RODNEI ALVES MARQUES

RAZÃO ÁUREA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS

LAVRAS - MG
2013

RODNEI ALVES MARQUES

RAZÃO ÁUREA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador:
Prof. Dr. Mario Henrique Andrade Claudio

LAVRAS – MG
2013

Ficha Catalográfica Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca da UFLA

Marques, Rodnei Alves.

Razão Áurea: uma proposta para o ensino de números irracionais / Rodnei Alves Marques. – Lavras: UFLA, 2013.

77 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.

Orientador: Mario Henrique Andrade Claudio.

Mestrado Profissional em Matemática.

Bibliografia.

1. Números irracionais. 2. Razão Áurea. 3. Software Geogebra. 4. Ensino Fundamental. 5. Formação de professores. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 372.7044

RODNEI ALVES MARQUES

RAZÃO ÁUREA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 13 de Março de 2013

Dr. Niltom Vieira Junior	IFET
Dr. Osnel Broche Cristo	UFLA

Dr. Mario Henrique Andrade Claudio
Orientador

LAVRAS - MG
2013

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela vida, saúde e determinação.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Ciências Exatas (DEX), pela oportunidade concedida para realização do Mestrado.

À Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de estudos.

Aos Professores do Departamento de Ciências Exatas: Dr. Osnel Broche Cristo, Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa, Dr. Agnaldo José Ferrari, Dr. Ricardo Edem Ferreira, Dra. Ana Claudia Ferreira, Dr. Fábio Dadam pelos conhecimentos transmitidos e a harmoniosa convivência.

Ao Prof. Dr. Mario Henrique Andrade Claudio, orientador, companheiro e amigo em todas as etapas desta proposta, pela compreensão, paciência, sugestões, comentários e críticas, que muito contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

À minha namorada, Camila Íris Corrêa, que me deu tranquilidade, motivação e compreensão em todos os momentos desta etapa, sempre demonstrando seu amor e carinho, pois sem o seu apoio este trabalho não seria possível e, tampouco, participar do Programa de Mestrado Profissional.

Ao meu pai por acreditar em mim e sempre me incentivar estudar e a nunca desistir. À minha mãe pelas orações e pelas palavras de consolo.

Aos meus amigos: Edmilson Pereira Júnior, Viviane Netto e Enedina Lages que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos amigos e colegas, pelos aplausos e pelo entusiasmo nesta longa jornada. E a todos que, com boa intenção, colaboraram para a realização e finalização do presente estudo.

“Se por acaso omiti alguma coisa mais ou menos oportuna ou necessária, peço perdão, pois não existe ninguém que não cometa erros e seja prudente em todos os assuntos”.

Leonardo de Pisa (Leonardo Fibonacci).

RESUMO

A busca por uma regularidade na expansão decimal motivou ao desenvolvimento de novos campos da matemática, envolvendo diversas áreas da ciência. O fascínio pela Razão Áurea levou vários matemáticos a estudá-la, e esses estudos levaram a conclusões de que se trata de um número com características muito especiais, entre elas a irracionalidade e a estética. Objetivou-se neste trabalho apresentar uma proposta de atividade que enriqueça o estudo de números Irracionais no Ensino Fundamental. Optou-se por uma abordagem, baseada no aspecto histórico, manuseio de régua não graduada e compasso, método axiomático-dedutivo e no uso de tecnologias em sala de aula, em especial o *software* matemático Geogebra. Esse *software* se torna uma ferramenta adicional para o aprendizado, pois a sua utilização na etapa final de cada atividade apresenta o conteúdo de uma forma atraente e lúdica para construção do conhecimento.

Palavras chave: Números Irracionais. Razão Áurea. *Software* Geogebra.

ABSTRACT

The search for regularity in the decimal expansion induced the development of new field in mathematics, involving many areas of science. The fascination by the Golden Ratio has led many mathematicians to study it, and these studies led to conclusions of what comes to be a number with very special characteristics. Among these are irrationality and aesthetics. This work aimed at presenting a proposal of activity which enriches the study of irrational numbers in Primary School. We opted for an approach based on the historical aspect, handling of a non-graduated ruler and compass, deductive-axiomatic method and on the use of technologies in the classroom, especially the Geogebra mathematical software. This software has become an additional tool for learning, for its use in the final stage of each activity presents the content in an attractive and playful form in constructing knowledge.

Keywords: Irrational Numbers. Golden Ratio. Geogebra software.

LISTA DE ABREVIATURAS

FIG.	Figuras
CQD.	Como queríamos demonstrar
TAB.	Tabela

LISTA DE SIGLAS

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
FEUSP	Faculdade de Educação da Universidade Federal de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

$<$	Menor
$>$	Maior
$\leq$	Menor igual
$\geq$	Maior igual
$=$	Igual
$\forall$	Para todo
$\approx$	Semelhante
$\cong$	Congruente
$\exists$	Existe
$\nexists$	Não existe
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\cap$	Intersecção
$\cup$	União
$\Longrightarrow$	Implica que
$\therefore$	Portanto
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números Inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números Racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números Reais
I	Conjunto dos números Irracionais
$\overline{AB}$	Segmento de reta de origem no ponto *A* e término em *B*
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta com origem no ponto *A* e passa pelo ponto *B*
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta que passa pelos pontos *A* e *B*
$\measuredangle ABC$	Ângulo de vértice no ponto *B*
$arc(AB)$	Arco de circunferência do ponto *A* ao ponto *B*
ΔABC	Triângulo com vértices nos pontos *A*, *B* e *C*
$med(\overline{AB})$	Medida do segmento $\overline{AB}$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos números Reais – conjunto formado pelos números Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais[1] – é retomado várias vezes no ensino básico, visando acompanhar a evolução do aluno. Porém, enquanto os outros números são amplamente discutidos, os Irracionais são trabalhados apenas de forma superficial ao longo do terceiro ciclo do Ensino Fundamental.

De acordo com Pommer (2011), os números Irracionais geralmente não são ensinados no ensino básico com a devida complexidade. Ou seja, os números irracionais são tratados com viés empírico e simplificado, o que descaracteriza aspectos essenciais que permitiriam entender a natureza semântica deste tema. Em seu trabalho apresentado no Encontro Paranaense de Educação Matemática em que foram analisados livros indicados pelo PNLD (Plano Nacional do Livro Didático), Pommer concluiu:

> que os aspectos destacados nos livros didáticos somente iniciam um processo de explicar o conceito de números irracionais. Há uma lacuna entre a introdução inicial das raízes inexatas, feita através de uma abordagem pseudo-empírica, relatando situações e contextos práticos e, posteriormente, há a introdução do conceito de número irracional. Deste modo, as coleções analisadas não destacam aspectos essenciais frente à problemática e à complexidade do tema.
> (POMMER, 2011, p.10)

Analisando a história da matemática, percebe-se que os conceitos matemáticos foram construídos como respostas a questionamentos provenientes de diferentes contextos. Prova disso é que os números Irracionais surgiram como resposta do homem à necessidade de comparar medidas no momento em que a

[1] Números com representação decimal infinita e não periódica.

habilidade de contar, que ele dominava, já não era suficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza cabe em dois segmentos diferentes, ou seja, a incomensurabilidade[2].

Nos dias atuais, depara-se com desafios e dificuldades que podem vir a gerar o insucesso escolar de muitos estudantes, o que vem a retroalimentar a necessidade de aprimorar o trabalho com os conteúdos e a didática em sala de aula. Isso sugere, então, uma metodologia de trabalho que priorize abordagens cada vez mais ricas e consistentes, propiciando o desenvolvimento cognitivo.

Neste trabalho, é proposto como método de estudo despertar a curiosidade dos educandos sobre os números Irracionais, por meio de uma breve exposição histórica da Razão Áurea[3]. Essa abordagem é acompanhada de descrições e análises desde o seu suposto surgimento, passando pelo primeiro registro até os dias de hoje. Também é discutida sua utilização na arte, na arquitetura e os mitos que a cercam.

