UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

Análise em $\mathbb{R}^2$ e um Problema de Probabilidade

por Wedson Alexandre Rocha Geremias

Orientadora: Profa. Dra. Marcela Silva
Coorientador: Prof. Dr. Laerte Bemm

Maringá - PR
2016

WEDSON ALEXANDRE ROCHA GEREMIAS

Análise em $\mathbb{R}^2$ e um Problema de Probabilidade

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marcela Silva
Coorientador: Prof. Dr. Laerte Bemm

Maringá - PR

2016

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por sempre estarem ao meu lado, por me ensinarem a lutar por aquilo que acredito e por me encorajarem a estudar desde muito cedo.

Ao meu Senhor Jesus Cristo, que me ensina todos os dias a buscar uma vida em abundância e me capacita a ser alguém melhor.

A minha esposa Francielle P. G. Geremias pelo seu exemplo e dedicação, por acreditar no meu potencial e permanecer ao meu lado nos momentos mais difíceis.

Ao Grupo de Oração Renascer, que há muitos anos tem sido a face de Deus nos meus dias sombrios, me dando suporte para tudo.

Ao Colégio Nobel, diretores, colaboradores e professores que nesses últimos quatro anos me ensinaram que devemos estudar sempre e que sempre podemos ser melhores do que já fomos um dia.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática de UEM, por terem me ensinado e motivado a ser um pesquisador e me inspirarem a progredir no meio científico. Em especial, agradeço aos professores Dra. Marcela Silva e Dr. Laerte Bemm por me darem todo o suporte e me mostrarem todas as ferramentas para que esse trabalho se concredizasse, por não medirem esforços em me orientar e entenderem minhas limitações.

Por fim, aos meus amigos e colegas do mestrado, por serem presentes nesses dois anos sempre com palavras encorajadoras e por transformarem momentos difíceis em alegria.

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo resolver um problema de probabilidade através de aplicações, ora em $\mathbb{R}^2$, ora em $\mathbb{R}$. No primeiro capítulo faremos um estudo sobre a Topologia do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$, que servirá como base para entendermos a estrutura do $\mathbb{R}^n$ e, também, nos dará base para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Na sequência, faremos um estudo sobre alguns conceitos fundamentais de probabilidade e veremos através de exemplos como aplicá-los. Por fim, com todos esses conhecimentos adquiridos, estudaremos diferentes soluções para o problema: Dada uma probabilidade de transição constante, existe um Equilíbrio Natural? Através de composição de funções e pelo desenvolvimento do "Teorema do Ponto Fixo para Contrações", podemos encontrar este Equilíbrio Natural a partir de uma simples intersecção entre retas.

Abstract

This work aims to solve a probability problem using applications sometimes in $\mathbb{R}^2$ and sometimes in $\mathbb{R}$. In the first chapter we will make a study of the Euclidean space topology $\mathbb{R}^2$, which will serve as a basis to understand the structure of $\mathbb{R}^n$ and will also give us basis for the development of the following chapters. After that, we will make a study of some fundamental concepts of probability and we will see with examples how to apply them. Finally, with all this knowledge acquired, we will study different solutions to the problem: in a given a probability of constant transition will exists a natural balance? Throught a composition of functions and the development of "Fixed Point Theorem for Contractive Mappings", we will be able to find this natural balance from a simple intersection between lines.

Sumário

Introdução

A Probabilidade é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios (veja [2]).

Além disso, a Teoria das Probabilidades é um segmento do Tratamento da informação que vem ganhando espaço na educação desde que foi adicionado no conteúdo escolar pelos Parâmetros Curriculares Nacionais [4] – PCN do Ensino Fundamental (Brasil, 1997 e 1998).

Um dos objetivos da Teoria das Probabilidades, sugerido pelos PCN, é trabalhar com a ideia de probabilidade de forma que o aluno perceba organização de fenômenos da natureza e da vida cotidiana, que aparentemente possuam um caráter aleatório.

Diante desse contexto, pretendemos enfatizar que o estudo da probabilidade facilita a análise de índices de custo de vida, realização de sondagens e tomar decisões em várias situações do cotidiano.

Neste trabalho, estudaremos métodos para resolver problemas envolvendo probabilidades de transição constantes com o objetivo de encontrarmos um equilíbrio natural. Para este fim, transformaremos um problema de convergência em $\mathbb{R}^2$ em um simples problema analítico envolvendo intertersecção entre duas retas. Assim sendo, veremos que o ponto de intersecção entre estas retas corresponde ao resultado do limite.

Mesmo que não consigamos fazer toda a demonstração para um aluno do Ensimo Médio, por se tratar de conceitos de nível superior, com esse trabalho, possibilitamos que o aluno calcule o equilíbrio natural a partir do momento em que transformamos um problema de funções em $\mathbb{R}^2$, em um problema de função real. Nesse sentido, percebemos mais precisamente, que um problema complexo se resume a um problema de geometria euclidiana de intersecção de duas retas, o que é facilmente trabalhado no Ensino Médio.

No primeiro capítulo, traremos um estudo minucioso sobre Topologia do Espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, definiremos alguns conceitos e demonstraremos alguns teoremas que nos darão suporte para entendermos os problemas do capítulo 3. No segundo capítulo, iremos descrever a probabilidade de uma maneira geral, veremos como utilizá-la em problemas variados e em quais situações cada tipo de método é aplicado.

Por fim, no terceiro capítulo, trabalharemos com probabilidades como o de mutações genéticas ocorridas numa colônia de vírus de dois tipos em que um tipo se transforma no outro a uma certa taxa com o passar do tempo. Para simplificar, vamos reformular o problema em termos de “bebedores de vinho”. Tomaremos uma cidade com população N e assumiremos que cada pessoa fará a opção inicial por apenas um tipo de vinho entre os possíveis A e B, de forma que a cada mês haja a opção de continuar a beber o mesmo vinho ou de mudar para o outro. Vamos analisar a proporção daqueles que permanecem na mesma bebida e aqueles que mudam de opção, a essa proporção daremos o nome de probabilidade de transição. Estamos interessados apenas nos casos em que a probabilidade de transição seja constante, ou seja, a taxa de fidelidade e de infidelidade por uma marca não se altera de um mês para outro. Assim, desenvolveremos uma sequência em $\mathbb{R}^2$, que são as porcentagens dos “bebedores”ao longo dos meses, e a partir disso perguntamos: Essa sequência é convergente? Se for, ela depende das proporções iniciais de A e B? Se a resposta for sim para ambas as perguntas, consideraremos o mercado com equilíbrio natural. No entanto, faremos uma composição de funções, uma função T definida em $\mathbb{R}$, de forma que encontrar a convergencia em $\mathbb{R}^2$ seja o mesmo que encontrar a convergência em $\mathbb{R}$, no caso, isso será demonstrado a partir do Teorema do Ponto Fixo para Contrações (veja [6]). Mais ainda, esta convergência ocorrerá quando a função T, que é uma reta, interceptar a função identidade. Reduzindo assim um problema de sequência em $\mathbb{R}^2$ para uma simples intersecção entre retas em $\mathbb{R}$.

Para melhor compreensão desse trabalho, esperamos que o leitor tenha um domínio dos conceitos básicos de Álgebra Linear, como: espaço vetorial; combinação linear; base; transformação linear; entre outros. Para tanto, recomendamos alguns autores como

Boldrini [1] e Steinbruch [11].

Capítulo 1

Topologia do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$

"[...] É muito util considerar números "complexos", ou números formados por várias unidades [...]" (Peano, 1888a, Math. Ann., vol. 32, p.450, apud [6, Hairer-Wanner])

Os números "complexos" aos quais Peano se refere são o que hoje conhecemos por vetores (nomenclatura sugerida por Hamilton (1853)). Sua importância matemática é enorme e seu estudo deslanchou em meados do século 19, quando matemáticos tiveram a ideia de denotar pares de números (ou n-uplas) por apenas uma letra, por exemplo $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, e considerar os mesmos como novos objetos matemáticos (veja [3], p. 42).

Para a compreensão desse trabalho, precisaremos de alguns recursos de Análise em $\mathbb{R}^2$. Neste sentido, traremos um estudo completo sobre Topologia do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$. Precisaremos de cada ítem desenvolvido nesse capítulo? Não, mas acreditamos que esse material também sirva de base ao acadêmico que pretende estudar Análise em R^n.

1.1 O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^2$

Temos a noção comum de vetores como objetos com tamanho, direção e sentido, juntamente com as operações de adição e multiplicação por números reais forma a ideia básica de um espaço vetorial. Deste ponto de partida então, para definirmos um espaço vetorial, precisamos de um conjunto, uma operação de adição de elementos deste conjunto, e uma operação de multiplicação de escalares (números reais) por elementos deste conjunto.

Definição 1.1 (Espaço Eucliciano Bi-Dimensional) *O espaço euclidiano bi-dimensional é o produto cartesiano de dois fatores iguais de* $\mathbb{R}$*, ou seja,*

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Temos que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é o conjunto de números reais e pode ser representado geometricamente por uma reta real. O espaço $\mathbb{R}^2$ é um plano, ou seja, o conjunto dos pares ordenados $x = (a, b)$, definido por

$$\mathbb{R}^2 = \{x = (a, b); a, b \in \mathbb{R}\}. \tag{1.2}$$

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$ tais que $x = (a_1, b_1)$, $y = (a_2, b_2)$. Em $\mathbb{R}^2$ definimos duas operações, a **adição** representaada por $+$ e o **produto por escalar** denotado por $\cdot$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 : &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto x + y = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \\ \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \cdot x = (\alpha a_1, \alpha b_1). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Estas operações fazem de $\mathbb{R}^2$ um **espaço vetorial de dimensão** 2 sobre o corpo dos reais, no qual o **elemento neutro** para a adição é o vetor $0 = (0, 0)$ e o **elemento simétrico** de $x = (a, b)$ é $-x = (-a, -b)$, pois

$$\begin{gathered} 0 + x = (0, 0) + (a, b) = (a + 0, b + 0) = (a, b), \\ x + (-x) = (a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Os elementos de $\mathbb{R}^2$ serão chamados de **pontos** ou **vetores**.

Geometricamente, considerar um elemento $x \in \mathbb{R}^2$ como vetor significa relacionar o ponto x com o segmento de reta com origem no ponto $(0,0)$ e extremidade em x.

No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, destaca-se a **base canônica** ou **base natural**, $\{e_1, e_2\}$, formada pelos vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$, que possuem uma coordenada igual a 1 e outra nula.

Observamos que, dado $x = (a,b)$ em $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$x = (a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = a \cdot e_1 + b \cdot e_2. \tag{1.5}$$

A base canônica do espaço euclidiano permite estabelecer uma bijeção natural entre o conjunto $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ das aplicações (ou transformações) lineares $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e o conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais (c_{ij}) com 2 linhas e 2 colunas,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) &\longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \mathfrak{T}(A) = [A], \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde a matriz $[A] = (c_{ij})$ corresponde a transformação linear A.

De fato, se $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, então

$$\begin{gathered} A(e_1) = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 \\ e \\ A(e_2) = c_{21}e_1 + c_{22}e_2. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Desta forma, associamos a A a matriz $[A] = (c_{ij})$ $1 \leq i, j \leq 2$, através da função.

1.2 Produto Interno e Norma

Em matemática, chamamos de produto interno uma função de dois vetores que satisfaz determinados axiomas. O produto escalar, comumente usado na geometria euclidiana, é um caso especial de produto interno. Já em física, em particular em aplicações da Teoria da Relatividade, o produto interno tem propriedades um pouco diferentes.

Norma é um termo que vem do latim e significa "esquadro". Norma é aquilo que regula procedimentos ou atos; regra, princípio, padrão, lei. Portanto, quando matematicamente falamos em Norma, estamos querendo estabelecer um "padrão"para calcular distâncias. Veremos que ela pode ser definida a partir de diversos parâmetros.

Definição 1.2 (Produto Interno) *Um produto interno num espaço vetorial real E é uma função que faz corresponder cada par de vetores $x, y \in E$ a um número real, indicado por $\langle x, y\rangle$. Isto é,*

$$\begin{array}{rcl} \langle\ ,\ \rangle : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle. \end{array} \tag{1.8}$$

Satisfazendo, para quaisquer $x, x', y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$*;*

(ii) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$*;*

(iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle$*;*

(iv) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle > 0$.

O produto interno é uma função real, simétrica por (i), bilinear por (ii) e (iii) e positiva por (iv) (**Para maiores detalhes, veja [10]**).

