UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA – PROFMAT

LUCIANE APARECIDA DE FREITAS STRUMINSKI

USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

PONTA GROSSA
2016

LUCIANE APARECIDA DE FREITAS STRUMINSKI

USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luciane Grossi

PONTA GROSSA
2016

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Struminski, Luciane Aparecida de Freitas

S927 Uso de jogos no ensino de matemática: uma proposta didática para o ensino de probabilidade/ Luciane Aparecida de Freitas Struminski. Ponta Grossa, 2016.

98f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Profª Drª Luciane Grossi.

1.Probabilidade. 2.Jogos. 3.Ensino-aprendizagem de Matemática. 4.Proposta Didática. I.Grossi, Luciane. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 519.2

TERMO DE APROVAÇÃO

LUCIANE APARECIDA DE FREITAS STRUMINSKI

USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Dissertação aprovada para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa, 25 de fevereiro de 2016

LGrossi
Prof.ª Dr.ª Luciane Grossi
Universidade Estadual de Ponta Grossa

Fabiane de Oliveira
Prof.ª Dr.ª Fabiane de Oliveira
Universidade Estadual de Ponta Grossa

RGuapo
Prof. Dr.ª Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina

Dedico esse trabalho a minha família, Pai, Mãe, Irmãos e Sobrinhos, que durante toda minha vida me apoiaram e acreditaram em mim. Além disso não poderia deixar de dedicá-lo àquele que me completa, me apoia, me incentiva e me faz ser cada dia mais feliz, ao meu amado esposo, Paulo Roberto Costa Struminski Junior.

AGRADECIMENTOS

Se você está lendo esta página é porque eu consegui! E confesso: não foi fácil chegar até aqui.

Do exame de admissão até a qualificação, foram horas de viagens e estudos, sempre com muita dedicação.

Neste importante momento quero agradecer a todos que sempre confiaram em mim.

Primeiramente a Deus, que iluminou o meu caminho durante essa caminhada.

Agradeço a meus pais, irmãos, tios e sobrinhos que sempre me apoiaram e me incentivaram, não me deixando nunca parar de acreditar e lutar.

Aos amigos que Deus colocou em meu caminho e me acompanharam durante esses anos de estudo.

Aos colegas das escolas Caetano Carbone e Epaminondas Ferreira Lobo.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa, em especial, a Professora Dra. Luciane Grossi, que me acolheu como orientanda e me apoiou na elaboração deste trabalho.

E, em especial, ao meu amado esposo, Paulo Roberto Junior, que soube suportar as horas de distância e dedicação aos estudos, que soube me apoiar quando eu mais precisava, que aguentou meus momentos de angústias, ansiedades e nervosismos, que soube me amar, me apoiar e me incentivar em todos os momentos que eu precisei.

E, a todas as outras pessoas que direta ou indiretamente colaboraram com o meu sucesso.

RESUMO

Os jogos fazem parte da vida do homem desde a antiguidade. O interesse em estudá-los contribuiu fundamentalmente para o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade. Partindo da premissa de que ensinar e aprender matemática não deve ser algo cansativo e desinteressante, este trabalho tem por objetivo propor e apresentar uma proposta didática que alia as atividades propostas no material elaborado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e adotado pelas escolas estaduais deste estado à utilização de jogos didáticos que podem contribuir para o processo de ensino-aprendizagem de probabilidade. Para tal, procurou-se realizar uma pesquisa bibliográfica acerca dos temas probabilidade e uso dos jogos nas salas de aula, bem como estudar e descrever as atividades apresentadas no Caderno do Aluno e no Caderno do Professor, ambos utilizados nas escolas estaduais do estado de São Paulo. A proposta didática que visa a junção de jogos às atividades já previstas nesse material, foi aplicada numa sala de aula do 2º ano do Ensino Médio, procurando integrar as atividades do Caderno do Aluno à utilização de jogos para tratar o tema probabilidade. Descreve ainda, as características da escola onde foi aplicada a proposta, o detalhamento das atividades desenvolvidas, os materiais empregados, a avaliação do conteúdo que foi aplicada aos alunos e um questionário em que eles puderam responder e avaliar a prática utilizada.

Palavras-chave: Probabilidade, Jogos, Ensino-aprendizagem de Matemática, Proposta Didática.

ABSTRACT

The games are part of human life since ancient times. The interest in studying them has contributed fundamentally to the development of probability theory. Starting from the premise that teaching and learning mathematics should not be something tiresome and uninteresting, this work aims to propose and present a didactic proposal that combines the activities proposed in the material prepared by the São Paulo State Education and adopted by the state schools this state the use of educational games that can contribute to the teaching and learning of probability process. To this end, we tried to carry out a literature search on the topics probability and use of games in classrooms and study and describe the activities presented in the Student Notebook and Teacher's Notebook, both used in state schools of the state of Paulo. The didactic proposal to join games to the activities already planned in this material was applied in a classroom of the 2nd year of high school, trying to integrate the Student Notebook activities to use games to address the issue likely. It also describes the characteristics of the school where the proposal was applied, the details of the activities, the materials used, the evaluation of the content that has been applied to students and a questionnaire in which they were able to respond and assess the practical use.

Keywords: Probability, Games, Math Learning, Teaching Didactic Sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
MCT	Ministério da Ciência, Tecnologia e Informação
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PIB	Produto Interno Bruto
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A disciplina de Matemática é temida por muitos alunos que a consideram chata e difícil demais. Talvez, isso se deva à forma como é ensinada na maioria das escolas brasileiras, nas quais o processo de ensino-aprendizagem é centrado na apresentação e resolução de exercícios com etapas e regras pré-definidas e formais, o que acaba por mecanizar a obtenção de resultados e não estimula a participação ativa dos alunos na busca por soluções alternativas e criativas.

É crescente a quantidade de professores, em cursos e palestras, buscando maneiras de inovar e diversificar sua prática, visando tornar as aulas de Matemática mais prazerosas aos alunos.

Diversas são as pesquisas que se ocupam em estudar as diferentes metodologias a serem empregadas no processo de ensino-aprendizagem em Matemática, e muitas delas trazem como tema principal o uso de jogos para facilitar e enriquecer este processo.

Contudo, ao fazer uso dos jogos em sala, é necessário que o professor leve em consideração a importância da definição dos conteúdos e das habilidades a serem trabalhadas, se estas estão presentes nas atividades propostas, bem como planejar suas ações com o objetivo de que o jogo não se torne um mero fazer.

A Probabilidade é uma área da Matemática que estuda as chances de algo (ou fenômeno) acontecer ou se repetir. Seu estudo, muitas vezes, traz dúvidas e desconforto a alunos e professores.

Isto se deve ao fato de que no ensino tradicional deste tema recorre-se a fórmulas e regras preestabelecidas para a resolução das situações-problema que são apresentadas, deixando de lado o desenvolvimento do raciocínio e os conhecimentos já obtidos pelos alunos durante situações do dia a dia.

Para o melhor entendimento da probabilidade por parte dos alunos deve-se relacionar as aulas com situações cotidianas e envolvê-los nas atividades, fazendo uso de materiais concretos que deixam a aula mais dinâmica.

Tendo o estudo da probabilidade sua origem na análise dos jogos de cartas, dados, baralhos e roletas, atualmente chamados jogos de azar, nada melhor do que utilizar em sala de aula uma metodologia que faça uso de jogos para explorar e construir os conceitos referentes a este conteúdo.

O presente trabalho desenvolve-se por meio de uma proposta didática envolvendo diversos jogos em consonância com as atividades propostas no Currículo Oficial do Estado de São Paulo para o trabalho com o conteúdo de Probabilidade.

1.1 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

Esse trabalho tem por objetivo principal apresentar, desenvolver e analisar uma propsta didática utilizada no ensino do cálculo de probabilidades que alie os jogos às atividades propostas nos Cadernos do Aluno e do Professor da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

A proposta de aliar jogos ao currículo básico do estado de São Paulo vem ao encontro das propostas apresentadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) que sugerem que o jogo é um dos caminhos para se “fazer matemática” na sala de aula, quer seja fornecendo contextos dos problemas ou servindo como instrumento para a construção de estratégias de resolução de problemas.

Nos PCN (1998, p. 46), podemos observar a seguinte colocação:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46)

Neste contexto, o trabalho com jogos pode ser visto como uma alternativa para a elaboração de estratégias didáticas que objetivem a otimização do processo de ensino-aprendizagem de matemática, no que diz respeito à assimilação de técnicas de criação de algoritmos e utilização do raciocínio lógico-matemático na resolução de problemas.

O uso de jogos nas aulas permite ao aluno interagir com o objeto de conhecimento de maneira concreta e prazerosa, possibilitando a construção do conhecimento por meio de um processo contínuo e constante.

Esse trabalho tem por objetivos específicos:

- Compreender os conceitos fundamentais relacionados ao cálculo de probabilidade e identificar maneiras de apresentá-los aos alunos de forma mais prazerosa;

- Fazer uma análise do jogo como estratégia pedagógica e metodologia didática, incentivando o seu uso em sala de aula;

- Analisar o material adotado pelas escolas estaduais do Estado de São Paulo acerca do tema probabilidade e propor uma sequência de atividades que aliem a proposta curricular da Secretaria de Estado da Educação aos jogos.

Pretende-se mostrar que, ao fazer uso de metodologias diferenciadas como os jogos em sala de aula, é possível tornar as aulas de matemática mais atraentes e agradáveis, favorecendo o processo de ensino-aprendizagem, despertando nos alunos o gosto e interesse pela disciplina.

Este trabalho foi motivado inicialmente pela necessidade de se buscar alternativas para o trabalho com o tema probabilidade em sala de aula.

Apesar de o tema estar presente em atividades realizadas pelos alunos já no Ensino Fundamental, eles apresentam dificuldade para desenvolver e realizar as atividades propostas no Caderno do Aluno do 2º ano do Ensino Médio.

Desta forma, procurou-se aliar as atividades do currículo básico do estado de São Paulo a jogos pedagógicos que pudessem contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, colaborando para a compreensão de conceitos e sua aplicação na resolução de situações-problema presentes nos livros didáticos, questões de vestibulares e/ou até mesmo no dia a dia.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado de forma a apresentar, no capítulo 2, uma breve explanação sobre o tema probabilidade, seu desenvolvimento através dos tempos e algumas informações sobre suas aplicações em nosso cotidiano.

Neste capítulo apresenta-se ainda uma análise sobre como o tema é proposto e trabalhado no material elaborado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, além de alguns conceitos fundamentais para o trabalho e compreensão desse tema em sala de aula.

No Capítulo 3, passa-se para uma análise bibliográfica a respeito do uso de jogos de forma pedagógica, evidenciando as contribuições que esta metodologia pode trazer para o processo de ensino-aprendizagem de matemática. Ainda, descreve-se a organização do projeto, trazendo características da cidade, escola e alunos envolvidos na realização das atividades.

A proposta de trabalho realizada é apresentada no capítulo 4, junto a uma descrição das atividades desenvolvidas, os materiais empregados, a avaliação do conteúdo aplicada aos alunos e um questionário em que eles puderam responder e avaliar a prática utilizada.

Por fim, no capítulo 5, apresenta-se uma análise de desempenho dos alunos na avaliação bimestral, as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 PROBABILIDADE

Neste capítulo faz-se uma breve explanação do estudo da Probabilidade através dos tempos, apresentando conceitos e relatos referentes ao tema e que são explorados em diferentes fontes.

Posteriormente, analisa-se o material adotado pelas escolas estaduais do estado de São Paulo a respeito do trabalho com o tema Probabilidade em sala de aula e alguns conceitos fundamentais são apresentados para a compreensão deste conteúdo.

2.1 PROBABILIDADE E HISTÓRIA: UM BREVE RELATO

Segundo Iezzi et al. (2004, p. 384), “a origem dos jogos remonta aos primórdios da história da humanidade”. Segundo os autores, é possível afirmar que quase todas as culturas primitivas desenvolveram algum tipo de jogo de dados sendo que esta atividade pode estar relacionada a questões religiosas, como quando, por exemplo, através do lançamento de um dado em um altar sagrado um sacerdote poderia ficar sabendo da vontade dos deuses para uma determinada questão.

Neste caso, nada existe de aleatório nesta jogada, pois acreditava-se que o resultado dependeria única e exclusivamente da vontade dos deuses.

Gadelha (2004, p. 2) aponta que “Durante as Cruzadas vários jogos de dados foram trazidos para o Ocidente”, afirmando ainda que “o baralho moderno surgiu na França no século 14. ” (GADELHA, 2004, p. 2).

A formalização da Teoria das Probabilidades começou a se concretizar por volta do final do Renascimento, época em que se estabeleceu a “regularidade dos eventos aleatórios em condições ideais, em contraposição ao determinismo de fundo religioso ou místico que permeava o pensamento até então. ” (IEZZI et al., 2004, p. 384).

Alguns registros informam que um dos problemas de probabilidade mais antigos a serem discutidos é conhecido como "problema dos pontos”, podendo sua primeira versão impressa ser encontrada na obra *Summa*, de 1494, de autoria do frade Luca Pacioli (1445-1517).

> Num jogo de bola entre duas equipes, as apostas somam 22 ducados e são necessários 60 pontos para que uma delas seja ganhadora. Por algum

> incidente, o jogo é interrompido quando uma tem 50 pontos e a outra 30. Como dividir o prêmio em dinheiro entre as duas equipes? ” (IEZZI et al., 2004, p. 385).

Segundo Gadelha (2004, p. 2), inicialmente o problema teria sido erroneamente respondido por Pacioli.

Em 1539, o matemático, médico e astrônomo italiano, Girolamo Cardano (1501-1576), afirma que a resposta do frade estava incorreta, mas também não é capaz de apresentar uma resposta certa para o problema. (GADELHA, 2004, p. 2).

Apesar de não ter conseguido responder corretamente o problema apresentado por Pacioli, Cardano fez grandes contribuições para o estudo de probabilidade e análise combinatória. Gadelha (2004, p. 2) traz a informação de que parece ter sido de Cardano o primeiro trabalho a desenvolver princípios estatísticos de probabilidade.

De acordo com o autor, é devido a Cardano as indicações da importância de métodos combinatórios no desenvolvimento do estudo das probabilidades.

Outro matemático a se interessar pelo problema de Pacioli, foi Niccolo Tartaglia (1499-1557) que, segundo Gadelha (2004, p. 3), em sua obra *Tratado geral sobre números e medidas*, publicado em 1556, também faz referência ao problema dos pontos.

Apesar de outros matemáticos terem se interessado pelo “problema dos pontos” apresentado pelo frade italiano, em Gadelha (2004, p. 2) encontra-se a informação de que este problema só foi corretamente solucionado em 1654, por Blaise de Pascal.

Durante a leitura do texto presente nos Cadernos do Aluno, páginas 05 e 06 e do Professor, páginas 14 e 15, pode-se perceber que foram as trocas de correspondência entre os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) sobre a resolução deste célebre problema da divisão das partes que cabiam aos jogadores de um determinado jogo interrompido antes de chegar ao final, que deram origem a discussões bastante interessantes e contribuíram para a evolução no estudo sobre a teoria das probabilidades.

Segundo Gadelha (2004, p. 5), “A primeira publicação em teoria de probabilidade foi um pequeno livro intitulado *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, escrito em 1657, por **Christiaan Huygens** (1629-1695) ”, um jovem de importante família holandesa que ficou bastante conhecido devido suas importantes contribuições no campo da astronomia e ondulatória.

Outras importantes contribuições sucederam aos trabalhos de Fermat, Pascal e Huygens, dentre as quais podemos citar os estudos de Bernoulli, DeMoivre e Laplace.

Para Gadelha (2004, p. 6), a obra *Ars Conjectandi*, iniciada por Jacob Bernoulli (1644-1705) e concluída, após sua morte, por seu sobrinho, Nicolaus Bernoulli (1687-1759) , representa o primeiro grande tratado de probabilidade.

Em 1718, Abraham DeMoivre (1667-1754) publicou, em inglês, *Doctrine of Chances*, livro no qual propõem, de forma implícita, técnicas que tornam possíveis reduzir problemas de probabilidade a equações diferenciais e métodos que permitem fazer uso de funções geratrizes para solucionar essas equações. (GADELHA, 2004, p. 8). As técnicas apresentadas por DeMoivre são, posteriormente, aperfeiçoadas por Laplace.

Em Gadelha (2004, p. 9) é possível ler que "Nenhum outro livro de maior importância foi publicado até 1812 [...]". Neste ano uma importante publicação de Pierre Simon de Laplace (1749-1827), *Théorie Analytique des Probabilités,* apresenta conceitos de probabilidade que se mantiveram inalterados até o início do século XX. Segundo Gadelha (2004, p. 9), em sua obra, Laplace "fez novas contribuições, reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores".

É importante ressaltar que, embora o interesse pelos jogos de azar tenha historicamente impulsionado o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, essa interessante parte da matemática tem valiosas aplicações em outras ciências como biologia, finanças, marketing e econometria.

2.2 PROBABILIDADE NO CONTEXTO DO MATERIAL DIDÁTICO DA SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Em 2008, foi apresentada às escolas da rede estadual do estado de São Paulo uma nova estrutura curricular. Segundo a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo a nova proposta tem por objetivo apoiar o trabalho realizado nas escolas e contribuir para a melhoria da qualidade da aprendizagem dos alunos nos níveis de Ensino Fundamental (ciclo II) e Ensino Médio. (SÃO PAULO, 2001, p. 7).

A fim de garantir a implantação deste currículo em todas as escolas da rede, foi redigido um documento denominado Currículo que se organiza nas três grandes áreas de conhecimento (Linguagens e Códigos, Ciências Humanas e Ciências da Natureza) e possui um caderno específico para Matemática e suas Tecnologias.

Com o intuito de auxiliar a implementação deste currículo em sala de aula, foi criado ainda um conjunto de documentos dirigidos aos alunos e professores: os Cadernos do Aluno e do Professor, respectivamente.

Estes documentos estão organizados por disciplina/ série (ano) / bimestre e servem para orientar o trabalho do professor, pois neles os conteúdos estão organizados em situações de aprendizagem para as quais são apresentadas sugestões de atividades, metodologias e estratégias de trabalho, orientações para gestão da aprendizagem, avaliação e recuperação.

A partir do ano de 2015, tanto os Cadernos do Aluno quanto os do Professor passaram a ser organizados em dois volumes. O volume 1 contém as situações de aprendizagem referentes ao 1º e 2º bimestres e o volume 2 traz as situações de aprendizagem relativas aos 3º e 4º bimestres.

Neste cenário, o tema Probabilidade é apresentado nos Cadernos do Aluno e do Professor do 2º ano do Ensino Médio, 3º bimestre, e, sendo assim, a partir do ano de 2015, o tema é tratado nos Cadernos de volume 2 do 2º ano do Ensino Médio.

2.2.1 Breve descrição dos Cadernos do Aluno e do Professor – 2º ano do Ensino Médio – Volume 2 – Situações de Aprendizagem 1 a 4

O Caderno do Aluno do 2º ano do Ensino Médio, volume 2, traz um texto de abertura, no qual apresenta aos alunos os temas que serão objetos de estudo deste volume. Neste texto é colocado que o estudo do cálculo de probabilidade e o desenvolvimento do raciocínio combinatório já foram estudados no Ensino Fundamental, salientando que agora será realizado um aprofundamento sobre os temas. (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do Aluno, 2014, p. 3)

O escrito informa ainda que neste volume será realizado um breve apanhado da história do desenvolvimento da probabilidade, através da leitura e análise de texto que trata das correspondências trocadas entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat sobre o estudo dos jogos de azar.

A redação faz referência aos diagramas de árvores que poderão ser usados para resolver alguns problemas e exercícios apresentados no caderno, afirmando que outras formas de procedimentos e registros poderão ser usadas para resolução das questões.

Este texto é encerrado, introduzindo ao aluno o tema Geometria e os objetivos de seu estudo. Este tema, que é referente ao 4º bimestre, também está presente neste volume do Caderno, mas não é objeto de estudo do presente trabalho.

O Caderno do Professor apresenta, em seu capítulo de Orientação Geral sobre os Cadernos, a afirmação de que os temas escolhidos para compor o conteúdo disciplinar de cada volume não se afastam do que é usualmente ensinado nas escolas e apresentado nos livros didáticos, dizendo que "As inovações pretendidas referem-se às suas formas de abordagem [...]" (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 7).

No texto intitulado Conteúdos Básicos do Volume, são elencados os conteúdos a serem estudados durante o Caderno: Análise Combinatória, Cálculo de Probabilidades e Geometria Espacial Métrica, com a afirmação de que estes conteúdos "costumam trazer desconforto não apenas aos estudantes, mas também aos professores" (São PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 8).

A dificuldade em se trabalhar com estes conteúdos pode estar no fato de que, no ensino tradicional desses temas, tenta-se a classificação dos problemas em grupos, de acordo com determinado critério, e faz-se o uso de fórmulas e cálculos para resolvê-los. "Se, por um lado, tal formalização permite agilizar a resolução de situações-padrão, por outro, dificulta o enfrentamento de situações-problema reais, com contextos e dificuldades inéditas" (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 8).

Para um melhor aproveitamento dos conteúdos do volume, tanto no Caderno do Professor quanto no Caderno do Aluno, as situações de aprendizagem são apresentadas de forma que "a classificação e o formalismo tradicional sejam inicialmente relegados a um segundo plano e, apenas ao final, sejam realizados nos moldes conhecidos." (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 8).

Inicialmente, são apresentadas aos alunos situações envolvendo probabilidades desprovidas de cálculo combinatório, priorizando o fato de que podemos expressar a chance de ocorrência de um evento por intermédio de uma razão entre dois valores: a parte e o todo.

Na Situação de Aprendizagem 1 dos Cadernos do Aluno e do Professor, a noção teórica de probabilidade é explorada fazendo uso de jogos pedagógicos, que são apresentados no Capítulo 4 do presente trabalho além de serem sugeridos outros que podem auxiliar e complementar as atividades propostas.

Nesta Situação de Aprendizagem, o Caderno do Aluno apresenta um pouco da história da probabilidade através da sugestão de leitura de um pequeno texto no qual se faz referência à troca de correspondência entre os matemáticos Pascal e Fermat e a famosa discussão acerca do problema do jogo interrompido.

