UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

LUCIANO ROQUE LEITE

CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

PONTA GROSSA
2016

LUCIANO ROQUE LEITE

CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Fabiane de Oliveira

PONTA GROSSA
2016

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Leite, Luciano Roque

F995 Considerações sobre o processo ensino-aprendizagem de funções/ Luciano Roque Leite. Ponta Grossa, 2016.
78f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Fabiane de Oliveira.

1.Funções. 2.Dificuldades. 3.Ensino-aprendizagem. 4.Informática. I.Oliveira, Fabiane de. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 515

Luciano Roque Leite

"CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Fabiane de Oliveira

Orientador: Profa. Dra. Fabiane de Oliveira
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Departamento de Matemática, UEL/PR

LGrossi

Profa. Dra. Luciane Grossi
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Ponta Grossa, 25 de Fevereiro de 2016.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me oferecer esta oportunidade de estudar e melhorar meu desempenho como professor.

A minha família, que sempre me incentivou a estudar. Carla minha esposa que me deu todo o apoio nos momentos que tive que me dedicar aos estudos. A meus filhos Leonardo e Gabriel que pediam a todo o momento mais atenção.

A minha orientadora Prof.ª Dr.ª Fabiane de Oliveira pela paciência, educação, dedicação e competência. Sua contribuição foi fundamental para a realização desse trabalho.

A todos os professores do PROFMAT da UEPG, pelo ensino e empenho.

Aos meus colegas de turma, em especial a Lenilton e Fabiana, pela amizade e dedicação de muitas horas de estudos juntos.

Aos meus colegas do Colégio Estadual General Antonio Sampaio.

A professora Andrea Monteiro que me auxiliou em algumas traduções e na correção ortográfica.

A SBM por ter fornecido esta oportunidade, junto a CAPES que proporcionou auxílio financeiro durante o curso.

E a todos que contribuíram de alguma maneira para que eu chegasse até aqui. Muito obrigado.

Julgue seu sucesso
pelas coisas que você teve
que renunciar para conseguir.
Dalai Lama

RESUMO

O presente trabalho tem como principal finalidade apresentar uma proposta pedagógica para o ensino de funções no Ensino Médio. Para tanto realizou-se um levantamento bibliográfico buscando trabalhos que mostram que o ensino pode ser alcançado relacionando as diferentes representações de função em diversas metodologias de ensino e ressaltando a forma como é introduzido o conceito de função. Em um primeiro momento, colocou-se as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem das funções e discutiu-se suas diferentes representações destacando a importância que a informática pode ter nesse processo. O conteúdo funções foi escolhido por ser um tema relevante do ensino básico e que os alunos demonstram ter grandes dificuldades. Foi realizada uma síntese da história das funções apresentando sua definição e atividades envolvendo função afim e função quadrática com o uso do *software* GeoGebra, função inversa e função composta. Foram propostas algumas atividades como a máquina de calcular, identificação de regularidades e gráficos das funções com auxílio do Google, as quais poderão ser utilizadas em sala de aula. Discutiu-se ainda a responsabilidade do professor no ensino das funções, e o uso da informática na escola.

Palavras-chave: funções, dificuldades, ensino-aprendizagem, informática.

ABSTRACT

This work has as main purpose to present a pedagogical proposal for teaching of functions in High School. To this end, it was carried out a literature research seeking for works that proved that the proposed objective can be achieved, relating the different representations in various teaching methodologies, emphasizing how the concept is introduced. At first, it was presented the difficulties in the teaching-learning process of functions and discussed their different representations, high lighting the importance of technology information in this process. The content of functions was chosen because it is an important issue of basic education and the students demonstrated great difficulties. Therefore an overview of the history of functions took place, definition, and activities involving linear function and quadratic function using GeoGebra software, inverse function and composite function. It was proposed a number of activities, such as calculating machine, identification of regularities and graphs of functions with Google support which may be used in the classroom. It was discussed about the teacher's responsibility by teaching this content using computers in school.

Keywords: functions, difficulties, teaching-learning, computer.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Álgebra no Ensino Fundamental.. 29
Figura 3.1 - Gráfico da teoria das latitudes e longitudes................................ 34
Figura 3.2 - Gráfico de uma função afim $f(x)$.. 38
Figura 3.3 - Gráfico da função $y = ax + 1$, com $a = 1$................................ 40
Figura 3.4 - Gráfico da função $y = 2x + b$, com $b = 1$................................ 41
Figura 3.5 - Gráfico da função $y = ax^2$, com $a = 1$ 43
Figura 3.6 - Gráfico da função $y = x^2 + bx + 3$, com $b = 1$........................ 44
Figura 3.7 - Gráfico da função $y = x^2 + bx + 3$ com rastro.......................... 44
Figura 3.8 - Gráfico da função $y = x^2 - 3x + c$, com $c = 1$........................ 45
Figura 3.9 - Diagrama de uma função composta $f(g(x))$............................. 46
Figura 3.10 - Representação de $(fog)(2)$ e $(gof)(2)$.................................... 47
Figura 3.11 - Gráficos das funções: Celsius em Fahrenheit e Fahrenheit em Celsius.. 49
Figura 3.12 - Gráfico da função: $f(x) = x^2$... 49
Figura 3.13 - Diagramas de funções... 50
Figura 4.1 - Sequência de quadrados... 52
Figura 4.2 - Gráfico da função do 1º grau: $y = 2x + 5$.............................. 53
Figura 4.3 - Gráfico da função do 2º grau: $y = x^2 + 2x + 3$.................... 54
Figura A.1 - Árvore genealógica de Carlos e Denise...................................... 69
Figura A.2 -Árvore genealógica de Caio e Denise II...................................... 70
Figura B.1 - Máquina de calcular: Dobrar e subtrair 1................................... 72
Figura B.2 - Máquina de calcular: Multiplicar por 3 e somar 2...................... 73
Figura B.3 - Entrada da máquina de calcular: Multiplicar por 3 e somar 2...... 73
Figura B.4 - Máquina de calcular: Elevar ao quadrado e somar 2................... 73
Figura C.1 - Quadrados obtidos com palitos de fósforo................................. 75
Figura C.2 - Triângulos obtidos com lápis.. 75
Figura C.3 - Quadrados interiores num retângulo quadriculado...................... 76
Figura C.4 - Exercício com sequência de figuras.. 78
Figura C.5 - Sequência com quadradinhos... 78

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 - Representações semióticas do conceito função........................... 25

Quadro 3.1 - Síntese das concepções de função... 35

Quadro 3.2 - Contribuições de alguns matemáticos para a concepção de função 36

LISTA DE TABELA

Tabela B.1	- Entradas e saídas da Máquina: Dobrar e subtrair 1........................	72
Tabela B.2	- Entradas e saídas da Máquina: Elevar ao quadrado e somar 2.......	74
Tabela C.1	- Quantidade de lápis (L) necessários para formar Triângulos (T)....	76
Tabela C.2	- Número de quadradinhos em branco, preenchidos e totais da Fig. C.2...	77

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.. 12

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA... 12

1.2 RELEVÂNCIA DO PROBLEMA... 17

1.3 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO.. 19

1.4 DELINEAMENTO DO TEXTO... 19

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.. 21

2.1 DIFICULDADES NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES... 21

2.2 DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DAS FUNÇÕES.......................... 24

2.3 A RELAÇÃO ALGÉBRICA NO ENSINO DAS FUNÇÕES.................. 26

2.4 A IMPORTÂNCIA DA INFORMÁTICA NO ENSINO DAS FUNÇÕES............ 30

3 FUNÇÕES.. 33

3.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS FUNÇÕES....................................... 33

3.2 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO... 37

3.3 FUNÇÃO AFIM.. 37

3.4 FUNÇÃO QUADRÁTICA 41

3.5 FUNÇÃO COMPOSTA... 46

3.6 FUNÇÃO INVERSA.. 48

4 SUGESTÃO DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE FUNÇÕES............... 51

4.1 MÁQUINAS DE CALCULAR.. 51

4.2 REGULARIDADES.. 51

4.3 GRÁFICO DE FUNÇÕES NO GOOGLE... 53

5 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES............................. 55

5.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROFESSOR....................................... 55

5.2 O USO DA INFORMÁTICA NAS ESCOLAS....................................... 56

6 CONCLUSÃO.. 60
REFERÊNCIAS.. 62

ANEXO A- RELAÇÕES E FAMÍLIA... 69
ANEXO B- ATIVIDADES COM MÁQUINA DE CALCULAR 72
ANEXO C - ATIVIDADES COM REGULARIDADES 75

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo introdutório apresentam-se as principais motivações que culminaram na preocupação sobre o ensino de funções. Inicia-se com uma revisão bibliográfica, e em seguida reflete-se sobre a relevância do problema, definem-se os objetivos e apresenta-se o delineamento do texto.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção pretende-se compreender a ocorrência do processo ensino-aprendizagem de função através de diversos trabalhos de professores e pesquisadores que serão citados na sequência.

Alkimim e Paiva (2012) estudaram a transposição didática numa escola pública do Ensino Médio e indicaram que ao resgatar o enfoque histórico e modelar situações do cotidiano no estudo do conceito de funções, o professor desenvolve o pensamento variacional, propiciando a construção deste conceito e a utilização crítica no cotidiano.

Barreto (2007) destacou alguns aspectos no ensino de funções que considera importante de serem desenvolvidos na escola média, são eles: a) a natureza algébrica; b) as diferentes formas de representação; c) a aplicação à problemas e situações da vida e de outras ciências; d) a articulação com outros tópicos da própria Matemática.

Trindade (1999) fez uma reflexão sobre a teoria dos obstáculos epistemológicos e sua aplicação no processo de formação do conceito de função. Buscou identificar e analisar alguns dos principais problemas, as principais dificuldades e obstáculos à aprendizagem, propondo algumas atividades pedagógicas que podem contribuir na superação dos obstáculos epistemológicos e promover o raciocínio matemático nesse domínio. O autor indica ainda a necessidade de propor aos alunos atividades que lhes permitam desenvolver e/ou adquirir as noções ligadas a este conceito, como de correspondência, variável, dependência, regularidade e generalização. Noções estas, que são básicas para o aprendizado e o domínio dos diferentes registros de representação de funções.

Costa (2008) verificou o conhecimento do professor sobre o conceito de função com 36 alunos do Curso de Especialização em Ensino da Matemática, na disciplina Funções Reais. Foi aplicado um questionário com dez questões a todos os participantes e depois de analisar as respostas, no final do curso realizou uma entrevista com dez desses alunos para rever as respostas dadas anteriormente que estavam fora das expectativas e corrigi-las caso conseguissem identificar o erro. Concluiu que alguns conceitos referentes a função ainda não eram dominados por certos professores, mesmo tendo aprendido ou revisto teoremas e estruturas pertencentes à Matemática avançada durante o curso.

Zuffi e Pacca (2000) apresentam um trabalho qualitativo sobre a utilização da linguagem matemática por professores de Matemática do Ensino Médio sobre funções. Propôs um questionário com 20 perguntas relacionadas ao tema função para sete professores, verificando que a linguagem formal do professor tenta se aproximar das definições atuais, com a de Bourbaki[1] e Dirichlet[2].

Segundo Zuffi e Pacca (2000) as definições formais para as funções tem um papel de pouco destaque na expressão do professor do Ensino Médio. As "regras" e os "procedimentos" estabelecidos pela comunidade escolar e pelos livros didáticos, para o tema "funções", tem um destaque maior fazendo predominar uma linguagem matemática pautada na sintaxe, e em detrimento de aspectos semânticos ou socioculturais.

Zuffi e Pacca (2002) apresentam alguns dos resultados obtidos com a observação da prática pedagógica de três professores de Matemática do Ensino Médio, ao usarem a linguagem matemática no ensino de "funções". Elas chamam a atenção sobre as formas com que tem sido veiculada a linguagem matemática nas escolas do Ensino Médio principalmente pelos professores de Matemática.

Andrade e Saraiva (2012) estudaram as conexões que os alunos estabelecem com as múltiplas representações de uma função, ressaltando a importância para o desenvolvimento deste conceito. Eles aplicaram o questionário a duas alunas. Em um segundo momento através de entrevistas discutem as respostas dadas, identificando as causas das suas incompreensões. Concluindo a ideia de que a atividade matemática consiste essencialmente na transformação de representações, também confirmaram que o processo de formação dos conceitos matemáticos combina, numa ação recíproca, o conceito definição[3] e o conceito imagem[4].

Guimarães (2010) propôs uma sequência didática para duas escolas de Ensino Médio, uma Estadual e outra cooperativa no interior de São Paulo. Utilizou a resolução de

---

[1] Síntese da definição de Bourbaki por Sierpinska(1992, p. 30) apud Zuffi e Pacca (2000, p.16) : "Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, então $y = y'$.

[2] "Se uma variável y está relacionada a uma variável x, de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x". Síntese da definição de Dirichlet por Sierpinska (1992, p. 46) apud Zuffi e Pacca (2000, p. 16).

[3] "Conceito definição é a definição verbal do conceito". (VINNER, 1983 apud ANDRADE; SARAIVA, 2012, p. 142).

[4] "Conceito imagem é a ideia que uma pessoa associa ao conceito" (VINNER, 1983 apud ANDRADE; SARAIVA, 2012, p. 142).

problemas para ensinar funções usando a Engenharia Didática. As atividades eram contextualizadas de forma que o conceito de função fosse construído gradativamente sem a necessidade de muitos exercícios mecânicos. Após a aplicação, a autora, fez alterações nas atividades que haviam sido propostas a fim de aprimorar a sequência.

Santos (2010) propôs uma sequência didática com o propósito de promover o ensino-aprendizagem de funções de uma forma lúdica e dinâmica a fim de estimular a memória gráfica e a inteligência visual para alunos da 1ª série do Ensino Médio. O autor usou recursos de informática tais como: o *Flash 8*[5] para a construção de objetos de aprendizagem animados o *Winplot*[6] na exploração do plano cartesiano e o *Power Point* na apresentação. Procurando sempre relacionar as situações problemas com situações do dia a dia e as demais ciências. Além disso, discutiu a utilização de recursos computacionais no ensino da Matemática.

Strapason (2011) analisou a utilização de jogos como estratégia de ensino na aprendizagem dos alunos referente ao conceito de função e de funções polinomiais do 1º e do 2º graus. Observou que com essa metodologia a aprendizagem das funções fica mais interessante, motivando os alunos a aprenderem, efetivando assim o processo de ensino-aprendizagem.

Borba (2008) investigou em uma turma de magistério: "Como a utilização de jogos matemáticos contribui para a criação de imagens conceituais associadas ao conceito de Função?". Neste estudo usou a teoria de David Tall, que formula os conceitos de imagem e definição conceitual sugerindo relacionar o conceito de função com máquinas. A autora verificou que a máquina de função é uma ferramenta importante que permite aos educandos uma compreensão mais abrangente sobre os conceitos envolvidos no conteúdo de função. Através das atividades realizadas ocorreu uma evolução nas imagens conceituais em relação ao conteúdo de função, gráficos, expressões, diagramas de correspondência, que puderam ser analisadas e discutidas, permitindo que imagens como a de que toda função é representada por gráficos e por linhas retas, pudessem ser modificados.

---

[5] *Flash* é um *software* primariamente de gráfico vetorial - apesar de suportar imagens *bitmap* e vídeos - utilizado geralmente para a criação de animações interativas que funcionam embutidas num navegador *web* e também por meio de *desktops*, celulares, *smartphones*, *tablets* e televisores.
[6] O *Winplot* é um aplicativo para Windows que permite a plotagem de curvas e superfícies.

Magarinus (2013) propõe uma sequência de atividades que a partir de problemas reais explorasse os principais conceitos presentes no estudo de funções afins e quadráticas utilizando os *softwares* Tracker[7] e GeoGebra[8].

A autora observou dois fenômenos: queda livre e lançamento horizontal. Os fenômenos foram filmados e a seguir com o auxílio do Tracker, analisou-se o deslocamento em cada caso com a finalidade de obter a noção intuitiva de função. Posteriormente propôs algumas atividades com o GeoGebra. A escolha dos *softwares*, a metodologia de resolução de problemas e o contexto das situações apresentadas possibilitaram uma maior exploração dos aspectos relacionados ao estudo de funções de um modo dinâmico e significativo. Sugere ainda que para complementar a atual proposta é criar uma comunicação direta entre a Matemática e a Física.

Lima (2013) investigou a utilização do *software GeoGebra* no ensino de funções. O autor fez uma apresentação do *software*, seu histórico, a estrutura do GeoGebra e as possíveis aplicações de suas ferramentas bem como sua utilização e trouxe alguns exemplos. Elaborou uma sequência didática que proporcionou aos alunos compreender e aprofundar o conhecimento matemático.

Lemos Junior (2013) também usou o *software* GeoGebra propondo atividades contextualizadas e realistas a alunos da 1ª série do Ensino Médio. Com isso procurou tornar significativo o ensino de funções, funções afim e quadrática obtendo uma mudança positiva, aumentando o interesse e entendimento destes conceitos.

Maggio e Nehring (2013) investigaram uma professora que atua no Ensino Médio que conhece a teoria cognitivista e da aprendizagem dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval como ela planeja e conduz suas aulas. Analisaram o modo como as representações semióticas do conceito de função foram utilizadas no ensino planejado e vivenciado em sala de aula.

Os autores constataram aspectos problemáticos e consistentes sobre a comunicação da linguagem matemática (forma escrita e oral), no Ensino Básico. Não basicamente ao modo de planejar, mas ao modo de concretizar o ensino em termos de representações semióticas, como empregar perguntas referentes ao conteúdo cognitivo de função na condução de suas tarefas de tratamento e conversão desses registros.

---

[7]O programa *Tracker* é uma aplicação gráfica em JAVA construída na *Open Source Physics* (OSP), comunidade científica que desenvolve e disponibiliza gratuitamente recursos para o ensino de Física e de modelagem computacional.
[8]O GeoGebra é um *software* gratuito de geometria dinâmica, criado por Markus Hohenwarter, desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática, tanto no nível básico como universitário.

Santos et al. (2004) apresentam sugestões práticas envolvendo a construção do conceito de função em um minicurso destinado a professores de Matemática e de séries iniciais. As atividades foram realizadas com máquinas, malhas, gráficos e jogos, entre eles os Blocos Lógicos. Foram sugeridas atividades para diferentes séries, trabalhando com as ideias de sequência, regularidade, padrão, variável, dependência de variáveis, correspondência unívoca e generalização, analisaram situações-problema que estão presentes em livros didáticos das oito séries do ensino fundamental.

As autoras concluem que o processo de ensino-aprendizagem de função deve ser iniciado desde as primeiras séries do Ensino Fundamental ou na pré-escola, com atividades que tenham como objetivo a introdução deste conceito.

Rocha (2008) propôs uma experiência no ensino de funções, envolvendo alunos da Licenciatura em Matemática. Tomando como base investigações sobre a História da Matemática, despertou a curiosidade e o interesse dos alunos, assim contribuindo para a melhoria do ensino-aprendizagem deste conceito aos futuros professores.

Viseu e Nogueira (2014) averiguaram como se desenvolve o pensamento algébrico de uma aluna do 10º ano[9] no estudo das funções, seguindo uma metodologia qualitativa e interpretativa, através da resolução de tarefas propostas em sala de aula e entrevista em três fases que decorreram antes, durante e após o estudo das funções. Os resultados revelam que a aluna desenvolveu a capacidade de manipular expressões com letras, embora em algumas situações não perceba totalmente o seu significado.

