UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FABIANA DOS REIS

UMA VISÃO GERAL DA TRIGONOMETRIA: HISTÓRIA, CONCEITOS E APLICAÇÕES.

PONTA GROSSA
2016

FABIANA DOS REIS

UMA VISÃO GERAL DA TRIGONOMETRIA: HISTÓRIA, CONCEITOS E APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT – UEPG como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira

PONTA GROSSA
2016

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Reis, Fabiana dos

R375 Uma visão geral da trigonometria: história, conceitos e aplicações/ Fabiana dos Reis. Ponta Grossa, 2016.
82f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira.

1.Trigonometria. 2.História. 3.Conceitos. 4.Aplicação. I.Pereira, Marciano. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 516.24

TERMO DE APROVAÇÃO

Fabiana dos Reis

"UMA VISÃO GERAL DA TRIGONOMETRIA: HISTÓRIA, CONCEITOS E APLICAÇÕES"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Departamento de Matemática, UEL/PR

Marli T. Van Kan
Profa. Dra. Marli Terezinha Van Kan
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Ponta Grossa, 26 de Fevereiro de 2016.

Dedico a todos que de alguma maneira me ajudaram a trilhar este caminho que por vezes foi árduo, porém, gratificante.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois se consegui entrar nesse curso e me manter nele até este momento foi graças a ele. Sem ele, tudo isso não seria possível.

Aos meus familiares: meu companheiro Antonio, minha mãe Lucia e minha “irmãzinha” Gabriele que fizeram sempre toda a logística para que eu pudesse assistir às aulas, estudar e por fim escrever este trabalho. Sem essa grande equipe eu não teria conseguido. Vocês são tudo pra mim!

Aos meus filhos Eduardo e Arthur, que por mais distante que a mamãe estivesse nunca os tirei da cabeça e do meu coração. Vocês são um pedacinho da mamãe!

Aos meus colegas de curso que me ajudaram e incentivaram. Estudaram comigo e me auxiliaram nas dúvidas que surgiram pelo caminho.

Ao meu orientador Marciano, sempre muito educado, paciencioso e atencioso. Com toda a certeza um ótimo professor e um dos responsáveis por me manter firme neste curso. Foi com ele que iniciei o curso e com ele estou finalizando.

A todos os professores do curso de Mestrado que nos transmitiram um pouco do seu conhecimento.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente estiveram comigo nessa conquista.

RESUMO

A trigonometria tem muitas aplicações não apenas em Matemática, mas em diversas áreas. Alguns problemas só podem ser resolvidos com o uso de seus conceitos. Neste trabalho apresenta-se um levantamento histórico sobre o surgimento da trigonometria, primeiramente, como uma parte da astronomia, depois se abrindo como uma parte da matemática. Para tanto, envolvemos os principais matemáticos e suas contribuições até obtermos a trigonometria como ela é atualmente. Incluímos as principais definições, suas propriedades, algumas demonstrações e também as funções trigonométricas como forma de aprofundar o conhecimento sobre o tema. Destacam-se, por último, algumas aplicações dos conceitos trigonométricos nas diversas áreas com o objetivo de mostrar que a trigonometria vai muito além de simples repetições de exercícios em sala de aula.

Palavras Chave: Trigonometria; História; Conceitos; Aplicação.

ABSTRACT

The trigonometry has many applications not only in mathematics, but in different areas. Some problems can only be resolved with the use of its concepts. This paper presents a historical survey of the emergence of trigonometry, first, as a part of astronomy, after opening as a part of mathematics. Therefore, we engage the leading mathematicians and their contributions to obtain trigonometry as it currently is. We include the main settings, their properties, some demonstrations and also the trigonometric functions as a way to deepen their knowledge on the subject. Is out finally, some applications of trigonometric concepts in various areas in order to show that trigonometry goes far beyond simple repetitions of exercises in the classroom.

Key words: Trigonometry; History; Concepts; Application.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. **INTRODUÇÃO**

Trigonometria é a área da matemática que estuda as relações entre os lados e ângulos de um triângulo. Porém, apesar de ser importante, muitas vezes ela é apresentada aos alunos de forma simplificada, superficial e sem relação alguma com suas aplicações, com o objetivo simples de apenas calcular razões e proporções, ou seja, meros cálculos algébricos.

Por se tratar de uma área que exige um entendimento mais profundo, acaba sendo deixada por último, isso quando é trabalhada. Portanto, este trabalho tem o objetivo de oferecer um detalhamento deste conteúdo e mostrar como a trigonometria foi construída historicamente, apresentar o conteúdo como um todo envolvendo as principais definições, propriedades, demonstrações, algumas, apresentando as funções que a constitui, como também suas aplicações.

Na primeira parte do trabalho apresenta-se um recorte da história da matemática que visa mostrar a gênese dos conceitos e ideias da trigonometria. Isso deve ao fato de que ao ensinar um conteúdo devemos lançar mão de metodologias que desenvolvam no aluno um espírito de curiosidade, que o leve a pensar sobre: o como, o porquê das ideias matemáticas. Dessa forma, este capítulo tem o objetivo de aprofundar o conhecimento referente a esse assunto possibilitando ao professor um conhecimento significativo e com isso maiores possibilidades de levar a história da trigonometria para sala de aula, tornando-a um elemento articulador da teoria com a prática. Vale ressaltar, que essa perspectiva 'histórica da matemática' vem ao encontro da Tendência História da Matemática, tal afirmativa se sustenta nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná:

> A história da matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação de situações-problemas, na busca de referências para compreender melhor conceitos matemáticos, [...] deve ser o fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática. Assim, pode promover uma aprendizagem significativa, pois propicia ao estudante entender que o conhecimento matemático é construído historicamente a partir de situações concretas e necessidades reais (PARANÁ, 2004, pág. 66).

Já na segunda parte do trabalho evidenciam-se os conteúdos básicos de trigonometria que podem ser apresentados aos alunos, com suas definições, algumas demonstrações, relações e funções, sempre buscando a objetividade. Esta parte das definições faz-se necessária, considerando a relevância do embasamento teórico, pois com isso é possível desenvolver e demonstrar com mais confiança os conceitos em sala de aula. Além disso, partimos do pressuposto de que alguns conceitos preliminares como razões, proporções e semelhanças, os alunos já trabalharam e, portanto não aparecem neste trabalho.

Na terceira parte do trabalho, apresentam-se aplicações que envolvem a trigonometria como uma ferramenta em diversas áreas. Isso se dá pelo fato de considerar a importância de estudar a trigonometria através de situações que se aplicam no cotidiano ou em situações particulares de áreas específicas do conhecimento, demonstrando aos alunos que tudo em matemática está relacionado com a necessidade de solucionar problemas de ordem prática.

Espera-se com essa produção acadêmica contribuir com o profissional de sala de aula, para que o mesmo desenvolva nos alunos uma compreensão de que todo esse conhecimento não tem fim em si mesmo, mas alastra-se por diversas áreas que se faz necessária.

2. HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Neste capítulo realiza-se uma breve apresentação da história da trigonometria, o qual tem por objetivo mostrar que sua origem que está principalmente ligada às questões práticas como, por exemplo, as medidas de distâncias inacessíveis e aos estudos astronômicos.

Destacam-se algumas passagens importantes sobre a evolução da Trigonometria através dos egípcios, babilônicos, hindus e árabes.

Para finalizar este capítulo, explicitam-se algumas contribuições importantes de matemáticos europeus que, a partir do século XV, possibilitaram que a Trigonometria se desenvolvesse como conhecimento independente da Astronomia e tomasse a forma que se apresenta atualmente.

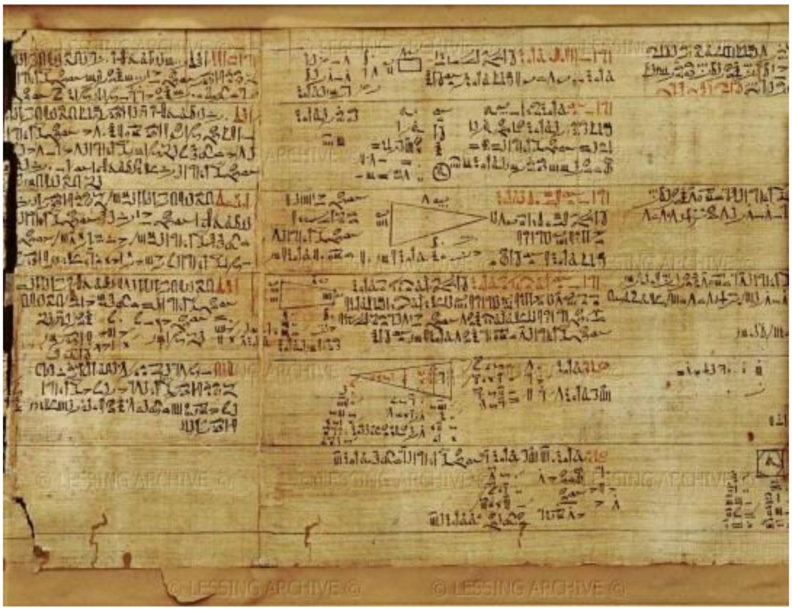
2.1. SURGIMENTO E DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

A Trigonometria, como toda a matemática, surgiu das necessidades práticas do dia a dia para solucionar problemas oriundos de cálculos astronômicos, agrimensura e navegação. Foi construída ao longo de muitos séculos e teve a contribuição de diversos povos.

Inicia-se com a contribuição dos egípcios, a partir da "revolução agrícola", período que o homem começou a fixar propriedades e a plantar, com isso passou a ser importante saber medir as terras, saber o número de trabalhadores, enfim, todos os problemas referentes à matemática forçaram também a criação de profissionais especialistas nessa área, os escribas.

De acordo com Guelli (1995), um dos primeiros escribas que a História registrou chamava-se Aahmesu, que significava "Filho da Lua". Ele ficou conhecido como Ahmes e escreveu um dos textos matemáticos mais antigos que se tem notícia: o Papiro de Ahmes ou também conhecido por Papiro de Rhind conforme a figura 1. Este segundo nome se dá ao fato de que o papiro de Ahmes foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind e por isso acabou recebendo o seu nome.

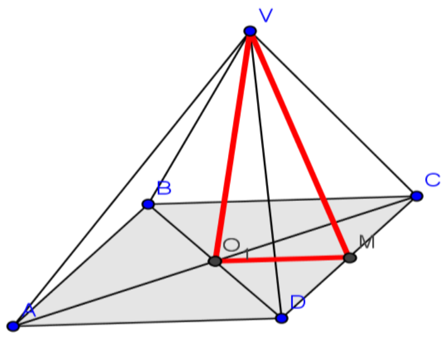
Figura 1 - Papiro de Rind



Fonte: Gaspar (20013)

Este documento tem data aproximada de 1650 a.C. e se apresenta como um manual prático que contém 85 problemas dos quais 4 trazem um conceito que se relaciona com trigonometria quando menciona seqt de um ângulo. Ahmes não definiu exatamente o que significava a palavra seqt, mas é possível concluir que o seqt de uma pirâmide seria o equivalente à cotangente de um ângulo e isso pode ser observado na figura 2 ao analisar que o seqt seria a razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto.

Figura 2 - Seqt egípcio



Fonte: A autora

Exemplo: Se $OV = 30$ e $OM = 60$, então, $seqt = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{30}} = \mathbf{2.}$

Esse mesmo conceito foi utilizado ao construírem as pirâmides do Egito uma vez que era necessário manter a mesma inclinação para todas as faces. Então, conclui-se que esse conceito já existia por volta de 2.600 a. C., data em que foram construídas as pirâmides, em especial, a grande pirâmide de Gizé que aparece na figura 3, considerada atualmente uma das Sete Maravilhas do Mundo Antigo.

Figura 3 – Pirâmide de Gizé

Fonte: Sousa (2013)

Como era costume da época fazer registros em tabuletas de barros, é desta data a principal tábula: a Plimpton 322, assim determinada, pois faz parte da coleção G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia e está catalogada sob o número 322. Ela foi escrita por volta de 1900 e 1600 a.C. e mostra representações dos ternos pitagóricos primitivos como consta nas figuras 4 e 5. Portanto, observa-se que já existia nessa época, algum conhecimento das relações entre o cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo, porém de forma mais intuitiva.

Figura 4 – Plimpton 322

Fonte: Brette (2013)

Figura 5 – Transcrição da Tábula Plimpton 322

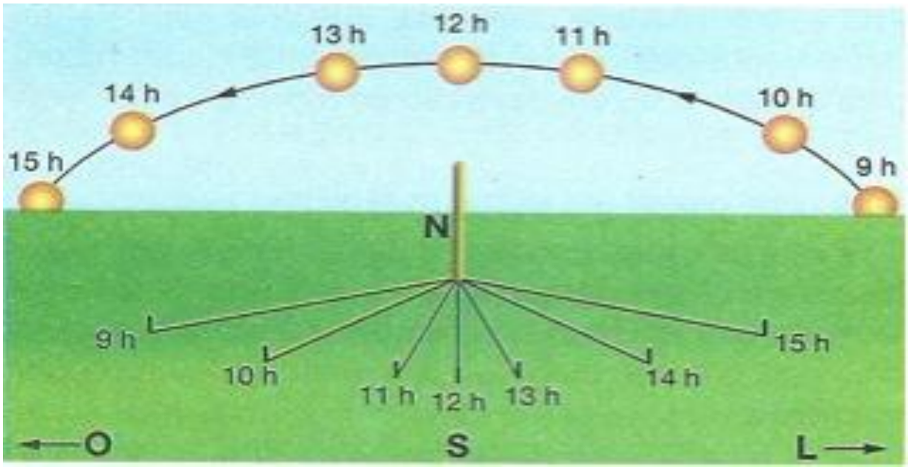
C1								C2			C3			C4
1	59	0	15						1	59		2	49	1
1	56	56	58	14	50	6	15		56	7	1	20	25	2
1	55	7	41	15	33	45		1	16	41	1	50	49	3
1	53	10	29	32	52	16		3	31	49	5	9	1	4
1	48	54	1	40					1	5		1	37	5
1	47	6	41	40					5	19		8	1	6
1	43	11	56	28	26	40			38	11		59	1	7
1	41	33	59	3	45				13	19		20	49	8
1	38	33	36	36					8	1		12	49	9
1	35	10	2	28	27	24	26	1	22	41	2	16	1	10
1	33	45								45		1	15	11
1	29	21	54	2	15				27	59		48	49	12
1	27	0	3	45					2	41		4	49	13
1	25	48	51	35	6	40			29	31		53	49	14
1	23	13	46	40						56		1	46	15

Fonte: Aguilar (2012)

Foi também no Egito, por volta de 1500 a.C., que surgiram os esticadores de corda, ou seja, pessoas que associavam as medidas de sombras projetadas por varas verticais às sequências numéricas, relacionando seus comprimentos a horas do dia. Essa ideia apenas precedia os conceitos de funções tangentes e cotangentes usando das necessidades de medir alturas e distâncias.

Além dos egípcios e babilônicos, é possível encontrar uma trigonometria primitiva no Oriente. Por volta de 1110 a. C., na China, para medir distâncias, comprimentos e profundidades eram usados os triângulos retângulos. Segundo Costa (1997), na literatura chinesa encontra-se a passagem que, traduzida, fica: “*O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon*”. No entanto, gnômon era o nome dado, pelos gregos, ao relógio do Sol, que fora utilizado primeiramente pelos egípcios, por volta de 1500 a.C. e só chegou aos chineses através dos babilônicos.

Figura 6 - Gnomon



Fonte: Lucca (2009)

O gnômon era uma vara enterrada no chão formando um ângulo de 90º com o solo. As observações feitas da sombra que a vara produzia durante o dia possibilitava medir a duração do ano e do dia conforme a figura 6. Porém, era nada mais do que a função cotangente do ângulo, onde a medida da vara era sempre a mesma e dividia a medida da sombra que variava conforme o deslocamento do Sol.

Seguindo a cronologia histórica sobre o desenvolvimento da trigonometria observa-se que durante o século VI a.C. aparecem, na Grécia, Tales e Pitágoras, os quais tiveram contato com a geometria no Egito, mas foi na Babilônia que Tales teve conhecimento de tabelas e instrumentos astronômicos. Ele contribuiu com a trigonometria através do teorema que leva o seu nome: Teorema de Tales.

Já sobre Pitágoras o que se sabe são apenas relatos, pois existem muitas histórias que concentram a atenção em uma irmandade Pitogórica cheia de segredos e rituais místicos. Pitágoras e seus discípulos fizeram grandes descobertas em matemática, filosofia e astronomia. Inclusive, segundo Guelli (1995), foram eles que criaram o nome Matemática que significa “tudo que se aprende”.

É na Geometria que se encontra o mais famoso teorema demonstrado pela irmandade: O Teorema de Pitágoras. Esse teorema aparece sempre em problemas relacionados com a trigonometria, logo sua demonstração foi um marco importante para essa área da matemática. (Para seu enunciado e uma demonstração veja página 29)

Depois de Pitágoras aparecem na história da matemática alguns matemáticos e filósofos muito importantes como: Platão (428-348 a. C.), Aristóteles (384-322 a. C.) e também Euclides que viveu por volta de 300 a.C. Este último escreveu o mais antigo trabalho matemático grego que ainda sobrevive (em sua maior parte) intacto, *Os Elementos*. Neste trabalho aparecem as leis de Cossenos para ângulos obtuso e agudo, respectivamente enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica.

Por volta de 287 a.C. viveu Arquimedes, que segundo Boyer (1974), ficou conhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele também é muito conhecido pelas engenhosidades que construía como, por exemplo, catapultas, alavancas e polias. Ainda segundo Boyer (1974), Arquimedes dizia: *“Dê-me uma alavanca que moverei a Terra”.*

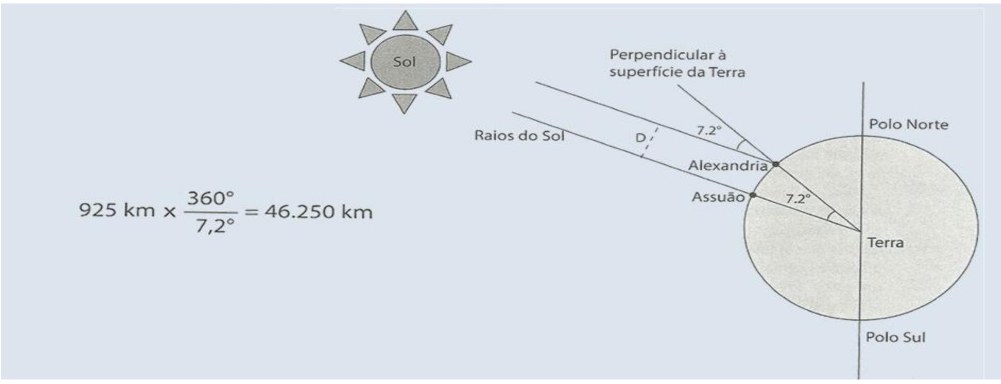
Muitas de suas obras foram perdidas, mas algumas são mantidas por referência, como, por exemplo, a chamada Fórmula de Heron, que já era conhecida por Arquimedes vários séculos antes de Heron nascer.