Durante a leitura do texto, os alunos são convidados a resolver este problema sendo em seguida apresentada a solução.

A seguir, a atividade 1 desta situação de aprendizagem traz um problema para ser resolvido que tem por origem a discussão realizada pelos famosos matemáticos.

Continuando, os alunos são convidados ao jogo: “Lançando dois dados: um jogo e alguns cálculos de probabilidade” que será descrito e analisado posteriormente nas *Aulas 5 e 6* do capítulo 4.

A Situação de Aprendizagem 1 se encerra com mais 6 exercícios, através dos quais o aluno pode colocar em prática alguns conceitos por ele adquiridos.

A introdução à Situação de Aprendizagem 2, Caderno do Professor, traz a afirmação de que “Problemas envolvendo raciocínio combinatório são, na maioria das vezes, resolvidos por intermédio de uma adição ou de uma multiplicação [...]” (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 9), sendo o principal objetivo desta situação de aprendizagem, levar o aluno a perceber a existência das duas possibilidades para resolver um problema de análise combinatória e as vantagens de uma sobre a outra.

Para isso, durante a Situação de Aprendizagem 2, no Caderno do Aluno, são propostas atividades, nas quais diferentes procedimentos e registros podem ser utilizados na busca por solucioná-las.

Nestas atividades os alunos são encorajados a construir árvores de possibilidades e diagramas para buscar a solução para as questões que lhes são apresentadas. As atividades versam sobre a escrita de números usando uma quantidade determinada de algarismos que podem ou não se repetir, que são pares ou ímpares e qual a posição ocupada por eles quando se estabelece uma sequência.

Em seguida, são apresentadas atividades com os anagramas, que podem ter ou não letras repetidas em sua palavra de origem. Na sequência, são tratados problemas que analisam as formações de filas com e sem elementos repetidos e, por fim, a formação de grupos com elementos de uma ou mais categoria.

Durante as 26 primeiras atividades da Situação de Aprendizagem 2, a resolução destas deve priorizar apenas o uso do raciocínio combinatório, aproveitando-se estas atividades para demonstrar ao aluno as diferenças entre os grupos ordenáveis e não ordenáveis.

A partir da atividade 27 sugere-se, então, introduzir aos alunos os conceitos de arranjo e combinação, relacionando-os aos agrupamentos buscados anteriormente e apresentar a eles as fórmulas para resolução das situações-problema trabalhadas. Seguem-se então mais 12 questões para serem resolvidas.

A Situação de Aprendizagem 3, Cadernos do Professor e do Aluno, versa sobre situações-problema que envolvem o cálculo de probabilidades de eventos e exigem a mobilização do raciocínio combinatório.

Essa Situação de Aprendizagem traz a informação de que “Os casos mais comuns de probabilidade envolvendo raciocínio combinatório estão associados à formação de grupos não ordenáveis [...]” (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 44), e, sob essa perspectiva, a Situação de Aprendizagem 3 inicia-se trazendo aos alunos seis situações-problema que tem por objetivo articular probabilidade e análise combinatória.

Na sequência, sugere-se que sejam realizadas atividades que tratem da análise de chances em alguns jogos oficiais de loterias sendo a situação trabalhada com dois exercícios que tratam destes casos.

Para este tipo de abordagem, sugere-se ao professor que estenda sua análise para além dos aspectos matemáticos envolvidos nessa discussão. (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 47). Como orientação, são trazidas à tona discussões a respeito de questões sociais e culturais ligadas aos jogos de azar.

A Situação de Aprendizagem 4, última situação de aprendizagem desses volumes (Cadernos do Professor e do Aluno) a tratar do tema, apresenta uma proposta em que é reforçada a importância dos problemas de probabilidades que envolvem distribuição binomial como elemento fundamental para a compreensão dos demais casos.

Para iniciar a discussão e reflexão sobre a distribuição binomial de probabilidades, as atividades da Situação iniciam-se fazendo a análise do lançamento de uma moeda certo número de vezes.

As atividades seguem fazendo referência a lançamentos repetidos de um dado e orienta o professor que faça a apresentação do binômio de Newton, por intermédio das probabilidades e não algebricamente como é de costume. “Propomos que o professor apresente o desenvolvimento do Binômio de Newton por intermédio das probabilidades, em vez de, como é mais comum, fazê-lo algebricamente” (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 54).

Após a resolução de alguns exercícios, sugere-se que seja generalizada a expressão do termo geral do binômio sem amarrá-la à resolução dos problemas.

Na Situação de Aprendizagem 4 são apresentadas quinze situações-problema, nas quais o aluno pode relacionar o raciocínio combinatório ao Binômio de Newton e ao Triângulo de Pascal.

Sobre o processo de avaliação, é salientada, durante o trabalho com probabilidade, “a importância de utilizar diferentes instrumentos de avaliação [...] em que a ausência de padrões exclusivos estimula o uso de múltiplas formas de raciocínio. ” (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 60).

Sugere-se ao professor que, durante todo percurso de trabalho, é importante que o professor valorize o raciocínio utilizado pelo aluno nas resoluções dos problemas, mesmo que esse não conduza à resposta esperada e, também, que ofereça aos alunos instrumentos de avaliação diversos, como as avaliações escritas, as atividades em grupo e a criação de problemas pelos próprios alunos. (SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Caderno do professor, 2014, p. 60).

2.3 ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS

Para compreensão e entendimento das atividades a serem aplicadas, é necessário que alguns conceitos básicos sejam apresentados e trabalhados junto aos alunos.

A seguir, apresentam-se esses conceitos de maneira formal e, posteriormente, no Capítulo 4, relata-se como se trabalhou em cada atividade de forma a aprofundá-los e desenvolvê-los.

Definição 2.1: Experimento determinístico: “um experimento é determinístico quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos”. (MORGADO et al, 2006, p. 128).

Definição 2.2: Experimento aleatório: “Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados experimentos aleatórios”. (MORGADO et al., 2006, p 128).

Definição 2.3: Espaço amostral (S): “Consideremos um experimento aleatório. O conjunto de todos os possíveis resultados deste experimento é chamado *espaço amostral*”. (IEZZI et al., 2004, p. 345).

Definição 2.4: Evento (E): “Os subconjuntos do espaço amostral serão chamados *eventos*”. (MORGADO et al., 2006, p. 129).

Definição *2.5*: Evento complementar (E^C): “Consideremos um evento E relativo a um espaço amostral [...]. Chamamos *evento complementar de E* [...] ao evento que ocorre quando E não ocorre”. (IEZZI et al., 2004, p. 347).

Definição 2.6: Probabilidade em espaços amostrais equiprováveis: Iezzi et al (2004, p. 350) afirma que

> a probabilidade de ocorrer determinado evento é dada pela r*azão entre o número de casos favoráveis* (ou número de casos que nos interessam) e o *número de casos possíveis* (ou número total de casos). (IEZZI et al., 2004, p. 350).

Isto é,

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{número\ de\ casos\ \text{"favoráveis"}}{número\ de\ casos\ \text{"possíveis"}}$$

Definição 2.7: Probabilidade condicional: Morgado et al. (2006, p. 154) traz:

> Dados dois eventos A e B, *a probabilidade condicional de B dado A* é o número $P(A\cap B)/P(A)$. Representaremos este número pelo símbolo $P(B\,|\,A)$. Temos então simbolicamente
>
> $$P(B\,|\,A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$
>
> (MORGADO et al., 2006, p. 154).

Definição 2.8: Probabilidade de dois eventos simultâneos (ou sucessivos): para se avaliar a probabilidade de ocorrerem 2 eventos simultâneos (ou sucessivos), “basta *multiplicar* a probabilidade de ocorrer um deles (p(B)) pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu ($p(A \mid B)$)". (IEZZI et al., 2004, p. 368). Ou seja,

$$p(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot p(B)$$

3 O USO DE JOGOS EM SALA DE AULA

Uma breve análise bibliográfica a respeito do uso de jogos em sala de aula é apresentada neste capítulo ressaltando algumas das contribuições que a estratégia metodológica pode trazer para o processo de ensino-aprendizagem de matemática.

A seguir descreve-se como se deu a organização da proposta didática que envolveu jogos e vídeos às atividades apresentadas no material adotado nas escolas estaduais de São Paulo (Cadernos do Aluno e do Professor), trazendo características da cidade, escola e alunos envolvidos na realização das atividades, bem como os instrumentos utilizados para realização do projeto, registro e coleta de dados.

3.1 ANÁLISE BIBLIOGRÁFICA

O processo de ensino-aprendizagem é uma relação bastante complexa não sendo possível prescrever uma receita ou fórmula mágica que resolva todas as dificuldades existentes no contexto.

Muitos dos problemas encontrados pelos professores durante as aulas de matemática estão centrados na falta de interesse e envolvimento dos estudantes durante os processos de explicação de conceitos e resolução de atividades.

Os PCN afirmam que o processo de ensino-aprendizagem deve ser bilateral, dinâmico e coletivo. Sendo necessário, portanto, que se estabeleçam parcerias entre professor e aluno e entre os próprios alunos. Neste aspecto, inúmeras são as estratégias que podem ser usadas a fim de estabelecer uma relação dialógica em sala de aula e dentre elas podem-se destacar os jogos e brincadeiras, pois:

> permitem o desenvolvimento de competências no âmbito da comunicação, das relações interpessoais, da liderança e do trabalho em equipe, utilizando a relação entre cooperação e competição em um contexto formativo. (BRASIL, 2008, p. 28).

Ainda de acordo com os PCN,

> o jogo oferece o estímulo e o ambiente propícios que favorecem o desenvolvimento espontâneo e criativo dos alunos e permite ao professor ampliar seu conhecimento de técnicas ativas de ensino, desenvolver capacidades pessoais e profissionais para estimular nos alunos a capacidade de comunicação e expressão, mostrando-lhes uma nova maneira, lúdica,

> prazerosa e participativa, de relacionar-se com o conteúdo escolar, levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos. (BRASIL, 2008, p. 28).

O uso de jogos nas aulas de Matemática tem por objetivo tornar as aulas mais prazerosas, mudando a rotina da sala de aula e despertando o interesse do aluno por esta disciplina.

Para Smole; Diniz e Milani (2007, p. 09), o trabalho com jogos em sala de aula, "auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização", que estão intimamente relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio lógico.

Pode-se afirmar que ao se fazer uso de jogos em sala de aula, não é preciso utilizar-se apenas dos jogos prontos, nos quais procedimentos e regras já estão determinados, mas é possível e necessário estimular a criatividade e o desenvolvimento de jogos relacionados com os assuntos discutidos em sala de aula e que estejam intimamente relacionados com situações vividas diariamente pelos alunos, pois desta forma o jogo apresenta a eles a oportunidade de entrar em contato com uma matemática mais prática, que pode ser vivenciada dentro e fora da sala de aula.

Para Moura (1994 apud Ribeiro, 2008, p. 19),

> a importância do jogo está nas possibilidades de aproximar a criança do conhecimento científico, vivendo 'virtualmente' situações de solução de problemas que os aproxima daquelas que o homem 'realmente' enfrenta ou enfrentou. (MOURA apud RIBEIRO, 2008, p. 19).

Neste aspecto, os jogos podem ser utilizados para introduzir conceitos ou aprofundar conteúdos já trabalhados e devem ser cuidadosamente escolhidos e preparados para que possam alcançar seus objetivos.

É necessário que o professor acompanhe a maneira de jogar dos alunos, fazendo intervenções sem perturbar a dinâmica do grupo, mas de modo a fazer questionamentos e direcionamentos a fim de orientá-los e auxiliá-los, tanto na construção de regras, quanto na obtenção de jogadas que superem possíveis dificuldades.

De acordo com Freitas (2000 apud Ribeiro, 2008, p. 20), "são as atividades envolvendo a resolução de problemas que impulsionam o processo de ensino-aprendizagem matemático", sendo a utilização dos jogos em sala de aula um dos caminhos para o desenvolvimento e superação de dificuldades diante destas situações.

Para Moura (1994, p. 21),

> o jogo será conteúdo assumido com a finalidade de desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, possibilitando ao aluno a oportunidade de estabelecer planos de ação para atingir determinados objetivos, a executar jogadas segundo este plano e a avaliar a eficácia destas jogadas nos resultados. (MOURA, 1994, p. 21).

Smole; Diniz e Milani (2007, p. 13), sustentam que através dos jogos podemos valorizar “atitudes naturais do aluno que não encontram espaço no modelo tradicional de ensino de matemática, como é o caso da curiosidade e da confiança em suas próprias ideias”.

Assim como as demais atividades realizadas em sala de aula, os jogos devem ser previamente planejados e possuir regras e, de acordo com Lara (2003, p. 25), podem ser divididos em quatro tipos, a saber: “Jogos de construção; Jogos de treinamento; Jogos de aprofundamento; e Jogos estratégicos”.

Segundo a autora, os jogos de construção são aqueles que apresentam ao aluno um assunto ainda não conhecido e para o qual, através da manipulação de materiais ou de respostas a determinadas perguntas, o aluno sente a necessidade de utilizar-se de um novo conceito ou conhecimento para resolver situações propostas pelo jogo.

Os jogos de treinamento são aqueles que permitem ao aluno utilizar várias vezes o mesmo tipo de pensamento e/ou conhecimento, podendo, não necessariamente memorizá-lo, mas entendê-lo ou generalizá-lo, aumentando sua autoconfiança e familiarização com o mesmo.

Já os jogos de aprofundamento pressupõem que o aluno já tenha construído o conceito e consiga manipulá-lo razoavelmente, visto que o objetivo destes jogos são o de aprofundar o conhecimento já adquirido.

Os jogos estratégicos se caracterizam, essencialmente, por instigar o jogador a descobrir ou desenvolver uma estratégia que o leve a vencer.

Em alguns momentos pode ser difícil e complicado classificar um jogo visto que vários fatores desconsiderados inicialmente podem surgir no decorrer do desenvolvimento da atividade. Sob esta perspectiva cabe ao professor saber explorar os imprevistos tornando os jogos ainda mais enriquecedores para o processo de ensino-aprendizagem. Sob esta perspectiva, Motta (2002, p. 105) traz que “Um jogo muitas vezes só pode ser classificado depois de seu término – e às vezes nem assim! –, pois são suas consequências que definem sua conceituação final”.

Pode-se perceber que o uso de jogos na educação matemática parece justificar-se por possibilitar ao aluno um contato com uma matemática mais lúdica e próxima de sua realidade, permitindo o aprendizado e aprofundamento de conceitos importantes desta disciplina, bem como a busca por estratégias para resolução de problemas e formalização de regras a serem utilizadas.

3.2 UTILIZANDO OS JOGOS EM SALA DE AULA - ORGANIZAÇÃO DA PROPOSTA

Nesta seção são apresentadas as características da cidade, escola e alunos envolvidos na realização das atividades, bem como relação de instrumentos utilizados para desenvolvimento das atividades, registro e coleta de dados.

3.2.1 A cidade de Itararé

A proposta didática elaborada foi desenvolvida com alunos da rede pública da Escola Estadual Doutor Epaminondas Ferreira Lobo, localizada na cidade de Itararé, um município do interior do estado de São Paulo com área territorial de 1.003,578 km².

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a população estimada para o município de Itararé no ano de 2014 era de 49.963 habitantes.

Pelo Censo Demográfico 2010, a população do município dividia-se em 44.270 na zona urbana e 3.664 na zona rural, sendo 50,93% do sexo feminino e 49,07% do sexo masculino. De acordo com dados do Instituto, cerca de 33% dos habitantes têm entre 0 e 17 anos, faixa etária atendida pela Educação Básica.

Ainda segundo o IBGE, a economia do município está baseada na oferta de serviços, sendo que este setor representa cerca de 58% do Produto Interno Bruto – PIB Municipal.

Itararé, no ano de 2015, contava com 12 escolas municipais de ensino infantil, 14 escolas municipais de ensino fundamental, 1 escola estadual de nível técnico, 2 escolas particulares de ensino fundamental e médio e 7 escolas estaduais de ensino fundamental e médio, sendo uma delas, onde se realizou esta pesquisa, de Ensino Integral.

3.2.2 O local da pesquisa

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual de Ensino Integral Doutor Epaminondas Ferreira Lobo, localizada na rua Major Salvador Ruffino, número 59, na Vila Osório em Itararé.

Durante o período de realização das atividades, a escola prestava atendimento a um total de 341 alunos oriundos de diferentes bairros da cidade. Destes alunos, 138 estavam matriculados no Ensino Fundamental e 203 estavam matriculados no Ensino Médio.

Por se tratar de uma escola que oferece ensino em período integral, os alunos do Ensino Fundamental devem permanecer na escola das 7:30h às 15:40h, tendo 8 aulas por dia; e os alunos do Ensino Médio devem permanecer na Escola das 7:30h às 16:30h, tendo 9 aulas por dia.

Durante o período de permanência dos alunos na escola são oferecidas a eles 3 refeições diárias: lanche da manhã, almoço e lanche da tarde. Não é permitido ao aluno ausentar-se da escola durante o período de aulas, salvo para realização de atividades curriculares acompanhado de professores.

No ano de 2014 foram realizadas inúmeras reformas na escola e, durante todo ano de 2015 a escola pode contar com 11 salas destinadas à realização das aulas das disciplinas curriculares e diversificadas, 3 laboratórios para realização de atividades práticas de Ciências, Química, Física, Biologia e Matemática (sendo o Laboratório 1 destinado a realização das atividades de Física e Matemática), 1 sala multiuso, 1 sala de leitura, 1 quadra coberta e 1 quadra descoberta para realização de atividades físicas, bem como amplo pátio para socialização dos alunos, refeitório com capacidade para 120 pessoas, salas específicas para direção, coordenação e hora de estudo dos professores.

A escolha da referida escola se deu por ser o local de trabalho da autora do projeto, o que facilitou a aceitação da realização do trabalho por parte da direção da escola, coordenação pedagógica, pais e alunos.

Deve-se ressaltar que a aplicação das atividades e inclusão dos jogos e vídeos não provocou alteração na sequência dos conteúdos a serem trabalhados, pois o tema escolhido faz parte do conteúdo a ser ministrado no 3º bimestre da série, na qual as atividades foram desenvolvidas.

3.2.3 Público alvo

A pesquisa foi realizada com uma das turmas do 2º ano do Ensino Médio do ano de 2015 da Escola Estadual de Ensino Integral Doutor Epaminondas Ferreira Lobo. Trabalhou-se com um total de 20 alunos com idade entre 15 e 17 anos.

Dos alunos que participaram do desenvolvimento e aplicação da proposta didática, nenhum já havia cursado a mesma série.

A pesquisa foi desenvolvida no horário normal das aulas de matemática não sendo preciso nenhuma alteração de planejamento da proposta apresentada para o trabalho com o conteúdo, pois o tema escolhido faz parte da grade curricular para a série.

3.2.4 O caminho seguido na escola

Após a revisão da literatura pertinente, foi elaborada uma proposta de atividades envolvendo jogos matemáticos, de construção e treinamento, além de vídeos e lista de atividades. Todo o planejamento foi desenvolvido em consonância com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo a fim de verificar as contribuições que esta proposta, fazendo uso de jogos, pode trazer para o processo de ensino-aprendizagem de probabilidade.

3.2.5 A proposta das atividades

A proposta elaborada foi apresentada à direção da escola que autorizou sua realização. Os pais foram informados por escrito do projeto a ser desenvolvido e os alunos convidados oralmente em sala de aula.

Devido à importância da participação de todos os alunos na pesquisa, após a efetivação do convite, foi esclarecido que se, eventualmente, algum aluno não desejasse participar do estudo, este realizaria outras atividades correspondentes ao conteúdo abordado. O convite foi feito cerca de 40 dias antes da realização das atividades e aceito por todos os alunos.

Ao final da aplicação das atividades, jogos e vídeos somente foram analisados dados dos alunos que participaram de todas as aulas, porém, é importante deixar claro que os alunos que faltaram a um ou mais encontros não foram dispensados ou ignorados nas demais atividades, pois, apesar de não poderem mais ser contados como elementos participantes da pesquisa, demonstraram interesse em continuar participando do projeto.

Para efeito de registro nas atividades desenvolvidas, os alunos e os grupos formados por eles durante a realização das atividades foram identificados por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Após as informações sobre a proposta didática serem transmitidas para todos os envolvidos, conseguiu-se destes a autorização por escrito para realização das atividades através da assinatura dos termos de consentimento e esclarecimento pelos pais, alunos e direção da escola (Apêndices A, B e C em anexo).

3.2.6 Instrumentos utilizados no desenvolvimento da proposta didática

Sendo o objetivo central do presente estudo era investigar as possíveis contribuições que uma proposta didática apoiada em jogos e nas atividades do material utilizado nas escolas estaduais de São Paulo pode trazer para o processo de ensino-aprendizagem de probabilidade, foi necessário elaborar uma proposta de atividades que se mostrasse interessante aos alunos, envolvesse jogos e estivesse em consonância com o Currículo Oficial do Estado de São Paulo.

Visando contribuir com o crescimento individual e possibilitar momentos de socialização e discussão sobre a proposta desenvolvida, as atividades foram realizadas no coletivo, em grupos, duplas e individualmente.

A fim de incentivar a participação e o envolvimento de todos os alunos foi realizado um acompanhamento contínuo das atividades, fazendo-se, quando necessário, intervenções, indagações e orientações.

O planejamento da proposta didática deu-se de forma que o grau de dificuldade das atividades realizadas estivesse adequado à sala.

Os jogos foram realizados na Sala Multiuso da escola e no Laboratório 1, que é utilizado para as aulas práticas de matemática. As atividades que constam no Caderno do Aluno e que fazem parte do Currículo Oficial do Estado de São Paulo foram realizadas em sala de aula.

Durante a realização das atividades, os alunos fizeram uso de materiais diversos, incluindo lápis, papel e o material disponível no Laboratório 1 para as aulas práticas de Probabilidade, como o Conjunto de Probabilidade da Brax Tecnologia, material composto por:

- 2 dados de 4 faces;
- 2 dados de 6 faces;
- 2 dados de 8 faces;
- 2 dados de 12 faces;
- 2 dados de 20 faces;
- 4 roletas em madeira de 120 mm;
- 2 roletas em acrílico transparente de 120 mm;
- 40 cubos de 15x15 mm em madeira, numerados;
- 5 cubos de 15x15 mm em madeira coloridos de azul;
- 15 cubos de 15x15 mm em madeira coloridos de verde;
- 20 cubos de 15x15 mm em madeira coloridos de vermelho;
- 2 fichas para cara e coroa;
- 40 cartas numeradas e
- 10 moedas de plástico em tamanhos variados.