Exemplo 1.3 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$ tais que $x = (a_1, b_1)$, $y = (a_2, b_2)$. O* **produto interno canônico** *do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, é definido por*

$$\langle x, y\rangle = \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2)\rangle = a_1a_2 + b_1b_2. \tag{1.9}$$

Uma maneira útil de se definir um produto interno em $\mathbb{R}^2$ é a seguinte: toma-se uma matriz real $[A] = (c_{ij})$, em $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, simétrica, positiva e para qualquer $x = (a_1, b_1)$, $y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ define-se

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= [x]^t[A][y] \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1c_{11}+b_1c_{21} & a_1c_{12}+b_1c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_2(a_1c_{11}+b_1c_{21})+b_2(a_1c_{12}+b_1c_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_2c_{11}+a_2b_1c_{21}+a_1b_2c_{12}+b_1b_2c_{22} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

Note que, se tomarmos $[A]$ como sendo a matriz identidade $[I]$, então o produto interno definido acima coincidirá com o produto interno canônico, pois

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= [x]^t[I][y] \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 2 \\ b_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Dado $x \in \mathbb{R}^2$, escrevemos $|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, ou seja,

$$
|x| = \sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}. \tag{1.12}
$$

Tem-se $|x|^2 = \langle x,x\rangle$, de modo que $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

O número $|x|$ chama-se **norma euclidiana** ou o **comprimento** do vetor $x \in \mathbb{R}^2$.

Definição 1.4 *Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^2$ dizem-se* **ortogonais** *quando $\langle x,y\rangle = 0$. Evidentemente, $(0,0)$ é ortogonal a todos os vetores de $\mathbb{R}^2$. Também, e_i é ortogonal a e_j se $i \neq j$, para $i = 1,2$.*

Exemplo 1.5 *Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, com $y \neq 0$, e pondo-se $\alpha = \langle x,y\rangle/|y|^2$ o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y.*

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\langle z, y\rangle &= \langle x - \alpha y, y\rangle \\
&= \langle x, y\rangle - \langle \alpha y, y\rangle \\
&= \langle x, y\rangle - \alpha\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, y\rangle - \alpha|y|^2 \\
&= \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Teorema 1.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Se* $x, y \in \mathbb{R}^2$, *então* $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$. *Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores* x, y *é um múltiplo escalar do outro.*

Demonstração: Se $y = 0$ a desiqualdade é trivial. Se $y \neq 0$, considere $\alpha = \langle x, y\rangle / |y|^2$. Como acabamos de ver, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y. Assim,

$$\begin{aligned}
|x|^2 = \quad & \langle z + \alpha y, z + \alpha y\rangle \\
= \quad & \langle z, z + \alpha y\rangle + \langle \alpha y, z + \alpha y\rangle \\
= \quad & \langle z, z\rangle + \langle z, \alpha y\rangle + \langle \alpha y, z\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle \\
= \quad & |z|^2 + \alpha\langle z, y\rangle + \langle z, \alpha y\rangle + \alpha\langle y, \alpha y\rangle \\
= \quad & |z|^2 + \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + \alpha^2\langle y, y\rangle \\
= \quad & |z|^2 + \alpha^2|y|^2 \\
= \quad & |z|^2 + \left(\frac{\langle x, y\rangle}{|y|^2}\right)^2 \\
= \quad & |z|^2 + \frac{\langle x, y\rangle^2}{|y|^2},
\end{aligned} \tag{1.14}$$

donde $|x|^2 \geq \dfrac{\langle x, y\rangle^2}{|y|^2}$. Logo, $|x|^2|y|^2 \geq \langle x, y\rangle^2$ e consequentemente, $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$.

Vale a igualdade se, e somente se, $z = 0$ em 1.15, ou seja, $x = \alpha y$. □

A norma euclidiana goza das seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$N1$. $|x + y| \leq |x| + |y|$;

$N2$. $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |y|$, $|\alpha|$ significa o valor absoluto de α;

$N3.$ $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0.$

As duas últimas propriedades são evidentes e a primeira decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Com efeito:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle \\ &= |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x,y\rangle \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \\ &= (|x|+|y|)^2 . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Definição 1.7 (Norma) *Uma norma num espaço vetorial E é toda função $|\ \ | : E \to \mathbb{R}$, que cumpra as condições $N1$, $N2$ e $N3$ mencionadas acima.*

Há uma infinadade de normas que podemos considerar no espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ (veja [6] p. 6).

A norma euclidiana é motivada pela fórmula do comprimento de um vetor no plano em coordenadas cartesianas, que se obtém através do Teorema de Pitágoras. Para noções geométricas, ela é a mais natural. Quando não dissermos explicitamente qual a norma que estamos considerando em $\mathbb{R}^2$, fica subentendido que se trata da euclidiana. Por outro lado, há duas normas que são de manipulação formal mais simples, as quais poderemos utilizar em $\mathbb{R}^2$, quando houver conveniência. Elas são:

Norma do Máximo

$$|x|_M = max\{|a_1|, |b_1|\}. \tag{1.16}$$

Norma da Soma

$$|x|_S = |a_1| + |b_1|. \tag{1.17}$$

Podemos verificar de maneira simples que, para todos $x \in \mathbb{R}^2$ vale

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq 2|x|_M. \tag{1.18}$$

Exemplo 1.8 *Tomemos um ponto $x \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas $(3,4)$. Assim, temos que $|x|_M = 4$, $|x| = 5, |x|_S = 7$ e $2|x|_M = 2 \cdot 4 = 8$.*

Definição 1.9 (Distância) *Através da norma de um espaço vetorial E, podemos definir o conceito de distância. A saber, dados $x, y \in E$, a distância de x e y é definida por*

$$d(x, y) = |x - y|. \tag{1.19}$$

As condições $N1$, $N2$ e $N3$, que a norma satisfaz, implicam imediatamente que a distância tem as propriedades:

$N1'$. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

$N2'$. $d(x, y) = d(y, x)$;

$N3'$. $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0, \quad \forall x, y, z \in E.$

1.3 Bolas e Conjuntos Limitados

Quando procuramos a definição de bola no dicionário, encontramos "corpo sólido completamente redondo em toda a sua extensão". Mas, matematicamente, veremos que a bola pode ser representada por um cubo, e ainda mais, ela também pode ser definida no plano como um losango ou quadrado.

Com o auxílio de uma norma em $\mathbb{R}^2$ podemos definir algumas noções geométricas básicas, que passamos a apresentar.

Definição 1.10 (Bola e Esfera) *A bola aberta de centro em $t \in \mathbb{R}^2$ e raio $r > 0$, denotada por $B(t; r)$, é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^2$ cuja distância ao ponto t é menor do que r. Isto é,*

$$B(t; r) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x - t| < r\}. \tag{1.20}$$

Analogamente, a bola fechada $B[t; r]$ e a esfera $S[t; r]$, ambam com centro t e raio r, são definidas:

$$B[t; r] = \{x \in \mathbb{R}^2; |x - t| \leq r\} \tag{1.21}$$

e

$$S[t;r] = \{x \in \mathbb{R}^2; |x - t| = r\}. \tag{1.22}$$

Segue-se que $B[t;r] = B(t;r) \cup S[t;r]$.

Em $\mathbb{R}^2$, tomando a norma euclidiana, as bolas no plano chamam-se **discos** (abertos ou fechados) e as esferas reduzem-se a **círculos**.

A forma geométrica das bolas e esferas dependem em geral da norma utilizada.

Exemplo 1.11 *Se, tomarmos no plano $\mathbb{R}^2$, $|x|_M = max\{|a_1|, |b_1|\}$ como norma e considerarmos $x = (a_1, b_1)$, a bola fechada de centro $t = (a, b)$ e raio r será um quadrado de lados paralelos aos eixos de coordenadas. Na verdade, cada lado terá comprimento $2r$, e diagonais cortando-se no ponto t.*

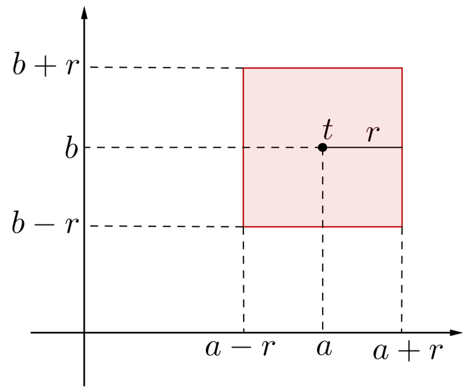

Figura 1.1: Norma do máximo

De fato, considere um ponto $y = (a_2, b_2)$ deste quadrado. Então, $|y - t| = max\{|a_2 - a|, |b_2 - b|\}$. Mas $|a_2 - a| \leq r$ e $|b_2 - b| \leq r$ e assim $|y - t| \leq r$.

Observe qeu a igualdade ocorre quando y está sobre a "borda"do quadrado.

Exemplo 1.12 *Se tormarmos a norma da soma, $|x|_S = |a_1| + |b_1|$, a bola de centro t e raio r, será o quadrado cujas diagonais são paralelas aos eixos coordenados, ambas com comprimento $2r$, encontrando-se ainda no ponto t.*

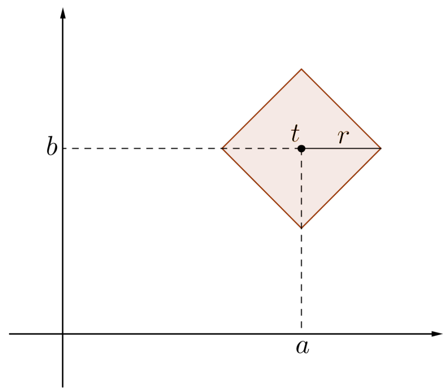

Figura 1.2: Norma da soma

Observação 1.13 *Na Figura 1.1, se* $t = (a, b)$*, então a bola* $B[t, r] \subset \mathbb{R}^2$*, definida pela norma do máximo é o produto cartesiano* $[a - r, a + r] \times [b - r, b + r]$*. Pois,*

$$\begin{aligned} x = (a_1, b_1) \in B[t, r] &\Leftrightarrow |x - t| \leq r \\ &\Leftrightarrow |a_1 - a| \leq r \quad e \quad |b_1 - b| \leq r \\ &\Leftrightarrow x \in [a - r, a + r] \times [b - r, b + r]. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Estas propriedades tornam a norma do máximo conveniente em relação ao produto cartesiano.

Definição 1.14 (Segmento de Reta) *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^2$*. O segmento de reta de extremos* x, y *é o conjunto*

$$[x, y] = \{(1 - k)x + ky; 0 \leq k \leq 1\}. \tag{1.24}$$

Exemplo 1.15 *Sejam* $x = (1, 0)$ *e* $y = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$*. Então,* $[x, y] = \{(1 - k, k); 0 \leq k \leq 1\}$*. De fato,*

$$\begin{aligned} [x, y] = &\ \{(1 - k)(1, 0) + k(0, 1); 0 \leq k \leq 1\} \\ = &\ \{(1 - k, 0) + (0, k); 0 \leq k \leq 1\} \\ = &\ \{(1 - k, k); 0 \leq k \leq 1\}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

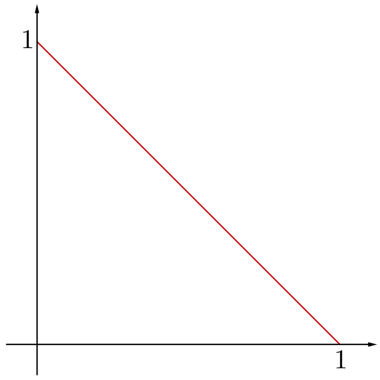

Figura 1.3: Segmento de reta de extremos $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$

Definição 1.16 (Convexo) *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ diz-se convexo quando contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertencem a X, ou seja, para quaiquer $x, y \in X \Rightarrow [x, y] \subset X$.*

Teorema 1.17 *Toda bola $B \subset \mathbb{R}^2$ é convexa.*

Demonstração: Seja $B = B(t; r)$ a bola aberta de centro t e raio $r > 0$. Se $x, y \in B$ então $|x - t| < r$ e $|y - t| < r$. Para qualquer $(1 - k)x + ky \in [x, y]$, $0 \leq k \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} |(1-k)x + ky - t| &= |(1-k)(x-t) + k(y-t)| \\ &\leq (1-k)|x-t| + k|y-t| \\ &< (1-k)r + kr \\ &= r. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Uma demonstração inteiramente análoga se faz no caso de uma bola fechada $B[t; r]$.

□

Definição 1.18 (Limitado) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ diz-se limitado se existe $r > 0$ tal que $X \subset B[0, r]$.*

Definição 1.19 (Projeção) *Para cada $i = 1, 2$ a i-ésima projeção $\pi_i : R^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ será definida por $\pi_1(x) = a_1$ e $\pi_2(x) = b_1$, onde $x = (a_1, b_1)$.*

Teorema 1.20 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é limitado se, e somente se, suas projeções $X_1 = \pi_1(X)$ e $X_2 = \pi_2(X)$ são conjuntos limitados em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Começamos com uma observação preliminar: dados os conjuntos $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}^2$, tem-se $X \subset C_1 \times C_2 \Leftrightarrow \pi_1(X) \subset C_1$ e $\pi_2(X) \subset C_2$. Para demonstrar o teorema, podemos escolher em $\mathbb{R}^2$ qualquer uma das 3 normas que apresentamos. Tomemos a norma do máximo. Então, $X \subset \mathbb{R}^2$ é limitado $\Leftrightarrow$ para algum $c > 0$, tem-se $X \subset B[0; c] = [-c, c] \times [-c, c] \Leftrightarrow \pi_1(X) \subset [-c, c]$ e $\pi_2(X) \subset [-c, c] \Leftrightarrow \pi_1(X)$ e $\pi_2(X)$ são limitados em $\mathbb{R}$.