O ensino da matemática por intermédio da história é reforçado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (Brasil, 2005), que indicam que:

> em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.
> (PCN, 2005)

Em um segundo momento, faz-se uma representação numérica da Razão Áurea, acompanhada com uma introdução teórica e propriedades algébricas interessantes que podem ser desenvolvidas junto aos alunos com a finalidade de

[2] Segmentos que não possuem unidades de medidas comuns são incomensuráveis.
[3] Modo especial de dividir um segmento em duas partes.

aproximá-los da matemática pura, caracterizada como metodologia axiomático-dedutiva.

Por fim, são apresentadas três atividades práticas com a utilização de uma régua não graduada e compasso e o *software* matemático Geogebra para a construção do Ponto Áureo de um segmento, Retângulos[4] e Triângulos Áureos. Uma abordagem dessa forma possibilitará ao aluno comparar a matemática do passado com a do presente, bem como desenvolver valores favoráveis para sua melhor aprendizagem.

Esse estudo disponibiliza aos professores uma ferramenta didática que permite lidar com a prática dos números Irracionais, por meio do Número Áureo, de forma a favorecer o aprendizado deste conteúdo pelos discentes. Para isso, é reforçada a linha pedagógica sobre o aspecto histórico e a metodologia axiomático-dedutiva, que permitirão abordar a irracionalidade e a incomensurabilidade de forma lúdica e prazerosa. Serão despontadas no item seguinte, as metodologias a serem utilizadas nas atividades.

---

[4]Retângulo com comprimento e largura na Proporção Áurea.

2 METODOLOGIA

Nesta proposta acredita-se que o conhecimento é adquirido a partir da construção coletiva ou individual dos discentes. Nesse sentido serão utilizadas quatro metodologias, abalizadas na bibliografia de Zabala (1998) e Pitombeira (2010), em que o eixo principal é a formação participativa e qualitativa do aluno. Essas metodologias são: 1) Contextualização histórica. 2) Experimentos e Construções. 3) Método axiomático-dedutivo. e 4) Tecnologias em sala de aula.

2.1 Contextualização histórica

A primeira metodologia de trabalho é a contextualização histórica. Essa contextualização auxilia o aluno a desmistificar a ideia de que a matemática é uma ciência estagnada, acabada e, acima de tudo, inatingível.

Apresentar a matemática construída por diferentes povos, em diferentes épocas, ajuda os alunos a entenderem os conceitos, procedimentos e sistemas matemáticos. Ademais, a interdisciplinaridade entre a matemática e a história contribui para formação do educando, uma vez que evidencia o conhecimento não compartimentado.

2.2 Experimentos e construções

Os experimentos e construções, segunda metodologia desta proposta de trabalho, possibilita que o aluno veja, explore e sinta de forma concreta, conceitos e propriedades matemáticas, por meio do uso de régua e compasso. A utilização desses recursos proporciona o desenvolvimento de uma habilidade matemática muito importante, a de fazer comprovações.

Por meio da verificação das teorias matemáticas, em exemplos específicos e concretos, os alunos começam a perceber que as propriedades podem ser verídicas ou, por outro lado, questionar sobre sua veracidade. Esses experimentos e construções são práticas essenciais a serem desenvolvidas pelos discentes, para que eles entendam a validade da propriedade, e não se limitem a apenas gravá-la e memorizá-la.

2.3 Método axiomático-dedutivo

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2005), para o ensino fundamental, enfatizam a importância da demonstração em matemática, procurando dar orientações para o estudo de teoremas pelos alunos, com posterior demonstração formal, privilegiando as conjecturas e as relações que as vinculam com o discurso teórico.

A terceira metodologia utilizada, axiomático-dedutiva, está relacionada a um processo de validação de um fato matemático e que o registro de uma demonstração deve ser apoiado em axiomas ou argumentos matemáticos já comprovados. O encadeamento lógico desses argumentos deve convencer os discentes da veracidade da proposição matemática em questão, ficando, a mesma, portanto, demonstrada.

Durante o estágio seguinte da prova, o estudante pode organizar, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas ("argumentos") garantindo, assim, sua participação na construção do conhecimento.

2.4 Tecnologias em sala de aula

As tecnologias da informação e da comunicação, quarta metodologia empregada, estão cada vez mais inseridas na sociedade. O seu uso no cotidiano é evidente, com exemplos notórios nos bancos, supermercados, farmácias, entre outros. Portanto, a utilização dessas tecnologias em classe é essencial para a formação de um cidadão pleno, que possa desenvolver e aplicar o seu conhecimento matemático no dia a dia e consiga aproveitar as potencialidades desses recursos para sua aprendizagem.

Os *Softwares* matemáticos oferecem ferramentas que facilitam o desenvolvimento e o entendimento de conceitos. Dentre outras possibilidades, o uso de figuras elaboradas em aplicativos pode auxiliar o aluno a entender as figuras geométricas como classes, diferenciando-as de um simples desenho. As novas tecnologias contribuem para a construção de teorias que permitem fazer simulações de técnicas e procedimentos matemáticos.

Essa proposta metodológica visa ao uso dos programas de computador como suporte para o trabalho de simulações de atividades pedagógicas. Esse método é facilitador para a realização de trabalhos em grupos, objetivando completar os blocos de exercícios sequenciados, ou até mesmo melhorá-los, já que podem incluir a autocorreção.

Contudo, a aprendizagem exige um contexto de intercâmbios afetivos. Por este motivo, o uso dos suportes da informática não tem que nos levar a uma situação de trabalho estritamente individual e, sim, como mais um dos recursos que pode ser utilizado para alcançar determinados objetivos educacionais da melhor maneira possível.

Segue no item seguinte, um breve histórico da Razão Áurea, que se apresenta como um método de estudo capaz de despertar a curiosidade dos educandos sobre os números Irracionais, em especial, o Número Áureo.

3 BREVE HISTÓRICO DA RAZÃO ÁUREA

Será iniciado o breve histórico com o autor de um dos livros mais importantes da história matemática: Euclides. A vida desse autor é tão misteriosa que até mesmo o local do seu nascimento é desconhecido. É muito provável que ele tenha estudado em Atenas, com alguns dos alunos de Platão, já que Proclo (485 d.C.) diz a seu respeito:

> esse homem viveu no tempo do primeiro Ptolomeu... ele é, então, mais novo que os discípulos de Platão, porém mais velho do que Erastótoles e Arquimedes. (PROCLO *apud* LÍVIO, 2011, p. 94)

No livro *Elementos*, de Euclides (300 a.C.), uma obra de treze volumes sobre geometria e teorias dos números, aparece a primeira definição da Razão Áurea, denominada como razão extrema e média. Ele estava interessado na interpretação geométrica e em seu uso na construção do pentágono e de alguns sólidos platônicos.

A definição de Euclides no Livro IV de Razão Média e Extrema é que: Observando a Figura 1,

Figura 1- Segmento dividido na proporção Áurea

Se a linha AB é dividida pelo ponto C, então: (segmento maior)/(segmento menor) é igual a (segmento inteiro)/(segmento maior), em outras palavras:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

De acordo com Lívio (2011), em *Elementos*, Euclides tentou abranger a maior parte do conhecimento matemático de seu tempo. Então, antes do primeiro registro, deve-se analisar um pouco da história do pentagrama e sua relação estreita com a Razão Áurea.

Alguns dos mais antigos registros da história do pentagrama vêm da Mesopotâmia, mais especificamente em Uruk, por volta de 3.200 a.C.. Nesta época formas de pentagrama foram encontradas em tabuleta de argila e, também, em Jemdet Nasr, onde foi identificado em um vaso e uma rosca de Girar.

Também foram encontrados pentagramas em outra região do antigo Oriente Médio, especificamente no deserto de Israel, esses estavam representados em raspadores de pedra do período calcolítico (4.500 a.C. – 3.100 a.C.). Diante disso, paira uma dúvida se essas civilizações antigas estavam cientes das propriedades geométricas dessas figuras, em particular da Razão Áurea.

Apesar dos Babilônios (2.000 a.C.) terem aproximações para a o número irracional Pi, não existe absolutamente qualquer evidência matemática de que eles tinham ciência da Razão Áurea.