3.2.7. Instrumentos utilizados para o registro e coleta de dados

Para um efetivo registro de todas as etapas do desenvolvimento das atividades e resultados alcançados durante aplicação da proposta, foram utilizados:

- o Diário de Classe da autora do pesquisa;
- registros realizados pelos alunos sobre as atividades desenvolvidas;
- fotografias e cópias das atividades realizadas;
- avaliação bimestral e questionário final do proposta desenvolvida.

4 O PROCESSO – PROPOSTA DIDÁTICA: ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

No decorrer deste capítulo faremos uma explanação de cada uma das 30 aulas utilizadas para realização das atividades que compõem o presente estudo.

Serão demonstradas as atividades desenvolvidas, respostas apresentadas, questões utilizadas como avaliação e questionário onde os alunos puderam relatar sua opinião a respeito do uso de jogos no ensino de probabilidade.

4.1 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

O trabalho de campo aconteceu durante os meses de agosto e setembro de 2015 e procurou-se apresentar aos alunos os conteúdos e conceitos considerados como pré-requisitos para o estudo de probabilidade através da metodologia de ensino-aprendizagem de matemática por meio dos jogos.

As atividades estabelecidas foram utilizadas em consonância com as atividades propostas no Caderno do Aluno, material didático elaborado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

No Quadro 1, a seguir, são apresentadas as atividades desenvolvidas em cada aula, bem como o objetivo traçado para cada uma delas. Nas seções do capítulo 4, cada atividade será descrita detalhadamente e as impressões e respostas dos alunos serão apresentadas e analisadas.

Quadro 1 - Atividades e Objetivos das aulas programadas

(continua)

Aulas	Atividades	Objetivos
1	- Definição dos conteúdos e identificação das competências e habilidades referentes à Situação de Aprendizagem 1; - Exibição do Vídeo “Coisa de passarinho” e resolução de um desafio.	- Apresentar aos alunos o conteúdo a ser desenvolvido durante a Situação de Aprendizagem 1 e identificar as habilidades a serem adquiridas com a realização das atividades desta Situação de Aprendizagem; - Introduzir o conceito de probabilidade; - Definir experimentos equiprováveis; - Introduzir os conceitos de espaço amostral e evento; - Apresentar os conceitos de experimento aleatório e experimento determinístico.

Quadro 1 - Atividades e Objetivos das aulas programadas

(continuação)

2 e 3	- Jogo: Bingo; - Questionário com conceitos aprendidos com o jogo.	- Através do jogo do Bingo, compreender os conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral, evento, probabilidade simples e independência de eventos.
4	- Caderno do aluno: leitura e análise de texto - páginas 5 e 6; - Resolução das atividades 1 e 2.	- Apresentar um pouco da história das probabilidades através de leitura e discussão de texto (texto com informações fictícias); - Compreender o cálculo de probabilidades de eventos que não exigem o raciocínio combinatório para sua resolução.
5 e 6	- Jogo: Lançando dois dados.	- Introduzir a definição teórica de probabilidade em situações de experimentos equiprováveis, bem como introduzir definições formais necessárias a compreensão deste conteúdo.
7	- Resolução de situações-problemas – atividades 4 a 7.	- Resolver situações problemas que envolvam os conceitos de probabilidade.
8	- Correção da Lição de Casa – atividades 8 a 10.	- Fixar conceitos relacionados ao cálculo de probabilidade condicional.
9	- Definição dos conteúdos e identificação das competências e habilidades referentes a Situação de Aprendizagem 2; - Vídeo: Cara ou coroa.	- Apresentar aos alunos o conteúdo a ser desenvolvido durante a Situação de Aprendizagem 2 e identificar as habilidades a serem adquiridas com a realização das atividades desta Situação de Aprendizagem; - Retomar as origens da teoria das probabilidades e apresentar a resolução do *Problema dos Pontos* (Jogo Interrompido) através do uso dos conceitos de análise combinatória.
10	- Resolução das atividades 1 a 6.	- Fazer uso de diversos procedimentos e registros para resolver situações problemas envolvidas com contagem e/ou cálculo do número de agrupamentos solicitados.
11	- Caderno do Aluno: leitura e análise de texto – página 17; - Resolução das atividades 7 a 16.	- Compreender os tipos básicos de agrupamentos sendo capaz de distingui-los a partir do critério de seus elementos serem ou não ordenáveis; - Fazer uso de diversos procedimentos e registros para resolver situações problemas envolvidas com contagem e/ou cálculo do número de agrupamentos solicitados.
12 e 13	- Leitura e análise de texto – páginas 21 e 22; - Atividade prática: Formando grupos	- Utilizar os cálculos combinatórios na solução de situações práticas, associadas a exemplos da vida cotidiana.
14	- Resolução das atividades 20 a 27.	- Resolver situações problemas fazendo uso do raciocínio combinatório.
15	- Resolução das atividades 28 a 32.	- Introduzir os conceitos de arranjo e combinação, apresentando fórmulas para calculá-los.

Quadro 1 - Atividades e Objetivos das aulas programadas

(continuação)

16	- Correção da Lição de Casa – atividades 33 a 38.	- Fixar os conceitos de arranjo e combinação, apresentando fórmulas para calculá-los.
17 e 18	- Definição dos conteúdos e identificação das competências e habilidades referentes a Situação de Aprendizagem 3; - Jogo: Cor exata.	- Apresentar aos alunos o conteúdo a ser desenvolvido durante a Situação de Aprendizagem 3 e identificar as habilidades a serem adquiridas com a realização das atividades desta Situação de Aprendizagem; - Utilizar a análise combinatória, por meio do cálculo de arranjo e probabilidade na solução de situações práticas, associando-as a exemplos da vida cotidiana.
19 e 20	- Resolução das atividades 1 a 8.	- Fazer uso do raciocínio combinatório para resolver situações problemas que envolvem a formação de grupos ordenáveis e não ordenáveis.
21	- Correção da Lição de Casa – atividades 9 e 10.	- Identificar e sanar possíveis dificuldades e dúvidas apresentadas na resolução das atividades.
22	- Jogo: Chances no Jogo.	- Utilizar combinações e cálculos probabilísticos em situações práticas; - Compreender conceitos combinatórios e probabilísticos simples, associando-os a exemplos da vida cotidiana.
23	- Definição dos conteúdos e identificação das competências e habilidades referentes a Situação de Aprendizagem 4; - Vídeo O código de Pascal.	- Apresentar aos alunos o conteúdo a ser desenvolvido durante a Situação de Aprendizagem 4 e identificar as habilidades a serem adquiridas com a realização das atividades desta Situação de Aprendizagem; - Mostrar os coeficientes do Binômio de Newton; -Apresentar o famoso Triângulo de Pascal.
24	- Resolução das atividades 1 a 12.	- Resolver situações problemas que envolvam casos binomiais de probabilidade;
25	- Correção comentada das atividades da aula anterior; - Desenvolvimento do Binômio de Newton e expressão geral; - Propriedades do Triângulo de Pascal.	- Fazer uso da resolução das atividades para revisar o desenvolvimento do Binômio de Newton e apresentar sua expressão geral; - Identificar e analisar as propriedades do Triângulo de Pascal.
26	- Resolução e correção das atividades 13 a 15.	- Resolver situações problemas que envolvam casos binomiais de probabilidade fazendo uso ou não da expressão geral do Binômio de Newton e propriedades do Triângulo de Pascal.
27	- Lista de exercícios de revisão e fixação de conteúdo.	- Revisar os conceitos, conteúdos e habilidades abordados durante as aulas anteriores, sanando possíveis dúvidas e dificuldades.

Quadro 1 – Atividades e objetivos das aulas programadas

(conclusão)

28 e 29	- Avaliação Bimestral.	- Identificar os conceitos e habilidades adquiridos pelos alunos; - Verificar o nível de aproveitamento das aulas.
30	- Questionário final sobre as atividades realizadas e socialização da experiência.	- Comparar as diversas aplicações e representações utilizadas e/ou comentadas na atividade prática através da análise das respostas apresentadas pelos alunos.

Fonte: Elaborado pela autora

Os vídeos que foram utilizados durante as aulas fazem parte da série “Matemática na Escola”. Todos eles foram elaborados pelo projeto Matemática Multimídia, desenvolvido pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), com financiamento do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), Ministério da Ciência, Tecnologia e Informação (MCT) e Ministério da Educação (MEC).

A coleção Matemática Multimídia conta com mais de 350 recursos educacionais em formato de vídeos, áudios, *softwares* e experimentos que estão licenciados, sendo permitidas suas cópias, reprodução, distribuição e execução, desde que para uso não comercial.

Para realização das atividades práticas, como jogos, foi utilizado o material disponível no Laboratório 1 da escola. É neste laboratório que se desenvolvem as atividades práticas das aulas de Matemática e Física.

4.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Após apresentação e aceitação da proposta por parte da direção da Escola, pais e alunos, iniciou-se então a aplicação destas atividades em sala de aula.

Como dito anteriormente, foram utilizadas um total de 30 aulas distribuídas entre os meses de agosto e setembro de 2015.

As atividades desenvolvidas em cada aula serão detalhadas a seguir.

Aula 1 - *Identificação das competências e habilidades referentes à Situação de Aprendizagem 1 e Vídeo Coisa de Passarinho*

Ao início de cada Situação de Aprendizagem, foram apresentados aos alunos o conteúdo a ser trabalhado, bem como as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo das atividades propostas.

Para a Situação de Aprendizagem 1, o Caderno do Professor traz as seguintes informações sobre o conteúdo, as competências e habilidades a serem exploradas pelo docente, conforme mostra o Quadro 2:

Quadro 2: Identificação de Conteúdos, Competências e Habilidades referentes a Situação de Aprendizagem 1

Conteúdos e temas: probabilidade simples, sem necessidade de raciocínio combinatório. Competências e habilidades: interpretar informações fornecidas por intermédio de diferentes linguagens, com o objetivo de calcular e associar um valor de probabilidade a uma situação-problema.

Fonte: Caderno do Professor, página 13

Essas informações foram colocadas na lousa da sala de aula e discutidas com os alunos, procurando identificar conhecimentos prévios acerca do conteúdo a ser trabalhado.

Durante esta discussão, pode-se perceber que alguns alunos conseguiam relacionar o conceito de probabilidade a chance de algo acontecer ou se repetir.

A fim de dar continuidade, passou-se a execução do vídeo "Coisa de Passarinho", no qual foram apresentados aos alunos os conceitos de probabilidade, evento e eventos equiprováveis e possibilitou-se, ainda, a exploração dos conceitos de espaço amostral, experimento determinístico e experimento aleatório.

Após a execução do vídeo, promoveu-se um momento para comentários sobre o que os alunos haviam acabado de ver.

Para encerrar a aula, os alunos foram convidados a resolver o seguinte desafio:

"*Ao lançarmos um dado honesto, qual a probabilidade de obtermos um número par como resultado?"*

Os alunos não tiveram dificuldade em responder a questão, apresentando como solução a resposta exibida na Figura 1:

$$\frac{3}{6}$$

Figura 1 – Solução apresentada pelo aluno V

Neste momento, o objetivo era identificar se os alunos haviam compreendido a definição de probabilidade, tendo sido a simplificação das frações e o cálculo da porcentagem prontamente explorados.

Aulas 2 e 3 - *Jogo do Bingo*

O bingo é um jogo bastante comum no mundo inteiro.

Comumente, para se jogá-lo, bolas numeradas são colocadas dentro de um globo, e sorteadas uma a uma, até que algum jogador preencha toda a sua cartela com os resultados desse sorteio.

Os resultados desses números devem ser marcados em cartelas que contenham números aleatórios. Tradicionalmente, o vencedor é aquele que consegue completar primeiro a cartela e quando isso acontece o ganhador deve alertar os demais competidores de que ganhou, gritando a palavra "bingo!".

Assim que isso acontece o sorteio é parado e o chefe de mesa confere a cartela.

No Brasil existem muitas polêmicas acerca das casas de bingo, como envolvimentos em casos de propinas e lavagem de dinheiro, e vários processos judiciais que impedem o funcionamento de casas especializadas nesse jogo. Porém, devido a sua popularidade, o jogo continua a acontecer durante as festividades juninas, arrecadações beneficentes e também entre amigos.

Considerando que a aula abordava o jogo Bingo, os materiais utilizados, as regras do jogo e o encaminhamento do mesmo no decorrer da aula são descritos nos próximos itens.

a) O jogo utilizado em sala de aula

Para realização desta atividade foi utilizado o jogo pertencente ao Laboratório 1 da Escola, que conta com bolas numeradas de 1 a 90 e cartelas preenchidas com 18 números aleatórios. Para realizar a marcação dos números sorteados os alunos fizeram uso de lápis de escrever.

b) Regras:

- Cada aluno deve receber apenas uma cartela contendo 18 números e um lápis;
- As bolas (numeradas de 1 a 90) devem ser sorteadas uma a uma, aleatoriamente e sem reposição;
- Os alunos devem marcar nas cartelas os números sorteados;
- O vencedor é o primeiro aluno a marcar todos os números de sua cartela.

c) Encaminhamento:

As regras foram apresentadas aos alunos. As cartelas entregues e, na presença deles, foram colocadas as 90 bolas dentro do globo.

Após a retirada de três bolas e verificação de que as regras haviam sido compreendidas por todos, iniciaram-se alguns questionamentos orais: *"Trata-se de um experimento aleatório ou determinístico?"* E, *"qual o espaço amostral deste jogo?"*

Mais algumas bolas foram sorteadas e mais algumas intervenções orais realizadas.

Neste momento, os questionamentos foram conduzidos de modo a levar os alunos a perceberem que cada um deles possuía uma cartela com números distintos dos demais alunos, levando-os a perceberem, que para que fossem considerados vencedores seria necessário que os números sorteados estivessem todos em sua cartela, e assim foi-se construindo, conjuntamente, o conceito de evento.

A seguir, a seguinte questão foi apresentada:

"*Sabendo-se que temos um total de 90 números para serem sorteados (espaço amostral) e que sua cartela possui 18 destes números (evento), qual a probabilidade de que o primeiro número sorteado esteja na sua cartela*?"

Neste momento foi possível discutir a respeito do conceito de probabilidade simples, encontrando junto aos alunos, a solução para esta indagação. Seguiu-se com o jogo e mais questões foram apresentadas:

"*Qual a probabilidade do primeiro número sorteado ser menor ou igual a 15*?"

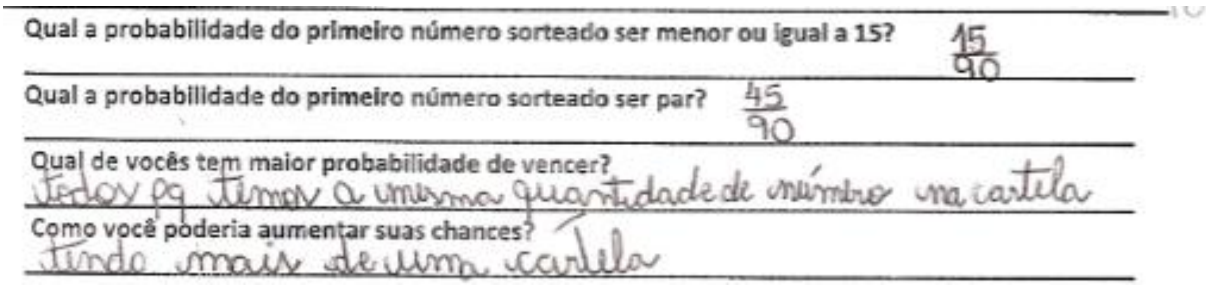
"*Qual a probabilidade do primeiro número sorteado ser par?*"

"*Qual de vocês tem maior probabilidade de vencer*?"

"*Como você poderia aumentar suas chances*?"

Estas indagações, que foram apresentadas primeiramente sob forma oral, podem e devem ser discutidas com todos os alunos, de modo a levá-los a compreensão de conceitos básicos relacionados à probabilidade. Posteriormente, essas e outras questões poderão ser organizadas em um questionário que poderá ser respondido de forma individual a fim de aferir o processo de aprendizagem.

Como forma de registrar o desenvolvimento da atividade, foi solicitado aos alunos que respondessem as questões acima e as respostas apresentadas são mostradas na Figura 2:


Qual a probabilidade do primeiro número sorteado ser menor ou igual a 15? $\frac{15}{90}$

Qual a probabilidade do primeiro número sorteado ser par? $\frac{45}{90}$

Qual de vocês tem maior probabilidade de vencer?
Todos pq temos a mesma quantidade de número na cartela

Como você poderia aumentar suas chances?
tendo mais de uma cartela

Figura 2 - Resposta apresentada pelo aluno L

Com esta atividade foram explorados os conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral, evento, probabilidade simples e independência de eventos.

Devido ao interesse dos alunos durante o desenvolvimento da atividade, o jogo continuou até que um aluno saísse vencedor.

Aula 4 - *Leitura e análise de texto e resolução das atividades 1 e 2*

Para a aula 4, foi selecionada a Leitura e Análise de texto das páginas 5 e 6 do Caderno do aluno, onde é apresentada uma breve história do surgimento da Teoria das Probabilidades e a solução para o problema do Jogo Interrompido.

A leitura do texto apresentado nas Figuras 3 e 4 foi realizada de forma compartilhada, sendo em alguns momentos interrompida para questionamentos e orientações.

Uma narrativa e um problema de probabilidades

Leitura e análise de texto

O estudo da probabilidade iniciou-se, segundo a história da Matemática, a partir da correspondência trocada entre dois pensadores do século XVII, Blaise Pascal e Pierre de Fermat. Nas cartas que trocavam entre si, eles analisavam cálculos de chances para ganhar em determinados jogos de azar, principalmente os que envolviam cartas e dados. Um desses problemas foi o "problema do jogo interrompido", no qual se questionavam sobre a divisão justa de um prêmio, no caso de determinado jogo não chegar ao fim. Vamos reproduzir aqui uma adaptação desse problema para que você possa avaliar como está seu bom senso para o cálculo de probabilidades.

Duas pessoas **A** e **B** disputam uma partida de um jogo que terminará quando um dos dois participantes ganhar três rodadas. Para o vencedor, há certo prêmio **X**. A primeira rodada aconteceu e o jogador **A** ganhou. A segunda rodada aconteceu e o jogador **A** também ganhou. Quer dizer, o jogo está 2 × 0 para **A**. Se, por algum motivo, a partida for interrompida agora, antes que ocorra a próxima rodada, o prêmio **X** deverá ser dividido entre os dois participantes. A pergunta é: quanto você acha que deve receber o jogador **A** e quanto deve receber o jogador **B**?

Se você pensou em dividir o prêmio em 3 partes e dar 2 delas para o jogador **A** e 1 para o jogador **B**, lamento, mas se enganou. Se você pensou em dividir o prêmio em 4 partes, destinando 3 delas para **A** e apenas 1 para **B**, é uma pena, pois também não é essa a resposta correta. Mas se você pensou em dividir o prêmio em 8 partes e dar 7 delas para **A**, parabéns, seu bom senso para o cálculo de probabilidades está em dia. Vamos ver o porquê.

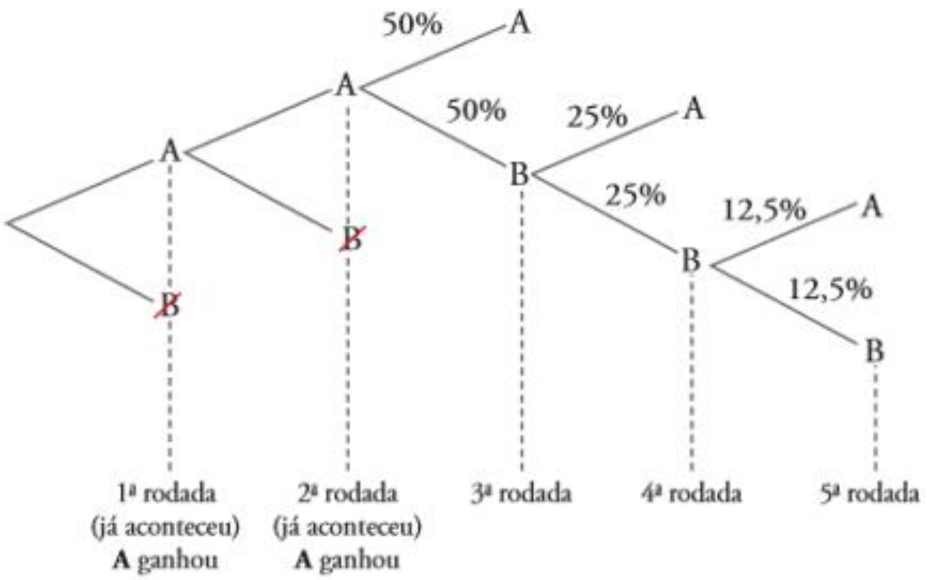
- **Primeira rodada** (já ocorreu): 1 × 0 a favor de **A**.
- **Segunda rodada** (já ocorreu): 2 × 0 a favor de **A**.
- **Terceira rodada**: 50% de chance para **A** e 50% de chance para **B**. Se **A** ganhar, termina o jogo.

Figura 3 - Leitura e análise de texto: "Uma narrativa e um problema de probabilidade" – página 5 do Caderno do Aluno

- **Quarta rodada**: para que exista essa rodada, **A** deve ter perdido a rodada anterior e o jogo agora está 2 × 1 a seu favor. A chance de **A** vencer e acabar com o jogo é de 25%, isto é, metade dos 50% da chance da terceira rodada. A chance de **B** é igual à de **A**, isto é, 25%. Mas só haverá outra rodada se **B** ganhar. Quer dizer, até agora, o jogador **A** teve 50% de chance de ganhar o jogo na terceira rodada e mais 25% de ganhar o jogo nessa rodada. Suas chances já somam 75%, enquanto as chances de **B** são iguais a 25%.