□

1.4 Sequências no Espaço Euclidiano

Quando pensamos em sequência, logo nos vem a memória uma fila de objetos, ou elementos, em que um vem imediatamente após o outro. Assim, conseguimos classificar aqueles elementos que vêm "antes"e os que vêm "depois". Numericamente, facilita se pensarmos nos números naturais. Claramente, essas são apenas noções intuitivas que nos ajudarão a compreender melhor as Sequências no Espaço Euclidiano.

Definição 1.21 (Sequência) *Uma sequência em $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$, definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O k-ésimo termo da sequência é denotado por x_k. Usaremos a notação (x_k) para indicar a sequência cujo k-ésimo termo é $x_k \in \mathbb{R}^2$.*

Observação 1.22 *Para facilitar o entendimento, vamos esboçar uma sequêcia (x_k):*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ 1 & \longmapsto & (a_1, b_1) = x_1 \\ 2 & \longmapsto & (a_2, b_2) = x_2 \\ & \vdots & \\ k & \longmapsto & (a_k, b_k) = x_k \\ & \vdots & \end{array} \tag{1.27}$$

Assim, $(x_k) = ((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k), \ldots)$.

Definição 1.23 (Subsequência) *Uma subsequência de* (x_k) *é a restrição da sequência a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots\} \subset \mathbb{N}$. *A subsequência é indicada pela notação* (x_{k_i}).

Definição 1.24 (Limitada) *Diz-se que a sequência* (x_k) *é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado em* $\mathbb{R}^2$, *ou seja, existe um número real* $c > 0$ *tal que* $|x_k| = |(a_k, b_k)| \leq c$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^2$ equivale a duas sequências de números reais (veja [5], p.14). Com efeito, para $k \in \mathbb{N}$ temos $(a_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ e $(b_k) = (b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots)$. As duas sequências são chamadas as **sequências das coordenadas** de (x_k). Assim, no plano $\mathbb{R}^2$, uma sequência de pontos $x_k = (a_k, b_k)$ é o mesmo que um par de sequências $(a_k), (b_k)$ de números reais.

Observação 1.25 *Segue imediatamente do teorema anterior que uma sequência* (x_k) *em* $\mathbb{R}^2$ *é limitada se, e somente se, cada um de suas sequências de coordenadas* (a_k) *e* (b_k) *é limitada em* $\mathbb{R}$.

Definição 1.26 (Limite) *Um ponto* $d \in \mathbb{R}^2$ *é o limite da sequência de pontos* $x_k \in \mathbb{R}^2$ *quando, para todo* $\epsilon > 0$, *é possível obter um* $k_0 \in \mathbb{N}$, *tal que para todo* $k > k_0$, *tem-se* $|x_k - d| < \epsilon$.

Neste caso, diz-se que (x_k) **converge** para d ou **tende** para d e escreve-se $\lim x_k = d$ ou simplismente $x_k \to d$.

Definição 1.27 (Convergência) *Seja* $d \in \mathbb{R}^2$. *Se* $\lim x_k = d$ *então, dizemos que a sequência* (x_k) *é convergente . Caso contrário, dizemos que* (x_k) *é divergente.*

Tem-se $\lim x_k = d$, se e somente se, $lim|x_k - d| = 0$. Isto reduz a convergência de sequências em $\mathbb{R}^2$ à convergência de números reais não negativos.

Um fato importante, é que o limite de uma sequência convergente é único. Ou seja, se $\lim x_k = d$ e $\lim x_k = f$, então $d = f$. Com efeito, para todo $k \in \mathbb{N}$ temos:

$$0 \leq |d - f| \leq |x_k - d| + |x_k - f|. \tag{1.28}$$

Logo, $\lim |x_k - d| = \lim |x_k - f| = 0 \Rightarrow d = f$.

Exemplo 1.28 *Seja $d, f \in \mathbb{R}^2$. A sequência constante $(d, d, \ldots, d, \ldots)$ é convergente e seu limite é d. Por outro lado, se $d \neq f$ então $(d, f, d, f, \ldots)$ é uma sequência divergente.*

Observação 1.29 *(1) Em termos de bolas, tem-se $\lim x_k = d$ se, e somente se, qualquer bola aberta de centro d contém todos os termos x_k salvo, possivelmente para um número finito de índices k.*

(2) Segue-se também da caracterizaçao do limite por meio de bolas que se $\lim x_k = d$ então toda subsequência de (x_k) tem ainda limite igual a d. Ou seja, toda subsequência de uma sequência convergente é ainda convergente e tem o mesmo limite.

(3) A definição de limite de uma sequência em $\mathbb{R}^2$ faz uso de uma norma. Porém, por 1.18, a afirmação $\lim x_k = d$ independe de qual das três normas usuais estamos considerando.

Teorema 1.30 *Uma sequência $(x_k) = (a_k, b_k)$ em $\mathbb{R}^2$ converge para o ponto $d = (a_d, b_d)$ se, e somente se, $\lim a_k = a_d$ e $\lim b_k = b_d$, ou seja, cada coordenada de x_k converge para a coordenada correspondente de d.*

Demonstração: Suponha que $\lim x_k = d = (a_d, b_d)$. Como $|a_k - a_d|$, $|b_k - b_d| \leq |x_k - d|$, vemos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = d$ implica $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a_d$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b_d$. Reciprocamente, se $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a_d$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b_d$ então, dado $\epsilon > 0$, existem números naturais k_1, k_2, tais que para todo $k > k_1, k_2$ temos $|a_k - a_d|, |b_k - b_d| < \epsilon$. Se $k_0 = max\{k_1, k_2\}$, então $k > k_0$ implica $|x_k - d| = max\{|a_k - a_d|, |b_k - b_d|\} < \epsilon$. Logo $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = d$. □

Teorema 1.31 *[Bolzano-Weierstrass] Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^2$ possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Sabemos que o Teorema de Bolzano-Weierstrass é válido na reta: toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Dada a sequência limitda (x_k) em $\mathbb{R}^2$, as duas coordenadas dos seus termos formam uma sequência limitada (a_k) e (b_k) de números reais, a qual possui uma subsequência convergente. Isto é, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e um número real a_d tais que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_1} a_k = a_d$ e um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2$ e um número real b_d tais que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_2} b_k = b_d$. Como $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2$ são infinitos, devemos ter $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_2$ ou $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$. Sem perda de generalidade, suponha $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$. Então, pelo teorema anterior, temos que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_2} x_k = d$ o que conclui a demonstração. □

Definição 1.32 (Valor de Aderência) *Um ponto $d \in \mathbb{R}^2$, é um valor de aderência de uma sequência de pontos $x_k \in \mathbb{R}^2$, quando alguma subsequência de (x_k) converge para d.*

O Teorema 1.31 diz que o conjunto dos valores de aderência de uma sequência limitada em $\mathbb{R}^2$ nunca é vazio.

Se uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^2$ (necessariamente ilimitada) não possui valores de aderência, escreve-se $\lim x_k = \infty$. Isto significa que (x_k) não possui subsequência limitada, ou seja, que para todos número real A, dado arbitrariamente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $|x_k| > A$.

Do mesmo modo como para a sequência de números reais se mostra que o ponto $d \in \mathbb{R}^2$ é valor de aderência da sequência (x_k) se, e somente se, toda bola de centro d contém termos x_k com índices arbitrariamente grandes. Mais precisamente, dados $\epsilon > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$, existe $k > k_0$ tal que $|x_k - d| < \epsilon$.

Uma sequência convergente possui um único valor de aderência. A recíproca não vale: a sequência de números reais $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \ldots)$ possui o único valor de aderência 1 mas não converge.

Teorema 1.33 *Uma sequência limitada em $\mathbb{R}^2$ é convergente se, e somente se, possui um único valor de aderência.*

Demonstração: Seja $d \in \mathbb{R}^2$ um valor de aderência da sequência limitada (x_k). Se não for $d = \lim x_k$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto $\mathbb{N}' = \{k \in \mathbb{N}; x_k \notin B(d;\varepsilon)\}$. A subsequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ é limitada e todos os seus termos satisfazem a condição $|x_k - d| \geq \varepsilon$. Pelo Teorema 1.31, ela possui uma subsequência que converge para um ponto $c \in \mathbb{R}^2$. Ora, de $|x_k - d| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}'$, concluímos por passagem ao limite que $|c - d| \geq \varepsilon$.

Então, $c \neq d$ e a sequência (x_k) tem pelo menos dois valores de aderência distintos. Isto demonstra metade do Teorema 1.33. A recíproca é imediata.

□

Definição 1.34 (Sequência de Cauchy) *Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^2$ diz-se uma sequência de Cauchy quando para todo $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k, r > k_0$ então $|x_k - k_r| < \epsilon$. Isto significa que a partir de um certo $k_0 \in \mathbb{N}$, todos os pontos de (x_k) estão arbitrariamente próximos.*

Observação 1.35 *Usando em $\mathbb{R}^2$ a norma do máximo, temos $|x_k - x_r| = max\{|a_k - a_r|, |b_k - b_r|\}$ onde $x_k = (a_k, b_k)$ e $x_r = (a_r, b_r)$.*

Logo, (x_k) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se (a_k) e (b_k) são sequências de Cauchy de números reais.

Teorema 1.36 *Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^2$ é de Cauchy se, e somente se, é convergente.*

Demonstração: Se (x_k) é uma sequência de Cauchy então, suas duas coordenadas formam uma sequência de Cauchy de números reais (a_k) e (b_k), a qual possuem o limite $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a_d$ e $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b_d$. Se $d = (a_d, b_d)$, resulta do Teorema 1.30 que $d = \lim x_k$. Logo toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^2$ é convergente. A recíproca é imediata.

□

1.5 Pontos de Acumulação

Quando pensamos em acumular, logo nos vem a ideia de juntar, reunir, amontoar coisas. Como se em um pequeno espaço, um quarto por exemplo, fossemos capazes de apinhar tantos objetos quanto gostaríamos.

Intuitivamente, um ponto d é um ponto de acumulação de um conjunto X se existirem outros pontos de X arbitrariamente próximos de d.

Definição 1.37 (Ponto de Acumulação) *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$, um ponto $d \in \mathbb{R}^2$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando toda bola aberta de centro d contém algum ponto de X, diferente do ponto d. Mais precisamente, para todo $\epsilon > 0$, deve existir $x \in X$, tal que $0 < |x - d| < \epsilon$, para $x \neq d$.*

Exemplo 1.38 *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ a bola aberta de centro na origem e raio $r > 0$. Todo ponto $d \in \mathbb{R}^2$, com $|d| = r$ é ponto de acumulação de X. Com efeito, dado $\epsilon > 0$ podemos, sem perda de generalidade, supor $\epsilon < 2r$. Então o ponto $x = \left(1 - \frac{\epsilon}{2r}\right) d$ pertence à bola X, é diferente de d e tem-se $|d - x| = \epsilon/2 < \epsilon$.*

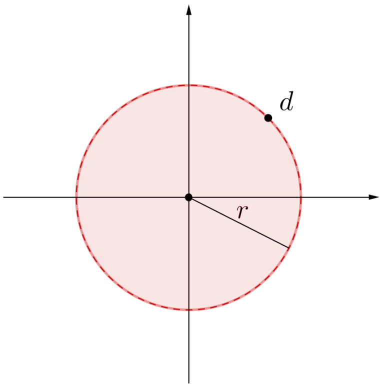

Figura 1.4: Ponto d é ponto de acumulação em X

Definição 1.39 (Conjunto Derivado) *O conjunto dos pontos de acumulação de X será denotado por X'. O conjunto X' é chamado de conjunto derivado de X.*

Teorema 1.40 *Dados $X \subset \mathbb{R}^2$ e $d \in \mathbb{R}^2$, as seguintes afirmações são equivalentes (veja [6], p.21):*

(i) O ponto d é ponto de acumulação de X;

(ii) Existe uma sequência de pontos $x_k \in X$, com $\lim x_k = d$ e $x_k \neq d$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

(iii) Toda bola aberta de centro d contém uma infinidade de pontos de X.