Já no antigo Egito o estudo deve ser mais cuidadoso, pois se depara com fortes evidências de que a Razão Áurea pode ser encontrada nas proporções da grande pirâmide de Gizé e em outros monumentos egípcios antigos. Embora seja possível identificar que a Razão Áurea apareça em artefatos egípcios, em algumas dimensões e medidas, não é possível provar com documentações ou projetos arquitetônicos as extensões dessas obras de arte. São dos matemáticos gregos os primeiros registros do estudo sobre a Razão Áurea, em cujo meio intelectual se insere Pitágoras.

Pitágoras nasceu por volta de 570 a.C. na ilha de Samos, no mar Egeu, e migrou entre os anos 530 e 510 para Crotona, uma colônia ao sul da Itália. Pitágoras aparentemente não escreveu nada, mesmo assim sua influência era tão grande que seus seguidores mais aplicados formaram uma sociedade secreta e eram conhecidos como pitagóricos.

Para os pitagóricos, o número cinco era de suma importância. Prova disso é o fato do pentagrama, isto é, uma estrela de cinco pontas ser o símbolo dessa irmandade. Ele tem relação estreita com o pentágono regular, pois conectando todos seus vértices por diagonais é obtido o pentagrama. No pentágono regular $ABCDE$, (FIG. 2), tem-se que suas diagonais determinam um pentagrama e, também, um pentágono regular menor $FGHIJ$ no centro, cujas diagonais formam um pentágono e um pentagrama ainda menor. Essa progressão pode prosseguir infinitamente, criando pentágonos e pentagramas cada vez menores.

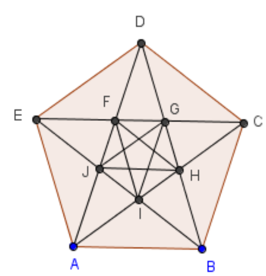


Figura 2 – Representação do pentagrama

Uma propriedade notável dos diversos pentagramas representados na (FIG.2) é que se olharmos os segmentos de linha em ordem crescente de comprimento podemos provar facilmente, por meio da geometria elementar, que cada segmento é maior que seu antecessor por um fator que é exatamente igual ao Número Áureo. Mais importante ainda, podemos usar o processo de criar uma série de pentágonos e pentagramas encaixados indefinidamente com tamanhos cada vez menores, para provar rigorosamente que a diagonal e o lado do pentágono são incomensuráveis, ou seja, que não possuem medidas comuns entre si.

Conforme Lívio (2011), Kurt Von Fritz entre outros pesquisadores, sugere que os pitagóricos foram os primeiros a descobrir a Razão Áurea e a incomensurabilidade. Entre eles destaca-se a pessoa de Hipaso de Metaponto, que utilizou o pentagrama e o pentágono, combinados com o conhecimento geométrico de meados do século V a.C., para descobrir a irracionalidade. Contrapondo a opinião mais tradicional de que esses conceitos foram inicialmente observados por meio da razão entre a diagonal e o lado do quadrado.

Platão (428 a.C.), uma das mentes mais influentes da Grécia antiga, foi influência nos trabalhos da sua e de outras gerações, sobretudo por duas áreas: 1) a incomensurabilidade e 2) os sólidos Platônicos. A primeira área reconhece que da mesma forma que um número par pode ser a soma de dois pares ou de dois ímpares, a soma de dois números irracionais pode ser ou não um irracional, uma linha reta racional dividida numa seção Áurea fornece um exemplo desse caso. Já na segunda os sólidos Platônicos, dodecaedro e o icosaedro possuem suas áreas e volumes diretamente ligados à Razão Áurea.

Existem divergências quanto ao uso ou não da Razão Áurea no Pathernon, ele foi seriamente questionado por George Markowsky, matemático da Universidade do Maine em 1992, em seu artigo intitulado "Conceitos equivocados sobre a Razão Áurea", do *College Mathematics Journal*, Markowsky aponta o fato de que partes do Parthenon, na verdade, ultrapassam o esboço do Retângulo Áureo. Dessa forma, não se pode afirmar que a Razão Áurea foi usada no projeto do Parthenon, pois embora os pitagóricos possuíssem considerável conhecimento, a maioria dos teoremas matemáticos referentes à Razão Áurea parece ter sido formulada após a construção do Parthenon. Logo sua construção pode ter sido baseada em alguma noção predominante de padrão estético.

O último grande Geômetra grego que desenvolveu teoremas relacionados à Razão Áurea foi Pappus de Alexandria (340 d.C.), que apresentou um novo método de construção do dodecaedro e do icosaedro, já trabalhados por Platão, e com comparações entre os volumes dos sólidos platônicos, todos envolvendo a Razão Áurea. Após sua morte e com a curiosidade intelectual do ocidente totalmente devastada, em função de ataques à biblioteca de Alexandria por romanos, cristãos e mulçumanos e o fim da Academia de Platão em 529 d.C., o interesse pela Razão Áurea entrou em um longo período de hibernação. O salto significativo teve de esperar o aparecimento do mais ilustre matemático da idade média, Leonardo de Pisa.

Leonardo de Pisa (1170-1240), mais conhecido como Leonardo Fibonacci, em seu livro *Practica Geometriae* (Prática de Geometria), publicado em 1223, apresentou novos métodos para o cálculo da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do decágono, a partir do diâmetro do círculo inscrito e circunscrito e computações de volumes do dodecaedro e do icosaedro, todos intimamente ligados à Razão Áurea. Contudo, sua contribuição mais importante e que lhe trouxe mais fama, deriva de um problema aparentemente inocente, que consta no seu livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco - 1202):

> um Homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano, se supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês. (PISA, *apud* LIVIO, 2011, p.116)

O número de pares de adultos segue a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,... Sendo cada termo, a partir do terceiro, igual a soma dos dois termos anteriores. Ela foi denominada no século XIX, pelo matemático Frances Edouard Lucas (1842-1891) por sequência de Fibonacci. À medida que se avança nessa sequência, a razão entre dois números sucessivos de Fibonacci oscila em torno da Razão Áurea (TAB.1), propriedade descoberta em 1611 pelo famoso astrônomo Johannes Kepler.

TABELA 1
Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea

Seqüência de Fibonacci	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Razão		1	2	1,5	1,666...	1,6	1,625	1,615...	1,619...	1,618...	1,618...

O francês Luca Pacioli, nascido em 1445, durante a estadia em Milão, completou o trabalho de três volumes intitulados *Divina Proportione* (A Proporção Divina). Foram publicados em 1509, detalhando a Razão Áurea em estudo dos sólidos geométricos e outros poliedros. Esse trabalho expressou o desejo de revelar a artistas, por meio da Razão Áurea, o segredo das formas harmônicas e, para assegurar sua atratividade, obteve os serviços do ilustrador dos sonhos de qualquer escritor, o próprio Leonardo Da Vinci.

O segundo volume de *Divina Proportione* é um tratado sobre proporções e suas aplicações na arquitetura e na estrutura do corpo humano. O tratamento de Pacioli foi baseado, em grande medida, no trabalho do eclético arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (70 a.C. – 25 a.C.).

Vale ressaltar que, antes de Pacioli, a Razão Áurea era conhecida apenas por nomes pouco referenciados como “Razão extrema e média” ou “Proporção que tem uma média e dois extremos”. A divulgação de A Divina Proporção, em 1509, renovou o interesse pela Razão Áurea.

Em outubro de 1597, o persistente interesse de Kepler produziu um resultado interessante (FIG.3):

> se uma linha dividida nas razões médias e extrema se constrói um triângulo retângulo, de modo que o ângulo reto esteja sobre a perpendicular colocada no ponto de secção, então o lado menor terá o mesmo tamanho do maior segmento da linha dividida. (KEPLER *apud* LÍVIO, 2011, p.173).

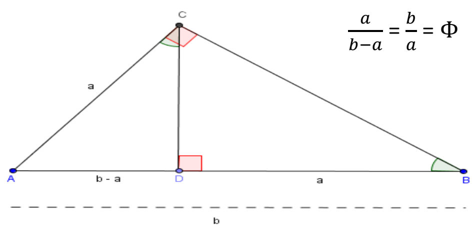


Figura 3 – Triângulo de Kepler

Kepler acreditava que a Razão Áurea serviu como instrumento fundamental de Deus na criação do universo. Ele suportou provações inimagináveis, entre elas a perda de três filhos em menos de seis meses. Morreu no dia 15 de novembro de 1630 e foi enterrado em Regensburg e de modo condizente com sua vida turbulenta, as guerras destruíram seu túmulo sem deixar vestígios.