Os autores concluem que o estudo de funções potencializa o desenvolvimento da capacidade, tanto para compreender enunciados escritos quanto para traduzir informações contidas em gráficos.

Bassoi (2006) analisa os registros de representação semiótica usado por uma professora e seus alunos de 8ª série, atual 9º ano, em aulas de Matemática sobre funções. A autora destaca que devido a diversidade de representações do mesmo objeto matemático, neste caso função, é importante o uso de diferentes registros de representação, principalmente na conversão de registros nas diferentes formas de linguagem (natural, aritmética, algébrica, entre outras). O que auxilia na caracterização do objeto matemático e tem um papel relevante na compreensão dos alunos, sugerindo assim, que sejam levadas em conta as diversas representações na elaboração de propostas de ensino de conteúdos matemáticos escolares.

[9] 10º ano- corresponde ao 1º ano do ensino secundário em Portugal.

Maciel (2011) usou a História da Matemática a fim de promover uma aprendizagem significativa do conceito de função, elaborando com os alunos um vídeo sobre o tema. Ele ressalta que no processo de ensino aprendizagem de funções há necessidade de conhecimentos matemáticos prévios – os quais os alunos demonstraram não possuir adequadamente na resolução das atividades.

A partir do resultado dessa pesquisa, o autor apresentou algumas propostas de trabalho sobre funções, possibilitando aos alunos um real entendimento deste conceito.

Através da revisão bibliográfica pode-se constatar que o desenvolvimento do pensamento funcional está diretamente ligado a relação das diferentes representações de função e da forma como este conceito é introduzido.

1.2 RELEVÂNCIA DO PROBLEMA

O conceito de função é um dos conceitos que desde cedo fazem parte de nossa vida. A sua importância vai além da interpretação de situações encontradas em jornais e outros meios de comunicação, pois está presente em diversas atividades do nosso cotidiano. Como por exemplo, a conta de água na qual o valor pago depende da quantidade de metros cúbicos gastos.

Para Barreto (2007, p. 88), nas aplicações no contexto da Matemática escolar "funções podem ser entendidas como um conceito que trata de problemas de variação e quantificação de fenômenos. Ou, em outras palavras, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam". Com relação a esta concepção, "uma variável representa os valores do domínio de uma função, surgindo a noção de variáveis dependente e independente."

Segundo as Diretrizes Curriculares Estaduais da Educação Básica do Estado do Paraná (DCE) o aluno do Ensino Fundamental deve conhecer as relações entre variável independente e dependente, os valores numéricos de uma função, a representação gráfica das funções afins e quadráticas. A diferença entre função crescente e decrescente deve ser percebida e cita ainda que uma forma de favorecer a construção desses conhecimentos é a utilização de situações problema. (PARANÁ, 2008).

Segundo os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (2000), o ensino de funções deve:

> garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a

> solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 257).

No Ensino Fundamental, o professor ao fazer uma fundamentação teórica da construção do conceito de função, deve levar em consideração que “este é um conceito chave da Matemática, que é muito complexo, pois envolve outros conceitos na sua construção” e que deve ser introduzido, inicialmente de forma intuitiva, “passando por diferentes representações que levam a sua matematização e a posterior generalização, concluindo com a sua formalização” (Santos et al. 2004, p. 2-3).

A construção do conceito função não se efetiva em um mês ou um semestre, varia de aluno para aluno. Precisamos nos preocupar com este conceito desde os primeiros contatos com a Matemática visando um real entendimento a todos os alunos. Para Leal (1990) *apud* Trindade (1999, p. 2-3), a falta de uma preparação dos alunos, ao longo dos primeiros sete anos de escolaridade, é uma das principais causas das dificuldades de aprendizagem do conceito de função. A questão pedagógica é como vencer todas estas dificuldades em classe.

Para ensinar de uma maneira satisfatória o professor deve saber o que o aluno já domina servindo de base para novos conhecimentos a serem trabalhados. Chaves e Carvalho (2004) acrescentam ainda:

> que muitos conteúdos estudados no Ensino Fundamental (EF) servem de “âncora” para o ensino de funções, como por exemplo: i) a proporção, pois trata de grandezas variáveis e interdependentes de forma direta ou indireta; ii) as equações do 1° e 2 ° graus e os sistemas que modelam situações do cotidiano; iii) a geometria onde perímetros e áreas dependem de medidas de lados, ângulos ou diagonais. (CHAVES; CARVALHO, 2004, p. 8).

Algumas noções intuitivas sobre funções precisam ser trabalhadas desde os anos iniciais, Gigante e Santo (2012, p. 25)*:*

> Ao longo de todo o ensino fundamental, a ideia de regularidade, apresentada em sequências figurais e numéricas, bem como a identificação de padrões que as relacionam, proporciona generalizações e as primeiras algebrizações. Alguns conceitos, trabalhados como noções intuitivas nos anos iniciais (o conceito de função, por exemplo) vão se ampliando ao longo dos anos finais e consolidam-se no decorrer do Ensino Médio.

Para a formação do conceito de função é necessário evidenciar vários fatores no processo ensino-aprendizagem, entre eles: o conhecimento que os alunos adquiriram nas séries anteriores, a metodologia empregada pelo professor, a forma como o professor irá conduzir suas aulas e as atividades que os antigos professores desses alunos utilizaram para auxiliar nesta formação. Esses fatores são decisivos para que o ensino ocorra de forma satisfatória. Além disso, não podemos deixar de considerar a complexidade do conceito função neste processo.

1.3 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como finalidade apresentar uma proposta pedagógica para o ensino de funções, com atividades dirigidas a alunos do 1° ano do Ensino Médio, proporcionando assim o entendimento do conceito de Função, Função Afim e Função Quadrática.

Objetiva-se ainda dar significados aos conteúdos trabalhados, utilizando metodologias diferenciadas, principalmente recursos computacionais, para tornar as aulas mais dinâmicas e aumentar o interesse dos alunos.

Para isso pretende-se:

- Identificar algumas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de funções;
- Apresentar atividades que envolvam observação e generalização de padrões;
- Modelar problemas usando a lei de formação das funções;
- Propor situações com o auxilio do Google sobre o gráfico das funções;
- Utilizar o GeoGebra enfatizando as diferentes representações para o estudo das funções;
- Identificar e interpretar as funções na sua forma gráfica e algébrica.

1.4 DELINEAMENTO DO TEXTO

Este trabalho foi estruturado em seis capítulos. Além do capítulo introdutório e do conclusivo conta com outros quatro capítulos referentes a fundamentação teórica e o desenvolvimento da proposta, conforme é detalhado a seguir. No segundo capítulo encontra-se a fundamentação teórica, apresenta-se algumas considerações sobre as dificuldades no processo ensino aprendizagem das funções. Destaca-se as diferentes formas de representar as funções, a relação algébrica e a importância do uso da informática no ensino das funções. O terceiro capítulo traz um pouco da história das funções, sua definição e apresenta alguns tipos de funções, como por exemplo, funções afim, quadrática e inversa. As funções afim e quadrática são trabalhadas a partir de atividades propostas no GeoGebra, ainda trabalha-se com o conceito de funções compostas. No quarto capítulo algumas atividades são indicadas para auxiliar no ensino das funções como as máquinas de calcular, as regularidades e o uso do Google no entendimento dos gráficos. O quinto capítulo é marcado com algumas considerações sobre o ensino das funções por parte dos professores e a utilização dos laboratórios de informática nas escolas. O sexto capítulo apresenta as considerações finais acerca de todo o trabalho desenvolvido.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresenta-se uma síntese de algumas dificuldades encontradas no processo ensino-aprendizagem das funções. A seguir, as diferentes representações de funções são tratadas. Além de fazer uma análise de como o pensamento algébrico é fundamental nesse processo e como o uso da informática pode contribuir para o ensino de funções.

2.1 DIFICULDADES NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES

Os alunos chegam ao Ensino Médio apresentando muitas dificuldades com os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental. Com isso o processo de ensino-aprendizagem de novos conteúdos não ocorre de forma satisfatória. No ensino das funções, pode-se destacar alguns pontos fundamentais: suas múltiplas representações que precisam ser evidenciadas e também a relação algébrica que é fundamental para o seu entendimento. A informática pode ser uma grande aliada nesse processo.

Magarinus (2013, p. 12) baseada na sua prática de professora no Ensino Médio e Fundamental, coloca que “apesar da contextualização e interdisciplinaridade, o ensino de funções não vem garantindo aos alunos sua efetiva aprendizagem ou a flexibilidade esperada para a resolução de problemas diversos”. Muitos alunos encontram dificuldades em trabalhar com funções e poucos compreendem seu conceito. A autora fala sobre o ensino e aprendizagem de funções e relata indícios de que as dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Médio também são verificadas por estudantes do ensino superior. Segundo Costa (2004, p. 12) *apud* Magarinus (2013, p. 12), “muitas das dificuldades apresentadas pelos estudantes no que se refere ao conceito de limite, derivada e integral recaiam na compreensão do conceito de função”.

Na mesma linha Zuffi e Pacca (2000, p. 10) colocam que este conceito tem se revelado de difícil assimilação por parte dos alunos do Ensino Médio e Superior. Citam algumas investigações de diversos pesquisadores mostrando que “as ideias de variável, domínio, contradomínio e imagem que permeiam a compreensão do conceito, já trazem grande complexibilidade para a aprendizagem dos alunos”.

Entretanto a investigação de Mendes (1994) e Schwarz (1995) *apud* Trindade (1999, p. 1-2) mostra que para a maioria dos professores de Matemática de segundo grau e para os autores dos livros didáticos adotados, “o conceito de função é tido como um conceito simples, não havendo muitos obstáculos ou dificuldades à sua aprendizagem. Mas a situação é bem outra, o conceito de função é um conceito difícil de ser assimilado".

Segundo Rocha (2008, p. 18), "os autores abordam muitos conceitos que envolvem as funções em poucas páginas dos livros, não possibilitando ao aluno o tempo necessário para seu amadurecimento conceitual", além disso, de uma forma muito sucinta e descontextualizada tornando pouco atrativa e de difícil entendimento.

Barreto (2007, p. 87) coloca que no currículo médio, o estudo deste tópico "segue uma ordenação ainda tradicional e ditada, na maioria das vezes, pela sequência sugerida pelos livros didáticos" onde os temas quase sempre são tratados de forma independente e sem conexão alguma entre eles. Por exemplo, as funções afins e exponenciais são trabalhadas no primeiro ano do Ensino Médio, enquanto as progressões aritméticas e geométricas são estudadas no ano seguinte sem que se faça qualquer relação entre elas. Além disso, "poucas são as situações em que se fazem referências às aplicações da Matemática as outras ciências".

O professor precisa ser mais autônomo, mas para isso é necessário ter conhecimento daquilo que vai ensinar e não aceitar os conteúdos como são colocados nos diversos materiais. Então qual deve ser o motivo que levam os professores a usarem a sequência utilizada pelos livros didáticos? O que vem acontecendo com o ensino de funções? Zuffi e Pacca (2000, p.26) colocam:

> A nossa pesquisa revelou que a linguagem matemática que eles utilizam está muito mais determinada pelas suas práticas pedagógicas, e por toda uma cultura matemática escolar estabelecida, do que pelos aspectos lógico-formais com os quais eles tiveram contato em seus cursos superiores, ou na vida diária. O apego aos livros didáticos e a situação cultural vivenciada nas escolas são fatores que ainda parecem influenciar fortemente os modos de utilização da linguagem matemática pelos professores investigados.

Costa (2008, p. 93) investigou o conhecimento do professor em relação ao conceito de função em nível médio e verificou um fraco desempenho, "demonstrando limitações incompatíveis com o seu grau de formação, ora produzindo os erros dos alunos desta etapa da educação, ora reproduzindo em sala de aula erros de abordagem e de conceito".

Segundo Costa (2008), pesquisas mostram que:

> as dificuldades do professor em relação a este conceito têm origem anterior à sua graduação e nesta nem sempre ele é aprofundado. Algumas destas dificuldades advêm dos obstáculos de natureza epistemológica que são inerentes ao conceito e devem ser transpostos na medida em que são aceitos e compreendidos. (COSTA p.10).

E conclui ainda:

> Mesmo com todos estes anos de estudo, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, podemos observar que, na maioria das vezes, após completar o seu ciclo

> de formação, o professor de Matemática ainda possui uma visão fragmentada do conceito de função, reproduzindo em sala de aula o mesmo modelo de ensino com o qual teve contato na sua Educação Básica. É comum que ele desenvolva uma didática muito parecida com a de seus antigos professores. Este fato não representaria nenhum problema, caso o nosso professor possuísse domínio sobre o conteúdo a ser ensinado de modo que pudesse redimensionar antigas práticas ou, pelo menos, não reproduzisse erros conceituais ou metodológicos contidos em alguns materiais didáticos por não saber reconhecê-los. (COSTA, 2008, p. 2).

Por isso é necessário um investimento maior na formação continuada dos professores, pois na graduação não é possível consolidar todos os conceitos necessários para o ensino de Matemática. Muitas vezes o aluno ainda não se apropriou destes conceitos no Ensino Médio, nem na graduação e precisa ensinar para seus alunos. Assim ao chegar à sala de aula, se depara com diversos conceitos e alguns deles ainda não dominados.

A abrangência do conceito de função revela inúmeras dificuldades, envolvendo diversas concepções e múltiplas representações, fazendo-se necessário então, “compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos, quais significados o aluno pode produzir e de que formas isto se desenvolve no ambiente escolar”. (BARRETO, 2007, p. 88).

Saraiva e Teixeira (2009) *apud* Andrade e Saraiva (2012, p. 141) colocam que “algumas das dificuldades que os alunos enfrentam quando tentam compreender o conceito de função estão relacionadas com o uso do conjunto de símbolos relacionados com ele”.

Para Duval (1995, p. 2) *apud* Bassoi (2006, p. 27), diferentemente de outras áreas do conhecimento, a Matemática:

> requer a utilização de outros sistemas de expressão e representação além da linguagem natural e das imagens, como por exemplo, vários sistemas de escritas para os números, notações simbólicas para os objetos, escritas algébricas e lógicas que assumem o estatuto de língua paralela à língua natural para exprimir as relações e operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Para Sajka (2003) *apud* Andrade e Saraiva (2012, p. 142)

> as causas das dificuldades dos alunos com os símbolos estão relacionadas com os contextos em que eles são trabalhados nas aulas de Matemática e nas escolhas limitadas que os professores fazem das tarefas matemáticas – o conceito de função muitas vezes está ligado ao conceito de fórmula, e, às vezes, os alunos associam o conceito de função ao processo gráfico, onde uma fórmula é necessária para desenhá-lo, mas a própria capacidade dos alunos para manipular os símbolos, e operar com eles, não é suficiente para a sua compreensão estrutural de uma função.

Algumas vezes podemos observar que o professor não vem conseguindo efetivar o processo ensino-aprendizagem por diversos fatores, então é necessário propor ações, como por exemplo, uma formação continuada para auxiliá-los. A dificuldade na compreensão do conceito função está ligada a sua complexidade, pois são usados diferentes símbolos e formas de representá-lo que muitas vezes confundem o educando. O professor precisa dar uma atenção especial a essas diferentes representações que serão fundamentais para o entendimento das funções.

2.2 DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DAS FUNÇÕES

Muitos alunos chegam ao Ensino Médio com muita dificuldade em abstrações ao lidar com as expressões algébricas e os gráficos cartesianos. Conclusivamente, a partir do exposto pelo referencial estudado será necessária uma articulação entre as formas de representação no ensino de funções: a numérica, a gráfica e a algébrica.

Para Duval (2012):

> As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (DUVAL, 2012, p. 269).

Duval (2012, p. 2) coloca que a dificuldade dos alunos não está nos conceitos ligados à função, mas sim "na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da representação algébrica".

Para que ocorra a aprendizagem é necessário trabalhar com todas as formas de representações de funções e suas correspondências. Andrade e Saraiva (2012, p. 141) reforçam ainda que:

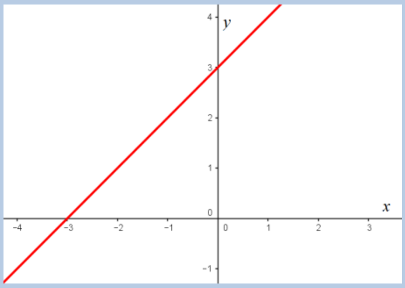
> A aprendizagem das funções deve contemplar o estabelecimento e a compreensão de relações entre os vários tipos de representação (a gráfica, a algébrica, a tabelar e a verbal), pois isso promove o desenvolvimento de diversas conexões e a compreensão efetiva do conceito de função... [ ]. A construção, a interpretação e a manipulação de representações para a relação funcional entre duas variáveis, quer sejam de carácter simbólico, tabelar, geométrico ou outro, proporciona diversos pontos de contacto com aspetos de natureza algébrica. (ANDRADE; SARAIVA, 2012, p. 141).

O Quadro 2.1 apresenta categorias de distintas representações do conceito de função, seguidas de seus respectivos sistemas de representações semióticas, com base na classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático concebido por Duval (2012).

<table>
<tr><th>REPRESENTAÇÕES DISCURSIVAS</th><th>REPRESENTAÇÕES NÃO DISCURSIVAS</th></tr>
<tr><td>Registro da língua natural

*Uma função $f\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ consta de três partes: um conjunto C, domínio da função; um conjunto D, contradomínio da função e uma regra que associa cada elemento $x \in C$ um único elemento $f(x) \in D$.

*Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; y é função de x e escreve $y = f(x)$, se ente duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x + 3 \to f(x)$.</td><td>Registro gráfico

Gráfico cartesiano
</td></tr>
<tr><td>Registro dos sistemas de escrita

Simbólico (línguas formais)
$f\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}, x + 3 \to f(x), f(x) = y$ ou $y = f(x)$

Algébrico $y = x + 3$

Numérico (natural, inteiro, racional e irracional)
$f(1) = 4$ e $f(-0{,}7) = 2{,}3$</td><td>Tabela
<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>0,5</td><td>3,5</td></tr><tr><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{13}{4}$</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{5}{2}$</td></tr><tr><td>-0,7</td><td>2,3</td></tr></table></td></tr>
</table>

Quadro 2.1- Representações semióticas do conceito função
Fonte: Elaborada pelo autor.

Os alunos do Ensino Médio devem ter a capacidade de entender e relacionar os diferentes tipos de representação das funções, identificando as características dos diversos tipos de função. Conforme Andrade e Saraiva (2012):

> Os alunos em particular no ensino secundário devem aprender as características dos diversos tipos de funções, estabelecendo relações entre eles, e compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos, avaliando as vantagens e desvantagens de cada representação. Ao trabalhar com diferentes representações de funções, os alunos poderão desenvolver uma compreensão mais aprofundada do conceito de função. Mais do que isso, os alunos poderão ser capazes de compreender as relações entre gráficos e símbolos e de avaliar as vantagens e desvantagens de cada representação, consoante os objetivos pretendidos. (NCTM, 2007 *apud* ANDRADE; SARAIVA, 2012, p. 141).

A partir do pressuposto de que “a compreensão de um conceito matemático pelo sujeito necessita da coordenação de, pelo menos, dois registros de representação desse conceito” (BASSOI, 2006, p. 35).

Pinheiro e Barreto (2013, p. 3) na mesma linha citam Duval (2009):

> para não confundir o objeto e o conteúdo de sua representação é necessário dispor de, ao menos, duas representações, de modo que estas duas devam ser percebidas como representando o mesmo objeto. Além disso, é preciso que o estudante seja capaz de converter, de transitar entre uma e outra representação. (DUVAL, 2009 apud PINHEIRO; BARRETO, 2013, p. 3)

Levando em conta a existência de muitos registros de representação, as atividades de transformação e a conversão entre estes registros, para Duval são imprescindíveis para a compreensão dos objetos matemáticos.

