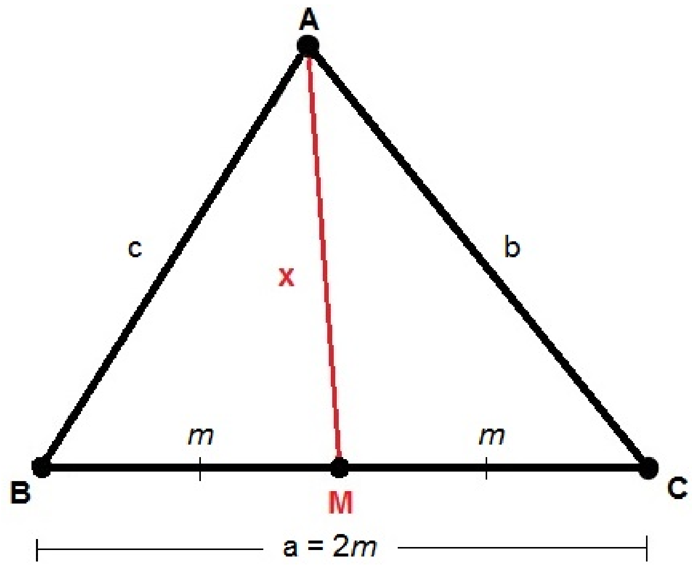


Figura 1.23: Triângulo e a Mediana

Aplicando o Teorema de Stewart[2], que poderá ser visto em[18] e no vídeo[34], temos que: $b^2m + c^2m = a\,(x^2 + m.m)$,

como $m = \dfrac{a}{2}$, temos: $b^2\left(\dfrac{a}{2}\right) + c^2\left(\dfrac{a}{2}\right) = a\left(x^2 + \dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2}\right)$,

colocando a em evidência temos: $a\left(\dfrac{b^2 + c^2}{2}\right) = a\left(x^2 + \dfrac{a^2}{4}\right)$,

dividindo ambos os lados da igualdade por a (podemos dividir por a, pois $a \neq 0$),

teremos: $\left(\dfrac{b^2 + c^2}{2}\right) = \left(x^2 + \dfrac{a^2}{4}\right)$

isolando x^2, obtemos: $x^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{2.b^2 + 2.c^2 - a^2}{4}$

Logo: $x = \sqrt{\dfrac{2.b^2 + 2.c^2 - a^2}{4}}$

Que também podemos apresentar essa fórmula como sendo:

$$x = \frac{\sqrt{2.b^2 + 2.c^2 - a^2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{2.\left(b^2 + c^2\right) - a^2}}{2}$$

Assim obtemos uma fórmula para encontrar o comprimento da mediana de um triângulo.

[2]O Teorema de Stewart produz uma relação entre o tamanho dos lados de um triângulo e o tamanho de uma ceviana do triângulo. Este nome é em honra do matemático escocês Matthew Stewart que publicou o teorema em 1746.
Ceviana é qualquer segmento de reta que une um vértice do triângulo a um ponto qualquer no interior do lado oposto

1.6.2 Propriedades das Medianas

Vamos apresentar aqui, algumas propriedades das Medianas de um triângulo.

Propriedade 1. *Em um triângulo qualquer, uma mediana divide o triângulo em dois triângulos de mesma área, ou seja, uma mediana divide este triângulo em duas regiões de áreas iguais. Ver Figura* 1.24.

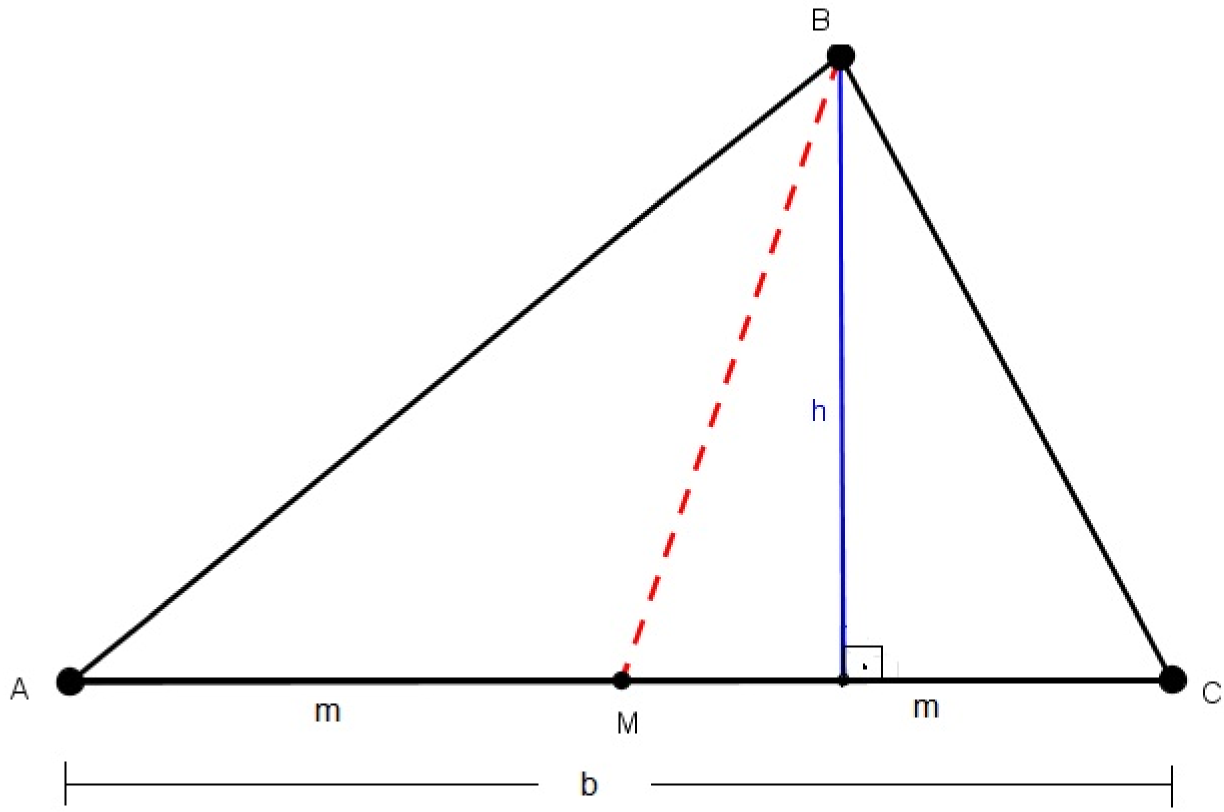


Figura 1.24: Triângulo com a mediana e a altura em relação ao vértice B

Demonstração.

Temos que a área de um triângulo é dada por: $S = \dfrac{b.h}{2}$, *onde* b *é a base do triângulo e* h *é a altura deste triângulo em relação a base* b *e ao vértice* $\boldsymbol{B}$.

Então temos que a área do triângulo ABM *e a área do triângulo* MBC *é dada por:*

$$S = \frac{m.h}{2}$$

Onde $\boldsymbol{m}$ *é o valor da base dos dois triângulos e* $\boldsymbol{M}$ *é o ponto médio de* $\overline{AC}$, *ou seja,* $\overline{AM} = \overline{MC} = \boldsymbol{m}$. *Ademais* $\boldsymbol{h}$ *é o valor da altura dos dois triângulos.*

Propriedade 2. *Seja um triângulo ABC, com M, N e P sendo os pontos médios dos respectivos lados* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ *e* $\overline{AB}$ *, onde* $\overline{AM}$ *,* $\overline{BN}$ *e* $\overline{CP}$ *são as três medianas desse triângulo e* ***G*** *a interseção entre as três medianas. Temos que:* $\overline{AG} = 2.\overline{GM}$, $\overline{BG} = 2.\overline{GN}$ *e* $\overline{CG} = 2.\overline{GP}$*. Ver Figura* 1.25*.*

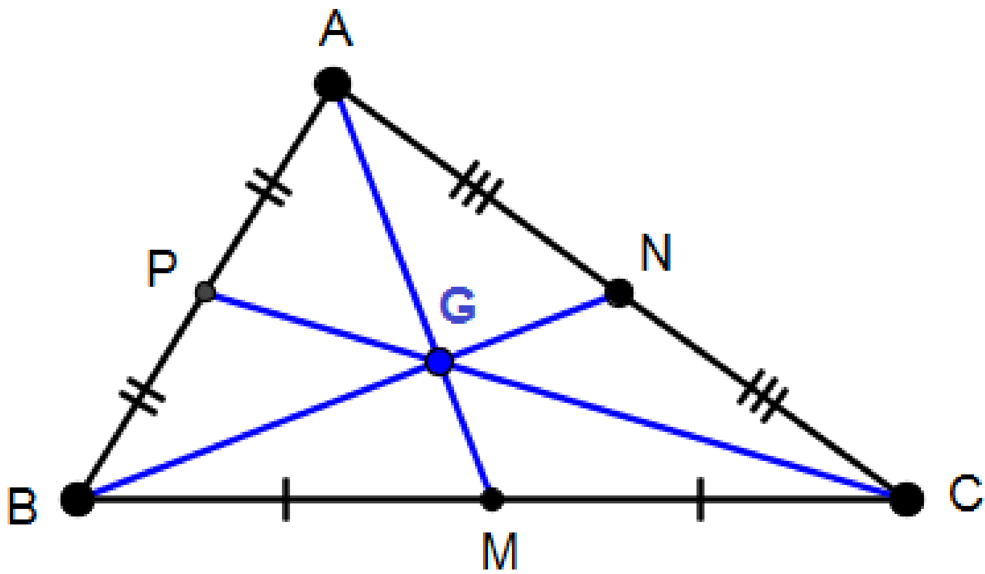


Figura 1.25: Triângulo e as suas Medianas

Demonstração. *Seja X o ponto médio do segmento* $\overline{AG}$ *e Y o ponto médio do segmento* $\overline{BG}$*. Ver Figura* 1.26*. Demonstração encontrada em [31] e em [35].*

Dai temos que: $\overline{YX} \,//\, \overline{MN} \,//\, \overline{BA}$ *e* $\overline{YX} = \overline{MN} = \dfrac{\overline{BA}}{2}$

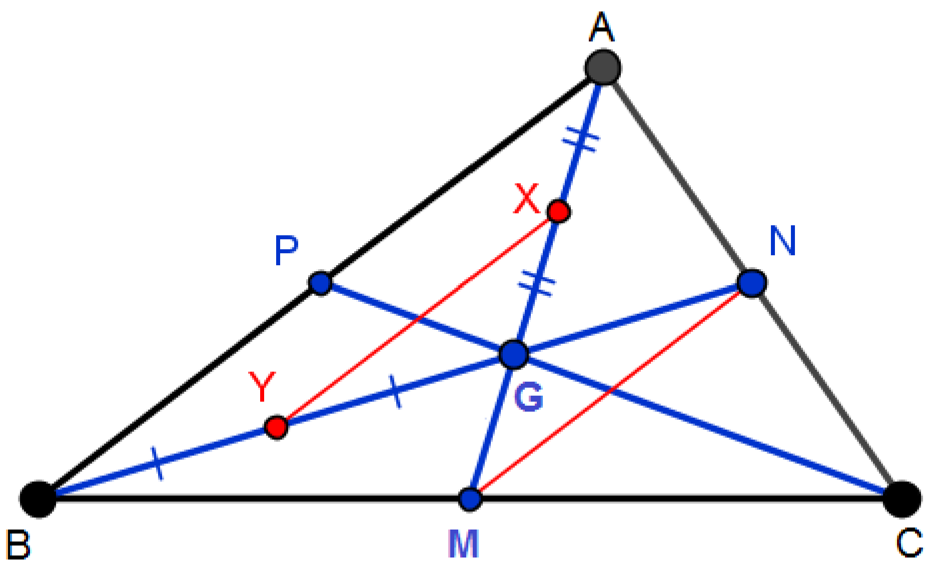


Figura 1.26: Triângulo e as suas Medianas

Traçando os segmentos $\overline{XN}$ *e* $\overline{YM}$ *, teremos um paralelogramo YMNX. E como* $\overline{XM}$ *é uma diagonal do paralelogramo, logo o ponto G é o encontro das diagonais, ou seja, é o ponto médio das diagonais. Ver Figura* 1.27

Então: $\overline{XG} = \overline{GM} = \overline{AX}$ *e* $\overline{YG} = \overline{GN} = \overline{BY}$.

Logo, podemos concluir que: $\overline{AG} = 2.\overline{GM}$ *e* $\overline{BG} = 2.\overline{GN}$.

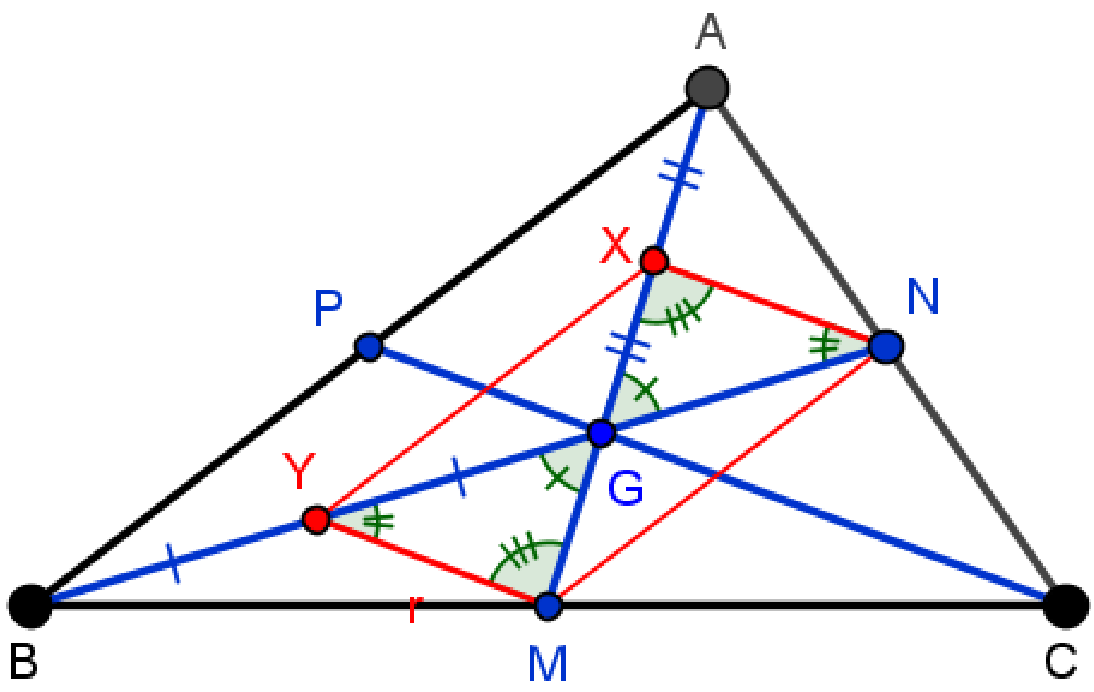


Figura 1.27: Triângulo e suas Medianas

Através desta propriedade demonstrada, podemos garantir que as três medianas do triângulo se interceptam em um único ponto G, que denominamos de Baricentro. Devido à **propriedade 2** que nos garante que o ponto de encontro de duas medianas divide cada mediana na razão 2 : 1. Temos que a terceira mediana terá que passar pelo mesmo ponto de encontro das duas primeiras medianas, logo as três medianas de um triângulo se interceptam em um único ponto. Podemos ver essa demonstração no vídeo [1].

Propriedade 3. *Em um triângulo retângulo **ABC**, com o ângulo reto no vértice **A**, a mediana que parte do ângulo reto $\hat{A}$, divide a hipotenusa $\overline{BC}$ em dois segmentos do mesmo tamanho da mediana, ou seja, $\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{AM}$. Ver Figura 1.28. [27]*

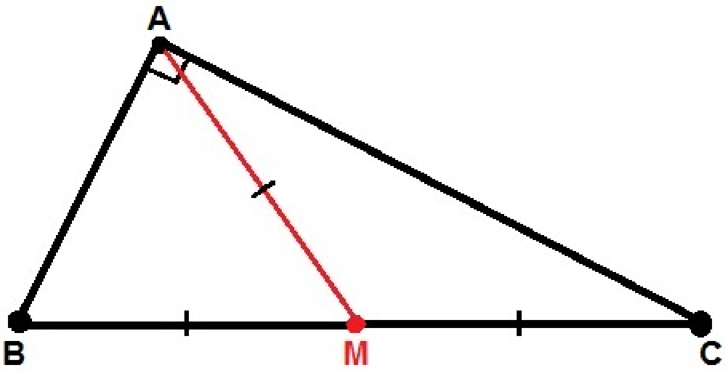


Figura 1.28: Triângulo Retângulo e a Mediana em relação ao vértice A

Demonstração.