Em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillipe Marie (1786-1856) descobriu a fórmula[5]:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

que aparentemente já era conhecida por Leonard Euler (1707-1783) e permite encontrar o valor de qualquer número de Fibonacci em função de sua posição n na sequência.

[5]Demonstração: HENFEZ, Abramo. Elementos de Aritmética. 2ed. SBM, 2011. Pag. 26.

O Renascimento produziu uma importante mudança de direção na história da Razão Áurea. A partir de então, esse conceito deixou de ficar restrito à matemática e encontrava seu caminho nas explicações dos fenômenos naturais e nas artes.

O primeiro artista e teórico da arte a utilizar a Razão Áurea foi, provavelmente, o francês Paul Sérusier (1864-1927). Principalmente para verificar e, ocasionalmente, checar suas invenções de formas e suas composições. Segundo Sérusier o conceito de Razão Áurea se propagou em outros círculos artísticos, especialmente os cubistas como Juan Cris (1887-1927) e o escultor Jaques Lipchitz (1891-1973).

Outro teórico da arte que teve grande interesse pela Razão Áurea no início do século XX foi o americano Jay Hambdge (1867-1924), que definiu uma simetria que chamou de *Simetria Dinâmica* e continha a espiral logarítmica, que é diretamente ligada à Razão Áurea.

O italiano Mário Merz (1925-1967) por sua vez, foi o artista que transformou a sequência de Fibonacci em um importante ingrediente de sua arte. Ele se baseia no fato da sequência estar por trás de vários padrões de crescimento na natureza.

Outro defensor vigoroso da aplicação da Razão Áurea na arte e na arquitetura, segundo Doczi, foi o Suíço Charles Edouard Jeanneret (1887-1965), mais conhecido como Le Corbusier. A busca por uma proporção padronizada culminou na introdução de um novo sistema proporcional chamado *Modulor* que supunha fornecer uma medida harmônica baseada na escala humana e universalmente aplicável na arquitetura (FIG.4).

Salvador Felipe Jacinto Dali Doménech, Marquês de Pubol, um dos mais importantes pintores contemporâneos (faleceu em 1989), mestre do surrealismo, é mais conhecido como Salvador Dali. Sua obra “O Sacramento da Última Ceia”, mostrada na (FIG.5) não é a mais conhecida, mas é o mais ilustrativo exemplo do uso da proporção Áurea e de símbolos correlatos nas artes plásticas.

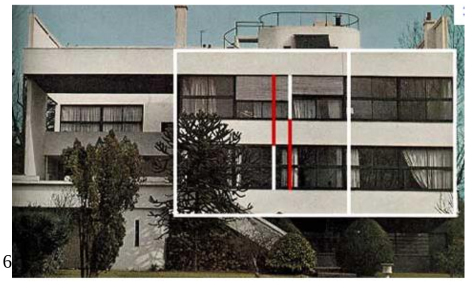
[6] 

Figura 4-Obra de Le Corbusier no subúrbio de Paris

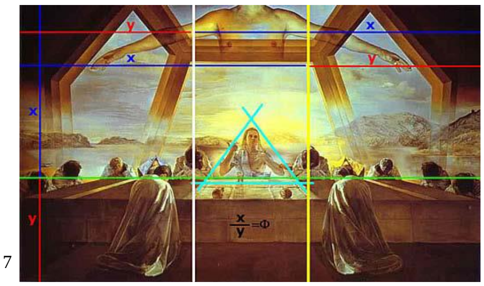
[7] 

Figura 5-“O Sacramento da Última Ceia”

Em algumas obras, tais como: *Madonna Ognissanti* (Giotto di Bondone), *Madonna Rucellai* (Siena Duccio di Buoninsegna), *Madonna Santa Trinita* (Cenni de Pepo), obras de Leonardo da Vinci como *Virgem dos Rochedos*, *São Jerônimo* e *Mona Lisa* e, também, pinturas do pontilista francês Georges Seurat (1859-1891), não puderam ser comprovadas o uso da Razão Áurea, além de estarem mais inclinadas à proporção 1,6, não é possível comprovar o emprego de números Irracionais somente com medições.

Em 1999, no trabalho do cientista da computação Divakar Viswanath, aluno de pós-doutorado no *Mathematical Sciences Research Institute* na Califórnia, ele se perguntou: Suponha que você comece com os números 1, 1, como na sequência original de Fibonacci, mas agora, em vez de somar os dois números, para obter o terceiro, joga-se uma moeda para decidir se se somam os dois ou se subtrai o último número do anterior. Ele observou que se ignorassem os sinais negativos, a raiz *n*-ésima do n-ésimo número da sequencia é bem próxima do número irracional 1,13198824... e quanto mais alto fosse o termo da sequência, mais próximo desse número seria.

[6] Disponível em: www.google.com.br/serach?q=obras+de+le+corbusier&hl.
[7] Disponível em: www.bpiropo.com.br/pc20070266.html.

A importância do trabalho de Viswanath se deve não só à descoberta de uma nova constante matemática, mas ao fato de que isso ilustra muito bem como aquilo que aparenta ser um processo totalmente aleatório pode levar a um resultado inteiramente determinístico. Outra importante lição retirada do seu trabalho é que até mesmo um problema aparentemente trivial de oitocentos anos ainda pode surpreender.

Esse breve histórico traçado sobre a Razão Áurea, na qual se inclui uma possível origem dos números Irracionais, auxilia a desmistificar a ideia de que a matemática é uma ciência estagnada, conforme afirmado anteriormente. No item seguinte será exposta uma introdução teórica sobre o Número Áureo.

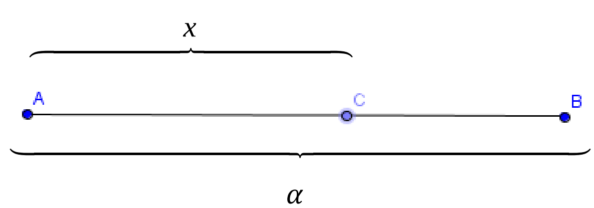
4 INTRODUÇÃO TEÓRICA: O NÚMERO ÁUREO

Nesta seção serão apresentadas demonstrações algébricas relacionadas à Razão Área, que podem ser desenvolvidas junto com os alunos, como atividade ou avaliação, com objetivo de aproximá-los da matemática pura. Essas demonstrações, caracterizadas como um método axiomático-dedutivo, são importantes, pois poderão dar aos discentes orientações para o estudo da Razão Áurea, conforme afirmam os PCNs (Brasil,2005).

4.1 Determinação do Número Áureo

Diz-se que um segmento $\overline{AB}$ está dividido na Razão Áurea quando o é seccionado por um ponto C em duas partes, de tal forma que a maior parte seja média proporcional entre o menor e o segmento todo, em outras palavras:

$$\frac{med(\overline{AC})}{med(\overline{CB})} = \frac{med(\overline{AB})}{med(\overline{AC})}$$



Designando $med(\overline{AC})$ = x e $med(\overline{AB})$ = α (em uma apresentação inicial, recomenda-se utilizar $\alpha = 1$ para uma melhor compreensão dos estudantes e, posteriormente, passa-se para a generalização), pretende-se achar x de tal forma que:

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$$

Sendo x e $(\alpha - x)$ valores não nulos, multiplicam-se ambos os lados por $x(\alpha - x)$, obtendo a equação:

$$x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$$

Deve-se achar o valor de x que satisfaça essa equação do segundo grau, logo:

$$x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4.1.(-\alpha^2)}}{2.1},$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{\alpha(-1-\sqrt{5})}{2} < 0 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{\alpha(-1+\sqrt{5})}{2} > 0$$

Como se trata de medidas positivas considera-se $x_2 > 0$, portanto,

$$\frac{\alpha}{x_2} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha(-1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}},$$

Racionalizando[8],

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180...$$

Esse valor é representado pela letra grega $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.2 Demonstração que o Número Áureo é Irracional

Para demonstrar que o Número Áureo é Irracional será empregado o mesmo método utilizado por Aristóteles[9], "Redução ao Absurdo"[10].