- **Quinta rodada**: para que aconteça essa rodada, o jogo deve estar empatado por 2 × 2. Os 25% de chance da rodada anterior dividem-se agora entre **B** e **A**, isto é, 12,5% para **A** e 12,5% para **B**. As chances do jogador **A**, que na quarta rodada somavam 75%, somam agora 87,5%, enquanto **B**, que só pode ganhar o jogo se essa rodada chegar a acontecer, tem 12,5%.

Essas porcentagens traduzidas em fração equivalem a $\frac{7}{8}$ e $\frac{1}{8}$.



A = 50% + 25% + 12,5% = 87,5%
B = 12,5%

Figura 4 – Continuação: Leitura e Análise de Texto: “Uma narrativa e um problema de probabilidade – Caderno do Aluno, páginas 5 e 6

Após a leitura compartilhada do texto, questionamentos e orientações, seguiu-se a aula com a resolução comentada das atividades 1 e 2, presentes nas páginas 6 e 7 do Caderno do Aluno e representadas nas Figuras 5 e 6.

1. Em uma partida de tênis programada para 5 *sets*, o vencedor ganharia 40 pontos no *ranking* da confederação. Para isso, um dos jogadores precisaria vencer primeiro 3 *sets* e ganhar o jogo. Entretanto, a partida foi interrompida pela chuva no momento em que terminava o 4º *set*, com o placar apontando 2 *sets* para o jogador **A** e 1 *set* para o jogador **B**. Para piorar a situação, o tal jogo estava sendo disputado no último dia possível daquele ano, não havendo mais possibilidade de continuá-lo em outro dia do ano. O que fazer se um ou outro jogador pudesse vir a se consagrar o número 1 do mundo dependendo do número de pontos que conseguisse naquele último jogo do ano? Os organizadores do torneio reuniram-se às pressas e decidiram que os 40 pontos seriam divididos entre os dois jogadores proporcionalmente à probabilidade que cada um teria de sagrar-se vencedor, caso a partida chegasse ao final. Dos 40 pontos, quantos caberão ao jogador **A** e quantos caberão ao jogador **B**? Utilize a tabela a seguir para elaborar a solução.

1º *set*	2º *set*	3º *set*	4º *set* (não ocorreu)	5º *set* (não ocorreu)
A vence (1 × 0)	**B** vence (1 × 1)	**A** vence (2 × 1)		

Figura 5 – Atividade 1 – Caderno do Aluno, página 7

2. Considere uma situação semelhante à do problema anterior, sobre uma partida de tênis interrompida, que é disputada por dois jogadores **A** e **B**. Suponha que o jogo estivesse programado para melhor de 7, isto é, o jogo acabaria quando um dos tenistas ganhasse 4 *sets*. Nesse caso, qual é a probabilidade de vitória para cada um deles no caso de o jogo ser interrompido quando o placar apontar:

a) 3 × 1 a favor de **A**? Use a tabela a seguir para elaborar sua resposta.

1º *set*	2º *set*	3º *set*	4º *set*	5º *set* (não ocorreu)	6º *set* (não ocorreu)	7º *set* (não ocorreu)

b) 2 × 1 a favor de **A**? Organize a resolução:

Figura 6 – Atividade 2 – Caderno do Aluno, página 7

Os alunos ficaram bastante comprometidos com a resolução das atividades, demonstrando compreender os conceitos envolvidos e declarando que nunca haviam pensado neste tipo de solução para tais problemas.

Aulas 5 e 6 - *Jogo: Lançando dois dados*

O jogo Lançando Dois Dados é a atividade 3 da Situação de Aprendizagem 1 e está presente nos Cadernos do Aluno e do Professor, onde trazem descrição de materiais e instruções para que o jogo possa ser realizado em seus dois níveis.

A Figura 7 traz a apresentação e os materiais necessários para a realização do jogo em sala de aula.

Lançando dois dados: um jogo e alguns cálculos de probabilidade

3. Nesta atividade, sua sorte estará em jogo e, principalmente, sua habilidade em calcular com rapidez a probabilidade de ocorrência de alguns eventos relacionados ao lançamento de dois dados.

I. Material do jogo (para cada grupo de 4 alunos)

- Dois dados: um deles com as faces contendo os números ímpares pintados de azul e os pares, de vermelho; e o outro com as faces contendo os números pares pintados de azul e os impares, de vermelho (Anexo 1).
- Duas fichas de acompanhamento, uma para cada dupla de alunos (Anexo 2).
- O tabuleiro para escolha de eventos e para apostas (Anexo 3).

Figura 7 – Apresentação e materiais necessários para o Jogo Lançando dois dados – Caderno do Aluno, página 8

Como o jogo pode ser desenvolvido em dois níveis, são apresentadas orientações para a realização dos dois níveis do jogo.

Nas Figuras 8, 9 e 10 estão descritas as orientações referentes ao nível 1:

II. Instruções para o jogo – nível 1

A competição, em cada grupo, ocorrerá na forma de dupla contra dupla.

Cada dupla receberá uma ficha de acompanhamento para o registro das apostas. Nesse nível, as duplas podem apostar apenas nos eventos relacionados no tabuleiro na parte "Jogo Básico".

Figura 8 - Instruções do jogo Lançando dois dados, nível 1 – Caderno do Aluno, página 8

Antes de algum dos participantes lançar os dados, cada dupla escolhe um evento, **apenas um**, registra sua aposta na ficha de acompanhamento e, o mais importante, registra a probabilidade de ocorrência do evento escolhido. Veja o exemplo:

Rodada	Aposta	Probabilidade	Resultado	Débito/Crédito
1	$2 \cdot Q_2$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$		

Aposta de 2 fichas em Q_2.

Há 9 resultados possíveis em Q_2 entre o total de 36 resultados possíveis.

Feito o registro, lançam-se os dados e observam-se os resultados das faces superiores. O passo seguinte é o cálculo do crédito ou débito, dependendo, respectivamente, de ter ocorrido ou não o evento escolhido. Caso o evento escolhido não tenha sido sorteado, a dupla perde as fichas apostadas. Se houver acerto, a probabilidade determina o número de fichas a serem recebidas. Veja os exemplos:

Exemplo de derrota				
Rodada	**Aposta**	**Probabilidade**	**Resultado**	**Débito/Crédito**
1	$2 \cdot Q_2$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	**(2 ; 5)**	–2

O par **(2;5)** pertence a Q_1. Portanto, o evento selecionado não ocorreu.

A dupla perde as 2 fichas que apostou.

Exemplo de vitória				
Rodada	**Aposta**	**Probabilidade**	**Resultado**	**Débito/Crédito**
1	$2 \cdot Q_2$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	**(1 ; 3)**	+ 8

O par **(1;3)** pertence a Q_2. Portanto, ocorreu o evento selecionado.

A dupla ganha 8 fichas no total, pois apostou 2 e a probabilidade foi de 1 para 4. Isto é, para cada ficha apostada, obtêm-se 4 fichas.

Figura 9 – Continuação das instruções do jogo Lançando dois dados, nível 1 – Caderno do Aluno, páginas 8, 9 e 10

Outro exemplo de vitória				
Rodada	**Aposta**	**Probabilidade**	**Resultado**	**Débito/Crédito**
1	$2 \cdot Q_2$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	**(1 ; 3)**	+ 8
2	$3 \cdot$ (verde)	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$	**(6 ; 3)**	+ 13,5

O par **(6; 3)** está associado a uma quadrícula de cor verde do tabuleiro. Portanto, ocorreu o evento selecionado.

A dupla ganha 13,5 fichas no total, pois apostou 3, e a probabilidade foi de 2 para 9. Isto é, para cada 2 fichas apostadas, obtêm-se 9 fichas.

As fichas que uma dupla ganhar em cada rodada precisam ser validadas pela dupla oponente, que somente o fará no caso de julgar correto o cálculo da probabilidade. Não é permitido à dupla escolher mais de uma vez cada evento.

Após determinado número de rodadas, combinado previamente pelas duplas, ou um prazo estabelecido pelo professor, contam-se as fichas. A dupla com maior número de fichas é a vencedora.

Figura 10 – Término das instruções do jogo Lançando dois dados, nível 1 – Caderno do Aluno, páginas 8, 9 e 10

Durante a realização do nível 1 do jogo, os alunos perceberam que a probabilidade de ocorrência de cada um dos quadrantes (Q_1, Q_2 , Q_3 e Q_4) eram iguais, isto é, $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ para cada um deles, mas que, quando optavam por apostar nas cores poderiam aumentar ou diminuir suas chances e, sendo assim, optaram por apostar uma maior quantidade de fichas nos eventos com maior probabilidade de ocorrência, buscando, desta forma, aumentar as chances de saírem vencedores.

Após 10 rodadas o jogo foi interrompido, as fichas contadas e os jogadores vencedores de cada grupo foram identificados.

A aula seguiu com a realização do nível 2 do jogo.

A Figura 11 apresenta as instruções referentes a este nível.

III. Instruções para o jogo – nível 2

Repetem-se as instruções do nível 1, levando-se em conta, nesta fase, os eventos do Anexo – nível 2, que ampliam a diversidade dos cálculos das probabilidades. Nesse nível, é permitido que as duplas criem eventos além daqueles do tabuleiro, como “pares da linha superior do tabuleiro” ou “apenas números azuis”.

Figura 11 – Instruções do jogo Lançando dois dados, nível 2 – Caderno do Aluno, página 10

Neste momento, alguns alunos procuraram identificar eventos com maior probabilidade de ocorrência antes de realizar suas apostas. Esta atitude enriqueceu as discussões em grupo e possibilitou o envolvimento de todos na realização da atividade.

Para facilitar a aplicação e realização do jogo em sala de aula, o Caderno do Aluno traz como anexos moldes dos dados para serem recortados e montados, modelo da ficha de acompanhamento das jogadas e tabuleiro para escolha de eventos e apostas.

Tais anexos são representados nas Figuras 12, 13 e 14:

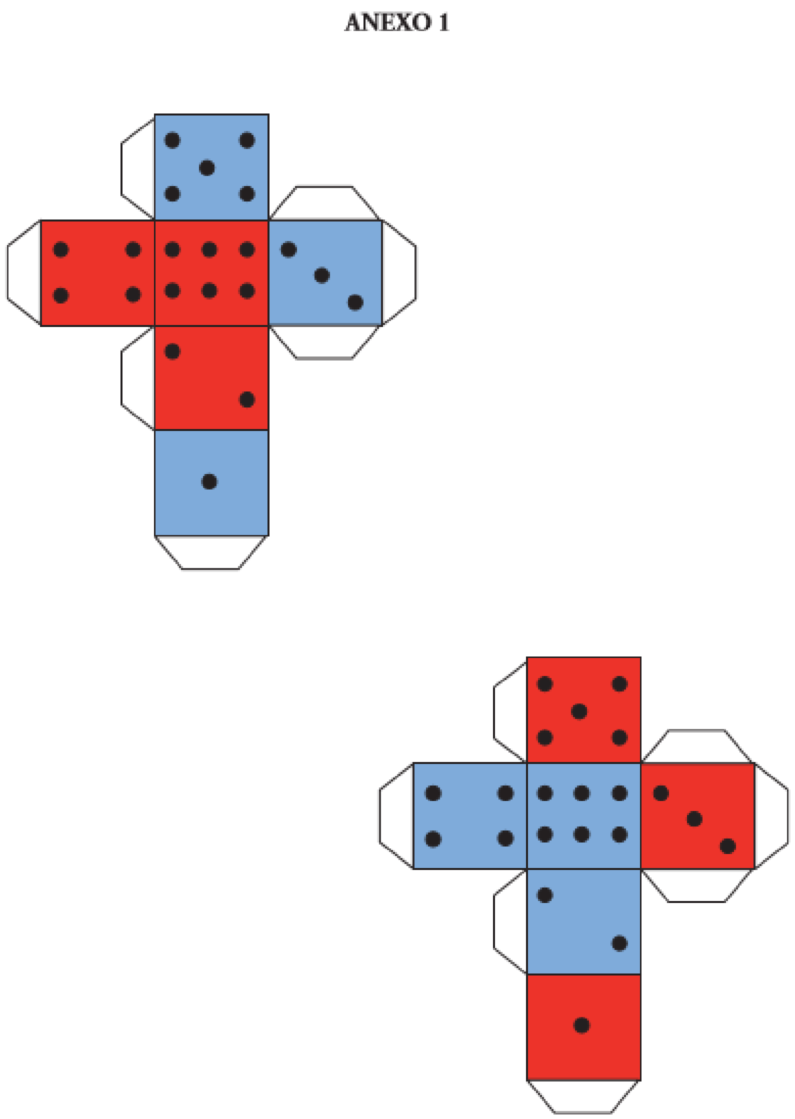


Figura 12 – Anexo 1, página 89 do Caderno do Aluno – Dados para realização do jogo Lançando dois dados

ANEXO 2

Ficha de acompanhamento				
Rodada	Aposta	Probabilidade	Resultado	Débito/Crédito

Figura 13 – Anexo 2, página 91 do Caderno do Aluno – Fichas de Acompanhamento para realização do jogo Lançando dois dados

Anexo – nível 2		Jogo Básico – nível 1						
Número par e outro ímpar	Números iguais nos dois dados		1	2	3	4	5	6
Números pares nos 2 dados	Números primos nos dois dados	1						
Números cujo produto é par	Números cuja soma é 6	2						
Números cuja soma é 5	Números que estão em Q_1	3						
Número par em um dado	Números cuja soma é maior que 8	4						
Número 6 em um dos dados	Números cujo produto é ímpar	5						
Um número é o dobro do outro	Números primos entre si	6						

Figura 14 – Anexo 3, página 91 do Caderno do Aluno – Fichas de Acompanhamento para realização do jogo Lançando dois dados

Após apresentação da descrição e instruções para cada nível do jogo, os alunos foram divididos em grupo com 4 alunos. Nesta aula, estavam presentes 16 alunos em sala, o que possibilitou o trabalho com exatos 4 grupos.

Já organizados em grupos, os alunos selecionaram os materiais necessários e iniciaram a atividade.

Foram realizados encaminhamentos e observações em cada um dos grupos e para a sala em geral. Ao final da atividade os registros foram recolhidos.

Além disso, foram oportunizados momentos para discussão da experiência realizada e formalização dos conceitos de probabilidade simples e experimentos equiprováveis.

Neste momento foi entregue a cada um deles folha com os conceitos básicos já relacionados aqui anteriormente – Capítulo 2, seção 2.3.

Aula 7 - *Resolução das atividades 4 a 7*

Nesta aula foram resolvidas e corrigidas na lousa as atividades 4 a 7, páginas 10 a 12 do Caderno do Aluno.

Tais atividades estão representadas nas Figuras 15 e 16 a seguir:

4. Observe a tabela com as quantidades de peças de formatos e cores diferentes que foram colocadas em uma caixa.

	Triangulares	Circulares	Retangulares	Total
Brancas	12	10	6	**28**
Pretas	15	11	7	**33**
Amarelas	8	9	2	**19**
Total	**35**	**30**	**15**	**80**

Sorteando uma das peças dessa caixa, qual é a probabilidade de que a peça seja:

a) triangular?

b) amarela retangular?

c) não circular?

d) não preta?

e) circular não preta?

Figura 15 - Atividades 4 - Caderno do Aluno, página 10

5. Os 200 alunos das seis classes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola fizeram um teste na aula de Educação Física e classificaram-se em quatro níveis, de acordo com a resistência física maior ou menor. Alunos de nível 4 são mais resistentes do que alunos de nível 3, que, por sua vez, são mais resistentes que alunos de nível 2, e assim por diante. Os resultados desse teste estão representados na tabela a seguir:

	2ª A	2ª B	2ª C	2ª D	2ª E	2ª F
Nível 1	12	14	12	11	13	12
Nível 2	9	8	11	10	10	9
Nível 3	10	8	7	7	6	9
Nível 4	3	2	3	4	5	5
Total de alunos	34	32	33	32	34	35

Um dos alunos da 2ª série dessa escola será sorteado. Qual é a probabilidade de o aluno sorteado:

a) estudar na 2ª série D?
b) não estudar na 2ª série A nem na 2ª série B?
c) ter atingido nível 3 no teste?
d) ter atingido nível abaixo de 3 no teste?

6. Em relação à tabela apresentada no problema anterior, se for sorteado um aluno da 2ª série C e outro da 2ª série E, de qual dessas classes é mais provável ocorrer um aluno de nível superior a 2 no teste?

7. Dos 300 alunos de uma escola, 45% são meninas e apenas 20% delas têm idade acima de 16 anos. Já entre os meninos, a porcentagem de alunos maiores de 16 anos é 40%. Sorteando um dos alunos dessa escola, qual é a probabilidade de que seja sorteado um menino com idade igual ou menor que 16 anos?

Figura 16 – Atividades 5, 6 e 7 – Caderno do Aluno, páginas 10, 11 e 12

Após a resolução e correção das atividades anteriores, determinou-se como Lição de Casa as atividades 8, 9 e 10, para serem resolvidas e, posteriormente, corrigidas na lousa.

Aula 8 - *Correção comentada das atividades 8, 9 e 10, anteriormente encaminhadas como Lição de Casa.*

Nesta aula verificou-se quais alunos haviam realizados as atividades determinadas como Lição de Casa, discutiu-se sobre as dúvidas e dificuldades enfrentadas durante a realização destas e realizou-se a correção comentada. Percebeu-se que a grande maioria dos alunos haviam feito a tarefa e que as dúvidas apresentadas se concentravam mais no cálculo da porcentagem do que na determinação da fração utilizada para representar a probabilidade solicitada.

As atividades corrigidas nesta aula estão expostas na Figura 17.

8. Com base nos dados da atividade 7, considere agora o caso do sorteio de uma pessoa que, sabe-se de antemão, terá idade acima de 16 anos. Nessa condição:

a) qual é a probabilidade de que seja sorteada uma menina?

b) qual é a probabilidade de ser um menino?

9. Considere novamente a atividade 4, apresentada anteriormente. Sorteando uma das peças retangulares, qual é a probabilidade de ela ser amarela?

10. Considere novamente a atividade 5. Um aluno foi sorteado e sabe-se que ele está no nível 2. Qual é a probabilidade de que ele estude na 2ª série C?

Figura 17 – Atividades 8, 9 e 10– Lição de Casa – Caderno do Aluno, páginas 12 e 13

Durante a correção comentada destas atividades foram retomados e explanados os conceitos relacionados ao cálculo de probabilidade condicional, revisando a definição apresentada no Capítulo 2, seção 2.3.

Aula 9 - *Identificação do conteúdo, competências e habilidades referentes à Situação de Aprendizagem 2 e Vídeo Cara ou Coroa*

No início da aula, o conteúdo, competências e habilidades referentes à Situação de Aprendizagem 2, apresentadas na Quadro 3, foram registradas na lousa e fez-se um pequeno comentário sobre eles.

Identificou-se que os alunos já possuíam compreensão acerca dos conceitos de filas e grupos, sendo capazes de estabelecer semelhanças e diferenças entre eles.

Quadro 3 - Identificação de Conteúdos, Competências e Habilidades referentes a Situação de Aprendizagem 2

Conteúdos e temas: casos de agrupamento. Competências e habilidades: identificar em diferentes agrupamentos a necessidade ou não da ordenação entre seus elementos; interpretar informações fornecidas por intermédio de diferentes linguagens, com o objetivo de calcular e associar um valor de probabilidade a uma situação-problema.

Fonte: Caderno do Professor, página 24

Após o registro e breve discussão citada anteriormente, foi apresentado aos alunos o Vídeo “Cara ou Coroa” que traz a resolução para o problema dos pontos através do uso dos conceitos relacionados à análise combinatória.

Após a exibição do vídeo os alunos foram divididos em duplas para que resolvessem a seguinte variação do problema que consta no material de apoio ao professor para o trabalho com este vídeo:

Problema 1: "*Na final do campeonato de futebol do bairro, a decisão por pênaltis estava com placar igual a 3x2 quando faltava 1 pênalti para cada equipe. Nesse momento, começa uma chuva torrencial que impede o término das cobranças e o problema dos pontos se coloca: como deve ser dividido o prêmio em dinheiro levando em conta o placar quando o jogo foi interrompido e as chances de converter um pênalti?"*

Os alunos foram orientados, então, a anotar as possíveis combinações de resultados e a probabilidade de ocorrência de cada uma dessas combinações.

Para a resolução desta atividade, considerou-se que as chances de acertar ou errar o pênalti eram equiprováveis, sendo, portanto, de 50% para cada um.