*Seja o triângulo retângulo **ABC** com o ângulo reto no vértice **A** e os outros dois vértices **B** e **C** com os ângulos θ e α respectivamente, onde $\theta + \alpha = 90^o$, ou seja, θ é complementar de α. M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ (hipotenusa). Construindo outro triângulo A'CB congruente ao triângulo ABC, como mostra a Figura 1.29.*

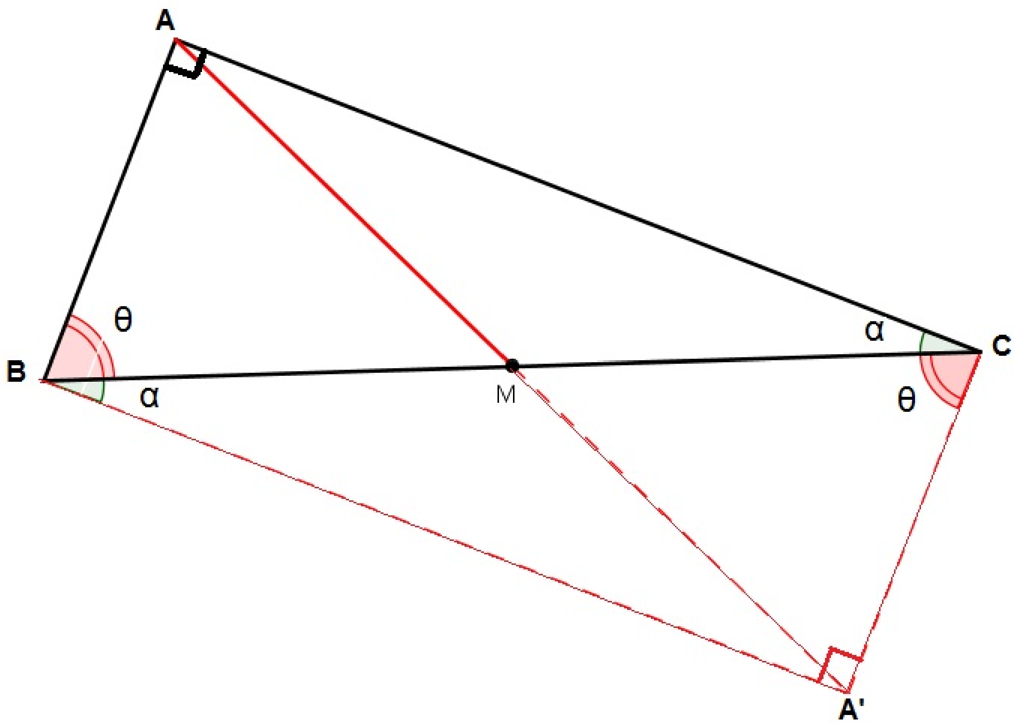


Figura 1.29: Retângulo construído através de um Triângulo Retângulo

Dai temos que:

$\overline{BA} = \overline{A'C}$; $\overline{AC} = \overline{BA'}$; $\overline{BC} = \overline{CB}$; $\overline{BA} // \overline{A'C}$ e $\overline{AC} // \overline{BA'}$.

Com esta construção, obtemos um paralelogramo cujos ângulos internos são todos iguais a 90^o $(\theta + \alpha = 90^o)$*, logo, esse paralelogramo é um retângulo e as medianas* $\overline{AM}$ *e* $\overline{A'M}$ *dos dois triângulos, formam uma diagonal* $\overline{AA'}$ *do paralelogramo* $ABA'C$ *e* $\overline{BC}$ *é a outra diagonal do mesmo paralelogramo. Logo,* $\overline{AA'} = \overline{BC}$ *e como* $\boldsymbol{M}$ *é o ponto de encontro das diagonais, então* $\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{AM} = \overline{MA'}$.

Assim provamos que: $\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{AM}$.

Capítulo 2

Baricentro de um Polígono Convexo

Nesse capítulo, apresentaremos, não só o cálculo para encontrar as coordenadas do Baricentro, como vem sendo apresentado nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, mas também será apresentado outra maneira de encontrar o Baricentro de um triângulo e de qualquer outro polígono convexo. Na proposta de ensino para o Baricentro que iremos propor no próximo capítulo deste trabalho, os alunos terão a oportunidade de não só aprender a encontrar o Baricentro de qualquer polígono convexo, bem como a compreender a importância e o significado do Baricentro.

Pesquisamos alguns livros didáticos de Matemática do 3^o ano do Ensino médio [25], [6], [21], [8], [11], [20] e observamos que eles não trazem a definição do Baricentro dos polígonos convexos. Dos seis livros que pesquisamos, um deles a definição é que "O Baricentro corresponde ao centro de equilíbrio de um triângulo"[25] e em um outro livro [6], tem que: "Denomina-se baricentro ou centro de gravidade de um triângulo o ponto G, intersecção das três medianas desse triângulo", esses dois livros definem que o Baricentro é o centro de gravidade e/ou é o centro de equilíbrio de um triângulo, já os outros livros não mencionam essa relação do Baricentro com o Centro de Gravidade e em [21] diz que: "As três medianas de um triângulo interceptam-se em um mesmo ponto G que divide cada mediana, a partir do vértice, na razão 2 para 1. O ponto G é chamado de **baricentro do triângulo**."Em [8] diz que: "Sabe-se que o baricentro G de um triângulo é o ponto de intersecção de suas três medianas"e em [11] diz que: "Todo triângulo possui três medianas que se cruzam em um ponto chamado **baricentro** do triângulo". E por último, encontramos no livro [20], que não fala nada sobre Baricentro. Portanto, de um modo geral, nenhum deles apresenta a definição do baricentro de um polígono convexo que não seja o baricentro do triângulo. Por esses motivos e razões, estamos apresentando esse trabalho em relação ao Baricentro de um polígono convexo.

2.1 Baricentro

Dentre outras figuras geométricas o triângulo possui alguns pontos notáveis, entre eles existe o Baricentro que é o ponto de encontro das medianas de um triângulo e também é considerado o centro de gravidade de um triângulo. O estudo do baricentro consta na Geometria Analítica, que geralmente é estudado no 3^o ano do Ensino Médio, cuja função principal é a medição ou os cálculos para encontrar as suas coordenadas através das coordenadas dos vértices do triângulo.

Baricentro é uma palavra de origem grega, *baricentro* (*bari* = *peso*) e designa o centro dos pesos, ou ainda o centro de gravidade. O Baricentro também é um ponto em torno do qual existe um equilíbrio de forças. No caso do triângulo, o Baricentro é o ponto de intersecção de suas medianas, o qual define o centro gravitacional desse triângulo. O centro de gravidade é o ponto central de uma figura. Na história consta que Arquimedes,[1] dentre outras pesquisas, foi um dos primeiros a demonstrar, teoricamente, que o centro de gravidade dos círculos coincide com o centro dos círculos, e que o centro de gravidade dos paralelogramos é o ponto de intersecção de suas diagonais.
Antes de definirmos centro de gravidade, vamos realizar uma experiência simples: Tente equilibrar um cabo de vassoura com o dedo de tal forma que a vassoura fique equilibrada na horizontal. Realizando essa atividade você vai perceber que existe apenas um ponto da vassoura no qual o seu dedo irá possibilitar que a vassoura fique equilibrada na horizontal. Esse ponto é denominado centro de gravidade ou baricentro.

Em DOCA [12] "Denomina-se **Centro de Gravidade** (**CG**), de um corpo ou de um sistema de pontos materiais discretos, um determinado ponto onde podemos considerar aplicado o peso total do corpo ou do sistema". Temos também que o **Centro de Gravidade** é o ponto no corpo tal que se o corpo for pendurado por esse ponto, o corpo vai permanecer em equilíbrio em qualquer posição, sem oscilar e sem inclinar para qualquer direção.

Em TEIXEIRA [26] "O **Centro de Massa** (**CM**), de um corpo é um ponto que se comporta como se toda a massa do corpo estivesse concentrada sobre ele". Temos também que o **Centro de Massa** (**CM**) de uma figura plana homogênea[2] localiza-se sobre o seu eixo de simetria[3]. Se o corpo possuir dois eixos de simetria, o Centro de Massa estará no ponto de encontro desses eixos.

O Baricentro é também chamado de centro de massa, e o centro de gravidade coincide com o centro de massa, quando o campo gravitacional for uniforme.

[1]Arquimedes nasceu em Siracusa, na Sicília em 287 a.C., Arquimedes foi um importante cientista, inventor e matemático grego. Consagrou-se à Matemática, mais especialmente à Geometria. Muito jovem ainda começou a distinguir-se por seus trabalhos científicos. De regresso à Siracusa consagrou-se ao estudo da Geometria e da Mecânica, conseguindo descobrir princípios e fazer aplicações que o imortalizaram.

[2]Entende-se por figura plana homogênea ou objeto homogêneo aquela figura ou objeto que é constituído por um único material.

[3]Eixo de simetria é uma linha que divide um corpo em duas partes iguais ou simétricas.

"...O baricentro assim definido é também chamado centro de massa. Observamos que o que é usualmente designado por centro de gravidade não é o mesmo que centro de massa. Na definição de centro de gravidade leva-se em consideração o campo gravitacional em cada ponto. Se o campo for constante, o centro de massa coincide com o centro de gravidade." (RAPHAEL, 2007, p.33)[23].

Quando um corpo está sobre um campo gravitacional uniforme o centro de gravidade coincide com o centro de massa, mas quando um corpo está tendo influências de campos gravitacionais diferentes, teremos o ponto do centro de massa diferente do ponto do centro de gravidade, ou seja, o centro de massa não coincide com o centro de gravidade quando o campo gravitacional não for uniforme. Pois, para se achar o ponto do centro de massa de um corpo o campo gravitacional não interfere em nada, mas para encontrar o centro de gravidade, que também é chamado de centro dos pesos, o campo gravitacional vai atuar no corpo para calcular o peso desse corpo em cada parte que o campo está atuando e se o campo não for uniforme, ou seja, campo gravitacional com valores diferentes nas partes do corpo, teremos o ponto do centro de massa diferente do ponto do centro de gravidade desse corpo. Vamos ilustrar duas situações para que possamos entender melhor. Nas duas situações iremos considerar as massas iguais, $m_A = m_B$, g_A e g_B os campos gravitacionais atuando nos corpos A e B respectimvamente, CG o ponto do Centro de Gravidade e CM o ponto do Centro de Massa. veja as $Figuras\, 2.1\, e\, 2.2$.

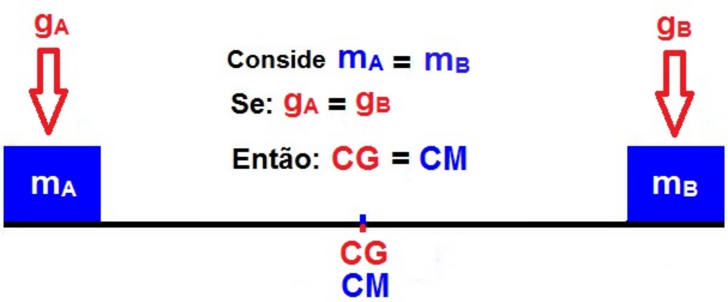


Figura 2.1: Campo gravitacional uniforme, CG = CM

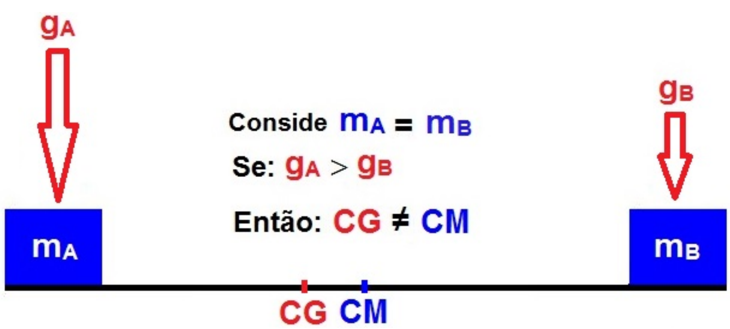


Figura 2.2: Campo gravitacional não uniforme, CG $\neq$ CM

Como podemos ver nas $Figuras\, 2.1\, e\, 2.2$, que o Centro de Gravidade coincide com o Centro de Massa quando o campo gravitacional for uniforme e que o Centro de Gravidade não coincide como Centro de Massa quando o campo gravitacional não for uniforme.

No nosso caso onde queremos encontrar o Baricentro de um polígono convexo que se encontra em um campo gravitacional uniforme teremos que CG vai ser igual ao CM.
E o Baricentro de um polígono convexo é um determinado ponto interno do polígono tal que se o polígono for pendurado ou equilibrado por esse ponto, o polígono vai permanecer em equilíbrio na horizontal, sem oscilar e sem inclinar para qualquer direção, ou seja, o Baricentro é o ponto de equilíbrio do polígono convexo. Podemos também definir o Baricentro de um polígono convexo como sendo o centro de gravidade do polígono convexo.

Enfim, o Baricentro pode ser abordado na Matemática, na Física, Geometria, Engenharia, Mecânica e em diversas áreas do conhecimento.

2.2 O Baricentro do Triângulo

Como já foi demonstrado no capítulo anterior, qualquer triângulo possui três medianas e estas medianas, quando traçadas, tem um ponto comum a elas três, que denominamos este ponto pela letra G. Este ponto nós chamamos de BARICENTRO do triângulo. Conforme podemos ver na $Figura\,2.3$.

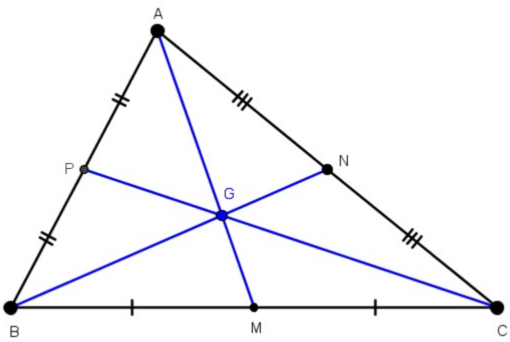


Figura 2.3: Triângulo com suas Medianas e o Baricentro

Os pontos P, M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Portanto, os segmentos de reta $\overline{AM},\ \overline{BN}\ e\ \overline{CP}$, são as três medianas do triângulo ABC e o ponto **G**, que é o encontro das três medianas, é o BARICENTRO.

Entre outras definições do baricentro, pode-se afirmar que é o ponto central ou o ponto onde acontece o equilíbrio entre as forças. No caso do triângulo, esse equilíbrio acontece na intersecção de suas medianas, isto é, em qualquer ponto das medianas de um triângulo pode-se definir ou calcular o centro de gravidade ou o baricentro. O triângulo é, sem dúvidas, a figura mais estudada na Matemática e possui grande aplicabilidade em outras áreas como, por exemplo, na construção civil.

2.3 Propriedades do Baricentro de um Triângulo

Propriedade 4. *O ponto G que é chamado de Baricentro é sempre interno ao triângulo.*

Propriedade 5. *O Baricentro é o centro de gravidade de qualquer triângulo. [2]*

Propriedade 6. *O Baricentro divide a mediana de um triângulo em duas partes na proporção* $2:1$*.[6] [21]*

> "O baricentro é o encontro das medianas, que são as retas que ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos.(...)
> (...)Após encontrar estes pontos médios, basta que eles sejam ligados aos vértices opostos. O cruzamento destas retas é o baricentro(B). O baricentro está sempre dentro do triângulo e possui uma propriedade importante: A distância do vértice ao baricentro é sempre o dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto ao vértice.." (ASSIS, 2008)[2].

A propriedade do Baricentro que diz que a mediana é dividida em duas partes na proporção $2:1$, ou seja, a parte que contém o vértice é o dobro do tamanho da parte que contém o ponto médio, como foi demonstrado anteriormente na Demonstração 4, é muito importante no estudo dos triângulos. Assim podemos afirmar que na $Figura\,2.4$, o segmento $\overline{AG}$ possui o dobro do comprimento do segmento $\overline{GM}$, ou seja, $\overline{AG} = 2\overline{GM}$, o segmento $\overline{BG}$ possui o dobro do comprimento do segmento $\overline{GN}$, ou seja, $\overline{BG} = 2\overline{GN}$ e o segmento $\overline{CG}$ possui o dobro do comprimento do segmento $\overline{GP}$, ou seja, $\overline{CG} = 2\overline{GP}$.