[8] Obter uma fração equivalente com denominador racional

Primeiramente a demonstração que $\sqrt{5}$ é um número Irracional: Suponha que $\sqrt{5}$ seja racional, logo $\exists$ p, $q \in \mathbb{N}$, primos entre si, tal que $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$. Elevando ao quadrado ambos os lados, obtém-se:

$$5 = (\frac{p}{q})^2 \quad \Rightarrow \quad 5q^2 = p^2$$

Como os expoentes resultantes da decomposição em fatores primos de todo quadrado perfeito são pares, chegamos a um absurdo, pois o expoente do número 5 é impar, logo $\sqrt{5}$ é um número Irracional.

Agora a demonstração que $\beta(\sqrt{5} + \alpha)$, $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}$, é irracional: Suponha que $\beta(\sqrt{5} + \alpha)$ seja racional, logo $\exists$ p, $q \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(\sqrt{5} + \alpha) = \frac{p}{q}$, então:

$$\sqrt{5} = \frac{p}{\beta q} - \alpha \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5} = \frac{p - \alpha\beta q}{\beta q}, \quad \text{mas} \quad \frac{p - \alpha\beta q}{\beta q} \in \mathbb{Q}$$

o que é um absurdo, pois como provado anteriormente $\sqrt{5}$ é Irracional.

Fazendo $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$ provamos que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um número Irracional.

4.3 Propriedades do Número Áureo Φ

O número Áureo tem várias propriedades, dentre elas:

---

[9] Bibliografia auxiliar: Tópicos de História da Matemática, Tatiana Roque.
[10] Assume-se como verdade o contrário do que queremos provar e, então, chega-se a uma contradição.

1) O Número Áureo tem a propriedade de produzir seu quadrado simplesmente somando a si mesmo o número 1, ou seja, $\Phi^2 = \Phi + 1$ e o seu inverso, subtraindo o número 1 de si mesmo, ou seja, $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.

$$\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) . \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} =$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi$$

2) Somar duas potências naturais consecutivas de Φ resulta na próxima potência de Φ. Como já se sabe que $\Phi^2 = 1 + \Phi$ então, segue que:

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^n(1 + \Phi) = \Phi^n . \Phi^2 = \Phi^{n+2} \ , \forall \, n \in \mathbb{N}$$

4.4 Triângulo retângulo e a Razão Áurea

Se sobre a hipotenusa a e os catetos b e c de um triângulo retângulo, sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$, são construídos Retângulos Áureos, então a soma das áreas dos Retângulos Áureos sobre os catetos será igual à área do Retângulo Áureo sobre a hipotenusa (FIG.6).

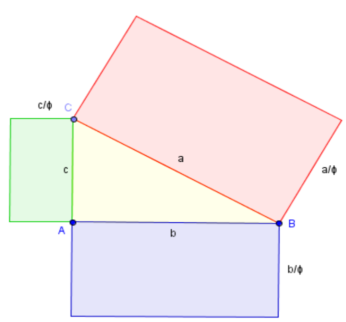


Figura 6 – Triângulo retângulo e a Razão Áurea

Para provar essa afirmação será utilizado o teorema de Pitágoras[11].

Sejam os Retângulos Áureos de comprimento b e larguras $\frac{b}{\Phi}$ e comprimento c e largura $\frac{c}{\Phi}$, então:

$$b.\frac{b}{\Phi} + c.\frac{c}{\Phi} = \frac{b^2}{\Phi} + \frac{c^2}{\Phi} = \frac{a^2}{\Phi} = a.\frac{a}{\Phi}$$

Que é exatamente a área do Retângulo Áureo de comprimento igual a a e largura $\frac{a}{\Phi}$.

4.5 Triângulo de Kepler

Segundo Kepler:

> Se numa linha dividida nas razões médias e extrema se constrói um triângulo retângulo, de modo que o ângulo reto esteja sobre a perpendicular colocada no ponto de secção, então o lado menor terá o mesmo tamanho do maior segmento da linha dividida. (KEPLER *apud* LÍVIO, 2011, p.173), (FIG.7).

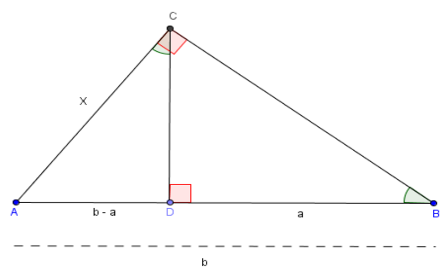


Figura 7 – Triângulo de Kepler

Demonstração:

[11] Dado um ΔABC com ângulo $\measuredangle BAC$ reto se $med(\overline{BC})= a$, $med(\overline{AB})=c$ e $med(\overline{AC})= b$ então: $a^2 = b^2 + c^2$

De acordo com a definição de Euler e observando a (FIG.7), pode ser deduzido que:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \qquad (1)$$

Pelo caso (Ângulo, Ângulo)[12] da semelhança de triângulos conclui-se que $\triangle ADC \approx \triangle ACB$, portanto,

$$\frac{x}{b} = \frac{b-a}{x} \text{ , ou seja, } x^2 = b(b-a) \qquad (2)$$

De acordo com (1), pode-se deduzir que:

$$b = a.\Phi \quad \text{e} \quad (b-a) = \frac{a}{\Phi} \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (2) obtém-se:

$$x^2 = (a.\Phi).(\frac{a}{\Phi}) \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a \qquad \text{CQD.}$$

Nos itens anteriores foram explicitadas as duas primeiras etapas propostas para a introdução do conceito de irracionalidade no ensino fundamental: 1) Um breve histórico da Razão Áurea. e 2) A demonstração ou o Método axiomático-dedutivo por meio da Introdução Teórica.

As próximas duas etapas deste trabalho que são: 3) Os experimentos e construções. e 4) Tecnologias em sala de aula; serão apresentadas por meio de três atividades. Nessas atividades estão incluídos: o passo a passo dos procedimentos usados com a régua e o compasso, as demonstrações sobre o que está sendo desenvolvido e a utilização do *software* Geogebra.

---

[12] Se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes, logo são semelhantes.

5 ATIVIDADES

Nesta parte serão apresentadas três atividades, com suas respectivas soluções, que podem ser trabalhadas pelo professor, com intuito de enriquecer o ensino de números Irracionais. Na atividade I é apresentada a construção do Ponto Áureo de um segmento, nas atividades II e III, a construção do Retângulo e do Triângulo Áureo. E, em cada uma, são desenvolvidos os procedimentos usados com a régua e o compasso, as demonstrações sobre o que está sendo desenvolvido e, por fim, a utilização do *software* Geogebra. Fica como sugestão deixar uma das atividades como exercício de avaliação.

5.1 Competências e habilidades

Refletir sobre como melhorar o desempenho dos alunos com uma atividade pressupõe, antes de tudo, pensar nos objetivos a serem alcançados. Baseado na Matriz de Referência (INSTITUTO DE AVALIAÇÃO E DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL – INADE, 2012), essa proposta de atividade tem como metas capacitar o estudante para que ele possa construir significado para os números Irracionais e os reconheça como parte integrante dos números Reais, além disso, o educando deve ser capaz de utilizar representações algébricas na produção e interpretação de escritas matemáticas e, por fim, usar o conhecimento geométrico para fazer a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela utilizando noções de proporcionalidade entre medidas de segmentos.

5.2 Público alvo

Estudantes do 9º ano do ensino fundamental, por possuírem maior maturidade e mais conhecimentos nesta etapa escolar.

5.3 Pré-requisito

- Números Racionais.
- Definições de: Ponto Médio, Mediatriz, Segmento de reta, Reta perpendicular.
- Razão[13] e Proporção[14].
- Semelhança de triângulos;
- Conceitos básicos do *Software* Geogebra.
- Noções básicas de construção geométrica[15].

5.4 Tempo previsto para aplicação

- A parte histórica, já mencionada neste estudo, requer uma aula de 50 minutos.
- Na introdução teórica a proposta é uma aula de 50 minutos.
- Em cada atividade serão utilizadas duas aulas de 50 minutos, subdivididas em:

1ª aula: Apresentação do tema e o desenvolvimento com régua e compasso.

