PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Luiz Gustavo Teixeira de Faria Zancanaro

Pirâmide de Pascal: Estudando Trinômios no Ensino Médio

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática (opção profissional).

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Co-orientador: Prof. Wilson Reis de Souza Neto

Rio de Janeiro

Março de 2016

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Luiz Gustavo T. F. Zancanaro

Pirâmide de Pascal: Estudando Trinômios no Ensino Médio

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Nicolau Corção Saldanha
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Wilson Reis de Souza Neto
Co-orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Marcos Craizer
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Christine Sertã Costa
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Ralph Costa Teixeira
Instituto de Matemática – UFF

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 02 de março de 2016

Luiz Gustavo Teixeira de Faria Zancanaro

Graduou-se em Matemática na UCB (Universidade Castelo Branco). Atua como professor do ensino fundamental na Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Zancanaro, Luiz Gustavo Teixeira de Faria

Pirâmide de Pascal: estudando trinômios no ensino médio / Luiz Gustavo Teixeira de Faria Zancanaro; orientador: Nicolau Saldanha; co-orientador: Wilson Reis. – 2016.

48 f.; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2016.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Pirâmides de Pascal. 3. Trinômios. 4. Polinômios. 5. Ensino médio. I. Saldanha, Nicolau. II. Reis, Wilson. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Dedico a todos os que me apoiaram,
em especial minha mãe, Nancy.

Agradecimentos

Ao meu orientador e ao meu co-orientador, Professor Nicolau e Professor Wilson, pela auxilio e orientação.

Aos professores que aceitaram participar da banca.

À minha mãe, Nancy, por ter me apoiado durante toda essa jornada.

Aos meus amigos, Sávio, Haroldo e Victor que fizeram companhia ao longo desses 2 anos de mestrado.

E a todos que fazem parte da minha vida.

Resumo

Zancanaro, Luiz Gustavo Teixeira de Faria; Saldanha, Nicolau Corção (Orientador); Souza Neto, Wilson Reis de (Co-orientador). **Pirâmide de Pascal: Estudando Trinômios no Ensino Médio.** Rio de Janeiro, 2016. 48p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem como principais objetivos desenvolver trinômios através da Pirâmide de Pascal, buscar propriedades na mesma, e elaborar um material com conteúdo focado no assunto para ser abordado no Ensino Médio.

Palavras-chave

Trinômios; Números trinomiais, Pirâmide de Pascal.

Abstract

Zancanaro, Luiz Gustavo Teixeira de Faria; Saldanha, Nicolau Corção (Advisor); Souza Neto, Wilson Reis de (Co-advisor). **Pascal´s pyramid: studying trinomials in high school**. Rio de Janeiro, 2016. 48p. MSc Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main aims of the dissertation are to study trinomials using Pascal`s pyramid, to search for properties of this pyramid and to produce material focused on this subject for use in high school.

Keywords

Trinomials; Trinomial numbers; Pascal´s pyramid.

Sumário

1
Introdução

O trabalho trata de um estudo feito pelo autor, que investigando os coeficientes de um trinômio, achou uma organização semelhante à encontrada para os coeficientes binomiais e, partindo dessa organização, buscou aplicações no cotidiano e em sala de aula.

O tema foi escolhido pela pouca presença de material abordando-o, diferente dos termos binomiais cuja a quantidade de informação é facilmente encontrada na coleção de professor da SBM e com o objetivo de aumentar a quantidade de informação sobre o assunto.

Começaremos pela apresentação de um algoritmo para o cálculo dos coeficientes de um trinômio, em seguida iremos associar os coeficientes as suas partes literais, para podermos fazer a demonstração do algoritmo, depois analisaremos a sobreposição dos coeficientes que foram gerados com o algoritmo, após a sobreposição estudaremos propriedades na estrutura formada pela sobreposição, então veremos algumas aplicações e finalmente generalizaremos o algoritmo.

2
Algoritmo para o cálculo dos coeficientes trinômios

Nesse capitulo iremos começar a organizar e somar os coeficientes do trinômio de grau 1 para gerar os coeficientes do trinômio de grau 2, com os coeficientes do trinômio de grau 2, gerar os coeficientes do trinômio de grau 3 e assim sucessivamente.

Vamos organizar os coeficientes de $(a + b + c)^1$ da seguinte forma.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

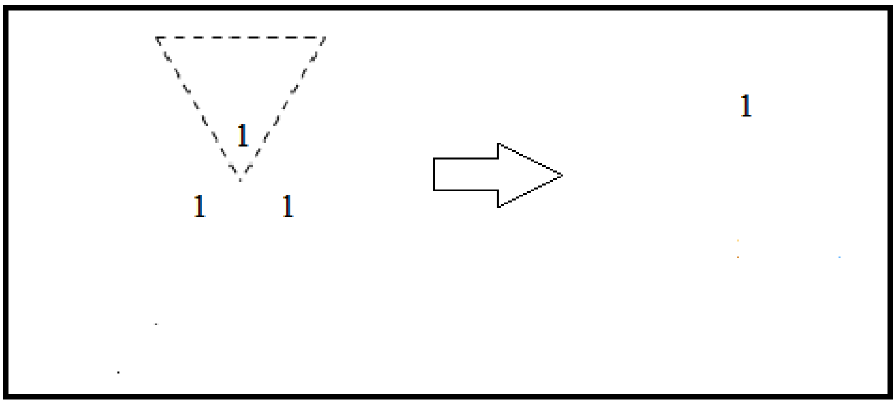
Fazendo a expansão de $(a + b + c)^2$ temos:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) =$$
$$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ac$$

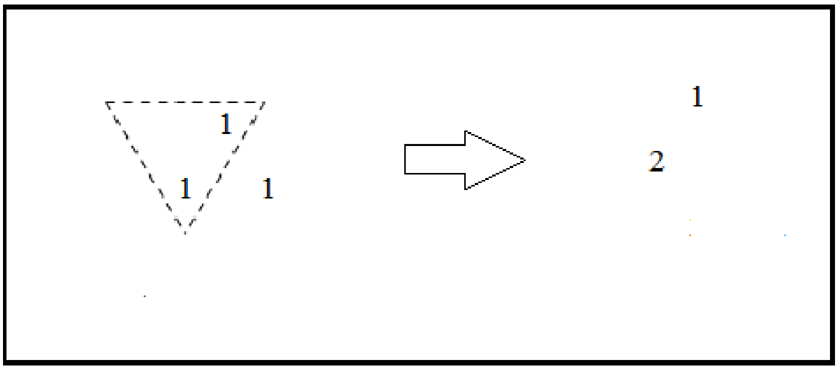
Partindo do triângulo que contém os expoentes de $(a + b + c)^1$ conseguiremos os coeficientes de $(a + b + c)^2$.

Usaremos um triângulo pontilhado para determinar quais coeficientes devem ser somados, com isso vamos formar os coeficientes do polinômio de um grau maior que o anterior.

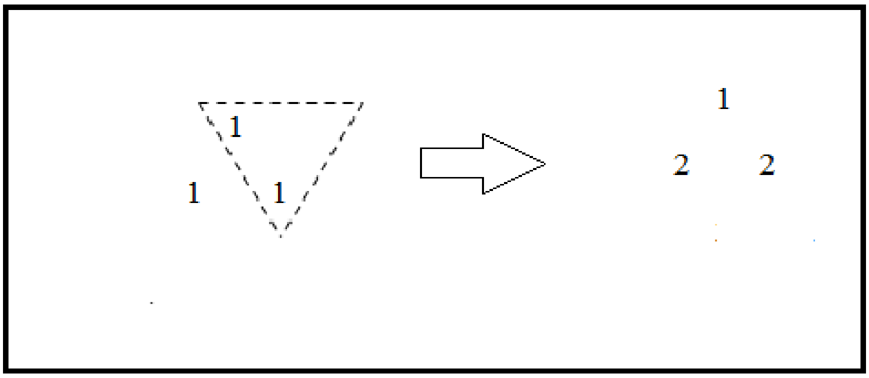
Posicionando o triângulo na quina e efetuando as somas obtemos 1.



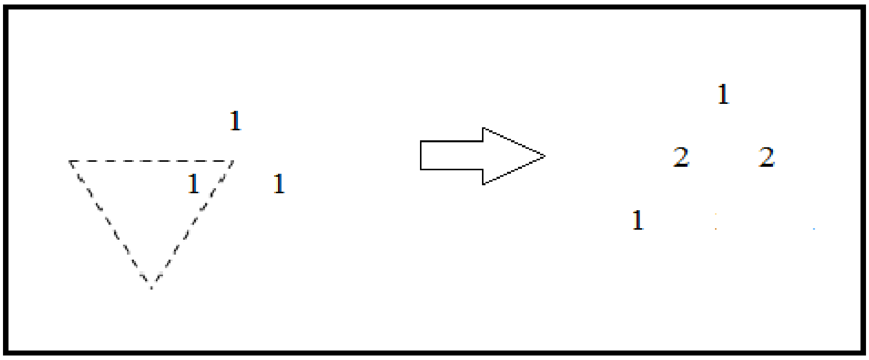
Deslocando o triângulo pontilhado obtemos os coeficientes 1 e 1, que somados resultam em 2.