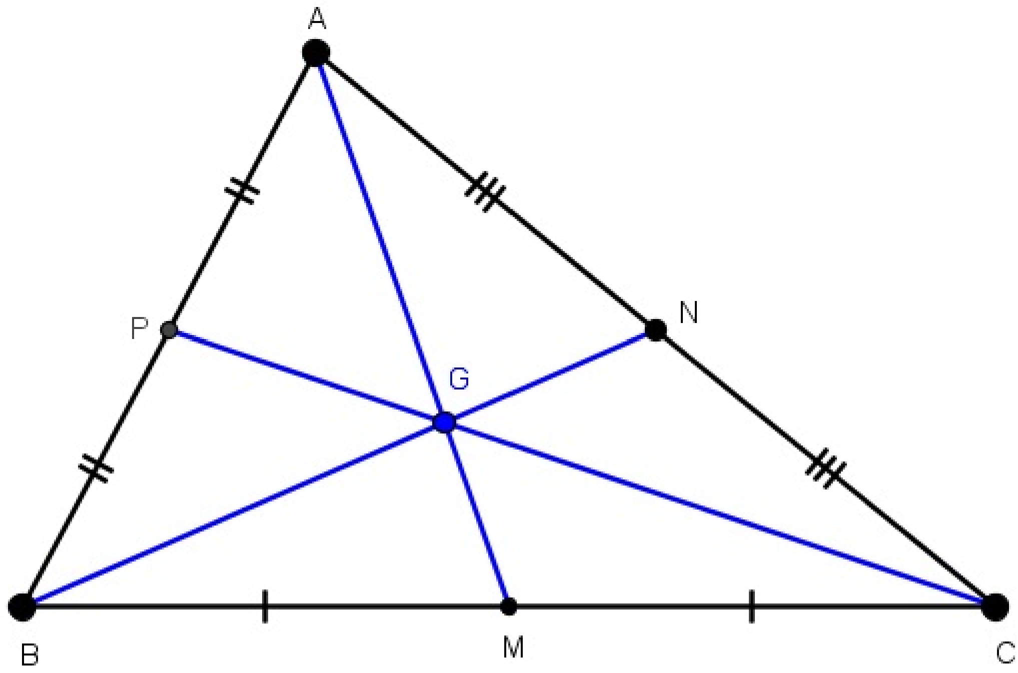


Figura 2.4: Triângulo com suas Medianas e o Baricentro

2.4 As Coordenadas do Baricentro de um Triângulo

Sendo os pontos $A\,(x_A\,,\,y_A)$, $B\,(x_B\,,\,y_B)$ e $C\,(x_C\,,\,y_C)$ os vértices de um triângulo **ABC**. Para calcular as coordenadas do baricentro $G\,(x_G\,,\,y_G)$, utilizamos as fórmulas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \tag{2.1}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \tag{2.2}$$

Demonstração. *Considerando o triângulo no plano cartesiano como mostra a Figura 2.5, vamos encontrar as fórmulas para determinar as coordenadas do Baricentro, ou seja, as coordenadas do ponto G. Demonstração encontrada em [19].*

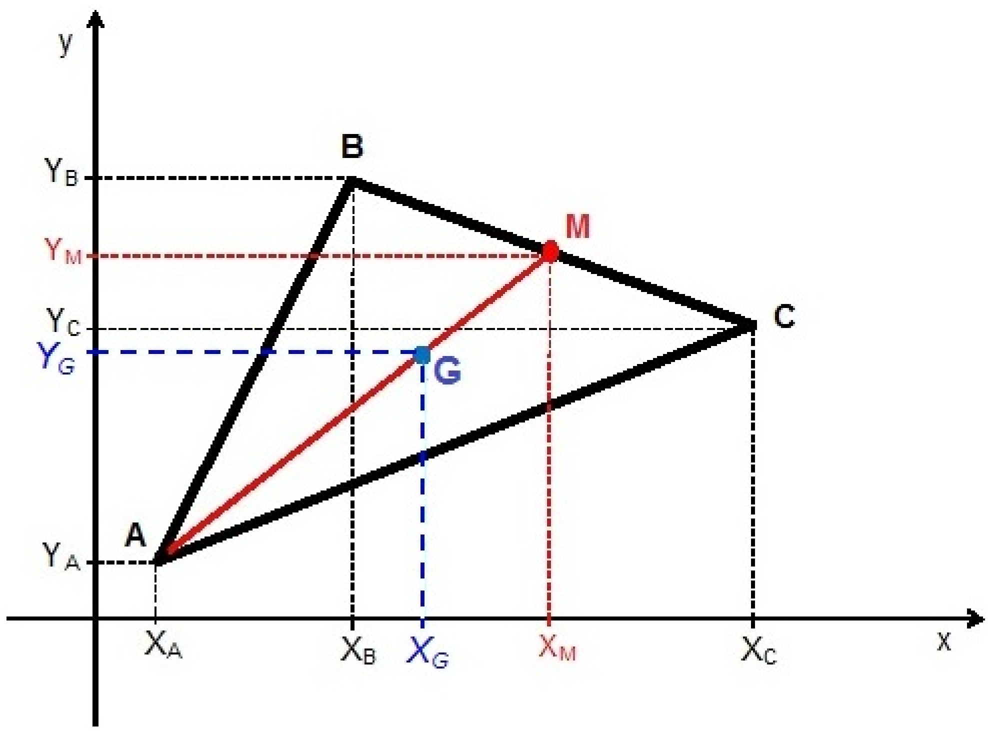


Figura 2.5: Triângulo no Plano Cartesiano

Temos as seguintes coordenadas:
$A\,(x_A\,,\,y_A)$, $B\,(x_B\,,\,y_B)$, $C\,(x_C\,,\,y_C)$, $M\,(x_M\,,\,y_M)$ *e* $G\,(x_G\,,\,y_G)$.

Como M é o ponto médio do seguimento $\overline{BC}$ então as suas coordenadas podem ser obtidas pelas fórmulas:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \tag{2.3}$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \tag{2.4}$$

Como o ponto G divide a mediana numa razão de 2 *para* 1, *ou seja,*

$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1} \tag{2.5}$$

.

Logo teremos nessa mesma proporção as seguintes razões:

$\dfrac{X_A X_G}{X_G X_M} = \dfrac{2}{1}$, *dessa razão obtemos:* $(X_A X_G) = 2.(X_G X_M)$

$(X_G - X_A) = 2.(X_M - X_G)$, *tirando os parênteses temos:* $X_G - X_A = 2.X_M - 2.X_G$

$X_G + 2.X_G = 2.X_M + X_A$

$$3.X_G = 2.X_M + X_A \tag{2.6}$$

Substituindo a fórmula (2.3) *em* (2.6), *teremos:*

$3.X_G = 2.\dfrac{X_B + X_C}{2} + X_A$, *simplificando:* $3.X_G = X_A + X_B + X_C$

$$\textit{Logo, temos:} \qquad X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3}$$

Faremos a mesma coisa para encontrar a outra coordenada, pela razão em (2.5), *teremos nessa mesma proporção as seguintes razões:*

$\dfrac{Y_A Y_G}{Y_G Y_M} = \dfrac{2}{1}$, *dessa razão obtemos:* $(Y_A Y_G) = 2.(Y_G Y_M)$

$(Y_G - Y_A) = 2.(Y_M - Y_G)$, *tirando os parênteses temos:* $Y_G - Y_A = 2.Y_M - 2.Y_G$

$Y_G + 2.Y_G = 2.Y_M + Y_A$

$$3.Y_G = 2.Y_M + Y_A \tag{2.7}$$

Substituindo a fórmula (2.4) *em* (2.7), *teremos:*

$3.Y_G = 2.\dfrac{Y_B + Y_C}{2} + Y_A$, *simplificando:* $3.Y_G = Y_A + Y_B + Y_C$

$$Y_G = \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}$$

Dessa maneira, podemos escrever as coordenadas do baricentro utilizando apenas as coordenadas dos vértices do triângulo ABC:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad e \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

2.5 As Coordenadas do Baricentro de um Polígono Convexo

Em LIMA[17] encontramos uma definição que irá nos ajudar a encontrar as coordenadas de qualquer polígono convexo.

Definição. Se uma poligonal P é formada por segmentos consecutivos $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n$, de comprimentos $a_1, a_2, ..., a_n$, respectivamente, e sendo $(x_k\ ,\ y_k)$ o ponto médio do segmento ℓ_k, o centro de gravidade de P é o ponto $G\,(x_G\ ,\ y_G)$ onde:

$$x_G = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \tag{2.8}$$

$$y_G = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_ny_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \tag{2.9}$$

2.6 O Baricentro dos Paralelogramos - Retângulo e Losango

O Baricentro de um Retângulo, de um Quadrado e de um Losango é o encontro das suas diagonais. Ou podemos simplesmente dizer que o baricentro de qualquer paralelogramo é o encontro das suas diagonais. Ver $Figura\,2.6$

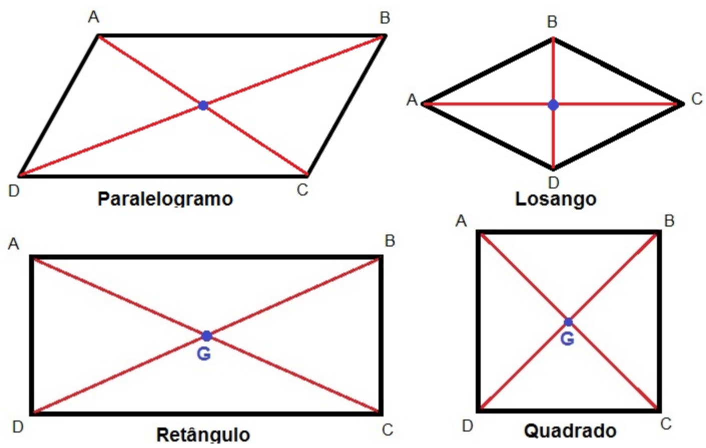


Figura 2.6: O Baricentro de alguns Quadriláteros

Demonstração. *Considerando um paralelogramo no plano cartesiano, onde um dos seus vértices é o ponto de origem do plano cartesiano e um dos seus lados está sobre o eixo das abscissas, ou seja,* $A = (0\,,\,0)$ *e* $D = (x_D\,,\,0)$*, conforme a Figura* 2.7*. Vamos mostrar que a interseção das diagonais, o ponto H, é o baricentro ou centro de gravidade do paralelogramo. Logo, vamos ultilizar as fórmulas* (2.8) *e* (2.9) *das coordenadas do baricentro do polígono convexo, para mostrar que:*

$$G = H, \quad \textit{ou seja}, \quad x_G = x_H \quad e \quad y_G = y_H.$$

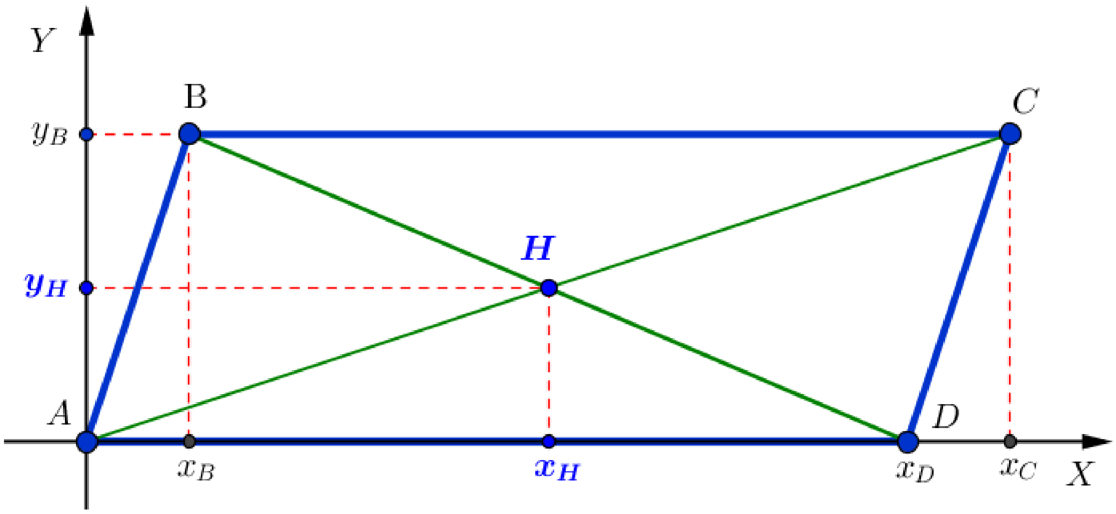


Figura 2.7: Um Paralelogramo e suas diagonais no plano cartesiano

Vamos colocar o ponto médio de cada lado do paralelogramo com as suas respectivas coordenadas, ou seja, os pontos $M\,(x_M\,,\,y_H)$, $N\,(x_N\,,\,y_B)$, $P\,(x_P\,,\,y_H)$ *e* $Q\,(x_Q\,,\,0)$ *são os pontos médios dos respectivos lados* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ *e* $\overline{DA}$*. Ver Figura* 2.8*.*

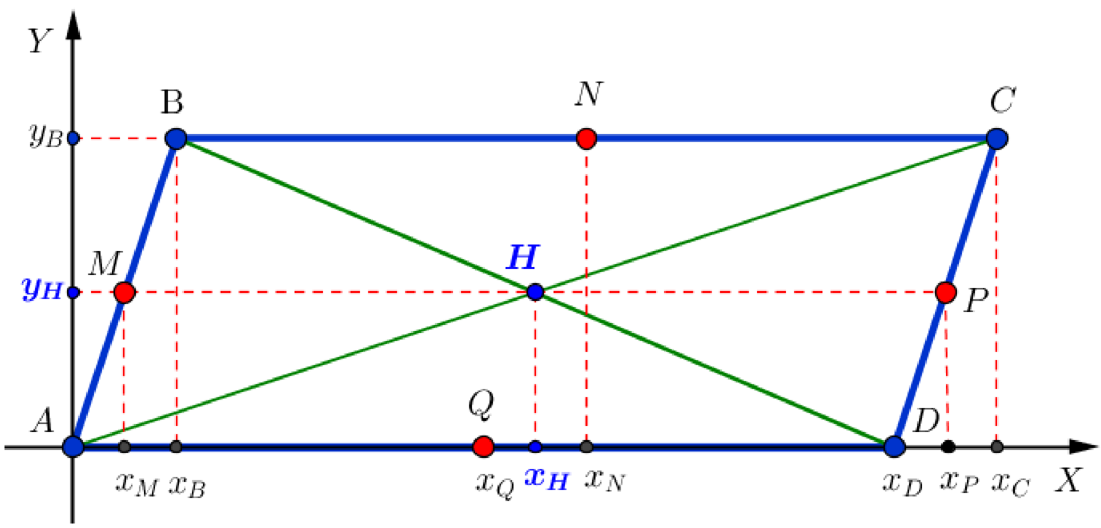


Figura 2.8: Um Paralelogramo, suas diagonais e os pontos médios de cada lado.

Seja o paralelogramo $ABCD$ formado pelos seguimentos consecutivos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, de comprimentos a, b, c e d, respectivamente. Por ser um paralelogramo temos que:

$$a = c \quad e \quad b = d \tag{2.10}$$

$$x_H = \frac{x_P + x_M}{2}\ , \quad da\acute{i}\ \ temos\ \ que: \quad x_P + x_M = 2.x_H \tag{2.11}$$

Podemos observar que o ponto H é ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{MP}$ e $\overline{QN}$. Logo, temos que o ponto x_H é ponto médio dos segmentos $\overline{x_B\,x_D}$, $\overline{A\,x_C}$, $\overline{x_M\,x_P}$ e $\overline{x_Q\,x_N}$. E da mesma forma podemos dizer que o ponto y_H é ponto médio do segmento $\overline{A\,y_B}$.

$$x_H = \frac{x_N + x_Q}{2}\ , \quad da\acute{i}\ \ temos\ \ que: \quad x_N + x_Q = 2.x_H \tag{2.12}$$

$$y_H = \frac{y_B + 0}{2}\ , \quad da\acute{i}\ \ temos\ \ que: \quad y_B = 2.y_H \tag{2.13}$$

Na Figura 2.9 *podemos ver melhor as relações que foram mencionadas anteriormente.*

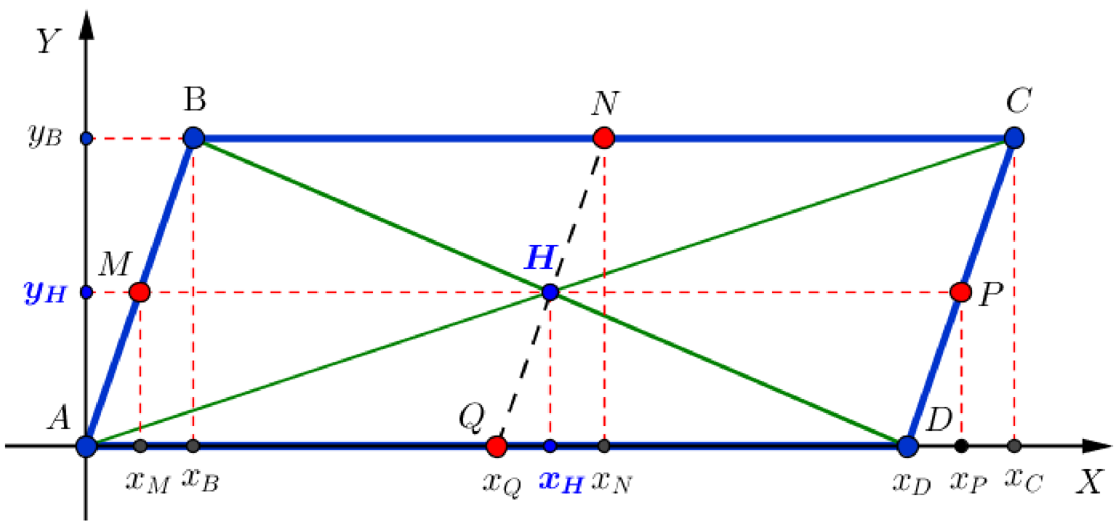


Figura 2.9: Um Paralelogramo, suas diagonais e os pontos médios de cada lado.