Nas Figuras 18 e 19 pode-se observar a resposta apresentada por duas duplas de alunos para este problema:

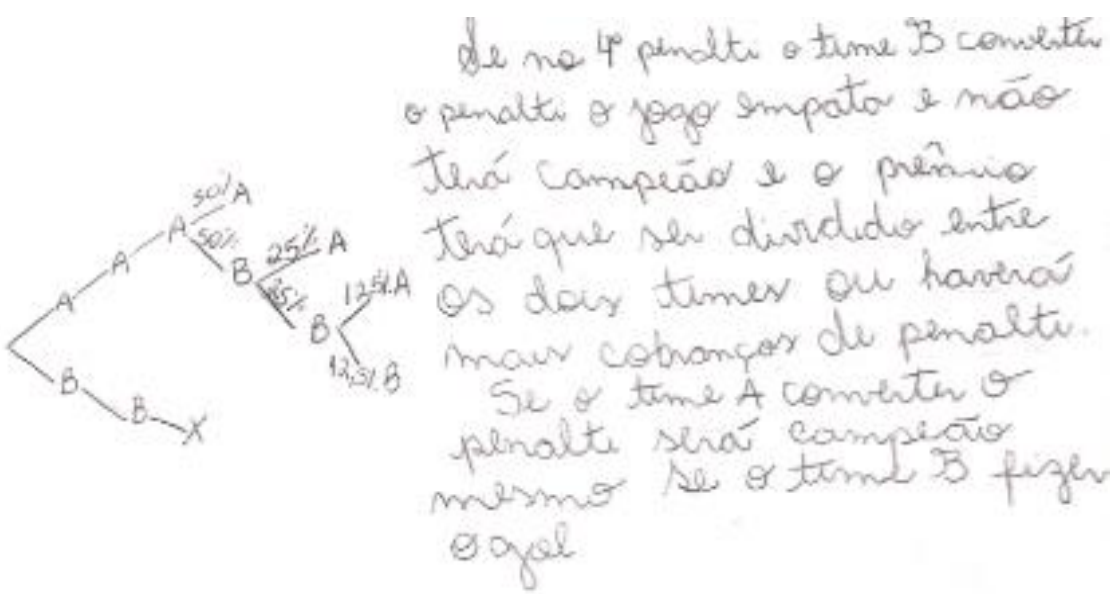


Figura 18 – Solução apresentada pela dupla S

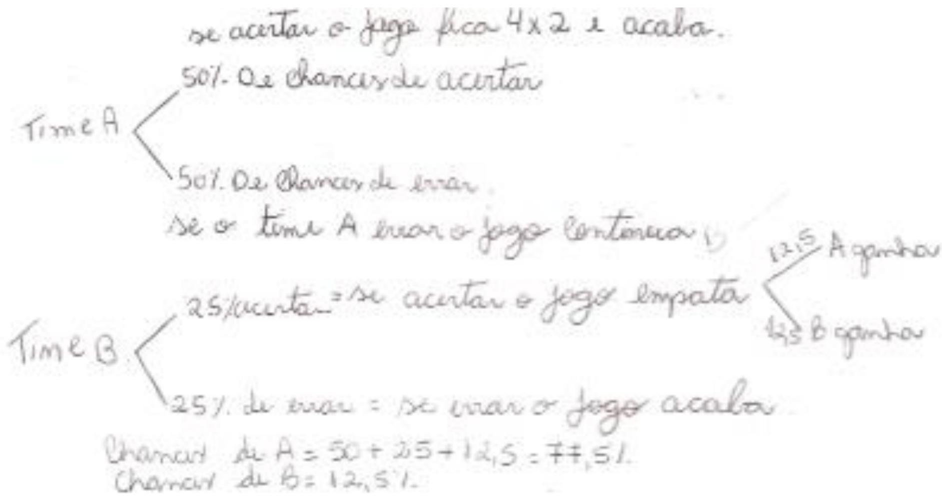


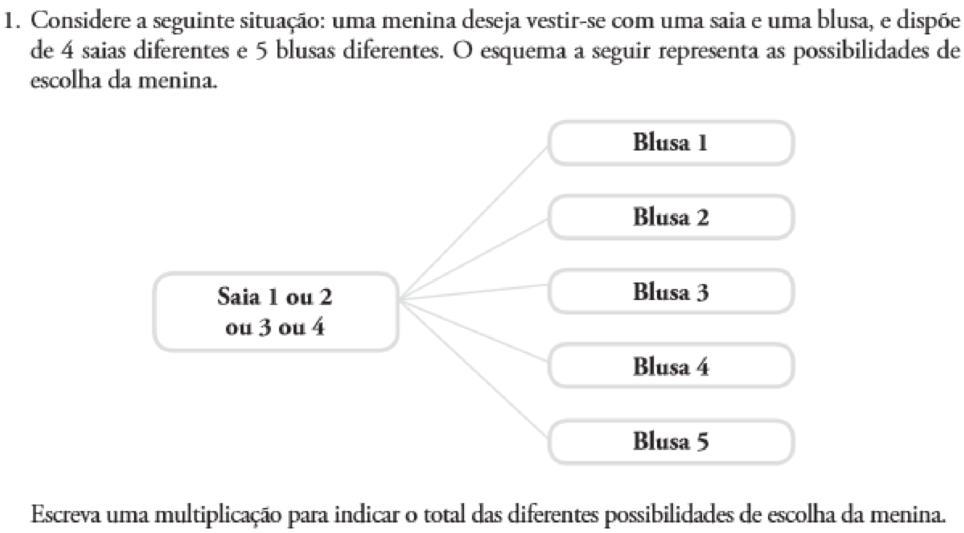
Figura 19 – Solução apresentada pela dupla H

Aula 10 - *Resolução das atividades 1 a 6 da Situação de Aprendizagem 2 e definições de número, numeral e algarismo*

Na aula 10, os alunos foram orientados quanto a resolução das atividades 1 a 6 do Caderno do Aluno, Situação de Aprendizagem 2, aproveitando-se o momento para revisar conceitos e definições fundamentais para a sua compreensão.

Para a realização destas atividades, os alunos foram incentivados a fazer uso de diferentes tipos de procedimentos e registros, tendo sido analisado, durante a correção, o caminho percorrido pelo aluno e não apenas a resposta final apresentada.

Nas Figuras 20 e 21, observam-se as atividades 1 e 2 onde a construção de árvores de possiblidades se mostra bastante eficaz para solucioná-las.


1. Considere a seguinte situação: uma menina deseja vestir-se com uma saia e uma blusa, e dispõe de 4 saias diferentes e 5 blusas diferentes. O esquema a seguir representa as possibilidades de escolha da menina.

Escreva uma multiplicação para indicar o total das diferentes possibilidades de escolha da menina.

Figura 20 – Atividade 1 – Caderno do Aluno, página 14

2. Um roteiro turístico prevê a visita a duas cidades do conjunto conhecido por "Cidades Históricas de Minas Gerais", formado pelas cidades de Ouro Preto, Mariana, Tiradentes e São João del Rei. Quantos roteiros diferentes poderão ser traçados se:
   a) Ouro Preto sempre fizer parte do roteiro?
   b) não houver restrição à escolha das duas cidades?

Figura 21 – Atividade 2 – Caderno do Aluno, página 15

Os alunos se mostraram, particularmente, bastante interessados em resolver a atividade 2, visto que apresentava uma situação que eles puderam relacionar a fatos do dia a dia, como a viagem de férias com a família.

A Figura 22 apresenta as atividades 3 e 4, onde os alunos puderam iniciar o trabalho com a formação de números:

3. Os números 342, 335, 872 e 900 são, entre tantos outros, números de três algarismos. Entre esses exemplos, os números 342 e 872 não repetem algarismos, contrariamente ao que ocorre, por exemplo, com os números 335 ou 900. Quantos números de 3 algarismos podemos escrever se:
   a) todos começarem por 1 e os algarismos puderem ser repetidos?
   b) todos começarem por 1 e os algarismos não puderem ser repetidos?
   c) não houver qualquer restrição, isto é, desde 100 até 999?
   d) os números não contiverem algarismos repetidos?
4. Existem 9 000 números de 4 algarismos, dos quais 1 000 é o menor deles e 9 999 o maior. Entre esses 9 000 números há muitos que não repetem algarismos, como 1 023, 2 549, 4 571 ou 9 760. Quantos são esses números de 4 algarismos distintos?

Figura 22 – Atividades 3 e 4 – Caderno do Aluno, página 15

Durante a realização destas atividades, aproveitou-se para retomar os conceitos de número, numeral e algarismo, pois, percebeu-se que os alunos estavam com dificuldades em compreender as atividades por não se lembrarem destes conceitos.

Definição 4.1 : Número: "é a **idéia de quantidade** que nos vem à mente quando contamos, ordenamos e medimos". (SILVEIRA, 2001, p. 1)

Definição 4.2: Numeral: "é toda **representação de um número**, seja ela escrita, falada ou indigitada". (SILVEIRA, 2001, p. 1)

Definição 4.3: Algarismo: "é todo **símbolo numérico** que usamos para formar os numerais escritos". (SILVEIRA, 2001, p. 1)

Sanadas as dúvidas com relação ao conceito de número, numeral e algarismo, prosseguiu-se com a resolução das atividades 5 e 6, apresentadas na Figura 23:

5. Para que um número de 3 algarismos seja par, é preciso que ele "termine" por um numeral par, ou, em outras palavras, é preciso que o algarismo das unidades seja 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8, como: 542, 134, 920, 888 etc.
   a) Quantos números pares de 3 algarismos existem?
   b) Quantos números ímpares de 3 algarismos existem?
   c) Quantos números ímpares de 3 algarismos **distintos** existem?
   d) Quantos números pares de 3 algarismos **distintos** existem?
   e) A soma dos resultados obtidos nos itens **c** e **d** deste problema deve ser igual ao resultado do item **d** da atividade 3. Verifique se isso ocorreu com os resultados que você obteve. Se não, procure descobrir o que saiu errado.

6. Considere os numerais 1, 2, 3 e 4, e também todos os números de 4 algarismos distintos que podemos formar com eles. Imagine que todos esses números serão ordenados, do menor para o maior. Isso feito, o primeiro da fila será o 1 234, o segundo será o 1 243, o terceiro, 1 324, e assim por diante, até o último, que será o 4 321.
   a) Qual é a posição do número 4 321 nessa fila?

   ____

   b) Qual é a posição do número 3 241 nessa fila?

   ____

   c) Acrescentando o numeral 5 aos numerais 1, 2, 3 e 4, e ordenando todos os números de 5 algarismos distintos que podem ser formados, qual é o número que ocupa a 72ª posição?

Figura 23 – Atividades 5 e 6 – Caderno do Aluno, página 16

Aula 11 – *Formação de filas com ou sem elementos repetidos: leitura e análise de texto, definição de fatorial e anagrama e resolução das atividades 7 a 16 da Situação de Aprendizagem 2*

No material da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, o assunto "Formação de filas com ou sem elementos repetidos" é introduzido na página 17 do Caderno do Aluno.

Para o trabalho com este assunto, realizou-se, inicialmente, a leitura compartilhada do texto exposto na Figura 24 e, posteriormente, procedeu-se com a resolução das atividades pelos alunos.

Leitura e análise de texto

As filas

Quando duas pessoas **A** e **B** colocam-se em fila, há apenas duas possibilidades: primeiro vem **A** e depois **B**, ou primeiro vem **B** e depois **A**. Se uma pessoa **C** juntar-se a essas duas, a fila poderá, agora, ser formada de 6 maneiras diferentes:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Se uma quarta pessoa juntar-se a essas, serão, agora, 4 vezes mais filas do que o número anterior. Isto é, serão $4 \cdot 6 = 24$ filas.

Figura 24 – Leitura e Análise de Texto – Caderno do Aluno, página 17

Durante a leitura foram feitos questionamentos a respeito da importância ou não da ordenação dos elementos no caso da formação de filas, indagando se as filas ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA apresentadas no texto são ou não iguais.

Após análise e discussão, os alunos perceberam, então, que no caso da formação de filas, é importante considerar a ordenação de seus elementos.

Com estas atividades, introduziu-se, ainda, a definição e o cálculo do fatorial de um número (n!).

Definição 4.4 : Fatorial de um número natural (n!): Em Iezzi et al (2004, p. 314) encontra-se a seguinte definição para o fatorial de um número:

> Dado um número natural *n*, definimos o fatorial de n (indicado por n!) através das relações:
> I. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $n \geq 2$.
> II. Se $n = 1$, $1! = 1$.
> III. Se $n = 0$, $0! = 1$. (IEZZI et al., 2004, p. 314).

Para a realização das atividades propostas foi necessário ainda apresentar aos alunos a definição de anagramas, com exemplos de anagramas com e sem letras repetidas.

Definição 4.5 : Anagrama: De acordo com o Dicionário Mini Aurélio (2001, p. 41), podemos definir anagrama como a “Palavra formada pela transposição das letras de outra. [Ex.: *Belisa* por *Isabel*.]” (FERREIRA, 2001, p. 41).

Tendo exploradas estas definições, seguiu-se com a resolução das atividades 7 a 16, ilustradas nas Figuras 25 e 26.

7. Quantas filas diferentes poderão ser formadas com 5 pessoas, apenas alternando suas posições na fila?

8. Quantos anagramas diferentes podem ser formados com as letras das palavras:
a) BIA b) NICO c) LUCIA d) CAMILO

9. Considere a palavra **CABO**. Se trocarmos a ordem entre as letras dessa palavra, formando agrupamentos de letras que podem ou não formar palavras conhecidas, estaremos formando "anagramas". Veja alguns dos anagramas da palavra **CABO**:

COBA, BACO, OCBA, ABOC, ACOB

a) começando por **A**, quantos anagramas diferentes poderemos formar?
b) quantos anagramas terminados em **O** existem?

10. Em uma caixa foram colocadas 9 bolinhas, numeradas de 1 a 9. Para retirar uma bolinha dessa caixa, temos 9 maneiras diferentes: pegar a bolinha 1, ou a bolinha 2, ou a bolinha 3, e assim por diante. Para retirar duas bolinhas da caixa, temos já um número bem maior de maneiras diferentes: temos 8 vezes mais, isto é, 72 maneiras diferentes. Isso porque há 8 possibilidades de pegar a segunda bolinha depois de a primeira delas ter sido apanhada. Responda:
a) quantas maneiras diferentes existem para pegar 3 bolinhas dessa caixa?
b) quantas maneiras diferentes existem para pegar 4 bolinhas dessa caixa?

11. Suponha que, no caso do problema anterior, a bolinha que for pega seja jogada novamente na caixa antes que a próxima bolinha seja sorteada. Em outras palavras, a bolinha é reposta na caixa a cada sorteio. Nessa condição, de quantas maneiras diferentes podemos retirar dessa caixa:
a) duas bolinhas? b) três bolinhas? c) quatro bolinhas?

12. Sete pessoas formarão ao acaso uma fila indiana. Em quantas ordenações diferentes poderá ser formada a fila?

13. Trocando a ordem das letras INA, podem ser formados 6 anagramas diferentes:

INA, IAN, AIN, ANI, NAI, NIA

Com as letras da palavra ANA, o número de anagramas é menor; são apenas 3:

ANA, AAN, NAA

Por que o número de anagramas dessas palavras não é o mesmo, se ambas têm 3 letras? A resposta é: a palavra ANA tem letras repetidas.

A palavra LUTA tem 24 anagramas, enquanto a palavra LULU, que tem 2 "L" e 2 "U", tem apenas 6 anagramas, pois a troca de um "L" com outro ou a troca entre os dois "U" não gera novo anagrama. Quer dizer, o total de 24 anagramas de uma palavra com 4 letras distintas fica, no caso de LULU, duas vezes dividido por 2!, por causa dos "L" e dos "U" repetidos. Então, $24 \div 2! \div 2! = 6$.

Veja por exemplo, a palavra INICIOU: apesar de ter 7 letras não tem $7! = 5040$ anagramas distintos, pois tem o "I" repetido três vezes, uma vez que a troca de um "I" com outros dois "I" não gera novo anagrama. Quer dizer, o total de 5040 anagramas de uma palavra com 7 letras distintas fica, no caso de INICIOU dividido por 3!, em decorrência dos "I" repetidos. Assim, INICIOU tem $5040 \div 3! = 5040 \div 6 = 840$ anagramas distintos.
Agora, responda: qual é o total de anagramas das palavras a seguir?
a) CARRO b) CORPO c) CORRO

14. Quantos anagramas podem ser formados com as letras das palavras a seguir?
a) ANA b) CASA c) CABANA d) BANANA e) BANANADA

Figura 25 – Atividades 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14, 15 – Caderno do Aluno, páginas 1, 18 e 19

15. Quando três meninas, Ana, Bia e Carla, e um menino, Dan, formam uma fila, temos 24 filas diferentes, como já vimos em problemas anteriores. Se, no entanto, o critério para a formação da fila não for a individualidade das pessoas, mas apenas o sexo, serão apenas 4 filas diferentes formadas por 3 mulheres (**M**) e um homem (**H**), da seguinte forma:

MMMH, MMHM, MHMM, HMMM

Com 5 pessoas, sendo 2 meninas e 3 meninos, quantas filas diferentes poderão ser formadas no caso de:

a) ser considerada a individualidade das pessoas?

b) ser considerado apenas o sexo das pessoas?

16. Três livros de Geografia diferentes e três livros de História diferentes serão colocados, um sobre o outro, de modo a formar uma pilha de livros. Quantas pilhas diferentes poderão ser formadas se:

a) não importar a matéria, e sim os livros, que, no caso, são todos diferentes?

b) a diferença entre os livros não for levada em conta, mas apenas o fato de que são de duas disciplinas diferentes?

Figura 26 – Atividades 15 e 16 – Caderno do Aluno, página 20

Após terem compreendido o conceito de anagrama, os alunos não tiveram dificuldade para realizar as atividades e trabalharam muito bem com o cálculo de n!.

As atividades 17, 18 e 19, indicadas como Lição de Casa no Caderno do Aluno e representadas na Figura 27, foram encaminhadas como trabalho avaliatório, devendo ser resolvidos individualmente e entregues para correção.

17. Sete pessoas, sendo 3 meninas e 4 meninos, formarão uma fila. Desconsiderando a individualidade das pessoas e levando em conta apenas o sexo, quantas ordenações diferentes poderá ter a fila formada?

18. Um jogo de futebol entre duas equipes **A** e **B** terminou empatado por 3 × 3. Alguém que não assistiu ao jogo pretende descobrir a ordem em que ocorreram os gols. Será que **A** começou ganhando e **B** empatou? Será que **B** fez 3 × 0 e depois **A** tentou reverter a situação? Enfim, como foram saindo os gols nessa partida? Quantas ordenações possíveis existem para os gols que ocorreram nessa partida?

19. Aplicando a propriedade distributiva e desenvolvendo o binômio $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^5$, isto é, fazendo $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B})$, aparecerá um termo igual a $\mathbf{A}^5$ e um termo igual a $\mathbf{B}^5$. No entanto, vão aparecer vários termos com parte literal igual a $\mathbf{A}^3\mathbf{B}^2$, decorrentes da multiplicação entre 3 "A" de qualquer dos 5 binômios por 2 "B", também de qualquer dos 5 binômios. Quantos termos iguais com parte literal $\mathbf{A}^3\mathbf{B}^2$ aparecerão?

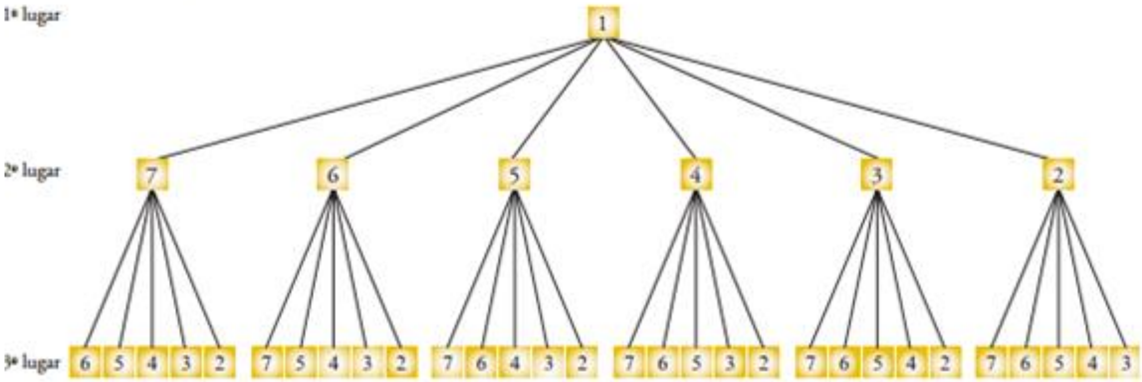
Figura 27 – Lição de Casa – Atividades 17, 18 e 19 – Caderno do Aluno, páginas 20 e 21

Aulas 12 e 13 - *Leitura e análise de texto e realização da atividade prática Formando Grupos*

As aulas 12 e 13 evidenciaram a discussão sobre a formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias. Para iniciar as aulas foi realizada a leitura compartilhada do texto reproduzido na Figura 28, com momentos de questionamentos, discussões e explicações.

Leitura e análise de texto

Observe a representação de uma parte da *árvore de possibilidades* para o seguinte problema: quantos grupos ordenáveis (filas) de 3 elementos podemos formar com 7 pessoas?



Ao observar a *árvore* percebemos que, para determinada pessoa em 1º lugar, há 6 opções para o 2º colocado e, para cada um destes, há 5 possibilidades de escolha para o 3º colocado. Assim, a quantidade de grupos ordenáveis é, nesse caso, igual ao produto $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Agora, vamos mudar a questão e perguntar: a quanto ficaria reduzido o número de agrupamentos se eles não fossem ordenáveis? Isto é, se o agrupamento "João, José, Maria" fosse o mesmo de "João, Maria, José", o mesmo de "Maria, José, João" e igual a todos os demais em que só é trocada a ordem dos participantes? Em outras palavras, se em vez de serem feitas filas, fossem feitos grupos de pessoas?

Para responder, retomamos os problemas anteriormente resolvidos, mostrando que haverá $\mathbf{3! = 6}$ ordenações possíveis. Portanto, quaisquer 3 elementos que considerarmos entre 7 permitirão $\mathbf{3! = 6}$ ordenações possíveis. Assim, se temos $\mathbf{7 \cdot 6 \cdot 5}$ conjuntos ordenáveis, temos $\mathbf{(7 \cdot 6 \cdot 5) \div 3!}$ conjuntos não ordenáveis, e a resposta do problema é $\mathbf{210 \div 6 = 35}$ grupos diferentes de 3 pessoas.

Figura 28 – Leitura e Análise de texto – Caderno do Aluno, páginas 21 e 22

A fim de obter melhor compreensão acerca da formação de grupos, foi proposta uma atividade prática aos alunos. A atividade "Formando Grupos" trabalhada nesta aula, faz parte do caderno de atividades práticas de Matemática disponibilizadas a Escola pela STEM Brasil, um projeto dedicado à formação de professores brasileiros em Química, Física, Biologia e Matemática que se utiliza de uma metodologia baseada em projetos. O projeto STEM Brasil chegou a nossa Escola através da parceria entre o Governo do Estado de São Paulo e a *Worldfund*, uma organização americana sem fins lucrativos dedicada exclusivamente à melhoria da educação básica na América Latina e que trabalha em parceria com os governos locais.

Para realização da atividade prática foi inicialmente apresentado aos alunos a seguinte situação problema:

Problema 02: "*Um grupo de 05 pessoas estão em uma viagem turística e querem tirar fotos em um determinado local. Tem um equipamento fotográfico profissional e são necessárias duas pessoas para tirar a foto (uma com a câmera e outra com a iluminação). Assim sendo cada 02 pessoas tiram a foto com os outros 03. Querem tirar tantas fotos quantas sejam necessárias para que cada um apareça em pelo menos uma foto com cada um dos outros. Qual o número mínimo de fotos a serem feitas para que isso aconteça*? "

Após a apresentação do problema inicial, os alunos foram organizados em grupos e levados ao pátio da Escola, onde, fazendo uso da câmera de seus celulares, deveriam registrar as soluções para o problema.

Todos os alunos se envolveram com a realização da atividade. Discutiram, nos grupos, sobre a solução para o problema e apresentaram a resposta na forma de fotografias.