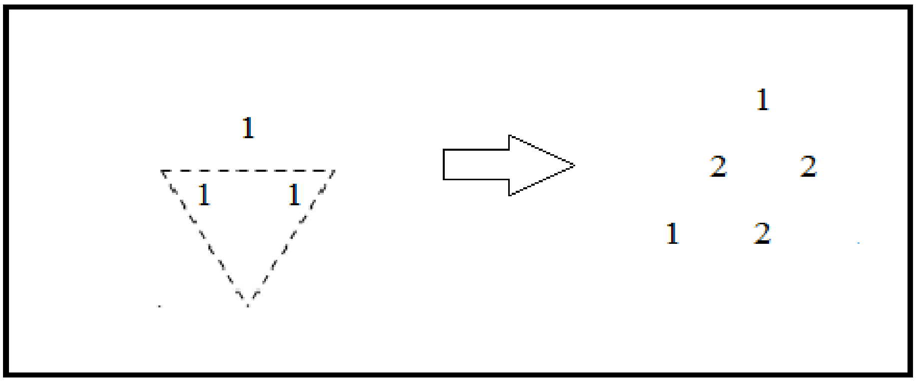
Deslocando o triângulo pontilhado obtemos os coeficientes 1 e 1, que somados resultam em 2.



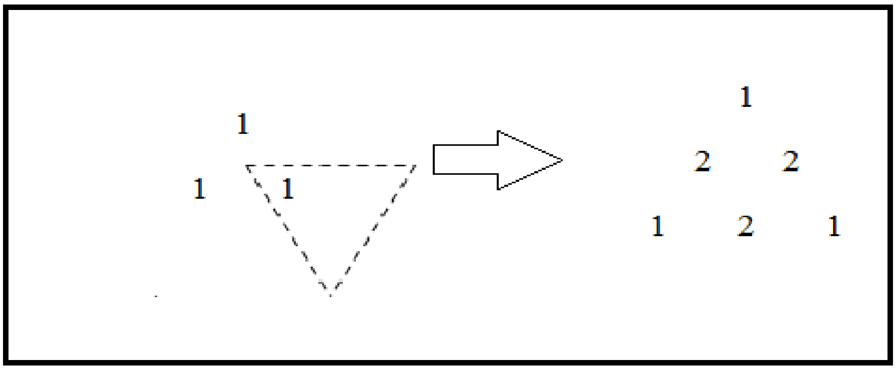
Deslocando o triângulo pontilhado obtemos somente o coeficiente 1, que resulta em 1.



Deslocando o triângulo pontilhado obtemos os coeficientes 1 e 1, que somados resultam em 2.



E por último temos a soma 1.



No triângulo formado podemos observar três coeficientes 1 e três coeficientes 2, os mesmos aparecem na expansão do trinômio.

Fazendo a expansão de $(a + b + c)^3$ temos:

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = \\
&= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = \\
&= a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ac
\end{aligned}
$$

Usaremos o triângulo que contém os coeficientes da expansão de $(a+b+c)^2$ para formar o triangulo com os coeficientes da expansão de $(a+b+c)^3$.

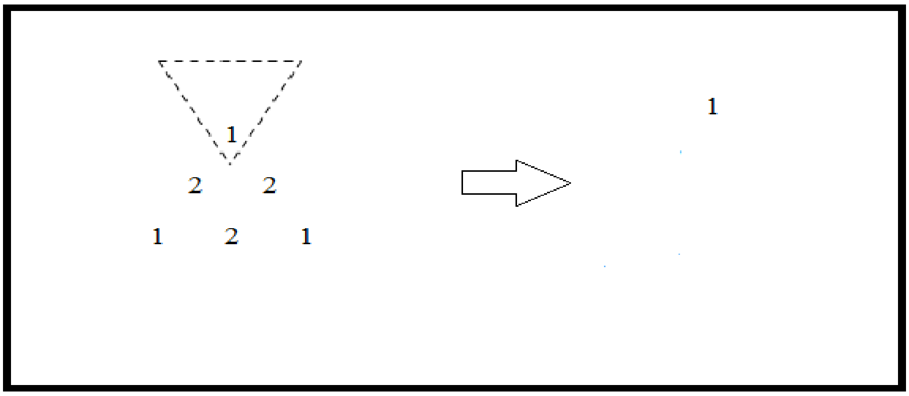
1

2 2

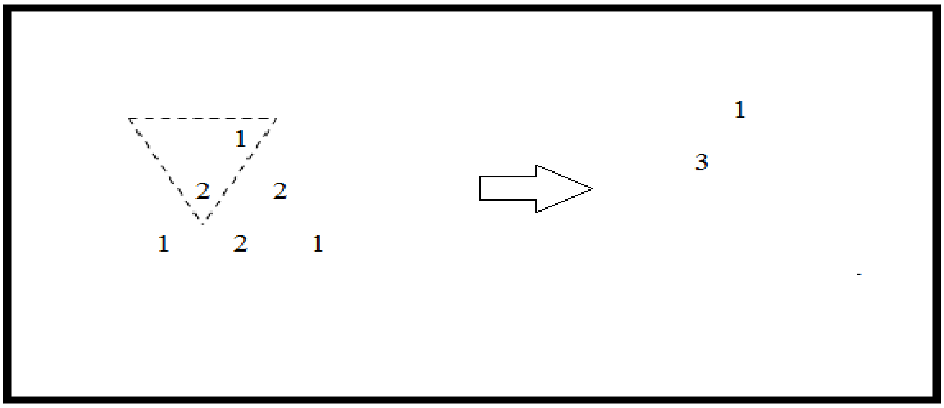
1 2 1

Começaremos pela quina e iremos fazer a mesma trajetória feita no caso anterior, sempre efetuando a soma dos coeficientes que aparecerem dentro do triângulo pontilhado.

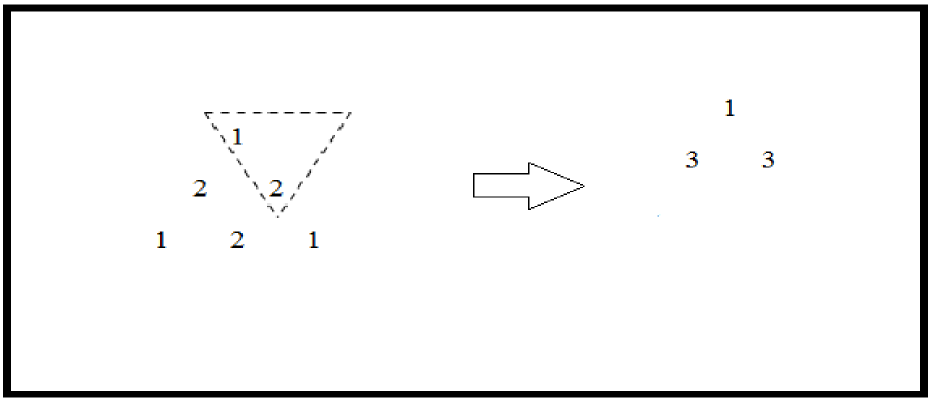
Temos aqui um coeficiente 1, que resulta em 1 no novo triângulo.



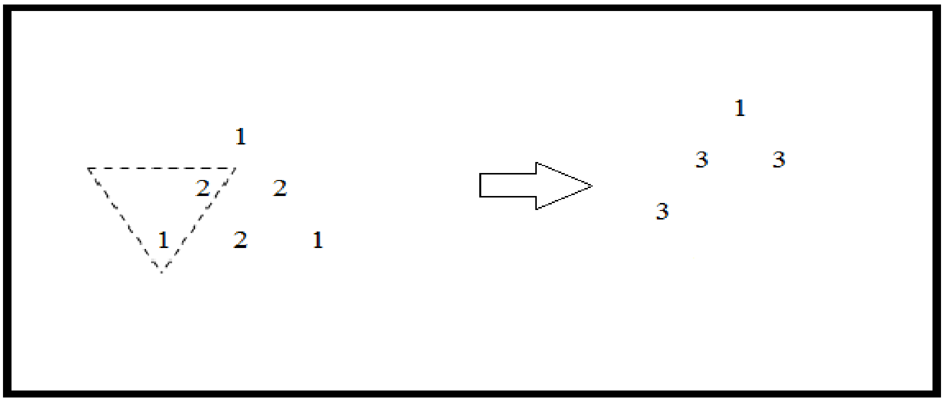
Dentro do triângulo pontilhado temos 1 e 2, somando obtemos 3.