Com base na equação (2.8)*, vamos encontrar a coordenada* x_G *do baricentro do paralelogramo. Logo, para o paralelogramo temos a fórmula* (2.14) *que irá encontrar o valor de* x_G *do baricentro.*

$$x_G = \frac{a.x_M + b.x_N + c.x_P + d.x_Q}{a + b + c + d} \tag{2.14}$$

Com o auxílio da equação (2.10) *vamos simplificar a equação* (2.14)*.*

$$x_G = \frac{a.x_M + b.x_N + a.x_P + b.x_Q}{a + b + a + b}$$

$$x_G = \frac{a.(x_M + x_P) + b.(x_N + x_Q)}{2.a + 2.b} \tag{2.15}$$

Substituindo as equações (2.11) *e* (2.12) *na equação* (2.15)*, obteremos:*

$$x_G = \frac{a.(2.x_H) + b.(2.x_H)}{2.(a + b)} \tag{2.16}$$

$$x_G = \frac{(2.x_H).(a + b)}{2.(a + b)}$$

Simplificando a equação, temos: $x_G = x_H$

Faremos o mesmo procedimento para encontrar a coordenada do y_G. Com base na equação (2.9)*, vamos encontrar a coordenada do y. Logo, para o paralelogramo temos a fórmula* (2.17) *que irá encontrar o valor de y_G do baricentro.*

$$y_G = \frac{a.y_H + b.y_B + c.y_H + d.0}{a + b + c + d} \tag{2.17}$$

Com o auxílio da equação (2.10) *vamos simplificar a equação* (2.17)*.*

$$y_G = \frac{a.y_H + b.y_B + a.y_H}{a + b + a + b}$$

$$y_G = \frac{a.(2.y_H) + b.y_B}{2.a + 2.b} \tag{2.18}$$

Substituindo a equação (2.13) *na equação* (2.18)*, vamos obter:*

$$y_G = \frac{a.(2.y_H) + b.(2.y_H)}{2.(a + b)} \tag{2.19}$$

$$y_G = \frac{(2.y_H).(a + b)}{2.(a + b)}$$

Simplificando a equação, temos: $y_G = y_H$.

Logo, temos que: $x_G = x_H$ *e* $y_G = y_H$, *então:* $H = G$.

Logo, o ponto H que é o encontro das diagonais do paralelogramo, é o baricentro do paralelogramo. E com isso podemos concluir que para qualquer paralelogramo, bem como o Retângulo, o Quadrado e o Losango, que são paralelogramos, têm o centro de gravidade ou baricentro na interseção das suas diagonais.

Capítulo 3

Proposta de Ensino para o Baricentro

Geralmente os professores que vão ensinar o Baricentro se limitam apenas a encontrar as coordenadas do baricentro do triângulo como vem sendo apresentado nos livros didáticos de matemática do ensino médio. Segundo Barichello[1] [4] diz que o ponto de encontro das três medianas de um triângulo qualquer é o centro de massa desse triângulo. E ele chama atenção que alguns livros definem o baricentro como o ponto de encontro das três medianas, o que restringe a sua utilização a triângulos. Contudo, a etimologia da palavra aponta a primeira definição (centro de massa de um objeto) como mais adequada.

Queremos aqui apresentar outra abordagem de se estudar e trabalhar com o baricentro de um triângulo e também o baricentro de qualquer outro polígono convexo, pois o baricentro de outros polígonos sem ser o triângulo, não é trabalhado com os alunos. Nessa nova abordagem os alunos terão a oportunidade de não só aprender a encontrar o Baricentro de um polígono convexo, bem como compreender a importância e o significado do Baricentro.

Não é nossa intensão dizer com isso, que encontrar as coordenadas do baricentro de um triângulo não seja importante, muito pelo contrário, é de suma importância o aluno saber encontrar as coordenadas do baricentro de um triângulo, mas o baricentro não se resume a isso só e nem tão pouco, o baricentro é um ponto exclusivo apenas para os triângulos. A nossa proposta é trabalhar também com materiais concretos para que os alunos compreendam melhor o significado e a importância do Baricentro de um polígono convexo.

A princípio, podemos entregar aos alunos um polígono convexo recortado de um papelão ou de outro material similar ou simplesmente solicitar aos alunos que eles mesmos recortem os polígonos, sugerindo que eles tentem equilibrar o polígono na ponta do dedo ou da caneta. Inicialmente, os polígonos tenderão a cair, pois só existe um ponto que se possa equilibrar o polígono e esse ponto é que chamamos de Baricentro.

[1]Leonardo Barichello é professor de matemática, também interessado em programação de computadores e robótica. Atualmente, Doutorando em Educação Matemática interessado em design de tarefas para os alunos com baixos resultados.

Como diz Assis[2], os triângulos sempre caem, exceto quando são apoiados pelo baricentro, conforme a $Figura$ 3.1. Mesmo quando são apoiados pelo circuncentro, pelo ortocentro, pelo incentro ou por qualquer outro ponto (que não seja o baricentro), vem da experiência que os triângulos caem". (ASSIS, 2008, p.51)[2]. Em tese, o centro de gravidade de qualquer triângulo coincide com a intersecção das medianas.

Figura 3.1: O triângulo apoiado pelo seu Baricentro.
Fonte: $http://2.bp.blogspot.com/-kex-g4J3PlQ/T8JbiI_L-lI/AAAAAAAAAd8/7ELBwrHIdg4/s1600/baricentro-1.png$. Acesso em 21 jan 2016.

Quando todos ou quase todos conseguirem equilibrar o seu polígono, aí sim, começamos a apresentar e a definir o Baricentro de um polígono convexo. Acreditamos que com essa simples experiência, os alunos poderão entender e compreender melhor o que seja esse ponto chamado de Baricentro. Essa é uma atividade muito simples de se realizar em sala de aula com os alunos e que deverá proporcionar um melhor entendimento do que seja o baricentro de um polígono convexo.

Todo corpo têm um ponto de equilíbrio e esse ponto é chamado de Baricentro.

[2]André Koch Torres Assis Formou-se no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, obtendo o bacharelado em 1983 e o doutorado em 1987. Passou o ano de 1988 na Inglaterra realizando um pós-doutorado no Culham Laboratory (United Kingdom Atomic Energy Authority). Atualmente atua como professor de física na Universidade Estadual de Campinas, trabalhando com gravitação, eletromagnetismo, cosmologia e história da ciência. Assis recebeu o Prêmio Jabuti na categoria "Ciências Exata"por duas vezes: em 1996 pelo livro "Eletrodinâmica de Weber"e em 2012 pelo livro "Eletrodinâmica de Ampère"

3.1 Experiências com o Baricentro de Polígonos Convexos

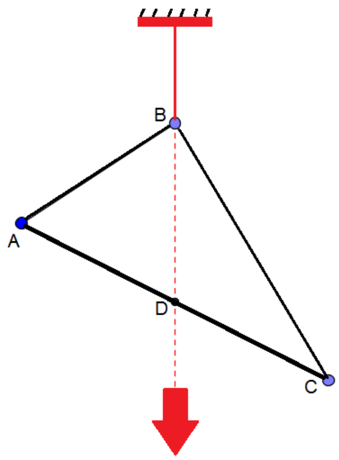
Vamos aqui relatar algumas experiências realizadas para encontrar o Baricentro de polígonos convexos.

Para todas as experiências que iremos aqui realizar, utilizaremos os mesmos tipos de materiais e é recomendável que se realize essas experiências com um grupo de no mínimo três alunos, para que eles possam discutir os procedimentos e os resultados encontrados por eles. Segue então, a relação do material necessário para que se possam realizar as experiências.

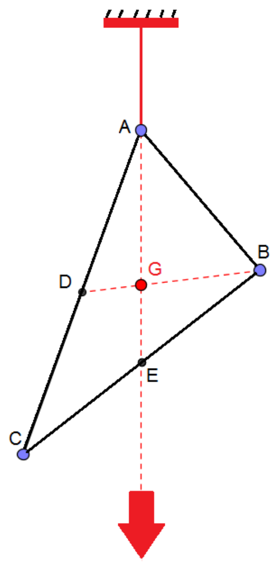
Material necessário:

- Caixas de papelão ou material similar; Régua; Tesoura; Barbante ou linha; Lápis; Borracha e um objeto para ser o peso (Ex.: borracha, chave, moeda...).

Determinação experimental do centro de massa como exemplo, tomemos um polígono convexo. Pendura-se este polígono por um ponto qualquer e traça-se uma linha vertical passando pelo ponto ao qual o polígono está pendurado, conforme a $Figura$ 3.2 (a). Em seguida, repete-se o procedimento tomando-se outro ponto, conforme a $Figura$ 3.2 (b). A intersecção das duas linhas é o Centro de Massa ou Baricentro ou Centro de Gravidade.



(a)



(b)

Figura 3.2: Experimento para obter o centro de massa ou Baricentro de um polígono convexo.

O Centro de Massa ou Baricentro está sobre a linha vertical porque o experimento é apoiado na força gravitacional cuja direção é normal à superfície terrestre. Deixando o polígono em repouso, o que se obtém é a linha de atuação da força gravitacional resultante agindo sobre o polígono como um todo. Para determinar o ponto, basta repetir o processo para outro ponto qualquer.

Experiência 1

Descrição da experiência:

Nesse nosso 1^o experimento, vamos procurar encontrar o Baricentro de um triângulo feito de papelão, ou seja, o centro de massa do triângulo de papelão.

1^o ***Passo:*** Traçar um triângulo no papelão com o auxilio da régua (de preferência com alguns lados maiores que $15\,cm$). Ver $Figura\,3.3$.

Figura 3.3: Triângulo traçado no papelão

2^o ***Passo:*** Depois de traçado o triângulo, cortar o papelão nas linhas traçadas do triângulo e fazer um furo logo abaixo dos três vértices. Ver $Figura\,3.4$.

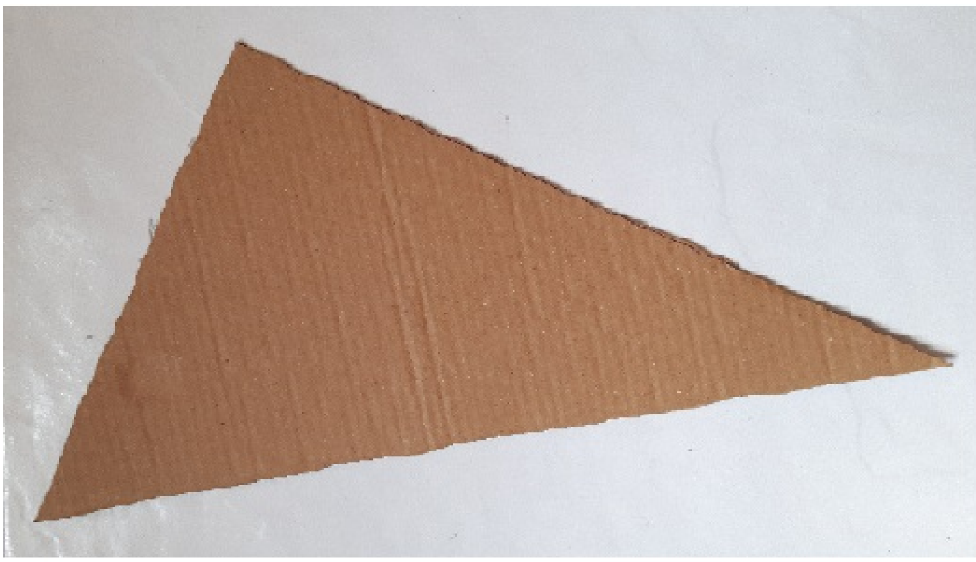


Figura 3.4: Triângulo cortado do papelão

3^o ***Passo:*** Passar a linha pelo furo feito abaixo do vértice e amarrar um peso na extremidade da linha, com o auxilio da linha reta, traçamos o segmento em cima da linha, ver $Figura\,3.5$. Repetimos esse procedimento para os outros dois vértices, ver a $Figura\,3.6$ e a $Figura\,3.7$.

Figura 3.5: Traçando o 1^o segmento de reta que contém o Baricentro do Triângulo

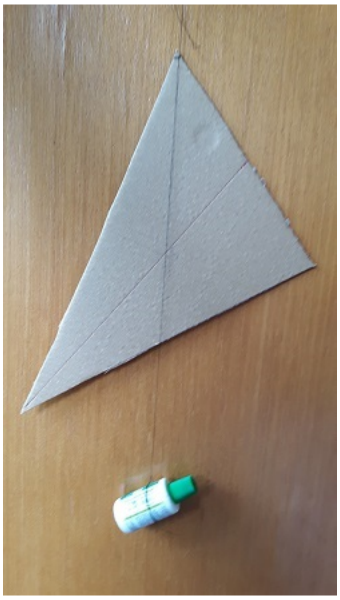


Figura 3.6: Traçando o 2^o segmento de reta que contém o Baricentro do Triângulo

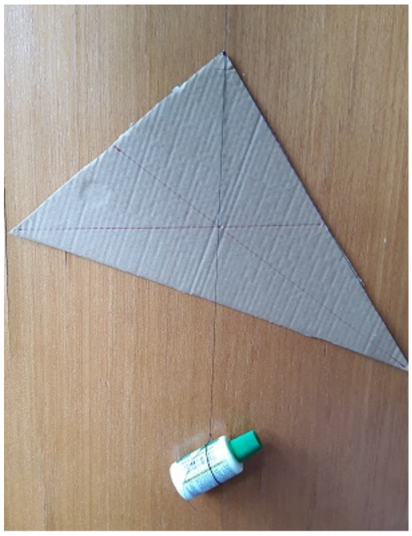


Figura 3.7: Traçando o 3^o segmento de reta que contém o Baricentro do Triângulo

4^o ***Passo:*** Com os três procedimentos realizados nos passos anteriores, traçamos os três segmentos de reta que contém o Baricentro, logo, a intersecção entre eles será o ponto de equilíbrio do triângulo, ou seja, o Baricentro do triângulo. Ver $Figura\,3.8$.

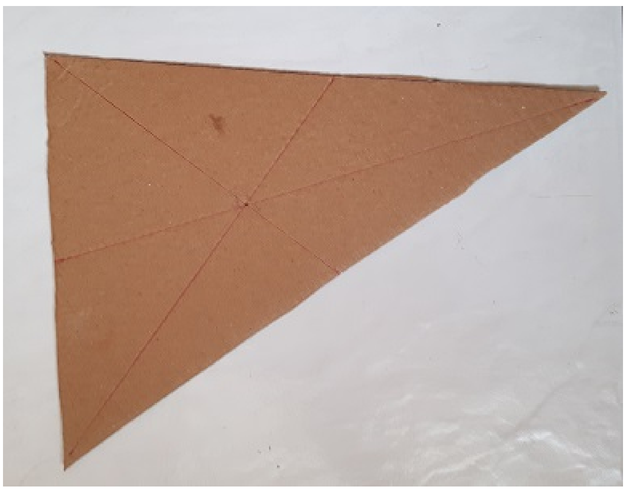
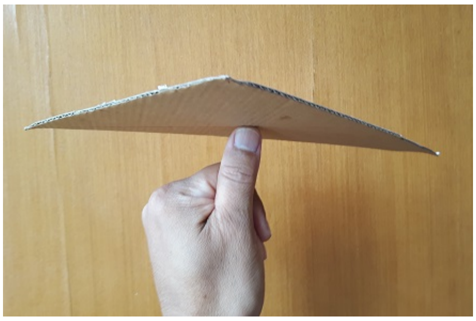
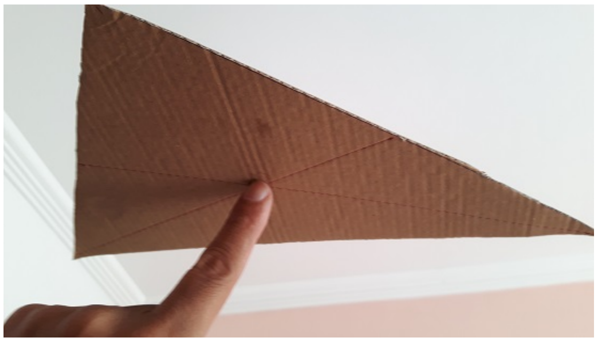


Figura 3.8: Triângulo com os três segmentos traçados e o Baricentro

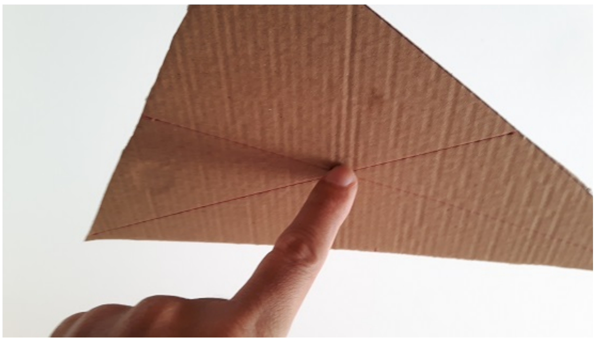
5^o ***Passo:*** Com o Baricentro encontrado podemos verificar se realmente é o ponto de equilíbrio do triângulo, tentando equilibrá-lo na ponta do dedo e/ou na ponta de uma caneta. Ver a $Figura\,3.9\,(a)\,,\,(b)\,e\,(c)$ e $Figura\,3.10\,(a)\,,\,(b)\,e\,(c)$.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.9: Triângulo equilibrado com o dedo pelo ponto do Baricentro do Triângulo

(a)

(b)

(c)

Figura 3.10: Triângulo equilibrado com a caneta pelo ponto do Baricentro do Triângulo

Através dessa experiência, fica mais fácil entender por que o Baricentro é o centro de gravidade, ou seja, o centro de equilíbrio do triângulo. Essa atividade proporcionará aos alunos a compreensão do que seja Baricentro de um polígono e a sua importância.