Solucionado o problema anterior, os alunos foram questionados sobre o que ocorreria se ao invés de 05 pessoas, o grupo, inicialmente, contasse com 07, 09 ou 11 pessoas?

Para estes casos os alunos apresentaram as soluções através de cálculos no caderno e puderam fazer uso de calculadoras científicas disponíveis no Laboratório 1 da Escola.

Os cálculos apresentados pelos alunos podem ser observados na Figura 29.

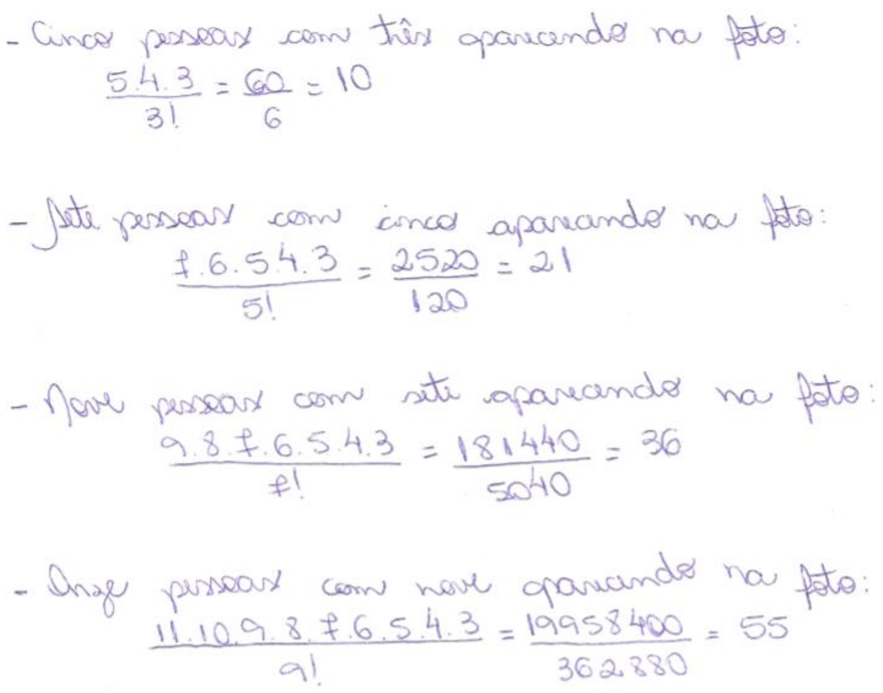


Figura 29 – Cálculos apresentados pelo aluno A como solução para o Problema 2 e questões anteriores

Após discussão e registro dos alunos, iniciou-se o processo de generalização para a solução do problema. Para isso, foi analisado o caso de um grupo de $\boldsymbol{n}$ pessoas sendo obtida, com auxílio dos alunos, a seguinte expressão:

$$\frac{\boldsymbol{n}\,.\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}).\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2}).\,\ldots.\,\boldsymbol{3}}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2})!}$$

Aula 14 - *Resolução das atividades 20 a 27*

Durante a aula 14, os alunos foram orientados a fazer uso do raciocínio combinatório para resolver as atividades 20 a 27, retratadas na Figura 30. Neste momento, eles foram incentivados a fazer uso da mobilização dos raciocínios aditivos e multiplicativos para resolução das situações problemas, não sendo formalizados, ainda, o uso de fórmulas ou algoritmos.

20. Cinco pessoas, Arnaldo, Benedito, Carla, Débora e Eliane, estão juntas em uma sala.
    a) Quantos agrupamentos **ordenáveis** diferentes (filas) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas?
    b) Quantos agrupamentos **não ordenáveis** diferentes (grupos) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas?
    c) Quantos grupos diferentes de 2 pessoas podem ser formados com as pessoas presentes na sala?
21. Há 10 bolas em uma caixa, todas iguais com exceção da cor, sendo 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Quantos conjuntos de 4 bolas podem ser formados sendo:
    a) todas brancas?
    b) duas brancas e duas pretas?
22. Sobre a prateleira de um laboratório repousam 8 substâncias diferentes. Quantas misturas diferentes com iguais quantidades de 2 dessas substâncias podem ser feitas se:
    a) não houver qualquer restrição?
    b) entre elas há 3 substâncias que não podem ser misturadas duas a duas por formarem um composto que exala gás tóxico?

23. Uma seleção de basquete com 5 jogadores será formada por atletas escolhidos de apenas duas equipes **A** e **B**. Da equipe **A**, que possui 12 atletas, serão selecionados 2, enquanto a equipe **B**, que possui 10 atletas, cederá 3 para a seleção. Se todos os atletas têm potencial igual de jogo, quantas seleções diferentes poderão ser formadas?

24. A partir de um conjunto de 15 bolas iguais, a não ser pela cor (8 são brancas, 4 pretas e 3 amarelas), serão formados grupos de 3 bolas. De quantas maneiras diferentes poderão ser formados esses grupos se não são desejáveis grupos que contenham bolas de uma única cor?

25. Na classe de Luiza e Roberta estudam, contando com elas, 34 alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser formados grupos de trabalho de 4 alunos se Roberta e Luiza não podem participar juntas de um mesmo grupo?

26. Dispomos de 8 pessoas para formar grupos de trabalho. De quantas maneiras diferentes o grupo poderá ser formado se dele participar(em):
    a) apenas uma das 8 pessoas?
    b) duas das 8 pessoas?
    c) três das 8 pessoas?
    d) quatro das 8 pessoas?
27. Em uma sala há **n** pessoas com as quais formaremos grupos, ordenáveis ou não. De quantas maneiras diferentes poderemos formar o grupo se ele tiver:
    a) apenas 1 elemento?
    b) 2 elementos?
    c) 3 elementos?
    d) 4 elementos?
    e) **p** elementos, $\mathbf{p < n}$?

Figura 30 – Atividades 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 e 27 – Caderno do Aluno, páginas 22, 23 e 24

Após a resolução e correção das atividades acima, foi promovido um momento de reflexão, retomando as semelhanças e diferenças existentes entre agrupamentos ordenáveis e não ordenáveis, foram apresentadas aos alunos as definições e fórmulas do arranjo e da combinação, utilizadas para resolver atividades que envolvam os dois tipos de agrupamentos, respectivamente.

Dado um conjunto A com $\boldsymbol{n}$ elementos distintos, podemos definir arranjo e combinação conforme o exposto abaixo:

Definição 4.6: Arranjo: “chama-se *arranjo* dos $\boldsymbol{n}$ elementos, tomados $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{k}$, a qualquer sequência ordenada de $\boldsymbol{k}$ elementos distintos escolhidos entre *n* existentes” (IEZZI et al., 2004, p. 317), sendo seu valor obtido através da seguinte equação:

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

quando os agrupamentos forem ordenáveis. (Adaptado de São Paulo, 2014, p. 38).

Definição 4.7: Combinação: “chama-se *combinação* dos $\boldsymbol{n}$ elementos de A, tomados $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{k}$, qualquer subconjunto de A formado por $\boldsymbol{k}$ elementos” (IEZZI et al., 2004, p. 326), cujo resultado pode ser obtido através da seguinte equação:

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!.\,\boldsymbol{k}!}$$

quando os agrupamentos forem não ordenáveis. (Adaptado de SÃO PAULO, 2014, p. 38).

Apesar das fórmulas serem apresentadas aos alunos, não se fez obrigatório o uso destas nas resoluções das demais atividades.

Aula 15 - *Resolução das atividades 28 a 32*

Após a introdução dos termos arranjo e combinação e apresentação das fórmulas para seus cálculos aos alunos, a aula 15 segue com a resolução das atividades 28 a 31 do Caderno do Aluno, evidenciadas na Figura 31.

Vale ressaltar que, apesar dos alunos já estarem familiarizados com as fórmulas, o uso delas não é obrigatório e nem mesmo veementemente incentivado para a resolução das questões.

O texto seguinte serve de enunciado para as atividades de 28 a 32.

Observe a imagem a seguir, das 24 pessoas que esperavam o início da aula de Matemática, e complete a tabela com a quantidade de pessoas que apresentam as características indicadas.

	Homens	Mulheres
Com óculos		
Sem óculos		
Total		

28. De quantas **maneiras diferentes** podemos sortear, entre essas pessoas:
a) uma mulher?
b) um homem?
c) duas mulheres?
d) dois homens?
e) duas pessoas com óculos?
f) duas mulheres com óculos?

29. Na primeira fila estão sentadas 7 pessoas. De quantas maneiras podemos trocá-las de lugar de modo a mantê-las todas na mesma fila?

30. De quantas maneiras diferentes podemos formar, com as pessoas da imagem, grupos de:
a) 3 homens?
b) 3 mulheres?
c) 3 pessoas com óculos?
d) 2 homens e uma mulher?
e) 1 homem e duas mulheres?

31. Agora, atenção! Vamos formar grupos de 4 pessoas com as 7 pessoas da primeira fila. Quantos grupos diferentes poderão ser formados se:
a) todos forem homens?
b) todas forem mulheres?
c) todos usarem óculos?
d) nenhuma pessoa usar óculos?
e) o grupo for formado por 3 homens e uma mulher?
f) o grupo for formado por 2 homens e duas mulheres?

Figura 31 – Atividades 28, 29, 30 e 31 – Caderno do Aluno, páginas 24, 25, 26 e 27

O problema 32, relacionado na Figura 32, foi colocado como atividade em dupla, tendo um aluno que elaborar o problema para ser resolvido pelo colega. A solução encontrada para o problema elaborado, deveria ser, posteriormente, corrigida pelo aluno autor.

32. Crie um problema que envolva a ideia de agrupamento de pessoas, levando em conta o pessoal que está sentado ao seu redor. Não vale copiar enunciados já apresentados. Resolva o problema.

Figura 32 – Atividade 32 – Caderno do Aluno, página 27

Como cumprimento desta atividade, as Figuras 33 e 34 apresentam, respectivamente, um dos problemas elaborados pelos alunos e a resposta encontrada para ele.

Em nossa sala de aula estudam 20 alunos, sendo 13 meninos e 7 meninas, sendo Larissa e Nathan dois destes alunos.
A professora de Educação Física precisa formar uma comissão de nove alunos para ajudá-la na organização de um evento a ser realizada na escola. Sendo assim calcule:

A) o nº de comissões que a professora poderá formar se resolver escolher de forma aleatória os alunos da sala?

B) o nº de comissões caso a professora decida que Larissa e Nathan devem fazer parte da comissão?

C) o nº de comissões possíveis caso a professora decida que ela deva ser composta por 5 meninas e 4 meninos e que Larissa e Nathan devem fazer parte desta comissão?

Figura 33 – Situação problema apresentada pelo aluno A

a) $\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12}{9!} = \frac{60\,949\,324\,800}{362\,880} = 167\,960$

b) $\frac{18.17.16.15.14.13.12}{7!} = \frac{160392960}{5040} = 31824$

c) Meninas: $\frac{6.5.4.3}{4!} = \frac{360}{24} = 15$

Meninos: $\frac{19.18.17}{3!} = \frac{5814}{6} = 969$

Total: $15.969 = 14535$

Figura 34 – Solução encontrada pelo aluno B

As atividades 33 a 38 foram encaminhadas como Lição de Casa, para serem resolvidas individualmente e posteriormente corrigidas em sala de aula.

Aula 16 - *Correção comentada das atividades 33 a 38*

No início da aula foram retomados alguns conceitos importantes como as características dos agrupamentos ordenáveis e não ordenáveis, as fórmulas para cálculo de arranjos e combinações, a definição de anagramas, como calculá-los e ainda o fatorial de um número (n!).

Feito essa retomada, foi realizada, em conjunto, a correção das atividades 33 a 38, relacionadas na Figura 35, que, na aula anterior, haviam sido indicadas como Lição de Casa.

33. Sete pessoas, 3 meninas e 4 meninos, entram em um cinema e vão ocupar 7 cadeiras. Uma pessoa em cada cadeira, colocadas lado a lado. De quantas maneiras diferentes essa ação poderá ser realizada se:
a) não houver qualquer restrição?
b) na primeira cadeira sentar um menino e na última uma menina?
c) duas meninas sempre ficarem lado a lado?
d) todas as meninas ficarem lado a lado?
e) todas as meninas ficarem lado a lado e os meninos também?

34. A fim de angariar fundos para uma viagem de estudos com sua turma, um professor de Matemática organizou uma rifa. Para tanto, ele imprimiu a maior quantidade possível de bilhetes contendo um número de 4 algarismos distintos. Depois, vendeu esses bilhetes a R$ 2,00 cada um para comprar as passagens que custavam, ao todo, R$ 4 000,00. Supondo que o professor tenha vendido todos os bilhetes, responda: ele conseguiu ou não comprar todas as passagens?

O enunciado seguinte serve para a resolução das atividades de 35 a 38.

O desenho mostra 12 pessoas sentadas em uma arquibancada. Na fileira de trás estão 5 homens e uma mulher. Na fileira da frente estão 4 homens e duas mulheres.

Entre as pessoas deste grupo, duas, da fileira da frente, usam óculos, e duas, da fileira de trás, também.

35. Pensando apenas nas pessoas da fileira de trás, de quantas maneiras elas podem trocar as posições entre si:
a) sem qualquer restrição?
b) de modo que as duas pessoas de óculos fiquem sempre separadas?
c) de modo que a mulher esteja sempre entre os dois homens que usam óculos?

36. Pensando apenas nas pessoas da fileira da frente, de quantas maneiras elas podem trocar as posições entre si:
a) se as duas pessoas que usam óculos estiverem sempre lado a lado?
b) se os homens sempre ficarem juntos e as mulheres também?

37. Uma das pessoas sentadas será sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja sorteado um homem da fileira da frente?

38. Se forem sorteadas duas pessoas, uma da fileira da frente e outra da fileira de trás, qual é a probabilidade de que sejam sorteadas duas pessoas de óculos?

Figura 35 – Atividades 33, 34, 35, 36, 37 e 38 – Caderno do Aluno, páginas 29 e 30

Aulas 17 e 18 - *Identificação do conteúdo, competências e habilidades referentes à Situação de Aprendizagem 3 e Jogo Cor Exata*

No início das aulas 17 e 18, foram registrados na lousa os conteúdos, competências e habilidades abordados durante a realização das atividades da Situação de Aprendizagem 3, chamando a atenção para o fato de que continuaríamos tratando de situações que envolviam a identificação de casos que dizem respeito a ordenação ou não dos elementos que compõem os eventos.

Os conteúdos, competências e habilidades referentes à Situação de Aprendizagem 3 estão relacionados no Quadro 4:

Quadro 4 – Identificação de Conteúdos, Competências e Habilidades referentes a Situação de Aprendizagem 3

Conteúdos e temas: probabilidades condicionais; reunião e/ou inserção de probabilidade; probabilidade de eventos mutuamente exclusivos; probabilidades de eventos independentes. Competências e habilidades: interpretar informações contidas em enunciados de situações-problema, com o objetivo de caracterizar a necessidade de mobilizar o raciocínio combinatório; identificar as semelhanças e as diferenças entre os diversos casos de probabilidade, no que diz respeito à ordenação ou não dos elementos que compõem os eventos.

Fonte: Caderno do professor, página 44

Após o registro do conteúdo, competências e habilidades e breve comentário sobre eles, iniciou-se o trabalho com o jogo Cor Exata. Este jogo também faz parte do caderno de atividades práticas de Matemática disponibilizado a Escola pela STEM Brasil.

Para que os alunos pudessem se envolver com a atividade, foi apresentada a eles a seguinte situação problema:

Problema 3: *"Qual a probabilidade que se tem de tirar duas bolinhas de cor laranja de uma urna fechada, que possua cinco bolinhas de cor branca e duas de cor laranja em seu interior?"*

Organizados em grupos de 4 alunos, eles foram orientados a apresentar a solução para o problema, justificando sua resposta.

Porém, antes de produzir a solução escrita, os alunos foram instigados a realizar este jogo de adivinhação. Para tal, fizeram uso de sacos plásticos pretos no lugar de urna e usaram os cubos de madeira coloridos do kit de probabilidades presentes no Laboratório 1 da Escola (Figura 36). Dentro do saco preto, cada grupo deveria colocar dois cubos vermelhos e cinco cubos verdes, todos de mesmo tamanho, textura e material. Em seguida, os participantes dos grupos sugeriam seus palpites e tentavam estimar as suas chances de acerto. A “brincadeira” foi realizada cerca de dez vezes e após isso os alunos puderam, em grupo, registrar a solução para o problema inicial.

Figura 36 – Cubos coloridos do kit de probabilidades da Brax Tecnologia, disponível no Laboratório 1 da Escola

Como produto final da atividade, o grupo B apresentou a resposta exposta na figura 37:

Como a urna possui um total de 7 bolinhas das quais apenas duas são da cor laranja, temos então:

1ª bolinha: $\frac{2}{7}$; 2ª bolinha: $\frac{1}{6}$

Total: $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$

Agora, se houver reposição da bolinha, temos:

$\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

Figura 37 – Resposta apresentada pelo grupo B

Os alunos se envolveram na resolução do problema e aproveitou-se o momento para explorar os conceitos relacionados ao cálculo de probabilidades que envolvem o raciocínio combinatório e as condições de sorteio com e sem reposição das peças a serem sorteadas.

Aulas 19 e 20 - *Resolução e correção comentada das atividades 1 a 8*

Após a discussão do cálculo de probabilidade, de ocorrência de eventos que dispensam o raciocínio combinatório e dos casos de formação de grupos ordenáveis e não ordenáveis, as atividades se concentraram na resolução de situações problemas sobre o cálculo de probabilidades de eventos que exigem a mobilização de raciocínio combinatório.

O jogo Cor Exata realizado na aula anterior, introduziu e apresentou conceitos que puderam ser evidenciados durante a realização das atividades elencadas na Figura 38.

1. Considere a seguinte situação: duas pessoas serão sorteadas de um grupo formado por 8 pessoas, em que 3 são homens e 5, mulheres. Para essa situação, calcule a probabilidade de ocorrência de:
   a) dois homens;
   b) duas mulheres;
   c) uma pessoa de cada sexo.
2. Calcule a soma dos resultados que você obteve nos itens **a**, **b** e **c** da atividade anterior e, se não obtiver 100%, descubra o que está errado.
3. Será realizado um sorteio de 3 pessoas entre 8, em um grupo formado por 5 mulheres e 3 homens. Determine a probabilidade de que sejam sorteados:
   a) um homem, outro homem e uma mulher, nessa ordem;
   b) dois homens e uma mulher, em qualquer ordem;
   c) um homem, uma mulher e outra mulher, nesta ordem;
   d) um homem e duas mulheres, em qualquer ordem.
4. Sorteando 4 alunos de uma classe com 15 meninos e 13 meninas, qual é a probabilidade de que sejam sorteados 2 meninos e 2 meninas?
5. No jogo de loteria oficial Mega-Sena, um apostador escolhe no mínimo 6 dezenas entre 60. São sorteadas 6 dezenas e o ganhador do prêmio maior deve ter escolhido todas as dezenas sorteadas. Qual é a probabilidade de um apostador que escolheu 8 dezenas ganhar o maior prêmio?
6. Qual é a probabilidade de o apostador descrito no enunciado da atividade anterior acertar 4 das 6 dezenas sorteadas?
7. Em determinado jogo lotérico, um apostador pode escolher de 5 a 10 dezenas de um total de 50. São sorteadas 5 dezenas e o ganhador do prêmio maior deve acertar todas elas. Se uma aposta em 5 dezenas custa R$ 2,00, quanto deve custar uma aposta em 10 dezenas?
8. Em uma caixa há 20 bolas iguais, a não ser pela cor. Dessas bolas, $\frac{1}{4}$ é verde, $\frac{2}{5}$ são amarelas e o grupo restante é formado apenas por bolas da cor rosa. Serão realizados três sorteios com reposição de uma bola a cada vez. Nessa condição, uma mesma bola pode ser sorteada mais de uma vez. Qual é a chance de serem sorteadas:
   a) bolas de uma única cor?
   b) apenas bolas verdes ou amarelas?

Figura 38 – Atividades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 – Caderno do Aluno, páginas 31, 32, 33 e 34

Estas atividades foram resolvidas em duplas, com intervenção e orientação do professor. Após a resolução das atividades, realizou-se a correção comentada na lousa, com participação dos alunos.

Ao fim da aula, as atividades 9 e 10 foram encaminhadas como Lição de Casa.

Aula 21 - *Correção da Lição de Casa – atividades 9 e 10*

No início da aula 21 foram retomados os conceitos de probabilidade simples, fatorial de um número, arranjo, combinação, independência de eventos e probabilidade condicional.

A seguir observou-se e registrou-se quais alunos haviam realizado a atividade encaminhada como Lição de Casa e prosseguiu-se com a correção, na lousa, das atividades 9 e 10, evidenciadas na Figura 39.

9. Lucia e Jair estão, com outras 8 pessoas, esperando o sorteio de 4 pessoas para a formação de um grupo de trabalho. Qual é a probabilidade de Jair e Lucia **não** fazerem parte, os dois, do grupo sorteado?

10. Imagine 9 pessoas, sendo 4 homens e 5 mulheres, e calcule o que se pede.
    a) Quantas filas diferentes podem ser formadas?
    b) Quantas filas diferentes podem ser formadas se os homens ficarem juntos?
    c) Quantas filas diferentes podem ser formadas se os homens ficarem juntos e as mulheres também?
    d) Quantos grupos diferentes de 9 pessoas podem ser formados?
    e) Quantos grupos diferentes de 4 pessoas podem ser formados?
    f) Quantos grupos diferentes de 4 pessoas, com 2 homens e duas mulheres, podem ser formados?
    g) Quantos grupos diferentes de 4 pessoas do mesmo sexo podem ser formados?
    h) Quantos grupos diferentes de 5 pessoas podem ser formados, de modo que os homens sejam sempre a maioria?
    i) Quantos grupos diferentes de 4 pessoas podem ser formados se uma das mulheres (Miriam) e um dos homens (Tarso) nunca puderem ficar juntos no grupo formado?