2ª aula: Laboratório de informática para utilização prática do *Software* Geogebra.

5.5 Avaliação

A finalidade da avaliação é ser um instrumento educativo que informa e faz uma valoração do processo de aprendizagem, seguido pelo aluno,

[13] Divisão entre dois números
[14] Igualdade entre duas razões
[15] Bibliografia auxiliar: GIONGO, Afonso Rocha. Curso de Desenho Geométrico.

com o objetivo de lhe oportunizar, em todo momento, as propostas educacionais mais adequadas.

Os conteúdos desenvolvidos nas atividades apresentadas, diz respeito a construir um significado para os números Irracionais, além de produzir e interpretar escritas algébricas e geométricas por meio do estudo do Número Áureo. Deve-se verificar o que o aluno aprendeu sobre esse conteúdo. Portanto, a avaliação poderá ser desenvolvida por uma prova ou trabalho que aborde a irracionalidade e os conceitos algébricos e geométricos sobre a Razão Áurea. Já os conteúdos procedimentais, que envolvem a prática com régua e compasso e o *Software* Geogebra, implicam no interesse de fazer, e o conhecimento sobre esse interesse pode ser verificado pelo professor por meio da participação do discente ao longo do desenvolvimento da presente proposta.

5.6 Dificuldades previstas

São conhecidas as dificuldades estruturais enfrentadas pelas instituições públicas no Brasil, portanto, é bem possível que algumas escolas não estejam equipadas com laboratórios de informática, o que dificulta a realização da terceira etapa de cada atividade, o uso do *Software* Geogebra. Nesse caso, torna-se fundamental maior ênfase ao uso da régua e compasso, pois são recursos mais acessíveis e, também, possibilitam a comprovação teórica de forma prática.

Alguns discentes apresentam dificuldades no manuseio da régua e do compasso, portanto recomendamos a organização da classe em grupos, o que dinamiza e facilita o aprendizado, além de possibilitar ao educando o trabalho em equipe.

Sobre o aspecto teórico, uma das possíveis dificuldades enfrentadas pelos alunos será a simbologia e a familiarização com a matemática pura, ou seja, demonstrações. O professor deve enfrentar essa dificuldade com um preparo anterior dos discentes, ao logo do processo de aprendizagem, não deixando nunca de expor os significados das fórmulas e deduções.

5.7 Atividade I

Construção do Ponto Áureo de um segmento utilizando régua não graduada e compasso e o *software* matemático Geogebra.

1º Passo

Encontrar o ponto médio[16] do $\overline{AB}$, (FIG.8).

1) Com centro no ponto A e raio maior que a metade da $med(\overline{AB})$, traçar um arco que intersecta o $\overline{AB}$.

2) Com compasso centrado no ponto B e o mesmo raio anterior, traçar um arco que intersecta o $\overline{AB}$, obtendo os pontos A' e B' intersecção desses arcos. $\overleftrightarrow{A'B'}$ é mediatriz[17] do $\overline{AB}$, pois A' e B' distam igualmente dos pontos A e B. Logo $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{M\}$, sendo M ponto médio do $\overline{AB}$.

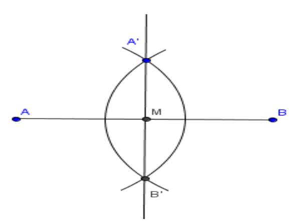


Figura 8 – Ponto médio de um segmento

2º Passo

Construir um $\overline{BC}$ perpendicular[18] ao $\overline{AB}$ tal que $med(\overline{BC})= med(\overline{BM}) = med(\overline{AM})$, (FIG.9).

1) Traçar a $\overrightarrow{AB}$, prolongando o $\overline{AB}$.

---

[16]Ponto de equilíbrio de um segmento de reta
[17]Lugar geométrico equidistante de dois pontos
[18] Intersectam-se formando um ângulo de 90º

2) Marcar o ponto M' simétrico ao ponto M em relação ao ponto B.

3) Com centro no ponto M' e raio maior que $med(\overline{M'B})$, traçar um arco que intersecta o $\overline{MM'}$.

4) E centrado em M e o mesmo raio anterior, traçar uma arco que intersecta o $\overline{MM'}$, obtendo os pontos A'' e B'' intersecção desses arcos.

5) A $\overleftrightarrow{A"B"}$ é a mediatriz do $\overline{MM'}$, portanto perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ e passando pelo ponto B. Centrado no ponto B marcar o ponto C na mediatriz $\overleftrightarrow{A"B"}$ tal que $med(\overline{BM})$ = $med(\overline{BC})$, com isso obtém-se um $\overline{BC}$ perpendicular ao $\overline{AC}$.

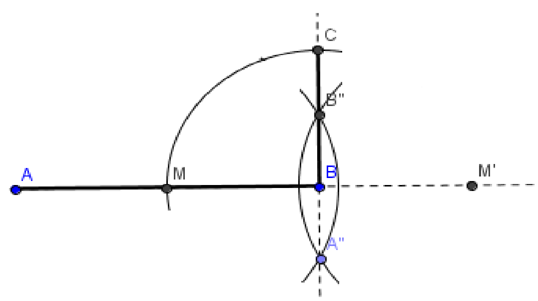


Figura 9 – Segmento perpendicular

3º passo

Determinar o ponto *N* na hipotenusa do ΔABC, (FIG.10).

1) Traçar a hipotenusa $\overline{AC}$.

2) Com o centro no ponto *C* e raio igual a $med(\overline{CB})$, traçar um arco que intersecta o $\overline{AC}$ no ponto *N*.

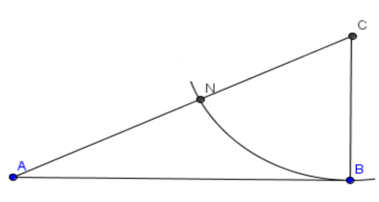


Figura 10 – Ponto *N* na hipotenusa $\overline{AC}$

4º Passo

Determinar o Ponto Áureo do $\overline{AB}$, (FIG.11).

1) Com centro no ponto A e raio igual a $med(\overline{AN})$, traçar um arco que intersecta o $\overline{AB}$ no ponto E, que é Ponto Áureo do $\overline{AB}$.

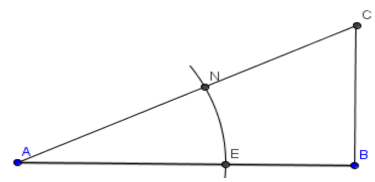


Figura 11 – Ponto Áureo E no $\overline{AB}$

5.7.1 Demonstração

Seja $med(\overline{AB}) = a$, com $a \in \mathbb{R}$, logo $med(\overline{BC}) = \frac{a}{2}$ por construção, aplicando o teorema de Pitágoras[7] no ΔABC.

$$med(\overline{AC})^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad med(\overline{AC}) = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Observe que $med(\overline{AN}) = med(\overline{AC}) - med(\overline{NC})$. Por construção $med(\overline{NC}) = med(\overline{BC})$ logo,

$$med(\overline{AN}) = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Fazendo a razão $\frac{med(\overline{AB})}{med(\overline{AE})}$ e como $med(\overline{AE}) = med(\overline{AN})$ tem-se:

$$\frac{med(\overline{AB})}{med(\overline{AE})} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

Racionalizando,

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \qquad \text{CQD.}$$

5.7.2 Geogebra

Agora a construção do Ponto Áureo do $\overline{AB}$ utilizando o *Software* matemático Geogebra.

1º Passo:

Utilizando o botão “Segmento definido por Dois Pontos”, construir o $\overline{AB}$ (FIG.12).