Experiência 2

Descrição da experiência:

Nesse nosso 2^o experimento, vamos procurar encontrar o Baricentro de um quadrilátero feito de papelão, ou seja, o centro de massa do quadrilátero.

1^o ***Passo:*** Traçar um quadrilátero qualquer no papelão com o auxílio de um lápis e de uma régua (de preferência que não seja muito pequeno). Ver $Figura\,3.11$.

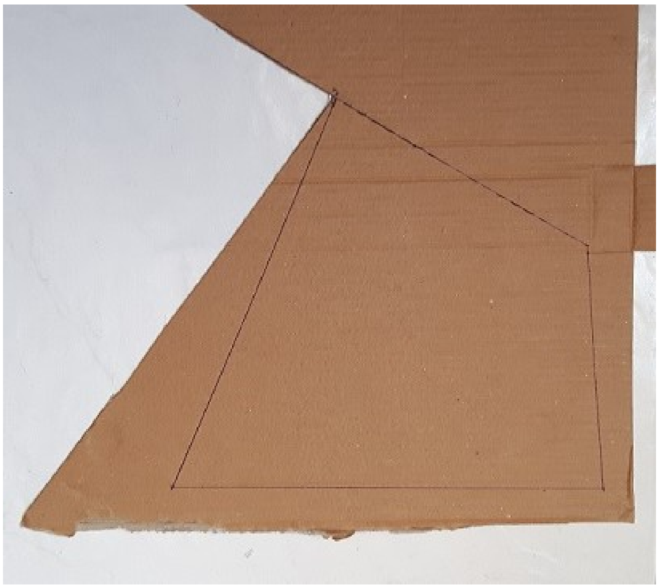


Figura 3.11: Quadrilátero traçado no papelão

2^o ***Passo:*** Depois de traçado o quadrilátero, cortar o papelão nas linhas traçadas do quadrilátero e fazer um furo logo abaixo dos vértices. Ver $Figura\,3.12$.

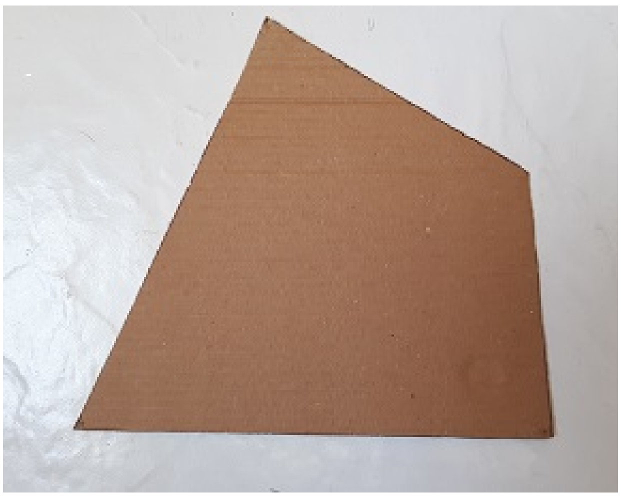
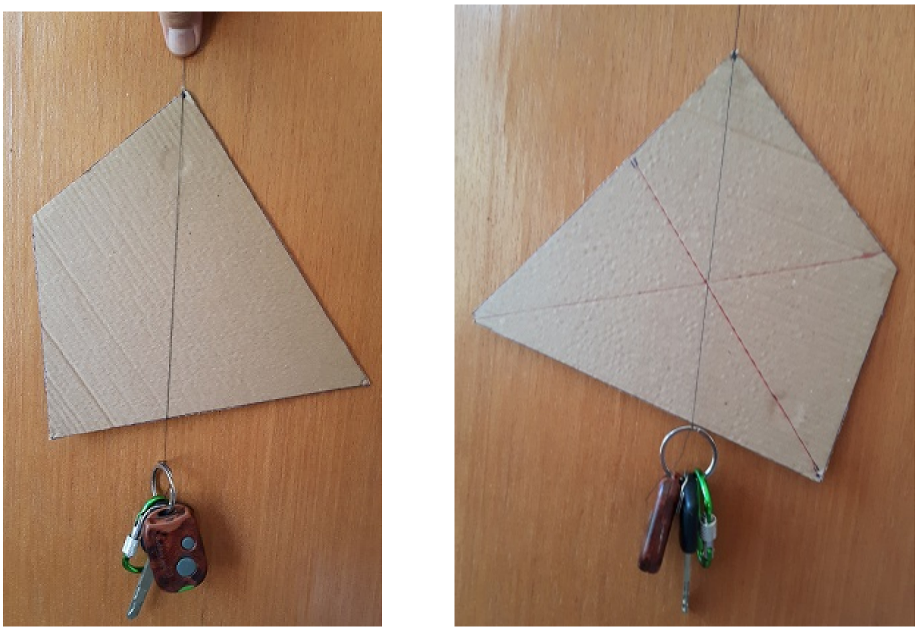


Figura 3.12: Quadrilátero cortado do papelão

3^o ***Passo:*** Passar a linha pelo furo feito abaixo do vértice e amarrar um peso na extremidade da linha, com o auxilio da linha reta, traçamos o segmento em cima da linha. Repetimos esse procedimento para os outros vértices, ver a $Figura\,3.13\,(a)\,e\,(b)$.



(a) (b)

Figura 3.13: Traçando os segmentos de reta que contém o Baricentro do Quadrilátero

4^o ***Passo:*** Com os procedimentos realizados no 3^o Passo, traçamos os segmentos de reta que contém o Baricentro, logo, a intersecção entre eles será o ponto de equilíbrio do Quadrilátero, ou seja, o Baricentro do Quadrilátero. Ver $Figura\,3.14$.

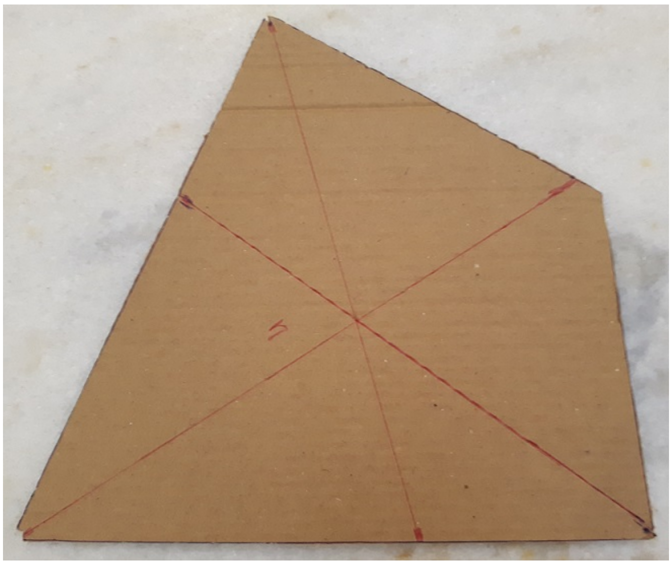
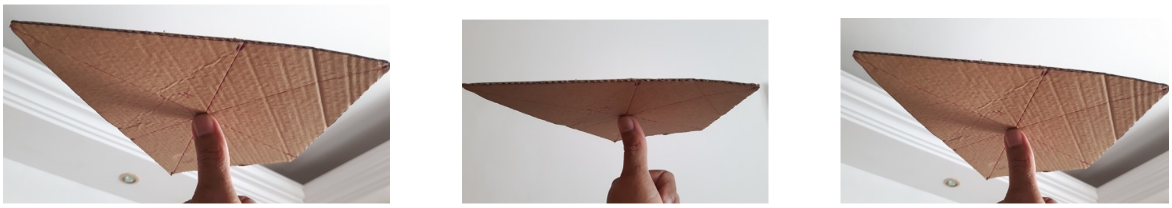


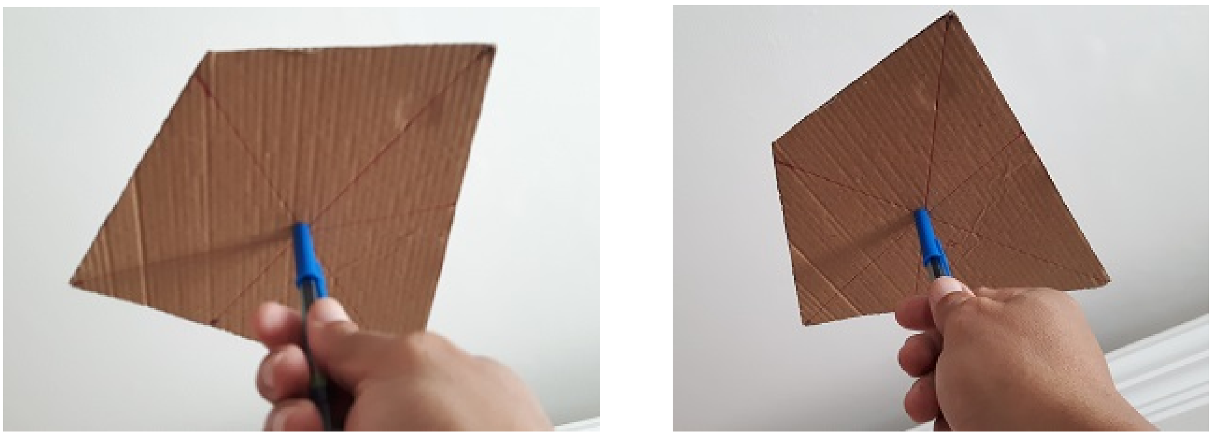
Figura 3.14: Quadrilátero com os segmentos traçados e o Baricentro

5^o ***Passo:*** Com o Baricentro encontrado podemos verificar se realmente é o ponto de equilíbrio do quadrilátero, tentando equilibrá-lo na ponta do dedo e/ou na ponta de uma caneta. Ver $Figura\, 3.15\, (a)$, $(b)\, e\, (c)$ e $Figura\, 3.16\, (a)\, e\, (b)$.



(a) (b) (c)

Figura 3.15: Quadrilátero equilibrado com o dedo pelo ponto do Baricentro do Quadrilátero



(a) (b)

Figura 3.16: Quadrilátero equilibrado com a caneta pelo ponto do Baricentro do Quadrilátero

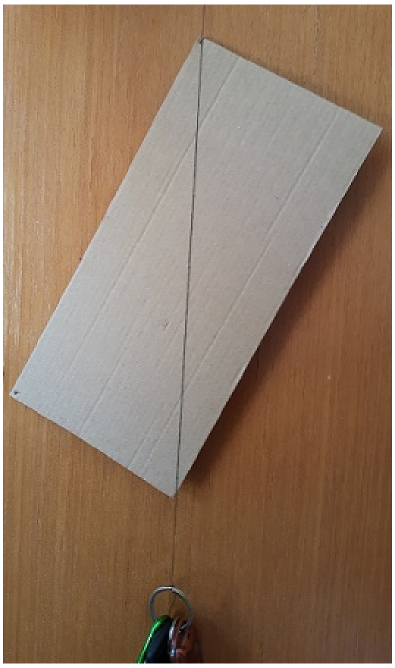
Através dessa experiência com o quadrilátero, podemos mostrar para os alunos, que outros polígonos sem ser o triângulo, possuem um ponto de equilibrio, ou seja, todos os polígonos convexos tem um ponto que chamamos de Baricentro.

Experiência com outros polígonos

Demos procedimentos a vários experimentos, com outros quadriláteros, pentágono, hexágono e com o heptágono. Os procedimentos foram os mesmos realizados nos experimentos anteriores, ou seja, foram realizados passo a passo como nos experimentos 1 e 2. Desta forma, só vamos mostrar as imagens dos experimentos com esses novos polígonos.

Experiência 3 - Com outros Quadriláteros - Retângulo

Figura 3.17: Retângulo cortado do papelão



(a)

(b)

Figura 3.18: Procurando traçar os segmentos de reta que contém o Baricentro do Retângulo

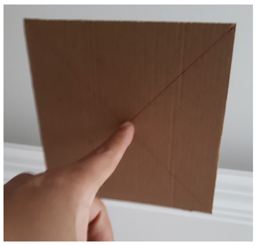
(a)

(b)

Figura 3.19: Traçando os segmentos de reta que contém o Baricentro do Retângulo

(a)

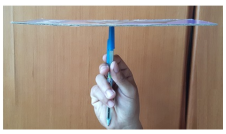
(b)



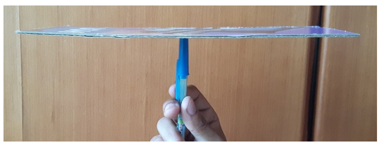
(c)

Figura 3.20: Retângulo equilibrado com o dedo pelo ponto do Baricentro do Retângulo

(a)



(b)

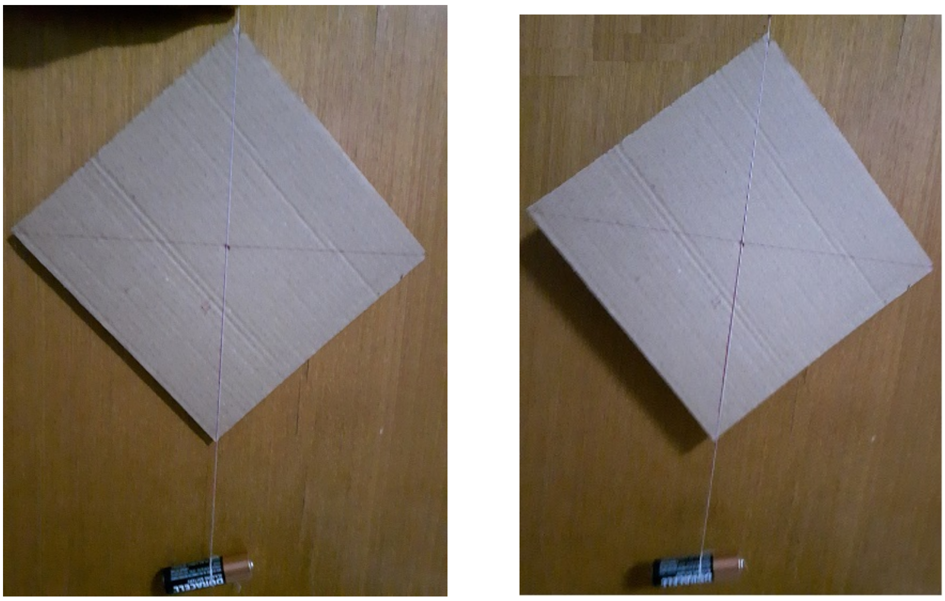


(c)

Figura 3.21: Retângulo equilibrado com a caneta pelo ponto do Baricentro do Retângulo

Experiência 4 - Com outros Quadriláteros - Quadrado

Figura 3.22: Quadrado cortado do papelão



(a) (b)

Figura 3.23: Procurando traçar os segmentos de reta que contém o Baricentro do Quadrado