Figura 39 – Lição de Casa – Atividade 10 – Caderno do Aluno, páginas 35 e 36

Aula 22 - *Jogo Chances no Jogo*

Mais uma vez utilizou-se das instruções de um jogo presente no caderno de atividades práticas de Matemática disponibilizadas a Escola pela STEM Brasil. Foi usado também o conjunto de dados do kit de probabilidades do Laboratório 1 da Escola e um quadro como o representado no Quadro 5 abaixo:

Quadro 5 – Modelo de quadro a ser preenchido pelos alunos durante o Jogo Chances no Jogo

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos foram divididos em duas equipes para que pudessem solucionar o seguinte problema:

Problema 4: *“Qual é a chance de tirar um valor, obtido pela somatória dos números sorteados por dois dados comuns lançados simultaneamente?”*

Para o desenvolvimento da atividade, os alunos foram orientados para que, inicialmente, dois integrantes do grupo arremessassem, simultaneamente, dois dados comuns (6 faces) e cada jogador na sua vez, realizasse a soma dos valores obtidos em sua rodada. Após algumas rodadas, verificaram-se as somas anotadas por todos os alunos e realizou-se o preenchimento do Quadro 2 exposto anteriormente, onde, em seu interior (encontro das linhas com as colunas) deveriam ser apresentados os valores das somatórias de cada linha por coluna e, com isso, teríamos as possíveis combinações de valores obtidos neste jogo.

A Figura 40 demonstra o preenchimento do Quadro 2 apresentado pela dupla R:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 40 – Somatórias das faces obtidas com o lançamento simultâneo de dois dados – Solução apresentada pela dupla R

A seguir, os alunos foram orientados a realizar o cálculo das probabilidades de se obter cada um dos valores da somatória de dois dados comuns. Notam-se na Figura 41 os cálculos apresentados pela dupla E.

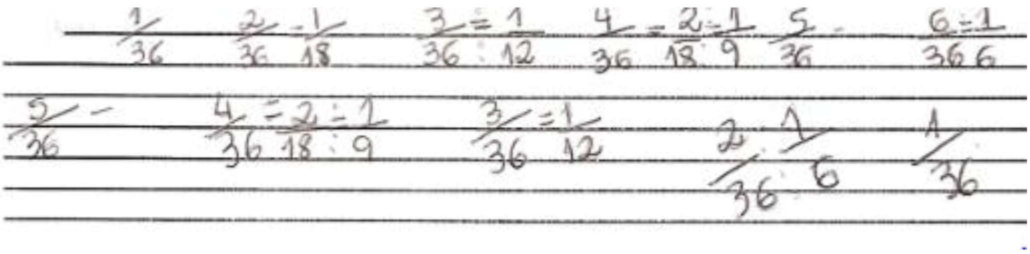


Figura 41 – Solução apresentada pela dupla E

Terminada esta atividade, foram entregues aos alunos dados com números de lados diferentes, como os da Figura 42, para que resolvessem o seguinte problema:

Problema 5: *"Qual é a chance de tirar um valor obtido pela somatória dos números sorteados por dois dados de lados diferentes?"*

Figura 42 - Dados de lados diferentes – Material do kit de probabilidades da Brax Tecnologia, disponível no Laboratório 1 da Escola

Para resolver o problema os alunos foram separados em dois grupos e deveriam organizar sua própria tabela, indicando o número de faces dos dados escolhidos, as somatórias e o cálculo de probabilidade de ocorrência de cada uma delas. Nas figuras 43 e 44 são apresentadas as anotações feitas pelos grupos A e B, respectivamente.

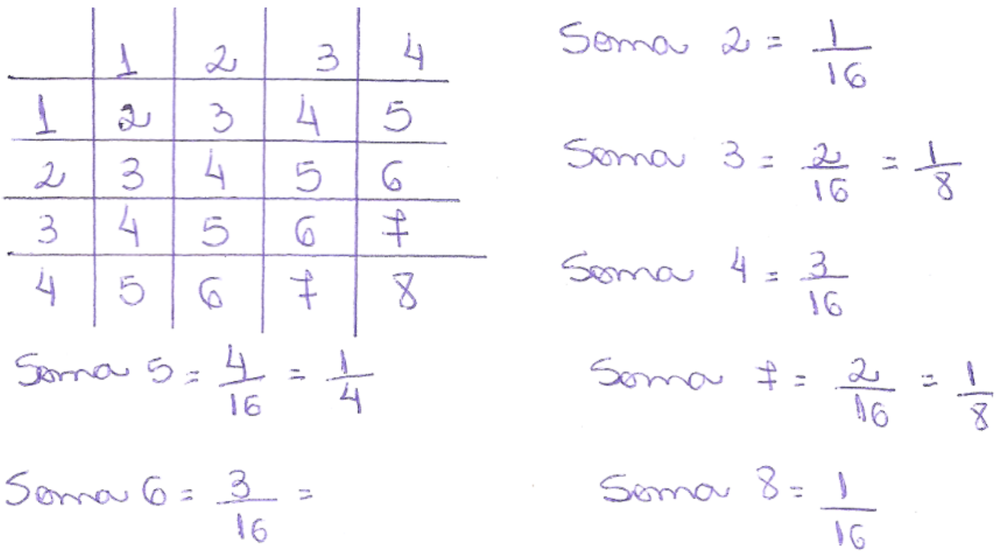


Figura 43 - Solução apresentada pelo grupo A

Figura 44 - Solução apresentada pelo grupo B

Aula 23 - *Identificação de conteúdos, competências e habilidades da Situação de Aprendizagem 4 e Vídeo O Código de Pascal*

Dando continuidade ao assunto de probabilidade a aula 23 iniciou-se com o registro dos conteúdos, competências e habilidades abordados pela Situação de Aprendizagem 4, conforme exposto no Quadro 6.

Quadro 6 - Identificação de Conteúdos, Competências e Habilidades referentes a Situação de Aprendizagem 4

Conteúdos e temas: expansão binomial de probabilidades; o Triângulo de Pascal e os coeficientes binomiais. Competências e habilidades: interpretar o resultado da probabilidade de ocorrência de um evento em *n* repetições de um mesmo experimento; relacionar o cálculo da probabilidade de *n* repetições de um evento, mantendo-se as condições, com o desenvolvimento de um binômio de expoente *n*.

Fonte: Caderno do Professor, página 52

Após o registro das informações acima e breve explanação sobre elas, os alunos foram orientados a assistir o vídeo "O código de Pascal", onde foram apresentados o famoso Triângulo de Pascal e os coeficientes do Binômio de Newton.

Terminada a apresentação do vídeo, iniciou-se uma discussão acerca das informações apresentadas e os alunos foram instigados a apresentarem a expansão explícita dos seguintes binômios $(x+y)^4$ e $(x+y)^7$. O desenvolvimento da atividade foi acompanhado pela professora e poucos alunos tiveram dificuldade para apresentar a resposta.

Os alunos usaram diferentes caminhos para chegar a solução e ao final a solução demonstrada nas Figuras 45 e 46 foi apresentada a sala pelo aluno D.

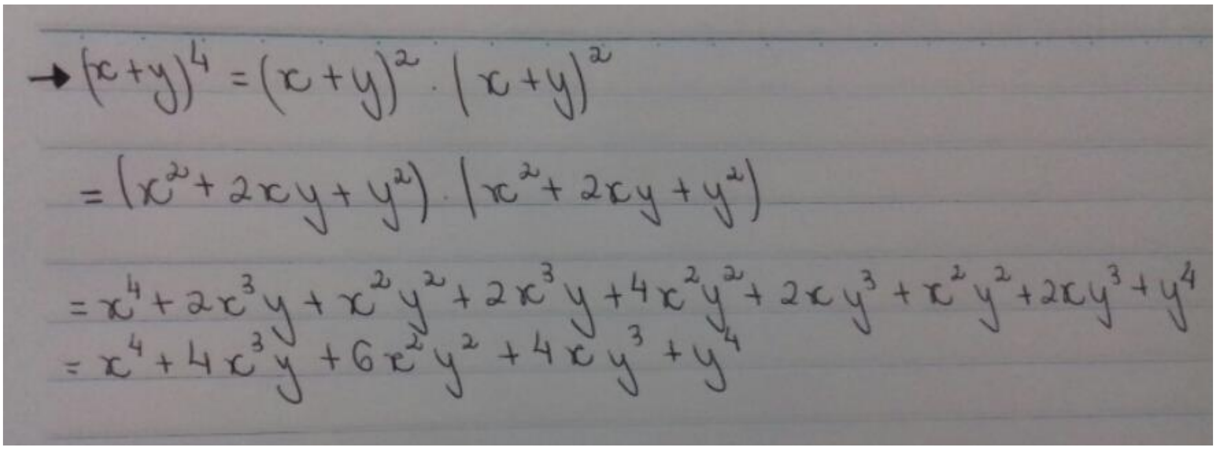


Figura 45 – Expansão explícita de $(x+y)^4$, apresentada pelo aluno D.

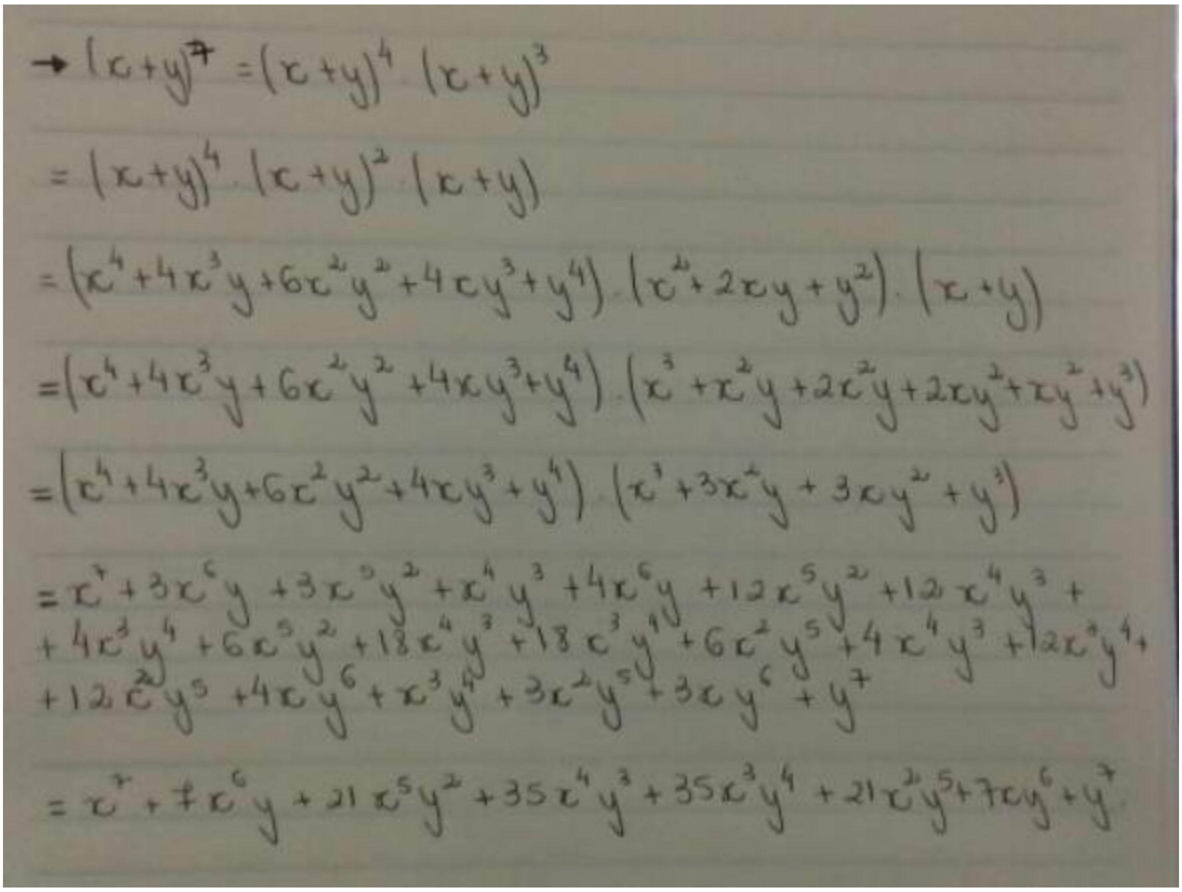


Figura 46 – Expansão explícita de $(x+y)^7$, apresentada pelo aluno D.

Aula 24 - *Resolução das atividades página 1 a 12*

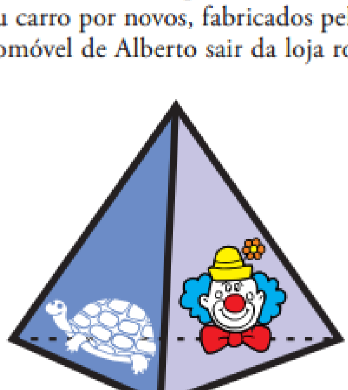
Familiarizados com os coeficientes do Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal apresentados no vídeo da aula anterior, os alunos foram orientados quanto à resolução das atividades 1 a 12 do Caderno do Aluno. A resolução das atividades foi feita de forma individual, com intervenções e orientações do Professor e posterior correção na lousa.

Neste momento os alunos foram orientados a utilizar os procedimentos com os quais tivessem maior familiaridade, não devendo se prender às novas informações para realização destas atividades. Posteriormente, durante a correção das atividades, o desenvolvimento do Binômio de Newton foi novamente apresentado e estabeleceu-se a sua relação por intermédio das probabilidades.

As atividades desenvolvidas nesta aula estão na Figura 47.

1. Uma moeda comum, ao ser lançada, determina probabilidade $\frac{1}{2}$ para cada uma de suas faces, cara ou coroa. Lançando-se, por exemplo, 8 vezes uma moeda, qual é a probabilidade de ocorrência de 3 caras nos três primeiros lançamentos e de 5 coroas nos demais?
2. Um dado é lançado 6 vezes e deseja-se que a face 4 esteja voltada para cima ao final de 2 desses lançamentos. Qual é a probabilidade de que o esperado ocorra nos 2 primeiros lançamentos?
3. Considere o caso de 5 lançamentos de um dado com o objetivo de verificar em quantas dessas vezes a face voltada para cima contém um número maior do que 4, isto é, contém 5 ou 6. A probabilidade de que isso ocorra em um lançamento é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e a possibilidade de que não ocorra em um lançamento é $\frac{2}{3}$. Em 5 lançamentos poderemos ter o resultado esperado em nenhuma das vezes, em uma das vezes, em duas, até, no máximo, em todas as vezes. Calcule a probabilidade de ocorrência de cada um desses casos.
4. Escreva uma expressão para a adição de todas as probabilidades que você calculou na atividade 3.

5. Estatisticamente, 1 em cada 10 televisores de determinada marca apresenta problemas de funcionamento. Uma loja de eletrodomésticos acaba de comprar 6 desses televisores para revender. Supondo que todos sejam vendidos, qual é a probabilidade de a loja receber reclamações de:
   a) nenhum comprador?
   b) apenas 1 comprador?
   c) apenas 2 compradores?
   d) 3 compradores?
   e) 4 compradores?
   f) 5 compradores?
   g) todos os compradores?
6. Serão realizados 5 sorteios sucessivos utilizando-se 20 bolas e sendo 4 delas vermelhas. Haverá reposição de uma bola a cada vez. Escreva a probabilidade de saírem:
   a) 5 bolas vermelhas;
   b) 4 bolas vermelhas e uma não vermelha
   c) 3 bolas vermelhas e duas não vermelhas;
   d) duas bolas vermelhas e 3 não vermelha
   e) uma bola vermelha e 4 não vermelhas;
   f) nenhuma bola vermelha.
7. O que é mais provável: duas caras no lançamento de 4 moedas ou uma face 6 no lançamento de 2 dados?
8. Uma prova é formada por 10 testes com 5 alternativas cada um, em que apenas uma delas é correta. Qual é a probabilidade de um aluno acertar, "chutando", 4 testes nessa prova?
9. Quatro prêmios iguais serão sorteados entre os 20 alunos de uma classe e há a possibilidade de qualquer aluno ser sorteado mais de uma vez. Qual é a probabilidade de Haroldo ser sorteado apenas no 2º sorteio?
10. O controle de qualidade de uma empresa fabricante de pneus aponta que é igual a 0,2% a probabilidade de que determinada máquina envolvida no processo apresente problemas durante a fabricação do produto, o que implica a colocação no mercado de um pneu defeituoso. Alberto vai a uma loja para trocar os 4 pneus usados de seu carro por novos, fabricados pela empresa descrita anteriormente. Qual é a chance de o automóvel de Alberto sair da loja rodando com 2 pneus defeituosos?
11. Um "dado" especial tem o formato de um tetraedro regular com uma figura diferente em cada uma de suas faces. Em uma delas, há um palhaço. Se lançarmos 4 vezes esse dado, quais são as probabilidades de a face com o palhaço ficar voltada para baixo: nenhuma, uma, duas, três ou quatro vezes? Calcule cada uma delas, separadamente, no espaço a seguir, e mostre que a soma de todas elas é igual a 100%.



12. Utilize um gráfico de barras para representar todas as probabilidades envolvidas em 8 lançamentos seguidos de uma moeda, com a observação da ocorrência do evento cara na face superior.

Figura 47 – Atividades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 – Caderno do Aluno, páginas 37, 38, 39, 40, 41 e 42

Aula 25 - *Correção comentada das atividades da aula anterior, apresentação do desenvolvimento do Binômio de Newton e expressão geral, propriedades do Triângulo de Pascal*

Como colocado anteriormente, após a resolução das atividades 1 a 12, procedeu-se a correção comentada das mesmas. Durante a correção destas atividades, aproveitou-se para realizar a apresentação da definição formal de coeficientes binomiais, apresentando casos particulares e a definição de binomiais complementares, trazendo ainda a generalização da expressão do termo geral do binômio.

Definição 4.8: Coeficientes binomiais: Em IEZZI et al., 2004, p. 386, encontra-se a seguinte definição para coeficientes binomiais: "Dados dois números naturais, *n* e *p*, com *n* ≥ *p*, definimos o *coeficiente binomial* $\boldsymbol{n}$ *sobre* $\boldsymbol{p}$, e indicamos por $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}}$ o número $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!} = C_{n,p}$".

Nesta expressão, temos que n é dito numerador, enquanto p é chamado de denominador de $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}}$.

Casos particulares:

- quando $\boldsymbol{p}$ = 0, temos $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{0}}$ = 1, ∀ $\boldsymbol{n}$ ϵ N.

- quando $\boldsymbol{p}$ = 1, temos $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}}$ = n, ∀ $\boldsymbol{n}$ ϵ N.

- quando $\boldsymbol{p}$ = n, temos $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}$ = 1, ∀ $\boldsymbol{n}$ ϵ N.

Definição 4.9: Binomiais complementares: Diz-se que dois coeficientes binomiais de mesmo numerador são complementares quando a soma de seus denominadores é igual ao numerador, isto é: $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{p}}$ e $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{q}}$ são complementares se $\boldsymbol{p}$ + $\boldsymbol{q}$ = $\boldsymbol{n}$". (IEZZI et al., 2004, p 387).

Para que os alunos chegassem à generalização da expressão do termo geral do Binômio de Newton, foi feito o registro na lousa dos cálculos de:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ e

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Desta forma, os alunos puderam identificar alguns padrões como o fato de que o expoente de *a* decresce desde o valor do expoente do binômio até zero, enquanto o expoente de b cresce de zero até o valor do expoente do binômio. Foi lhes ainda chamada à atenção para os coeficientes binomiais.

Tendo compreendido e visualizado as informações necessárias, foi, então, apresentada a eles a generalização da expressão do termo geral do Binômio de Newton, representada na Figura 48.

$$\Rightarrow \text{Binômio: } (a+b)^n \Rightarrow \text{Termo geral: } T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Figura 48 - Generalização da expressão do termo geral do Binômio de Newton apresentada no Caderno do Professor página 54

.

Durante esta aula, procurou-se fazer esta generalização sem amarrá-la diretamente a resolução dos problemas.

Neste momento, aproveitou-se ainda para realizar o estudo das propriedades do Triângulo de Pascal.

A Figura 49 nos traz a representação do Triângulo de Pascal e em seguida as suas propriedades.

n = 0	1						
n = 1	1	1					
n = 2	1	2	1				
n = 3	1	3	3	1			
n = 4	1	4	6	4	1		
n = 5	1	5	10	10	5	1	
n = 6	1	6	15	20	15	6	1

Figura 49 - Representação do Triângulo de Pascal – Caderno do Professor página 55

Propriedades do Triângulo de Pascal:

> **1ª** Toda linha começa e termina por 1 [...].
> **2ª** Em uma mesma linha, os coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais [...].
> **3ª** A partir da linha 2, notamos que cada elemento X (com exceção do primeiro e do último) é igual à soma de dois elementos da linha anterior, a saber: o elemento imediatamente acima de X e o anterior à este. [...]. (IEZZI et. Al, 2004, p. 390 e 391).

A terceira propriedade é também conhecida como relação de Stifel.

Ao final da aula, as atividades 13 a 15 foram encaminhadas como Lição de Casa.

Aula 26 – *Resolução e correção das atividades 13 a 15*

As atividades 13 a 15, retratadas nas Figuras 50 e 51, encerram a Situação de Aprendizagem 4 e com a correção destas atividades pode-se completar as atividades trazidas como objetos de estudo deste trabalho. Sendo assim, aproveitou-se o momento da aula 26 para, além de corrigir as atividades encaminhadas como Lição de Casa, sanar algumas dúvidas apresentadas pelos alunos.

13. Cinco carros de cores diferentes (preto, branco, vermelho, azul e amarelo) chegam a um pedágio. Apenas três desses carros passarão pelo pedágio antes de começar a chover. De quantas maneiras diferentes eles podem formar uma fila para transpor o pedágio antes de começar a chover se:
    a) a fila for formada ao acaso? b) o carro amarelo não ficar em primeiro lugar na fila?

14. Imagine um baralho normal com 52 cartas, divididas em 4 naipes. Em cada naipe há estas cartas: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K e A. Com base nas cartas desse baralho, calcule:
    a) o número de jogos diferentes que podem ser formados com 4 cartas;
    b) o número de jogos diferentes que podem ser formados com 5 cartas;
    c) a probabilidade de sortear uma carta e sair um rei;
    d) a probabilidade de sortear duas cartas e sair um par de reis;
    e) a probabilidade de sortear duas cartas e sair um par qualquer, ou seja, dois reis, duas damas etc.;
    f) o número de jogos diferentes com 4 cartas, em que todas são diferentes;
    g) o número de jogos diferentes com 4 cartas, em que 3 são damas e a outra, uma carta qualquer, não dama;
    h) a probabilidade de sortear 4 cartas e sair uma quadra de 10, isto é, 4 cartas 10;
    i) a probabilidade de sortear 4 cartas e sair uma quadra qualquer.