Para Boyer (1974), o período de cerca de 300.a.C. a 200 a.C. foi denominado “Idade Áurea” da matemática grega por causa de três matemáticos: Euclides, Arquimedes e Apolônio. Sobre Apolônio de Perga sabe-se que se considerava rival de Arquimedes e que, segundo Boyer (1974), foi chamado pelos antigos de “O Grande Geômetra”. Em uma de suas obras demonstra como traçar tangentes a uma cônica usando a teoria da divisão harmônica.

Nessa época, destacou-se também, Aristarco de Samos, ao fazer observações que mais tarde levaria a introdução sistemática do círculo de 360º e, também observou a razão da distância entre Sol-Terra e Sol-Lua. E nesta mesma razão estão os tamanhos do Sol e da Lua, pois subentendem o mesmo ângulo ao olho de um observador na Terra.

Eratóstenes que viveu na mesma época de Arquimedes, lançou mão de cálculos célebres para obter a medida da circunferência da Terra. Ele usou a igualdade de ângulos, conforme mostra a figura 7, para chegar que a circunferência da Terra deve ter um pouco menos que cinquenta vezes a distância entre Siene e Alexandria.

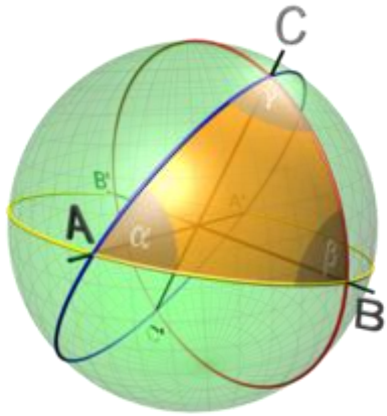
Figura 7 – Medida da Terra obtida por Erastótenes



Fonte: Mascarenhas (2014).

Já entre os meados de 180 a 125 a.C., viveu Hiparco de Nicéia que elaborou a primeira tabela trigonométrica e por isso passou a ser chamado de o “pai da trigonometria”, segundo Boyer (1974). Hiparco foi considerado o mais eminente astrônomo da Antiguidade e foi essa astronomia primitiva que deu origem à trigonometria esférica que estuda os triângulos na esfera, ou seja, passa a ser considerada a superfície côncava da esfera, conforme a figura 8, e consequentemente algumas mudanças em certas definições dos triângulos ditos, planos.

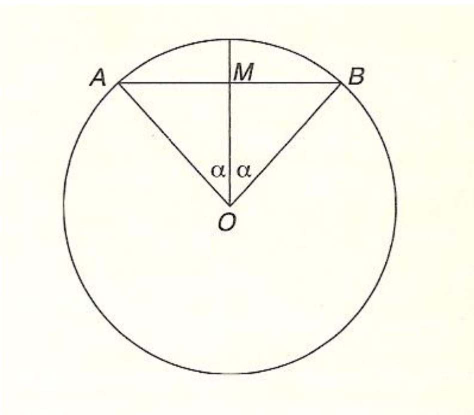
Figura 8 – Trigonometria esférica



Fonte: Wikipédia

Segundo Eves (2008) foi Hiparco, quem introduziu a divisão do círculo em 360 partes, ou seja, 360º. Hiparco teria escrito um tratado em doze livros que se ocupa da construção de uma *tábua de cordas o*nde ele observa que tábua de cordas é equivalente a uma tábua de senos trigonométricos, conforme podemos concluir da figura 9.

Figura 9 – Senos trigonométricos



Fonte: Eves (2008, p.202)

$$sen \ = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{diâmetro\ do\ círculo} = \frac{crd\ 2 \propto}{120}$$

Por volta de 100 d.C. surge Menelau de Alexandria com uma de suas obras, a *Sphaerica.* Esta descreve o “Teorema de Menelau” como parte do que é essencialmente trigonometria esférica ou trigonometria de cordas num círculo. Para Eves (2008), este trabalho é como um foco de luz intensa sobre o desenvolvimento da trigonometria.

Em meados de 150 d. C. viveu Cláudio Ptolomeu de Alexandria, escritor da mais influente e significativa obra trigonométrica da Antiguidade, a *Syntaxis,* que passou a ser conhecida como o *Almagesto,* referindo-se a uma obra maior. Nele encontram-se as tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos usados em sua construção.

Para Boyer (1974), os gregos, os hindus e os árabes usaram linhas trigonométricas como cordas num círculo, porém coube a Ptolomeu associar valores numéricos (ou aproximações) às cordas como aparece na figura 10.

Foi Ptolomeu também quem subdividiu o diâmetro do círculo trigonométrico em 120 partes; cada uma dessas partes ele subdividiu novamente em sessenta minutos e o mesmo para segundos. Isso tudo deriva do sistema sexagesimal que era um sistema preciso de aproximações para os estudiosos da época.

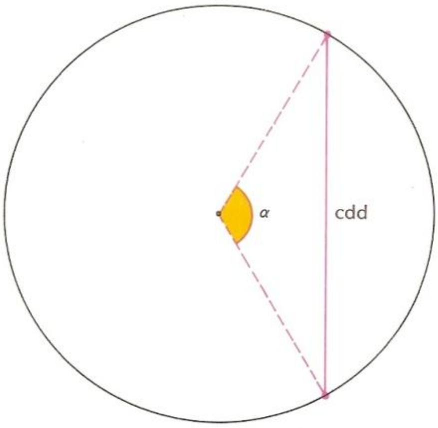
Contudo, após 300 d.C., a matemática grega enfraqueceu, perdeu sua criatividade ficando o século V marcado como o fim da matemática grega em sua forma clássica. Durante esse período apagado entre guerras e combates, ataques e conquistas que perduraram pelos séculos VII e VIII, as condições não eram muito favoráveis para atividades intelectuais, ficando a matemática um pouco de lado.

Porém, na Índia a tradição matemática cresceu e floresceu. Muitos dos textos matemáticos dessa época apareciam como partes de livros extensos sobre astronomia. Uma obra que aparece como um corpo de conhecimentos sobre noções de geometria relacionada com o traçado de templos, medidas e construção de altares ficou conhecida como *Sulvasutras*, ou *“regras de corda*”. Portanto, seria uma relação com os “esticadores de corda” que apareceram também no Egito. Depois desta obra surgiu outro conjunto de obras: os *Siddhantas*, que seria uma obra ligada à astronomia, em meados de 400 d. C, que teria sido escrita por Surya, o Deus do Sol, que revolucionou a trigonometria abrindo novas perspectivas quanto à maneira de relacionar cordas e ângulos centrais.

Segundo Boyer (1974), os autores dos *Siddhantas* estabeleceram um estudo da correspondência entre a metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo subentendido no centro pela corda toda.

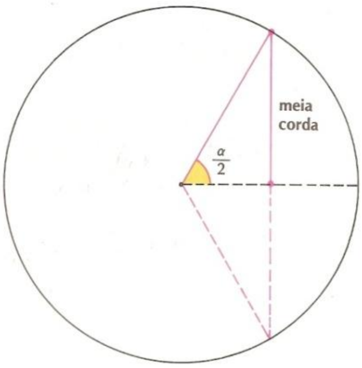
Conforme Guelli (1995), os hindus foram buscar, no interior do círculo, um triângulo retângulo conforme se observa na figura 11. Portanto, nasceu na Índia, o que chamamos hoje de seno de um ângulo.

Figura 10 - Ângulo e corda segundo o Almajesto



Fonte: Guelli (1995, p. 56)

Figura 11 – Ângulo e corda segundo Siddhanta



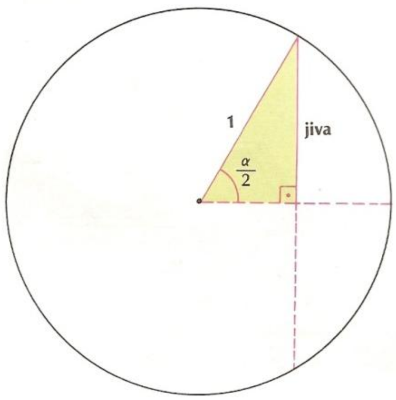
Fonte: Guelli (1995, p. 56)

Conforme Boyer (1974), essa meia corda foi denominada de ***jiva*** pelos autores de *Siddhanta*. Ainda esses mesmos autores, construíram uma tabela trigonométrica com os valores de jiva para os ângulos correspondentes até 90º.

Com a expansão do Império mulçumano, por volta de 850 d.C, esse povo teve um grande avanço no campo das artes e das ciências o que proporcionou uma nova era de criatividade matemática e científica.

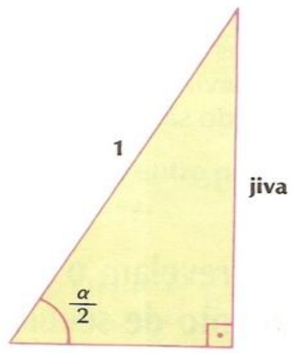
Segundo Eves (2008), um dos mais importantes estudiosos árabes foi Mohamed-bem-Geber, conhecido como AL-Battani (aproximadamente 850-929 d. C.) que adotou a trigonometria hindu e introduziu o círculo de raio unitário e com isso demonstrou que jiva é uma razão válida para qualquer triângulo retângulo, independente da hipotenusa conforme mostram as figuras 12 e 13.

Figura 12 – Jiva e o círculo de raio unitário



Fonte: Guelli (1995, p.56)

Figura 13 – Triângulo retângulo e a razão jiva



Fonte: Guelli (1995, p.56)

Depois dele, outro matemático árabe surge em 980, Abu'l-Wefa. Este teve o papel de sistematizar provas e teoremas de trigonometria e também usou todas as seis funções trigonométricas comuns, bem como relações entre elas.

Continuando a obra de Abu'l-Wefa, Nasir Eddin al-Tusi (1021-1274) que foi o responsável pelo primeiro tratado sistemático sobre trigonometria plana e esférica, trabalhando com este conceito de forma independente e não apenas como um facilitador de cálculos da astronomia.

Ainda sobre as contribuições árabes para a trigonometria, uma das mais importantes seria quanto à etimologia da palavra seno. Segundo Eves (2008, pág. 267) a palavra seno surgiu da seguinte forma:

> Aryabhata usava $ardh\bar{a} - jy\bar{a}$ (“semicorda”) e também $jy\bar{a} - ardh\bar{a}$ (“corda metade) e por brevidade escrevia apenas $jy\bar{a}$ (“corda”). Partindo de $jy\bar{a}$ os árabes foneticamente derivaram *jîba* que, devido à prática entre eles de se omitir as vogais, se escrevia *jb*. Afora seu significado técnico, hoje *jîba* é uma palavra que não tem sentido em árabe. Posteriormente, os escritores que se depararam com *jb* como abreviação da palavra sem sentido *jîba* passaram a usar *jaib* que faz parte do vocabulário árabe e que significa “enseada” ou “baía”. Mais tarde, ao fazer a tradução de *jaib* para o latim, Geraldo de Cremona empregou o equivalente latino *sinus*, de onde vem nossa palavra atual *seno*.

Por volta do século XIII surge Leonardo Fibonacci que segundo Eves (2008), seria o matemático mais talentoso da Idade Média. Ele escreveu algumas obras, entre elas, temos a *Practica geometriae,* de 1220, que seria uma coleção sobre geometria e trigonometria, numa abordagem habilidosa.

Seguindo a ordem cronológica, no século XV, as atividades matemáticas centraram-se nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga na Europa Central e giraram em torno da aritmética, da álgebra e da trigonometria.

Um matemático desse período é Regiomontanus, tido como o mais capaz e influente matemático deste século. Segundo Eves (2008), ele escreveu *De triangulis omnimodis* que tratava da primeira exposição européia sistemática de trigonometria plana e esférica, tratando como uma ciência independente da astronomia. Para Boyer (1974), esta obra marca o renascimento da trigonometria. Neste tratado, ele calculou novas tábuas trigonométricas, melhorando as de seno e introduziu na trigonometria europeia o uso de tangentes, fazendo uso delas em suas tábuas na obra *Tabulae directonum*. Esta é vista como a primeira obra impressa sobre trigonometria com data anterior a 1485.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), um grande número de ideias novas foi introduzido na trigonometria nessa época. A lista de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) se tornou padronizada. Antigamente o foco estava em triângulos esféricos com base na esfera celeste quanto na Terra, a partir daí começou-se a aplicar a trigonometria a triângulos planos. Foi nessa época, segundo Boyer (1974), que a ideia de cosseno era vista apenas como seno do complementar, ou seja, não existia uma denominação para cosseno. Para achar o valor deste, buscava-se usar o complementar do ângulo considerado. No século seguinte o cosseno passou a ser chamado de *sinus complementi,* e depois passou a ser apenas *co.sinus* e por fim *cosinus.*

Já por volta do início do século dezesseis aconteceram desenvolvimentos importantes na área da trigonometria. Nesse período surge Nicolau Copérnico (1473-1543) que foi um astrônomo que revolucionou a visão de mundo ao conseguir colocar a Terra movendo-se ao redor do Sol e consequentemente um trigonômetra. No entanto, foi Georg Joachim Rheticus (ou Rhaeticus, 1514-1576), um aluno de Copérnico, que juntou as ideias de seu professor, as de Regiomontanus e as suas e publicou o tratado *Opus palatinum de triangulis*, tido como o mais elaborado tratado de trigonometria escrito até hoje, segundo Boyer (1974). Foi neste tratado que a trigonometria atingiu a sua maioridade. Nele, Rheticus, abandonou a tradicional consideração de funções relativas ao arco de círculo e passou a considerar triângulos retângulos, ou seja, foram consideradas como funções de ângulos e entendidas como razões.

Na sequência, aparece Francois Viète (1540-1603) que trouxe um tratamento analítico à trigonometria. Viète mostrou que era possível resolver equações cúbicas usando trigonometria. Em uma de suas obras, a *Variorum de rebus mathematicis* (1593) ele faz referência a equivalente lei das tangentes de hoje. Porém esta lei só foi publicada pela primeira vez em 1583 por Thomas Finck (1561-1656) em *Geometria rotundi*. Este ficou conhecido como o inventor das palavras tangente e secante, segundo Boyer (1974).

No que diz respeito às publicações, ainda segundo Boyer (1974), foi no ano de 1595 que Bartholomaus Pitiscus(1561-1613) publicou o primeiro livro que traz em seu título a palavra Trigonometria (figura 14), ficando marcado como o inventor desta palavra. Nesta obra havia aperfeiçoamentos das tabelas de Rheticus e mostra que a trigonometria pode ser usada para resolver problemas práticos que envolvem triângulos sobre a terra, deixando de ser meramente uma parte de astronomia para servir como tópicos matemáticos com diferentes aplicações.

Figura 14 – Livro publicado por Pisticus

Fonte: Wikipedia

Já o século XVII é particularmente importante na história da Matemática. Nesse período surgem grandes nomes: Napier, Harriot, Oughtred, Galileu, Kepler, Pascal, Descartes, Fermat, Newton e Leibniz. Muitos campos novos se abriram para a atividade matemática durante o século XVII. Inicia-se com John Napier (1550-1617) que para se descontrair de suas polêmicas políticas e religiosas usava a matemática e a ciência. E nesses momentos de descontração acabou produzindo material que entraram para a história: logaritmos, regra para partes circulares, duas fórmulas trigonométricas e um instrumento conhecido como barras de Napier. Segundo Boyer (1974), Napier tinha construído seu sistema (conceito de logaritmos) com o objetivo de simplificar computações. Ou seja, ele tinha em mente as computações trigonométricas e isso fica claro quando se observa que o que se chama de logaritmo de Napier de número, ele chamava de logaritmo de um seno.

Em 1626, Albert Girard (1595-1632) publicou uma obra que possuía o mais antigo uso das abreviações sin, tan e sec para seno, tangente e secante. Em 1642 nasce Isaac Newton, que mais tarde contribuiria com a trigonometria. Paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal, ele trabalhou com séries infinitas, expandindo arcsen (x) em séries e deduzindo a série para sen(x). Para Boyer (1974), foi Newton quem deu a dica para Leibniz sobre a fórmula geral para sen(*n*x) e cos(*n*x), surgindo assim a perspectiva para sen(x) e cos(x) serem entendidos como números e não como grandezas. Já em 1710, Thomas-Fanten de Lagny evidenciou a periodicidade das funções trigonométricas.

No entanto é apenas a partir de Leonhard Euler (1707-1783) que a trigonometria toma sua forma atual. Isso é visível quanto às abreviações sin, cos, tang, sec e cosec, que foram usados por Euler na *Introductio* em latim, estão bem próximas das formas atuais em inglês. Euler foi o primeiro a indicar que seria melhor considerar o seno e o cosseno como funções do ângulo e defini-los em termos do círculo unitário. Ainda a partir dos conhecimentos de Euler e com o surgimento do Cálculo, a chamada função de Euler passa a ser responsável pela transição da definição de seno e cosseno de um ângulo para a definição de seno e cosseno de um número real. Em 1748 foi publicada a obra *Introductio in Analysin Infinitorum* que traz a visão analítica da trigonometria e é considerada a chave da Análise Matemática, segundo Eves (2008).

Portanto, a trigonometria iniciou-se como um campo da astronomia e agrimensura e por fim transformou-se em uma parte da análise matemática. E nessa perspectiva nota-se que o caminho foi longo, mas que surgiu diante das necessidades e se desenvolveu com a contribuição de muitos matemáticos. Com tudo isso, é possível fazer uma ressalva que a matemática que se apresenta hoje não como uma ciência que se encontra pronta e acabada, mas sim, que foi construída ao longo de muitos séculos e aparece, hoje, aplicada em diversas áreas.

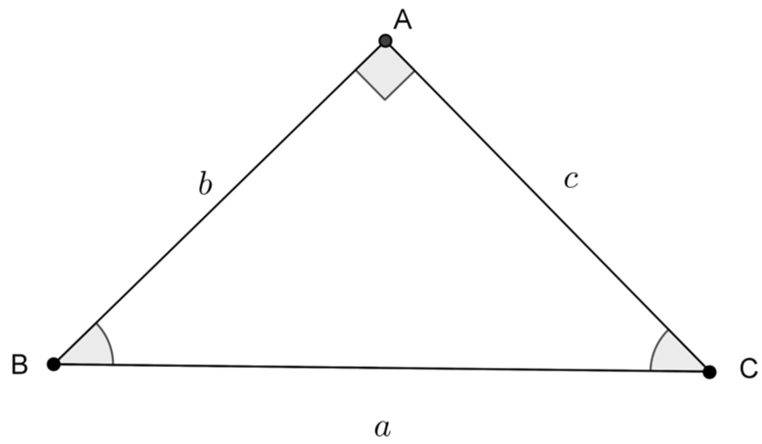
3. ALGUNS CONCEITOS E IDEIAS DA TRIGONOMETRIA.