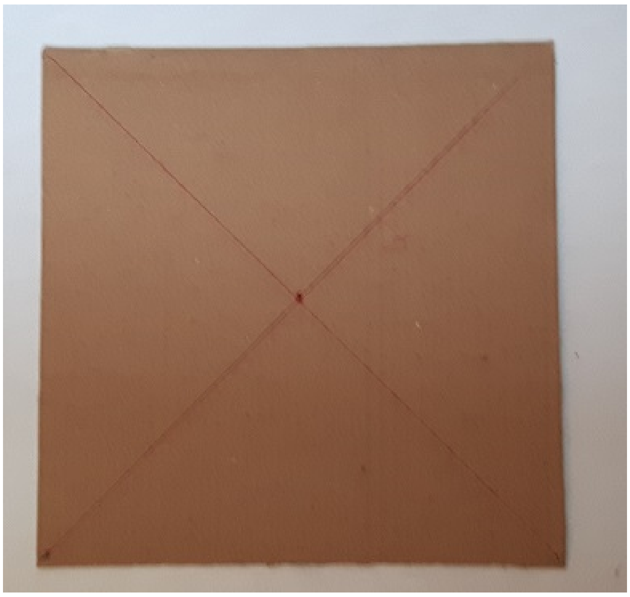
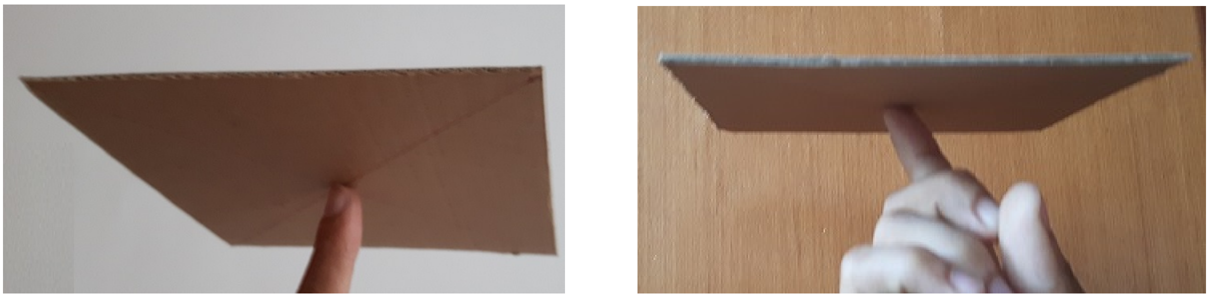


Figura 3.24: Traçando os segmentos de reta que contém o Baricentro do Quadrado



(a) (b)

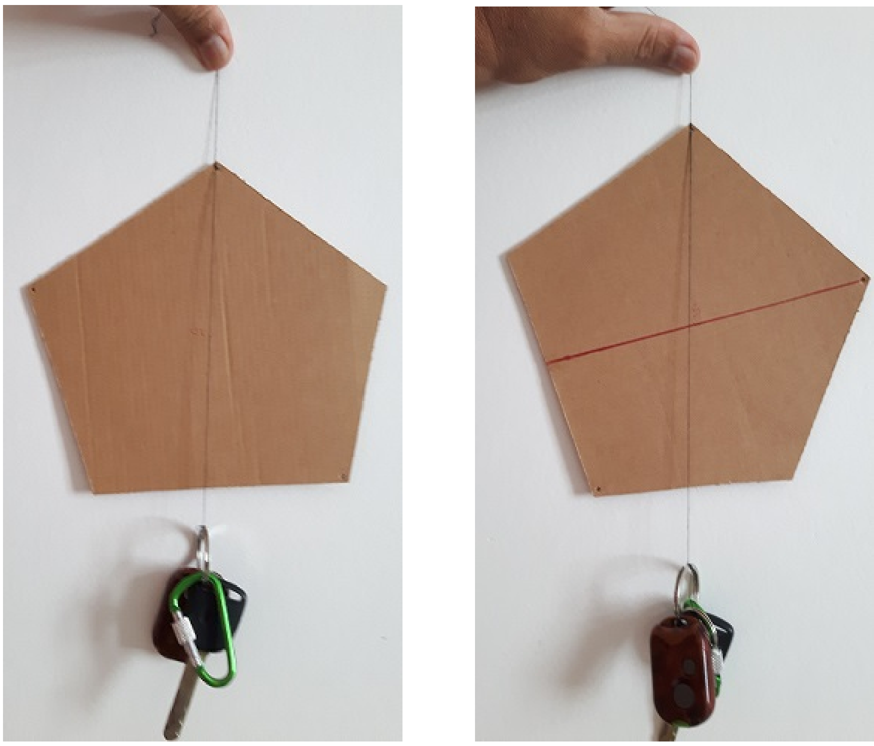
Figura 3.25: Quadrado equilibrado com o dedo pelo ponto do Baricentro do Quadrado

(a) (b) (c)

Figura 3.26: Quadrado equilibrado com a caneta pelo ponto do Baricentro do Quadrado

Experiência 5 - Com o Pentágono

Figura 3.27: Pentágono cortado do papelão



(a) (b)

Figura 3.28: Procurando traçar os segmentos de reta que contém o Baricentro do Pentágono

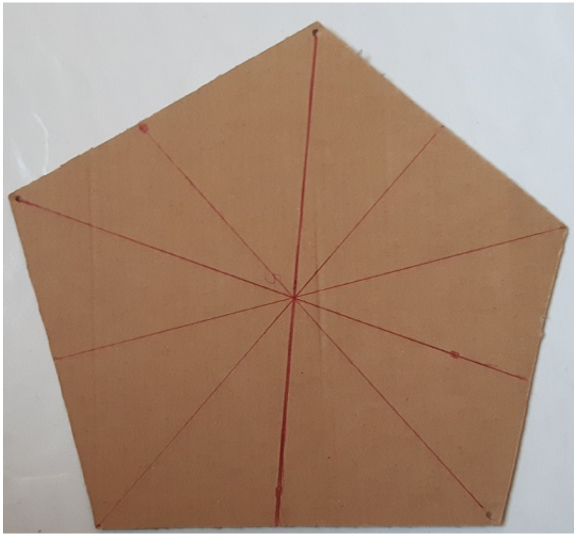
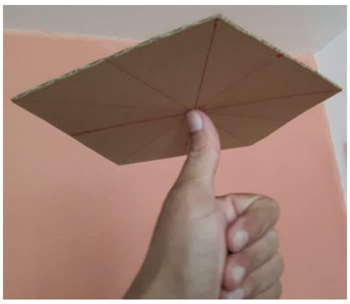
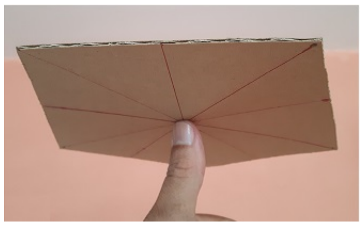


Figura 3.29: Traçando os segmentos de reta que contém o Baricentro do Pentágono



(a)

(b)



(c)

Figura 3.30: Pentágono equilibrado com o dedo pelo ponto do Baricentro do Pentágono

(a)

(b)

(c)

Figura 3.31: Pentágono equilibrado com a caneta pelo ponto do Baricentro do Pentágono

Experiência 6 - Com o Hexágono

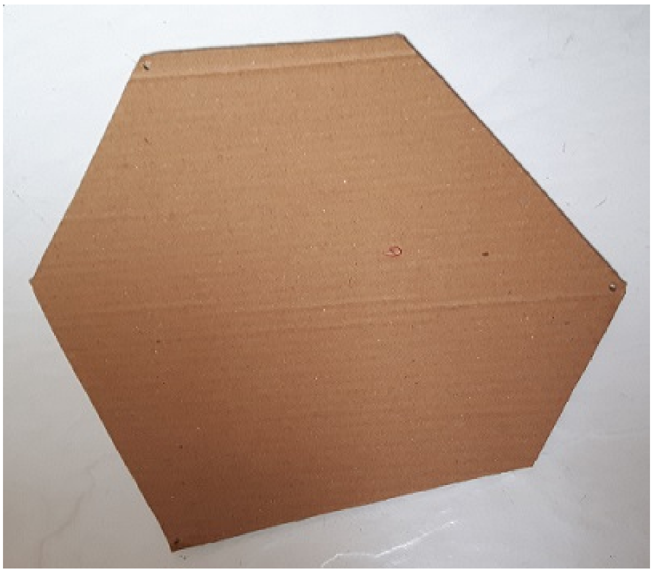


Figura 3.32: Hexágono cortado do papelão

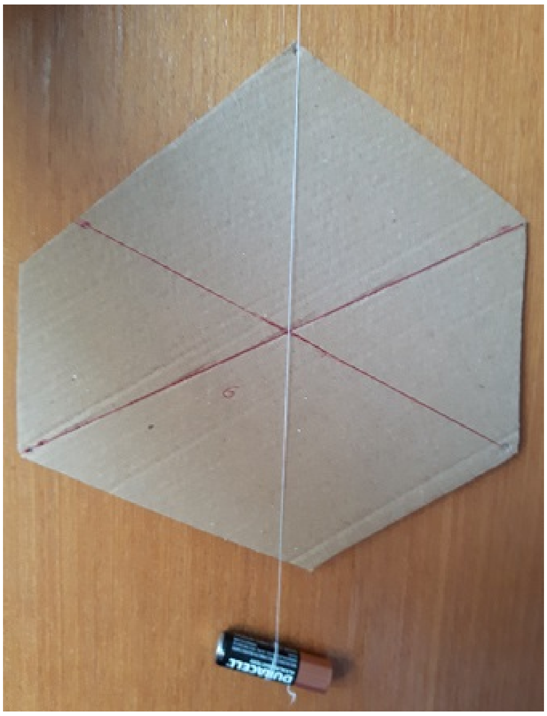
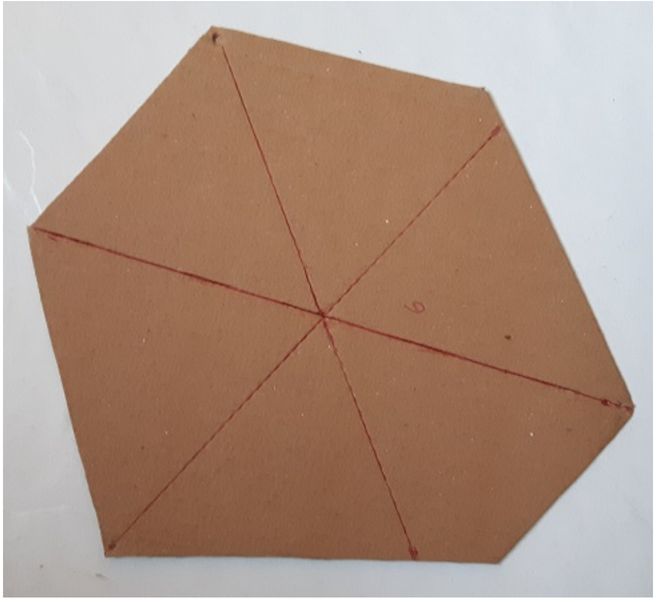


Figura 3.33: Procurando traçar os segmentos de reta que contém o Baricentro do Hexágono



(a)

Figura 3.34: Traçando os segmentos de reta que contém o Baricentro do Hexágono

(a) (b) (c)

Figura 3.35: Hexágono equilibrado com o dedo pelo ponto do Baricentro do Hexágono

(a) (b) (c)

Figura 3.36: Hexágono equilibrado com a caneta pelo ponto do Baricentro do Hexágono

Experiência 7 - Com o Heptágono

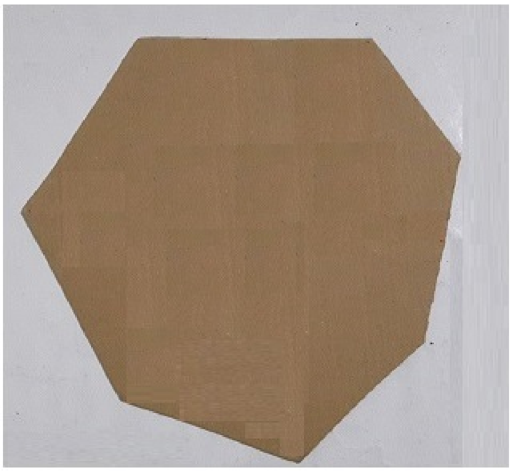


Figura 3.37: Heptágono cortado do papelão

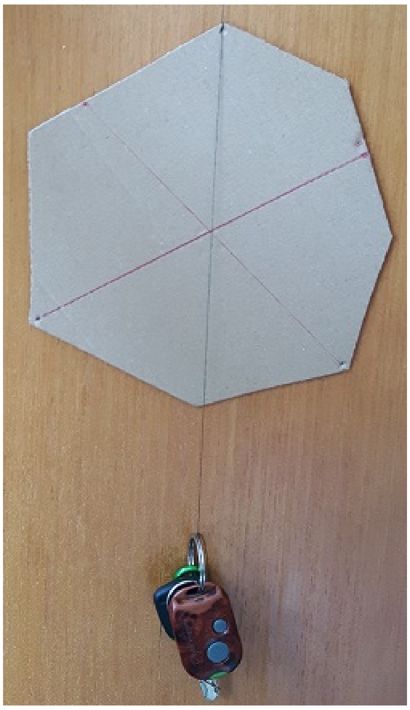
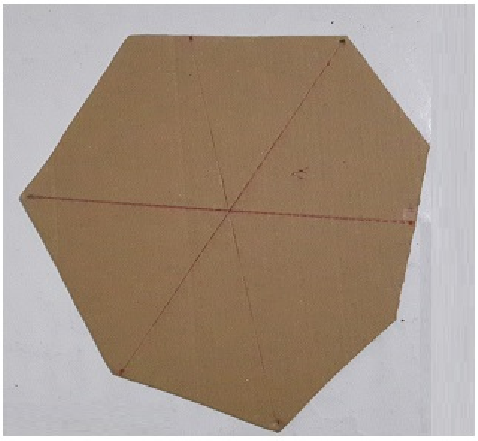
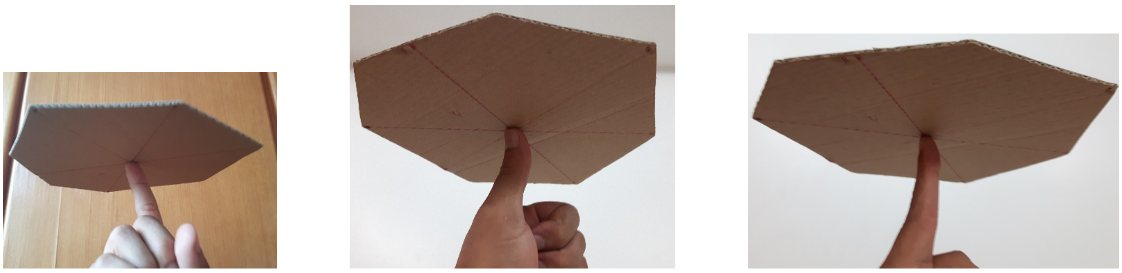


Figura 3.38: Procurando traçar os segmentos de reta que contém o Baricentro do Heptágono



(a)

Figura 3.39: Traçando os segmentos de reta que contém o Baricentro do Heptágono



(a) (b) (c)

Figura 3.40: Heptágono equilibrado com o dedo pelo ponto do Baricentro do Heptágono

(a) (b) (c)

Figura 3.41: Heptágono equilibrado com a caneta pelo ponto do Baricentro do Heptágono

Imagens dos polígonos que foram trabalhados nas experiências

Vamos apresentar todos os polígonos que foram construídos e estudados nas experiências. Vamos mostrar esses polígonos do lado de uma régua para que possamos ter uma ideia dos seus tamanhos, ou seja, para poder ter uma noção do tamanho dos lados dos polígonos que foram construídos nas experiências realizadas por nós.