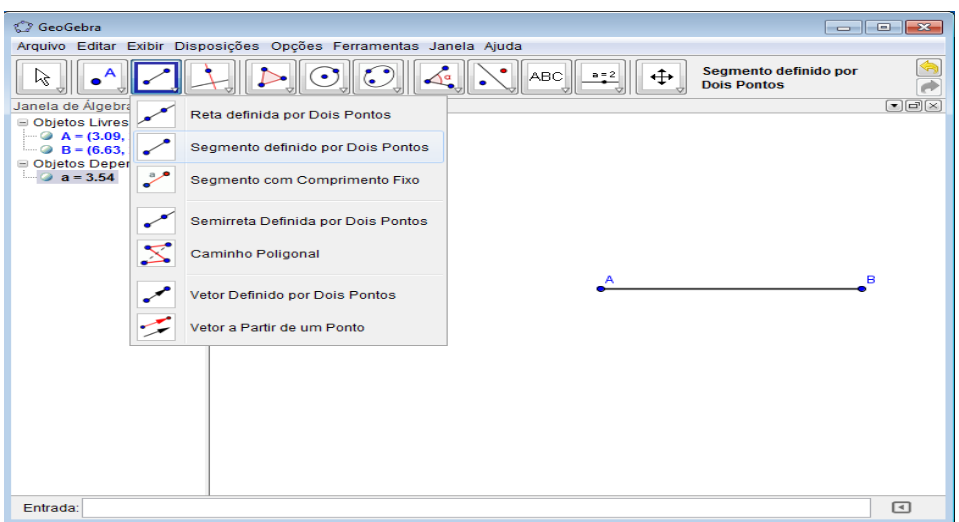


Figura 12- Construção do segmento $\overline{AB}$

2º Passo:

Com o botão “Ponto Médio ou Centro”, criar o ponto médio M do $\overline{AB}$ (FIG.13).

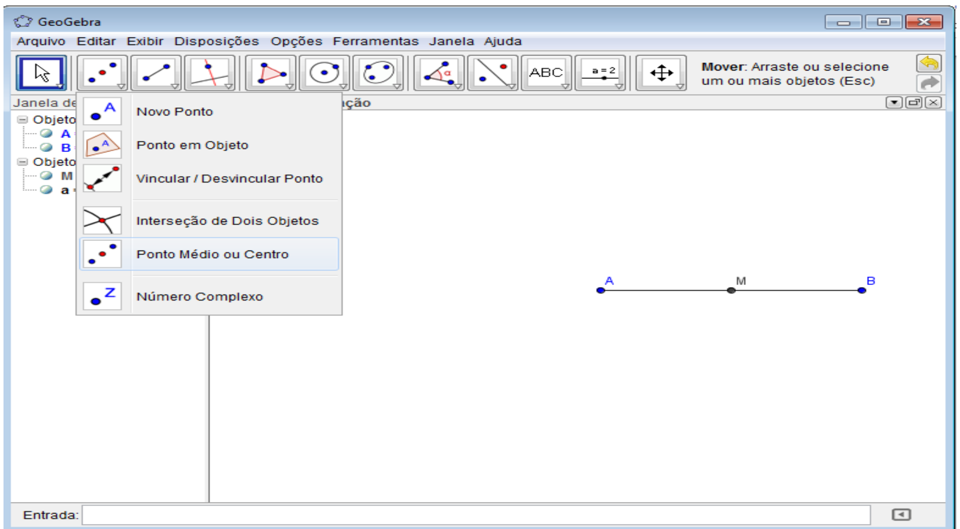


Figura 13 – Ponto médio do $\overline{AB}$

3º Passo:

Com o botão “Reta Perpendicular”, construir a reta r perpendicular ao $\overline{AB}$ que passe pelo ponto B (FIG.14).

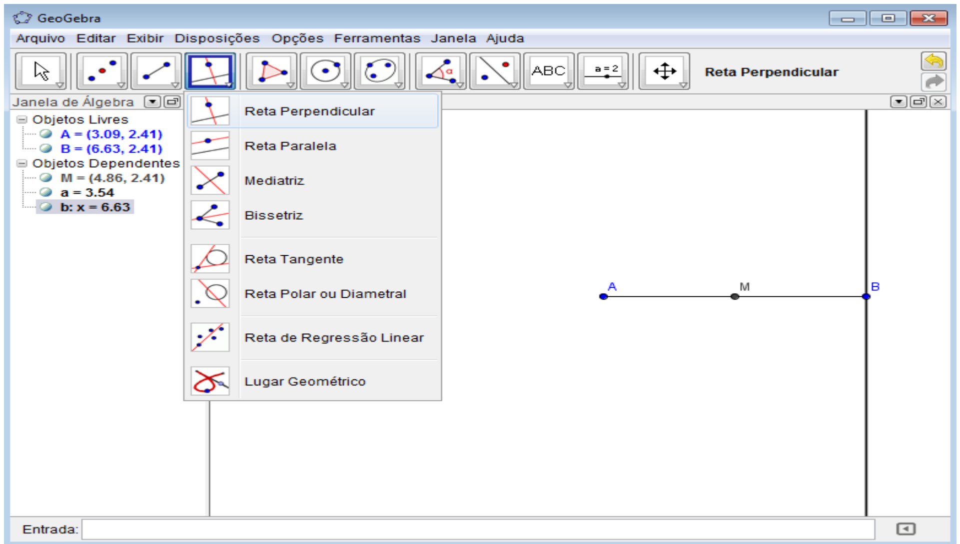


Figura 14 – Reta perpendicular ao $\overline{AB}$

4º Passo

Com o botão "Círculo dados Centro e um de seus Pontos", criar um círculo de centro no ponto B que passe pelo ponto M e marcar o ponto C intersecção da reta r com o círculo, (FIG.15).

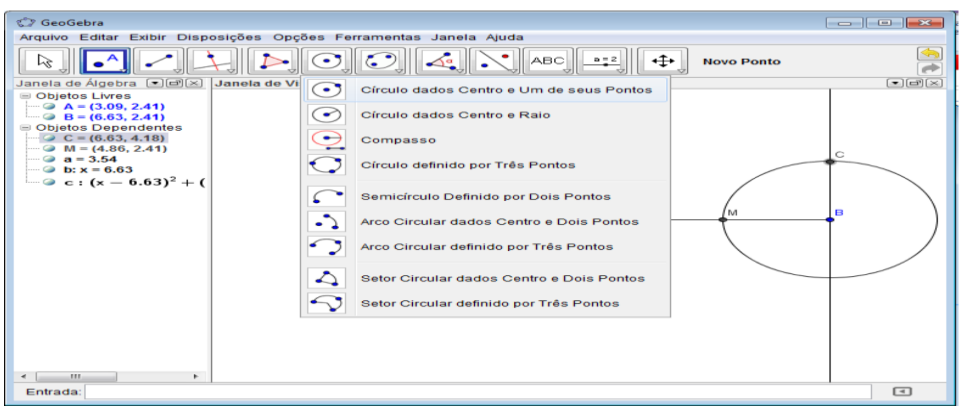


Figura 15 – Círculo de centro B

5º Passo

Traçar a hipotenusa $\overline{AC}$ do ΔABC. Depois, construir um círculo de centro no ponto C que passe pelo ponto B e marque o ponto N intersecção com o $\overline{AC}$. Para finalizar, traçar o círculo centrado no ponto A e que passe pelo ponto N e marcar o ponto E, intersecção com o $\overline{AB}$ (FIG.16).

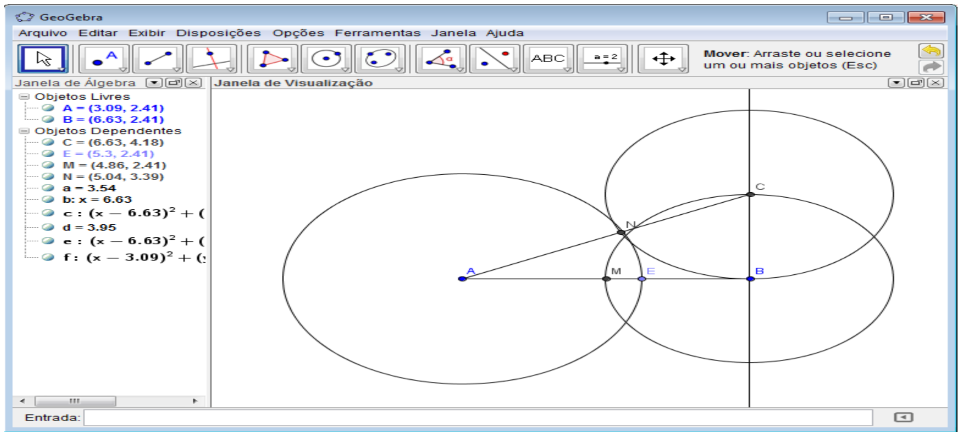


Figura 16 – Ponto Áureo do $\overline{AB}$

$'E'$ é o Ponto Áureo do $\overline{AB}$.