> A conversão é a transformação da representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada de um registro em uma representação deste mesmo objeto, desta mesma situação e desta mesma informação num outro registro. As operações que designamos habitualmente pelos termos “tradução”, “ilustração”, “transposição”, “código” etc. são operações que a uma representação de um registro dado faz corresponder uma outra representação de um outro registro. (DUVAL, 1995, p. 40-41 *apud* BASSOI, 2006, p. 31).

No entanto, conforme referem Zachariades et al. (2001) *apud* Andrade e Saraiva (2012, p. 142),

> é necessário ter também em conta as passagens entre outras representações e não limitar o ensino das representações de funções apenas à passagem da representação algébrica para a representação gráfica, podendo levar os alunos a interpretar uma função como sendo uma fórmula, ou vendo a função apenas como uma equação, não sabendo como dar sentido à própria definição.

A aprendizagem do conceito de função precisa do “estabelecimento de conexões entre as suas representações e o confronto de ideias que nem sempre são fáceis de agregar”. Assim, os alunos precisam de acompanhamento na sua aprendizagem, para que “a definição que se pretende que interiorizem e a imagem que têm de função se complementem e permitam uma aprendizagem significativa.” (ANDRADE; SARAIVA, 2012, p. 146).

Alguns objetos matemáticos possuem várias de formas de representação sendo a função um deles. Então ao ensinar funções é necessária à exploração de todas essas representações e suas transformações de uma para outra, com isso, os alunos poderão fazer relações entre essas representações visando uma aprendizagem significativa. Geralmente a dificuldade maior é na representação algébrica, pois alguns conceitos fundamentais para o seu entendimento ainda não foram consolidados.

2.3 A RELAÇÃO ALGÉBRICA NO ENSINO DAS FUNÇÕES

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p. 115). Essa capacidade será necessária para que o aluno compreenda o que é uma função.

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. (BRASIL, 2006, p. 121), mas segundo Campiteli e Campiteli:

> O estudo de funções costuma se inclinar sempre mais para a consideração do aspecto algébrico e para a procura de uma ampla generalidade. Ainda que importantes, são noções introduzidas de forma prematura e imprópria, sem se levar em conta se os alunos estão ou não em condições de tirar proveito delas. A preocupação em introduzir muita terminologia abstrata, que nunca chega a ser usada de forma significativa, é uma tentação frequente dos programas. (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006, p. 15).

Para que isto não ocorra, Vergnaud (1988, p. 15) *apud* Bassoi (2006, p. 25) coloca que “a álgebra é o caso mais óbvio, na matemática escolar, do auxílio dos símbolos ao pensamento”. Este auxílio, se trabalhado gradualmente sem se precipitar em usar x, “começa nos níveis elementares de escolaridade, no início da contagem com palavras e também no uso de tabelas e diagramas” para ajudar o aluno em conhecimentos futuros.

Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar ‘abstratamente’, desde que sejam proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas a partir dos ciclos iniciais, de modo informal em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados. (BRASIL, 1998, p. 117).

Barreto (2007, p. 93) cita alguns pesquisadores: Booth (1995); Raford 1996; Ursini (2000) os quais verificaram que “muitos alunos têm dificuldades na compreensão do conceito de variável, em lidar com expressões algébricas e ainda mais, em expressar relações generalizadas, pois comumente não sentem a necessidade de generalização”, para enfrentar estas dificuldades, cita ainda outros autores, como Ponte (1990), Markovits; Eylon; Bruckheimer (1995), Demana e Leitzel (1995) que sugerem que “o estudo das funções deva iniciar a partir de representações numéricas, gráficas e contextualizadas, que são mais intuitivas e possuem um apelo mais visual”, deixando os métodos algébricos e os aspectos de formalização reservados para um segundo momento.

Nessas perspectivas, Schoen (1995) *apud* Barreto (2007, p. 93) afirma:

> Lançar os alunos precipitadamente ao simbolismo algébrico é ignorar a necessidade de uma fundamentação verbal e de uma simbolização gradual sugeridas pela história e apoiadas por pesquisas sobre ensino e aprendizagem de álgebra. (SCHOEN, 1995 apud BARRETO, 2007, p. 93).

Demana e Leitzel (1995) *apud* Barreto (2007, p. 93) defendem que uma situação, um problema ou um fenômeno deve ser descrito inicialmente verbalmente, sem nenhuma linguagem formal e com o passar do tempo deve se fazer uso de variáveis para representar relações funcionais.

> A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações. (DEMANA e LEITZEL, 1995 *apud* BARRETO, 2007, p. 93).

Santos et al. (2004, p. 7) afirmam que "as variáveis são representações simbólicas para os conjuntos que nos permitem expressar as generalizações, saindo das tabelas que referem resultados particulares".

Na área de Matemática as letras são usadas de diversas maneiras, por exemplo, os conjuntos que representam quantidades (numéricos) podem ser finitos ou infinitos e todos seus elementos são representados por símbolos, geralmente letras, que são as variáveis. Segundo Caraça:

> [...] seja (E) o conjunto dos números reais do intervalo (0,1) e seja x a sua variável, que queremos significar? Que o símbolo x, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é suceptível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da vida colectiva do conjunto, vida esta que se nutre da vida individual de cada um de seus membros, mas não se reduz a ela. (CARAÇA, 1989, pág. 127).

A noção de variável é das mais difíceis para os alunos, pois pode representar qualquer número do conjunto, mas não se refere a nenhum número específico deste conjunto, fato este que muitos deles não entendem.

As variáveis são representadas geralmente por letras, o que dificulta, pois as letras também são usadas em outras representações, como:

> -Nas funções, onde as letras representam quantidades variáveis, mas às vezes constantes.
> -Nas equações, onde as letras representam incógnitas que são valores dados.
> -Nas expressões algébricas, onde as letras são usadas como generalizações.
> (SANTOS et al., 2004, p. 7).

A dificuldade em saber o que está usando, a que se refere, leva os alunos muitas vezes a desistir de um exercício, portanto devemos diferenciar o famoso e temível x e explicar cada vez porque é usado, o que significa e a que se refere. A Fig. 2.1 extraída dos PCN apresenta um cronograma sobre o estudo da Álgebra no Ensino Fundamental.

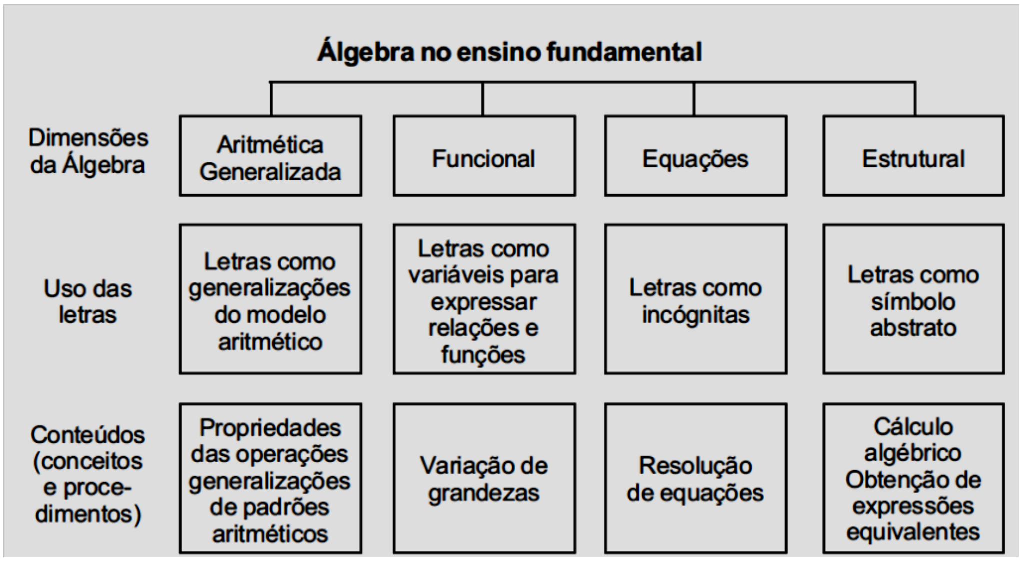


Figura 2.1 – Álgebra no Ensino Fundamental
Fonte: BRASIL, 1998, p. 116.

Andrade e Silva (2011, p. 2) observaram que “na passagem da álgebra aritmética para a álgebra das equações e desta para a álgebra funcional, há uma ressignificação de conceitos”. O que implicará na elaboração de novos acordos e negociações entre professores e alunos envolvidos na construção deste novo saber: o conceito de função. Eles perceberam ainda que este estudo introduzido de maneira geral no 9º ano do ensino fundamental e desenvolvido no 1º ano do Ensino Médio, “não tem se mostrado de relevância significativa para os alunos, nem tampouco vem despertar a curiosidade destes”. (ANDRADE; SILVA, 2011, p. 3).

> A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental e por isso muito dos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita. (BRASIL, 1998, p. 118).

A dificuldade na aprendizagem de álgebra segundo Andrade e Silva (2011, p. 3) é basicamente as letras que ora representam termos desconhecidos ora variáveis, verifica-se isso nos resultados da Prova Brasil, do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), que a medida que surgem questões sobre álgebra o aluno egresso da educação básica não responde satisfatoriamente, raramente atingindo o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país.

Fica evidente que o entendimento da álgebra é fundamental para o estudo de funções, então:

> Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações

> que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as 'manipulações' com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (BRASIL, 1998, p. 116).

Por isso é de extrema importância que os alunos tenham experiências de aprendizagem com recurso às tecnologias e, em particular, nos casos de exploração de situações que envolvam funções e gráficos. Assim "articular de uma maneira equilibrada as três formas mais importantes de representação de uma função: a tabelar, a gráfica e a algébrica". (NCTM, 2007 *apud* ANDRADE; SARAIVA, 2012, p. 147). Com isso os alunos poderão identificar as potencialidades e as limitações das diferentes formas de representação principalmente a algébrica.

A introdução de letras no ensino da Matemática é uma mudança significativa para os alunos, por isso deve ser de forma bem planejada. Podemos notar que a falta de um entendimento na representação algébrica das funções se deve a falta de conhecimento principalmente do que representa as letras (x), pois o aluno não consegue diferenciar quando é um valor desconhecido e quando é uma variável. Então é necessário propor atividades em todas as séries visando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.4 A IMPORTÂNCIA DA INFORMÁTICA NO ENSINO DAS FUNÇÕES

O uso da informática está presente em nossas vidas. As escolas estão sendo cada vez mais equipadas com computadores e outras tecnologias, por isso o professor precisa se atualizar e estar preparado para usá-las. É um desafio que o professor deve estar disposto a enfrentar para melhorar o ensino da Matemática. Giraldo et al. (2012, P. VII) coloca que "em muitos casos, a incorporação de tecnologias digitais na escola esbarra em barreiras de ordem prática, tais como carência de recursos materiais, ou resistências políticas por parte das direções escolares".

Apesar desses problemas o uso da informática vem sendo um aliado muito importante, pois proporciona um novo processo para ensinar e aprender Matemática, agradando aos alunos de um modo geral, os quais estão cada vez mais imersos no mundo tecnológico. Eles terão uma motivação a mais para compreender melhor e mais facilmente o comportamento das funções no gráfico. Como sugerem os PCN de 1998:

> O uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática à medida que: relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;

> evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas; possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração, como parte fundamental de sua aprendizagem; permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas frente ao seu estudo. (BRASIL, 1998, p. 43-44).

Na Matemática o uso das tecnologias possibilita experimentar e testar hipóteses, confrontar ideias, trocar experiências, formular gráficos entre tantas outras possibilidades. “O uso pedagógico destes recursos tem sido foco de muitos estudos, uma vez que por si só eles não garantem um novo modelo educacional”. (BALDINI; CYRINO, 2012b, p. 43)

Os PCN recomendam fortemente o uso das novas tecnologias na sala de aula, com o intuito de criar ambientes investigativos, que favoreçam a aquisição do conhecimento pelo aluno (BRASIL, 2002).

Especificamente, no ensino da Matemática, os PCN, salientam a necessidade de uma organização curricular que favoreça o desenvolvimento das competências e habilidades desejadas aos alunos do ensino básico.

> Assim, as funções matemáticas e a presença da tecnologia nos permite afirmar que aprender Matemática deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático. (BRASIL, 1998, p. 252).

Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento, sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos, com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

Giraldo et al. (2012, p. VIII) coloca que é importante que as atividades elaboradas “aproveitem as especificidades dos recursos computacionais para disparar investigação matemática e para revelar aspectos dos conceitos que ficariam ocultos com recursos ou representações convencionais” propiciando experiências com os conceitos mais concretos do que qualquer outro meio. Para o ensino de funções, o autor comenta que para enriquecer as atividades é necessária uma abordagem que promova “articulações múltiplas entre diferentes formas de representação e, desta forma, contribuam para uma compreensão mais qualitativa do conceito (por exemplo, relacionando as propriedades geométricas do gráfico e algébrica da fórmula de uma função, sem a intermediação de tabela de valores).” (GIRALDO et al., 2012, p. 59).

No ensino de funções a informática contribui para facilitar o esboço dos gráficos funcionais, assim possibilitando o trabalho com um maior número de funções. A utilização de *softwares* incentiva os alunos a descrever os fatos observados, estimulando a representação verbal, comparando os gráficos com os resultados algébricos e interações mais intensas e afetivas entre os alunos e também com o professor. (SOUZA; SILVA, 2006, p. 120).

Para Lemos Junior (2013, p. 4):

> O GeoGebra é um *software* que facilita a execução de atividades, amplia a sua exploração e análise, abre novas oportunidades de produzir respostas. Especificamente, possibilita trabalhar de forma dinâmica a exploração de diversas representações de funções, a exploração de procedimentos rotineiros (como traçar gráficos) de forma mais rápida e precisa, deixando os alunos mais livres para as tomadas de decisões, para a reflexão e raciocínio.

Segundo Damasco Neto (2010) nesse ambiente informatizado os objetos matemáticos passam a ter representações mutáveis, diferente dos tradicionais ambientes "lápis e papel" ou "giz e quadro-negro".

> Tal dinamismo é permitido através da manipulação direta sobre os objetos presentes na tela do computador. Por exemplo: em geometria os elementos de um desenho são manipuláveis (o centro e o raio de uma circunferência, a reta e os pontos pelos quais ela fora definida); no estudo de funções de primeiro grau as suas respectivas representações gráficas são objetos manipuláveis permitindo descrever a relação de crescimento/decrescimento entre os coeficientes e suas respectivas representações algébricas. (DAMASCO NETO, 2010, p. 69).

Outra vantagem que o GeoGebra fornece são as três diferentes janelas: gráfica, algébrica e a planilha de cálculos. Elas mostram os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (pontos e gráficos de funções), algebricamente (coordenadas de pontos e equações) e na forma de tabelas através das células da planilha de cálculo. (LEMOS JUNIOR, 2013, p. 15).

A informática auxilia bastante no ensino de funções, pois acelera o processo na obtenção do esboço dos gráficos deixando um tempo maior para comparar e analisar as diferentes funções. Com isso o aluno poderá tirar conclusões, refletir e raciocinar mais rapidamente o que não seria possível com outra metodologia aplicada.

3 FUNÇÕES

Função é um conceito que evoluiu através dos tempos, vários povos e matemáticos fizeram suas contribuições para chegar até a definição que usamos atualmente.

Neste capítulo vamos propor algumas atividades com função afim, quadrática, função inversa e composta visando uma aprendizagem significativa desses conceitos. As atividades serão aplicadas aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

3.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS FUNÇÕES

O conceito de função passou por uma evolução de forma gradativa. Encontra-se indícios que algumas ideias, ainda que vagas, tiveram início há cerca de 4000 anos. Porém, somente nos últimos séculos o desenvolvimento da noção de função se aproximou do que conhecemos atualmente. Para Youschkevich (1976) *apud* Souza e Mariani (2005, p. 1244-1245) o desenvolvimento da noção de função divide-se em três etapas principais, sendo elas:

> *Na Antiguidade*: Nesta época verifica-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar a noção de variáveis e funções;
>
> *Na Idade Média*: Época em que se expressavam as noções de funções sob forma geométrica e mecânica, porém ainda prevalecendo as descrições gráficas ou verbais;
>
> *No Período moderno*: A partir do século XVI e especialmente durante o século XVII, começaram a prevalecer as expressões analíticas de função, sendo que o método analítico de introdução à função revolucionou a Matemática devido à sua extraordinária eficácia, e assegurou a esta noção um lugar de destaque em todas as ciências exatas.

Na Antiguidade, a noção de dependência pode ter tido início para controle do rebanho, onde se faziam relações dos animais com pedras, nós em corda, riscos em madeiras e ossos, contagem com as mãos e outros, conforme ilustram Alkimim e Paiva (2012, p. 44):

> Na Pré-história, as pessoas viviam em pequenos grupos, alimentavam-se de caças e, para protegerem-se do tempo e dos inimigos, abrigavam-se em cavernas. Com o passar do tempo, os modos de vida foram se alterando e o homem deixa de ser apenas caçador e coletor, passando a ser agricultor, capturando e domesticando animais para tê-los como reserva de alimentos. Para controlar rebanhos e ter certeza de que nenhum animal havia fugido ou morto por predadores, usavam-se pedras fazendo uma relação unívoca entre o conjunto de pedras e a quantidade de animais do rebanho. A cada animal que se queria contar correspondia uma pedra. E, assim, relacionando objetos com outros objetos o homem começa a desenvolver a noção de função.

Alkimim e Paiva (2012, p. 44-45) citam também os Babilônicos e os Pitagóricos:

> Entre os babilônios, em 2000 anos a.C., ... [ ], já existiam tabelas sexagesimais. Tais tabelas de correspondência revelavam um instinto funcional. Segundo a autora a estas tabelas podem ser atribuídas uma funcionalidade, pois uma função tem sido definida como uma tabela de correspondência. Ela afirma ainda que entre os pitagóricos a ideia de função aparece no estudo de interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas, como, por exemplo, o comprimento e a altura da nota emitida, para cordas da mesma espécie, pinçadas com tensões iguais. Este estudo revelou uma interdependência entre número, espaço e harmonia. Os egípcios, assim como os babilônios, também construíram tabelas para representar correspondência.

Já para Oliveira (1997, p. 15) “o pensamento matemático da antiguidade não criou nenhuma noção geral nem de quantidade variável nem de função”.

O autor enfatiza que na Idade Média, por volta do século XII aparece pela primeira vez numa forma “mais genérica” a noção de função nas escolas de filosofia natural em Oxford e Paris. Estas escolas prosperaram e dois séculos depois “alguns matemáticos estudaram fenômenos como calor, luz, cor, densidade, velocidade, etc. A ideia de que as leis quantitativas da natureza eram leis do tipo funcional amadurecia pouco a pouco na filosofia natural.” (OLIVEIRA, 1997, p.15).

No século XIV destacou-se também Nicole Oresme (1323-1382) que desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes das formas, considerada como percussora da representação gráfica de função. Representava a intensidade de uma característica de um assunto por meio de uma figura geométrica, como por exemplo: a velocidade de um móvel de acordo com o tempo, uma linha horizontal representando o tempo (longitude) e para certos tempos dados, traçamos uma linha perpendicular (latitude) representando a velocidade nesse tempo, conforme pode ser vista na Fig. 3.1. (OLIVEIRA, 1997, p. 16).