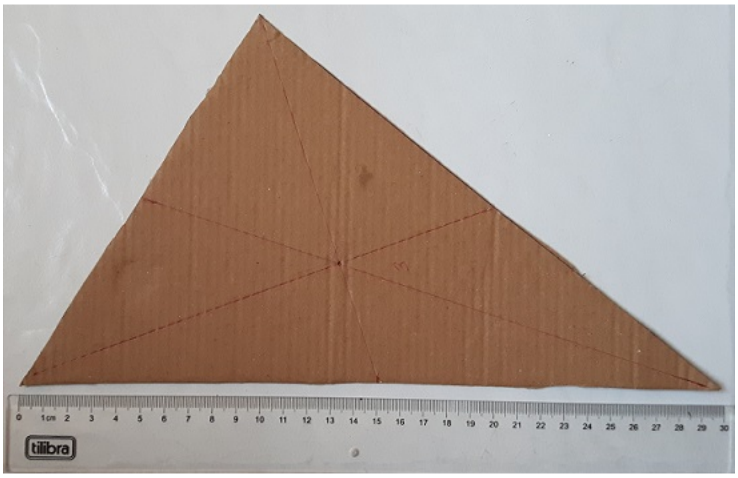


Figura 3.42: Triângulo com a medida de um lado

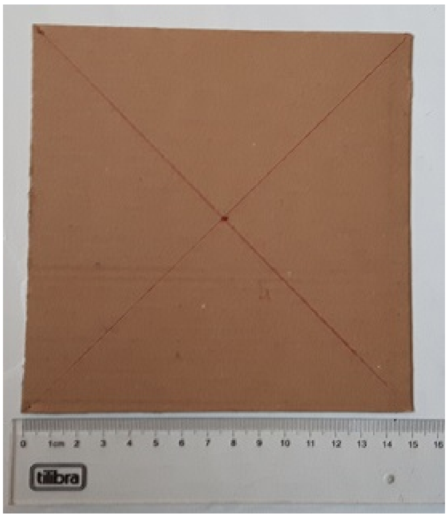
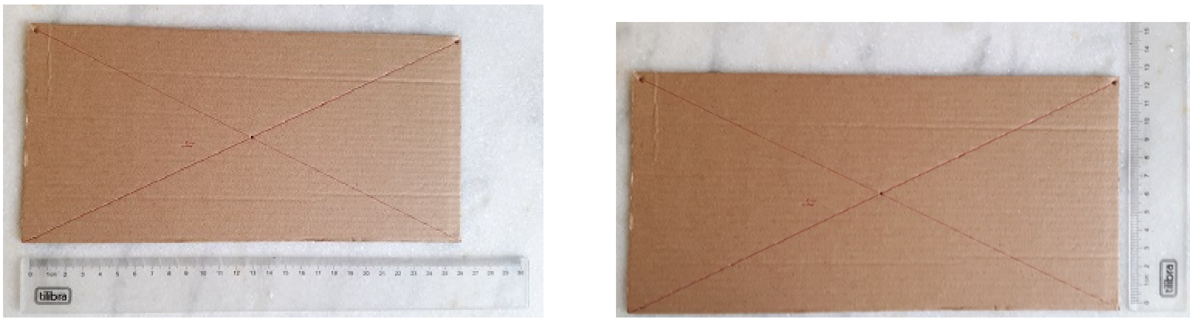


Figura 3.43: Quadrado com a medida do lado



(a) (b)

Figura 3.44: Retângulo com as medidas dos lados

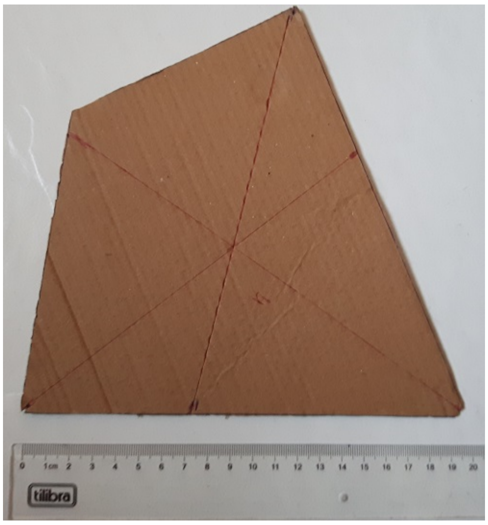


Figura 3.45: Quadrilátero com a medida de um lado

Figura 3.46: Pentágono com a medida de um lado

Figura 3.47: Hexágono com a medida de um lado

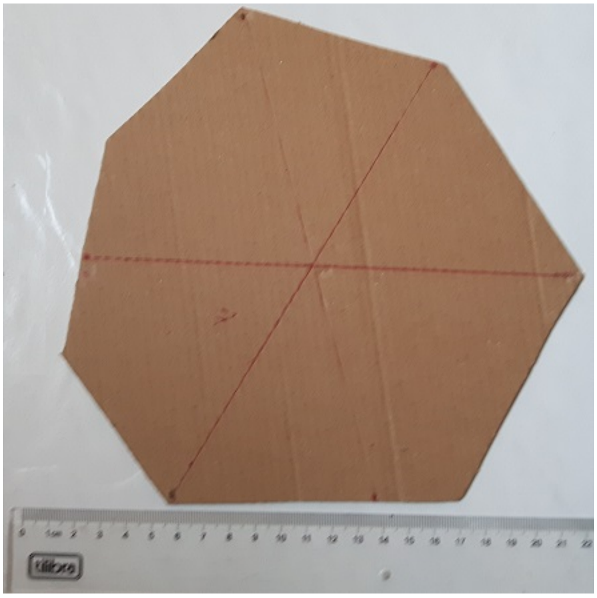


Figura 3.48: Heptágono com a medida de um lado

Essas medidas servem como orientação para a construção de novos polígonos e para realização de novas experiências. Não é aconselhável construir polígonos muito pequenos, pois poderão perder o encanto de equilibrá-los com o dedo.

3.2 Atividades Envolvendo Medianas e o Baricentro

Vamos apresentar algumas atividades interessantes que se pode e deve trabalhar em sala de aula.

3.2.1 Atividades Envolvendo as Medianas

Atividade 01

Questão 01 - Dada as coordenadas dos vértices de um triângulo, $A\,(1\,,\,2)$, $B\,(3\,,\,10)$ e $C\,(9\,,\,4)$, determine as coordenadas dos pontos médios de cada lado desse triângulo.

Solução:

Vamos considerar **M**, **N** e **P** os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ respectivamente.
Então temos que:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+10}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{e} \quad y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{10+4}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$x_P = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{e} \quad y_P = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Logo, temos os pontos médios: $\boxed{M\,(2\,,\,6)\,,\ N\,(6\,,\,7)\ \ e\ P\,(5\,,\,3)\,.}$

Questão 02 - Utilizando os dados e os resultados da questão anterior, construa o triângulo no plano cartesiano e trace as suas respectivas medianas abaixo.

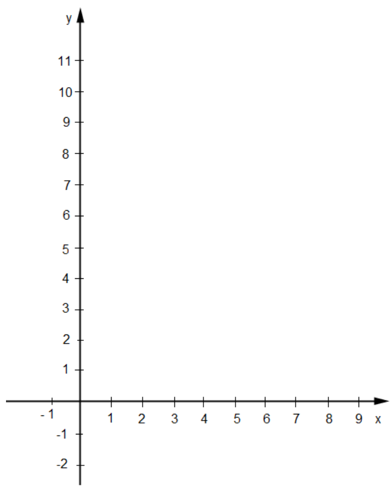


Figura 3.49: Plano Cartesiano

Solução da Questão 02: (Ver *Figura* 3.50)

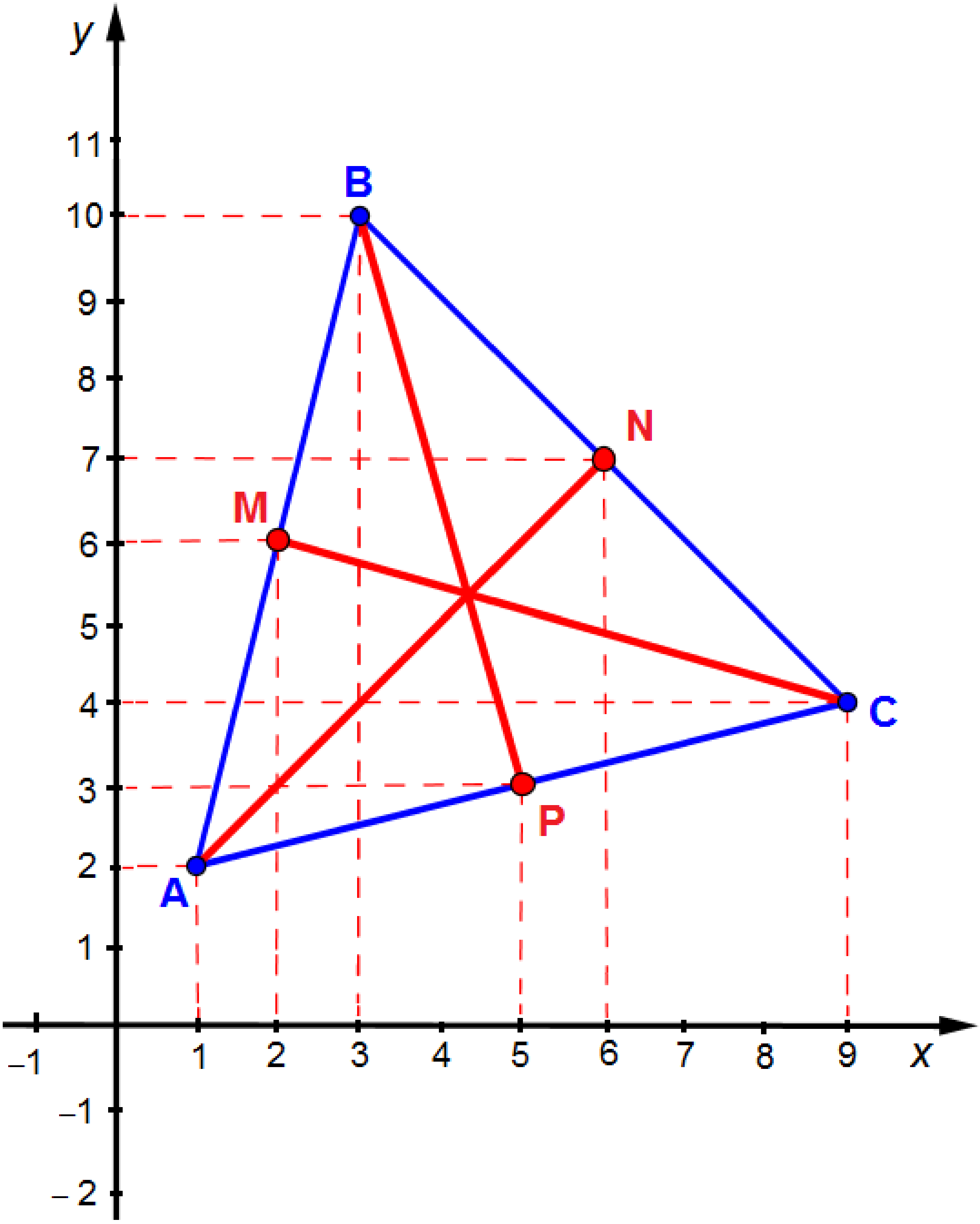


Figura 3.50: Plano cartesiano com o Triângulo e as suas Medianas

Questão 03 - Sabendo que os pontos $A\,(-5\,,\,1)$, $B\,(3\,,\,9)$ e $C\,(x\,,\,y)$, são as coordenadas dos vértices de um triângulo e sendo $M\,(4\,,\,3)$ as coordenadas do ponto médio referente ao lado do triângulo $\overline{BC}$, determine o comprimento da mediana, que tem como uma das extremidades o vértice **C**.

Solução:

Vamos considerar **N** o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Então vamos encontrar as coordenadas do ponto C e N para que possamos encontrar a distância entre eles.

$x_M = \dfrac{x_C + x_B}{2}$

$4 = \dfrac{3 + x_C}{2}$

$3 + x_C = 8$

$x_C = 8 - 3 = 5$

$y_M = \dfrac{y_C + y_B}{2}$

$3 = \dfrac{9 + y_C}{2}$

$9 + y_C = 6$

$y_C = 6 - 9 = -3.$

$x_N = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-5+3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \quad \text{e} \quad y_N = \dfrac{y_A + y_A}{2} = \dfrac{1+9}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

Logo, $C\,(5\,,\,-3)$ **e** $N\,(-1\,,\,5)$

$d_{CN} = \sqrt{(x_N - x_C)^2 + (y_N - y_C)^2} = \sqrt{(-1-5)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2} =$

$\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10\ u.c.$

$\boxed{d_{CN} = \mathbf{10\ u.c.}}$

Atividade 02

Para a realização dessa atividade os alunos deverão formar equipes com três alunos em cada equipe e as equipes deverão ter os materiais relacionados abaixo.

Materiais necessários para se realizar a atividade 2. Papel; Papelão (Caixa de sapato ou similar); Régua; Tesoura; Lápis; Caneta e Borracha.

Questão 01 - Desenhe um triângulo qualquer com o auxilio de uma régua, trace as suas respectivas medianas.

Questão 02 - Recorte um triângulo qualquer num papelão e trace as suas respectivas medianas.

Questão 03 - Recorte um triângulo retângulo que tenha as medidas dos catetos iguais a 12 cm e 16 cm. Trace a mediana que tem origem no vértice do ângulo reto do triângulo. Com o auxilio da régua encontre:

a) o valor do comprimento da hipotenusa.

b) o valor do comprimento da mediana.

Questão 04 - Recorte um triângulo qualquer no papelão e trace uma das medianas. Com o auxílio da régua encontre o valor do comprimento dessa mediana.

3.2.2 Atividades Envolvendo o Baricentro

Para a realização das atividades envolvendo o baricentro, os alunos deverão formar no mínimo sete equipes e as equipes deverão ter os materiais relacionados abaixo.

Materiais necessários para se realizar as atividades:

- Caixas de Papelão ou material similar; Régua; Tesoura; Barbante ou Linha; Lápis; Caneta; Borracha e um objeto para servir como peso (Ex.: borracha, chave, moeda,...)

Atividade 03

Questão 01 - Cada equipe deverá desenhar no papelão o triângulo que foi designado. Relação das equipes com o triângulo a ser construído:

- **Equipe 01:** Triângulo Equilátero;
- **Equipe 02:** Triângulo Isósceles e Acutângulo;
- **Equipe 03:** Triângulo Isósceles e Obtusângulo;
- **Equipe 04:** Triângulo Escaleno e Acutângulo;
- **Equipe 05:** Triângulo Escaleno e Obtusângulo;
- **Equipe 06:** Triângulo Retângulo e Isósceles;
- **Equipe 07:** Triângulo Retângulo e Escaleno;

As equipes deverão seguir passo a passo as informações abaixo.

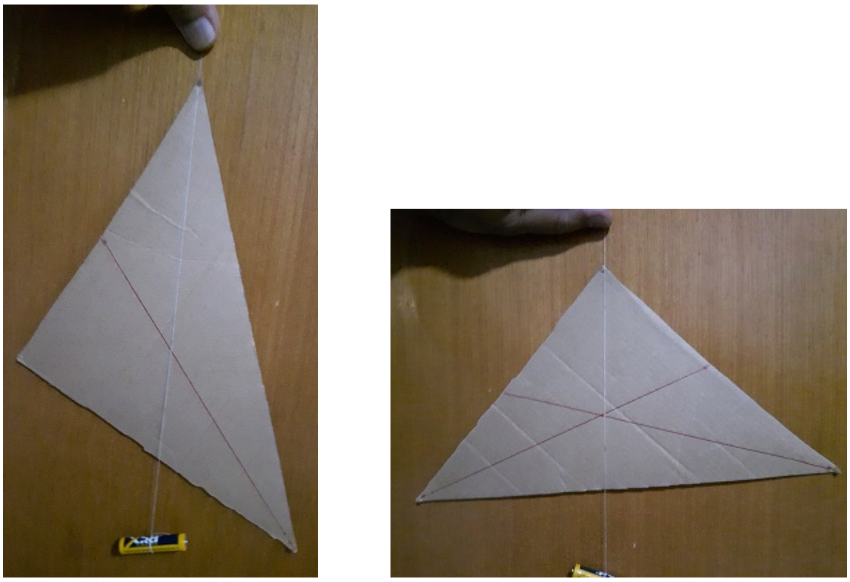
1^o **passo:** Traçar o triângulo no papelão com o auxílio da régua (de preferência com alguns lados maiores que $15\,cm$).

2^o **passo:** Depois de traçado o triângulo, cortar o papelão nas linhas traçadas do triângulo e fazer um furo logo abaixo dos três vértices.

3^o **passo:** Passar a linha (ou barbante) pelo furo feito abaixo do vértice de modo a ficar preso no vértice. Amarrar um peso na extremidade da linha (ou barbante) abaixo do vértice e na outra extremidade acima do vértice segurar com os dedos próximos a uma parede, conforme a $Figura\, 3.51$.

Figura 3.51: Procurando traçar o segmento de reta que contém o Baricentro do Triângulo

4^o **passo:** Repetir o procedimento do 3^o **passo** para os outros dois vértices. Ver $Figura$ 3.52 (a) e (b).



(a) (b)

Figura 3.52: Procurando traçar os segmentos de reta que contém o Baricentro do Triângulo

5^o **passo:** Com os procedimentos realizados nos passos anteriores, traçamos os três segmentos de reta que contém o Baricentro, logo, a intersecção entre eles será o ponto de equilíbrio do triângulo, ou seja, o Baricentro do triângulo. Ver $Figura\,3.53$.

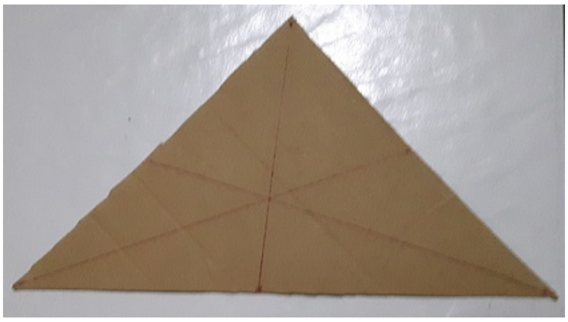


Figura 3.53: Triângulo com os três segmentos de reta traçados e o Baricentro

6^o **passo:** Com o Baricentro encontrado podemos verificar se realmente é o ponto de equilíbrio do triângulo, tentando equilibrá-lo na ponta do dedo e/ou na ponta de uma caneta. Ver $Figura\,3.54$ (a) e (b) e $Figura\,3.55$ (a), (b) e (c).