Corolário 1.41 *Se $X' \neq \varnothing$, então X é infinito.*

Observação 1.42 *Isso significa que se houver pelo menos um ponto de acumulação em X, no caso o ponto d, então, haverá infinitos valores em X tais que $|x - d| < \epsilon$.*

Teorema 1.43 *Se $X \subset \mathbb{R}^2$ é infinito e limitado, então $X' \neq \varnothing$.*

Demonstração: Sendo X um cojunto infinito, ele contém um subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. Obtemos assim, uma sequência (x_k), a qual é limitada. Logo, pelo Teorema Bolzano-Weierstrass, admite uma subsequência que converge para um ponto $d \in \mathbb{R}^2$. Como os termos x_k são dois a dois distintos, no máximo um deles é igual a d. Eliminando-o, se necessário, obtemos uma sequência de pontos de X, todos diferentes de d, com limite d. Pelo Teorema 1.40, d é ponto de acumulação de X.

$\square$

Definição 1.44 (Ponto Isolado) *Se $d \in X$ não é ponto de acumulação de X, diz-se que d é um ponto isolado de X. Mais precisamente, d é ponto isolado se: existir um $\epsilon > 0$, tal que $B(d, \epsilon) \cap X = \{d\}$.*

Definição 1.45 (Conjunto Discreto) *Quando todo ponto $d \in X$ é isolado, dizemos que X é um conjunto discreto .*

1.6 Aplicações Contínuas

Encontramos a ideia de continuidade em nosso dia-a-dia. Por exemplo, uma função contínua que aparece frequentemente em nosso cotidiano é a função temperatura. Se cada ponto da Terra é identificado por sua latitude e longitude, então a temperatura em cada ponto da Terra é uma função contínua de duas variáveis. Outros exemplos incluem velocidade do vento, pressão atmosférica, etc.

Temos agora uma noção intuitiva de continuidade que precisamos formalizar. O primeiro matemático que tentou fazer isto foi Cauchy, em 1821 (Cour's d'Analyse, p. 43 *apud* [6, Hairer & Wanner]). Porém, a definição de Cauchy não estava completamente correta e a escola de Bolzano-Weierstrass se encarregou de corrigi-la. Vejamos o que Weierstrass escreveu em 1874:

"Aqui, chamaremos a quantidade y de uma função contínua de x, se depois de escolhermos uma quantidade ϵ, a existência de δ pode ser provada, de maneira que para qualquer valor entre $x_0-\delta \ldots x_0+\delta$ o valor correspondente de y está entre $y_0-\epsilon \ldots y_0+\epsilon$".

Definição 1.46 (Aplicação Contínua) *Seja $f : X \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ ou $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua no ponto $d \in X$ quando, para qualquer $\epsilon > 0$, se pode obter $\delta > 0$ tal que todo ponto $x \in X$ cuja distância ao ponto d seja menor do que δ é transformado por f num ponto $f(x)$ que dista de $f(d)$ menos que ϵ. Matematicamente, obtemos*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0; x \in X, |x-d| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(d)| < \epsilon. \tag{1.29}$$

Em termos de bolas, a continuidade de f no ponto d se exprime assim: para toda bola aberta B' de centro $f(d)$ em $\mathbb{R}^2$ existe uma bola aberta B de centro d em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(B \cap X) \subset B'$.

Se $f : X \to \mathbb{R}^2$ é contínua em todos os pontos do conjunto X, diz-se simplesmente que f é uma aplicação contínua.

Observação 1.47 *A continuidade é um fenômeno local: se cada ponto $d \in X$ é centro de uma bola B tal que a restrição $f|(B \cap X)$ é contínua, então $f : X \to \mathbb{R}^2$ é contínua.*

Embora a definição de continuidade de uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^2$ ($X \subset \mathbb{R}^2$) faça uso de uma norma em $\mathbb{R}^2$, em virtude de 1.18, segue-se que a continuidade de f num ponto persiste se alterarmos uma dessas normas ou ambas.

Como se vê facilmente, se $f : X \to \mathbb{R}^2$ é contínua então, para $Y \subset X$, a restrição $f|Y$ é uma aplicação contínua.

Exemplo 1.48 *Se d é um ponto isolado do conjunto X, então toda aplicação $f : X \to \mathbb{R}^2$ é necessariamente contínua no ponto d. Com efeito, existe $\delta > 0$ tal que $B(d,\delta) \cap X = \{d\}$. Assim, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, tomamos $\delta = \epsilon$ e temos que para todo $x \in X$, $|x-d| < \delta \Longrightarrow x = d \Longrightarrow |f(x) - f(d)| = 0 < \epsilon$.*

Exemplo 1.49 *Dado $X \subset \mathbb{R}^2$, uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^2$ diz-se* **Lipschitziana** *quando existe $k > 0$ (constante de Lipschitz de f) tal que, para quaisquer $x, y \in X$, tem-se $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Toda aplicação Lipschitziana é contínua. De fato, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon/k$. Então, $|x - d| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(d)| \leq k|x - d| < k \cdot \delta = k \cdot \epsilon/k = \epsilon$. Ser ou não Lipschitziana independe das normas.*

Teorema 1.50 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}^2$, $f : X \to \mathbb{R}^2$ contínua no ponto $d \in X$, $f(X) \subset Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $c = f(d)$. Então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto d.*

Demonstração: Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$ existe, em virtude da continuidade de g, um número $\eta > 0$ tal que para todo $y \in Y, |y - f(d)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(d))| < \epsilon$. Por sua vez, a partir de η, a continuidade de f nos fornece $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$, $|x - d| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(d)| < \eta$. Segue-se que $x \in X, |x - d| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(d))| < \epsilon$, logo $g \circ f$ é contínua no ponto d. $\square$

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dar uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^2$ é o mesmo que dar duas funções reais $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$, definidas por $f_1 = \pi_1 \circ f$ e $f_2 = \pi_2 \circ f$, as quais são chamadas as **coordenadas da aplicação** f. Para todo $x \in X$, temos $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Para indicar que f_1 e f_2 são as funções coordenadas de f, escreve-se $f = (f_1, f_2)$.

Teorema 1.51 *Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^2$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é contínua num ponto $d \in X$ se, e somente se, cada uma das funções coordenadas $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$, onde $i = 1, 2$, é contínua no ponto d.*

Demonstração: A continuidade de f implica a continuidade das f_i pelo Teorema 1.50. Reciprocamente, se cada $f_i : X \to \mathbb{R}^2$ é contínua no ponto $d \in X$, dado $\epsilon > 0$ existem números $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tais que $|x - d| < \delta_i$, $x \in X \Rightarrow |f_i(x) - f_i(d)| < \epsilon$. Tomemos em $\mathbb{R}^2$ a norma do máximo. Seja δ o menor dos δ_i. Então $|x - d| < \delta$, $x \in X \Rightarrow |f(x) - f(d)| = max\{|f_i(x) - f_i(d)|; 1 \leq i \leq 2\} < \epsilon$. Logo f é contínua no ponto d. $\square$

Note que se $X \subset \mathbb{R}^2$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$, então para toda sequência (x_k) em X, temos que $(f(x_k))$ é uma sequência em $\mathbb{R}^2$. A seguir veremos que a continuidade de f está relacionada com a convergência de $(f(x_k))$.

Teorema 1.52 *Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}^2$, é contínua no ponto $d \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$, com $\lim x_k = d$, tem-se $\lim f(x_k) = f(d)$.*

Demonstração: Sejam f contínua no ponto d e $\lim x_k = d$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X, |x - d| < \delta$ obtem-se $|f(x) - f(d)| < \epsilon$. Como $\lim x_k = d$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$ obtem-se $|x_k - d| < \delta$. Segue que se $k > k_0$ então $|f(x_k) - f(d)| < \epsilon$. Logo $\lim f(x_k) = f(d)$. Para demonstrar a recíproca, suponhamos que f não seja contínua no ponto d. Então, existe um $\epsilon > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$ podemos obter $x_k \in X$ com $|x_k - d| < 1/k$ e $|f(x_k) - f(d)| \geq \epsilon$. Então, $\lim x_k = d$ sem que tenhamos $\lim f(x_k) = f(d)$.

$\square$

1.7 Limites

Dada uma funçao f em $\mathbb{R}^2$, estamos interessados em saber o que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto d sem, entretanto, assumir este valor. Este é o assunto desta seção. Muitas vezes $f(x)$ se aproximará de $f(d)$, porém, isto só ocorre para uma classe de funções, ditas contínuas - abordada na seção anterior.

Definição 1.53 (Limite) *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação definada num conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ e $d \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de X. Dizemos que um ponto $c \in \mathbb{R}^2$ é um limite de f, quando x tende para d, e escreve-se*

$$\lim_{x \to d} f(x) = c, \tag{1.30}$$

quando ocorrer o seguinte: dado qualquer $\epsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$, se $0 < |x - d| < \delta$, então $|f(x) - c| < \epsilon$.

Observação 1.54 *Para que tenha sentido a afirmação $\lim\limits_{x\to d} f(x) = c$, não é necessário que d pertença a X, ou seja, que f seja definida no ponto d. Pelo contrário, mesmo que d pertença ao domínio de f, o valor $f(d)$ não desempenha papel algum na definição de limite: importam apenas os valores $f(x)$ para x próximo, porém diferente, de d.*

Quando existe, o limite é **único**. De fato, se $d \in X'$ e se tem, ao mesmo tempo, $\lim\limits_{x\to d} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to d} f(x) = c'$, então $c = c'$. Com efeito, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, 0 < |x - d| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon/2$, $|f(x) - c'| < \epsilon/2$. Como $d \in X'$, podemos achar $x \in X$ tal que $0 < |x - d| < \delta$. Usando este x, temos $|c - c'| < |c - f(x)| + |f(x) - c'| < \epsilon$. Sendo ϵ arbitrário, resulta $c = c'$.

Observação 1.55 *A continuidade se exprime em termos de limite: se o ponto $d \in X$ é isolado então toda aplicação $f : X \to \mathbb{R}^2$ é contínua no ponto d. Se porém, $d \in X'$ então f é contínua no ponto d se, e somente se, $\lim\limits_{x\to d} f(x) = f(d)$.*

Para que $\lim\limits_{x\to d} f(x) = c$, é necessário e suficiente que $\lim\limits_{x\to d} f(x_k) = c$, seja qual for a sequência de pontos $x_k \in X - \{d\}$, com $\lim x_k = d$.

Seja d um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$. Dado uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^2$, cujas funções coordenadas são $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$, tem-se $\lim\limits_{x\to d} f(x) = c = (c_1, c_2)$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to d} f_1(x) = c_1$ e $\lim\limits_{x\to d} f_2(x) = c_2$.

Proposição 1.56 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^2, d \in X', b, c \in \mathbb{R}^2, f, g : X \to \mathbb{R}^2$ e $\alpha : X \to \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x\to d} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to d} g(x) = c'$, $\lim\limits_{x\to d} \alpha(x) = \alpha_0$. Então:*

(i) $\lim\limits_{x\to d}(f(x) + g(x)) = c + c'$;

(ii) $\lim\limits_{x\to d} \alpha(x) \cdot f(x) = \alpha_0 \cdot c$;

(iii) $\lim\limits_{x\to d}\langle f(x), g(x)\rangle = \langle c, c'\rangle$.

As afirmações da Proposição 1.56 decorrem imediatamente da caracterização do limite por meio de sequências, juntamente com algumas consequências do Teorema 1.30.

Exemplo 1.57 *Consideremos* $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x, y) = x^2y/(x^2 + y^2)$. *Mostremos que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. *Como* $f(x, y)$ *é produto de* x *por* $xy/(x^2 + y^2)$ *e, evidentemente,* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$, *resta mostrar que* $xy/(x^2 + y^2)$ *é limitada. Mas, para* $(x, y) \neq (0, 0)$, $xy/(x^2 + y^2) = (x/\sqrt{x^2 + y^2})(y/\sqrt{x^2 + y^2}) = cos\theta \cdot sen\theta$, *onde* θ *é o ângulo que o vetor* $z = (x, y)$ *forma com o eixo das abscissas. Logo* $xy/(x^2 + y^2)$ *tem valor absoluto* ≤ 1.

Proposição 1.58 *A relação entre o limite e a composição de aplicações é a seguinte: sejam* $X, Y \subset \mathbb{R}^2$, $f : X \to \mathbb{R}^2$, $g : Y \to \mathbb{R}^2$, $d \in X'$, $c \in Y'$ *e* $f(X) \subset Y$.

(i) Se $\lim\limits_{x\to d} f(x) = c$ *e* g *é contínua no ponto* c *então* $\lim\limits_{x\to d} g(f(x)) = g(c)$.

(ii) Se $\lim\limits_{x\to d} f(x) = c$ *e* $\lim\limits_{y\to c} g(y) = j$ *e* $x \neq d \Rightarrow f(x) \neq c$ *então* $\lim\limits_{x\to d} g(f(x)) = j$.