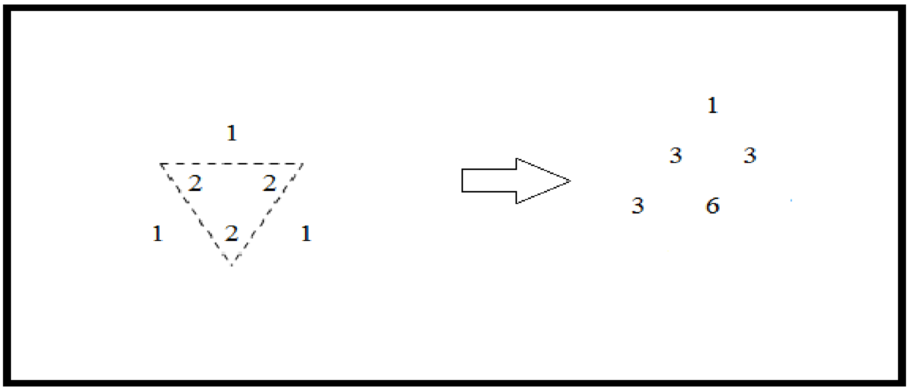
Temos novamente 1 e 2, a soma continua resultando 3



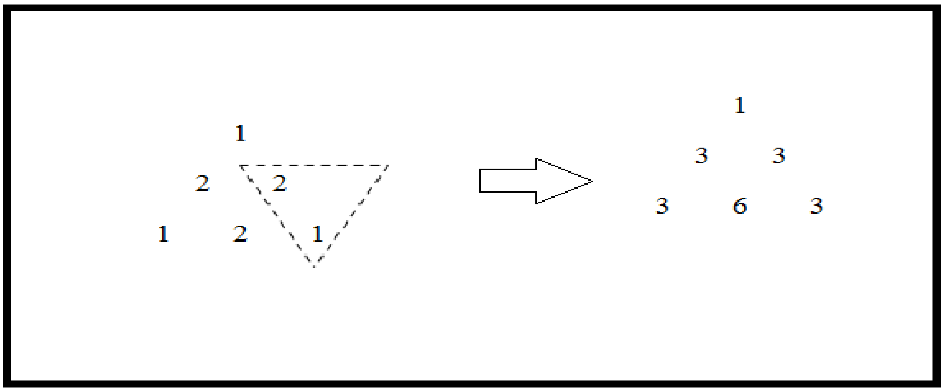
Novamente temos 1 e 2, o que resulta em 3.



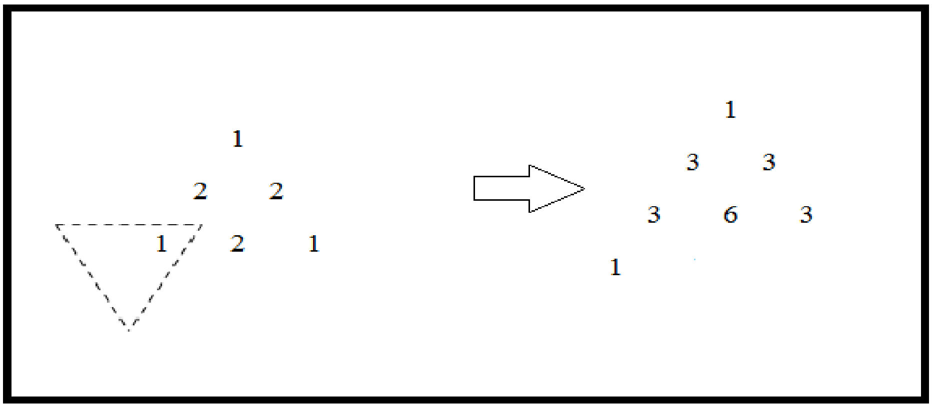
Dentro do triângulo pontilhado temos três coeficientes 2, que somados é igual a 6.



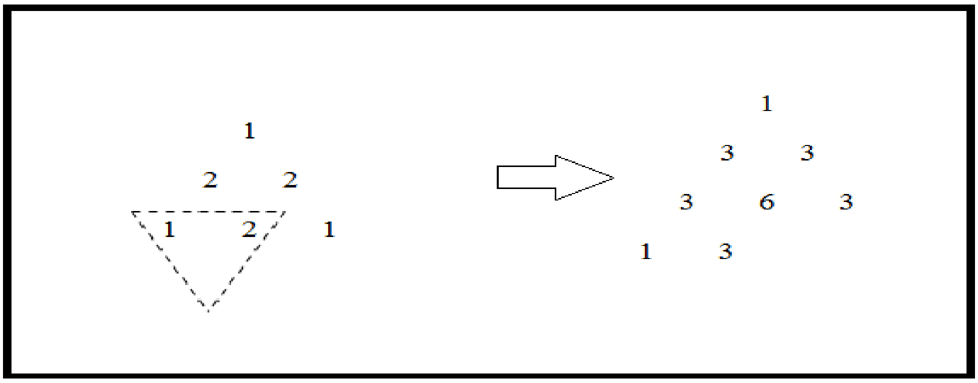
Aqui só temos os coeficientes 1 e 2, e o resultado da soma é 3.



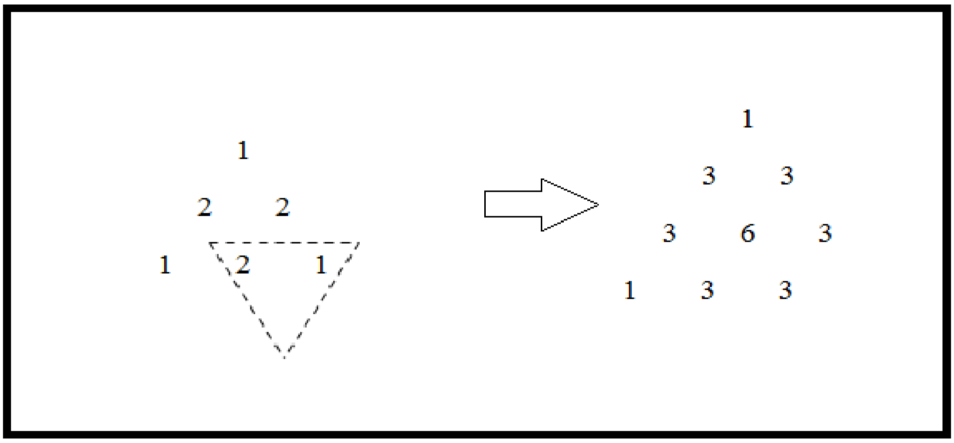
Agora o triângulo pontilhado se encontra em uma quina, o que resulta em um coeficiente 1.



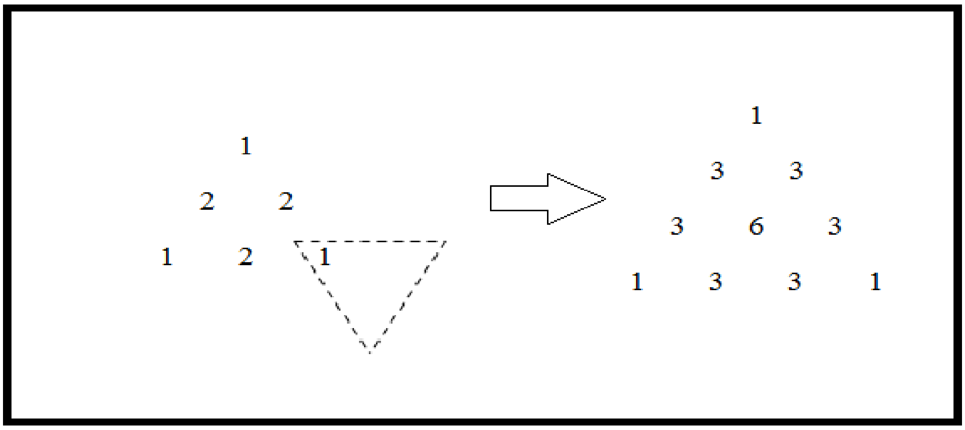
Temos 1 e 2, a soma resulta em 3.



Novamente uma soma 3.



Finalmente chegamos a outra quina, que resulta em 1.



Comparando os coeficientes da expansão com os coeficientes que apareceram nos triângulos percebemos que são os mesmos e em mesma quantidade, três coeficientes 1, seis coeficientes 3 e um coeficiente 6.

Fazendo para $(a+b+c)^4$:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4 + 4ac^3 + 6a^2c^2 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 12abc^2$$

Usando o mesmo processo podemos transformar o triângulo do trinômio de grau 3 para o trinômio de grau 4.

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 3 & & 6 & & 3 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 4 & & 4 & & & \\ & & 6 & & 12 & & 6 & & \\ & 4 & & 12 & & 12 & & 4 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}}$$

Esse processo pode ser usado para obter o triângulo com coeficientes da expansão de $(a+b+c)^1$ a partir do triângulo com os coeficientes da expansão $(a+b+c)^0$, esse triângulo possui somente o elemento 1.

$$\boxed{1}$$

3
Relacionando os coeficientes com as partes literais

Nesse capitulo desenvolveremos um método para relacionar os coeficientes encontrados por meio do algoritmo anterior com as partes literais do trinômio expandido.