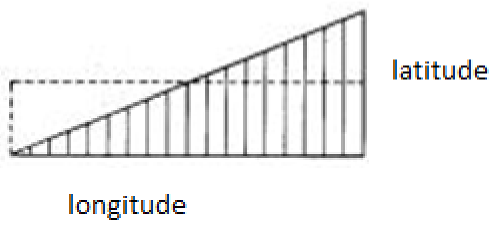


Figura 3.1-Gráfico da teoria das latitudes e longitudes
Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgIMUAK/a-matematica-na-europa-500-a-1700>

Segundo Oliveira (1997, p. 16) com esse método Oresme queria propiciar às pessoas uma compreensão mais rápida e fácil da natureza das mudanças. Suas representações marcam um passo à frente, em direção ao conceito de função ou de variável dependente. Porém, não se pode dizer que ele utilizava funções.

No Período Moderno algumas concepções foram utilizadas simultaneamente em uma mesma definição; ou então, em uma mesma época. Diferentes concepções foram empregadas pelos matemáticos conforme o Quadro 3.1.

Ano	Matemático	Concepção
1637	Descartes	Equação em que *x* e *y* mostra dependência.
1670	Newton	Quantidades relacionadas, Fluentes expressos analiticamente.
1673	Leibniz	Relação, quantidades geométricas que dependem de um ponto de curva.
1718	Johann Bernoulli	Relação entre grandezas variáveis.
1748	Euler	Expressão analítica.
1755	Euler	Dependência arbitrária.
1778	Condorcet	Dependência arbitrária.
1797	Lacroix	Dependência arbitrária.
1797	Lagrange	Expressão de cálculo, expressão analítica.
1821	Cauchy	Resultados de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes ou variáveis.
1822	Fourier	Série trigonométrica; sequência de valores.
1834	Lobatchevsky	Expressão analítica; condição para testar os números, dependência arbitrária.
1837	Dirichlet	Correspondência: para cada valor de *x* (abscissa), um único valor de *y* (ordenada); função definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de *x* em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de *y*; não é necessária uma mesma lei para todo intervalo; *y* não precisa ser definido por uma expressão matemática explícita em *x*.
1888	Dedekind	Correspondência entre elementos de dois conjuntos obedecendo à duas condições.
1888	Cantor	Subconjuntos de um produto cartesiano, obedecendo duas condições.
1939	Bourbaki	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a duas condições.

Quadro 3.1– Síntese das concepções de função
Fonte: Rossini, 2006, p. 54.

No Quadro 3.2 pode-se destacar alguns matemáticos e suas contribuições sobre a concepção de função no período moderno.

Século	Autor	Frases Geradoras
XVI	Galileu Galilei (1564-1642) Termo "função" não é usado. Noção correspondente à Lei natural: Lei quantitativa que expressa regularidades de um fenômeno natural; relações entre a variação de quantidades observáveis.	(Função) é a relação entre variáveis. Variáveis são quantidades observáveis na natureza.
XVII	Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727) – relação entre medidas associadas a uma curva, como por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva e o raio de curvatura.	Função é uma correspondência entre quantidades associadas a uma curva da Geometria. Variáveis são quantidades que assumem diferentes valores, na construção de uma curva.
XVIII	Johann Bernoulli (1667-1748): função é uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; Euler (1707-1783): função é uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.	Função é uma equação, uma fórmula. Variável é um símbolo, um elemento de linguagem.
XIX	Dirichlet (1805-1859): uma variável é um símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto de números se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor de x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é função unívoca de x. A variável x, a qual se atribuem valores á vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x , é chamada variável dependente.	Função é uma correspondência entre variáveis. Variável é um símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto de números.
XX	Grupo Bourbaki (1939): função f é um conjunto de pares ordenados de elementos, sujeitos à condição seguinte: se (a, b) e (a, c) são elementos de f então b=c.	Função é um conjunto de pares ordenados. Omite-se variável.

Quadro 3.2- Contribuições de alguns matemáticos para a concepção de função
Fonte: Garcia, 2004, p. 8.

A definição de função através dos séculos passou por "relação entre variáveis", "correspondência entre quantidades associadas a uma curva", "uma equação, uma fórmula", "correspondência entre variáveis" e "conjunto de pares ordenados". Já o conceito de variável evolui da seguinte forma: "quantidades observáveis na natureza", "diferentes valores na construção de uma curva", "um símbolo" e "elemento de um conjunto".

Leonhard Euler (1707-1783) contribuiu muito no que diz respeito às notações; em particular, insere a notação $f(x)$ para uma função de x.

Segundo Trindade (1999, p. 1)

> “As definições de função mais utilizadas no ensino atual e nos livros didáticos, são as definições de Dirichlet (1837) e de Bourbaki (1939), que na maioria, são fundidas numa só definição, conhecida como definição de Dirichlet-Bourbaki. Esta definição, extremamente abstrata, de função, só foi aceita pela comunidade Matemática na segunda metade do século XX e levou, pelo menos, 300 anos para amadurecer”.

3.2 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Dados os conjuntos X, Y, uma *função* $f: X \to Y$ (lê-se “uma função de X em Y”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ a um único elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio, e Y, contra-domínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$. (LIMA, 2012, p. 43-44).

Exemplos de funções são a *função identidade* $f : X \to X$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in X$ e as *funções constantes* $f : X \to Y$, onde se toma um elemento $c \in Y$ e se põe $f(x) = c$ para todo $x \in X$. (LIMA, 2012, p. 44).

3.3 FUNÇÃO AFIM

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (LIMA, 2012, p. 98).

Exemplo: A função identidade $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são afins as translações $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dados por $f(x) = x + b$. Os casos particulares de funções afins são as funções lineares, $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.

É possível, mediante critérios como os que serão representados logo a seguir, saber que certa função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. Neste caso obtém-se b, o **coeficiente linear** da reta que representa uma função afim, como o valor que a função dada assume quando $x = 0$. O número $b = f(0)$ é denominado o valor inicial da função f. Quanto ao coeficiente a, ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos (porém arbitrários) x_1 e x_2. Com efeito, conhecidos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad \text{e} \quad f(x_2) = ax_2 + b,$$

obtem-se

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dados $x, x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = [f(x + h) - f(x)]/h$ chama-se *taxa de crescimento* (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos x, $x + h$. (LIMA, 2012, p. 99) A taxa de crescimento é o **coeficiente angular,** a inclinação da reta que representa uma função afim.

De uma função afim representada por uma reta não-vertical no plano, escolhe-se dois pontos sobre a reta, $C(x, f(x))$ e $A(x + y, f(x + y))$, como mostra a Fig. 3.2.

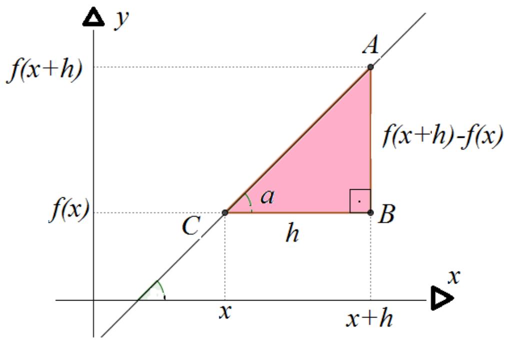


Figura 3.2-Gráfico de uma função afim *f(x)*
Fonte: Elaborada pelo autor

A variação de altura (h) do primeiro ponto para o segundo, $f(x + y) - f(x)$ recebe o nome de **elevação**. A variação horizontal do primeiro ponto para o segundo, $x + h - x$, é chamada **curso**. A razão entre as duas diferenças- a elevação dividida pelo curso- é chamada **quociente das diferenças**. (HIMONAS, 2005, p. 20).

O quociente das diferenças é chamado de inclinação da reta que corresponde ao coeficiente angular $\boldsymbol{a}$:

$$\text{inclinação} = \frac{\text{elevação}}{\text{curso}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

Uma função $f: X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$ com $x_1, x_2 \in X$, chama-se:

1. crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
2. decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
3. monótona não-decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
4. monótona não-crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Em qualquer dos quatro casos, f diz-se monótona. Nos dois primeiros (f crescente ou f decrescente) diz-se que f é estritamente monótona. (LIMA, 2012, p. 99)

O gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$. Assim:

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}.$$

Afim de que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja o gráfico de alguma função $f: X \to Y$ é necessário e suficiente que G cumpra as seguintes condições:

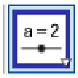
G1. Para todo $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja primeira ordenada é x.

G2. Se $p = (x, y)$ e $p' = (x, y')$ são pares pertencentes a G com a mesma primeira coordenada x então $y = y'$ (isto é $p = p'$). (LIMA, 2012, p. 91).

O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma linha reta não vertical. Com auxílio do *software* GeoGebra é possível analisar as características dos coeficientes a e b com auxílio de um controle deslizante, os quais permitem alterar os índices e coeficientes de expressões apresentadas na janela algébrica num intervalo numérico especifico, possibilitando observar estas alterações na janela de visualização.

3.3.1 Atividade com o coeficiente angular a:

Nesta atividade utilizamos o GeoGebra para traçar o gráfico de algumas funções em que faremos a variação do coeficiente angular. Para isto, algumas etapas devem ser seguidas:

- selecionar o ícone 

(controle deslizante)
- clicar na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante, que será referente ao coeficiente angular a da função.
- Escolher o intervalo de atuação, neste caso de -5 até 5.
- Digitar no campo de entrada a expressão $y = ax + 1$.

Com o controle deslizante observar o que acontece com o gráfico quando a varia de – 5 a 5.

A Fig. 3.3 apresenta o gráfico da função $y = ax + 1$ construída no GeoGebra quando $a = 1$.

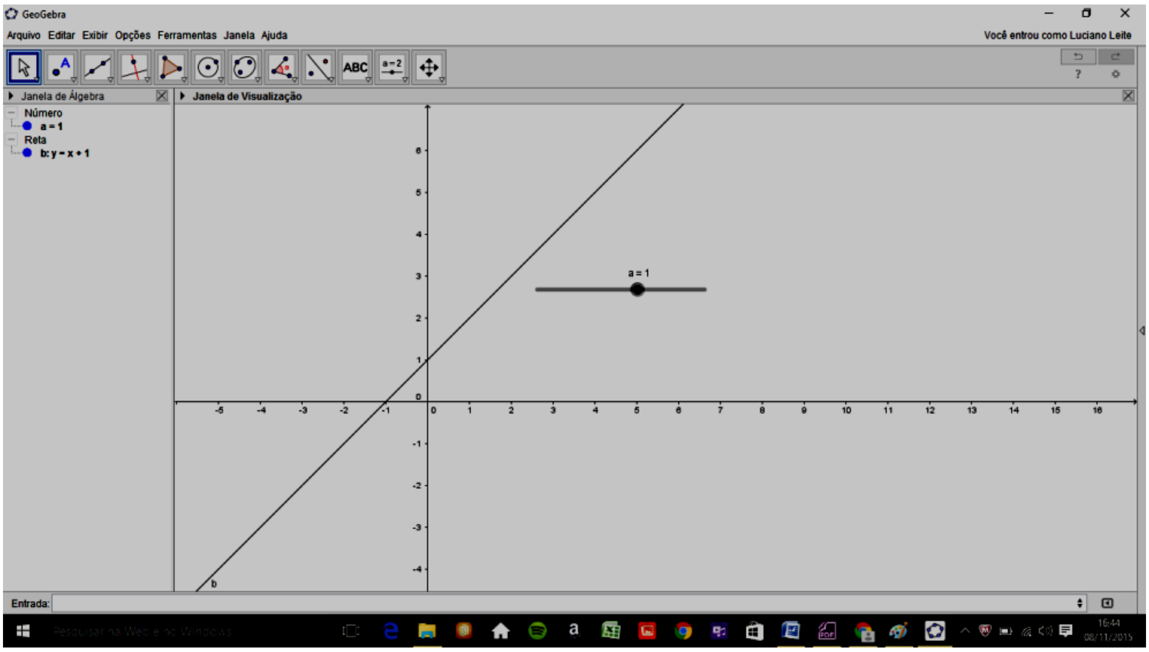
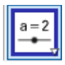


Figura 3.3- Gráfico da função: $y = ax + 1$, com $a = 1$
Fonte: Elaborado pelo autor

Com essa atividade será possível observar a variação do coeficiente angular a. Quando a possui valor positivo a função será crescente, já quando for negativo a função será decrescente.

3.3.2 Atividade com o coeficiente angular b:

Nesta atividade utilizamos o GeoGebra para traçar o gráfico de algumas funções em que faremos a variação do coeficiente angular. Para isto, algumas etapas devem ser seguidas:

- Selecionar o ícone  (controle deslizante).
- Clicar na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante, que será referente ao coeficiente angular b da função.
- Escolher o intervalo de atuação, neste caso de -5 até 5.
- Digitar no campo de entrada a expressão $y = 2x + b$.

A Fig. 3.4 apresenta o gráfico da função $y = 2x + b$ construída no GeoGebra, com $b = 1$.

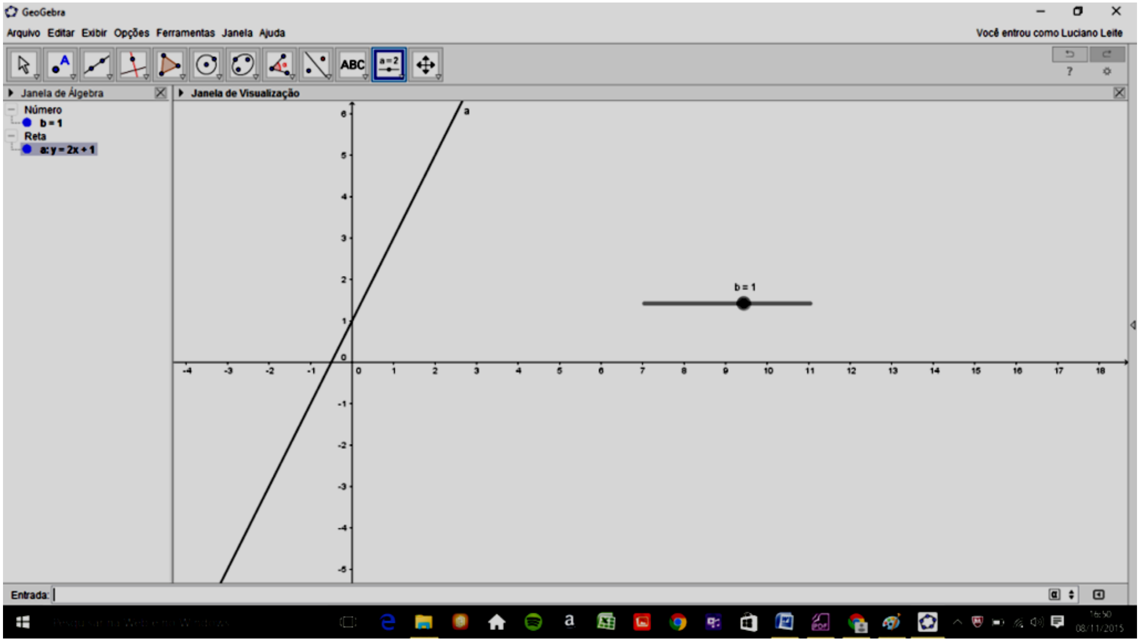


Figura 3.4- Gráfico da função: $y = 2x + b$, com $b = 1$
Fonte: Elaborado pelo autor

Após realizar a atividade, podemos notar que o coeficiente linear b está relacionado com o local onde o gráfico da função intercepta o eixo y.

3.4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Os coeficientes a, b e c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Em outras palavras, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $a = a', b = b'$ e $c = c'$. (LIMA, 2012, p. 127) Com efeito, seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $x = 0$, obteve-se $c = c'$. Então, subtraindo c de ambos os membros, tem-se $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, esta igualdade vale para todo $x \neq 0$. Neste caso, dividindo ambos os membros por x, obtém:
$ax + b = a'x + b'$ para todo $x \neq 0$. Fazendo primeiro $x = 1$ e depois $x = -1$, vem $a + b = a' + b'$ e $-a + \mathrm{b} = -a' + \mathrm{b}'$, donde concluímos $a = a'$ e $b = b'$. (LIMA, 2012, p. 127-128).

A origem das funções quadráticas pode ser ilustrada através de “um problema muito antigo” apresentado por Lima (2012, p. 133).

O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau. Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontra-se, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p.

Em termos geométricos, este problema pede que sejam determinados os lados de um retângulo conhecendo seu semi-perímetro s e a área p. Os números procurados são as raízes da equação do segundo grau

$$x^2 - sx + p = 0$$

Com efeito, se um dos números é x, o outro é $s - x$, o produto dos dois números é:

$$p = x.(s - x) = sx - x^2$$

Logo $\quad x^2 - sx + p = 0$

Observe que, se α é uma raiz desta equação, isto é, α satisfaz a $\alpha^2 - s\alpha + p = 0$, então
$\beta = s - \alpha$ também é raiz, pois

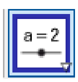
$$\begin{aligned} \beta^2 - s\beta + p &= (s - \alpha)^2 - s(s - \alpha) + p \\ &= s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 - s^2 + s\alpha + p \\ &= \alpha^2 - s\alpha + p \\ &= 0 \end{aligned}$$

Achar as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ é também um conhecimento milenar. Até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para os valores das raízes, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isto começou a ser feito a partir de François Viete, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. (LIMA, 2012, p. 134).

O gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola. Com auxilio do GeoGebra é possível analisar a características dos coeficientes a , b e c com auxílio de um controle deslizante.

3.4.1 Atividade com o coeficiente a:

Nesta atividade utilizamos o GeoGebra para traçar o gráfico de algumas funções em que faremos a variação do coeficiente a da função quadrática. Para isto, algumas etapas devem ser seguidas:

- Selecionar o ícone 

(controle deslizante) que será referente ao coeficiente $\boldsymbol{a}$ da função quadrática.

- Clicar na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante, que será referente ao coeficiente a da função.
- Escolher o intervalo de atuação, neste caso de -5 até 5.
- Digitar no campo de entrada a expressão $y = ax^2$.

A Fig. 3.5 apresenta o gráfico da função $y = ax^2$ construída no GeoGebra.