Além das regras operacionais com limites, a manipulação formal do símbolo “lim”é muito facilitada pelo princípio de permanência das desiqualdades, que mostraremos agora. Trata-se do seguinte:

Proposição 1.59 *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *definidas em* $X \subset \mathbb{R}^2$ *e seja* $d \in X'$. *Suponhamos que* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in X - \{d\}$. *Se existirem* $\lim\limits_{x\to d} f(x) = c$ *e* $\lim\limits_{x\to d} g(x) = j$, *deverá ser* $c \leq j$.

Demonstração: Com efeito, do contrário teríamos $j < c$ e portanto $\epsilon = (c - j)/2$ seria positivo. Correspondendo a este ϵ, poderíamos obter $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X, 0 < |x - d| < \delta$ teríamos $f(x) \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$ e $g(x) \in (j - \epsilon, j + \epsilon)$. Como $c - \epsilon = j + \epsilon$, teríamos $g(x) < j + \epsilon = c - \epsilon < f(x)$ para todos esses valores de x, uma contradição.

$\square$

1.8 Conjuntos Abertos

Estudaremos nesta seção os conjuntos que são chamados de abertos. A nomenclatura provém do estudo dos intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Em $\mathbb{R}$, é possível caracterizar os conjuntos abertos como aqueles que podem ser escritos como uma união disjunta, enumerável de intervalos abertos. Veremos que isto também é possível em $\mathbb{R}^2$.

Intuitivamente, d é um ponto no interior de um conjunto X se os pontos "vizinhos" a d também estão em X. Matematicamente, temos:

Definição 1.60 (Ponto Interior) *Seja X um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Um ponto $d \in X$ chama-se ponto interior a X quando é centro de alguma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que, para todo $|x - d| < \delta$ implica $x \in X$. O interior de X é o conjunto int$X$, formado pelos pontos interiores a X.*

Definição 1.61 (Vizinhança) *Quando $x \in intV$, dizemos que o conjunto V é uma vizinhança do ponto x.*

Dizer que um ponto $d \in X$ não é interior a X equivale a afirmar que toda bola aberta de centro d contém pontos do complementar de X, ou seja, para todo $\delta > 0$ existe $y \in \mathbb{R}^2 - X$ com $|y - d| < \delta$.

Definição 1.62 (Conjunto Aberto) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset X$. Assim, X é aberto se, e somente se, $intX = X$.*

Exemplo 1.63 *Uma bola aberta $B(d; r) \subset \mathbb{R}^2$ é um exemplo de conjunto aberto.*

Com efeito, dado qualquer $x \in B(d; r)$, temos $|x-d| < r$, logo o número $\delta = r - |x-d|$ é positivo. Afirmamos que $B(x; \delta) \subset B(d; r)$. De fato,

$$\begin{aligned} y \in B(x;\delta) \Longrightarrow \;& |y-d| \leq |y-x| + |x-d| < \delta + |x-d| = r \\ \Longrightarrow \;& y \in B(d;r). \end{aligned} \tag{1.31}$$

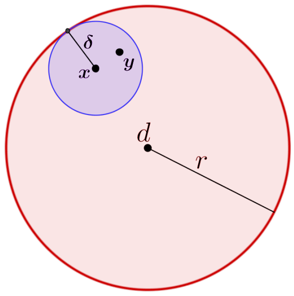

Figura 1.5: A bola aberta $B(d;r)$ é um conjunto aberto

Exemplo 1.64 *Também é aberto em* $\mathbb{R}^2$ *o conjunto* $X = \mathbb{R}^2 - B[d,r]$, *complementar da bola fechada* $B[d,r]$. *Temos que* $X = \{x \in \mathbb{R}^2; |x-d| > r\}$ *e dado arbitrariamente* $x \in X$, *seja* $\delta = |x-d| - r$. *Afirmamos que* $B(x,\delta) \subset X$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} y \in B(x,\delta) &\Longrightarrow |x-d| \leq |x-y| + |y-d| < \delta + |y-d| = |x-d| - r + |y-d| \\ &\Longrightarrow |y-d| > r \\ &\Longrightarrow y \in X. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Proposição 1.65 *Para todo conjunto* $X \subset \mathbb{R}^2$, $intX$ *é um conjunto aberto.*

Demonstração: De fato, se $d \in intX$, então existe $r > 0$, tal que $B(d;r) \subset X$. Se $x \in B(d;r)$, então pondo $\delta = r - |x-d|$, vemos que $B(x;\delta) \subset B(d;r)$, donde $B(x;\delta) \subset X$ e, portanto, $x \in intX$. Assim, todo ponto $d \in intX$ é centro de uma bola $B(d;r)$ contida em $intX$, o que prova que $intX$ é aberto. □

Exemplo 1.66 *Uma bola fechada* $B[d;r]$ *em* $\mathbb{R}^2$ *não é um conjunto aberto. De fato, se tomarmos arbitrariamente um vetor unitário* $u \in \mathbb{R}^2$, *o ponto* $x = d + r \cdot u$ *é tal que* $|x-d| = r$, *logo* $x \in B[d;r]$. *Mas nenhuma bola aberta* $B(x;\delta)$ *está contida em* $B[x;r]$. *Com efeito, dado* $\delta > 0$ *e tomando* $y = d + (r + \delta/2)u$, *temos* $|y-x| = \delta/2 < \delta$ *mas* $|y-d| = r + \delta/2 > r$. *Assim,* $y \in B(x;\delta)$ *mas* $y \notin B[d;r]$. *Este argumento mostra, de fato, que os pontos da esfera* $S[d;r]$ *não são interiores à bola fechada de centro* d *e raio* r. *Portanto,* $intB[d;r] = B(d;r)$.

Dados um conjunto X e um ponto $d \in \mathbb{R}^2$, há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou $d \in intX$, ou $d \in int(\mathbb{R}^2 - X)$ ou então toda bola aberta de centro d contém pontos de X e pontos do complementar de X. Os pontos com esta última propriedade constituem o que chamamos a **fronteira** de X e denotaremos por ∂X. Os pontos $y \in \partial X$ são chamados **pontos-fronteira** de X.

Exemplo 1.67 *Assim, se X é uma bola fechada $B[d; r]$, temos $\partial X = S[d; r]$ (esfera de centro d e raio r). Observe que se chamarmos de Y a bola aberta $B(d; r)$ teremos $\partial X = \partial Y$.*

Observação 1.68 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto se, e somente se, nenhum dos seus pontos é ponto fronteira de A, ou seja, se, e somente se, $A \cap \partial A = \varnothing$.*

Teorema 1.69 *Os conjuntos abertos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ gozam das seguintes propriedades:*

(i) *O conjunto vazio $\varnothing$ e o espaço $\mathbb{R}^2$ inteiro são abertos;*

(ii) *A interseção $A = A_1 \cap \cdots \cap A_k$ de um número finito de conjuntos abertos $A_1, \cdots, A_k$ é um conjunto aberto;*

(iii) *A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos A_λ é um conjunto aberto.*

Demonstração:

(i) Um conjunto só pode deixar de ser aberto se contiver algum ponto que não seja interior. Como $\varnothing$ não contém ponto algum, é aberto. O espaço $\mathbb{R}^2$ é obviamente aberto.

(ii) Seja $d \in A$. Então, para cada $i = 1, \cdots, k$, temos $d \in A_i$. Como A_i é aberto, existe $\delta_i > 0$ tal que $B(d; \delta_i) \subset A_i$. Seja $\delta = min\{\delta_1, \cdots, \delta_k\}$. Então $B(d; \delta) \subset A_i$ para cada i, donde $B(d; \delta) \subset A$.

(iii) Dado $d \in A$, existe $\lambda \in L$ tal que $d \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, existe $\delta > 0$ com $B(d; \delta) \subset A_\lambda \subset A$. Logo A é aberto.

$\square$

Definição 1.70 (Subconjunto Aberto) *Fixemos um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$. Um subconjunto $A \subset X$ diz-se aberto em X quando, para cada $d \in A$ existe $\delta > 0$ tal que $B(d;\delta) \cap X \subset A$. Em outras palavras, para cada $d \in A$ existe $\delta > 0$ tal que os pontos x, pertencentes a X, que cumprem a condição $|x - d| < \delta$ estão em A.*

Exemplo 1.71 *O subconjunto $A = (0,1] \times [0,1]$ é aberto em $X = [0,1] \times [0,1]$.*

Observação 1.72 *Como se vê facilmente, quando $X \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, um subconjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, é aberto no sentido usual de $\mathbb{R}^2$.*

Mais geralmente, um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, existe um aberto $B \subset \mathbb{R}^2$ tal que $A = X \cap B$.

Com efeito, se for A aberto em X, tome B igual à reunião das bolas $B(d;\delta)$ com o centro nos pontos $d \in A$, tais que $B(d;\delta) \cap X \subset A$. Reciprocamente, se for $A = X \cap B$, com B aberto em $\mathbb{R}^2$, para cada $d \in A$ existe uma bola $B(d;\delta) \subset B$. Logo $B(d;\delta) \cap X \subset B \cap X = A$ e portanto A é aberto em X.

Vale para os abertos em X um resultado análogo ao Teorema 1.69: $\varnothing$ e X são abertos em X; uma interseção finita e uma reunião qualquer de abertos em X é ainda um conjunto aberto em X.

1.9 Conjuntos Fechados

Conjuntos fechados podem ser definidos simplesmente como conjuntos cujo complementar é aberto. No decorrrer desta seção, veremos algumas outras caracterizações de conjuntos fechados.

Definição 1.73 (Ponto de Aderência) *Um ponto $d \in \mathbb{R}^2$ diz-se aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ quando é limite de uma sequência de pontos desse conjunto.*

Assim, todo ponto d pertencente a X é aderente a X, pois temos $\lim x_k = d$, com $x_k = d$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observação 1.74 *Mas d pode ser aderente a X sem pertencer a X.*

Exemplo 1.75 *Se $X = B(0;1) \subset \mathbb{R}^2$ é a bola aberta de centro na origem e raio 1 em $\mathbb{R}^2$, o ponto $e_1 = (1,0)$ não pertence a X. Mas, pondo $x_k = (1 - 1/k; 0)$, vemos que $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\lim x_k = e_1$. Logo e_1 é aderente a X.*

A fim de que o ponto d seja aderente ao conjunto X, é necessário e suficiente que toda bola aberta de centro d contenha algum ponto de X. Com efeito, a condição é necessária em virtude da definição de limite de uma sequência e é suficiente porque, caso ela se verifica, em cada bola $B(d;1/k)$ podemos escolher um ponto $x_k \in X$ e assim obtemos uma sequência com $\lim x_k = d$.

Definição 1.76 (Fecho) *O conjunto dos pontos aderentes a X chama-se o fecho de X e é indicado por $\overline{X}$.*

Pelo que vimos acima, a fim de que um ponto $c \in \mathbb{R}^2$ não pertença ao fecho de X, é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro c que não contenha pontos de X. Mais precisamente,

$$c \in \complement\overline{X} \Leftrightarrow \exists r > 0; B(c;r) \cap X = \varnothing. \tag{1.33}$$

Como toda bola aberta é um conjunto aberto e todo aberto que contém um ponto contém também uma bola aberta com centro nesse ponto, as condições acima podem ser reformuladas com abertos, em vez de bolas:

(i) O ponto $d \in \overline{X}$ se, e somente se, todo aberto que contém d intersecta o conjunto X. (Isto é , A aberto, $d \in A \Rightarrow A \cap X \neq \varnothing$.)

(ii) Tem-se que $c \notin \overline{X}$ se, e somente se, existe um aberto contendo c, e disjunto de X. (Isto é, existe A aberto com $c \in A$ e $A \cap X = \varnothing$.)

Observação 1.77 *O fecho de uma bola aberta $B(d;r)$ é uma bola fechada $B[d;r]$. Se $X = \mathbb{Q}^2$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas são números racionais, então $\overline{X} = \mathbb{R}^2$.*

Definição 1.78 (Conjunto Fechado) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ chama-se fechado quando contém todos seus pontos aderentes, isto é, quando $X = \overline{X}$.*

Dizer que $X \subset \mathbb{R}^2$ é fechado significa, portanto, o seguinte: se $\lim x_k = d$ e $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $d \in X$.

Exemplo 1.79 *Uma bola fechada $B[d;r]$ é um subconjunto fechado do espaço $\mathbb{R}^2$ pois, se $|x_k - d| \leq r$ para todo k e $\lim x_k = c$ então $|d - c| = \lim |x_k - d| \leq r$.*

Daí resulta que o fecho de todo conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^2$ é limitado. Com efeito, temos $X \subset B$, onde B é uma bola fechada. Logo $\overline{X} \subset \overline{B} = B$, donde $\overline{X}$ é limitado.