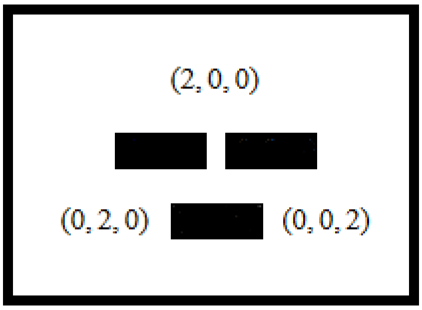
Observando os triângulos é possível perceber que os vértices são os coeficientes de um termo obtido com apenas uma das letras da parte literal. No caso de $(a+b+c)^2$ o coeficiente 1 sempre vai estar associado ao a^2, b^2 e c^2. Para facilitar a escrita iremos usar a seguinte notação: (v, d, e), que representa o coeficiente associado ao termo de parte literal $a^v b^d c^e$.

Usando a nova notação temos que $(3,2,4)$ estaria associado ao coeficiente de $a^3 b^2 c^4$.

Sendo assim o coeficiente 1 sempre seria associado a um elemento do tipo $(n, 0, 0)$ ou $(0, n, 0)$ ou $(0, 0, n)$. Com isso conseguimos um ponto de partida e um ponto de chegada para entender o que acontece nas arestas de cada triângulo.

Analisando o caso de $(a+b+c)^2$ sabemos que vamos ficar com as seguintes partes literais, $(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (1,1,0), (0,1,1)$ e $(1,0,1)$.

Já sabemos que os termos contendo apenas um 2 e dois 0s estão nos vértices do triângulo, nos resta descobrir onde estariam as partes literais contendo 1s e 0s.



A arrumação mais lógica seria colocar o $(1,1,0)$ no primeiro espaço, da esquerda para direita, na linha do meio, o $(1,0,1)$ no segundo espaço e o $(0,1,1)$ no espaço da última linha.

O que gera a seguinte organização.

$$\begin{array}{ccccc} & & (2,0,0) & & \\ & (1,1,0) & & (1,0,1) & \\ (0,2,0) & & (0,1,1) & & (0,0,2) \end{array}$$

Uma observação interessante é que a soma dos números que representam cada expoente sempre é 2. Isso faz sentido pois estamos trabalhando com a parte literal da expansão de $(a+b+c)^2$, que só vai gerar expoentes na parte literal cuja a soma é dois.

Vamos trabalhar com essa ideia para tentar encontrar cada parte literal no triângulo do trinômio de grau 3.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 3 & & 6 & & 3 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Já sabemos que os 1 vão ser $(3,0,0)$, $(0,3,0)$ e $(0,0,3)$, o 6 só pode ser $(1,1,1)$, pois sabemos que na expansão desse trinômio temos o $6abc$, agora precisamos descobrir qual parte literal de cada 3.

Fazendo o triângulo com as informações que já temos ficamos com algo dessa forma.

(3, 0, 0)

[redacted] [redacted]

[redacted] (1, 1, 1) [redacted]

(0, 3, 0) [redacted] [redacted] (0, 0, 3)

Observando a primeira e a terceira linha temos que o expoente do a que era *3* virou *1* e na quarta linha o expoente do passa a ser *0*, o que me faz acreditar que todas as vezes que descemos uma linha diminuímos *1* do expoente de a. Então podemos preencher o triângulo da seguinte forma:

Relacionando os coeficientes com as partes literais

(3, 0, 0)

(2,■,■) (2,■,■)

(1,■,■) (1, 1, 1) (1,■,■)

(0, 3, 0) (0,■,■) (0,■,■) (0, 0, 3)

Como a posição dos (*3,0,0*), (*0,3,0*) e (*0,0,3*)foi arbitrária, posso trocar de posição o (*3,0,0*) com o (*0,3,0*) e determinar que toda vez que descemos uma linha diminuímos 1 do expoente de b. Como os expoentes do a já estão definidos ficamos com:

(0, 3, 0)

(1, 2,■) (0, 2,■)

(2, 1,■) (1, 1, 1) (0, 1,■)

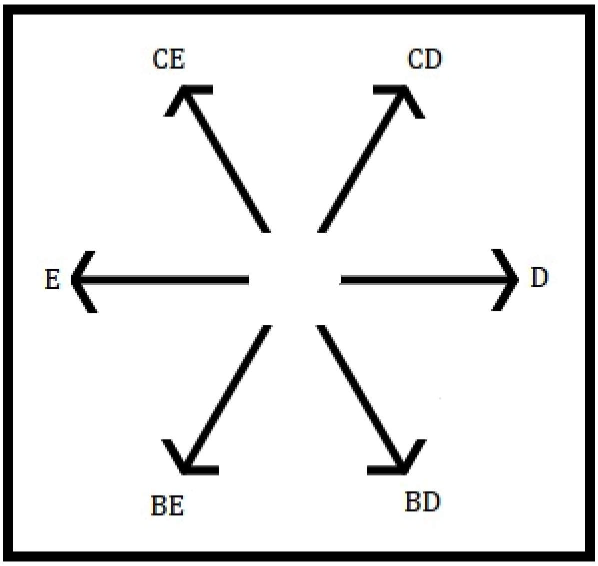
(3, 0, 0) (2, 0,■) (1, 0,■) (0, 0, 3)

Para descobrir os expoentes do c podemos pensar de forma análoga, ou lembrar que por estarmos trabalhando com a expansão do trinômio $(a+b+c)^3$ e a soma dos expoentes é sempre *3*. Com isso em mente e voltando para o triângulo onde a fica na primeira linha e usando a ideia da soma *3* ficamos com:

$$\begin{array}{c} (3,0,0) \\ (2,1,0) \quad (2,0,1) \\ (1,2,0) \quad (1,1,1) \quad (1,0,2) \\ (0,3,0) \quad (0,2,1) \quad (0,1,2) \quad (0,0,3) \end{array}$$

Pensando que cada (v,d,e) é uma casa, podemos assumir deslocamento entre casas adjacentes. Como já vimos um deslocamento de cima para baixo faz uma redução no expoente associado ao a, porém como a soma dos expoentes sempre deve ser *3*, temos que compensar outro expoente acrescentando *1*. Quando olhamos para a primeira casa no topo do triângulo observamos que o deslocamento para baixo em direção a esquerda faz aumentar o grau do expoente b e o movimento para baixo em direção a direita fez aumentar o expoente c. Também é possível notar um deslocamento na segunda linha da casa à esquerda para casa à direita onde há uma redução no expoente de b e um acréscimo no expoente de c.

Com essas informações podemos criar uma notação para esses deslocamentos. Tome C como deslocamento para cima, B como deslocamento para baixo, D deslocamento para direita e E como deslocamento para esquerda temos as seguintes possibilidades de deslocamento no triângulo. Não é possível fazer um deslocamento somente para cima e ou somente para baixo devido a configuração do triângulo.



Por exemplo, CE é um deslocamento para cima e para esquerda, então aumentaríamos 1 no a, manteríamos o b sem alteração e diminuiríamos 1 do c, usando a notação alteraríamos os expoentes da seguinte forma $(+1,0,-1)$.

Analogamente temos que CD seria $(+1,-1,0)$, D seria $(0,-1,+1)$, BD $(-1,0,+1)$, BE $(-1,+1,0)$ e E seria $(0,+1,-1)$.

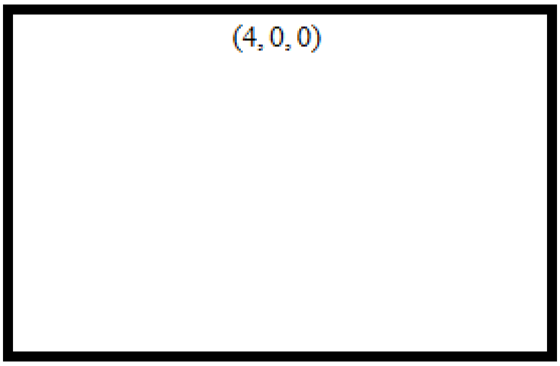
Podemos, partindo de um dos vértices, ser capazes de descobrir a parte literal de cada coeficiente de um triangulo executando os movimentos anteriores.

Usaremos o triangulo que representa os coeficientes do trinômio de grau 4.

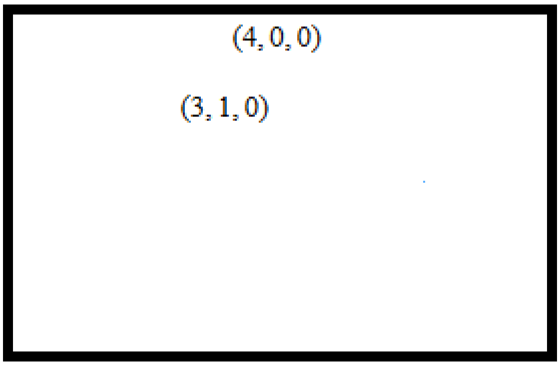
1
4 4
6 12 6
4 12 12 4
1 4 6 4 1

Como estamos com o triangulo que representa os coeficientes do trinômio do quarto grau, sabemos que os 1, estão associados a elementos do tipo

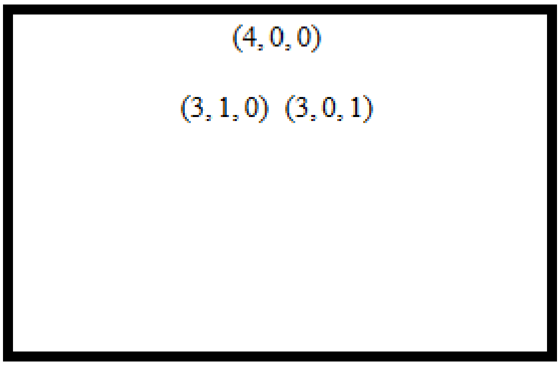
$(4,0,0), (0,4,0)$ ou $(0,0,4)$. Tomarei como elemento do topo o $(4,0,0)$. Para facilitar iremos sempre fazer os movimentos nos termos que forem aparecendo.