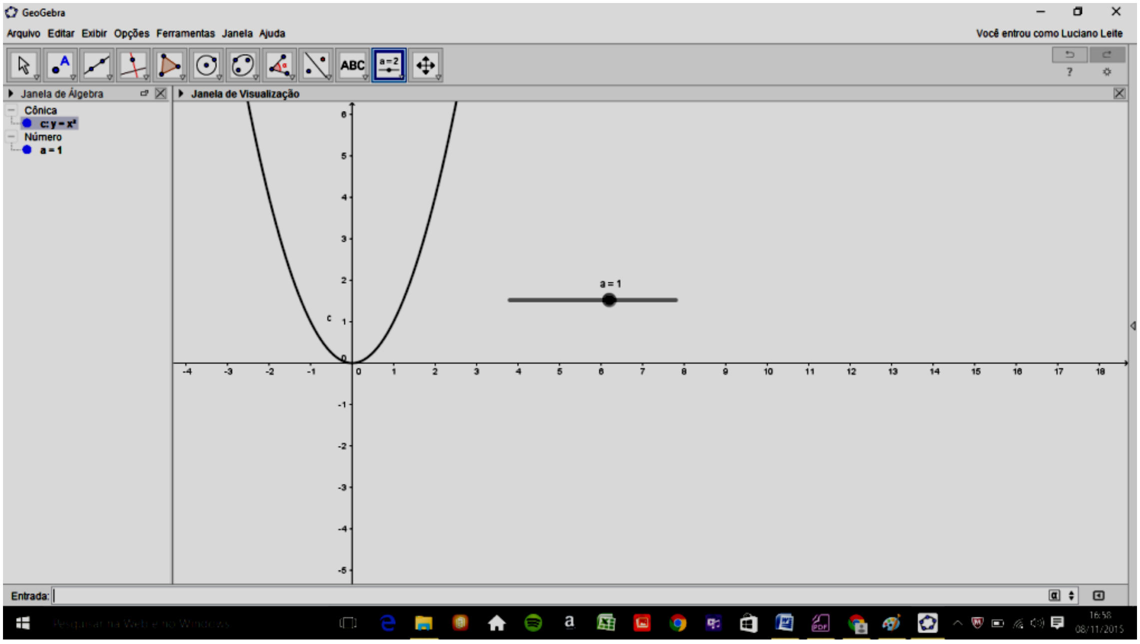
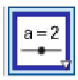


Figura 3.5- Gráfico da função: $y = ax^2$, com $a = 1$.
Fonte: Elaborado pelo autor

Com esta atividade é fácil notar que o coeficiente a da função quadrática está relacionado com a concavidade da parábola do gráfico que será gerado, se a for positivo, a concavidade será para cima e se a for negativo a concavidade será para baixo.

3.4.2 Atividade para o coeficiente b:

Nesta atividade utilizamos o GeoGebra para traçar o gráfico de algumas funções em que faremos a variação do coeficiente b da função quadrática. Para isto, algumas etapas devem ser seguidas:

- Selecionar o ícone  (controle deslizante) que será referente ao coeficiente $\boldsymbol{b}$ da função quadrática.
- Clicar na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante.
- Escolher o intervalo de atuação.

- Digitar no campo de entrada a expressão $y = x^2 + bx + 3$.

A Fig. 3.6 apresenta o gráfico da função $y = x^2 + bx + 3$ construída no GeoGebra.

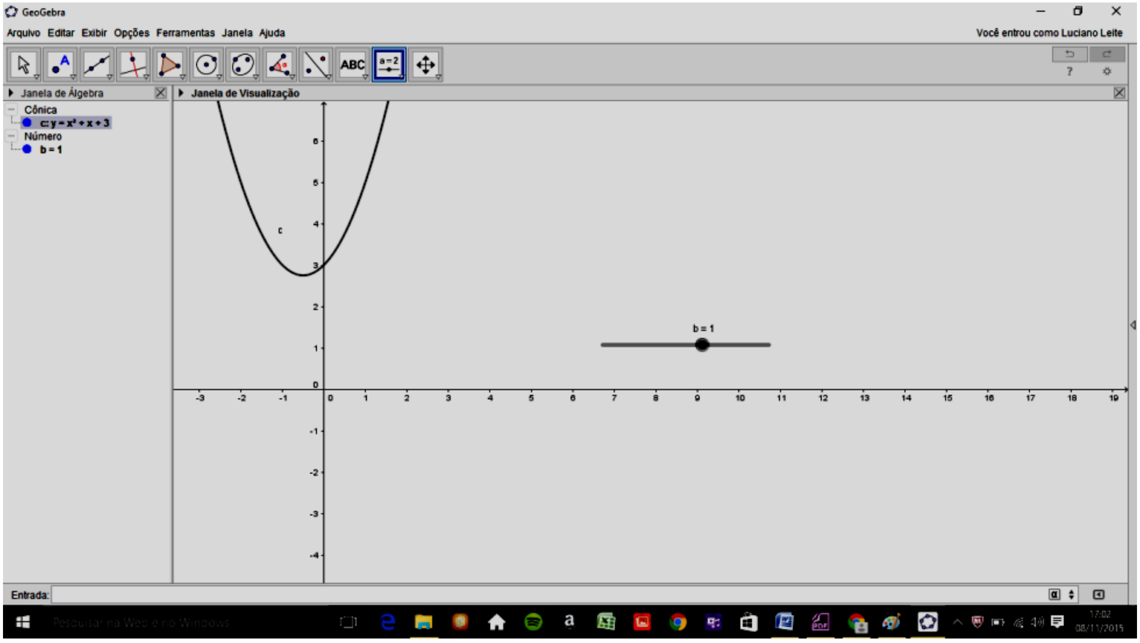


Figura 3.6- Gráfico da função: $y = x^2 + bx + 3$, com $b = 1$.
Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos observar nesta atividade com auxílio da função habilitar rastro que o vértice das funções quadráticas obtidas nos sucessivos gráficos, forma outra parábola, como podemos observar na Fig.3.7.

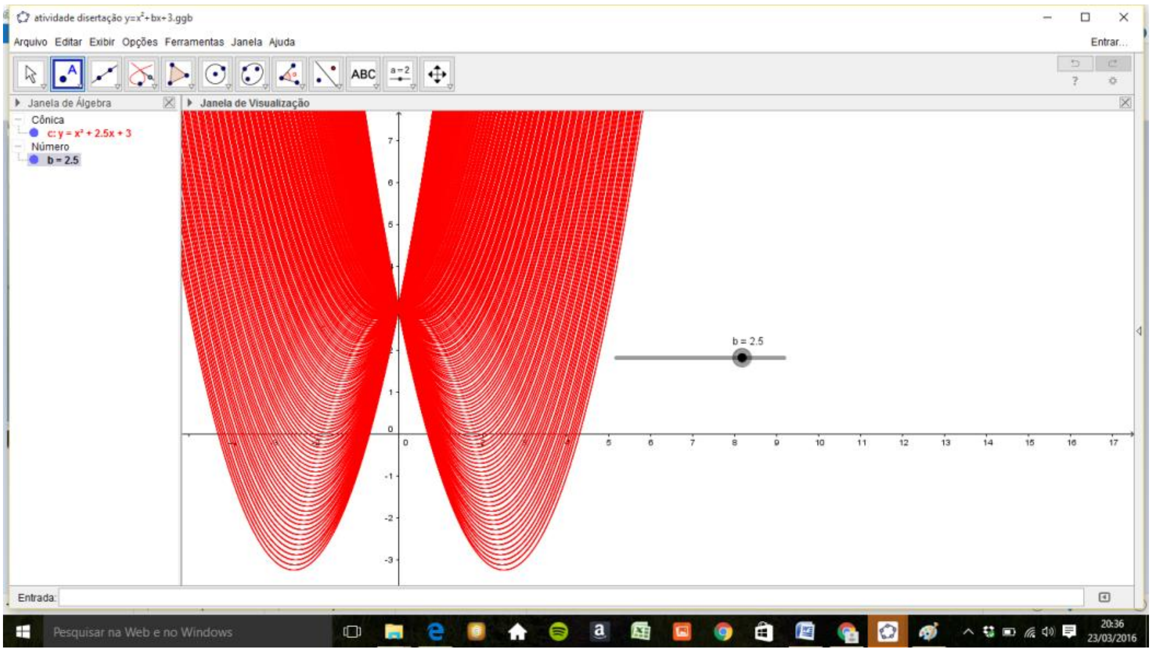
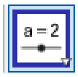


Figura 3.7- Gráfico da função: $y = x^2 + bx + 3$, com rastro.
Fonte: Elaborado pelo autor

3.4.2 Atividade para o coeficiente c:

Nesta atividade utilizamos o GeoGebra para traçar o gráfico de algumas funções em que faremos a variação do coeficiente c da função quadrática. Para isto, algumas etapas devem ser seguidas:

- Selecionar o ícone 

(controle deslizante) que será referente ao coeficiente $\boldsymbol{c}$ da função quadrática.
- Clicar na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante.
- Escolher o intervalo de atuação.
- Digitar no campo de entrada a expressão $y = x^2 - 3x + c$.

A Fig. 3.8 apresenta o gráfico da função $y = x^2 - 3x + c$ construída no GeoGebra.

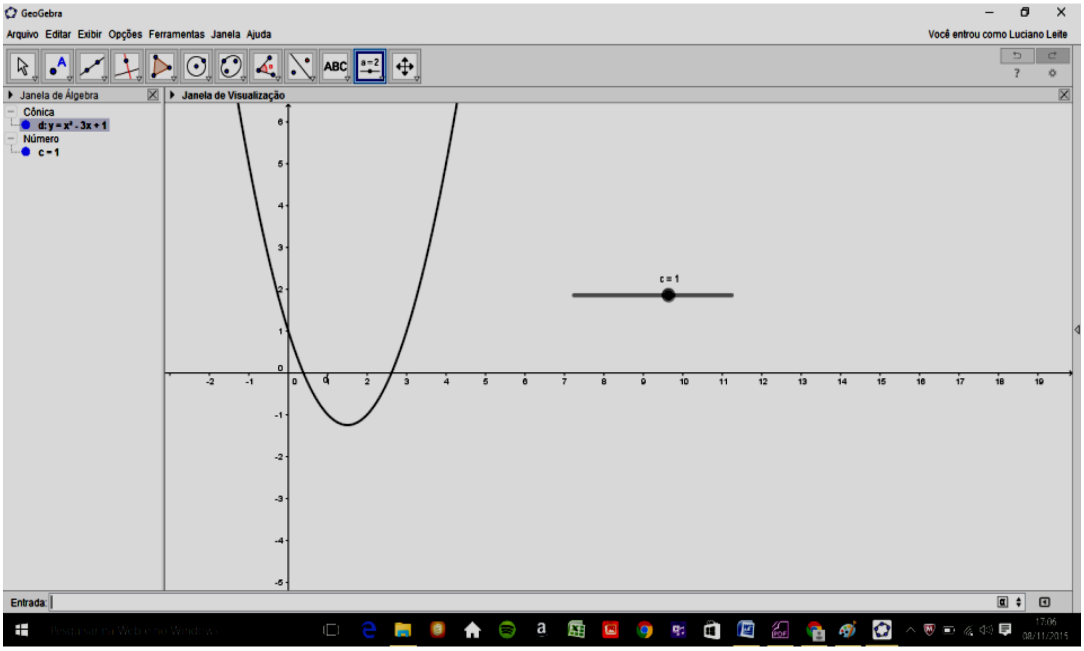


Figura 3.8- Gráfico da função $y = x^2 - 3x + c$,com $c = 1$.
Fonte: Elaborada pelo autor

O coeficiente c da função quadrática está relacionado com o local onde o gráfico intercepta o eixo y, fato este que é facilmente observado com a realização desta atividade.

3.5 FUNÇÃO COMPOSTA

Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C. Chama-se função composta de g em f à função h de A em C em que a cada imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

1º) Aplica-se a x a função f, obtendo $f(x)$;

2º) Aplica-se a $f(x)$ a função g, obtendo $g(f(x))$.

Indica-se $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$. (IEZZI; MURAKAMI, 2009, p. 214).

Pode-se indicar a função composta por $g \circ f$ (lê-se: "g composta com f" ou "g círculo f"); portanto:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

para todo $x \in A$.

Para ilustrar, suponha que $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x - 2$. Se a entrada para $g(x)$ é x, a saída é $g(x) = x - 2$. Por exemplo, para $x = 2$ tem-se $g(2) = 0$ e $f(0) = 1$, descreve a composição $f(g(x))$ quando $x = 2$.

Se usarmos $x - 2$ como entrada para f, temos:

$$f\big(g(x)\big) = f(x-2) = (x-2)^2 + 1 \tag{3.1}$$

A Eq. 3.1 denomina-se de composição de f com g e denota-se por $f \circ g$. A composição de um par de funções f e g é ilustrada na Fig. 3.9.

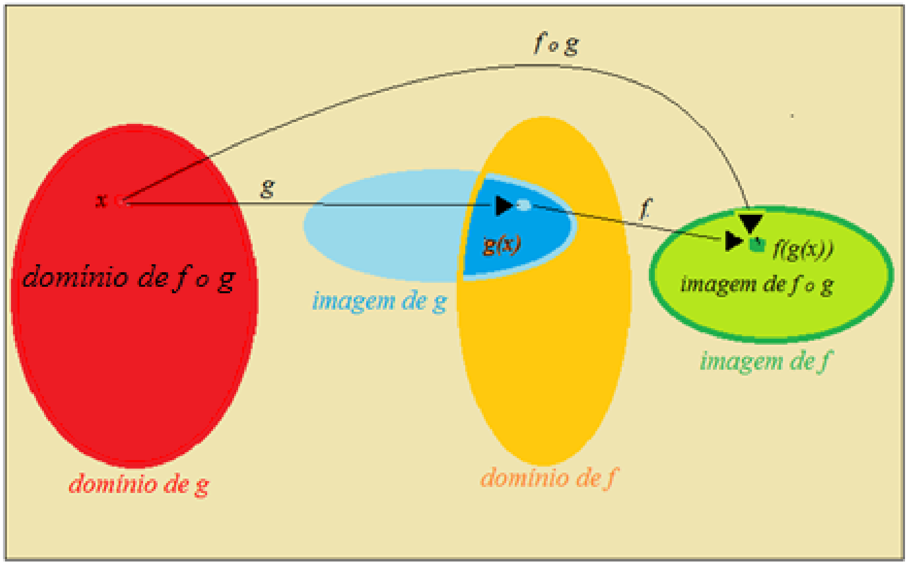


Figura 3.9 - Diagrama de uma função composta $f(g(x))$
Fonte: Elaborado pelo autor

O diagrama na Fig. 3.9 mostra como o valor $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ é calculado. Primeiro o x é introduzido na função g, produzindo a saída $g(x)$. Em seguida $g(x)$ é usado como entrada da função f, o que resulta no valor final da composição. A composição fornecida torna x como entrada para a função g, com x no domínio de g, e com, $g(x)$ está dominio de f.

Vamos observar o que acontece com as composições de duas funções f e g e suas composições $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$.

Exemplo 1 : Encontre $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$ para $f(x) = x - 2$ e $g(x) = x^2 - 1$.

Solução

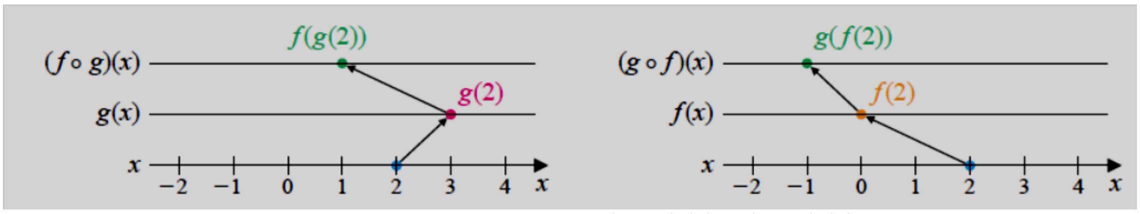


Figura 3.10-Representação de $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$
Fonte: Faires e Defranza (2011, p. 103)

Como mostrado na Fig. 3.10,

$$(f \circ g)(2) = f\big(g(2)\big) = f(3) = 1$$

e

$$(g \circ f)(2) = g\big(f(2)\big) = g(0) = -1$$

Note que $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$.

Algumas vezes pode ocorrer que $f \circ g$ seja igual a $g \circ f$, mas em geral são diferentes, como demonstrado no exemplo 1 onde temos que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Observando que quando descrevemos uma função, por exemplo, $f(x) = x^2 - 1$, significa que para qualquer elemento x no domínio, o valor de $f(x)$ é obtido elevando x ao quadrado e subtraindo 1, poderíamos, por exemplo, usar uma notação do tipo: (FAIRES; DEFRANZA, 2011, p. 103)

$$f(\square) = (\square)^2 - 1$$

Assim, substituindo $\square$ por $g(x)$ como entrada na função $f(\square)$ temos:

$$f\left(\boxed{g(x)}\right) = \left(\boxed{g(x)}\right)^2 - 1.$$

Guimarães (2010) propõe a atividade Relações e Família para introduzir função composta. Esta atividade está apresentada no anexo A.

3.6 FUNÇÃO INVERSA

A palavra inversa remete a uma inversão de algum processo ou operação. No caso das funções esta inversão envolve a troca do domínio com o contradomínio e a correspondente operação inversa desta função. (FAIRES e DEFRANZA 201, p. 111).

A função $g : Y \to X$ é a inversa da função $f : X \to Y$ quando se tem $g\big(f(x)\big) = x$ e $f\big(g(y)\big) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g. (LIMA, 2012, p. 206).

Como exemplo considere a função linear que converte a temperatura Celsius para a temperatura Fahrenheit. A relação entre essas escalas pode ser determinada por dois fatores:

- A água congela a 0°C e a 32°F.
- A água ferve a 100°C e a 212°F.

O gráfico da função afim, que converte a temperatura Celsius para a temperatura Fahrenheit, expressa como $F(C) = \mathrm{a}C + \mathrm{b}$, é uma linha que passa entre os pontos $(0, 32)$ e $(100, 212)$, e esta função linear tem inclinação:

$$a = \frac{f(C_2) - f(C_1)}{C_2 - C_1}$$

$$a = \frac{F(100) - F(0)}{100 - 0} = \frac{212 - 32}{100} = \frac{9}{5}$$

Portanto se, $F(0) = 32$ então $b = 32$, a equação é dada por:

$$F \equiv F(C) = \frac{9}{5}C + 32 \tag{3.2}$$

Pode-se resolver o termo em relação inversa, que converte a temperatura Fahrenheit em Celsius. Esta é encontrada resolvendo o termo em C em função de F na Equação Celsius para Fahrenheit na Eq. 3.1.

$$F - 32 = \frac{9}{5}C\,, \quad \text{assim} \quad C \equiv C(F) = \frac{5}{9}(F - 32) \tag{3.3}$$

Os gráficos das funções definidas pelas Eqs. 3.2 e 3.3 são mostrados na Fig. 3.11.

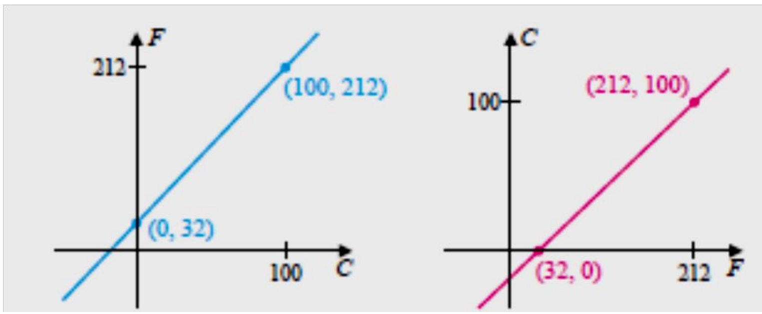


Figura 3.11- Gráficos das funções: Celsius em Fahrenheit e Fahrenheit em Celsius
Fonte: Faires e Defranza, 2011, p. 112.

Se começar com uma temperatura dada em Celsius, converter para Fahrenheit, e então converter novamente para Celsius, o resultado será a temperatura inicial. Um resultado similar ocorre para a temperatura Fahrenheit convertida em Celsius e então voltando a ser convertida para Fahrenheit.

Assim

$$F \equiv F(C) = \frac{9}{5}C + 32, \text{ se e somente se } C \equiv C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Essa é a essência da relação da função inversa. A função inversa reverte o processo e retorna ao ponto de partida. Mas nem todas as funções possuem função inversa. A função $f\,(x) = x^2$, por exemplo, não tem função inversa, uma vez que não é possível determinar, por exemplo, se o número 4 na escala de f originado em $x = 2$ ou em $x = -2$. O mesmo dilema ocorre em cada número no intervalo de f exceto em 0, como mostrado na Figura 3.12.