(a) (b)

Figura 3.54: Triângulo equilibrado com o dedo pelo ponto do Baricentro do Triângulo

(a) (b) (c)

Figura 3.55: Triângulo equilibrado com a caneta pelo ponto do Baricentro do Triângulo

Questão 02 - Cada equipe deverá desenhar no papelão um polígono convexo conforme designado.

Relação das equipes com o polígono a ser construído:

- **Equipe 01:** Retângulo;
- **Equipe 02:** Quadrado;
- **Equipe 03:** Quadrilátero qualquer sem ser retângulo;
- **Equipe 04:** Pentágono;
- **Equipe 05:** Hexágono;
- **Equipe 06:** Heptágono;
- **Equipe 07:** Octógono.

Repetir todo o procedimento realizado na questão anterior para encontrar o ponto de equilíbrio, ou seja, o ponto do Baricentro dos polígonos convexos de cada equipe.

Essas atividades realizadas pelos alunos em equipe, irão proprocionar a eles um melhor entendimento do que seja Baricentro e uma melhor compreensão do significado e da importância do Baricentro dos polígonos. Também, vão aprender que os outros polígonos diferentes do triângulo possuem Baricentro.

3.2.3 Outras Atividades Envolvendo o Baricentro

Agora vamos apresentar algumas atividades elaboradas por outros autores que poderão contribuir muito no nosso trabalho em sala de aula.

Atividade 04

Essa atividade foi elaborada por Raphael[3] que se encontra na Revista do professor de Matemática em[23].

Material necessário

Caixas de papelão (grosso), régua, tesoura, barbante, um prego na parede, uma chave de fenda.

Descrição da atividade

1. O problema a ser apresentado é o de encontrar o centro de massa de figuras planas (polígonos). Pode-se começar com uma régua (retangular), desafiando os alunos a equilibrarem a régua na ponta de um dedo e explicando que o ponto onde se coloca o dedo é o centro de massa. Como achar esse ponto numa placa poligonal qualquer?

2. Os alunos, divididos em grupos, devem cortar as placas de papelão.

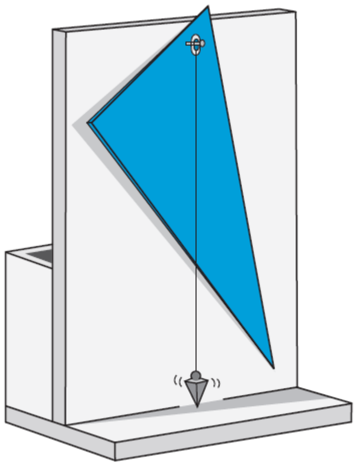
Várias figuras serão cortadas no papelão; sugerimos, para cada grupo, ao menos um retângulo, triângulos variados (ao menos um isósceles e um escaleno), um polígono irregular de quatro ou cinco lados. As figuras não devem ter menos que 200 centímetros quadrados. É interessante que os grupos tenham figuras diferentes, sobretudo o polígono irregular[4].

[3]Deborah Martins Raphael é a autora dessa atividade, Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade de São Paulo (1979), mestrado em Matemática pela Universidade de São Paulo (1985) e doutorado em Matemática - Universite de Paris VII - Universite Denis Diderot (1995). Atualmente é professora da Universidade de São Paulo, atuando principalmente na divulgação científica. Deborah Raphael faz parte do grupo de professores responsáveis pela Matemateca/IME/USP http://matemateca.incubadora.fapesp.br matemateca@ime.usp.br

[4]Polígono irregular é aquele que pelo menos dois de seus lados têm medidas diferentes e/ou pelo menos dois de seus ângulos internos têm medidas diferentes.

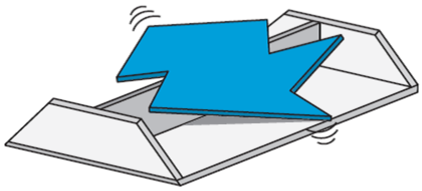
3. São propostas duas maneiras de achar o centro de massa de uma placa, usando propriedades físicas.

i) Pendurando a placa em um prego, o centro de massa está na reta perpendicular ao solo que passa pelo prego. Fazendo um pequeno furo perto da borda da figura plana, pode-se "pendurá-la" no prego (ela deve ficar solta, girando livremente em torno do prego). Amarra-se em seguida um peso ao barbante (um fio de prumo). Fazendo uma argolinha na ponta livre do barbante e pendurando no prego, o barbante fica esticado em frente à placa. O centro de massa está na reta indicada pelo barbante (marcar na figura essa reta).



Fazendo outro furinho na figura e repetindo o procedimento, encontramos outra reta. O centro de massa é a intersecção das duas retas.

ii) A placa fica em equilíbrio sobre uma reta se o centro de massa da placa estiver sobre a reta. Pode-se utilizar um batente de janela ou uma ripa de madeira ou ainda um perfil de metal: a ideia é ter uma "régua" em cima da qual vamos equilibrar a placa (a face na qual a placa se equilibra deve ter não mais que $3\,mm$).

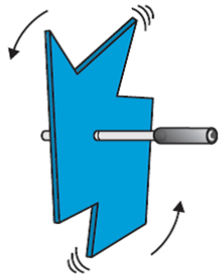


Colocando a placa sobre a régua, o equilíbrio é alcançado quando o centro de massa da placa estiver sobre a reta. Traçamos na placa a reta e repetimos o procedimento buscando outra reta. A intersecção das duas retas novamente é o centro de massa.

4. Cada grupo escolhe uma placa, determina o centro de massa e o marca. Faz também outras marcas (usando cores diferentes) para confundir a outra equipe. As placas são trocadas e o objetivo é descobrir qual das marcas está sobre o centro de massa. Para isso sugerimos utilizar duas propriedades físicas.

a) Se fizermos a placa girar sobre a mesa, ela sempre "tenta" girar em torno do seu centro de massa.

b) Fazendo um furo na marca onde deve estar o centro de massa e inserindo a chave de fenda no furo, seguramos a chave e giramos a placa (mantendo a placa perpendicular ao solo). Se o furo estiver realmente no centro de massa, a placa gira livremente, sem solavanco (colocando a chave fora do centro de massa e fazendo girar, dá para "sentir" a diferença).



Um desafio interessante é pedir aos alunos que construam uma placa cujo centro de massa esteja fora da figura. Num primeiro momento podem achar isso impossível. Formatos como “lua crescente” ou um bumerangue têm essa propriedade.

Tendo feito essas experiências, é mais fácil entender por que o baricentro é importante. Fica mais claro que esse ponto é fundamental no estudo do equilíbrio e do movimento. É natural que os matemáticos tentem determiná-lo! (RAPHAEL, 2007, p.34 e 35).[23]

Atividade 05

Essa atividade foi elaborada por Leonardo Barichello que se encontra no Artigo guia-baricentro.[4]

Material necessário:

Caixas de papelão (grosso), Régua, Tesoura, Linha ou barbante, Lápis, Caneta, Borracha

Descrição da atividade

Um método prático bastante simples para determinar o centro de massa de um objeto plano, ou seja, com duas dimensões, é o seguinte:

1) prenda um fio de prumo em um ponto qualquer do objeto;

2) segure o objeto na vertical, de modo que o fio de prumo fique rente a sua superfície;

3) marque no objeto a reta sugerida pelo fio de prumo assim que ele se estabilizar;

4) repita o mesmo procedimento pendendo o fio de prumo em um ponto diferente do objeto obtendo uma segunda reta a superfície do objeto;

5) o ponto de cruzamento das duas retas é o centro de massa, ou baricentro, do objeto.

Esse método vale para qualquer objeto plano, seja ele um triângulo, um polígono qualquer ou mesmo uma forma indeterminada. Note que, neste método, não é necessário traçar medianas, sequer é necessário que o objeto seja um triângulo, e os materiais necessários são bastante simples.
Professor, você pode fazer com seus alunos uma atividade bastante simples usando os dois métodos: peça que cada aluno faça um triângulo com algum material mais pesado do que papel e depois determinem o baricentro pelos dois métodos (das medianas e com o fio de prumo). Eles perceberão que ambos resultam no mesmo ponto. Para finalizar, peça a eles que façam um furo pequeno neste ponto e passem um cordão para tentar equilibrar o triângulo. Provavelmente eles ficarão surpresos com o resultado!

Capítulo 4

Considerações Finais

Diante do exposto conclui-se que dentro do aspecto epistemológico, a geometria ainda é incipiente no ensino médio, especialmente o estudo do baricentro, tão importante na física, na engenharia e em diversas áreas do conhecimento.
Desde o tempo de Arquimedes que o baricentro vem sendo utilizado e ainda não atingiu seu potencial como deveria. No ensino médio, sua importância é subestimada, pois o mesmo é utilizado potencialmente para cálculo de suas coordenadas e se limita ao triângulo, muitas vezes sem nenhum teor Físico. Os cálculos do baricentro na escola nem sempre são realizados e limitam-se a conceitos, e ainda não há uma interseção entre as diversas áreas do conhecimento. No aspecto cognitivo, os cálculos do baricentro são superficiais e há uma grande dificuldade de entendimento por parte dos alunos, sobretudo como figura geométrica, ou um corpo, talvez pela forma didática que lhe é apresentado. Na maioria dos livros de matemática do 3º ano do ensino médio, o baricentro não é tratado como centro de gravidade e nem centro de massa, embora estudar o centro de gravidade seja de uma importância ímpar.
Constatou-se ao longo do estudo que o ensino didático do baricentro tem sido subestimado pela maioria. Comprovou-se que a utilização dos cálculos (que parece ser a dificuldade dos alunos) não é a única maneira que se tem para encontrar o ponto do baricentro, como também que não é só o triângulo que possui o baricentro, pois podemos e devemos encontrar o ponto do baricentro em diversos polígonos. Recomendaram-se algumas formas didáticas de ensino do baricentro, e a real necessidade de criarem-se estilos didáticos de ensinos motivacionais que permeiem a teoria e a prática concomitantemente.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, Marcos Paulo Ferreira de. - vídeo-aula - Geometria - Sobre o encontro das medianas de um triângulo -Aula 32 - youtube - disponível em https://www.youtube.com/watch?v=cmEkvFvqxrQ&feature=youtu.be Acesso em 12/12/2015.

[2] ASSIS, André Koch Torres. Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca. Apeiron Montreal. Montreal, Quebec H2W 2B2 Canadá. 1ª Edição, 2008.

[3] BARBOSA, J. L. M. - Geometria Euclidiana Plana, Sociedade Brasileira de Matemática.. SBM, 2004.

[4] BARICHELLO, Leonardo. Artigo guia-baricentro.pdf - disponível em http://m3.ime.unicamp.br/dl/1IMT7SKswNQ_MDA_4a33d_ Acesso em 20/02/2016.

[5] BOYER, Carl Benjamin, 1906 - História da Matemática; Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[6] BUCCHI, Paulo. Curso prático de Matemática Vol. 3, Ensino Médio. - 1ª Edição - São Paulo - Moderna, 1998.

[7] CARVALHO, Benjamin de A. Desenho Geométrico. 3ª Edição. reimp. São Paulo: Ed. Ao Livro Técnico, 1988. .

[8] CONEXÕES com a matemática Vol. 3, Ensino Médio. / organizadora Editora Moderna; obra coletiva, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fábio Martins de Leonardo. - 2ª Edição - São Paulo - Moderna, 2013.

[9] COUTINHO, Lázaro. Convite às Geometrias Não-Euclidianas. Rio de Janeiro, 2ª Edição. Interciência, 2001.

[10] D'AMBROSIO, Ubiratan. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - TEORIA À PRÁTICA - Síntese - disponível em http://docplayer.com.br/7886621-Ubiratan-d-ambrosio-educacao-matematica-teoria-a-pratica-sintese.html Acesso em 22/01/2016.

[11] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações - Vol. 3, Ensino Médio. - 2ª Edição - São Paulo - Ática, 2013.

[12] DOCA,Ricardo Helou, Guater José Biscuola, Newton Villas Bôas. Física - Vol. 1, Ensino Médio. - 1ª Edição - São Paulo - Saraiva, 2010.

[13] DOLCE, O.. Fundamentos de Matemática Elementar. 9 ed. [S.l.]: Atual, 2013.

[14] FRANCO, V.S.; THOMAS, M.L. Geometria não euclidiana/Geometria Esférica. 2011. disponível em:http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf Acesso em 10/01/2016.

[15] IEZZI,Gelson, Osvaldo Dolce, Antonio Machado. - Matemática e Realidade: 7ª série. 4 ed. reform. - São Paulo: Atual, 2000.

[16] KIMBERLING, Clark. Encyclopedia of Triangle Centers - ETC - disponível em http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html Acesso em 21/01/2016.

[17] LIMA, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio - Vol. 2. - Rio de Janeiro - COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA - SBM, 1999.

[18] MUNIZ NETO, A. C. (2012). Tópicos de Matemática Elementar. Vol. 2. Geometria Euclidiana Plana. Coleção Professor de Matemática, SBM. Rio de Janeiro.

[19] O Baricentro da Mente - disponível em http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/04/demonstracao-da-formula-para-as.html Acesso em 12/12/2015.

[20] PAIVA, Manoel. Matemática Vol. 3, Ensino Médio. - 2ª Edição - São Paulo - Moderna, 2013.

[21] PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática Vol. 3, Ensino Médio. - 2ª Edição - São Paulo - Moderna Plus, 2010.

[22] PORTOPÉDIA, Baricentro ou Centro de Gravidade. 2015. Disponível em https://portogente.com.br/portopedia/baricentro-ou-centro-de-gravidade-84025. Acesso em 21/01/2016.

[23] RAPHAEL, D. M., Experiências com o Baricentro. Revista do Professor de Matemática, v. 63, p. 33, 2007 - disponível em http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/baricentro Acesso em 18/12/2015.

[24] ROSA, Guilherme Miguel - vídeo-aula Geometria Analítica – Ponto Médio e Baricentro - Youtube - disponível em https://www.youtube.com/watch?v=9Cddra1BYq8 Acesso em 20/12/2015.

[25] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática Vol. 3, Ensino Médio. - 2ª Edição - São Paulo - FTD, 2013.

[26] TEIXEIRA, Mariane Mendes. "Centro de massa"; Brasil Escola. Disponível em http://brasilescola.uol.com.br/fisica/centro-massa.htm Acesso em 05 de marco de 2016.

[27] WAGNER, Eduardo - vídeoaulas - Vídeo I: Lugares Geométricos Básicos I - PROFMAT SBM. 2013 - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma13_-_geometria/Lugares_Geometricos_Basicos_I.mp4 Acesso em 06/10/2015.

[28] WAGNER, Eduardo - vídeoaulas - Vídeo I: Paralelismo - PROFMAT SBM. 2013 - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma13_-_geometria/Paralelismo.mp4 Acesso em 06/10/2015.

[29] WAGNER, Eduardo - vídeoaulas - Vídeo I: Polígonos e Diagonais - PROFMAT SBM. 2013 - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma13_-_geometria/Poligonos_e_Diagonais.mp4 Acesso em 06/10/2015.

[30] WAGNER, Eduardo - vídeoaulas - Vídeo II: Polígonos e Ângulos - PROFMAT SBM. 2013 - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma13_-_geometria/Poligonos_e_Angulos.mp4 Acesso em 06/10/2015.

[31] WAGNER, Eduardo - vídeoaulas - Vídeo II: Quadriláteros Notáveis II - PROFMAT SBM. 2013 - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma13_-_geometria/Quadrilateros_Notaveis_II.mp4 Acesso em Acesso em 07/10/2015.

[32] WAGNER, Eduardo - Vídeos Complementares -Paralelismo e Desigualdade Triangular- PROFMAT SBM. 2013 - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma13_-_geometria/videos_complementares/Paralelismo_e_Desigualdade_Triangular.mp4 Acesso em 06/10/2015.

[33] WAGNER, Eduardo - Vídeos Complementares - Polígonos e Congruência de Triângulos - PROFMAT SBM. 2013 - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma13_-_geometria/videos_complementares/Poligonos_e_Congruencia_de_Triangulos.mp4 Acesso em 07/10/2015.

[34] WAGNER, Eduardo - Vídeos Complementares - Proporcionalidade e Semelhança: Colinearidade e concorrência - PROFMAT SBM. 2013 - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma13_-_geometria/Proporcionalidade_e_Semelhanca_Colinearidade_e_concorrencia.mp4 Acesso em 08/10/2015.

[35] WAGNER, Eduardo - Vídeos Complementares - Quadriláteros Notáveis - PROFMAT SBM. 2013 - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/images/videos/ma13_-_geometria/videos_complementares/Quadrilateros_Notaveis.mp4 Acesso em 04/10/2015.

[36] WIKIPÉDIA - disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides Acesso em 03/06/2015.

[37] WIKIPÉDIA - disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Pol%C3%ADgono Acesso em 03/06/2015.