Com o movimento BE, $(-1 + 1,0)$, ficamos com $(3,1,0)$.



Agora o movimento D, $(0,-1,+1)$, gera o novo elemento, ficamos com $(3,0,1)$.



Podemos fazer esse processo até completar o triângulo ficando com os seguintes termos.

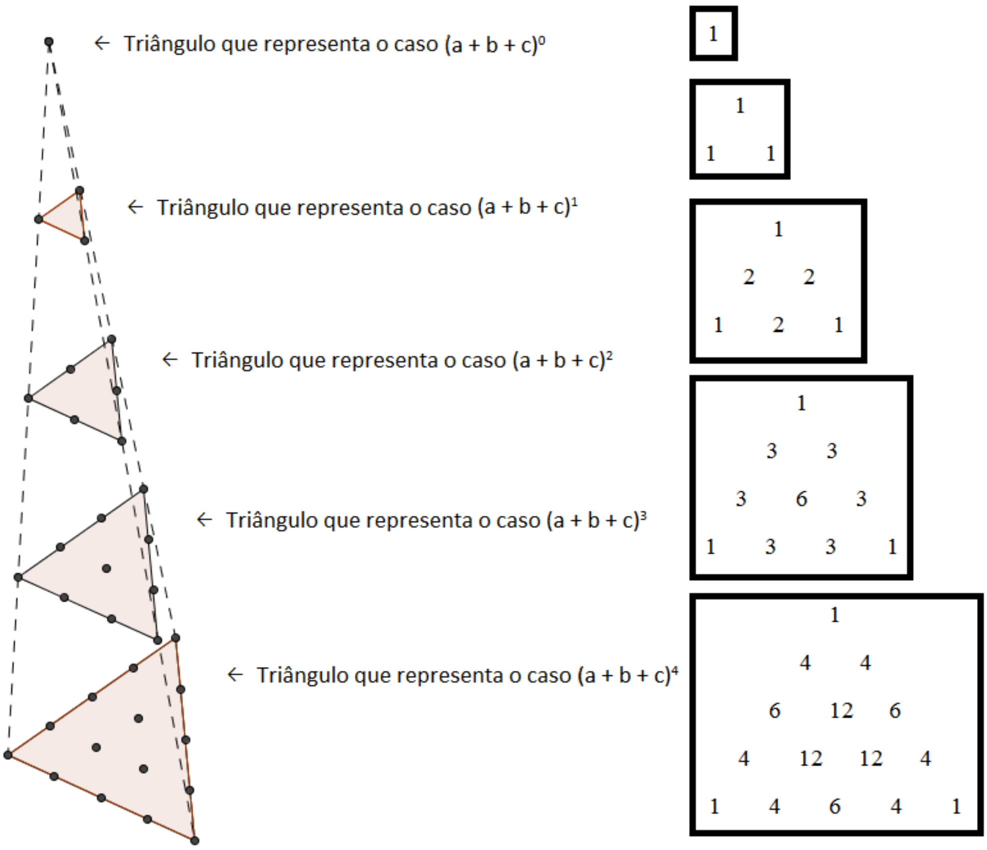
$$
\begin{array}{c}
(4,0,0) \\
(3,1,0)\ \ (3,0,1) \\
(2,2,0)\ \ (2,1,1)\ \ (2,0,2) \\
(1,3,0)\ \ (1,2,1)\ \ (1,1,2)\ \ (1,0,3) \\
(0,4,0)\ \ (0,3,1)\ \ (0,2,2)\ \ (0,1,3)\ \ (0,0,4)
\end{array}
$$

Esse triangulo obtido mostra todas as parte literais, agora basta comparar com o triangulo que contém os coeficientes para descobrir qual o coeficiente associado a cada parte literal.

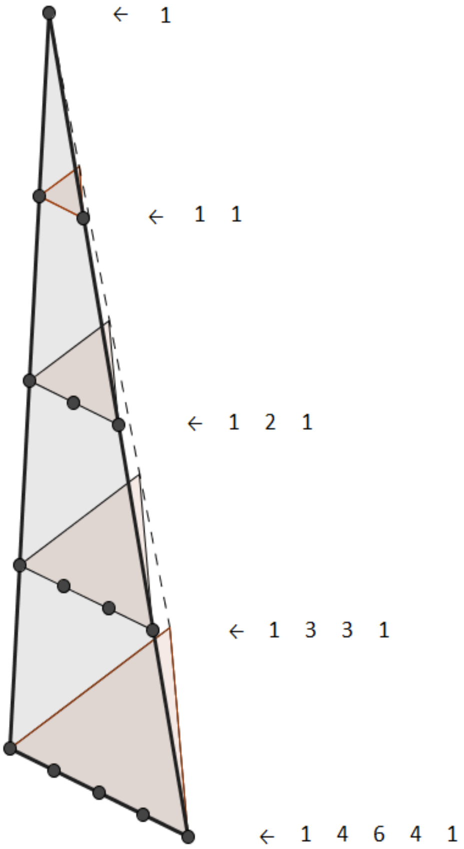
4
Formando a Pirâmide de Pascal

Construiremos uma pirâmide, com várias camadas, onde a camada $n = 0$ é formada pelos coeficientes de $(a + b + c)^0$, a camada $n = 1$ pelos coeficientes de $(a + b + c)^1$, e assim sucessivamente.

Sobrepondo os triângulos formados pelos coeficientes de cada potência expandida temos a Pirâmide de Pascal.



Se pegarmos uma das faces da Pirâmide formada podemos ver o Triângulo de Pascal. Uma explicação simples para isso é pensar que o polinômio $(a + b)^n$ é igual ao polinômio $(a + b + 0)^n$.



Na primeira linha temos o 1, único elemento do caso $(a+b+0)^0$, na segunda linha temos 1 e 1, que são elementos de um dos lados do triângulo formado pelos coeficientes de $(a+b+0)^1$, na terceira linha temos 1, 2 e 1, que são elementos de um dos lados do caso $(a+b+0)^2$, na quarta linha temos 1, 3, 3 e 1, que é um dos lados do triângulo $(a+b+0)^3$ e por último temos o lado do triângulo do caso $(a+b+0)^4$ que são os elementos 1, 4, 6, 4 e 1.

Essas cinco linhas são as primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

5
Demonstração do Algoritmo

Essa parte do trabalho é voltada para a demonstração do algoritmo, nela iremos usar a ideia de combinação para explicar como cada coeficiente pode ser calculado e efetuar a soma generalizando o algoritmo.

A notação utilizada para representar cada coeficiente é (v, d, e) onde cada uma das letras representa o expoente de a, b, c respectivamente. Com posse dessa notação como devemos transforma-la no coeficiente esperado?

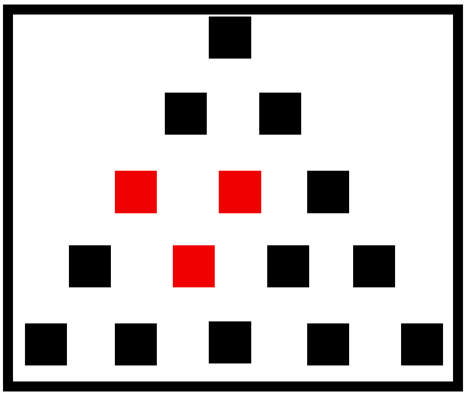
Vamos usar um caso simples para tentar entender o que acontece, sabemos que $(a + b + c)^4 = (a + b + c) * (a + b + c) * (a + b + c) * (a + b + c)$. Quando fazemos a multiplicação distributiva começamos a formar termos do tipo, __.__.__.__ , onde cada um desses espaços vai ser preenchido por uma letra do parênteses.

Para formar a^4, teríamos que pegar um a em cada parênteses, nesse caso só tivemos uma forma de escolher. Vamos tentar formar o termo a^2bc precisamos dois a, um b e um c, isso significa, queremos saber de quantas formas conseguimos fazer anagramas com essas letras, isso pode ser calculado da seguinte forma $4!/(2! * 1! * 1!)$ onde 4 é a quantidade de total de letras e $2, 1$ e 1 são as vezes que cada letra aparece repetida.

Então,

$$(v, d, e) = \frac{(v + d + e)!}{v!\, d!\, e!}$$

Para verificar que a propriedade de somar os coeficientes gera o coeficiente do triangulo seguinte devemos analisar quais termos queremos somar.