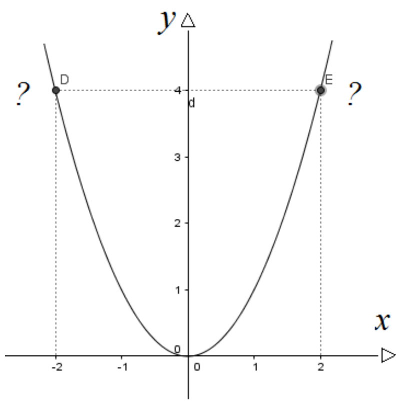


Figura 3.12- Gráfico da função: $f(x) = x^2$
Fonte: Elaborado pelo autor

Antes de efetuar a função inversa, precisa-se considerar quais funções podem ser invertidas. Tais funções são chamadas *um-para-um*. Conforme Fig. 3.13.

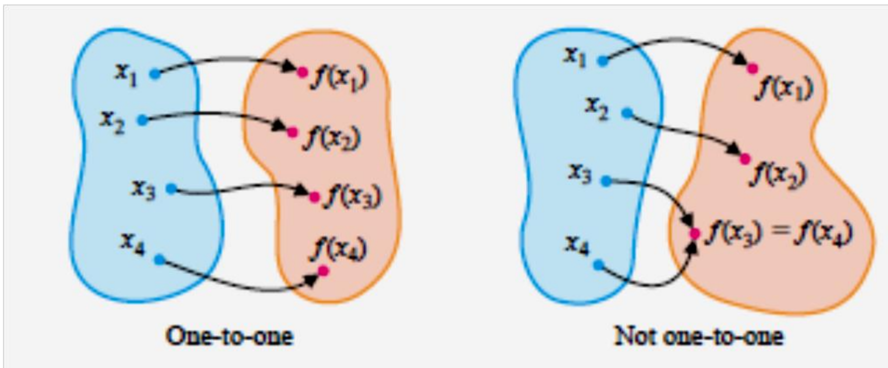


Figura 3.13- Diagramas de funções
Fonte: Faires e Defranza, (2011, p.112).

É fundamental a utilização de atividades com a finalidade de facilitar o entendimento das funções, como por exemplo, a utilização do *software* GeoGebra no entendimento dos gráfico, bem como propor exemplos aplicados no ensino de função inversa e atividades que levem o aluno a entender o funcionamento de uma função composta.

4 SUGESTÃO DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

A formação do pensamento funcional nos alunos não se trata de um processo fácil, por isso é importante propor atividades diferenciadas e recursos que estão mais próximos deles com a finalidade de auxiliá-los nessa formação. Máquinas de calcular, identificação de regularidades e o uso do Google para gerar gráficos são exemplos de atividades que aproximam mais o aluno das funções assim auxiliando no entendimento do conceito de funções.

4.1 MÁQUINAS DE CALCULAR

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 72) é conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades. Isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da ideia de função. Um exercício bem interessante para desenvolver esse raciocínio é a máquina de calcular, onde os alunos podem calcular alguns valores numéricos de entrada até chegar a calcular o que ocorre quando entra uma variável nesta máquina.

Dante (2009, p. 82-83) apresenta alguns exemplos de exercícios envolvendo máquina de calcular. Estes exemplos são apresentados no anexo B.

> A máquina de função... [ ] é um recurso extremamente importante na compreensão dos conceitos matemáticos, entretanto normalmente ela é utilizada como o problema "adivinhe a minha regra", para que os educandos encontrem a fórmula interna que expressa a regra. Desta forma é gerado um obstáculo epistemológico de que todas as funções são emitidas por uma fórmula. (BORBA, 2008, p.21).

As máquinas de calcular auxiliam na compreensão da representação tabelar e algébrica visando o entendimento da representação dos gráficos das funções. Essas relações são fundamentais para que o aluno consiga fazer ligações e conversão entre as formas de representar uma função.

4.2 REGULARIDADES

É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a construção da ideia de Álgebra pelo aluno como uma linguagem para expressar regularidades como na Fig. 4.1.

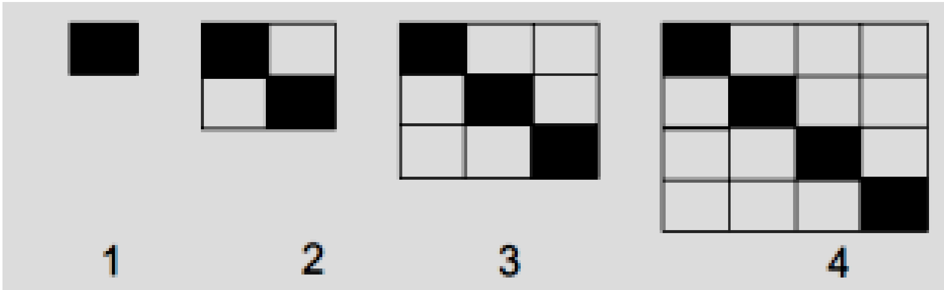


Figura 4.1- Sequência de quadrados
Fonte: Adaptada de Brasil, 1998, p. 117.

Nessa situação, o professor pode encaminhar uma atividade para que os alunos encontrem a expressão $n^2 - n$ que determina o número de quadradinhos brancos da n-ésima figura (ao retirar-se n quadradinhos pretos do total n^2 de quadradinhos) (BRASIL, 1998, p.117) .

Para chegar a esta conclusão devemos verificar que o número total de quadradinhos em cada figura $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2)$ que correspondem aos números quadrados. O número de quadradinhos pretos $(1, 2, 3, 4, \ldots, n)$ e os brancos resultarão da diferença do total de quadradinhos pelo número de quadrados pretos $(1 - 1, 4 - 2, 9 - 3, 16 - 4, \ldots, n^2 - n)$.

O trabalho com padrões pode ser uma boa forma de preparar a introdução do conceito de função. Driscoll (1999) *apud* Candeias (2010, p. 17) considera que a exploração de padrões permite, também, o desenvolvimento de raciocínios em outros domínios da Matemática, como a Aritmética ou a Geometria, mas assume um papel especialmente importante no estudo de relações funcionais e sugere três fases:

> (i) identificação de padrões e regularidades, em que a ideia principal é a extracção da informação relevante e a identificação de regularidades, tendo em conta a situação que está a ser apresentada;
> (ii) a representação que se baseia na análise de alguns casos particulares organizados e representados de forma sistemática, usando esquemas, diagramas, gráficos e outras (geometricamente), recorrendo a números, tabelas ou pares ordenados (aritmeticamente), e fazendo uso de símbolos literais, fórmulas e correspondências;
> (iii) a generalização que pode ocorrer a vários níveis, de acordo com as idades dos alunos envolvidos. (DRISCOLL,1999 *apud* CANDEIAS, 2010, p. 17).

Os padrões numéricos fazem parte de nossa vida. Pode-se observar em várias situações certa regularidade como, por exemplo, na numeração das residências. Em um lado da rua a numeração das residências apresentam números pares e de outro, ímpares. Outros padrões numéricos podem ser encontrados na indicação dos apartamentos em prédios de acordo com os andares e localização; nos intervalos de um remédio receitado por um médico;

nas estações do ano, enchentes do rio Nilo e eventos periódicos como eleições, olimpíadas, copa do mundo e outros. O aluno precisa aprender a observar as regularidades em sua volta e o papel do professor é mostrar que a Matemática está presente e que fornece uma regra. Para desenvolver esse entendimento é necessário propor algumas situações problema que levem o aluno a desenvolver o raciocínio algébrico como, por exemplo, as atividades que fazem parte do anexo C que possuem a finalidade de encontrar a regularidade em cada sequência.

Trabalhos com a identificação de regularidades em sequências auxiliam na obtenção de uma expressão que represente esta regularidade, que posteriormente será útil para encontrar a lei de formação da função através de uma tabela ou um gráfico. Atividades estas, que auxiliam no desenvolvimento do raciocínio e o interesse pela Matemática.

4.3 GRÁFICO DE FUNÇÕES NO GOOGLE

É possível fazer alguns cálculos matemáticos direto da caixa de pesquisa do Google, por exemplo, as quatro operações, conversão de medidas entre outros. Além de oferecer a opção de resolver cálculos através do buscador, digitando uma equação vai acessar ao gráfico que ela representa, podendo ainda utilizar o zoom e verificar os valores de x e y desta função.

Para obter o gráfico da função do 1º grau: $y = 2x + 5$, basta digitar $(y = 2 * x + 5)$ conforme Fig. 4.2.

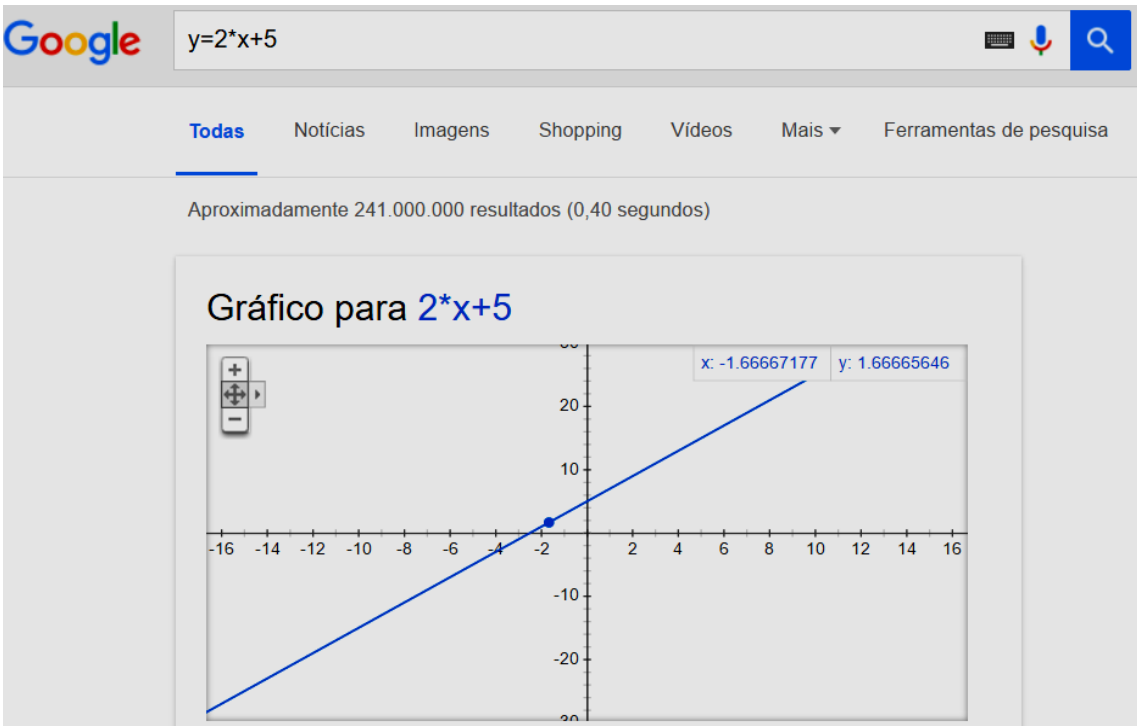


Figura 4.2- Gráfico da função do 1º grau: $y = 2x + 5$
Fonte: Elaborado pelo autor

Para obter o gráfico da função do 2º grau: $y = x^2 + 2x + 3$ basta digitar $(y = x\char94 2 + 2 * x + 3)$ conforme Fig. 4.3.

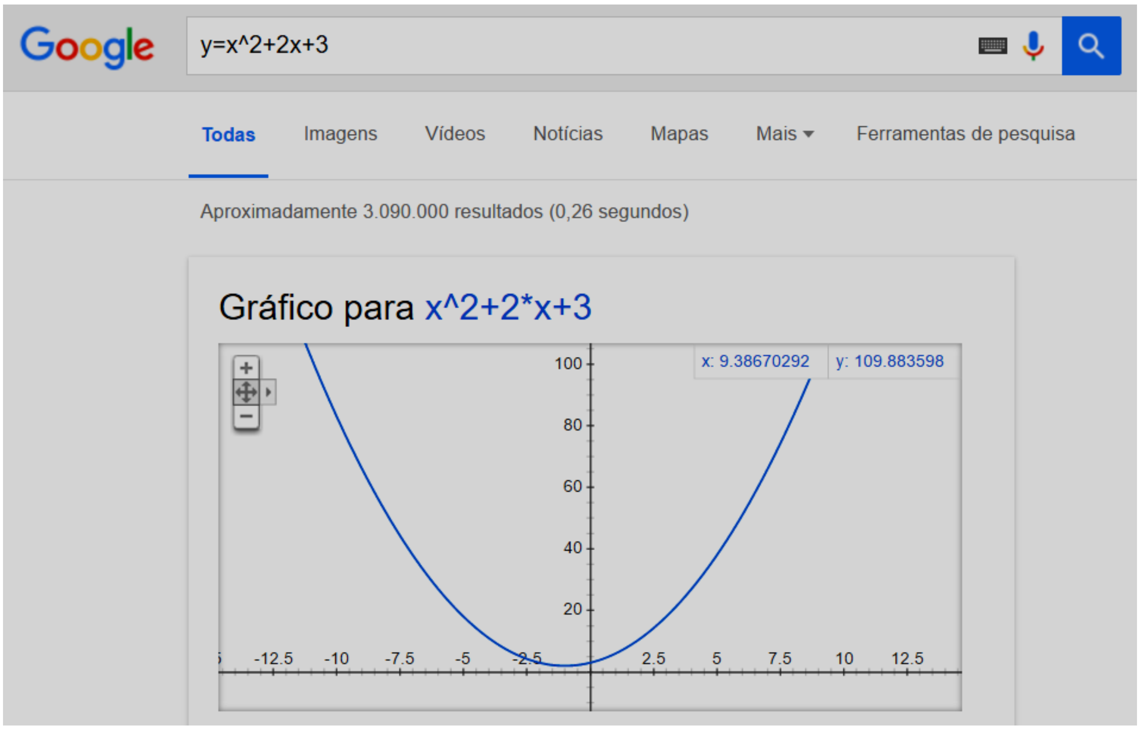


Figura 4.3- Gráfico da função do 2º grau: $y = x^2 + 2x + 3$
Fonte: Elaborado pelo autor

Com o Google pode-se elaborar uma aula bem dinâmica como, por exemplo: distribuir uma função do tipo $f(x) = ax + b$ para cada dupla. A dupla digita e observa o gráfico e podem trabalhar com o zoom identificando o que ocorre quando os valores de x aumentam ou diminuem, o local onde corta o eixo x, e ainda montar tabelas com auxílio do gráfico. Num segundo momento trabalhar com a função quadrática.

A vantagem de se utilizar o Google é o fácil acesso que temos atualmente, por isso devemos incentivar nossos alunos a usarem esse recurso para auxiliá-los na busca de soluções e nas possíveis dúvidas sobre o gráfico das funções. Assim mostrando para eles que o celular também pode ser útil no aprendizado.

5 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES

O professor é o principal responsável pelo ensino. Suas atitudes, a forma de conduzir as aulas e as atividades propostas são fundamentais para o ensino das funções. Destacam-se também a importância, dificuldades e preocupações com o uso da informática.

5.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROFESSOR E O ENSINO DAS FUNÇÕES

A sociedade atual está passando por constantes mudanças, resultado do desenvolvimento de novas tecnologias que estão cada vez mais aparecendo no nosso cotidiano. Com isso, a nossa forma de viver, de trabalhar e de aprender vem se alterando progressivamente. Portanto, é necessário que escola e educadores repensem as questões educacionais para atender às necessidades deste mundo globalizado. Para isso, a escola precisa mudar sua dinâmica e o professor é desafiado a rever e ampliar seu conhecimento constantemente.

Nesta seção nosso intuito é provocar o leitor e desta forma trazer a tona algumas reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem:

- A fala é um instrumento preferencial em sala de aula para a interação. O aluno é o que menos fala, e geralmente, a informação é transmitida de forma que seja apenas armazenada. No entanto, "os alunos mais jovens de hoje, acostumados com as dinâmicas da oralidade televisiva, ficam mais distraídos quando o professor fala de forma mais lenta e monotônica." (KENSKI, 2008, p.54).
- As tarefas matemáticas devem despertar o interesse dos alunos. O professor precisa selecionar situações e contextos para que isso ocorra, além de saber conduzi-las e desenvolvê-las com sucesso. As tarefas matemáticas e as situações propostas em sala de aula são responsáveis pelo desenvolvimento do pensamento matemático do aluno. "Estas devem conter algumas tarefas acessíveis a todos os alunos. Caso contrário, os que têm mais dificuldades podem sentir-se frustrados, acabando por abandonar a tarefa prematuramente." (BRUNHEIRA; FONSECA, 1996 *apud* CANDEIAS, 2010, p.29). Além disso, "para obter uma boa integração de tarefas exploratórias e investigativas o professor precisa não só mobilizar teorias e técnicas, mas também mobilizar as suas concepções, sentimentos e conhecimento prático." (SARAIVA, 2001 *apud* ANDRADE; SARAIVA, 2012, p.147).
- Mesmo com metodologias diferenciadas visando uma maior compreensão dos conceitos relacionados ao estudo das funções, esta não pode ser vista como a solução para

todos os problemas do ensino e sim como uma "porta", onde professor e alunos sigam em busca do conhecimento. Portanto "o processo de ensino e aprendizagem depende de muitas variáveis, a forma como o professor conduzirá as atividades, por exemplo, é crucial para que os objetivos da proposta sejam completamente atendidos." (MAGARINUS, 2013, p.95).

- Duval (1995) *apud* Maggio e Nehring (2013, p.5) aponta:

> "variação redacional" de enunciados como uma possibilidade potencial na condução de tarefas de conversão no contexto da sala de aula. A "variação redacional" significa o modo como um conteúdo cognitivo é apresentado no texto e o conteúdo cognitivo diz respeito às propriedades do conceito, que são invariantes.

- Nehring (2001, p. 43) *apud* Maggio e Nehring (2013, p. 5) também ressalta que essa possibilidade pode romper "[...] com o vício pedagógico de o professor traduzir ou reler, simplesmente, o enunciado do problema [...]". No entendimento dela, a maioria dos professores, na tentativa de minimizar as dificuldades dos alunos, tentam traduzir o enunciado.

- Ainda há de se questionar a necessidade de que funções "menos comportadas" sejam tratadas no Ensino Médio de Matemática, ou que a concepção de processo seja alcançada neste nível de aprendizado. Mas, esperava-se que ao menos os seus professores tivessem imagens conceituais mais ampliadas sobre a teoria de funções, incluindo também algumas dessas funções menos "comportadas". (ZUFFI; PACCA, 2000, p. 23).

Essas reflexões são muito importantes, no entanto, para a sua integração no âmbito da sala de aula, é necessária a promoção de cursos de formação docente que discutam as potencialidades de suas ferramentas e diferentes metodologias para sua inserção nas práticas pedagógicas. (BALDINI; CYRINO, 2012a).

5.2 O USO DA INFORMÁTICA NAS ESCOLAS

O nosso cotidiano mudou, estamos vivendo num mundo da informação, por isso é necessário o uso de novas ferramentas para o ensino de Matemática. Os professores precisam usar o computador como aliado em suas aulas. Segundo Candeias (2010, p. 4-5) "Aqueles [alunos] que geralmente têm dificuldades no cálculo numérico ou algébrico deixarão de ficar impedidos de compreender e trabalhar com ideias matemáticas importantes". Ponte (1992) *apud* Candeias (2010, p. 22) afirma que "a utilização de *software* matemático veio provocar alterações no estudo das funções libertando os alunos de cálculos fastidiosos e repetitivos".