Como foi possível observar no decorrer da história, a trigonometria foi se estruturando para apresentar-se na forma atual. Portanto, disserta-se nesta parte do trabalho alguns dos conceitos que podem ser trabalhados em sala de aula e algumas demonstrações importantes sobre o referido tema. Ainda nesta parte do trabalho apresentam-se apenas as definições das funções seno, cosseno e, por último, tangente, pois se acredita que sejam as mais usuais e de grande aplicabilidade.

3.1. TRIÂNGULO RETÂNGULO.

Triângulo retângulo é o triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo com medida de 90º como mostra a figura 15.

Figura 15 – Triângulo Retângulo



Fonte: A autora

Neste triângulo, tem-se:

- Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$
- Ângulos internos: $B\hat{A}C,\ A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$
- Medidas dos lados: a = medida do lado $\overline{BC}$;

  b = medida do lado $\overline{AC}$;

  c = medida do lado $\overline{AB}$.

- Medidas dos ângulos: $\widehat{A}$ = medida do ângulo $B\hat{A}C$;

  $\hat{B}$ = medida do ângulo $A\hat{B}C$;

  $\hat{C}$ = medida do ângulo $A\hat{C}B$.

E por se tratar de um triângulo retângulo obtém-se:

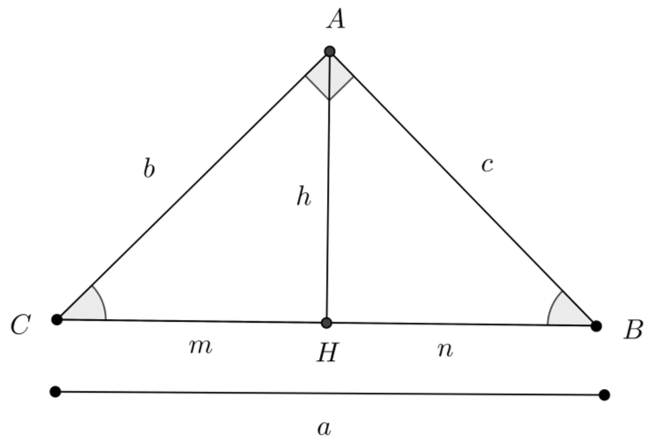
- o lado $\overline{BC}$, oposto ao ângulo reto, é chamado de *hipotenusa*;
- os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, adjacentes ao ângulo reto, são chamados de *catetos* do triângulo ABC.
- logo, a é a hipotenusa, b e c são os catetos.

Com isso, o *Teorema de Pitágoras* se apresenta da seguinte forma: $a^2 = b^2 + c^2$ ou seja, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Segue uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

Considere a figura:

Figura 16 – Teorema de Pitágoras



Fonte: A autora.

Considerando o triângulo ABC, retângulo em A, conforme figura 16. Traçando a altura AH relativa ao lado BC é possível verificar que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC.

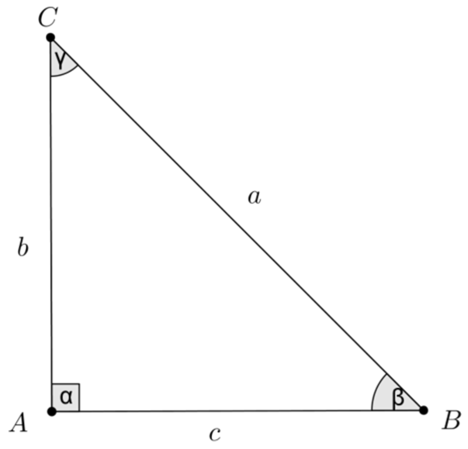
Da semelhança dos triângulos AHC e ABC tem-se $b^2 = am$ e da semelhança dos triângulos AHB e ABC tem-se $c^2 = na$. Somando essas duas relações membro a membro, encontra-se:

$$b^2 + c^2 = am + an = a\,(m + n) = a.a = a^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

3.2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS.

Ao considerar o triângulo retângulo ABC da figura 17, tem-se:

Figura 17 – Razões trigonométricas



Fonte: A autora

- $\overline{BC}$: hipotenusa, $BC = a$;
- $\overline{AC}$: cateto oposto a $\hat{B}$ e adjacente a $\hat{C}$, $AC = b$;
- $\overline{AB}$: cateto oposto a $\hat{C}$ e cateto adjacente a $\hat{B}$, $AB = c$.

Portanto, num triângulo retângulo defini-se:

- Seno de um ângulo agudo como a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa.

Logo, tem-se:

$$sen\ \beta = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{medida\ da\ hipotenusa} \Longrightarrow sen\ \beta = \frac{b}{a}$$

$$sen\ \gamma = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{C}}{medida\ da\ hipotenusa} \Longrightarrow sen\ \gamma = \frac{c}{a}.$$

- Cosseno de um ângulo como a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa.

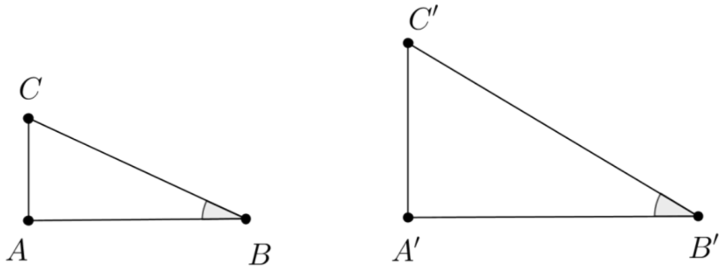
Logo, tem-se:

$$cos\beta = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ \ a\ \hat{B}}{medida\ da\ hipotenusa} \Longrightarrow \cos\beta = \frac{c}{a},$$

$$cos\gamma = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{C}}{medida\ da\ hipotenusa} \Longrightarrow cos\ \gamma = \frac{b}{a}.$$

Analisando as relações seno e cosseno pode-se concluir que estas dependem apenas do ângulo e não das medidas dos lados do triângulo retângulo no qual este ângulo está contido. Com efeito, dois quaisquer triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo são semelhantes[1].

Figura 18 – Triângulos semelhantes



Fonte: A autora.

Considere a figura 18.

Nos triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$ tem-se que $\hat{B} = \widehat{B'}$, então, como os lados correspondentes são proporcionais, logo:

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad e \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

Portanto, $sen\hat{B} = sen\widehat{B'}$ e $cos\hat{B} = cos\widehat{B'}$.

Com isso, concluí-se que, tanto seno como cosseno, dependem dos ângulos do triângulo que os contêm.

- Tangente de um ângulo como a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo. Logo:

$$tg\beta = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}} \Longrightarrow tg\ \beta = \frac{b}{c}$$

$$tg\gamma = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{C}}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{C}} \Longrightarrow tg\ \gamma = \frac{c}{b}$$

- Cotangente de um ângulo como a razão entre a medida do cateto adjacente e a medida do cateto oposto ao ângulo. Logo:

$$cotg\beta = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}}{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{B}} \Longrightarrow cotg\ \beta = \frac{c}{b}$$

[1] Sobre esse assunto vide pagina 164 do livro Tópicos de Matemática Elementar. V.2. Geometria Euclidiana Plana

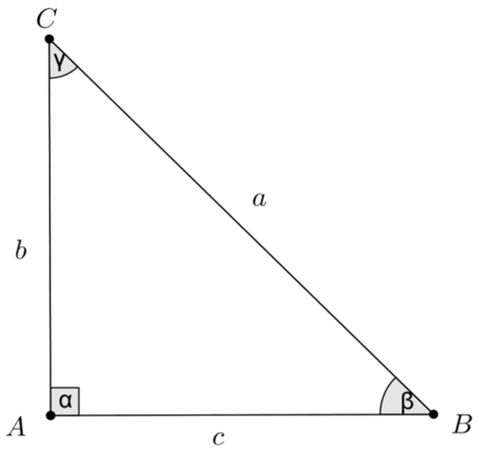
$$cotg\gamma = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{C}}{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{C}} \Longrightarrow cotg\ \gamma = \frac{b}{c}.$$

3.2.1. RELAÇÕES ENTRE SENO, COSSENO, TANGENTE E COTANGENTE.

Esta seção tem o objetivo de demonstrar algumas relações que surgem como consequências das próprias definições das razões trigonométricas.

3.2.1.1. A RELAÇÃO FUNDAMENTAL.

Figura 19 - Relação Fundamental



Fonte: A autora

Considere o triângulo ABC como na figura 19.

Portanto: $sen\beta = \frac{b}{a}$ e $cos\beta = \frac{c}{a}$;

Então, reescreve-se como: $a.sen\beta = b$ e $a.cos\beta = c$

Do Teorema de Pitágoras observa-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (a\ .\ sen\beta)^2 + (a\ .cos\beta)^2$$

$$a^2 = a^2.sen^2\beta + a^2.cos^2\beta$$

Simplificando tem-se:

$$sen^2\beta + cos^2\beta = 1$$

3.2.1.2. A RELAÇÃO $\frac{sen\,\beta}{\cos\beta}$

Tem-se:

$$\frac{sen\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\beta$$

Portanto:

$$\frac{sen\,\beta}{\cos\beta} = tg\beta$$

3.2.1.3. A RELAÇÃO $\frac{cos\beta}{sen\,\beta}$

Considerando:

$$\frac{cos\,\beta}{\text{sen}\,\beta} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = cotg\beta$$

Portanto:

$$\frac{cos\,\beta}{\text{sen}\,\beta} = cotg\ \beta$$

3.2.1.4. RELAÇÃO ENTRE TANGENTE E COTANGENTE.

Considerando:

$$\frac{sen\,\beta}{\cos\beta} = tg\beta \ \text{ e } \frac{cos\,\beta}{\text{sen}\,\beta} = cotg\ \beta$$

Reescreve-se:

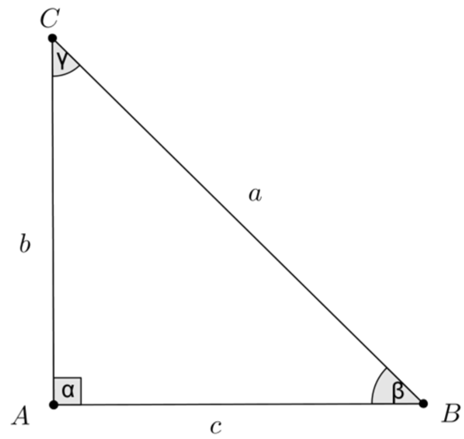
$$\frac{sen\,\beta}{\cos\beta} = tg\beta \ \text{ como } \frac{cos\,\beta}{\text{sen}\,\beta} = \frac{1}{tg\beta}$$

Logo:

$$cotg\ \beta = \frac{1}{tg\beta}$$

3.2.1.5. RELAÇÃO ENTRE SENO, COSSENO, TANGENTE E COTANGENTE DE ÂNGULOS COMPLEMENTARES.

Figura 20 – Relações trigonométricas



Fonte: A autora

Na figura 20 pode-se considerar que:

$$90° + \beta + \gamma = 180°$$

Portanto:

$$\beta + \gamma = 90°.$$

Ou seja, β e γ são complementares.

Com isso estabelecem-se as seguintes relações:

- Como $sen\beta = \frac{b}{a}$ e $\cos\gamma = \frac{b}{a}$, então $sen\beta = \cos\gamma$.

  Ou seja:

  $$sen\beta = \cos(90° - \beta).$$

- $cos\beta = \frac{c}{a}$ e $\text{sen}\,\gamma = \frac{c}{a}$, portanto $cos\,\beta = sen\,\gamma$.

  Ou seja:

  $$cos\beta = \text{sen}(90° - \beta).$$

- $tg\,\beta = \frac{b}{c}$ e $cotg\,\gamma = \frac{b}{c}$ portanto $tg\,\beta = cotg\,\gamma$, ou ainda:

  $$tg\,\beta = \frac{1}{tg\,\gamma}$$

- $tg\,\gamma = \frac{c}{b}$ e $cotg\,\beta = \frac{c}{b}$ portanto $tg\,\gamma = cotg\,\beta$, ou ainda:

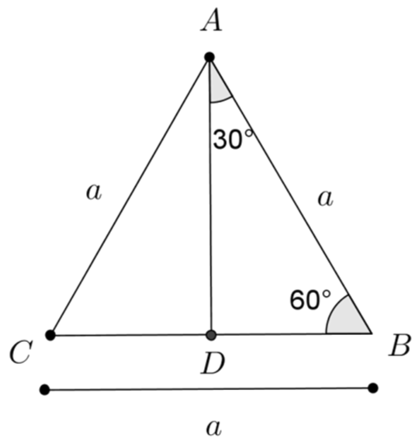
  $$tg\,\gamma = \frac{1}{tg\,\beta}$$

3.2.2. ÂNGULOS NOTÁVEIS.

Nesta subseção apresenta-se a dedução das razões trigonométricas para os ângulos de 30°, 45° e 60°, pois eles surgem com mais frequência em muitos problemas na trigonometria. Portanto, é conveniente obter seus valores de maneira clara.

Seja o triângulo ABC, na figura 21, um triângulo equilátero de lado a.

Figura 21 - Valores especiais para 30° e 60°



Fonte: A autora.

Considere que AD é a mediatriz da base e também a bissetriz de $C\hat{A}B$. Logo, $D\hat{A}B = 30°$ e $A\hat{B}D = 60°$. Então $DB = \frac{a}{2}$ e com isso a medida de AD será:

$$AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$AD = a \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto:

$$sen\ 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = \frac{AD}{DB} = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

De maneira similar obtém-se:

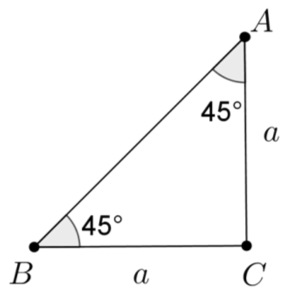
$$sen30° = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30° = \frac{DB}{AD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para o cálculo de seno, cosseno e tangente do ângulo de 45º considera-se a figura 22 que representa um triângulo isóscele com $AC = BC = a$ e o ângulo $A\hat{C}B\ = 90°$.

Figura 22 – Valores especiais para 45°



Fonte: A autora.

Portanto:

$$AB^2 = \ AC^2 + \ BC^2 = a^2 + \ a^2 = 2a^2$$

Ou seja,

$$AB = a\sqrt{2}.$$

Logo:

$$sen\ 45°\ = \frac{AC}{AB} = \ \frac{a}{a\sqrt{2}} = \ \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{BC}{AB} = \ \frac{a}{a\sqrt{2}} = \ \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan 45° = \frac{AC}{BC} = \ \frac{a}{a} = 1.$$

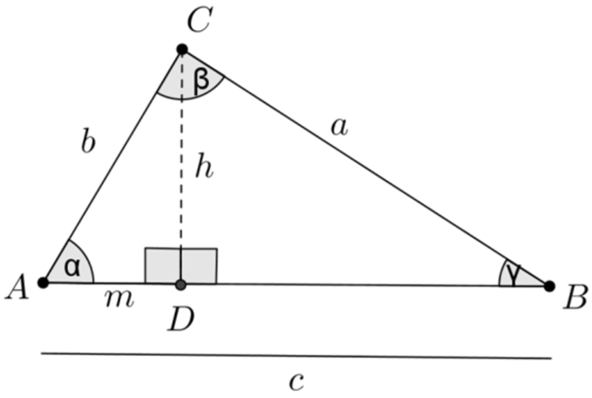
3.3. LEI DOS COSSENOS.

Nesta seção apresenta-se a lei dos cossenos, a qual permite calcular as medidas dos lados e dos ângulos de triângulos quaisquer.

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Assim, considere o triângulo ABC qualquer da figura 23, no qual o ângulo $\hat{A}$ é oposto ao lado a.

Figura 23 – Lei dos Cossenos



Fonte: a autora

Já no triângulo retângulo BCD, tem-se:

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2 \quad \text{(I)}$$

E no triângulo ACD, tem-se:

$$b^2 = h^2 + m^2$$

$$h^2 = b^2 - m^2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), fica:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2 = b^2 + c^2 - 2.c.m \quad \text{(III)}$$

Ainda no triângulo ACD, tem-se:

$$cos\alpha = \frac{m}{b} \rightarrow m = b\,.cos\,\alpha \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), obtém-se:

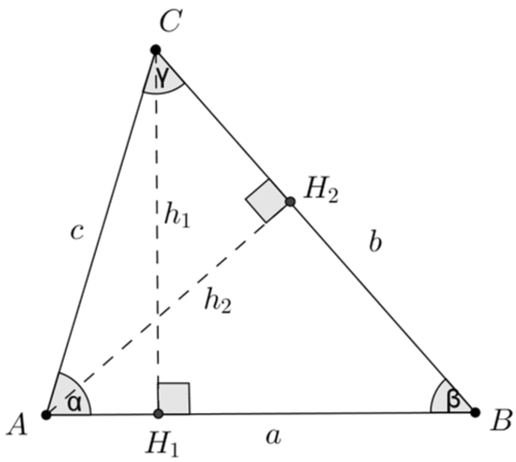
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b\,.c\,.cos\,\alpha$$

Desta forma, demonstra-se a Lei dos Cossenos para os casos de triângulos acutângulos. Sem perda de generalidade, pode-se estabelecer a Lei dos Cossenos para os demais triângulos: obtusângulos e retângulos.

3.4. LEI DOS SENOS.

A Lei dos Senos permite calcular as razões entre os lados e os senos dos ângulos opostos ao lado, respectivamente. Ou seja, a Lei dos Senos diz que: em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Figura 24 – Lei dos Senos



Fonte: A autora.