Se o coeficiente, em vermelho, que se encontra na aresta for $(v,\ d,\ e)$ então, o coeficiente, em vermelho, que está a sua direita é $(v, d-1, e+1)$ e o coeficiente, em vermelho, que está na linha de baixo é $(v-1, d, e+1)$.

Usaremos $v + d + e = n$, ficamos com:

$$(v,d,e) = \frac{n!}{v!\,d!\,e!}$$

$$(v,d-1,e+1) = \frac{n!}{v!\,(d-1)!\,(e+1)!}$$

$$(v-1,d,e+1) = \frac{n!}{(v-1)!\,d!\,(e+1)!}$$

Temos que a soma dos três termos pode ser escrita como,

$$\frac{n!}{v!\,d!\,e!} + \frac{n!}{v!\,(d-1)!\,(e+1)!} + \frac{n!}{(v-1)!\,d!\,(e+1)!} =$$

$$\frac{n!}{v(v-1)!\,d(d-1)!\,e!} + \frac{n!}{v(v-1)!\,(d-1)!\,(e+1)e!} + \frac{n!}{(v-1)!\,d(d-1)!\,(e+1)e!} =$$

$$\frac{n!\,(e+1) + n!\,(d) + n!\,(v)}{v(v-1)!\,d(d-1)!\,(e+1)e!} =$$

$$\frac{n!\,(e+1+d+v)}{v!\,d!\,(e+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{v!\,d!\,(e+1)!} = \frac{(n+1)!}{v!\,d!\,(e+1)!}$$

Esse termo é $(v,\ d,\ e+1)$, que é o coeficiente do triangulo de um grau maior do que os termos que foram somados anteriormente.

Então podemos dizer que,

$$(v,d,e)+(v,d-1,e+1)+(v-1,d,e+1)=(v,d,e+1)$$

O que é análogo a dizer,

$$(v,d,e-1)+(v,d-1,e)+(v-1,d,e)=(v,d,e)$$

Vamos testar o resultado obtido pela notação.

$$\begin{array}{c}
(3,0,0)\\
\boxed{(2,1,0)}\ \boxed{(2,0,1)}\\
(1,2,0)\ \ \boxed{(1,1,1)}\ \ (1,0,2)\\
(0,3,0)\ \ (0,2,1)\ \ (0,1,2)\ \ (0,0,3)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(4,0,0)\\
(3,1,0)\ \ (3,0,1)\\
(2,2,0)\ \boxed{(2,1,1)}\ (2,0,2)\\
(1,3,0)\ \ (1,2,1)\ \ (1,1,2)\ \ (1,0,3)\\
(0,4,0)\ \ (0,3,1)\ \ (0,2,2)\ \ (0,1,3)\ \ (0,0,4)
\end{array}$$

Já vimos que a soma dos três termos marcados no primeiro triângulo geram o termo marcado no segundo triângulo.

6
Outra forma de visualização dos triângulos

Nessa parte da dissertação iremos analisar uma outra maneira para formar os coeficientes e fazer a demonstração dessa novo método. Alguns dos resultados obtidos nesse capitulo serão usados posteriormente.

Vamos expandir o polinômio de grau 4 de uma forma inteligente para ser fácil a visualização do triângulos de coeficientes já apresentado.

Começamos fazendo:

$$(a + b + c)^4 = (a + (b + c))^4$$

Sabemos que a quinta linha do triangulo de pascal é 1 - 4 - 6 - 4 - 1, isso vai ajudar na expansão desse trinômio que foi transformado em um binômio.

Ficamos com:

$$1a^4(b + c)^0 + 4a^3(b+c)^1 + 6a^2(b + c)^2 + 4a^1(b+c)^3 + 1a^0(b + c)^4 =$$

$$1a^4 + 4a^3(b+c) + 6a^2(b^2 + 2bc + c^2) + 4a(b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3) + 1(b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4) =$$

$$\begin{array}{c} 1a^4 + \\ 4a^3b + 4a^3c + \\ 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + \\ 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3 + \\ 1b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + 1c^4 \end{array}$$

Com essa forma de pensar podemos fazer uma notação com somatórios para escrever todos os termos da expansão de grau genérico.

Tome $(a + b + c)^n = (a + (b + c))^n$, já sabemos escrever isso em forma de somatório, pois é um binômio de Newton.

$$\sum_{v+k=n} \binom{n}{v} a^v (b + c)^k$$

Onde k é índice do somatório. Podemos escrever $(b+c)^k$em forma de somatório, ficaríamos então com;

$$\sum_{v+k=n} \binom{n}{v} a^v \left(\sum_{d+e=k} \binom{k}{e} b^d c^e \right)$$

Substituindo k por $d+e$ e resolvendo a multiplicação temos;

$$\sum_{v+d+e=n} \binom{n}{v} \binom{d+e}{d} a^v b^d c^e$$

que é uma fórmula para encontrar qualquer termo de um trinômio.

7
Propriedades na Pirâmide de Pascal

Seguimos investigando e demonstrando quatro propriedades da Pirâmide de Pascal, inspiradas em resultados análogos sobre o Triângulo de Pascal. Essa lista certamente não é exaustiva mas é evidência suficiente da grande variedade de propriedades notáveis da Pirâmide de Pascal.

7.1
Soma dos termos de uma camada.

Tome $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ e n igual ao nível que desejamos somar, lembrando que começamos pelo nível 0, ficamos então com $(1 + 1 + 1)^n = 3^n$.

7.2
Cortes paralelos às faces.

Assim como o Triângulo de Pascal tem algumas propriedades a Pirâmide de Pascal também possuí propriedades.

Usando o somatório que vimos anteriormente.

$$\sum_{v+d+e=n} \binom{n}{v} \binom{d+e}{d} a^v b^d c^e$$

Quando olhamos para as faces da pirâmide, com exceção da base, temos o Triângulo de Pascal. Outra forma de vermos que isso é verdade é observando que em cada nível da Pirâmide o n aumenta uma unidade e, nessas faces, sempre um

$$v + d + e = n$$
$$v = 0$$

$$\sum_{v+d+e=n} \binom{n}{v} \binom{d+e}{d} a^v b^d c^e =$$

$$\sum_{d+e=n} \binom{n}{0} \binom{d+e}{d} a^0 b^d c^e =$$

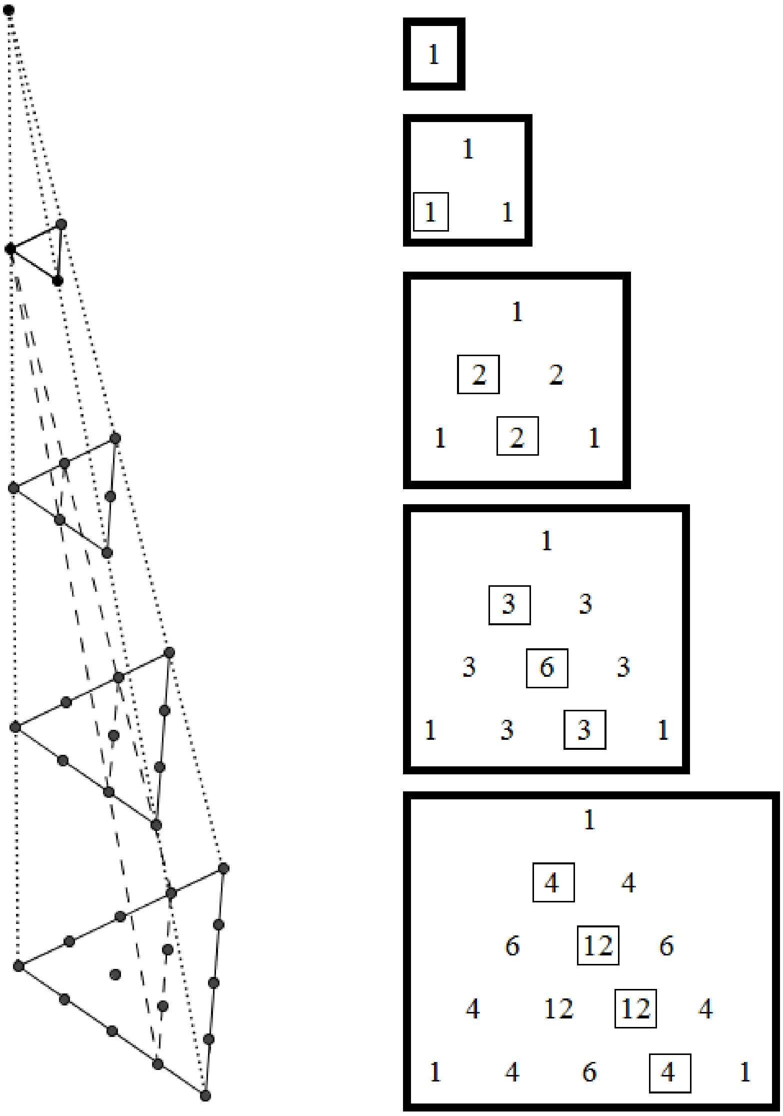
$$\sum_{d+e=n} \binom{n}{d} b^d c^e$$

dos expoentes vai ser igual a *0*.