Para todo $X \subset \mathbb{R}^2$, o complementar do fecho de X é um aberto. Com efeito, seja $A = \complement\overline{X}$. Para todo $c \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(c;r) \cap X = \varnothing$. Afirmamos que $B(c;r) \subset A$. Com efeito, se $y \in B(c;r)$ então existe r' tal que $B(y;r') \subset B(c;r)$ e portanto $B(y;r') \cap X = \varnothing$. Isto mostra que $y \notin \overline{X}$ e assim $y \in \complement\overline{X} = A$.

Em particular, se $X \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto fechado, seu complementar $\complement X$ é aberto em $\mathbb{R}^2$ (pois $\complement X = \complement\overline{X}$).

Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{R}^2$ é tal que $A = \complement X$ é um conjunto aberto então:

$$\begin{aligned} y \notin X \ &\Longrightarrow y \in A \\ &\Longrightarrow B(y;r) \subset A \text{ para algum } r > 0 \\ &\Longrightarrow B(y;r) \cap X = \varnothing \\ &\Longrightarrow y \text{ não é aderente a } X. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Assim, todo ponto aderente a X deve pertencer a X e consequentemente X é fechado. Isto demonstra o Teorema seguinte.

Teorema 1.80 *Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.*

Corolário 1.81 *O fecho de todo conjunto é um conjunto fechado.*

Teorema 1.82 *Os conjuntos fechados de espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ gozam das seguintes propriedades:*

(*i*) *O conjunto vazio $\varnothing$ e o espaço inteiro $\mathbb{R}^2$ são fechados;*

(*ii*) *A reunião $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ de um número finito de conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_k$ é um conjunto fechado;*

(*iii*) *A interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos fechados F_λ é um conjunto fechado.*

Demonstração: A afirmação (i) é evidente. Quanto a (ii), se $F_1, \ldots, F_k$ são fechados então $A_1 = \complement F_1, \ldots, A_k = \complement F_k$ são abertos, portanto $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ é aberto. Logo $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k = \complement A_1 \cup \cdots \cup \complement A_k = \complement(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$ é fechado. Finalmente, se cada F_λ, $\lambda \in L$, é fechado então cada $A_\lambda = \complement F_\lambda$ é aberto, logo $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ também é aberto. Sendo assim, o conjunto $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} \complement A_\lambda = \complement\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \complement A$ é fechado.

□

Note que uma reunião infinita de conjuntos fechados pode ser fechada ou não. De fato, para cada ponto $x \in \mathbb{R}^2$, o conjunto $\{x\}$ é fechado. Ora, todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é reunião dos seus pontos: $X = \bigcup_{\lambda \in X} \{\lambda\}$. Como há conjuntos em $\mathbb{R}^2$ que não são fechados, há reuniões (infinitas) de conjuntos fechados que não são fechadas.

Segue-se da definição de fronteira que um ponto d pertencente à fronteira do conjunto X se, e somente se, d é aderente a X e a $\mathbb{R}^2 - X$. Ou seja, $\partial X = \overline{X} \cap \left(\overline{\mathbb{R}^2 - X}\right)$. Em particular, a fronteira de todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto fechado.

Definição 1.83 (Subconjunto Fechado) *Fixemos um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$. Um subconjunto $F \subset X$ diz-se fechado em X quando se tem $F = X \cap G$, onde G é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$. A fim de que o subconjunto $F \subset X$ seja fechado em X é necessário e suficiente que F contenha todos os seus pontos aderentes que pertençam a X.*

Se $X \subset \mathbb{R}^2$ é fechado, então um subconjunto $F \subset X$ é fechado em X se, e somente se, é fechado em $\mathbb{R}^2$.

Os conjuntos fechados em X gozam de propriedades análogas às que foram demonstradas no Teorema 1.82 para os fechados em $\mathbb{R}^2$. A saber: $\varnothing$ e X são fechados em X; uma reunião finita ou uma interseção arbitrária de fechados em X é ainda um conjunto fechado em X.

Evidentemente, se $F \subset \mathbb{R}^2$ é fechado e $F \subset X$ então F é fechado em X.

Exemplo 1.84 *Seja* $X = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ *a semirreta positiva aberta. O intervalo semi-aberto* $(0, 1]$ *é fechado em* X.

Seja $F \subset X$. A fim de que F seja fechado em X é necessário e suficiente que o conjunto $A = X - F$ (complementar de F relativamente a X) seja aberto em X.

Com efeito, dados $F' \subset \mathbb{R}^2$ e $A' = \complement F'$, o complementar de F' em $\mathbb{R}^2$, temos $F = X \cap F' \Leftrightarrow X - F = X \cap A'$. Ora, F' é fechado em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, A' é aberto. Assim, F é fechado em X se, e somente se $X - F$ é aberto em X.

Capítulo 2

Probabilidade

A palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar). Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou desconhecidos, sendo também substituída por algumas palavras como"sorte", "risco", "azar", "incerteza", "duvidoso", dependendo do contexto.

O estudo científico da probabilidade é um desenvolvimento moderno. Os jogos de apostas mostram que o interesse em quantificar as ideias da probabilidade tem existido por milênios, mas as descrições matemáticas de uso nesses problemas só apareceram muito mais tarde.

Um dos grandes matemáticos que contribuiu para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades foi o francês Pierre Simon Marquis de Laplace. Em seu *Essai philosophique sur les probabilités*, Laplace projetou um sistema matemático de raciocínio indutivo baseado em probabilidades, que hoje coincidem com as ideias Bayesianas. Uma fórmula bem conhecida surgida de seu sistema é a regra de sucessão. Suponha que um processo só tenha dois possíveis resultados, rotulados "sucesso"e "falha": sob a suposição de que pouco ou nada é conhecido a priori sobre as plausibilidades relativas dos resultados, Laplace derivou uma fórmula para a probabilidade de que o próximo processo seja um sucesso.

Faremos aqui uma breve explanação sobre probabilidade através de definições e exemplos, deixando claro que para maiores detalhes sugerimos **Análise combinatória e**

probabilidade [2], **Probabilidade: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito** [9] e **Cadeias de Morkov** [8].

Definição 2.1 (Clássica ou de Laplace) *: Seja S o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento (espaço amostral) e considere A um subconjunto finito de S. A probabilidade de A, denotada por $P(A)$, é definida por:*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}, \tag{2.1}$$

onde $\#A$ e $\#S$ são as quantidades de elementos de A e de S, respectivamente.

Exemplo 2.2 *No lançamento de um dado convencional, qual a probabilidade de sortearmos o número 5?*

Note que neste exemplo, $A = \{5\}$ e $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dessa forma, $n(A) = 1$ e $n(S) = 6$.

Portanto,

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

Exemplo 2.3 *Em uma escola, foram distribuídos aos alunos bilhetes numerados de* 201 *a* 800*, qual a probabilidade de sortearmos um múltiplo de* 4*?*

Temos $A = \{204, 208, 212, \ldots, 796, 800\}$ e $S = \{201, 202, 203, \ldots, 799, 800\}$, consequentemente $\#A = 150$ e $\#S = 600$.

Portanto,

$$P(A) = \frac{150}{600} = \frac{1}{4}.$$

Na prática encontramos muitos problemas em que não é possível calcular a probabilidade de algo ocorrer de maneira tradicional. Por exemplo: Qual a probabilidade de roubarem minha casa? Qual a probabilidade de determinado assunto cair no vestibular?

Respostas para esses problemas são fundamentais mas, não podem ser calculadas pela definição clássica. O que fazemos é observar com que frequência esses fatos ocorrem. Com um grande número de observações, podemos obter uma boa estimativa da probabilidade de ocorrência desse tipo de evento.

Definição 2.4 (Frequência Relativa) *: É o quociente entre a frequência absoluta da variável e o número total de observações. Ou seja, chamamos de frequência relativa de uma classe (ou dado), a frequência dessa classe dividida pela soma das frequências de todas as classes.*

Definição 2.5 (Probabilidade Frequencista) *: Seja E um experimento e A um evento de um espaço amostral associado S. Suponhamos que E é repetido n vezes e seja f_A a frequência relativa do evento. Então, a probabilidade de A é definida como sendo o limite de f_A quando n tende ao infinito (veja [9]). Ou seja:*

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_A. \tag{2.2}$$

Deve-se notar que a frequência relativa do evento A para $n \in \mathbb{R}$ é $f_A = \frac{\#A}{n}$. Em geral, para um valor de n razoavelmente grande temos uma boa aproximação de $P(A)$.

Exemplo 2.6 *Uma experiência que consiste em observar o sexo de um recém-nascido no Brasil. Tal experiência já se realizou diversas vezes e existem registros do seu resultado.*

Temos $S = \{meninos, meninas\}$ e de acordo com os registros

$$P(meninos) = 0,49 \text{ e } P(meninas) = 0,51$$

Observação 2.7 *Essa definição é muito útil e prática, mas o problema é que nem sempre o limite existe. Por isso, uma teoria moderna foi desenvolvida.*

Definição 2.8 (Axiomática) *Seja E um experimento aleatório com um espaço amostral associado S. A cada evento $A \subseteq S$ associa-se um número real, representado por $P(A)$ e denominado probabilidade de A, que satisfaz as seguintes propriedades [2]:*

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$;

(ii) $P(S) = 1$;

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *se A e B forem eventos mutuamente excludentes, ou seja, $A \cap B = \varnothing$.*

Exemplo 2.9 *Considere um dado convencional de 6 faces. Analise a probabilidade em cada um dos casos:*

(i) Qual a probabilidade de sortearmos um número natural (não nulo) e menor que 7?

Temos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, consequentemente* $\#A = 6$ *e* $\#S = 6$*.*

Portanto,

$$P(A) = \frac{6}{6} = 1.$$

(ii) Qual a probabilidade de sortearmos um número ímpar ou o número 2?

Temos $A = \{1, 3, 5\}$*,* $B = \{2\}$ *e* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, consequentemente* $\#A = 3$*,* $\#B = 1$ *e* $\#S = 6$*.*

Portanto, como $A \cap B = \varnothing$*,*

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Definição 2.10 (Evento Complementar) *O evento complementar de qualquer evento* A *é o evento* $\overline{A}$ *tal que* $A \cup \overline{A} = S$ *e* $A \cap \overline{A} = \varnothing$*, onde* S *é o espaço amostral.*

Teorema 2.11 *Seja* A *um evento qualquer. Então,*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{2.3}$$

Demonstração: Sabemos que $A \cup \overline{A} = S$, logo $P(A \cup \overline{A}) = 1$. Também sabemos que A e $\overline{A}$ são mutuamente exclusivos, logo $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Comparando as duas equações temos que:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

□

Exemplo 2.12 *No lançamento simultâneo de dois dados, vamos determinar a probabilidade de não sair soma* 4*.*

No lançamento de dois dados temos o espaço amostral de 36 elementos. Se fossemos considerar em quais eventos a soma seria diferente de 4, teríamos muitas opções e, consequentemente, muito trabalho. Portanto, vamos analisar os eventos em que a soma seja igual a 4*, temos* $A = \{(1,3);(3,1),(2,2)\}$*. Assim o evento complementar de* A *é* $\overline{A}$*. Logo,*

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) = 1 - P(A) &\Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - \tfrac{3}{36} \\ &\Longrightarrow P(\overline{A}) = \tfrac{11}{12}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

o que significa que a probabilidade de não sair soma 4 *é de* $\frac{11}{12}$*.*

Uma probabilidade que utilizaremos em nosso trabalho é a Probabilidade de Transição, vamos defini-la abaixo.

Definição 2.13 (Probabilidade de Transição) *Probabilidade de transição é um processo estocástico em que a variável* t *representa intervalos de tempo* $X(t) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$*, e que tem a propriedade de Markov, ou seja, a probabilidade de* $X(t)$ *estar no estado* j *do próximo período depende apenas do estado presente e não dos estados visitados em períodos passados* **(Para maiores detalhes, veja seções 1 e 2 de [8])**.

Capítulo 3

Um Problema de Probabilidade

Como vimos no capítulo anterior, podemos aplicar o conceito de probabilidade em diversas situações. Nesse sentido, nosso interesse está em problemas de tratamento da informação em que as probabilidades de transição sejam constantes e não nulas. Trabalharemos aqui, exemplos como o de mutações genéticas, ocorridas numa colônia de vírus de dois tipos em que um tipo se transforma no outro a uma certa taxa com o passar do tempo.

Para simplificar o desenvolvimento e a apresentação dos resultados, vamos formular o problema em termos de "bebedores de vinho"[7].

Suponhamos que em determinado grupo tenha N pessoas, com $N \in \mathbb{N}$, onde cada pessoa consome apenas um tipo de vinho entre dois tipos possíveis A e B. A quantidade de pessoas desse grupo deve ser fixa, mas cada um pode mudar sua opção de consumo de um mês para outro.

Considere que inicialmente haviam X_0 pessoas que tomavam vinho A e Y_0 que tomavam vinho B, de forma que $X_0 + Y_0 = N$. A cada mês é contado o número de pessoas que bebe cada tipo de vinho. Denotamos por X_n e Y_n o número de pessoas que bebem os vinhos A e B, respectivamente, no n-ésimo mês.