No triângulo ACH_1, retângulo em H_1, tem-se:

$$sen\hat{C} = \frac{h_1}{b} \Longrightarrow h_1 = b\,.\,sen\,\hat{C}$$

Já no triângulo ABH_1, retângulo em H_1, tem-se:

$$sen\hat{B} = \frac{h_1}{c} \Longrightarrow h_1 = c\,.\,sen\,\hat{B}$$

Comparando essas duas equações, obtém-se:

$$b\,.\,sen\,\hat{C} = c\,.\,sen\,\hat{B} \rightarrow \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \qquad \text{(I)}$$

No entanto, no triângulo BCH_2, retângulo em H_2, tem-se:

$$sen\hat{C} = \frac{h_2}{a} \rightarrow h_2 = a\,.\,sen\,\hat{C}$$

E no triângulo ABH_2, retângulo em H_2, obtém-se:

$$sen\,\hat{A} = \frac{h_2}{c} \rightarrow h_2 = c\,.\,sen\,\hat{A}$$

Portanto, comparando as equações, tem-se:

$$a\,.\,sen\,\hat{C} = c\,.\,sen\,\hat{A} \rightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \qquad \text{(II)}$$

Então, de (I) e (II) concluí-se que:

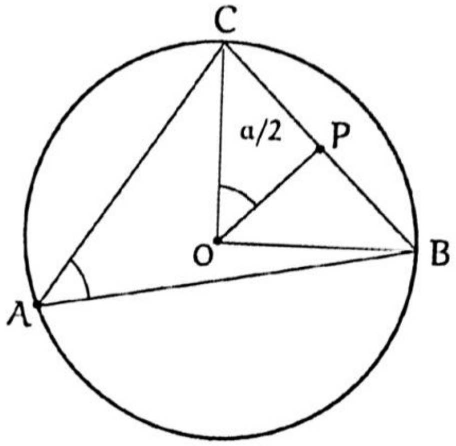
$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Observação: A constante de proporcionalidade entre a medida do lado e o seno do ângulo oposto é igual ao diâmetro ($2R$) do círculo circunscrito ao triângulo ABC. De fato, considerando a figura 25, a perpendicular OP, baixada do centro do círculo circunscrito sobre o lado BC é também a mediana do triângulo isósceles OBC e bissetriz do ângulo $C\hat{O}B$, que é igual a $2\hat{A}$. Logo, $C\hat{O}P = \hat{A}$, então: $\frac{a}{2} = r\ sen\ \hat{A}$, ou seja, $\frac{a}{sen\ \hat{A}} = 2R$. O mesmo vale para os demais casos.

Daí:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R.$$

Figura 25 - Relação entre lado, seno do ângulo oposto e o raio da circunferência.



Fonte: Lima (2006)

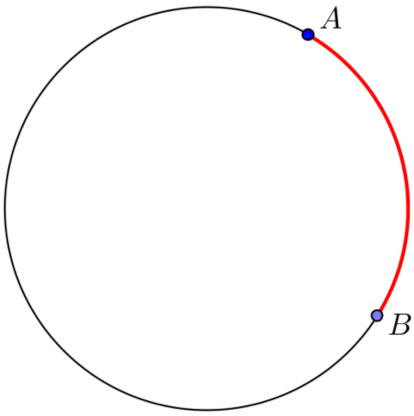
3.5. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA.

Esta parte do trabalho inicia-se com o conceito de arcos e algumas definições importantes e estas produziram consequências que serão apresentadas ao longo da mesma. Neste sentido é plausível induzir o aluno a investigar e demonstrar tais consequências.

3.5.1. ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA.

Arco de circunferência é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos.

Figura 26 - Arco de circunferência

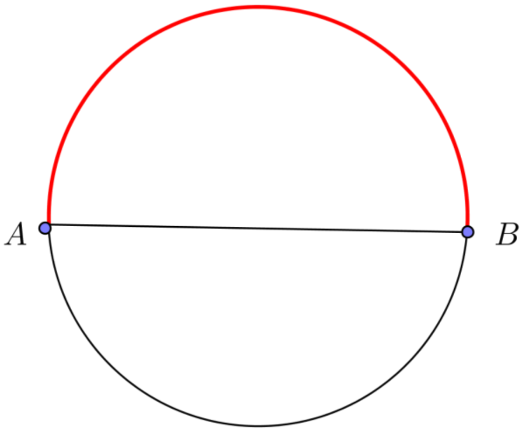


Fonte: A autora.

Na figura 26, os pontos A e B da figura dividem a circunferência em duas partes. Cada uma dessas partes é chamada de arco de circunferência, onde os pontos A e B são as extremidades dos arcos, ou seja, arco $\widehat{AB}$.

Se as extremidades de um arco coincidem com as extremidades de um diâmetro, como na figura 27, os arcos são chamados de semicircunferência.

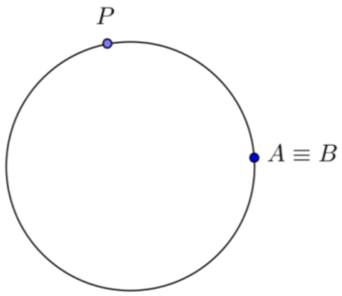
Figura 27 – Arcos com extremidades no diâmetro



Fonte: A autora.

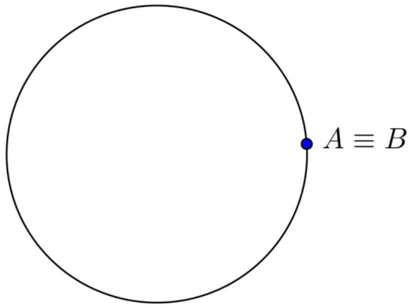
E se os pontos A e B coincidem, eles determinam na circunferência o arco de uma volta, como o da figura 28, ou um arco nulo, como na figura 29.

Figura 28 – Arco de uma volta



Fonte: A autora.

Figura 29 – Arco nulo

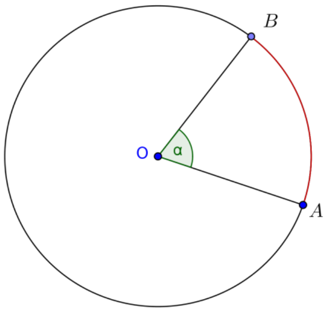


Fonte: A autora.

3.5.2. ÂNGULO CENTRAL.

A medida de um arco de circunferência é definida como a medida do ângulo central correspondente.

Figura 30 – Arco central

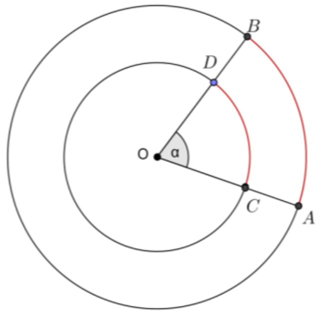


Fonte: A autora.

Na figura 30, a medida de $\widehat{AB}$ é a medida correspondente ao ângulo α e representa-se por: $med(\widehat{AB}) = \alpha$.

É importante observar, na figura 31, que a medida de um arco não representa a medida do comprimento do arco.

Figura 31 – Medida de um arco



Fonte: A autora.

Os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ possuem a mesma medida α, porém não têm o mesmo comprimento.

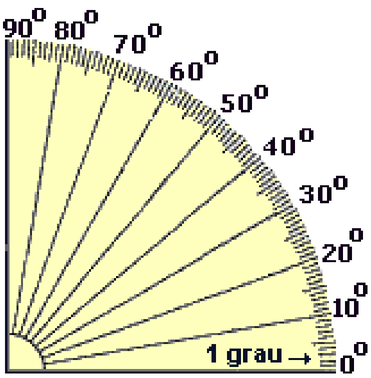
3.5.3. UNIDADES DE MEDIDA DE ARCOS E ÂNGULOS.

Nesta seção serão apresentadas as unidades utilizadas para medir arcos e ângulos: o grau e o radiano.

3.5.3.1. GRAU.

Dividindo uma circunferência em 360 partes iguais, cada uma dessas partes corresponde a um arco de 1°(um grau) como mostra a figura 32.

Figura 32 – Grau



Fonte: Quilles (2009)

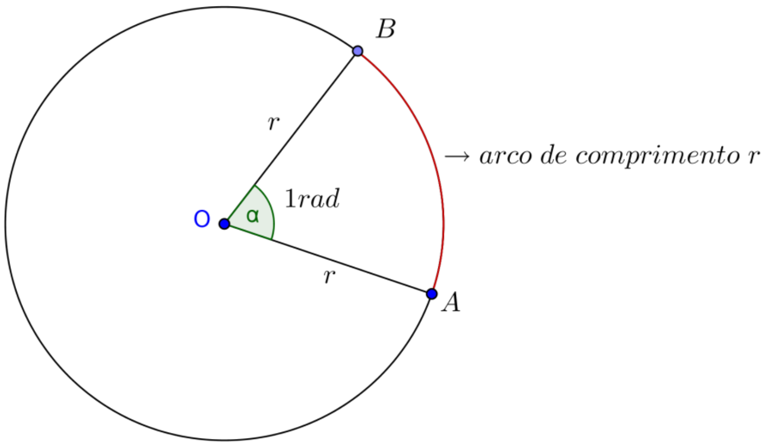
Os submúltiplos do grau são o minuto e o segundo.

- Um minuto é igual a $\frac{1}{60}$ do grau.
- Um segundo é igual a $\frac{1}{60}$ do minuto.

3.5.3.2. RADIANOS.

Um radiano, denotado por *1 rad,* é o arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém.

Figura 33 - Radianos



Fonte: a autora

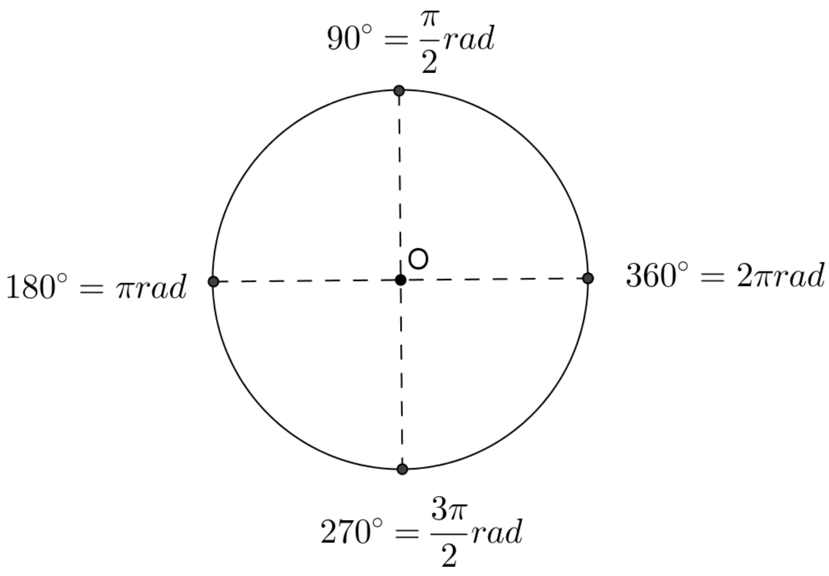
Na figura 33, a medida do arco $\widehat{AB}$ é 1 radiano, pois tem a mesma medida do raio da circunferência. Representa-se por $med(\widehat{AB}) = 1\,rad$.

Portanto, para determinar a medida de um arco $\widehat{AB}$ em radianos, basta dividir o comprimento do arco (ℓ) pela medida do raio da circunferência que o contém, ou seja:

$$\alpha = med(\widehat{AB}) = \frac{\ell}{r}$$

Na figura 34 apresentam-se as relações entre grau e radianos de alguns arcos.

Figura 34 – Grau e radianos

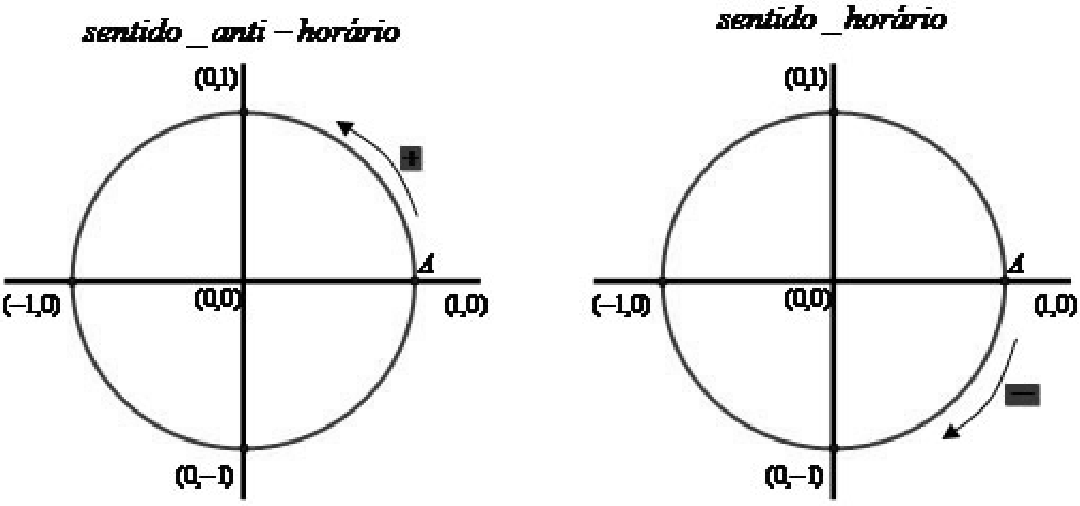


Fonte: A autora.

3.5.3.3. ARCO ORIENTADO.

Arco orientado é o sentido que um ponto se desloca na circunferência. É definido como positivo o percurso anti-horário e como negativo o percurso horário conforme a figura 35.

Figura 35 - Sentido do arco



Fonte: Silva (2013).

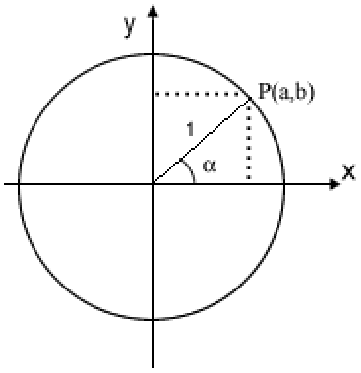
3.6. CICLO TRIGONOMÉTRICO.

A partir desta seção, apresentam-se as definições referentes às razões trigonométricas representadas em uma circunferência.

3.6.1. DEFINIÇÕES.

Considere a figura 36, na qual tem-se um sistema de coordenadas cartesianas no plano. Portanto, a circunferência, de centro na origem do sistema, de raio unitário ($r = 1$) e orientada no sentido anti-horário, é chamada de *ciclo trigonométrico* ou *circunferência trigonométrica*.

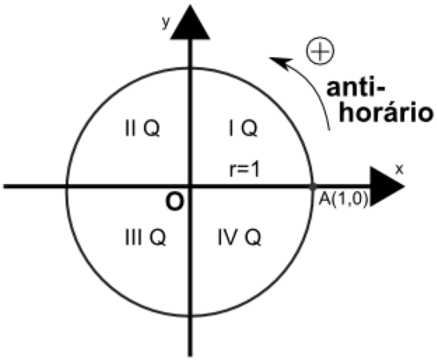
Figura 36 - Ciclo Trigonométrico



Fonte: Campagner (2006).

Com base nessas definições tem-se que os eixos do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais dividem o ciclo trigonométrico em quatro partes iguais denominados quadrantes conforme a figura 37.

Figura 37 - Quadrantes



Fonte: Mundo da trigonometria, (2009).

Como o ciclo trigonométrico tem raio unitário, a medida de qualquer arco, em radianos, é numericamente igual ao seu comprimento. Com isso, percorrer um arco de $x\ rad$ no ciclo trigonométrico é fazer um percurso de comprimento x.

Cada arco trigonométrico tem extremidade em um único ponto na circunferência, assim é comum indicar o arco por esse ponto, ou seja, a cada número real x podemos associar um único ponto na circunferência. Esse ponto é denominado $imagem\ de\ x$ no ciclo.

3.6.2. ARCOS CÔNGRUOS.

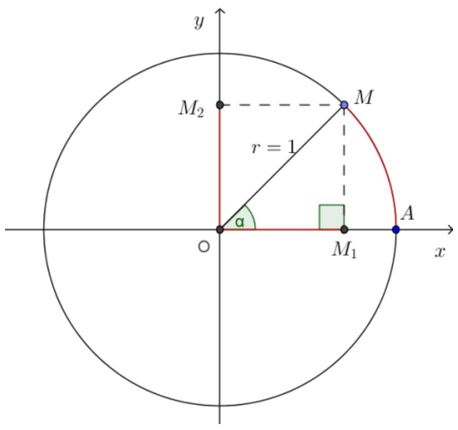
Arcos côngruos são aqueles arcos que possuem a mesma extremidade e diferem apenas pelo número de voltas completas.

De forma geral: se um arco mede α graus a expressão geral dos arcos côngruos a ele é: $\alpha + k.360°$ com $k \in \mathbb{Z}$. Se um arco mede α radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é: $\alpha + 2k.\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3.6.3. SENO E COSSENO DE UM ARCO.

Considere o ciclo trigonométrico com ponto M, conforme a figura 38.

Figura 38 – Seno e cosseno de um arco



Fonte: A autora.

Observa-se o arco $\widehat{AM}$, cujo ângulo central correspondente possui medida α. Seja $\overline{OM}$ o raio do ciclo, e M_2 e M_1 as projeções do ponto M sobre os eixos y e x, respectivamente.

Do triângulo retângulo OM_1M, tem-se:

$$sen\ \alpha = \frac{M_1M}{OM} = \frac{OM_2}{1} = OM_2$$

Portanto:

$$sen\ \alpha = OM_2.$$

E ainda:

$$\cos \alpha = \frac{OM_1}{OM} = \frac{OM_1}{1} = OM_1$$

Portanto:

$$cos\ \alpha = OM_1.$$

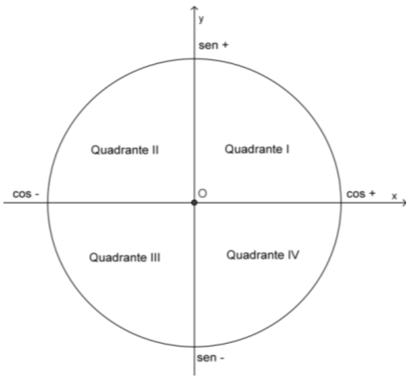
Com isso, define-se: seno de α é a ordenada do ponto M e cosseno de α é a abscissa do ponto M.

O eixo y é denominado o eixo dos senos e o eixo x, o eixo dos cossenos. Portanto, se M é um ponto no ciclo trigonométrico então pode escrevê-lo como: $M(cos\ \alpha, sen\ \alpha)$.

Diante do exposto é possível tirar algumas considerações como mostra a figura 39:

- No primeiro quadrante o seno e o cosseno são positivos;
- No segundo quadrante o seno é positivo e o cosseno é negativo;
- No terceiro quadrante o seno e o cosseno são negativos;
- No quarto quadrante o seno é negativo e o cosseno é positivo.