Figura 50 – Lição de Casa – Atividades 13 e 14 – Caderno do Aluno, páginas 43, 44 e 45

15. Um casal pretende ter vários filhos. Calcule a probabilidade de que eles tenham:

a) 4 filhos e que sejam todos meninos;

b) 4 filhos e que sejam 2 meninos e duas meninas;

c) 5 filhos e que 2 sejam meninos;

d) 6 filhos, sendo 3 meninos e 3 meninas;

e) 7 filhos e que o número de meninos seja maior do que o número de meninas.

Figura 51 – Lição de Casa – Atividade 15 – Caderno do Aluno, página 45

Após a correção das atividades abriu-se espaço para perguntas e comentários que foram apresentados pelos alunos e discutidos em grupo.

Colocou-se que em breve seria realizada a avaliação bimestral nos moldes exigidos pela Escola e que depois os alunos responderiam a um questionário elaborado tendo por base as atividades práticas propostas e realizadas.

Aula 27 - *Resolução de lista de exercícios de revisão e fixação de conteúdo*

Na aula 27 oportunizou-se um momento para que os alunos resolvessem uma lista de exercícios afim de que pudessem revisar os conceitos, conteúdos e habilidades abordados até aqui.

Os alunos foram organizados em duplas e as dúvidas que surgiram durante a resolução das atividades puderam ser discutidas com os demais alunos e sanadas pelo Professor.

A Figura 52 apresenta a lista de exercícios resolvida pelos alunos:

1. Na festa junina da escola de Carlinhos foram vendidas 200 cartelas de bingo. As pessoas que compraram a cartela vão concorrer a uma bicicleta de 18 marchas. Quais as chances de ganhar o prêmio indicado uma pessoa que comprou 10 cartelas?
2. Numa prova, cada questão possui cinco alternativas de resposta, mas somente uma está correta. Considerando que o aluno marque qualquer uma das alternativas, qual a probabilidade de acertar a questão?
3. A classe de Duda tem 30 alunos, dos quais 10 são meninos e 20 são meninas. O professor escreveu em uma ficha os nomes dos alunos e colocou-os em uma urna para sortear um desses nomes para apresentação de um trabalho. Duda quer saber quem tem mais chance de ser sorteado, menino ou menina? Qual é a probabilidade?
4. Lila guarda em sua bolsa 10 bolinhas do mesmo tamanho. Entre elas, 2 são vermelhas, 3 são azuis e 5 são verdes. Se Duda pegar uma dessas bolinhas, sem olhar, qual cor ele terá mais possibilidade de retirar? Qual é a probabilidade?
5. Qual é o número possível de anagramas que se pode montar com as letras da palavra AMOR?
6. Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os números ímpares 1,3,5,7,9.
7. Quantos são os anagramas possíveis com as letras: ABCDEFGHI, começando por uma vogal e terminando por uma consoante?
8. Há 10 pessoas em um local, sendo 3 com camisas verdes, 3 com camisas amarelas, 2 com camisas azuis e 2 com camisas brancas. De quantos modos podemos perfilar todas essas 10 pessoas de modo que os grupos com as camisas de mesma cor fiquem juntos?
9. Qual é o número possível de anagramas que se pode montar com as letras da palavra AMAR?
10. Quantos são os anagramas possíveis com as letras da palavra: MATEMATICA?
11. Um indivíduo possui 25 livros diferentes. De quantas formas distintas ele poderá empacotar tais livros em grupos de 6 livros?
12. Em uma sala existem 40 pessoas, 18 mulheres e 22 homens. Quantas comissões podem ser montadas nesta sala contendo 3 mulheres e 5 homens?
13. Qual é o número de diagonais de um polígono regular de n lados?
14. Quantos números distintos com 3 algarismos diferentes, podemos formar com os dígitos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9.
15. Com as 5 vogais: A,E,I,O,U, obter o conjunto solução que contém todos os arranjos tomados 2 a 2.
16. Quantas palavras com 3 letras podemos formar com as 26 letras de nosso alfabeto?

Figura 52 – Lista de exercícios resolvidas na aula 27

Aulas 28 e 29 - *Avaliação Bimestral – Questões abordadas e análise de desempenho dos alunos*

Segundo critérios para elaboração da avaliação bimestral da Escola, esta deve conter questões objetivas e dissertativas, que estejam de acordo com o conteúdo trabalhado em sala de aula e apresentar questões de provas de vestibulares, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da matriz de questões do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP).

Embasada nestas orientações as seguintes questões, expostas na Figura 53, foram apresentadas aos alunos como avaliação bimestral:

1. Considera as experiências seguintes:
I - " Deixar cair um prego dentro de um vaso com água "
II - " Jogar no totobola "
Qual das seguintes afirmações está correta:
( ) As experiências I e II são deterministas.
( ) A experiência I é determinista e a II é aleatória.
( ) A experiência I é aleatória e a II é determinista.
( ) Ambas são aleatórias.

2. Considera os seguintes acontecimentos:
A - " Sair sete no lançamento de um dado "
B - " O Benfica ganhar o próximo campeonato "
C - " Chover em Braga durante o mês de janeiro "
Escolhe a opção correta.
( ) O acontecimento A é impossível e o C é pouco provável.
( ) O acontecimento B é certo e o C é muito provável.
( ) Os acontecimentos A e C são ambos impossíveis.
( ) O acontecimento B não é certo e o C é muito provável.

3. Num café estão 20 pessoas. Sabendo que 8 são mulheres, indique a probabilidade de ao escolher uma das pessoas ao acaso, escolhermos um homem?
( ) 60% ( ) 0,4 ( ) 12 % ( ) 12

4. No lançamento de um dado viciado, a probabilidade de obtermos um nº par é o triplo da probabilidade de obter um número ímpar. A probabilidade de sair ímpar é?
( ) 0,5 ( ) 0,75 ( ) 0,25 ( ) 3

5. Lançou-se uma moeda e saiu cara. Se voltarmos a lançar a moeda:
( ) é mais provável sair coroa. ( ) é mais provável sair cara.
( ) é tão provável sair cara como coroa. ( ) a probabilidade de sair cara é 1.

6. Um doente que está prestes a ser operado sabe que a probabilidade de sucesso da operação é 99 %. Antes de ser operado perguntou ao médico quantas operações já tinha efetuado antes. Noventa e nove - respondeu o médico - e foram todas bem-sucedidas. O doente, muito abalado, decidiu que não queria ser operado pois, segundo os seus cálculos, a sua operação não teria sucesso.
Escolhe a opção correta:
( ) O doente tem razão, se as primeiras 99 correram bem a centésima tem que correr mal para que a probabilidade de sucesso seja 99%.
( ) O doente está errado, a probabilidade da sua operação ser bem-sucedida é de 50%.
( ) O doente está errado, a probabilidade da sua operação ser bem-sucedida é 99%.
( ) O doente está certo.

7. Uma equipa de futebol é composta por 5 jogadores portugueses, 3 brasileiros, 2 angolanos e 1 espanhol. Escolhido um jogador ao acaso, qual a probabilidade de ele ser português?

8. Numa turma de 28 alunos, 9 só praticam natação, 12 praticam apenas futebol e os restantes praticam as duas modalidades. Escolhido um aluno ao acaso, a probabilidade de ele praticar natação?

9. De um baralho com cinquenta e duas cartas foi retirada uma ao acaso. Qual a probabilidade dela não ser nem rei nem às?

10. Num saco estão bolas azuis e vermelhas, num total de 50 bolas. Sabendo que a probabilidade de tirar bola azul é 0,34 podemos concluir que o número de bolas vermelhas é:
( ) 33. ( ) 16. ( ) 25. ( ) 17.

Figura 53 – Questões 1 a 10 da Avaliação Bimestral

Antes dos alunos iniciarem a resolução das questões da avaliação bimestral foi discutido com eles os procedimentos do jogo totobola e o clima característico da cidade de Braga em Portugal.

Os alunos foram lembrados que a avaliação deveria ser realizada a caneta, de forma individual, não sendo permitido o uso de material para consulta e/ou rascunhos, devendo todo cálculo necessário para resolução das atividades ser registrado na própria folha de prova.

No capítulo 5 é apresentada uma análise de desempenho dos alunos na Avaliação Bimestral juntamente com as conclusões finais sobre o trabalho desenvolvido.

Aula 30 - *Questionário respondido tendo por base a proposta didática aplicada*

Ao terminar a aplicação da proposta didática e tendo aplicada a avaliação bimestral, na aula 30 os alunos foram convidados a responder a um questionário elaborado tendo por base as atividades realizadas. O objetivo foi de investigar se estes consideram válido ou não a introdução de jogos pedagógicos as atividades trazidas no caderno do Aluno e do Professor. Trata-se de um questionário rápido, com poucas questões, conforme observa-se nas Figuras 54 e 55.

1. Durante o 3º Bimestre focamos nossos estudos na Teoria das Probabilidades e Análise Combinatória e, para facilitar o aprendizado e tornar as aulas mais agradáveis, nos utilizamos de alguns jogos em sala. Você poderia identificar quais materiais utilizamos em nossas aulas?
2. Os jogos utilizados se tratavam de experimentos aleatórios ou determinísticos? Por quê?
3. Façamos algumas simulações e retomemos alguns conceitos:
   a) No jogo do Bingo, as bolinhas utilizadas estavam numeradas de 1 a 90. Cada cartela possuía 18 números e para ganhar era preciso marcar todas elas. No dia da atividade 14 alunos estavam presentes na sala. Sendo assim:
   Qual o espaço amostral deste experimento?
   Sendo sorteado um número, qual a probabilidade de que ele esteja na sua cartela?
   Qual a probabilidade do primeiro número sorteado ser menor que 15?
   Qual a probabilidade de cada aluno ser vencedor?
   Como você pode aumentar as suas chances de vencer?
   b) Colocando-se em uma urna 4 fichas verdes, 3 fichas vermelhas, 2 fichas azuis e 1 ficha branca, qual a probabilidade de sortearmos uma ficha verde?
   Se formos fazer uma aposta nesta atividade em qual cor devemos apostar? Por quê
   c) No lançamento simultâneo de dois dados, observam-se as faces voltadas para cima e somam-se seus valores.
   Qual o espaço amostral de resultados possíveis?
   Qual a probabilidade da soma sorteada ser 1?
   Qual a probabilidade da soma sorteada ser 12?
   Qual a soma com maior probabilidade de ocorrer?
   No lançamento de uma moeda não viciada, qual a probabilidade de que saia cara?
   d) Num baralho de 52 cartas, retiramos uma carta ao acaso, qual a probabilidade dela ser:
   De paus? Um az? Uma dama de copas?

Figura 54 – Questionário aplicado na aula 30

4. Na atividade "Formando Grupos", você e seus colegas foram instigados a tirar algumas fotos. Você seria capaz de descrever essa atividade? Faça isso nas linhas abaixo
5. Para você, as atividades com jogos facilitaram sua compreensão acerca dos conceitos relacionados aos temas Probabilidade e Análise Combinatória? Justifique:
6. Dê sugestões que possam contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem nas aulas de Matemática.

Figura 55 – Continuação do Questionário aplicado na aula 30

Dentre as respostas apresentadas para as questões do questionário, é válido ressaltar as apresentadas à questão 5, que procura identificar se o uso de jogos pode facilitar a compreensão dos conceitos relacionados a Probabilidade e Combinatória.

A seguir, as Figuras 56 e 57 retratam como os alunos consideraram a introdução de jogos pedagógicos pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem além de tornar as aulas mais dinâmicas.

Sim, porque é mais facil de compreender

Figura 56 – Resposta apresentada pelo aluno H

Sim, pois NÃO fica só em teoria e torna as aulas mais dinamicas

Figura 57 – Resposta apresentada pelo aluno M

De modo geral, pode-se perceber que os alunos se mostraram bastante motivados em participar das atividades que envolviam jogos e que, através destas atividades, puderam compreender e assimilar os conceitos aqui trabalhados.

5 CONCLUSÃO

Neste capítulo é apresentada uma análise do desempenho que os alunos obtiveram nas questões da avaliação bimestral (aulas 28 e 29), assim como algumas ponderações e considerações da proposta didática com uso de jogos pedagógicos em sala de aula. Por fim, sugestões de trabalhos futuros são elencadas.

5.1 ANÁLISE DE DESEMPENHO DOS ALUNOS NA AVALIAÇÃO BIMESTRAL

Dos 20 alunos matriculados no 2º ano B, 18 realizaram a avaliação bimestral, pois os outros 2 alunos são infrequentes e não compareceram às aulas de matemática e demais disciplinas.

O Quadro 7 apresenta o percentual de acerto por questão:

Quadro 7 – Percentual de acertos por questão da Avaliação Bimestral

Questão	Porcentagem de acertos
1	94,4
2	83,3
3	100
4	44,4
5	100
6	88,8
7	100
8	38,8
9	77
10	83,3

Fonte: Elaborada pela autora

A partir da análise de desempenho dos alunos na Avaliação Bimestral, pode-se perceber que, de modo geral, os alunos se familiarizam com os conceitos e procedimentos apresentados durante a realização das atividades propostas. No entanto, devido ao baixo desempenho nas questões 4 e 8, nota-se a necessidade de uma retomada destas questões, procurando descobrir os fatores dificultadores encontrados pelos alunos para resolução destas situações.

5.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente texto teve como escopo explorar uma proposta didática que integra jogos pedagógicos às atividades sugeridas nos Cadernos do Aluno e do Professor do material didático da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo para o trabalho com probabilidade. Para isso, realizou-se uma pesquisa bibliográfica acerca dos temas probabilidade e jogos em sala de aula a fim de se conseguir subsídios para elaboração e aplicação de tal proposta.

O estudo procurou investigar os aspectos positivos que o uso de jogos pedagógicos em sala de aula pode trazer ao processo de ensino-aprendizagem de probabilidade.

Percebeu-se que para o desenvolvimento do trabalho com jogos em sala de aula é necessário um maior preparo do professor, pois este, além de conhecer o conteúdo a ser ministrado, deve estar atento aos objetivos do uso deste recurso em sala de aula.

Ao inserir os jogos nas atividades sugeridas no material utilizado em sala de aula, os alunos demonstraram maior interesse pelas aulas e bom aproveitamento na Avaliação Final, sendo que, em questionário próprio, os alunos pontuaram positivamente a proposta trabalhada, afirmando que o uso de jogos tornou as aulas mais dinâmicas e facilitou a compreensão do conteúdo explorado.

Pode-se observar que uso de jogos em sala de aula constitui uma importante metodologia, que, por proporcionar grande interação entre o aluno e o objeto de conhecimento, permite aproximar a matemática de situações vivenciadas cotidianamente, além de possibilitar momentos de descontração e socialização durante as aulas.

Sendo assim, pode-se afirmar que os jogos constituem uma metodologia pedagógica que pode ser usada não só para o trabalho com probabilidade, mas também com outros conteúdos da disciplina de matemática.

5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Tendo como base o uso de jogos nas aulas de matemática e o estudo dos cálculos de probabilidades em diferentes contextos, propõem-se alguns temas a serem analisados em futuros estudos, tais como:

- Análise histórica do uso de jogos nas aulas de matemática;
- Impactos positivos do uso de jogos nas aulas de matemática para alunos com dificuldade de aprendizagem desta disciplina;
- Análise de livros didáticos a respeito do tema probabilidade;
- Proposição e análise de outros jogos que podem ser usados para ensinar e aprender probabilidade.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: MEC, 1996. Disponível em:<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: Set. 2015.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Lei nº11.769, de 18 de agosto de 2008.** Alteração na Lei nº9.394. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11769.htm> Acesso em: Set. 2015.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Educacionais Complementares aos Curriculares Nacionais (Ensino Médio**): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2000. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: Set. 2015.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemáticas e suas Tecnologias, volume 2. Brasília: MEC/ESF, 2008. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: Out. 2015.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio):** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2000. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: Set. 2015.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: Set. 2015.

______. Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Contagem Populacional**. Disponível em: <http://www.sidra.ibge.gov.br/bda/tabela/protabl2.asp?c=21&z=p&o=30&i=P>. Acesso em: 07 set. 2015

______. Ministério da Educação. Ministério da Ciência e Tecnologia. UNICAMP. Coleção **M3. Matemática multimídia**. Cara ou Coroa. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1062>. Acesso em 15 ago. 2015.

______. Ministério da Educação. Ministério da Ciência e Tecnologia. UNICAMP. Coleção **M3. Matemática multimídia**. Coisa de Passarinho. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1070>. Acesso em 15 ago. 2015.

______. Ministério da Educação. Ministério da Ciência e Tecnologia. UNICAMP. Coleção **M3. Matemática multimídia.** Código de Pascal. Disponível em < http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1069> . Acesso em 15 ago. 2015.

FERREIRA, A. B. H. **Mini Aurélio Século XXI.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

GADELHA, A. **Notas de aula**: Teoria de Probabilidade 1: Uma pequena história da probabilidade. Curso de pós graduação em estatística. 2004. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf > Acesso em Set 2015.

GRANJA, C. E.; PASTORE, J. L. **Atividades experimentais de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental**. São Paulo: Edições SM, 2012.

IEZZI, G. et al. **Matemática: Ciência e Aplicações**, Volume 2 - Livro do Professor. São Paulo: Editora Saraiva, 2004.

LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série.** São Paulo: Rêspel, 2003.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio,** Volume 2. 6 ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios**. 9 ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.

MOTTA, J. M. C. **Jogos: Repetição ou Criação?** Abordagem Psicodramática. 2 ed. São Paulo: Editora Ágora, 2002.

MOURA, M. O. **A séria busca no jogo**: do lúdico na matemática. Educação Matemática em Revista – SBEM, São Paulo, n. 3, p. 17-24, 2. sem. 1994.

O CÓDIGO DE PASCAL. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1069>. Acesso em 15 ago. 2015

RIBEIRO, F. D. **Metodologia do Ensino de Matemática e Física: Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. Curitiba: Editora IBPEX, 2008.

SÃO PAULO (Estado de). Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno**. Matemática – 2º ano. São Paulo: IMESP, v. 2, 2014.

SÃO PAULO (Estado de). Secretaria da Educação. **Caderno do Professor**. Matemática – 2º ano. São Paulo: IMESP, v. 2, 2014.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias** / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. Atual. São Paulo: SE, 2011.72 p. Disponível em: http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf . Acesso em 16 ago. 2015.

SILVEIRA, J. F. P. **Três noções numéricas básicas:** número, numeral e algarismo. 2001. Disponível em http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7a.html. Acesso em 10 nov. 2015.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Cadernos do Mathema: Jogos de Matemática de 6º a 9º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

UMA AVENTURA DE RPG. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=bUr5g_LlLSI>. Acesso em 15 ago. 2015.

APÊNDICE

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Termo de Autorização

Autorizo a Professora Luciane Aparecida de Freitas Struminski e Professora Doutora Luciane Grossi – Orientador de Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional – a realizarem o Projeto de título “ Uso de Jogos no Ensino de Matemática: uma proposta didática para o trabalho com probabilidade”, com os alunos do 2 ano B A desta Instituição Pública de Ensino, estando de acordo com as atividades a serem desenvolvidas e dos registros a serem realizados.

Itararé, 04 de junho de 2015.

Maria Emília Pivovar

Diretora da Escola Estadual Doutor Epaminondas Ferreira Lobo

Rua Major Salvador Ruffino, 59 - Vila Osório – Itararé – SP

CEP 18 460-000 – Telefone (15) 3532-4044

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS ALUNOS

Termo de consentimento livre e esclarecido para os alunos

Prezado(a) aluno(a),

Você está sendo convidado(a) a participar do Projeto – Plano de aula – "Uso de Jogos no Ensino de Matemática: uma proposta didática para o trabalho com probabilidade"

Este plano de aula elaborado, e que será aplicado com você, tem por objetivo investigar **quais as contribuições que uma proposta de ensino que alia as atividades dos Cadernos do Aluno e do Professor e os jogos didáticos pode trazer ao processo de ensino-aprendizagem de Probabilidade.**

Sua participação neste projeto ocorrerá através da realização das atividades sugeridas, em sala de aula e extraclasse, pela Professora. Sua participação neste projeto é voluntária e seu anonimato será garantido, sendo que as informações e respostas dadas por você não serão associadas ao seu nome ou número de chamada para qualquer efeito de publicação que possa surgir a partir da aplicação deste projeto.

____

Professora Luciane Aparecida de Freitas Struminski

RG 8 548 587 – 3

Para ser preenchido pelo(a) aluno(a)

Eu, ____, gostaria de participar do Projeto.

Itararé, ____, de agosto de 2015.

____

Assinatura do aluno

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS PAIS OU RESPONSÁVEIS

Termo de consentimento livre e esclarecido para os pais ou responsáveis

Prezado(a) Senhor(a),

Seu filho(a) está sendo convidado(a) a participar do Projeto – Plano de aula - ““Uso de Jogos no Ensino de Matemática: uma proposta didática para o trabalho com probabilidade“

Este plano de aula elaborado, e que será aplicado com seu filho (a), tem por objetivo investigar **quais as contribuições que uma proposta de ensino que alia as atividades dos Cadernos do Aluno e do Professor e os jogos didáticos pode trazer ao processo de ensino-aprendizagem de Probabilidade.**

A participação dele(a) neste projeto ocorrerá através da realização das atividades sugeridas, em sala de aula e extraclasse, pela Professora. A participação dele (a) neste projeto é voluntária e o anonimato será garantido, sendo que as informações e respostas dadas por ele (a) não serão associadas ao nome ou número de chamada para qualquer efeito de publicação que possa surgir a partir da aplicação deste projeto.

____
Professora Luciane Aparecida de Freitas Struminski
RG 8 548 587 – 3

Para ser preenchido pelo (a) responsável

Eu, ____, declaro que entendi os objetivos e os termos da participação de meu filho (a) no Projeto e concordo com sua participação no mesmo.

Itararé, ____, de agosto de 2015.

____
Assinatura do Responsável