Vamos analisar a evolução temporal de X_n e Y_n, ou equivalentemente, das proporções (ou probabilidades) $\frac{X_n}{N}$ e $\frac{Y_n}{N}$.

Dessa forma, podemos trabalhar com uma sequência (x_n, y_n) em $\mathbb{R}^2$ onde $x_n = \frac{X_n}{N}$ e

$y_n = \frac{Y_n}{N}$ como as proporções de bebedores dos vinhos A e B no n-ésimo mês, respectivamente, $n \in \mathbb{N}$.

A taxa de mudança de um mês para outro é dada por probabilidade de transição.

Consideremos $A_n = \{k;\, k \text{ bebe } A \text{ no mês } n\}$ e $B_n = \{k;\, k \text{ bebe } B \text{ no mês } n\}$. Definimos:

$a_{11} = \frac{\#(A_1 \cap A_0)}{\#A_0}$ (taxa de bebedores de A no mês 0 que continuam a tomar A no mês 1).
$a_{12} = \frac{\#(A_1 \cap B_0)}{\#B_0}$ (taxa de bebedores de B no mês 0 que passaram a tomar A no mês 1).
$a_{21} = \frac{\#(B_1 \cap A_0)}{\#A_0}$ (taxa de bebedores de A no mês 0 que passaram a tomar B no mês 1).
$a_{22} = \frac{\#(B_1 \cap B_0)}{\#B_0}$ (taxa de bebedores de B no mês 0 que continuam a tomar B no mês 1).

Estas taxas são denominadas probabilidades de transição e assumiremos por hipótese $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$. Através destas e (x_0, y_0), podemos calcular (x_1, y_1), que é o percentual dos consumidores dos vinhos A e B, respectivamente, no mês 1.

$$x_1 = \frac{X_1}{N} = a_{11} \cdot x_0 + a_{12} \cdot y_0$$

$$y_1 = \frac{Y_1}{N} = a_{21} \cdot x_0 + a_{22} \cdot y_0$$

Portanto, existe uma matriz de transição (ou de mudança) P dado por

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ tal que } P \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Observe que P é uma matriz estocástica - isto é, a matriz é quadrada, a soma dos elementos de cada coluna de P é igual a 1 e todos os elementos são não-negativos. De fato,

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21} = &\ \frac{\#(A_1 \cap A_0)}{\#A_0} + \frac{\#(B_1 \cap A_0)}{\#A_0} = \frac{\#A_0}{\#A_0} = 1 \\ a_{12} + a_{22} = &\ \frac{\#(A_1 \cap B_0)}{\#B_0} + \frac{\#(B_1 \cap B_0)}{\#B_0} = \frac{\#B_0}{\#B_0} = 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como citamos inicialmente, assumiremos que as probabilidades de transição sejam constantes, ou seja, a taxa de fidelidade ou de infidelidade por uma marca não se altera de um mês para outro.

Exemplo 3.1 *Se* 20% *dos bebedores do vinho A mudam para o vinho B no primeiro mês,* *então a cada mês* 20% *dos bebedores de* A *tornam-se bebedores de* B. *Consequentemente, a cada mês* 80% *dos bebedores de* A *mantém-se fiéis ao vinho* A.

Assim,

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = P^2 \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

e assim, no n-ésimo mês temos

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = P^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

onde P^n é o produto matricial $P \cdot P \cdot \ldots \cdot P$, com n fatores.

De fato:

(i) Como mostramos anteriormente $P^1 \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

(ii) Supondo que $P^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ (hipótese de indução), devemos mostrar que $P^{n+1} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} P^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &\Longrightarrow P\left(P^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\right) = P \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \\ &\Longrightarrow P^{n+1} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \forall n \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Exemplo 3.2 *Tomemos um grupo com 10 indivíduos,* $N = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}\}$, *(*$\#N = 10$*). Inicialmente suponhamos 6 bebedores do vinho* A, $A_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ *,(*$\#A_0 = 6$*) e 4 bebedores do vinho* B, $B_0 = \{\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}\}$ *,(*$\#B_0 = 4$*). Após o primeiro mês, 3 bebedores de* A *migram para* B, $B_1 \cap A_0 = \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$, *e 1 bebedor de* B

migra para A, $A_1 \cap B_0 = \{\alpha_{10}\}$*, ou seja,* $\#A_1 = 4$ *e* $\#B_1 = 6$*. Observe que*

$$A_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \text{ e } B_0 = \{\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}\}$$

$$A_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{10}\} \text{ e } B_1 = \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9\}.$$

Então, $\#(A_1 \cap A_0) = 3$*,* $\#(A_1 \cap B_0) = 1$*,* $\#(B_1 \cap A_0) = 3$ *e* $\#(B_1 \cap B_0) = 3$ *gerando a matriz de transição* $P = \begin{bmatrix} 3/6 & 1/4 \\ 3/6 & 3/4 \end{bmatrix}$*.*

A proporção de bebedores de A e B após o primeiro mês é de

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/6 & 1/4 \\ 3/6 & 3/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6/10 \\ 4/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/10 \\ 6/10 \end{bmatrix}.$$

Como as probabilidades de transição são constantes, podemos calcular também as proporções seguintes:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = P^2 \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/20 \\ 13/20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = P^3 \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27/80 \\ 53/80 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

3.1 Proporção de Consumo no n-ésimo Mês em Função de P^n

Já vimos que podemos calcular as expressões (x_n, y_n) ao longo dos meses aplicando P^n ao vetor inicial (x_0, y_0).

A partir disso perguntamos:

(i) Existe um limite para o qual a proporção de bebedores de vinho converge, ou seja, $P^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ é convergente?

(ii) Se este limite existe, digamos que seja dado por $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$, será que depende da condição inicial $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$?

Se existir $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \lim\limits_{n\to\infty} P^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ independentemente de $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, consideraremos o mercado com **equilíbrio natural**.

Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} P^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ exista e seja igual a $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$. Como P é contínua (por ser uma transformação linear), então pelo Teorema 1.52,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} P^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \implies P \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} &= P\left(\lim_{n\to\infty} P^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\right) \\ \implies P \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} &= \lim_{n\to\infty} P\left(P^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\right) \\ \implies P \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} &= \lim_{n\to\infty} P^{n+1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ \implies P \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim, podemos concluir que se $\lim\limits_{n\to\infty} P^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ existir, ele deverá ser um ponto fixo de P, o qual passaremos a buscar.

Exemplo 3.3 *Encontre* $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$ *no caso em que* $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{bmatrix}$.

Precisamos então resolver o sistema

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} \\ \overline{x}+\overline{y}=1 \end{cases} \implies \begin{cases} 0,5\overline{x}+0,25\overline{y}=\overline{x} \\ 0,5\overline{x}+0,75\overline{y}=\overline{y} \\ \overline{x}+\overline{y}=1 \end{cases} \implies \begin{cases} 0,25\overline{y}=0,5\overline{x} \\ \overline{x}+\overline{y}=1 \end{cases}$$

$$\implies \overline{x}=\frac{1}{3} \text{ e } \overline{y}=\frac{2}{3}.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$.

Como cada (x_n, y_n) representa a proporção de consumo dos vinhos A e B, respectivamente, no n-ésimo mês, temos que $x_n + y_n = \frac{X_n}{N} + \frac{Y_n}{N}$ e como $X_n + Y_n = N$, segue que $x_n + y_n = 1$. Por isso, no limite (i) queremos encontrar $(\overline{x}, \overline{y})$, onde $\overline{x}, \overline{y} \geq 0$ e $\overline{x}+\overline{y}=1$ (ou ainda $\overline{y} = 1-\overline{x}$).

Por isso, o espaço que estamos interessados são os vetores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x, y \geq 0$ e $x + y = 1$ (veja [6], página 13). Em outras palavras, nosso espaço de interesse é o segmento de reta

$$\begin{aligned} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x,y \geq 0 \text{ e } y = 1-x\} &= \{(x, 1-x) \in \mathbb{R}^2; x \in [0,1]\} \\ &= \{te_1 + (1-t)e_2; t \in [0,1]\}. \\ &= [e_1, e_2]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Temos $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in [e_1, e_2]$. Além disso, os vetores $(a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22}) \in [e_1, e_2]$ pois $a_{11} + a_{21} = a_{12} + a_{22} = 1$ e por hipótese $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$.

Os vetores $P \cdot e_1 = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} := \alpha$ e $P \cdot e_2 = P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} := \beta$ não estão nos eixos coordenados pois $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$.

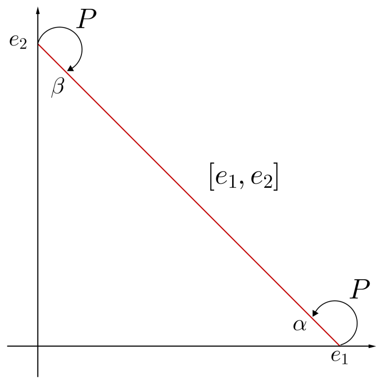

Figura 3.1: Aplicação de P sobre os extremos de $[e_1, e_2]$

Seja $te_1 + (1-t)e_2 \in [e_1, e_2]$ o segmento de reta com extremidades e_1 e e_2. Vamos mostrar que se aplicarmos a P sobre $[e_1, e_2]$ continuaremos em $[e_1, e_2]$. De fato

$$\begin{aligned}
P\left(te_1 + (1-t)e_2\right) &= P\begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix} \\
&= P\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + P\begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \end{bmatrix} \\
&= tP\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-t)P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= tPe_1 + (1-t)Pe_2 \\
&= t\alpha + (1-t)\beta \in [e_1, e_2],
\end{aligned} \tag{3.7}$$

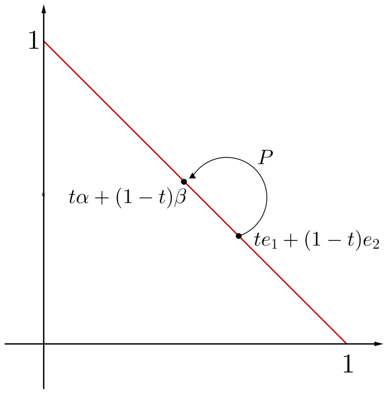

Figura 3.2: Aplicação de P sobre $[e_1, e_2]$

pois $t\alpha + (1-t)\beta = (ta_{11} + a_{12} - ta_{12}, ta_{21} + a_{22} - ta_{22})$ e a soma das coordenadas é igual a 1.

Portanto, $P([e_1, e_2]) \subset [e_1, e_2]$. Mais ainda, $P([e_1, e_2]) \neq [e_1, e_2]$, pois $e_1, e_2 \in [e_1, e_2]$ mas $e_1, e_2 \notin P([e_1, e_2])$, por não serem combinações lineares de α e β.

Agora, faremos uma mudança de coordenadas para simplificar o problema.

Para tanto vamos escolher uma parametrização invertível G de $[0, 1]$ tal que: conseguir um ponto fixo de P em $[e_1, e_2]$ seja equivalente a conseguir um ponto fixo $\overline{x}$ de $T = GPG^{-1}$ em $[0, 1]$, cuja ordenada é $\overline{y}$ e ainda $\overline{x} + \overline{y} = 1$.

Seja

$$\begin{aligned} G : [e_1, e_2] &\longrightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\longmapsto x. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Claramente, G é contínua e bijetora, pois sua inversa é

$$\begin{aligned} G^{-1} : [0, 1] &\longrightarrow [e_1, e_2] \\ x &\longmapsto (x, 1 - x), \end{aligned} \tag{3.9}$$

que também é contínua. Considere

$$\begin{aligned} T : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto GPG^{-1}(x) \end{aligned} \tag{3.10}$$

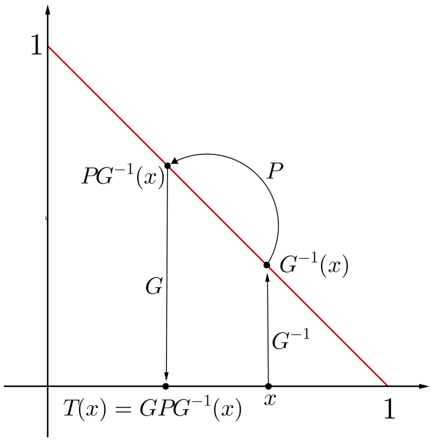

Figura 3.3: Aplicação da função composta T sobre $[0, 1]$

Ao definirmos esta função composta T, deixamos de trabalhar com sequências em $\mathbb{R}^2$ e passamos a trabalhar com intervalos fechados em $\mathbb{R}$.