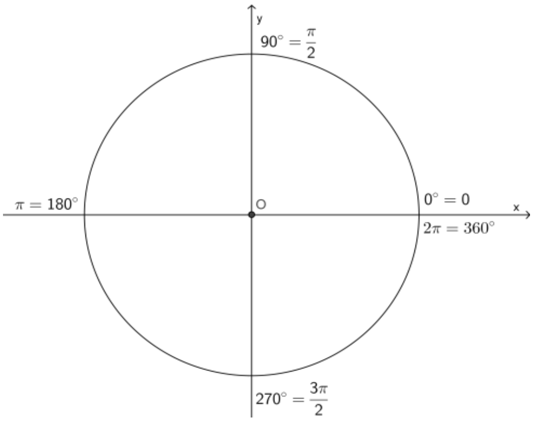
Figura 39 – Sinais nos quadrantes



Fonte: Giovanni (2000)

Apresentam-se, na figura 40, alguns arcos mais comuns e suas representações no ciclo trigonométrico:

Figura 40 – Valores comuns



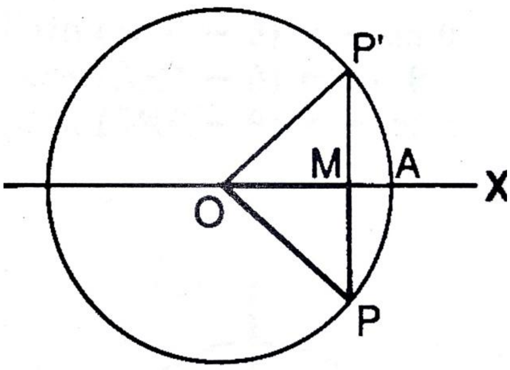
Fonte: Giovanni (2000).

$$sen\ 0° = 0 \qquad sen\ 90° = 1$$
$$\cos 0° = 1 \qquad \cos 90° = 0$$
$$sen\ 180° = 0 \qquad sen\ 270° = -1$$
$$\cos 180° = -1 \qquad \cos 27\ 0° = 0$$

Observação: Para os casos em que se considera o sentido horário, ou seja, $-\theta$, podem-se considerar as demonstrações que seguem.

Assim, considerando a figura 41:

Figura 41 – Ângulos negativos.



Fonte: Teach Yourself Trigonometry, p 157.

Onde OA é o raio da circunferência e seguindo as definições apresentadas o ângulo $A\hat{O}P$ é negativo considerando o sentido horário. Representa-se este ângulo por $-\theta$. Repetindo o mesmo ângulo, porém no sentido anti-horário ele passará a ser apenas θ. Traçando a reta $P'P$ passando por M, têm-se dois triângulos OMP e OMP' e consequentemente serão congruentes por LAL. Com isso os ângulos $O\widehat{M}P$ e OMP' são iguais e consequentemente medem 90º.

Então: $sen(-\theta) = \frac{PM}{OP} = -\frac{P'M}{OP}$ mas, $\frac{P'M}{OP} = sen\,\theta$, portanto:

$$sen\,(-\theta) = -sen\theta$$

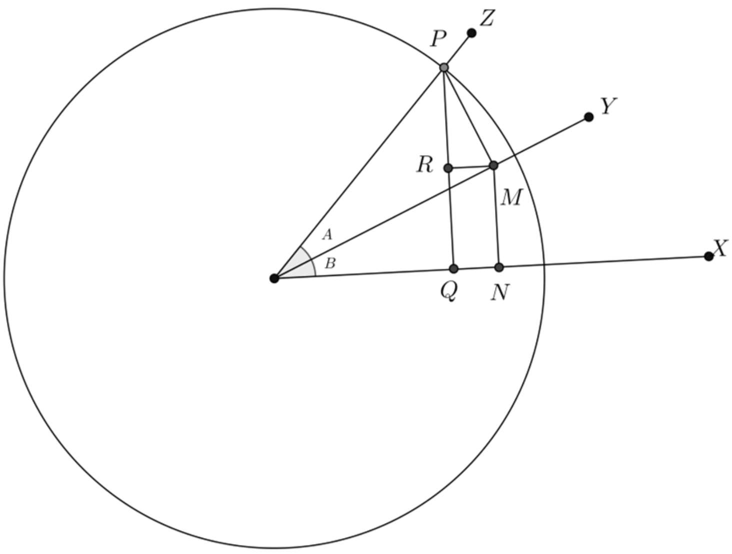
De maneira similar: $\cos(-\theta) = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{OP'} = \cos\theta$

De maneira similar: $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

3.6.4. SENO E COSSENO DA SOMA E DA DIFERENÇA DE ÂNGULOS.

Com base na figura 42, demonstram-se as consequências da soma de ângulos de senos e cossenos.

Figura 42 – Seno e cosseno da soma de ângulos



Fonte: A autora.

Considerando o ciclo de centro O e raio unitário OP, traçando PQ perpendicular a OX e PM perpendicular a OY. A partir de M, traçando MN perpendicular a OX e MR paralela a OX, tem-se $MR = QN$. Analisando os ângulos concluí-se:

$$R\hat{P}M = 90° - P\widehat{M}R = R\widehat{M}O$$

Mas:

$$R\widehat{M}O = M\hat{O}Z = A$$

Portanto:

$$R\hat{P}M = A$$

Logo: $sen\ (A + B) = \frac{PQ}{OP}$

Porém como o ciclo tem raio unitário logo $OP = 1$ então:

$$sen\ (A + B) = \frac{PQ}{1}\text{, ou seja, } sen\ (A + B) = PQ$$

No entanto: $PQ = RQ + PR$

Mas como $MR = QN$ e MR é paralela a OX, então $RQ = MN$, donde:

$$PQ = MN + PR \qquad \text{(I)}$$

Por outro lado analisando no triângulo MON tem-se que: $sen(A) = \frac{MN}{OM}$

$$OM.sen(A) = MN \qquad \text{(II)}$$

Já no triângulo OMP tem-se que: $\cos(B) = \frac{OM}{OP}$, no entanto $OP = 1$, logo:

$$cos(B) = \frac{OM}{1} = OM \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (II) encontra-se: $OM.sen(A) = MN$

$$cos\ (B).sen(A) = MN \qquad \text{(IV)}$$

E substituindo (IV) em (I) tem-se:

$$PQ = cos(B)\,.sen\ (A) + PR \qquad \text{(V)}$$

Resolvendo de maneira análoga encontra-se PR.

No triângulo MPR tem-se: $\cos(A) = \frac{PR}{PM}$

$$PM.cos(A) = PR \qquad \text{(VI)}$$

Porém no triângulo OMP tem-se: $sen(B) = \frac{PM}{OP}$

Porém $OP = 1$ (raio unitário), então:

$$sen(B) = \frac{PM}{1} = PM \qquad \text{(VII)}$$

Portanto, substituindo (VII) em (VI) encontra-se: $PM.\cos(A) = PR$.

$$sen(B).cos(A) = PR \qquad \text{(VIII)}$$

E agora, substituindo (VIII) em (V), concluí-se esta demonstração:

$$PQ = \cos(B)\,.sen\ (A) + PR$$

$$PQ = \cos(B)\,.sen\ (A) + sen(B).\cos\ (A)$$

Portanto:

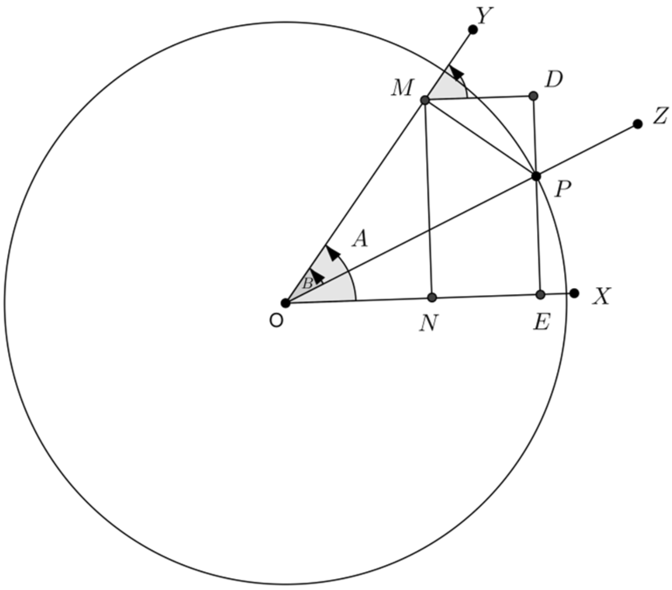
$$sen(A + B) = sen(A).cos\ (B) + sen(B).\cos\ (A)$$

Procedendo de maneira similar é possível deduzir que:

$$\cos(A + B) = \cos(A).\cos(B) - sen(A).sen(B)$$

Para demonstrar a fórmula de $sen(A - B)$ considera-se a figura 43:

Figura 43 – Seno e cosseno da diferença de ângulos



Fonte: A autora.

Considerando o ângulo A sendo o ângulo $X\hat{O}Y$ e B o ângulo $Y\hat{O}Z$ descrito no sentido horário. Portanto observa-se que:

$$X\hat{O}Z = A - B$$

Marcando o ponto P em OZ , traçando PQ perpendicular a OX e PM perpendicular a OY. A partir de M traça-se MN perpendicular a OX e MR paralelo a OX prolongando até R.

Com isso tem-se: $R\hat{P}M = 90° - P\hat{M}R$

$$= R\hat{M}Y$$

$$= Y\hat{O}X$$

$$= A$$

Então: $sen(A - B) = sen\left(X\hat{O}Z\right)$

Ou seja, $sen\ (A - B) = \frac{PQ}{OP}$

Como OP é o raio do ciclo de valor unitário, então: $sen\ \left(A - B\right) = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ$.

No entanto, observa-se que:

$$PQ = QR - PR \qquad \text{(I)}$$

Analisando que $QR = MN$ e observando o triângulo MNO, tem-se: $sen\ (A) = \frac{MN}{OM}$.

$$MN = OM.sen(A) \qquad \text{(II)}$$

Mas, no triângulo MPO observa-se que: $cos\ (B) = \frac{OM}{OP}$.

Porém, OP é o raio do ciclo e é unitário, assim:

$$cos\ (B) = \frac{OM}{1} = \ OM \tag{III}$$

Substituindo (III) em (II) fica:

$$MN = cos(B)\,.\,sen(A) \tag{IV}$$

Já no triângulo MPR tem-se: $\cos(A) = \frac{PR}{MP}$

$$PR = MP\,.\,cos\ (A) \tag{V}$$

Mas, no triângulo MOP defini-se que MP é: $sen\ (B) = \frac{MP}{OP}$.

Onde OP é o raio unitário do ciclo, portanto:

$$sen\ (B) = \frac{MP}{1} = MP \tag{VI}$$

Substituindo (VI) em (V) tem-se:

$$PR = sen\ (B)\,.\,cos\ (A) \tag{VII}$$

Substituindo (VII) e (IV) em (I), fica:

$$PQ = \cos(B).sen(A) - \ sen(B).\cos(A)$$

$$sen\ (A - B) = sen(A).\cos(B) - \cos(A).sen(B)$$

Fazendo de maneira análoga é possível encontrar:

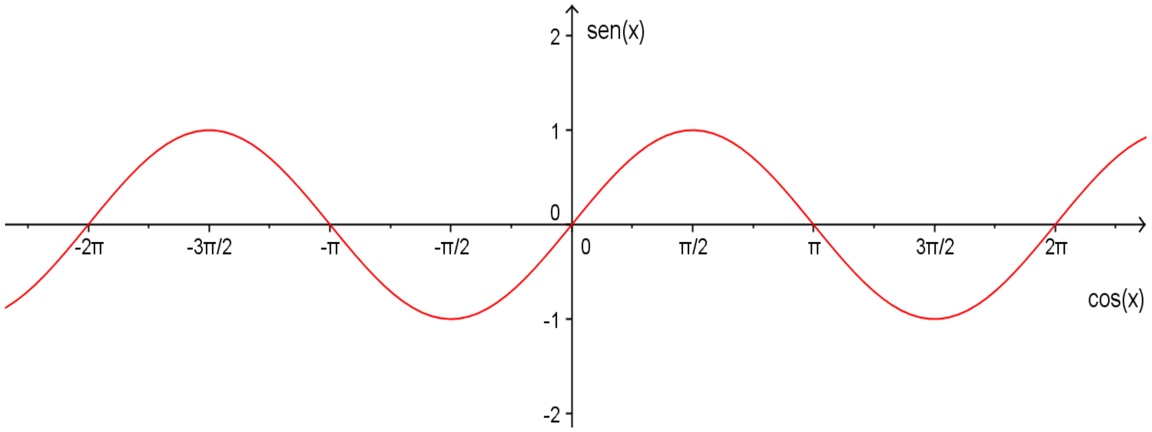
$$cos(A - B) = cos(A).cos(B) + \ sen(A).sen(B)$$

3.6.5. GRÁFICO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO.

A partir do que foi apresentado nas páginas anteriores deste texto, pode-se definir a função seno e cosseno.
Portanto segue os exemplos:

a) $f(x) = \ sen\ x$

Figura 44 – Gráfico da função $f(x) = \ sen\ x$



Fonte: A autora.

O gráfico da função seno é chamado de *senóide*. Observa-se, com base na figura 44, que:

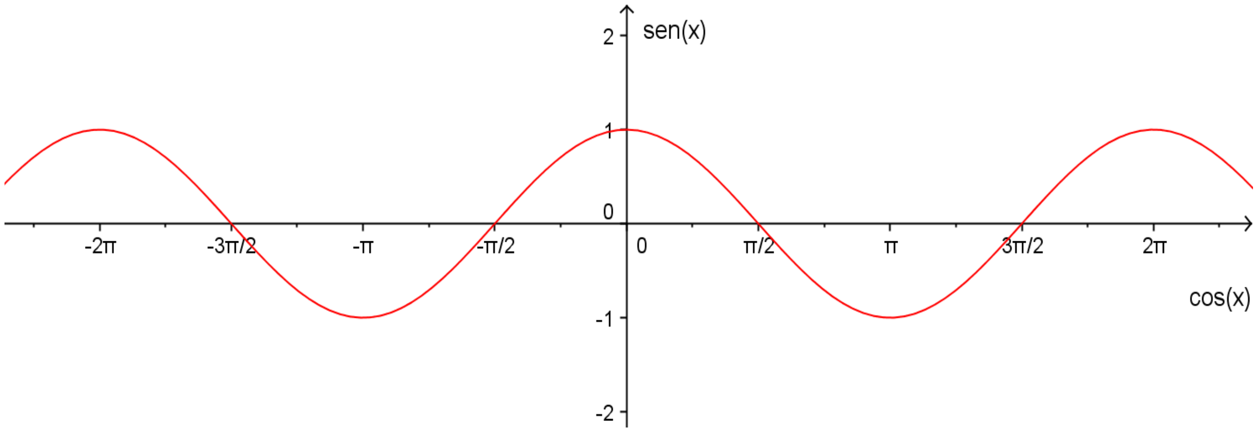
- O domínio da função é o conjunto dos números reais, ou seja, $D = \mathbb{R}$.
- A imagem da função é o intervalo $[-1, +1]$, isto é, $-1 \leq sen\ x \leq 1$.
- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número $T \neq 0$, tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t+kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ chama-se período da função f. Portanto, somando 2π a um determinado valor de x, a função assume o mesmo valor. Como 2π é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função seno é $p = 2\pi$.

$$sen\ x = sen\ (x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

- Como $sen\ (-x) = -sen(x)$, para todo x real, pode-se afirmar que a função *seno é ímpar*.

b) $f(x) = \cos x$

Figura 45 – Gráfico da função $f(x) = \cos x$.



Fonte: A autora.

O gráfico da função cosseno é chamado de *cossenóide*. Observa-se, conforme a figura 45, que:

- O domínio da função é o conjunto dos números reais, ou seja, $D = \mathbb{R}$.
- A imagem da função é o intervalo $==[-1, +1]$, isto é, $-1 \leq cos\ x \leq 1$.
- Sempre que se soma 2π a um determinado valor de x, a função assume o mesmo valor. Como 2π é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $f(x) = \cos x$ é $p = 2\pi$.

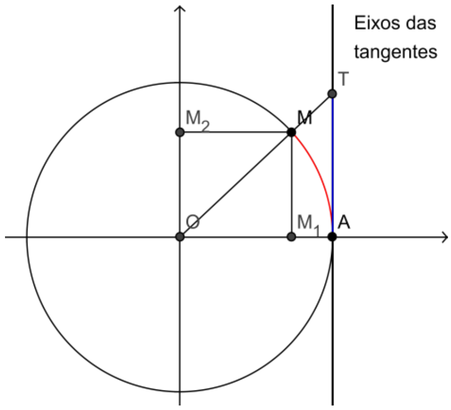
$$cos\ x = cos\ (x + 2k\pi), k\ \in \mathbb{Z}$$

- Como $\cos(-x) = cos\ x$, para todo x real, pode-se afirmar que a função *cosseno é par*.

3.6.6. TANGENTE DE UM ARCO.

Considere o ciclo trigonométrico da figura 46 e o arco $\widehat{AM}$ de medida x.

Figura 46 - Tangente



Fonte: A autora.

Observando a figura 46, defini-se como tangente do arco $\widehat{AM}$ a ordenada do ponto T. Portanto:

$$tg(x) = AT$$

O eixo paralelo ao eixo das ordenadas, orientado para cima e com origem no ponto A é denominado *eixo das tangentes*.

É possível observar que essa definição coincide com aquela apresentada quando se considera os triângulos retângulos, ou seja:

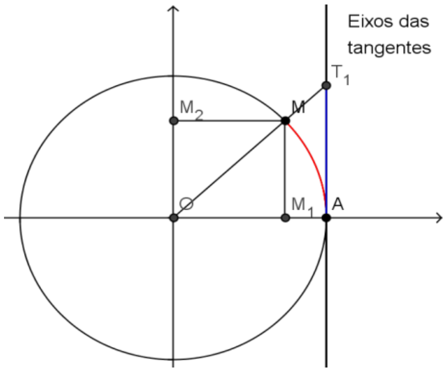
$$\triangle\ OM_1M\ \sim \triangle\ OAT\ \rightarrow \frac{OM_1}{OA} = \frac{M_1M}{AT}$$

$\frac{cos\ x}{1} = \frac{sen\ x}{AT}\ \therefore At = \frac{sen\ x}{\cos x} = tg\ x$, com $\cos x \neq zero$, isto é $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Diante dessa definição tem-se:

- No primeiro quadrante a tangente é positiva.

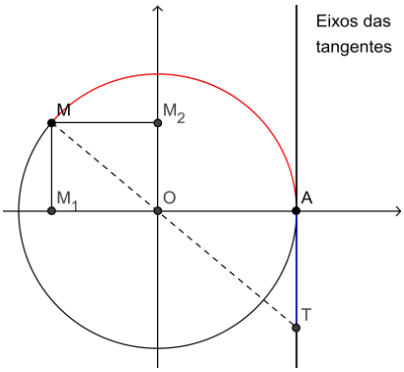
Figura 47 – Tangente no primeiro quadrante



Fonte: A autora

- No segundo quadrante a tangente é negativa.