O uso da informática não pode também ser visto como a solução de todos os problemas da escola é sim mais uma possibilidade para melhorar o ensino. Barros e

D'Ambrósio (1988, p. 29) *apud* Santos (2010, p. 31) afirmam que "o computador não é um fim em si mesmo, mas um meio, um recurso instrucional a mais, cuja eficácia dependerá da capacidade daqueles que o utilizam".

"Pesquisas mostram que professores dos diversos níveis de escolaridade não têm efetivamente integrado a tecnologia em suas aulas." (BITTAR, 2006, p.2). Isto ocorre devido a falta de conhecimento pedagógico da tecnologia por parte dos professores. Por outro lado a autora coloca que temos, muitas vezes, situações paradoxais:

> os alunos de licenciatura passam por todo seu curso sem terem estudado auxiliado pela informática, apesar de que isso poderia ter contribuído com sua aprendizagem. O paradoxo aparece ao final do seu curso, quando ele deverá compreender que é importante usar tecnologia com seu aluno, pois essa contribui com a aprendizagem matemática. Nos parece que esse é um dos desafios a serem vencidos pela formação de professores. (BITTAR, 2006, p. 3-4).

Mas Bittar (2006, p. 2) em seus estudos mostra que o uso da tecnologia é deficiente nos cursos de formação inicial de professores e, que nos cursos de formação continuada, essa discussão tem sido insuficiente para uma integração que venha a contribuir com o progresso da aprendizagem do aluno.

O uso da informática nas aulas de Matemática

> depende de uma capacitação permanente do professor, e disponibilidade de tempo para elaborar atividades que realmente explorem os recursos disponíveis promovendo a aprendizagem. Mas tudo isso pressupõe, uma forma permanente, por parte das escolas, de promover e incentivar a formação continuada dos professores, condições de trabalho dignas e um salário compatível, que permita ao professor se dedicar, com tranquilidade, à sua tarefa de ensinar. (LEMOS JUNIOR, 2013, p. 63).

Os cursos a distância muitas vezes são oferecidos como formação continuada. Ministrados geralmente por profissionais com um grande conhecimento das tecnologias, mas "sem conhecimento das especificidades educacionais e comunicativas", às vezes "sem conhecimento dos conteúdos que pretendem ensinar, eles oferecem cursos que não atendem às necessidades de aprendizagem dos alunos". (KENSKI, 2008, p. 60).

Bittar (2006, p. 11) ressalta a importância de que a formação do professor seja feita em serviço, em seu local de trabalho, assim é possível vivenciar as dificuldades e problemas do dia a dia e com tempo suficiente para amadurecimento das discussões das situações vivenciadas.

O uso da informática leva o professor para áreas desconhecidas, "o professor não tem como prever os caminhos que os alunos poderão tomar para realizar as atividades solicitadas." (LEMOS JUNIOR, 2013, p. 4). Sair da zona de conforto e perder o controle é algo que sempre vai acontecer. Problemas técnicos podem ocorrer frequentemente atrapalhando o bom andamento das atividades propostas, além disso, para a grande parte dos professores as perguntas imprevisíveis dificultam e correspondem a parte mais difícil de lidar nesta interação com os alunos.

As atividades preparadas utilizando o computador têm de ser muito bem elaboradas para não se tornarem "meras reproduções de aulas mecânicas, disfarçadas sob o uso de programas de computador." (SIQUEIRA, 2013, p. 34). Sendo assim, as atividades devem possibilitar aos alunos "explorar situações abertas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, argumentar e comunicar oralmente ou por escrito as suas conclusões." (CANDEIAS, 2010, p. 3).

Candeias (2010), Kenski (2008), Lemos Junior (2013), colocam que o professor deve ter o domínio das principais funcionalidades do programa computacional escolhido. A escolha do *software* deve estar adequado a cada conteúdo e propósito de ensino. "Um *software* deve ser escolhido em função dos objetivos do professor, e não o contrário." (BITTAR, 2006, p. 3). Cada software tem sua especificidade e precisam ser utilizados de forma adequada no ensino. "Alguns *softwares* são bastante específicos para alguns temas, portanto é importante um planejamento do professor para que a sua escolha possa explorar ao máximo o conteúdo abordado". Lemos Junior (2013, p. 14) e Bittar (2006, p. 3) colocam ainda que "um *software*, considerado a priori bom pelas possibilidades que oferece, pode ser usado de forma a não contribuir com a construção do conhecimento".

É necessário destacar a acessibilidade do *software* pela escola e pelos alunos, além da gratuidade do *software*, que "muitas vezes facilita a sua instalação mais rapidamente pela escola, principalmente nas escolas públicas, onde a compra de qualquer material requer procedimentos que podem dificultar a aquisição em tempo hábil". (LEMOS JUNIOR, 2013, p. 15).

Lemos Junior (2013, p. 62) coloca que o professor deve ser o facilitador, "dando oportunidade para o aluno fazer suas próprias conjecturas, tomando cuidado para não ser ausente e assim não contribuir para a aprendizagem". Dullius, Haetinger e Quartieri (2010, p. 145) acreditam que a educação precisa de um professor mediador do processo de interação tecnologia/aprendizagem e que "desafie constantemente seus estudantes com atividades inovadoras, tanto presenciais como a distância".

Alguns obstáculos encontrados na utilização da informática nas escolas devem ser considerados: professores sem carga horária exclusiva para os laboratórios, a resistência natural a mudanças, "a falta de espaço físico adequado para salas informatizadas (laboratórios de informática), ausência de pessoal técnico para a manutenção dessas máquinas e, principalmente, a falta de preparação e de motivação de grande parte dos seus professores" (LEMOS JUNIOR, 2013, p. 5). "As escolas não tem verba suficiente para manutenção e atualização permanente dos programas e realização de treinamentos para todo o pessoal pedagógico e administrativo do estabelecimento". (KENSKI, 2008, p. 59).

Apesar de vários problemas encontrados atualmente em relação ao uso de computadores nas aulas de Matemática, é fundamental que os professores aceitem o desafio de cada vez mais implantar os recursos tecnológicos em suas aulas. Tornando assim as aulas mais atraentes e muito mais proveitosas, despertando o interesse dos alunos pela Matemática com a finalidade de consolidar o processo de ensino-aprendizagem do conceito função.

6 CONCLUSÃO

O conceito de função é muito complexo e leva um tempo para ser assimilado. Uma série de fatores precisa ser considerada: os alunos geralmente chegam ao Ensino Médio sem os pré-requisitos necessários, o que torna difícil a aprendizagem. Por outro lado, o conhecimento do professor não está sendo suficiente para os desafios do processo ensino-aprendizagem. Alguns não se apropriaram dos conceitos no Ensino Médio e na universidade e precisam ensina-los a seus alunos.

Muitas vezes recorre-se a livros didáticos que trazem as funções em poucas páginas de uma forma sucinta, descontextualizada, pouco atrativa e de difícil entendimento. Portanto, para que ocorra uma mudança é necessário investir mais na formação continuada dos professores que estão atuando, só assim poderão ter mais alternativas para preparar melhor suas aulas e não ser reféns dos livros, bem como melhorar a formação inicial dos futuros docentes.

O estudo revelou a importância de se trabalhar com as diferentes representações das funções para a formação do conceito. É necessária uma correspondência semiótica entre elas resultando em diversas conexões que serão importantes neste processo. Os alunos do Ensino Médio precisam conhecer as diferentes características das representações de função e compreender suas relações, convertendo e transitando entre elas.

Uma das dificuldades mais acentuadas é a representação algébrica. A álgebra é um dos ramos da Matemática que utiliza letras e números para generalizar diversas operações, mas ela vem sendo ensinada de forma prematura, imprópria e sem significado. Por isso é necessário no Ensino Fundamental trabalhar a parte algébrica, inicialmente na forma verbal, sem linguagem formal (pré-álgebra) e com o passar do tempo a introdução de simbologias necessárias.

O aluno precisa pensar abstratamente, mas o uso de letras em Matemática para muitos é coisa de outro mundo, pois o “terrível x” aparece nas funções (como quantidades variáveis, ás vezes constantes), nas equações (como incógnitas) e nas expressões algébricas (como generalização- símbolo abstrato). Neste sentido, o professor tem a responsabilidade de planejar desde as séries iniciais atividades que auxiliem no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos no futuro.

O conceito de função ensinado no 9º ano do Ensino Fundamental e no 1º ano do Ensino Médio não tem relevância significativa para os alunos e não desperta o interesse deles. Uma das causas é que a noção de variável não tem sido explorada no Ensino Fundamental, conforme dados da Prova Brasil, SAEB e ENEM. Daí a importância de se construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos e estabelecer relações para desta forma acabar com o ensino baseado apenas em manipulação de expressões e equações de forma mecânica.

A informática aparece como um novo processo utilizado para ensinar e aprender Matemática. Agrada muito os alunos, pois deixa de lado os cálculos mecânicos reservando um tempo maior para que eles possam fazer suas investigações, experimentações, testar hipóteses, trocar experiências, etc. O GeoGebra é um *software* excelente para o ensino de Matemática. Ele possibilita de forma dinâmica as diferentes representações de funções com três janelas (a gráfica, a algébrica e a planilha de cálculos). E com relação ao estudo dos gráficos, por exemplo, o GeoGebra possui o controle deslizante que com seu deslocamento, gera sucessivos gráficos, deixando assim um tempo maior para que os alunos tomem suas decisões, reflitam e raciocinem em atividades bem elaboradas.

A utilização do GeoGebra ajuda na compreensão dos conceitos associados a função como: coeficientes angulares e lineares nas funções afins, na concavidade, deslocamento e local onde a parábola intercepta o eixo y nas funções quadráticas. Já nas funções inversas e compostas, situações reais facilitam o entendimento.

É importante propor, ao longo da vida escolar dos alunos, atividades que auxiliem no pensamento algébrico e funcional, como exercícios que levem a generalização de uma situação que exijam a identificação de padrões e regularidades, máquinas de calcular com exercícios do tipo adivinhe a regra, etc. O uso do Google também pode ser utilizado nas discussões com os gráficos das funções.

O professor é um dos principais agentes no processo de ensino-aprendizagem. Ele deve buscar dinâmicas nas quais os alunos sejam convidados a participar ativamente e não ser apenas receptores. Deve propor atividades desafiadoras, contextualizadas em diversos níveis, desde as mais simples e que todos consigam resolver até atividades mais complexas que envolvam funções “menos comportadas”. As metodologias utilizadas não podem ser consideradas solução e sim uma “porta” onde alunos e professor seguem juntos no mundo do conhecimento.

O professor é desafiado a investigar sua própria prática, a se motivar e ampliar o seu conhecimento constantemente. A utilização de metodologias novas, de tecnologia de informação e comunicação é um desses desafios a ser considerado. Para que isto ocorra, então é necessário investir cada vez mais em uma formação continuada que discuta as potencialidades de novas ferramentas como a utilização da informática no ensino das funções.

REFERÊNCIAS

ALKIMIM, E.; PAIVA, M. A. V. A transposição didática e o conceito de função. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, Vitória- ES, v. 2, n. 02, p. 39 – 51, dez., 2012.

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito função. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,** México, v.15, n.2, p. 137–169, 2012. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33523165002

ANDRADE, S. de; SILVA, L. M. da. A Construção do Conceito de Função e o Contrato Didático. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, 15, 2011, Campina Grande. **Anais do XV EBRAPEM**. Campina Grande: UEPB, 2011. p.1-9. Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/bcbef6c8f5d28eb9c480cf3dd1a3f70d%281%29.pdf . Acesso em 07 maio 2015

BALDINI, L. A. F.; CYRINO, M. C. C. T. Função seno: uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de Matemática. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 1, p. CL-CLXIV, 2012a.

BALDINI, L. A. F.; CYRINO, M. C. C. T. O software GeoGebra na formação de professores de Matemática: uma visão a partir de dissertações e teses. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 1, p. 42-61, 2012b.

BARRETO, M. M. **Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários.** 2007**,** 215 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática e Educação Sexual)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

BARROS, J. P. D.; D'AMBROSIO, U. **Computadores, Escola e sociedade**. São Paulo: Editora Scipione, 1988 (Coleção Informática & Educação).

BASSOI, T. S. **Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do Ensino Fundamental.** 2006, 176 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

BITTAR, M. Possibilidades e dificuldades da incorporação do uso de softwares na aprendizagem da Matemática. Um estudo de um caso: o software Aplusix. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia: 2006. p.1-12.

BOOTH, R. L. **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra**. IN: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Ed.) As ideias da Álgebra, São Paulo: Atual, 1995. p. 23- 37.

BORBA, F. M. de. **Jogos matemáticos para o ensino de função.** 2008, 139 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf

_______. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental): Matemática. 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb .

________, Ministério da Educação / Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática- Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEF, 2000.

________. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. **PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF. 2002. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf .

BRUNHEIRA, L.; FONSECA, H. **Investigar na aula de Matemática**. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender Matemática (pp. 193- 201). Lisboa, 1996.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. **Funções**. 1.ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006. 129 p.

CANDEIAS, A. F. F. **Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxilio do software GeoGebra**. 2010. 257f. Dissertação (Mestrado em Didáctica da Matemática)- Universidade de Lisboa, Lisboa- Portugal, 2010.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1989.

CHAVES, M. I. de A.; CARVALHO, H.C. de. Formalização do conceito de função no Ensino Médio: uma sequência de ensino-aprendizagem. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8., 2004, Recife. **Anais do VIII ENEM**. Recife: 2004. p.1-18. Disponível em: <http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/114/conceito_de_fun%C3%A7%C3%A3o.pdf> acesso em 15 jun. 2015.

COSTA, A. C. **Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função**. 2004. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

COSTA, C. B. de J. da. **O conhecimento do professor de Matemática sobre o conceito de função**. 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)– Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

DAMASCO NETO, J. R. **Registros De Representação Semiótica E O GeoGebra**: Um Ensaio Para O Ensino De Funções Trigonométricas. 2010. 130 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação Em Educação Científica E Tecnológica, Centro De Ciências Físicas E Matemáticas, UFSC, Florianópolis, 2010.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**: Ensino fundamental: Livro do professor – 2. ed. São Paulo: Editora Ática, 2009. 296 p.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. **Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos**. IN: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da álgebra, São Paulo: Atual, 1995. p. 70-79.

DULLIUS, M. M.; HAETINGER, C.; QUARTIERI, M. T. **Problematizando o uso de recursos computacionais com um grupo de professores de matemática**. In: JAHN, Ana P.; ALLEVATO, Norma S. G. (Org.). Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores. 1 ed. Recife: SBEM-DNE, 2010, v. 7, p. 145-161.

DUVAL, R. **Semiosis et pensée humaine: Regitres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Bern: Peter Lang, 1995.

_______, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): fascículo I – São Paulo; Editora Livraria da Física, 2009.

_______, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Gráficos e equações: a articulação de dois registros.Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, maio 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96/21794>. Acesso em: 04 abr. 2016.

_______, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.2012v7n2p266/23465

FAIRES, J. D.; DEFRANZA, J. New Functions from Old. In: **PreCalculus**, fifth edition-Belmont: 2011, p. 101-113.

GARCIA, V. C. **Múltiplos significados para o conceito de função**, 2004. 8 p. Disponível em: <http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/laboratorio/texto_funcoes.pdf> Acesso em 15 jun 2015.

GIGANTE, A. M. B.; SANTOS, M. B. dos. **Práticas pedagógicas em Matemática**: espaço, tempo e corporeidade. v. 3. Erechim: Edelbra, 2012. 120 p.

GIRALDO, Victor et al. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 423 p.

GUIMARÃES, R. S. **Atividades para aprendizagem do conceito matemático de função**. 2010, 201 f. Dissertação (Mestrado Programa de Pós Graduação em Ciências Exatas)- Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, 2010.

HIMONAS, A. **Cálculo: conceitos e aplicações**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005. p. 7-27.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. vol. 1. 8ªed. São Paulo: Atual, 2009. p. 214-220.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação**. 3. ed. Campinas, SP: Papirus Editora, 2008. 147 p.

LEAL, L. C. Funções no terceiro ciclo do ensino básico - uma possível abordagem. **Revista Educação e Matemática**, vol. 15, p. 5-15, jul./set. 1990.

LEMOS JUNIOR, J. A. S. **Estudo de Funções Afins e Quadráticas com o auxílio do Computador**. 2013, 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional- PROFMAT) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande-PB, 2013.

LIMA, C. E. O. **A utilização do software GeoGebra como ferramenta para o ensino de funções**. 2013, 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática no Ensino Médio**- vol. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 264 p.

MACIEL, P. R. C. **A construção do conceito função através da História da Matemática**. 2011, 106 f. Dissertação (Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática)- CEFET, Rio de Janeiro, 2011.

MAGARINUS, R. **Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem.** 2013, 99f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

MAGGIO, D. P.; NEHRING, C. M. Prática discursiva de uma professora que conhece a teoria dos registros de representação semiótica: Desafios acerca da pergunta no ensino do conceito função. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática** Curitiba-PR: 2013. p. 1-16.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B S.; BRUCKHEIMER, M. **Dificuldades dos alunos com o conceito de função**. IN: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As idéias da álgebra, São Paulo: Atual, 1995. p. 49-69.

MENDES, M. H. M. **O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau**. 1994, 124 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- PUC do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2007). **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: APM (tradução portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics, 2000).

NEHRING, C. M. **Entendendo o enunciado do problema matemático como um texto - uma possibilidade**. 2001, 232 p. Tese (Doutorado em Educação) - UFSC, Florianópolis, 2001.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. 1997, 173f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Pontifica Universidade Católica, São Paulo, 1997.

PATARO, P. M.; SOUZA, J. **Vontade de Saber Matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012. p.161.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Secretaria de Estado da Educação. Curitiba, 2008.

PINHEIRO, J. L.; BARRETO M. C. A teoria dos registros de representação semiótica: Contribuições para a formação Matemática de professores em ambientes virtuais. In: EVIDOSOL e VII CILTEC, **Anais do Encontro Virtual de Documentação em Software Livre e Congresso Internacional de Linguagem e Tecnologia Online** – Ceará: UFMG 2013 disponível em: http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/anais_linguagem_tecnologia/article/view/4770

PONTE, J. P. **O** conceito de função no currículo de Matemática. **Revista Educação e Matemática**, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

RADFORD, L. **Some reflections on teaching algebra through generalization**. IN: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.), Approaches to algebra. Dordrecht: Kluwer, 1996. p.107 –111.

ROCHA, S. M. C. da. **Investigação histórica na formação de professore de Matemática: Um estudo centrado no conceito de Função**. 2008, 187 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)- Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias**. 2006, 383 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2006.

SAJKA, M. **A secondary school student's understanding of the concept of function – a case study**. Educational Studies in Mathematics 53, 2003. p. 229–254.

SANTOS, D. dos. **Gráficos e animações: uma estratégia lúdica para o ensino aprendizagem de funções**. 2010, 186f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

SANTOS, M. B dos. et al. A construção do conceito de função no ensino fundamental**.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8. 2004, Pernambuco. **Anais do VIII ENEM** Pernambuco: 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/1MC21923175068.pdf
Acesso e 09 maio 2015.

SARAIVA, M. **O conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática**. Tese de doutoramento. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2001.

SARAIVA, M. J.; TEIXEIRA, A. M. **Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks**. Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento nº 4 al nº 19, Itália: Palermo. (ISSN on-line 1592–4424). . (2009). p. 74–83.