Suponha que $(\overline{x}, \overline{y}) \in [e_1, e_2]$ seja um ponto fixo de P, isto é, $P \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$. Então, $\overline{y} = 1 - \overline{x}$ e

$$\begin{aligned} T(\overline{x}) &= GPG^{-1}(\overline{x}) \\ &= GP \begin{bmatrix} \overline{x} \\ 1 - \overline{x} \end{bmatrix} \\ &= G(\overline{x}, 1 - \overline{x}) \\ &= \overline{x}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, seja $\overline{x} \in [0, 1]$, tal que $T(\overline{x}) = \overline{x}$ e seja $\overline{y} = 1 - \overline{x}$. Suponhamos que $P \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{bmatrix}$, com $x_\alpha, y_\alpha \in [0, 1]$ e $x_\alpha + y_\alpha = 1$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \overline{x} &= T(\overline{x}) \\ &= GPG^{-1}(\overline{x}) \\ &= GP \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} \\ &= G(x_\alpha, y_\alpha) \\ &= x_\alpha. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Portanto, encontrar um ponto fixo de P é equivalente a encontrar um ponto fixo de T. Faremos isso na próxima seção.

3.2 Proporção de Consumo no n-ésimo Mês em Função de T^n

Note que $T = GPG^{-1} \Longrightarrow G^{-1}T = PG^{-1}$. Por indução, mostramos que $G^{-1}T^n = P^nG^{-1}, \forall n \geq 1$.

De fato, por indução temos:

(i) Já vimos que $G^{-1}T = PG^{-1}$.

(ii) Suponha que $G^{-1}T^n = P^nG^{-1}$ (hipótese de indução). Queremos mostrar que $G^{-1}T^{n+1} = P^{n+1}G^{-1}$.

De fato

$$\begin{aligned} G^{-1}T^n = P^nG^{-1} &\Longrightarrow P\left(G^{-1}T^n\right) = P\left(P^nG^{-1}\right) \\ &\Longrightarrow \left(PG^{-1}\right)T^n = \left(PP^n\right)G^{-1} \\ &\Longrightarrow G^{-1}TT^n = P^{n+1}G^{-1} \\ &\Longrightarrow G^{-1}T^{n+1} = P^{n+1}G^{-1}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Se existir $\overline{x} = \lim\limits_{n\to\infty} T^n(x_0)$ e $\overline{y} = 1 - \overline{x}$, então:

$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= G^{-1}(\overline{x}) \\ &= G^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} T^n(x_0)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} G^{-1}T^n(x_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} P^nG(x_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} P^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Assim, em vez de analisar a evolução temporal de P^n em $[e_1, e_2]$, vamos analisar a evolução temporal de T^n em $[0, 1]$.

A partir da mudança de P^n para T^n temos um novo objetivo:

(i') Existe $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$, $\forall x_0 \in [0,1]$?

(ii') O limite independe de x_0?

Note que, $\forall x \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned}
T(x) &= \left(GPG^{-1}\right)(x) \\
&= GP\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} \\
&= G\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} \\
&= G\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}(1-x) \\ a_{21}x + a_{22}(1-x) \end{bmatrix} \\
&= a_{11}x + a_{12}(1-x) \\
&= (a_{11} - a_{12})\,x + a_{12},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

perceba que o valor inicial será sempre os infiéis a B.

Assim, a função T pode ser definida analíticamente como:

$$\begin{aligned}
T : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\
x &\longmapsto (a_{11} - a_{12})\,x + a_{12}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Observe que T é linear e o gráfico é uma reta cuja inclinação é dada por

$$|T'(x)| = |a_{11} - a_{12}|, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{3.17}$$

Como $a_{11}, a_{12} \in (0,1)$, então $|a_{11} - a_{12}| < 1$. Disso e do fato da reta descrita por $f(x) = x$ ter inclinação 1, segue que tais retas se intersectam. Isto significa que $T(x) = x$ para algum $x \in (0,1)$ [7].

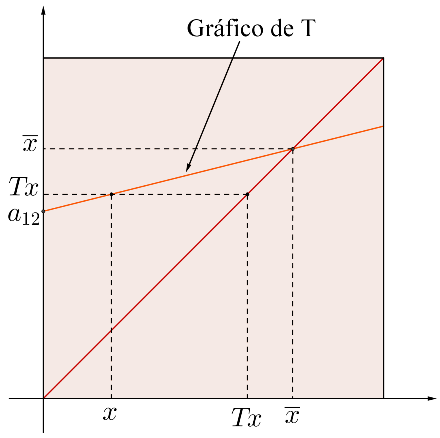

Figura 3.4: Intersecção da função T com a função f

Em outras palavras significa que T tem um ponto fixo e é único.

De fato, dado $x_0 \in [0,1]$, considere a sequência $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = T(x_1)$, …, $x_n = T(x_{n-1})$, ….

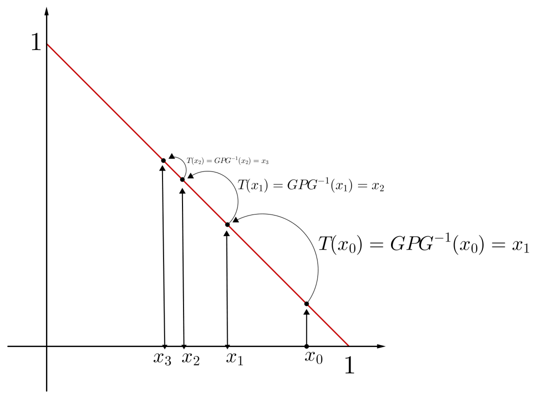

Figura 3.5: Primeiros termos da sequência (x_n)

Então, $x_n = T^n(x_0), \forall n \in \mathbb{N}$.

Se mostrarmos que tal sequência converge, teremos mostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x_0)$ existe [6]. Note que $\forall x, y \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= |(a_{11} - a_{12})x - (a_{11} - a_{12})y| = |(a_{11} - a_{12})(x - y)| \\ &\leq |(a_{11} - a_{12})||(x - y)| = \lambda|x - y|, \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $0 \leq \lambda = |(a_{11} - a_{12})| < 1$.

Disto segue que

$$\begin{aligned}
|x_{k+1} - x_k| &= |T(x_k) - T(x_{k-1})| \\
&\leq \lambda|x_k - x_{k-1}| = \lambda|T(x_{k-1}) - T(x_{k-2})| \\
&\leq \lambda^2|x_{k-1} - x_{k-2}| = \lambda^2|T(x_{k-2}) - T(x_{k-3})| \\
&\vdots \\
&\leq \lambda^k|x_1 - x_0|.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|x_{k+p} - x_k| &= |x_{k+p} - x_{k+p-1} + x_{k+p-1} - x_{k+p-2} + \ldots + x_{k+2} - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k| \\
&\leq |x_{k+1} - x_k| + |x_{k+2} - x_{k+1}| + \ldots + |x_{k+p-1} - x_{k+p-2}| + |x_{k+p} - x_{k+p-1}| \\
&\leq \lambda^k|x_1 - x_0| + \lambda^{k+1}|x_1 - x_0| + \ldots + \lambda^{k+p-2}|x_1 - x_0| + \lambda^{k+p-1}|x_1 - x_0| \\
&= (\lambda^k + \lambda^{k+1} + \ldots + \lambda^{k+p-2} + \lambda^{k+p-1})|x_1 - x_0|,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

sendo $(\lambda^k+\lambda^{k+1}+\ldots+\lambda^{k+p-2}+\lambda^{k+p-1})$ a soma dos termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é λ^k e possui razão λ, segue que

$$\begin{aligned}
|x_{k+p} - x_k| &\leq \frac{\lambda^k(1-\lambda^p)}{1-\lambda}|x_1 - x_0| = \frac{\lambda^k - \lambda^{k+p}}{1-\lambda}|x_1 - x_0| \\
&\leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda}|x_1 - x_0|.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\lambda^k}{1-\lambda}|x_1 - x_0| = 0$.

Consequentemente, $\lim\limits_{k\to\infty} |x_{k+p} - x_k| = 0, \forall p \in \mathbb{N}$.

Portanto, a sequência $(x_n) = (T^n(x_0))$ é convergente, ou seja, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = d$.

Mais ainda, sendo T contínua, $T(d) = T\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = d$. Logo, d é ponto fixo de T.

Se tivermos ainda $T(c) = c$, com $c \in \mathbb{R}$ e $c \neq d$, então $|c-d| = |f(c)-f(d)| \leq \lambda|c-d|$, logo $(1-\lambda)|c-d| \leq 0$. Como $1-\lambda > 0$, implica que $c = d$. Portanto, o ponto fixo de T é único.

O que acabamos de demostrar foi um caso particular de um resultado mais geral, conhecido como "**Teorema do Ponto Fixo para Contrações**"[6]. Fizemos toda a ánalise em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ devido a necessidade do trabalho, mas sabemos que o teorema vale para $\mathbb{R}^n$, mais ainda, vale para qualquer espaço métrico completo.

Como ele é único, segue que $d = \overline{x}$, ou seja, $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0), \forall x_0 \in [0,1]$.

Portanto, o limite (i') existe, é igual a $\overline{x}$ e independe de x_0. Consequêntemente, $\lim_{n\to\infty} P^n(x_0)$ existe, é igual a $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$ (onde $\overline{x}$ é ponto fixo de T e $\overline{y} = 1 - \overline{x}$) e independe de x_0.

3.3 Equilíbrio Natural de P^n a Partir de T^n

Conforme vimos, encontrar o equilíbrio natural $(\overline{x}, \overline{y})$ pode ser trabalhoso. Veremos agora, uma maneira de encontrar o equilíbrio natural a partir da função T:

Exemplo 3.4 *Encontre* $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$ *no caso em que* $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{bmatrix}$.

Note que o problema em questão é o mesmo do **Exemplo 3.3**, *mas agora resolveremos com extrema simplicidade utilizando a função* T *já definida.*

Como já foi demonstrado, $T(\overline{x})$ *é o ponto fixo de* T *desde que* $T(\overline{x}) = \overline{x}$*, consequentemente*

$$\begin{aligned} T(\overline{x}) = (a_{11} - a_{12})\overline{x} + a_{12} &\Longrightarrow T(\overline{x}) = (0,5 - 0,25)\overline{x} + 0,25 \\ &\Longrightarrow T(\overline{x}) = 0,25\overline{x} + 0,25 \\ &\Longrightarrow \overline{x} = 0,25\overline{x} + 0,25 \\ &\Longrightarrow 0,75\overline{x} = 0,25 \\ &\Longrightarrow \overline{x} = \tfrac{1}{3}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

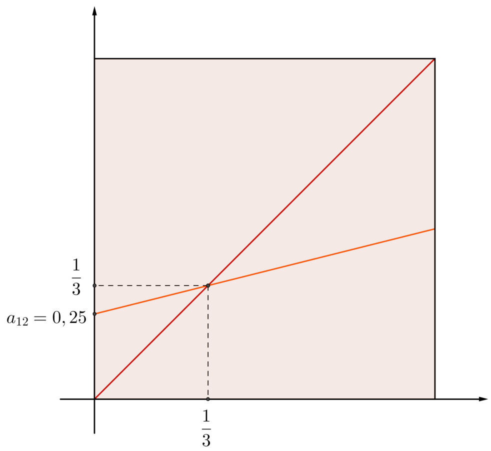

Figura 3.6: Equilíbrio natural a partir de T

Como $\overline{x} + \overline{y} = 1$, *temos*

$$\overline{x} = \frac{1}{3} \text{ e } \overline{y} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$

Logo, o equilíbrio natural pode ser interpretado também como um autovetor $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$ de P associado ao autovalor 1, sujeito a condição $\overline{x} + \overline{y} = 1$.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Boldrini, J. L., Costa, S. I., Figueredo, V., and Wetzler, H. G. *Álgebra linear*, vol. 3. Harper & Row do Brasil, 1980.

[2] Carvalho, P. C. P., de Carvalho, J. B. P., Fernandez, P., and Morgado, A. *Análise combinatória e probabilidade.* 2004.

[3] Gonçalves, M. B., and Gonçalves, D. *Elementos de análise.* UFSC, 2009.

[4] Laranjeira, M. I. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* 1997.

[5] Lima, E. L. *Curso de análise, Volume 1.* Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[6] Lima, E. L. *Curso de análise, volume 2 of Projeto Euclides.* IMPA, Rio de Janeiro, 8a ediçao, 2005.

[7] Lopes, A. *Uma Aplicação de Álgebra Linear a um problema elementar de Probabilidade.* Matemática Universitária N 18, 33-41, 1995.

[8] Nogueira, F. *Cadeias de Markov.* Disponível em: *http://www.ufjf.br/epd042/files/2009/02/cadeiaMarkov1.pdf* , Acesso em 15 de dezembro de 2015.

[9] Silva, I. A. *Probabilidade: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito.* Tese, PUC-SP, 2002.

[10] Spivak, M. *O Cálculo em Variedades. Coleção Clássicos da Matemática.* 2003.

[11] Steinbruch, A., and Paulo, W. *Álgebra linear.* 1975.