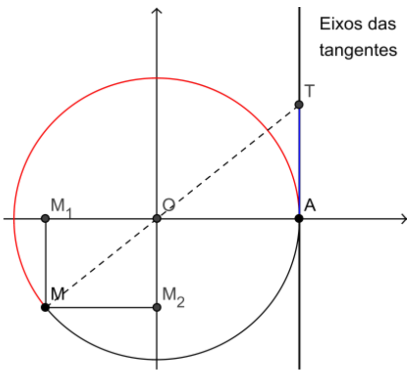
Figura 48 – Tangente no segundo quadrante



Fonte: A autora.

- No terceiro quadrante a tangente é positiva.

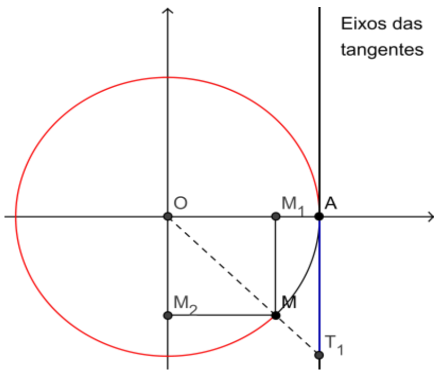
Figura 49 – Tangente no terceiro quadrante



Fonte: A autora.

- No quarto quadrante a tangente é negativa.

Figura 50 – Tangente no quarto quadrante

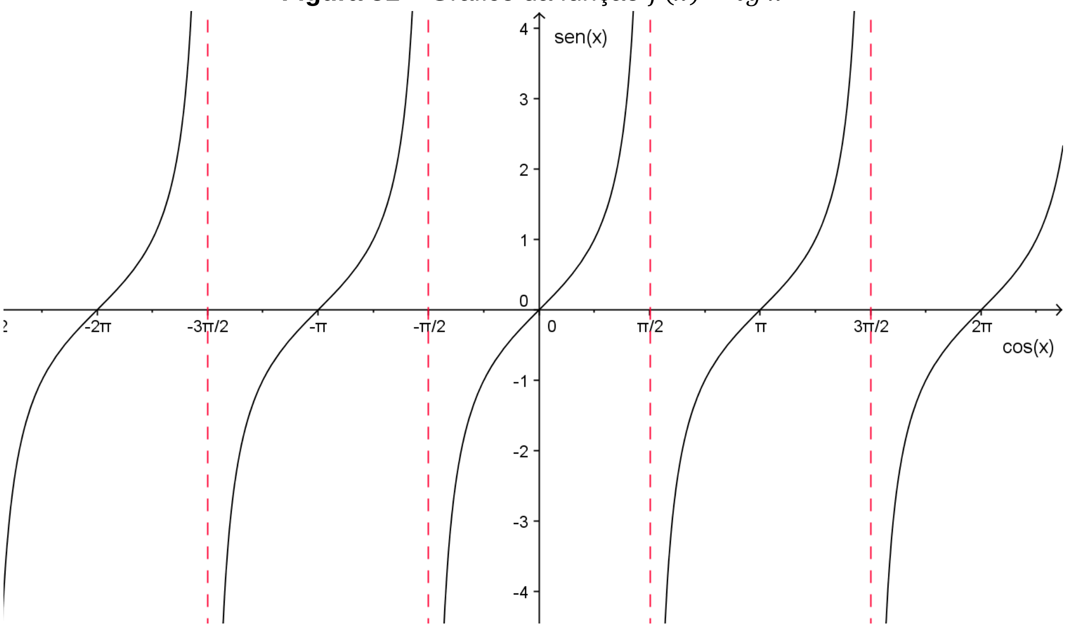


Fonte: A autora.

3.6.7. GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE.

Analisando a função $f(x) = tg\ x$, tem-se:

Figura 51 – Gráfico da função $f(x) = tg\ x$



Fonte: A autora.

O gráfico da função tangente é denominado *tangenóide*. Pode-se observar, conforme a figura 51, que:

- O domínio da função é D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- A imagem da função é o intervalo $]-\infty, \infty[$.
- O período da função é $p = \pi$.

$$tg(x + k\pi) = tg\ x, k \in \mathbb{Z}$$

- Como $tg(-x) = -tg(x)$ então tem-se que a função tangente é uma função ímpar.

Portanto, iniciando esta parte do trabalho com as definições referentes a triângulos e suas relações, estudando o assunto sobre circunferência como um ciclo trigonométrico e finalizando com as funções trigonométricas, foi possível observar como a trigonometria está organizada, um tópico pode levar a outro e em alguns casos, um depende do outro.

4. APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

É notável que boa parte da matemática foi construída para resolver problemas práticos e consequentemente a trigonometria não seria uma exceção. Com base nesta afirmação é possível elencar diversas aplicações da trigonometria em muitas áreas que não ficam restritas apenas as salas de aula, como por exemplo: a trigonometria na topografia, na astronomia, na física, nas ondas sonoras, na medicina, etc.

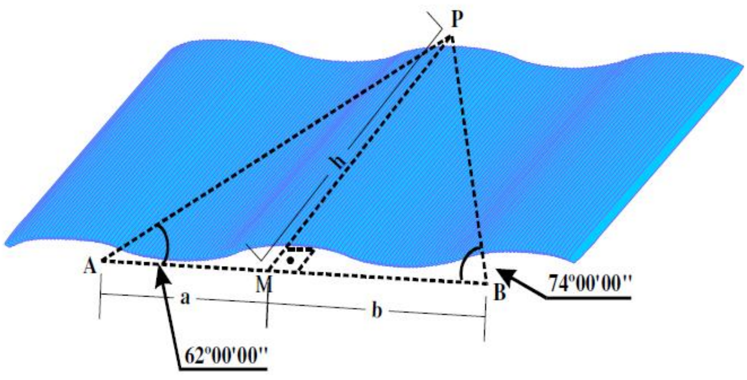
4.1. TOPOGRAFIA.

> *"A Topografia tem por finalidade determinar o contorno, dimensão e posição relativa de uma porção limitada da superfície terrestre, sem levar em conta a curvatura resultante da esfericidade terrestre"* ESPARTEL (1987).

Portanto, a topografia tem o objetivo principal de efetuar o levantamento de medidas (medir ângulos, distâncias e desníveis) que possa representar uma parte da superfície terrestre em uma escala adequada. E para ajudar neste levantamento faz uso da trigonometria.

Exemplo: Para determinar a largura de um rio, um topógrafo, mediu a partir de uma base de 20 m de comprimento os ângulos em A e B, conforme figura 52. E determinou o valor de h a partir dos cálculos:

Figura 52: A Largura de um rio.



Fonte: Veiga (2012)

No triângulo AMP tem-se:

$$tg\ 62° = \frac{h}{a}, \text{ assim, } 1{,}88 = \frac{h}{a} \qquad \text{(I)}$$

Porém sabe-se que $a + b = 20$, logo, $a = 20 - b$, portanto substituindo o valor de a em (I), obtém-se:

$$1{,}88 = \frac{h}{(20 - b)}$$

$$1{,}88 \,.\, (20 - b) = h$$

$$37{,}6 - 1{,}88b = h$$

$$b = \frac{37{,}6 - h}{1{,}88} \qquad \text{(II)}$$

No triângulo BMP tem-se:

$$tg\ 74° = \frac{h}{b}, \text{ assim, } 3{,}48 = \frac{h}{b} \rightarrow h = 3{,}48.\, b \qquad \text{(III)}$$

Substituindo em (III) o valor de b encontrado em (II), tem-se:

$$h = 3{,}48 \,.\, \frac{37{,}6 - h}{1{,}88}$$

$$h = 69{,}6 \ - 1{,}85h$$

$$h + 1{,}85h = 69{,}6$$

$$2{,}85h = 69{,}6$$

$$h = \frac{69{,}6}{2{,}85} \Longrightarrow h = 24{,}42\ m$$

Portanto, a largura do rio é de, aproximadamente, 24,42 metros.

4.2. ASTRONOMIA.

Na astronomia a trigonometria é muito utilizada para fazer medições de astros, distâncias, etc. É possível citar alguns exemplos básicos de aplicações práticas da trigonometria na Astronomia:

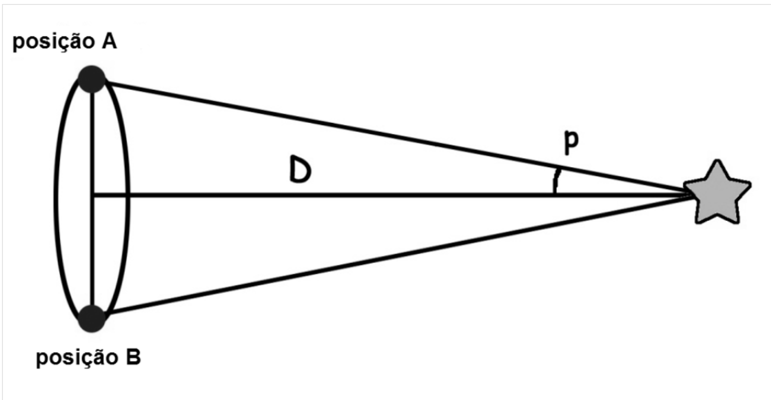
- Eclipses: no cálculo do tamanho da sombra e no cálculo do raio da sombra.
- Distâncias dentro do Sistema Solar como calcular distâncias entre planetas.
- Determinação do raio lunar: Um observador com ajuda de aparelhos especiais que lhe forneçam o ângulo em que ele vê a lua e a distância em que a lua se encontra da Terra pode descobrir o raio da lua, apenas utilizando a lei do seno.

- Determinação da distância Terra-Sol: é possível calcular a distância entre a Terra e o Sol usando a medida do ângulo e depois semelhança de triângulos.

Existe ainda, um método chamado de “paralaxe” que permite determinar a distância de uma estrela ao Sol. Ao observar essa estrela com seis meses de intervalo é possível medir o seu deslocamento aparente em relação a outras estrelas muito mais distantes. O ângulo de paralaxe da estrela (p) é definido como metade do ângulo formado entre as linhas que ligam a estrela aos extremos da base de observação, como se mostra na figura 53. A distância D à estrela é então dada por: $D = \frac{AB}{2.tg(p)}$.

Exemplo: Observa-se uma estrela próxima com relação ao fundo estrelado, de duas posições A e B da órbita terrestre (figura 53), separadas por seis meses, pode-se calcular a distância D à que se encontra a estrela próxima, ou seja:

Figura 53 - Distância da estrela



Fonte: Costa (2012).

Sabemos que $D = \frac{AB}{2.tg(p)}$ e, como p é um ângulo muito pequeno, sua tangente pode ser aproximada ao ângulo medido em radianos: $D = \frac{AB}{2}.\frac{1}{p}$.

A base do triângulo $\frac{AB}{2}$ é a distância Terra-Sol, ou seja, 150 milhões de km. Sabendo-se que o ângulo de paralaxe p é a distância até a estrela em quilômetros dada por: $D = \frac{150\ 000\ 000}{p}$, com o ângulo p representado em radianos. Por exemplo, se o ângulo p é um segundo de arco, a distância da estrela será:

Como $p = 1"$. Porém 1" = $\left(\frac{1°}{3600}\right).\left(\frac{2\pi}{360°}\right) = 4{,}848.10^{-6}rad$

Então, substituindo tem-se:

$$D = \frac{150\ 000\ 000}{4{,}848\ .\ 10^{-6}} = \frac{15\ .\ 10^{7}}{4{,}848\ .\ 10^{-6}} = 3{,}09\ .\ 10^{13} km.$$

Como tem-se que $1a.l = 9{,}46.\ 10^{12} km$, então:

$$D = 3{,}09\ .\ 10^{13} km = \frac{3{,}09\ .\ 10^{13}}{9{,}46.\ 10^{12}} = 3{,}26\ a.l$$

Ano luz $(a.l.)$ é a unidade de distância usada na astronomia profissional e representa a distância que a luz percorre, no vácuo, durante um ano. Se uma estrela for observada com uma paralaxe de um segundo de arco, diria que está a 1 parsec (pc), que equivale a $1pc = 3{,}26a.l$. Quanto menor seja a paralaxe, maior é a distância da estrela.

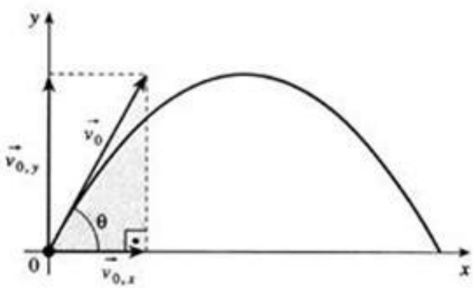
4.3. FÍSICA.

Na Física é possível encontrar alguns conteúdos que dependem de conhecimentos prévios em trigonometria e funções trigonométricas. Apresentam-se, a seguir, alguns exemplos que ilustram essa dependência.

Exemplo 1: Lançamento oblíquo

No lançamento oblíquo de um projétil é usado semelhança de triângulos ou se preferir paralelismo, ângulos alternos internos, e a relação seno e cosseno para descobrir os vetores V_x e V_y.

Figura 54 – Lançamento oblíquo



Fonte: Lima (2011)

Assim pela figura 54 tem-se: $sen\ \theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$, onde $cateto\ oposto = V_y$.

e $hipotenusa = V_0$.

Logo: $V_y = V_0 . sen\theta$

E para cosseno: $\cos\theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$, onde $cateto\ adjacente = V_x$ e $hipotenusa = V_0$. Logo: $V_x = V_0 . cos\theta$

Exemplo 2: Um objeto é lançado obliquamente no vácuo com velocidade inicial de 100 m/s com uma inclinação de 30°. Determine o tempo de subida, a altura máxima e o alcance horizontal do objeto. Considere g=10m/s².

Tempo de subida:

$$\mathrm{t_x} = \frac{\mathrm{V_0 . sen}\ \theta}{\mathrm{g}}$$

$$\mathrm{t_x} = \frac{100. \mathrm{sen}\ 30°}{10}$$

$$t_x = \frac{100.\frac{1}{2}}{10}$$

$$t_x = \frac{50}{10} \rightarrow t_x = 5s$$

Altura máxima:

$$h = \frac{V_0^2 . sen^2\theta}{2g}$$

$$h = \frac{100^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2.10}$$

$$h = \frac{10000 . \frac{1}{4}}{20}$$

$$h = \frac{2500}{20} = 125m$$

Alcance horizontal:

$$a = \frac{V_0^2 . sen\ 2\theta}{g}$$

$$a = \frac{100° . sen\ 2.30°}{10}$$

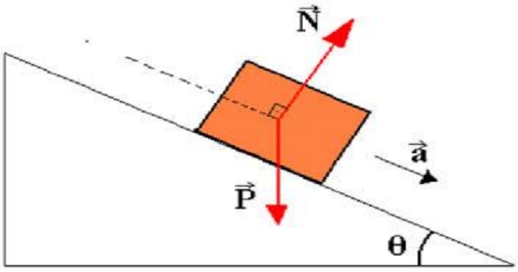
$$a = \frac{10000 . sen\ 60°}{10}$$

$$a = \frac{10000 . \frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = 500\sqrt{3}\ m$$

Exemplo 3: Plano Inclinado

Observando a figura 55:

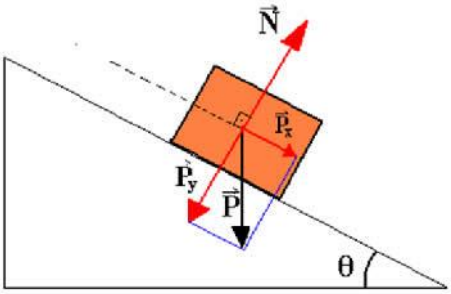
Figura 55 – Plano Inclinado



Fonte: Silva (2011)

No plano inclinado, sem atrito, há um bloco de massa m, e as forças que nele atuam são: a força peso, direcionada para baixo em virtude da atração da Terra; e a força normal, exercida pelo plano inclinado, perpendicular à superfície de contato. Pode-se ver que essas duas forças não possuem a mesma direção, portanto elas nunca irão se equilibrar. Nesse caso, como são as únicas forças exercidas sobre o bloco, elas admitem uma resultante que faz o plano com aceleração constante $\vec{a}$. Para determinar o valor da aceleração desse bloco no plano inclinado é necessário calcular o valor da força resultante exercida no bloco. Para isso, deve-se decompor o peso P em dois componentes: um componente perpendicular ao plano ($\overrightarrow{P_y}$) e outro paralelo ao plano ($\overrightarrow{P_x}$).

Figura 56 – Decomposição da força peso



Fonte: Silva (2011)

Na figura 56 é possível observar que a componente $\vec{N}$ se equilibra com a componente $\overrightarrow{P_y}$. Portanto, a força resultante sobre o bloco é $\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{P_x}$. Tem-se que lembrar que $\overrightarrow{P_x}$ e $\overrightarrow{P_y}$ não existem como forças independentes, ou seja, elas são componentes da força peso.

Assim, para encontrar o valor da aceleração, serão utilizadas as relações trigonométricas do triângulo retângulo:

$$sen\,\theta = \frac{P_x}{P} \quad \rightarrow \quad P_x = P\,.\,sen\theta$$

$$cos\theta = \frac{P_y}{P} \quad \rightarrow \quad P_y = P\,.\,cos\theta$$

Agora, aplicando a Segunda Lei de Newton em módulo $(F_{R=m.a})$ às forças exercidas sobre o bloco, tem-se:

$$F_R = m.a$$

$$P_x = m.a$$

$$P\,.\,sen\,\theta = m.a$$

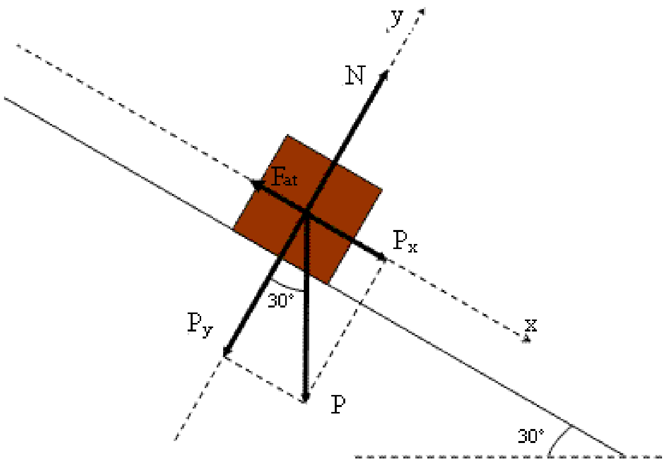
$$m.g.sen\theta = m.a$$

$$a = g.sen\theta$$

Essa é a expressão do módulo da aceleração adquirida pelo bloco que desliza sem atrito, sobre um plano inclinado de um ângulo em relação à horizontal.