Esse somatório é conhecido como generalização do Triângulo de Pascal para $(b + c)^n$.

Para $d = 0$ ou $e = 0$, os cálculos são análogos e chegaríamos a conclusões semelhantes.

No caso anterior estávamos estudando partes literais do tipo $a^v b^d c^e$ com pelo menos um dos expoentes, v, d ou e, sendo igual à 0. Agora vamos fazer um corte paralelo em que pelo menos um dos expoentes seja igual à 1.



Nesse caso estamos usando o $d = 1$, então ficamos com:

$$\binom{v+1+e}{v}\binom{1+e}{1} = \frac{(v+1+e)!}{(1+e)!\,v!} * \frac{(1+e)!}{1!\,e!} =$$

$$= \frac{(v+1+e)!}{v!\,e!} = \frac{(v+1+e)(v+e)!}{v!\,e!} = (v+1+e)\binom{v+e}{v} =$$

$$= n\binom{v+e}{v}$$

O que podemos pensar, para esse caso, é que temos o Triângulo de Pascal multiplicado pelo valor do nível.

Para resolver o qualquer corte basta desenvolver um dos binomiais que aparece em;

$$\sum_{v+d+e=n} \binom{n}{v}\binom{d+e}{d} a^v b^d c^e$$

como podemos trocar $\binom{d+e}{d}$ por $\binom{d+e}{e}$ sem perdas de generalidade, iremos sempre obter um triângulo de pascal multiplicado por um termo binomial expandido.

7.3
Método para escrever uma camada n

Olhando novamente para a fórmula generalizada e utilizando a ideia de que cortes paralelos às faces são momentos em que fixamos um dos expoentes podemos concluir que essas faces sempre serão o Triângulo de Pascal multiplicado por valores na diagonal do Triângulo de Pascal.

Essa propriedade faz com que tenhamos uma maneira muito rápida para conseguir os triângulos de grau elevado. Vamos calcular quais seriam os coeficientes do trinômio de grau 5.

Primeiro vamos fazer o triângulo de Pascal até a linha n = 5.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Iremos multiplicar cada uma das linhas desse triângulo por 1, 5, 10, 10, 5, 1 que é a expansão do binômio de mesmo grau que desejamos encontrar.

Ficaremos com:

					1					
				5		5				
			10		20		10			
		10		30		30		10		
	5		20		30		20		5	
1		5		10		10		5		1

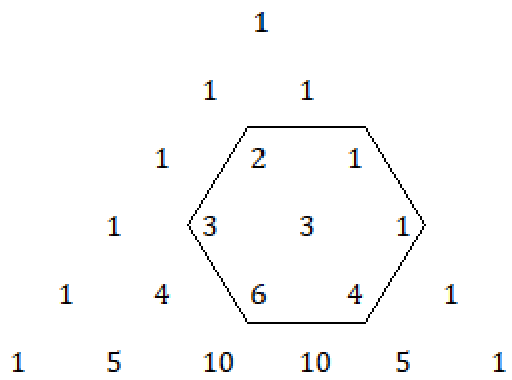
É fácil de perceber isso se olharmos um pouco melhor para os coeficientes em forma de somatório.

$$\sum_{v+k=n} \binom{n}{v} a^v \left(\sum_{d+e=k} \binom{k}{e} b^d c^e \right)$$

Se pensarmos que cada uma das linhas é um dos possíveis valores de v, temos que a primeira combinação do somatório seria a igual a cada um dos valores que estamos multiplicando cada linha e o segundo somatório seria a linha do Triângulo de Pascal que está sendo multiplicada.

7.4
Hexágono Interno a Pirâmide Pascal

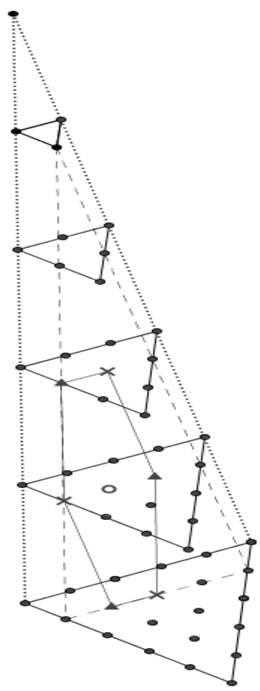
Outra propriedade que existe no Triângulo de Pascal é a multiplicação de vértices não consecutivos de um hexágono.



Depois de determinar o hexágono, no Triângulo de Pascal, podemos multiplicar os vértices não adjacentes para observar essa propriedade. Nesse caso ficamos com $2 * 1 * 6 \; = \; 12$ e $1 * 3 * 4 = 12$.

Isso funciona para o Triângulo de Pascal, logo funciona nas faces da Pirâmide de Pascal. A dúvida que nós resta é: será que isso vai funcionar em um dos cortes paralelos da Pirâmide?

Vamos partindo de um corte tentar obter quais seriam os coeficientes para fazer a multiplicação.



Aqui temos uma Pirâmide com um possível hexágono destacado. Já sabemos calcular o coeficientes marcados com triângulos e cruz, basta identificar quem eles são. No topo do hexágono temos $n = 3$, para a marcação do triângulo temos $v = 0, d = 2$ e $e = 1$, para a marcação de cruz temos, $v = 1, d = 1$ e $e = 1$, no meio do hexágono ficamos com $n = 4$ e, para as marcações do triangulo, temos $v = 2$, $d = 1$ e $e = 1$, e para a marcação de cruz temos $v = 0$, $d = 3$ e $e = 1$, por ultimo temos $n = 5$ e, para a marcação do triângulo, temos $v = 1$, $d = 3$ e $e = 1$ e para a marcação de cruz temos $v = 2$, $d = 2$ e $e = 1$. Observe que $e = 1$ em todos os pontos por estarmos usando um corte paralelo a face isso já era esperado. Por curiosidade vamos escrever qual o valor da marcação bola aberta para analisarmos futuramente $v = 1$, $d = 2$ e $e = 1$.

Calculando o valor de cada coeficiente, temos para as marcações de cruz:

$$(1,1,1) = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$$

$$(0,3,1) = \frac{4!}{0!\,3!\,1!} = 4$$

$$(2,2,1) = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$$

Cuja multiplicação é $6 * 4 * 30 = 720$.

E, para as marcações de triângulo, temos:

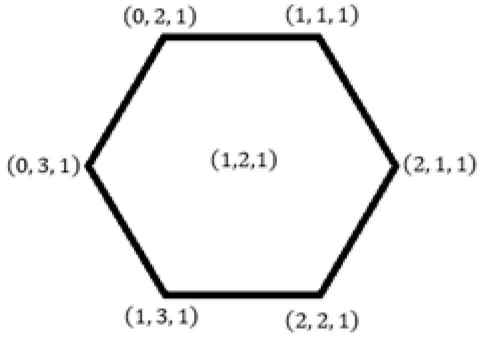
$$(0,2,1) = \frac{3!}{0!\,2!\,1!} = 3$$

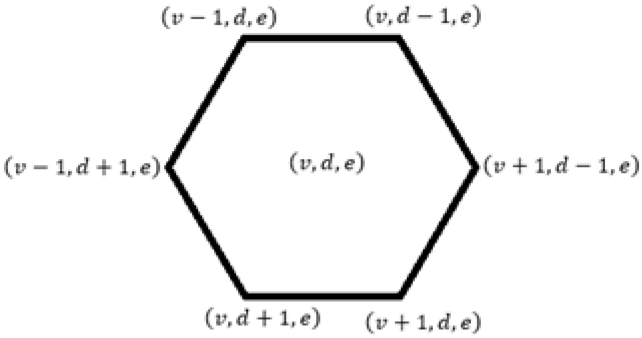
$$(2,1,1) = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$$

$$(1,3,1) = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20$$

Cuja multiplicação é $3 * 12 * 20 = 720$.

Fixando um termo central poderemos determinar os outros coeficientes em função dele. Com isso generalizaremos o que acontece quando formamos um hexágono no corte paralelo.





Comparando o termo central dos hexágonos com os vértices conseguimos escrever cada um dos termos, agora basta verificar se a igualdade da multiplicação dos termos não consecutivos é verdadeira.

$$(v-1,d,e)*(v+1,d-1,e)*(v,d+1,e)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(v-1)!\,d!\,e!}*\frac{n!}{(v+1)!\,(d-1)!\,e!}*\frac{(n+1)!}{v!\,(d+1)!\,e!}=$$

Organizando os denominadores temos:

$$=\frac{(n-1)!}{v!\,(d-1)!\,e!}*\frac{n!}{(v-1)!\,(d+1)!\,e!}*\frac{(n+1)!}{(v+1)!\,d!\,e!}=$$

$$=\ (v,d-1,e)*(v-1,d+1,e)*(v+1,d,e)$$

Temos então que a multiplicação de três termos não consecutivos é igual a multiplicação dos três termos restantes. Para outros cortes as contas são análogas.