SCHWARZ, O. **Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau**. Dissertação de Mestrado. PUC de São Paulo, São Paulo, 1995.

SCHOEN, H. L. **Ensinar álgebra elementar focalizando problemas**. IN: COXFORD, A. F., SHULTE, A. P. As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995. p.135-144.

SIERPINSKA, A. **On understanding the notion of function**, in "The concept of function- aspects of epistemology and pedagogy", Dubinski & Harel (Ed.), M. A. A. Notes, v.25, 1992. p. 25-58.

SIQUEIRA, D. de M. **Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio**. 2013, 61 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática)- Instituto de Ciências Matemática e de Computação- ICMC-USP, São Carlos, 2013.

SOUZA, V. D. M. de. ; MARIANI, V. C. Um breve relato do desenvolvimento do conceito Função. In: EDUCERE, 5 – Congresso Nacional da Área de Educação, 3, 2005, Curitiba. **Anais do III Congresso Nacional da Área de Educação**. Curitiba: 2005. p. 1243-1254. Disponível em http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/com/TCCI021.pdf (acesso em 18/04/2015).

SOUZA, A. R. de; SILVA, G. A. da. Desenvolvimento e análise de uma metodologia para o ensino de funções quadráticas utilizando os softwares 'parábola' e 'oficina de funções'. **Zetetiké**, Campinas: UNICAMP, v. 14, n. 25, p. 107-131, jan./jun. 2006.

STRAPASON, L. P. R**. O uso de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática no 1°ano do Ensino Médio.** 2011, 193 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática)- Centro Universitário Franciscano, Santa Maria- RS**,** 2011.

THEODOROVSKI, R. **Padrões e o trabalho com sequências recursivas: uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2014, 85 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT)- Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2014.

TINOCO, Lucia A.A. (Coord.) **Construindo o Conceito de Função**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/ UFRJ, 2001.

TRINDADE, J. A. O. **Obstáculos Epistemológicos à aprendizagem do conceito função**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999. http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/1999/Educacao_E_Trabalho/Trabalho/09_08_23_OBSTACULOS_EPISTEMOLOGICOS_A_APRENDIZAGEM_DO_CONCEITO_DE_FUNCAO.pdf acesso em 24-03-2015

URSINI, S.; TRIGUEROS, M. **La conceptualización de la variable em la enseñanza media**. Educación Matemática, México, v. 12, n. 2, 2000. p. 27-48.

VERGNAUD, G. **What is a mathematical behaviour?.** In: Theoretical frameworks and empirical facts in the Psychology Mathematics Education. Plenary Conference. ICME VI. Budapest. July 27 – august 3. 1988.

VINNER, S. **Concept definition, concept image and the notion of function**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14:3, 1983.p. 293–305.

VISEU, F. A. V. NOGUEIRA, D. Desenvolvimento do pensamento algébrico de uma aluna do 10.º ano. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 23-56, 2014.

ZACHARIADES, T., CHRISTOU, C. & PAPAGEORGIOU, E. **The Difficulties and Reasoning of Undergraduate Mathematics Students in the Identification of Functions**. Proceedings in the 10th ICME Conference. Crete, Greece: University of Athens, 2001.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. O conceito de função e sua linguagem para professores de Matemática e Ciências. **Ciência & Educação**, Bauru-SP, v.8, nº1, p. 1–12, 2002.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem Matemática de professores do Ensino Médio. **Revista Zetetikê**, Campinas-SP, v.8, n.13/14, p.7-27, jan/dez. 2000.

YOUSCHKEVICH, A. P. **The Concept of Function**. In: Arquive for History of Exact Sciences. Editions Springer, V. 16, no 1, 1976. p.37-85.

ANEXO A- RELAÇÕES E FAMÍLIA

Os exemplos a seguir, retirados de Guimarães (2010, p. 168) apresentam exemplos de árvore genealógica aplicadas no ensino de função composta.

Você sabe o que é uma árvore genealógica? É um diagrama que mostra as relações entre membros de uma mesma família! Veja o exemplo da Fig. A.1.

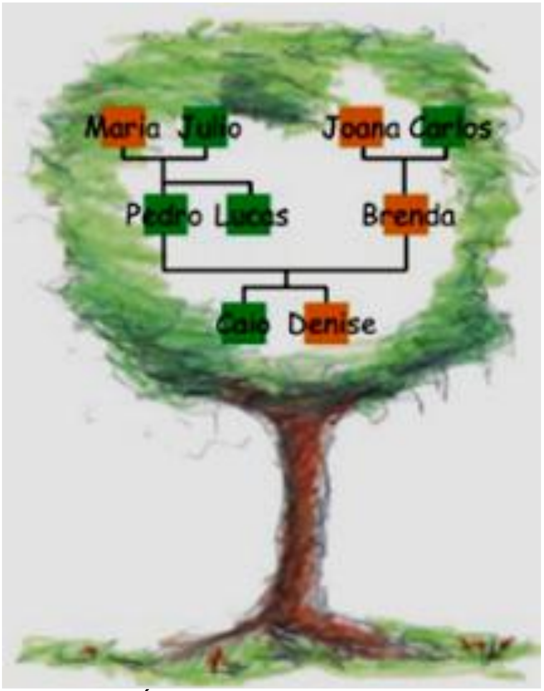


Figura A.1- Árvore genealógica de Caio e Denise
Fonte: Guimarães, 2010, p. 168.

Observe a notação a seguir que descreve as relações apresentadas na Fig.3.11:

- $m(x)$ significa "mãe de x", por exemplo, m(Pedro)=Maria.
- $p(x)$ significa "pai de x", por exemplo, p(Brenda)= Carlos.
- $ia(x)$ significa "irmã de x".
- $io(x)$ significa "irmão de x".

1. De acordo com a árvore da figura acima e os exemplos de notação, complete os itens:

(a) m(Brenda)=

(b) p(Pedro)=

(c) p(Lucas)=

(d) io(Lucas)=

(e) m(Denise)=

(f) ia (Caio)=

2. Você notou que $p(m($Denise$))=$ $p($Brenda$)=$Carlos? Complete os itens a seguir:

(a) $m(p($Denise$))=$

(b) $p(ia($Caio$))=$

(c) $m(m($Caio$))=$

(d) $p(io($Lucas$))=$

3. Será que $io(p($Denise$)=$ $p(io($Denise$))$? ☐ Sim ☐ Não

Como você chegou a essa conclusão?

____

____

Agora colocamos mais pessoas na família. Observe a nova árvore genealógica na Fig. A.2.

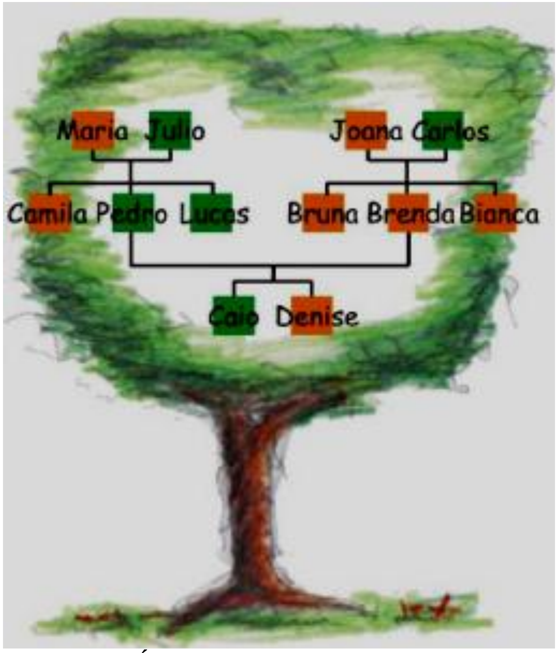


Figura A.2 - Árvore genealógica de Caio e Denise II
Fonte: Guimarães, 2010, p. 168.

Vamos acrescentar também mais duas notações:

- $fa(x)$ significa "filha de x".
- $fo(x)$ significa "filho de x".

4. Complete os itens a partir da nova árvore:

(a) $m($ $)=$ Maria

(b) $p($ $)=$ Carlos

(c) $ia($ $)=$ Brenda

(d) $fa($ $)=$ Camila

(e) $fo($ $)=$ Pedro

5. Liste 10 maneiras diferentes de se chegar à Brenda. Por exemplo: fa(Joana)=Brenda, $ia(fa$(Joana))= Brenda.

6. Liste 7 diferentes maneiras de se chegar ao Lucas.

ANEXO B- ATIVIDADES COM MÁQUINA DE CALCULAR

Os exemplos a seguir, retirados de Dante (2009, p. 82-83) apresentam exemplos de máquina de calcular.

1) Rosângela bolou uma máquina interessante. Ela está programada para “dobrar o número de entrada e subtrair uma unidade do resultado”. Por exemplo, se entrar o 20, sairá o 39. Note que o número de saída é obtido em função do número de entrada, isto é, o número que sai depende do número que entra.

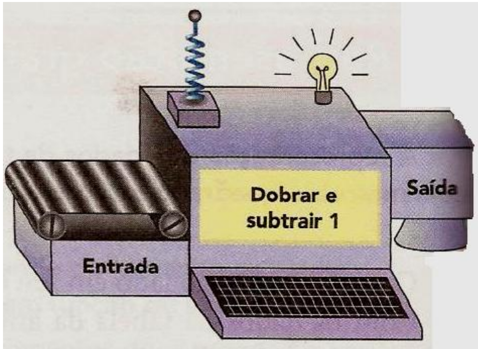


Figura B.1- Máquina de calcular: Dobrar e subtrair 1
Fonte: Dante, 2009, p. 82.

A Tab. B.1 apresenta os números de entrada e de saída da máquina criada por Rosângela (Fig.B.1).

Tabela B.1- Entradas e saídas da Máquina: Dobrar e subtrair 1

Número de entrada	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1,5
Número de saída	-3	-1									

Fonte: Fonte: Dante, 2009, p. 82.

a) Copie no seu caderno a tabela e complete com os números que faltam.

b) Se x expressa a variável número de entrada e y a variável número de saída, qual a fórmula ou lei da função que fornece y em função de x?

c) Nesse caso, qual a variável dependente?

d) Se o número de entrada for 10, qual será o número de saída?

e) Se o número de saída for 29, qual será o número de entrada?

f) O número de saída varia de forma diretamente proporcional ao número de entrada?

g) Use os dados da tabela e, em uma folha de papel quadriculado, construa o gráfico correspondente a essa situação.

2) Bruno, amigo de Rosângela, gostou da história de máquina que transforma número e inventou outra.

Figura B.2 - Máquina de calcular: Multiplicar por 3 e somar 2
Fonte: Dante, 2009 p. 82.

a) Observe o que a máquina de Bruno fez. Depois copie e complete esta tabela da Fig. B.3 em seu caderno.

Entrada: x		Saída: y
–2	→	–4
–1	→	–1
0	→	+2
1	→	+5
2	→	+8
3	→	+11

Figura B.3- Entrada da máquina de calcular: Multiplicar por 3 e somar 2
Fonte: Dante, 2009, p. 82.

b) O número de saída (y) é dado em função de quê?

c) Qual a fórmula ou lei de formação que nos dá y em função de x?

d) Construa em uma folha de papel quadriculado um gráfico só com os dados da tabela.

e) Se colocássemos na entrada da máquina todos os números reais, como seria o gráfico?

3) As máquinas de Rosângela e Bruno fizeram o maior sucesso na sala de aula. Todos queriam construir máquinas diferentes. Veja a máquina que Rafael inventou na Fig. B.4.

Figura B.4- Máquina de calcular: Elevar ao quadrado e somar 2
Fonte: Dante, 2009 p. 83.

a) Examine a máquina de Rafael, copie a Tab. B.2 em seu caderno e complete-a.

Tabela B.2 - Entradas e saídas da Máquina: Elevar ao quadrado e somar 2

Número de entrada	-2	-1	0	1	2	3	4
Número de saída	6	3					

Fonte: Dante, 2009, p. 83.

b) Qual é a lei dessa função?

c) A cada x corresponde um único y?

d) A cada y corresponde um único x?

e) O número de saída (y) varia de forma diretamente proporcional ao número de entrada (x)?

Atenção! Em uma função que leva x em y, a cada x sempre corresponde um único y, mas nem sempre a cada y corresponde um único x.

ANEXO C - ATIVIDADES COM REGULARIDADES

Este anexo apresenta atividades envolvendo o conteúdo de regularidades. As atividades foram extraídas de Dante (2009), Guimarães (2010), Pataro e Souza (2012) e Viseu e Nogueira (2014).

Atividade1

Regularidade na obtenção de quadrados com o uso de palito de fósforos.

Figura C.1- Quadrados obtidos com palitos de fósforo
Fonte: Dante, 2009, p. 89.

Continuando a sequência da Fig. C.1, determine:

a) a expressão que indica $\boldsymbol{P}$ de palitos em função do número $\boldsymbol{x}$ de quadrados;

b) quantos palitos são necessários para formar 9 quadrados;

c) quantos quadrados são formados com 16 palitos;

d) a expressão de $\boldsymbol{x}$ em função de $\boldsymbol{P}$. (Dante, 2009, p. 89).

Atividade 2

Regularidade na obtenção de triângulos com lápis.

a)Desenhe a próxima figura e complete a quantidade de lápis.

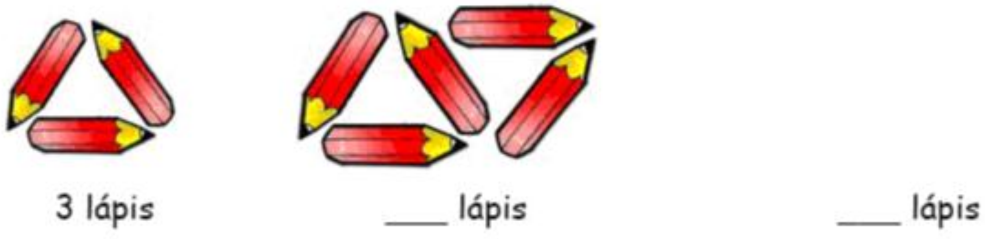


Figura C.2 - Triângulos obtidos com lápis
Fonte: Guimarães, 2010, p. 173.

b) Você notou uma regra de formação? Para obter mais um triângulo basta acrescentar sempre mais________ lápis.

c) Cada novo triângulo é formado acrescentando apenas mais _____ lápis, porém o primeiro triângulo precisou de ____ lápis, ____ a mais que qualquer outro.

d)Termine de preencher os valores correspondentes na Tab. C.1, onde T é a quantidade de triângulos formados com L lápis:

Tabela C.1 - Quantidade de lápis (L) necessários para formar Triângulos (T)

T	1	2	3	4	5	6	7	10
L								

Fonte: Guimarães, 2010, p. 173.

e) Usando $L(T)$ para dizer “lápis necessários para formar T triângulos”, calcule:

e1)$L(10)$

e2)$L(15)$

e3)$L(22)$

e4)$L(\_\_)=33$

f)Qual poderia ser uma fórmula geral para obter a quantidade $L(T)$ de lápis necessários para construir T triângulos?

$L(T)$=__________

Atividade 3

Regularidade na inserção de quadrados no interior de um retângulo quadriculado.

Observe a sequência:

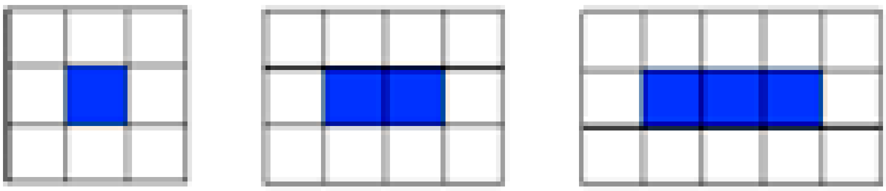


Figura C.3 - Quadrados interiores num retângulo quadriculado
Fonte: Guimarães, 2010, p. 172.

a)Desenhe a quarta figura.

b)Quantos quadradinhos azuis têm a 10ª figura.

c)Complete a tabela C.2. (A última linha da tabela servirá para responder os próximos itens).

Tabela C.2- Número de quadradinhos em branco, preenchidos e totais da Fig.C.2.

Número da ordem da figura	Número de quadradinhos em branco	Número de quadradinhos preenchidos (azuis)	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			
6ª			
7ª			
15ª			
Nª			

Fonte: Guimarães, 2010, p. 172.

d)Qual é a fórmula que expressa a quantidade $A(n)$ de quadradinhos azuis em função da ordem n da figura?

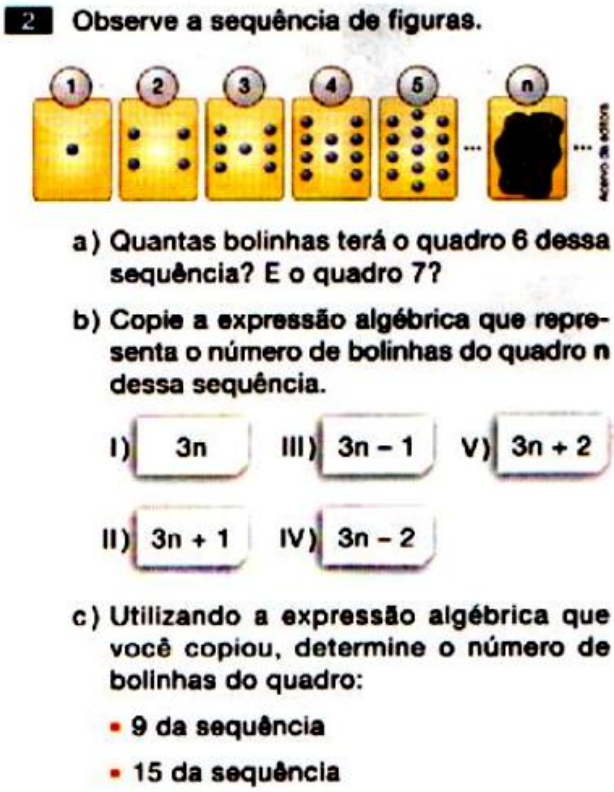
e)Calcule

e1)$A(11)$

e2)$A(20)$

Atividade 4

Regularidade no aumento de bolinhas na sequência das figuras.



2 Observe a sequência de figuras.

1 2 3 4 5 ... n ...

a) Quantas bolinhas terá o quadro 6 dessa sequência? E o quadro 7?

b) Copie a expressão algébrica que representa o número de bolinhas do quadro n dessa sequência.

I) 3n III) 3n – 1 V) 3n + 2

II) 3n + 1 IV) 3n – 2

c) Utilizando a expressão algébrica que você copiou, determine o número de bolinhas do quadro:

- 9 da sequência
- 15 da sequência

Figura C.4 - Exercício com sequência de figuras
Fonte: Pataro e Souza, 2012, p. 161.

Atividade 5

Regularidade na sequência com quadradinhos

Observe a sequência da Fig. C.5:

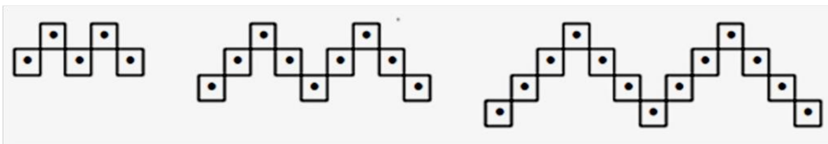


Figura C.5 - Sequência com quadradinhos
Fonte: Viseu e Nogueira 2014, p. 53.

Quantos pontos terá a 30.ª figura? Apresenta o teu raciocínio (VISEU; NOGUEIRA, 2014, p.53).