Exemplo: Um corpo de massa 12 kg é abandonado sobre um plano inclinado formando 30° com a horizontal. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano é 0,2. Qual é a aceleração do bloco?

Figura 57 – Objeto em um plano inclinado



Fonte: Site Só Física

Pela figura 57, observa-se que em y:

$$F_r^y = N - P_y = 0\text{, sendo } P_y = P.cos\theta\text{, então:}$$

$$N = m.g.cos\theta$$

$$N = 12\,.10.\cos 30°$$

$$N = 104N$$

Em X:

$$F_r^x = m.a\text{, onde, } F_r^x = P_x - F_{ax}\text{, logo:}$$

$$P_x - F_{ax} = m\,.\,a$$

$$m\,.\,g.sen\theta - m\,.\,g\,.\,cos\theta.\mu = m.a$$

$$a = g.(sen\theta - \mu\,.\,cos\theta)$$

$$a = 10.(0{,}5 - 0{,}2\,.0{,}86)$$

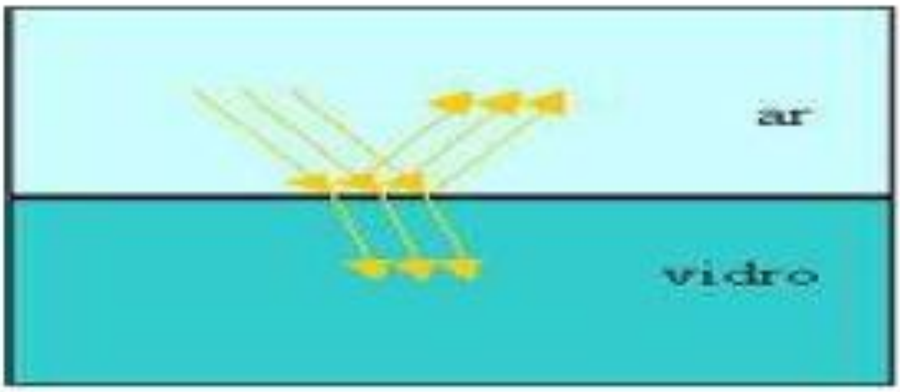
$$a = 10\,.\,0{,}326$$

$$a = 3{,}26m/s^2$$

Exemplo: Refração da Luz

A refração da luz é um feixe de luz que se propaga de um meio para o outro como mostra a figura 58:

Figura 58 – Refração da luz

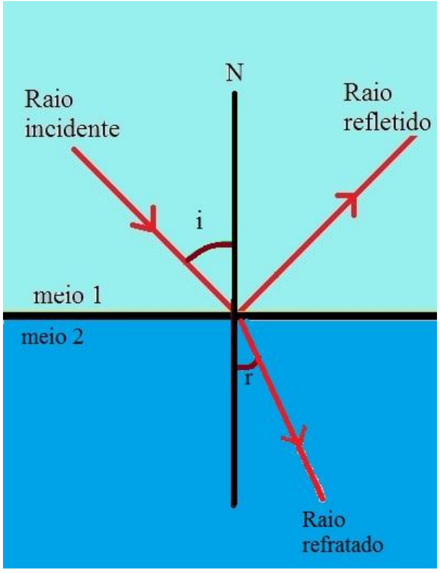


Fonte: Lima (2011)

Verifica-se por meio de experimentos que esse feixe se propaga em uma direção diferente ao incidente, ou seja, sua direção é alterada quando ela passa de um meio para outro.

Na figura 59, representa-se um raio luminoso refratando na superfície de dois meios distintos, no qual se observa a força Normal, $\vec{N}$, da superfície no ponto de incidência.

Figura 59 - Refração da Luz



Fonte: Teixeira (2011)

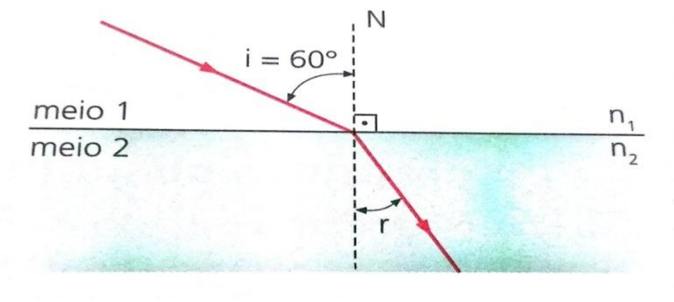
O ângulo formado pelo raio incidente e a normal é o ângulo de incidência, designado por i, o ângulo formado pela $\vec{N}$, e o raio refratado é o ângulo de refração, designado por r. Como mostra a figura 60, os ângulos de incidência e de refração, não são iguais entre si, pode-se verificar experimentalmente que aumentando $i,$ o ângulo r também aumenta na mesma proporção. Portanto existe uma relação entre estes ângulos chamada de Lei de Snell-Descartes, que diz que a luz se refrata ao passar de um meio para outro. Portanto, tem-se:

$$n_1 \, . sen \, i = \, n_2 \, . sen \, r$$

Onde n_1 e n_2 são os índices de refração dos meios.

Exemplo: A figura 60 mostra um raio de luz monocromática passando do meio 1 para o 2. O meio 1 é o ar ($n_1 = 1$) e o meio 2 tem índice de refração $n_2 = \sqrt{3}$. Determine o ângulo de refração r.

Figura 60 – Refração de um raio de luz



Fonte: Yamamotto (2013)

Na figura 60, observa-se que o ângulo de incidência é $i = 60°$. Tem-se ainda que $n_1 = 1$ e que $n_2 = \sqrt{3}$ são os índices de refração do meio 1 e do meio 2, respectivamente, e sabe-se que $sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Então, aplicando a Lei de Snell-Descartes obtém-se:

$$n_1\,.\,sen\,i = n_2\,.\,sen\,r$$

$$sen\,60°\,.1 = sen\,r\,.\,\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{sen\,r}\,.\,\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} = sen\,r\ \rightarrow r = 30°$$

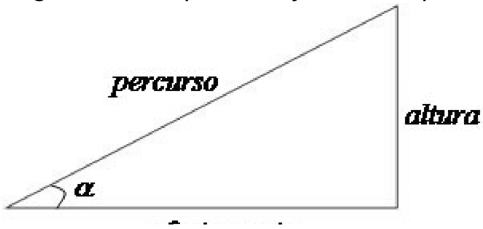
4.4. ACESSIBILIDADE.

Condições de acessibilidade a lugares e equipamentos são um direito de todo cidadão. Portanto as construções de rampas possibilitam que todas as pessoas, sejam elas deficientes ou não, possam acessar o ambiente sem maiores empecilhos. Porém é possível observar que uma rampa também pode apresentar dificuldades de acesso quanto maior for a sua inclinação. É esse o motivo pelo qual as rampas para pedestres geralmente têm inclinação menor. E por isso foi instituído, através do Decreto-lei 5296/2004 que complementa a Lei 1008/2000 e a norma ABNT NBR 9050, a inclinação que devem ter as rampas para acessibilidade.

A inclinação de uma rampa, em trigonometria, é chamada de tangente e assim, para calcular a inclinação (tangente de um ângulo) precisa-se dividir a medida da altura da rampa (h) pela medida do afastamento (a). Se o resultado encontrado for menor do que 0,0833 (8,33%) a rampa é segura e segue os padrões de acessibilidade.

Para isso, a norma ABNT NBR 9050, estabelece a seguinte fórmula:

Figura 61 - Representação da rampa



Fonte: ABNT NBR 9050

$$i = \frac{(h\,.100)}{c}$$

Onde i é a inclinação em porcentagem, h é o desnível da rampa (altura da rampa) e c é a projeção horizontal da rampa sobre o solo, ou seja, o afastamento (figura 61). A Tabela 1 da figura 62 está contida na norma NBR 9050 e fornece as dimensões que devem ser seguidas para o projeto de rampas para acessibilidade.

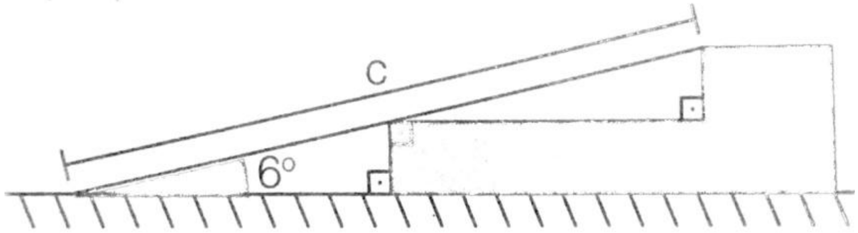
Figura 62 - Dimensionamento de rampa

Inclinação admissível em cada segmento de rampa i %	Desníveis máximos de cada segmento de rampa h m	Número máximo de segmentos de rampa
5,00 (1:20)	1,50	Sem limite
5,00 (1:20) < i ≤ 6,25 (1:16)	1,00	Sem limite
6,25 (1:16) < i ≤ 8,33 (1:12)	0,80	15

Fonte: ABNT NBR 9050

Exemplo: O acesso a um edifício é feito por uma escada de dois degraus, endo que cada um tem 16 cm de altura. Para atender portadores de necessidades especiais, foi construída uma rampa. Respeitando a legislação em vigor, a rampa deve formar, com o solo, um ângulo de 6°, conforme a figura 63. (Dados $sen\ 6° = 0{,}10$ e $\cos 6° = 0{,}99$).

Figura 63 – Rampa seguindo a legislação



Fonte: Souza (2010).

A medida c do comprimento da rampa é, em metros, igual a:

a)1,8 b)2,0 c)2,4 d)2,9 e)3,2

Pelo enunciado tem-se que a altura total de elevação vertical é de 32 cm, ou seja, 0,32 m. Como o valor de c equivale ao valor da hipotenusa do triângulo formado pelo solo e o inicio de último degrau, pode-se usar a relação de seno. Assim tem-se:

$$sen\ 6° = \frac{0,32}{c}$$

$$0,10 = \frac{0,32}{c}$$

$$c = \frac{0,32}{0,10} \rightarrow c = 3,2\ m$$

Portanto a alternativa correta é a letra *e.*

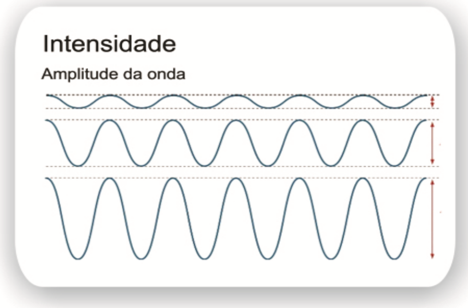
4.5. ONDAS SONORAS.

Som é o resultado de oscilações rápidas que ocorrem na natureza, ou seja, o som é gerado pela vibração de um material que exerce pressão sobre o ar, e propaga-se por esse meio em forma de ondas. E assim, as notas musicais são as variações da frequência dessas vibrações. Porém é notório que a música é um tipo de som, mas nem todo som é música.

O som é definido por três propriedades: a intensidade, a altura e o timbre. Em poucas palavras, a intensidade é a propriedade que o som tem de ser mais forte ou mais fraco; a altura é a propriedade que o som tem de ser mais grave ou mais agudo; e o timbre é a qualidade do som, ou seja, pode-se dizer que é a “cor” do som e permite reconhecer a sua origem.

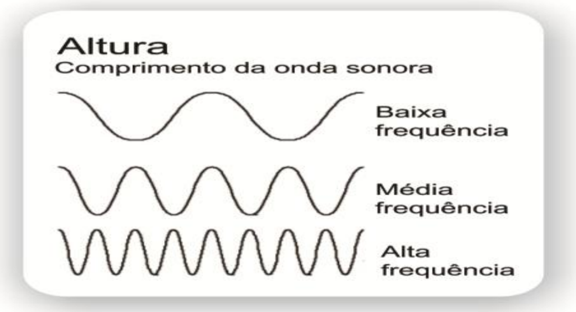
As três propriedades do som – intensidade, altura e timbre – podem ser relacionadas com o aspecto físico do comportamento de uma onda: amplitude da onda corresponde a intensidade do som como mostra afigura 64; frequência da onda corresponde a altura do som representado na figura 65 e por fim, o espectro de frequência da onda corresponde ao timbre do som conforme mostra a figura 66.

Figura 64 – Intensidade



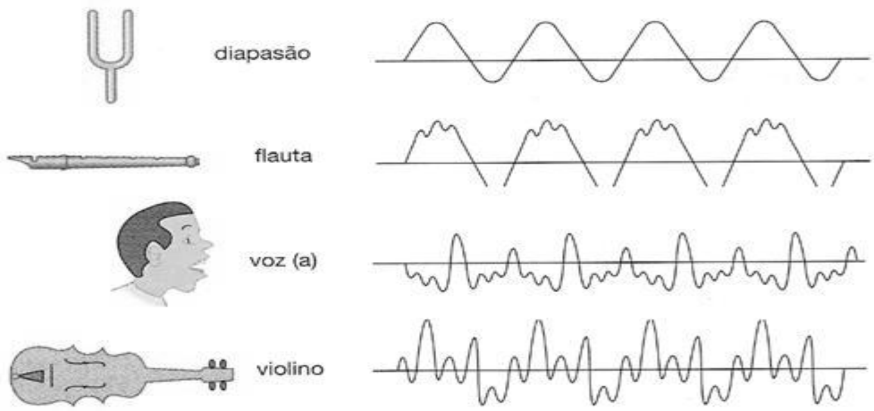
Fonte: Izecksohn (2012)

Figura 65 – Altura



Fonte: Izecksohn (2012)

Figura 66 - Espectro de frequência



Fonte: Barros (2012)

O conceito matemático aparece quando relaciona uma onda sonora a funções que apresentam uma característica periódica. As notas ditas puras, ou seja, notas que não apresentam superposição de outros sons são representadas por ondas do tipo senoidal. Esse tipo de onda tem como fórmula a seguinte representação: $y = a\,.sen\,(bx + c)$

Onde, no caso do som, tem-se:

- "y " refere-se à variação de pressão a cada momento, com relação à pressão normal do ambiente, sem vibração.
- "a" é a amplitude máxima da onda.
- "$b = 2.\pi.f$", onde "f" é a frequência. Desta forma o modelo pode ser reescrito como:

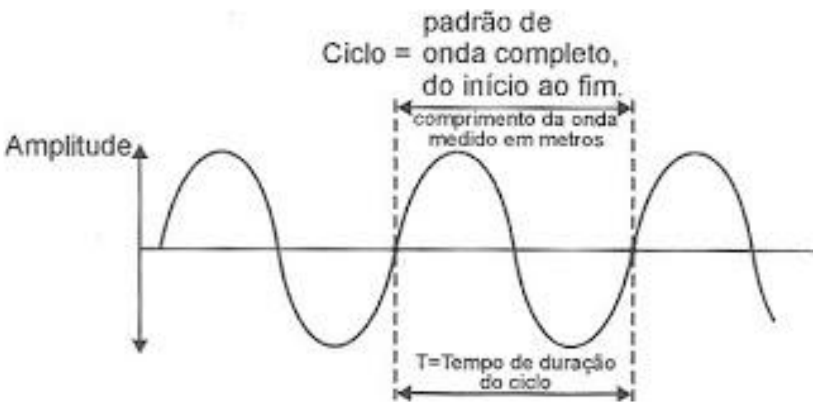
$$y = a.sen(2.\pi.f\ .x + c)$$

$$y = a.sen\left[\left(\frac{2\pi}{P}\right).x + c\right]$$

Com f de frequência e P de período, pois $f = \frac{1}{P}$.

- "x" representa o tempo
- "c" representa a fase. Considerando como fase o momento em que se inicia a curva senoide.

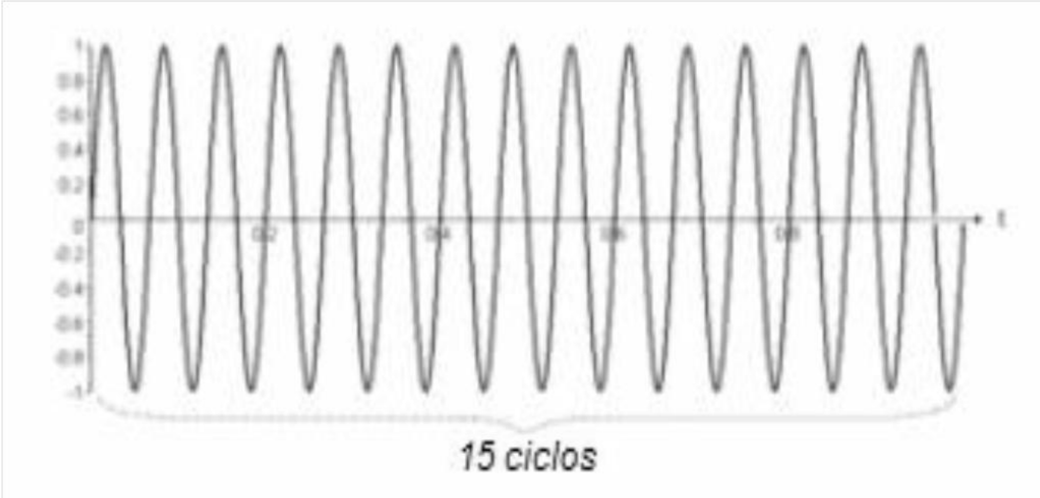
Figura 67 - Onda senoidal



Fonte: Fernandes (2012)

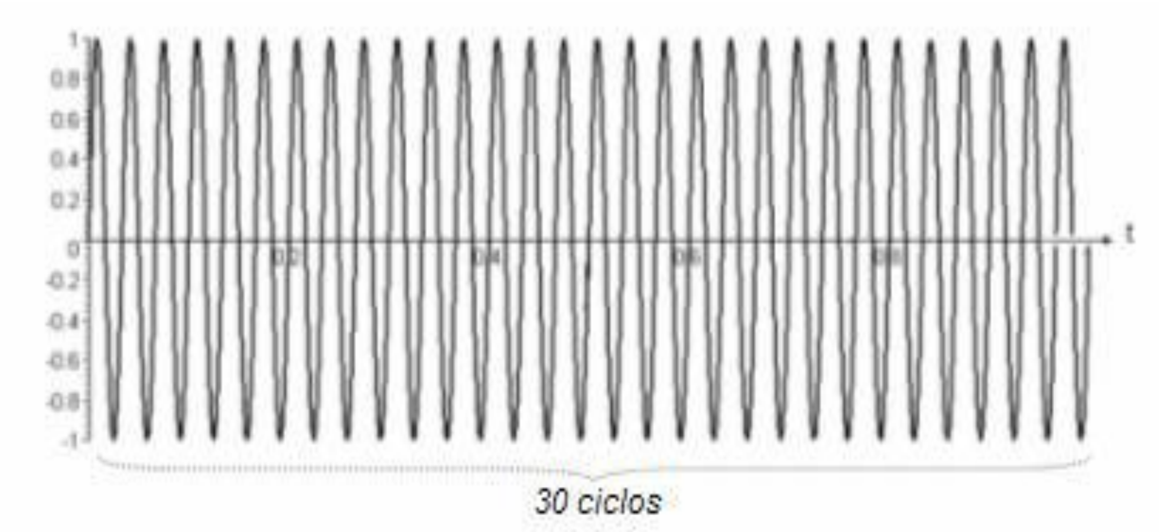
É possível fazer algumas comparações. Por exemplo, ao analisar as funções: $y = sen\ 30\ \pi t$ e $y = sen\ 60\ \pi\ t$ apresentadas nas figuras 68 e 69.