Podemos generalizar essa propriedade para qualquer tamanho de hexágono, observe que fizemos um hexágono que os termos estavam adjacentes ao termo central, agora iremos tentar um hexágono que os termos estejam a uma mesma distância do termo central.

Para isso eu usarei de dois argumentos, o primeiro diz que cortes paralelos às faces da Pirâmide de Pascal sempre são um Triângulo de Pascal multiplicado por um binômio esse argumento já foi provado. O segundo é que podemos aumentar o tamanho do hexágono no Triângulo de Pascal.

Tome k como a quantidade de movimentos que fazemos entre os vértices adjacentes e $\binom{n}{p}$ como o termo central. Na linha superior do hexágono teremos $\binom{n-k}{p-k}$ e $\binom{n-k}{p}$, na linha do termo central temos $\binom{n}{p-k}$ e $\binom{n}{p+k}$, na última linha do hexágono temos $\binom{n+k}{p}$ e $\binom{n+k}{p+k}$.

$$\binom{n-k}{p-k} * \binom{n}{p+k} * \binom{n+k}{p} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{(p-k)!\,((n-k)-(p-k))!} * \frac{n!}{(p+k)!\,(n-(p+k))!} * \frac{(n+k)!}{p!\,((n+k)-p)!} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{p!\,(n-(p+k))!} * \frac{n!}{(p-k)!\,\big(n-(p-k)\big)!} * \frac{(n+k)!}{(p+k)!\,((n-k)-(p-k))!} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{p!\,((n-k)-p)!} * \frac{n!}{(p-k)!\,\big(n-(p-k)\big)!} * \frac{(n+k)!}{(p+k)!\,((n+k)-(p+k))!} =$$

$$= \binom{n-k}{p} * \binom{n}{p-k} * \binom{n+k}{p+k}$$

Como todo corte paralelo à face da Pirâmide de Pascal sempre é um Triangulo de Pascal multiplicado por um binômio. Como a linha com $\binom{n-k}{p-k}$ e $\binom{n-k}{p}$ foi multiplicada por um valor, a linha com $\binom{n}{p-k}$ e $\binom{n}{p+k}$ foi multiplicada por outro valor e por último a linha com $\binom{n+k}{p}$ e $\binom{n+k}{p+k}$ também foi multiplicada por um valor, o resultado da multiplicação continuará sendo o mesmo, já que pegamos um termo de cada linha.

8
Aplicações

Aplicação 1

Em um campeonato em que assumimos como resultado vitória, derrota e empate, quantas são as formas de chegar na nona rodada com 4 vitórias, 3 empate e 2 derrotas?

Esse é um problema de permutação que podemos resolver tentando descobrir quantos anagramas a palavra $vvvveeedd$ possui.

$$(4,3,2) = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$$

Por outro lado podemos pensar que cada rodada resultará em uma vitória (v) ou uma derrota (d) ou um empate (e). Ou seja, com o resultado da rodada o time aumentaria uma unidade em (v), (d) ou (e). Isso significa que se temos (v, d, e), então na rodada anterior estávamos com $(v-1, d, e)$ ou $(v, d-1, e)$ ou $(v, d, e-1)$. Implicando que a soma desses três termos é igual (v, d, e).

Agora iremos calcular todas as maneiras de chegar nas situações que podem levar a situação desejada $(4, 3, 2)$.

Com 3 vitórias, 3 derrotas e 2 empates temos:

$$(3,3,2) = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = 560$$

Com 4 vitórias, 2 derrotas e 2 empates temos:

$$(4,2,2) = \frac{8!}{4!\,2!\,2!} = 420$$

E com 4 vitórias, 2 derrotas e 1 empate temos:

$$(4,3,1) = \frac{8!}{4!\,3!\,1!} = 280$$

Agora somando *560 + 420 + 280 = 1260.* Esse fato foi usado para demonstrar a construção da Pirâmide de Pascal.

Uma extensão dessa aplicação seria se fossemos dotados da probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos, vitória, derrota e empate, com essa nova informação além de sabermos qual é a quantidade de formas que poderíamos chegar na nona rodada com 4 vitórias, 3 derrotas e 2 empates teríamos qual é a probabilidade de ocorrência dessa situação.

Assumiremos que a probabilidade de vitória é de 60%, derrota 25% e empate 15%. Já sabemos o coeficiente do termo $a^4b^3c^2$ é 1260, basta agora substituir a, b e c pelas probabilidades fornecidas.

$$1260 * a^4b^3c^2 =$$

$$1260 * (0{,}6)^4(0{,}25)^3(0{,}15)^2 =$$

$$0{,}05740875 \cong 5{,}7\%$$

Aplicação 2

Um professor quis saber qual era o maior coeficiente de $(2a + b + c)^8$.

Primeiro iremos construir o Triângulo de Pascal com os coeficientes de $(a + b + c)^8$.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 36 70 36 28 8 1

Multiplicando cada linha pelo elemento correspondente da última linha ficamos com:

1

8 8

28 56 26

36 168 168 36

70 180 360 180 70

36 180 360 360 180 36

28 168 180 360 180 168 28

8 56 168 180 180 168 56 8

1 8 28 36 70 36 28 8 1

Já vimos que em cada linha o grau do a vai diminuindo então devemos multiplicar linha $n = 0$ por 2^8, a linha $n = 1$ por 2^7, e assim sucessivamente, ficando com:

256

1024 1024

1792 3584 1792

1152 5376 5376 1152

1120 2880 5760 2880 1120

288 1440 2880 2880 1440 288

112 672 720 1440 720 672 112

16 112 336 360 360 338 112 16

1 8 28 36 70 36 28 8 1

Então o maior coeficiente da expansão de $(2a + b + c)^8$ é 5760.

Caso o b ou/e c tivessem valores, assim como o a, deveríamos repetir o processo pensando em cortes paralelos as arestas inclinadas, para o b usaríamos cortes paralelos à aresta à direita e para o c usaríamos cortes paralelos à esquerda.

9
Demonstração da generalização

Suponha que A_i é um resultado possível de uma partida e B_i é a quantidade de vezes que A_i ocorreu.

Sem perda de generalidade podemos afirmar que em um torneio onde existem A_1, A_2, A_3, … , A_N resultados para uma rodada, e em uma rodada qualquer, k, já obtivemos a quantidade de resultados (B_1, B_2, B_3, … , B_N). Na rodada anterior, k-1, estaríamos com (B_1-1, B_2, B_3, … , B_N), ou (B_1, B_2-1, B_3, … , B_N), ou (B_1, B_2, B_3-1, … , B_N), ou … , ou (B_1, B_2, B_3, … , B_N-1), logo podemos somar todos esses termos para encontrar (B_1, B_2, B_3, … , B_N).

Temos que:

$$B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_N = k$$

$$B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_N - 1 = k - 1$$

Somando os termos da rodada k-1 que gera o termo desejado da rodada k;

$$(B_1 - 1, B_2, \dots, B_N) + (B_1, B_2 - 1, \dots, B_N) + \dots + (B_1, B_2, \dots, B_N - 1)$$

Cada um desses termos pode ser escrito como uma permutação com repetição já que eles são iguais a quantidade de maneiras que podemos obter aquela situação;

$$\frac{(k-1)!}{(B_1-1)!\,B_2!\dots B_N!} + \frac{(k-1)!}{B_1!\,(B_2-1)!\dots B_N!} + \dots + \frac{(k-1)!}{B_1!\,B_2!\dots(B_N-1)!}$$

Podemos multiplicar cada uma das frações em cima e embaixo afim de deixar todos os denominadores iguais obtemos:

$$\frac{(k-1)!\,B_1}{B_1!\,B_2!\dots B_N!} + \frac{(k-1)!\,B_2}{B_1!\,B_2!\dots B_N!} + \dots + \frac{(k-1)!\,B_N}{B_1!\,B_2!\dots B_N!}$$

Agora somando os termos:

$$\frac{(k-1)!\,B_1 + (k-1)!\,B_2 + \dots + (k-1)!\,B_N}{B_1!\,B_2!\dots B_N!}$$

Em seguida colocando em evidência o fator comum:

$$\frac{(k-1)!\,(B_1 + B_2 + \ \dots + B_N)}{B_1!\,B_2!\,\dots\ B_N!}$$

Chegamos à conclusão que:

$$\frac{(k-1)!\,(k)}{B_1!\,B_2!\,\dots\ B_N!} = \frac{k!}{B_1!\,B_2!\,\dots\ B_N!} = (B_1, B_2, \dots, B_N)$$

Isso significa que qualquer expansão de um N-omio de grau k pode ser organizada em um sólido N-dimensional e, nesse sólido, uma soma particular de seus coeficientes há de gerar coeficientes correspondentes ao N-ômio de grau *k+1*. A disposição desses coeficientes nos dá um sólido N-dimensional correspondente ao grau $k+1$.

10
Referências bibliográficas

1 LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. A Matemática do Ensino Médio vol. 2.

2 GRAHAM, R.L.; KNUTH, D.E.; PATASHNIK, O. Concrete Mathematics.