Figura 68 – Função $y = sen\ 30\ \pi t$



Fonte: Universidade Federal de Ouro Preto (2006)

Figura 69 – Função $y = sen\ 60\ \pi t$

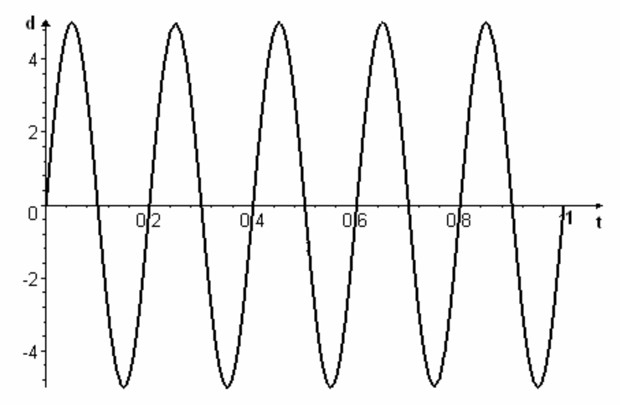


Fonte: Universidade Federal de Ouro Preto (2006).

Concluí-se que a segunda tem o dobro das vibrações da primeira. Logo o som obtido pela segunda soa uma oitava acima. Portanto, quanto maior o número de vibrações, mais agudo é o som.

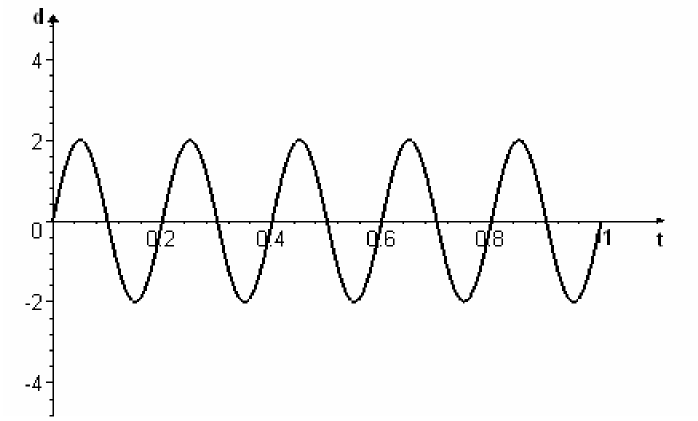
Também pode-se comparar a amplitude, uma vez que quanto maior a amplitude, mais forte é o som. Por exemplo, uma função definida por $y = 5.sen\ 10\pi t$ representa um som mais forte do que o som representado pela função $y = 2\ sen\ 10\pi t$ porque a amplitude da primeira vale 5 e a segunda vale 2 como mostram as figuras 70 e 71.

Figura 70 – Amplitude de $y = 5\,.sen\;10\pi t$



Fonte: Universidade Federal de Ouro Preto (2006)

Figura 71 – Amplitude de $y = 2\,.sen\;10\pi t$



Fonte: Universidade Federal de Ouro Preto (2006)

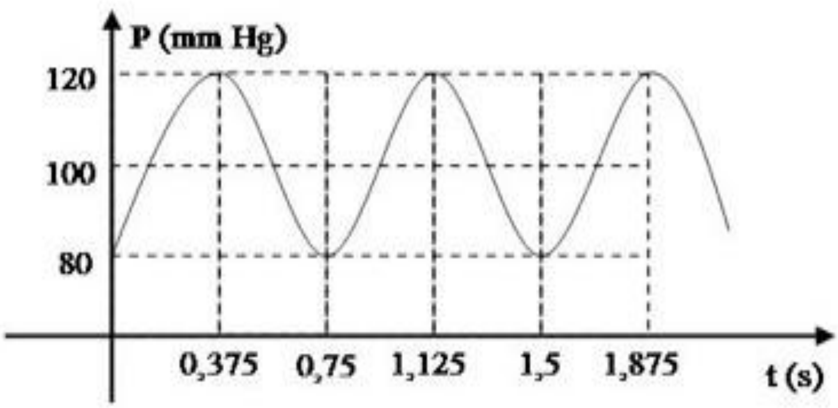
4.6. MEDICINA.

Na medicina a trigonometria é apresentada no monitoramento da frequência cardíaca, ou seja, no número de batimentos cardíacos em um período de tempo, usualmente designado por bpm (batimentos cardíacos por minuto). A partir do monitoramento, é possível medir a pressão sanguínea ou arterial de uma pessoa.

Essa medida da pressão sanguínea é dada por dois valores: a pressão sistólica, que é o valor máximo atingido quando o coração se contrai e bombeia o sangue, e a pressão diastólica, que é o valor mínimo atingido quando o coração está em repouso, ambas em um intervalo de tempo de um batimento cardíaco. Normalmente, a pressão é representada da seguinte maneira: 120/80 mm Hg, onde o primeiro valor é a pressão sistólica e o segundo valor é a pressão diastólica.

A variação da pressão sanguínea (em mm Hg) de uma pessoa, em função do tempo (em s), é uma função trigonométrica (cíclica ou periódica) cuja lei é dada por: $P(t) = 100 - 20.\cos\left(\frac{8\pi}{3}\,t\right)$. Onde o valor do argumento $\left(\frac{8\pi}{3}\,t\right)$ é dado em radianos.

Figura 72 - Representação dos batimentos cardíacos de uma pessoa



Fonte: Silva (2009)

No gráfico da figura 72 observa-se que o intervalo de tempo de um batimento cardíaco dessa pessoa é 0,75 s, que corresponde a um ciclo completo, ou seja, o período dessa função ($\frac{3}{4}\,rad.$).

Esta pessoa possui a frequência cardíaca igual a 80 bpm (60 s: 0,75 s). A pressão arterial desse indivíduo é 120 mm Hg por 80 mm de Hg (12 por 8, como é conhecida popularmente).

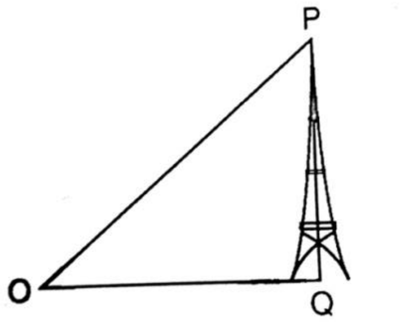
4.7. OUTRAS APLICAÇÕES.

Nesta subseção apresentam-se algumas situações de medidas inalcançáveis ou cálculo de ângulos os quais podem ser obtidos a partir de conceitos e relações trigonométricas. Esses são exemplos que aparecem com mais frequência nas atividades escolares.

4.7.1. MEDIDAS INALCANÇÁVEIS – ALTURA DE UMA TORRE.

Exemplo: Em um ponto distante 168 metros do pé de uma torre de igreja, o ângulo de elevação da parte superior da torre é de 38°15’ em PÔQ conforme a figura 73. Calcule a altura PQ da torre.

Figura 73 – Altura de uma torre



Fonte: Abbot (2003)

Na figura 73, tem-se que PQ é a altura da torre e é perpendicular ao terreno, logo define um triângulo retângulo em Q. Ainda de acordo com o enunciado o ângulo de elevação é 38°15’ que é igual a 38,25°. Portanto aplicando a relação da tangente tem-se:

$$\tan 38{,}25° = \frac{PQ}{OQ}$$

$$PQ = OQ \,.\, \tan 38{,}25°$$

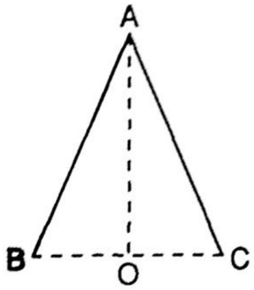
$$PQ = 168 \,.\, 0{,}7883364$$

$$PQ = 132{,}44052 \;\therefore PQ \cong 132\ m$$

4.7.2. MEDIDAS DE ÂNGULOS EM OBJETOS.

Exemplo: O comprimento de cada perna de uma escada de mão é de 2,5m. Quando aberta apresenta uma distância entre os pés de 2m. Qual é o ângulo entre as duas pernas?

Figura 74 – Medida do ângulo de abertura de uma escada



Fonte: Abbot (2003)

Conforme a figura 74 e também o enunciado, tem-se que o triângulo ABC é isósceles, pois $AB = AC = 2{,}5m$ e que $BC = 2m$. Portanto traçando AO perpendicular a base BC e bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ obtém-se: $BO = OC = 1m$.

Então no triângulo ABO, fica: $sen\, B\hat{A}O = \frac{BO}{BA} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$.

Assim: $arc\ sen\ (0{,}4) = 23{,}58°$

Então, se $B\hat{A}O = 23{,}58°$ logo: $B\hat{A}C = 2.23{,}58° = 47{,}16°$

Portanto é possível ver que o uso da trigonometria, seja com suas ideias e fundamentos ou como ferramenta para cálculos, está presente em muitas áreas. Algumas delas ligadas diretamente às pessoas como é o caso dos batimentos cardíacos. Outras tão importantes que influenciam até na questão de locomoção ou acessibilidade. Enfim, aqui foram apresentados apenas alguns exemplos, mas é possível se alongar em uma pesquisa referente às aplicações da trigonometria em outras situações.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

A trigonometria é considerada pelos alunos, em muitos casos, como um conceito matemático difícil, algo longe do entendimento deles e que são poucas as exceções de quem a compreende.

Alguns alunos vêm esta área da matemática como algo fechado em si e se assustam em apenas ouvir as palavras seno, cosseno e tangente. Entretanto, este trabalho mostra que umas das consequências disso pode ser uma questão de abordagem, ou seja, é possível desmistificar essa visão ao interligar tanto a história da trigonometria bem como suas aplicações com os conceitos apresentados, tornando as aulas muito mais prazerosas, desenvolvendo no aluno um gosto pela matéria de matemática.

Sendo assim, este trabalho busca oferecer orientações para o professor, servindo como um material de apoio para que o mesmo não se limite apenas ao livro didático. Caberá ao professor lançar mão de sua capacidade de aprender e também de planejar para sanar certas defasagens referentes a esse conceito para que então possa ensinar. É exatamente isso que define as Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná (PARANÁ, pág. 48, 2008):

> "A efetivação desta proposta requer um professor interessado em desenvolver-se intelectual e profissionalmente e em refletir sobre sua prática para tornar-se um educador matemático e um pesquisador em contínua formação."

Já na parte dos conceitos trigonométricos propriamente ditos, todos foram embasados, buscando uma exposição clara. Assim como as demonstrações foram pensadas em uma forma diferente de mostrar determinado resultado ou, então, que instigasse o leitor a ter a curiosidade em obter a prova. Pois é desta forma que acreditamos que é possível ensinar significativamente.

De forma geral, foi possível entender que todo o conhecimento que se apresenta hoje e que é ensinado aos alunos no final do Ensino Fundamental e no decorrer do Ensino Médio foi desenvolvido por muitas pessoas ao longo de muitos anos e, além disso, de perceber que cada conceito surgiu da necessidade do homem no dia a dia. E é com esse objetivo que ele deve ser discutido, demonstrando que a trigonometria está em uso em muitas áreas e não apenas nas escolas e nas aulas de matemática. Ela é uma ferramenta muito útil para atingir valores inalcançáveis como alturas de torres, larguras de rios, ou mesmo para ter clareza de alguns acontecimentos como é o caso dos eclipses, das ondas sonoras, e até de batimentos cardíacos.

REFERÊNCIAS

ABBOT, Paul, NEILL, Hugh. Teach **Yourself Trigonometry**. Ed. Mcgraw Hill. 2003.

AGUILAR, Eugenio Manuel Fernández. Ciência em El XXI - **Ternas pitagóricas II: Plimpton.** 2012. Disponível em: <http://www.cienciaxxi.com/2009/02/ternas-pitagoricas-ii-plimpton-322.htm>l. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

BARROS, Adriana. **Arte Sempre: Compreendendo a música**. Disponível em: <http://adriartessempre.blogspot.com.br/p/compreendendo-musica.html>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando. **A Matemática através Dos Tempos: Um guia fácil e prático para professores e entusiastas.**Tradução Elza F. Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BORTOLI, Gladis. **Um Olhar Histórico nas Aulas de Trigonometria: Possibilidades de uma Prática Pedagógica Investigativa.** Lajeado, 2012. Disponível em: <www.univates.br/bdu/bitstream/10737/281/1/GladisBortoli.pdf>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, Editora Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Associação Brasileira de Normas Técnicas. Norma 9050**. De 30 de junho de 2004. Disponível em: <HTTP://www.pessoacomdeficiencia.gov.br/app/sites/default/files/arquivos/%5Bfield_generico_imagens-filefielddescription%5D_24.pdf>. Acesso em: 14 de janeiro de 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 2000.

BRETTE, Jean. **Imagens des Mathématiques – Promenade mathématique em Mésopotamie**. 2013. Disponível em: <http://images.math.cnrs.fr/Promenade-mathematique-en.html>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

CAMPAGNER, Carlos Alberto. Uol Educação **– Seno e cosseno: Representação no ciclo trigonométrico.** 2006. Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/disciplinas/ matematica/seno-e-cosseno-representacao-no-circulo-trigonometrico.htm>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

COSTA, Alexandre. et. al. **Vida das Estrelas**. Publicaciones de NASE. Disponível em: <http://sac.csic.es/astrosecundaria/pt/cursos/formato/materiales/talleres/T6_pt.pdf>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

COSTA, Nielce M. Lobo. **A História da Trigonometria**. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pd>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

_____. **Determinação de Distâncias Astronômicas**. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/dist/>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

FERNANDES, Filipe. **Transmissão de sinais analógicos e digitais**. 2012. Disponível em: < http://fmfernandes.blogspot.com.br/>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**, tradução: Higino H.Domingues. 3. reimpressão. Campinas. Ed. da UNICAMP: 2008.

GASPAR, José. Projeto Educacional II - 2013: **Matemática no Planeta Terra – Matemática no Antigo Egito.** Disponível em: < http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/Antigoegito2%20.htm>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem, 1: Versão Progressões.** São Paulo: FTD. 2000.

GUELLI, Oscar. **Dando Corta na Trigonometria.** Coleção Contando a História da Matemática. V. 6. 3. ed. São Paulo: Ática, 1995.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar: Trigonometria.** V. 3. 2.ed. São Paulo: Atual, 1978.

IZECKSOHN, Sergio. **Um carrocel de parâmetros.** Blog Home Studio. Disponível em: <http://homestudio.com.br/blog/index.php/um-carrossel-de-parametros/>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

LIMA, Alison Hikaru Watanabe. REIS, Derisnei Mendes. SANTIAGO, Rodrigo. **Apicações trigonométricas na física.** 2011. Disponível em: <http://anaismic.concordia.ifc.edu.br/trabalhos/2011/MIC132_Aplica%C3%A7%C3%B5es_trigonom%C3%A9tricas_na_F%C3%ADsica.pdf>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio** – 1. 10. ed. Rio de Janeiro. SBM 2012.

LIMA, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas elementares.** 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LUCCA, Guilherme. **Parafísica – V. do chão para o céu – O relógio solar e as estações do ano.** 2009. Disponível em: <http://para-fisica.blogspot.com.br/>. Acesso em: 14 de janeiro de 2016.

MAOR, Eli. **Trigonometric Delights.** Princeton University Press. Princeton, New Jersey. 1998.

MASCARENHAS, Rebeca. Profº Xavier. **Geocentrismo e Heliocentrismo.** Disponível em: < http://slideplayer.com.br/slide/1755346/>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

PARANÁ. Programa de desenvolvimento educacional – SEEP. **Funções trigonométricas e sons musicais.** 2008. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/113-4.pdf>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

PCNEM. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. **Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.** Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/ ciencian.pdf >. Acesso em: 14 de janeiro de 2016.

QUILLES, Anderson L. G. BITTO, Claudio H. TOFFOLI, Sonia F. L. SODRÉ, Ulysses. **Trigonometria.** Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/ matematica/trigonom/trigo01.htm>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

SILVA, Domiciano Correa Marques. **Mundo Educação – Plano Inclinado.** Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/plano-inclinado.htm>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

SILVA. Elza. **Conceitos trigonométricos.** 2009. Disponível em: http://www.epps.edu.pt/bloco-de-notas/46-gerais/149-conceitos-trigonometricos>. Acesso em 14 de janeiro de 2014.

SILVA, Marcos Noé Pedro. **Circunferência trigonométrica**; *Brasil Escola*. 2013 Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/circunferencia-trigonometrica.htm>. Acesso em 15 de janeiro de 2016.

SOUSA, Rainer. **História do Mundo - A grande pirâmide de Gizé.** 2013. Disponível em: <http://historiadomundo.uol.com.br/egipcia/a-grande-piramide-de-gize.htm>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

___________, Só física – **Plano Inclinado.** Disponível em: <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Dinamica/pi.php>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

SOUZA, Joamir. **Novo olhar – Matemática.** V. 1 – Progressões. FTD. 2010.

TEIXEIRA, Mariane Mendes. **Mundo Educação: Reflexão total da luz.** Disponível em:< http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/reflexao-total-luz.htm>. Acesso em: 14 de janeiro de 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO. Projeto Rived. **Matemática. Funções trigonométricas. Conceitos Fundamentais: O círculo trigonométrico.**

2006-2007. Disponível em:< http://rived.mec.gov.br/ atividades/matematica/ mundo _trigonometria/teoria/circulo.html>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

VEIGA, Luis A. R. ZANETTE, Maria A. Z. FAGGION, Pedro l. **Fundamentos de Topografia.** 2012. Disponível em:<http://www.cartografia. ufpr.br/ docs/ topo2/ apos_topo.pdf>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

WIKIPÉDIA. **Trigonometria Esférica.** Disponível em: <https://pt. wikipedia. org/ wiki/ Trigonometria_esf%C3%A9rica>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

WIKIPÉDIA. **Bartholomeu Pitiscus.** Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/ Bartholomaeus_Pitiscus>. Acesso em 14 de janeiro de 2016.

YAMAMOTO, Kazuhito. FUKE, Luiz Felipe. **Física para o Ensino Médio.** V. 1, 3. ed. São Paulo, 2013.