5.8 Atividade ll

Construir um Retângulo Áureo utilizando uma régua não graduada e compasso e o *software* matemático Geogebra.

1º Passo

Traçar o $\overline{AB}$ e o seu ponto médio, (FIG.17).

1) Com o compasso centrado no ponto A e raio maior que a metade da $med(\overline{AB})$, traçar um arco que intersecta o $\overline{AB}$.

2) Centrado no ponto B e o mesmo raio anterior, traçar um arco que intersecta o $\overline{AB}$, obtendo os pontos A' e B' intersecção desses arcos. $\overleftrightarrow{A'B'}$ é mediatriz do $\overline{AB}$, pois A' e B' distam igualmente dos pontos A e B. Logo $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{M\}$, sendo M ponto médio de $\overline{AB}$.

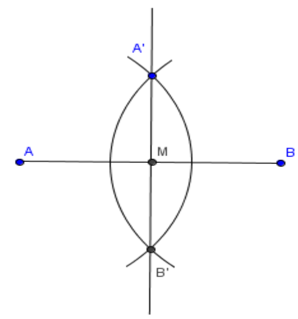


Figura 17 – Ponto médio de $\overline{AB}$

2º Passo

Construir um $\overline{BC}$ perpendicular ao $\overline{AB}$, tal que $med(\overline{BC})$ = $med(\overline{AB})$, (FIG.18).

1) Traçar a $\overrightarrow{AB}$, prolongando o $\overline{AB}$.

2) Marcar o ponto M' simétrico ao ponto M em relação ao ponto B.

3) Com centro no ponto M' e raio maior que $med(\overline{M'B})$, traçar um arco que intersecta o $\overline{MM'}$.

4) Com centro no ponto M e o mesmo raio anterior traçar um arco que intersecta o $\overline{MM'}$, obtendo os pontos A''e B'', intersecção dos arcos.

5) A $\overleftrightarrow{A"B"}$ é a mediatriz do $\overline{MM'}$, portanto perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ e passando pelo ponto B. Com centro no ponto B transferir $med(\overline{AB})$ para a mediatriz $\overleftrightarrow{A"B"}$. Logo foi construído um $\overline{BC}$ perpendicular ao $\overline{AB}$ tal que, $med(\overline{BC})$ = $med(\overline{AB})$.

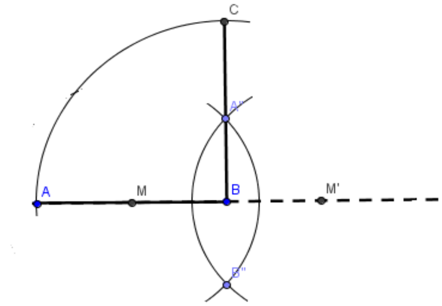


Figura 18 – Segmento perpendicular a $\overline{AB}$

3º Passo

Construir o $\overline{AD}$ na Razão Áurea com $\overline{AB}$, (FIG.19).

1) Centrado no ponto M e com raio igual a $med(\overline{MC})$, traçar um arco que intersecta a $\overrightarrow{AB}$ no ponto D. O $\overline{AD}$ está na Razão Áurea com o $\overline{AB}$.

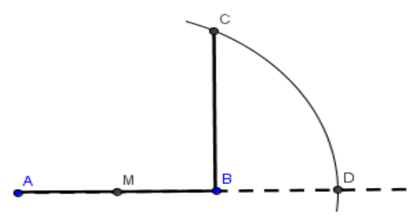


Figura 19 - $\overline{AB}$ na Razão Áurea com $\overline{AD}$

4º Passo

Construir o Retângulo Áureo $ADEF$, (FIG.20).

1) Construir as retas R_1 e R_2 perpendiculares ao $\overline{AD}$ passando respectivamente, pelos pontos D e A, utilizando o mesmo método do 2º passo.

2) Construir a reta R_3 perpendicular ao $\overline{BC}$ passando pelo ponto C, tal que; $R_3 \cap R_1 = \{E\}$ e $R_3 \cap R_2 = \{F\}$.

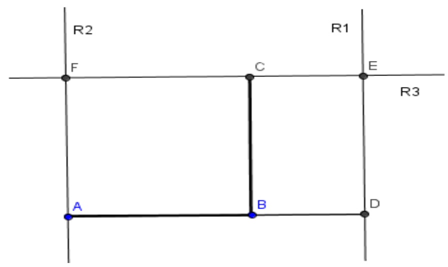


Figura 20 – Retângulo Áureo

O quadrilátero $ADEF$ é um Retângulo Áureo.

5.8.1 Demonstração

Demonstração que no retângulo $ADEF$ temos a Razão,

$$\frac{med(\overline{AD})}{med(\overline{DE})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Seja $med(\overline{AB}) = \alpha$, tal que $\alpha \in \mathbb{R}$ logo,

$$med(\overline{AM}) = med(\overline{MB}) = \frac{\alpha}{2}, \qquad (1)$$

pois M é ponto médio do $\overline{AB}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔMBC temos,

$$med(\overline{MC})^2 = med(\overline{MB})^2 + med(\overline{BC})^2, \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2), pode-se escrever:

$$med(\overline{MC})^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \text{ mas,}$$

$med(\overline{MC})$ = $med(\overline{MD})$, logo:

$$med(\overline{MD}) = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2},$$

Como $med(\overline{AD})$ = $med(\overline{AM})$ + $med(\overline{MD})$ então,

$$med(\overline{AD}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Sabe-se que $med(\overline{AB})$ = $med(\overline{BC})$ = $med(\overline{DE})$ = α,

Fazendo a razão $\frac{med(\overline{AD})}{med(\overline{DE})}$ conclui-se que:

$$\frac{med(\overline{AD})}{med(\overline{DE})} = \frac{\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \qquad \text{CQD.}$$

5.8.2 Geogebra

Agora a construção do Retângulo Áureo a partir de um $\overline{AB}$ de medida qualquer, utilizando o *Software* matemático Geogebra.

1º Passo

Utilizando o botão "Reta definida por Dois Pontos", traçar a $\overleftrightarrow{AB}$, (FIG.21).

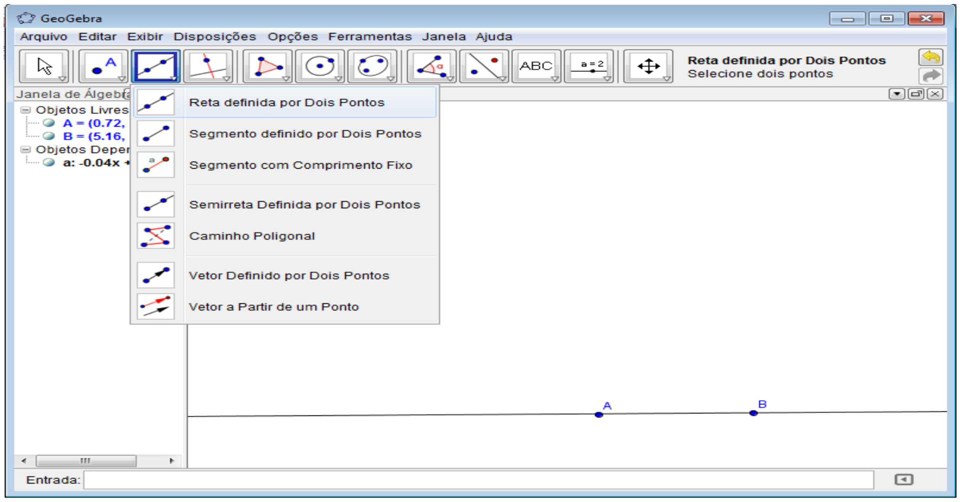


Figura 21 – Reta definida por dois pontos

2º Passo

Com o botão "Ponto Médio ou Centro", criar o ponto médio M do $\overline{AB}$, (FIG.22).

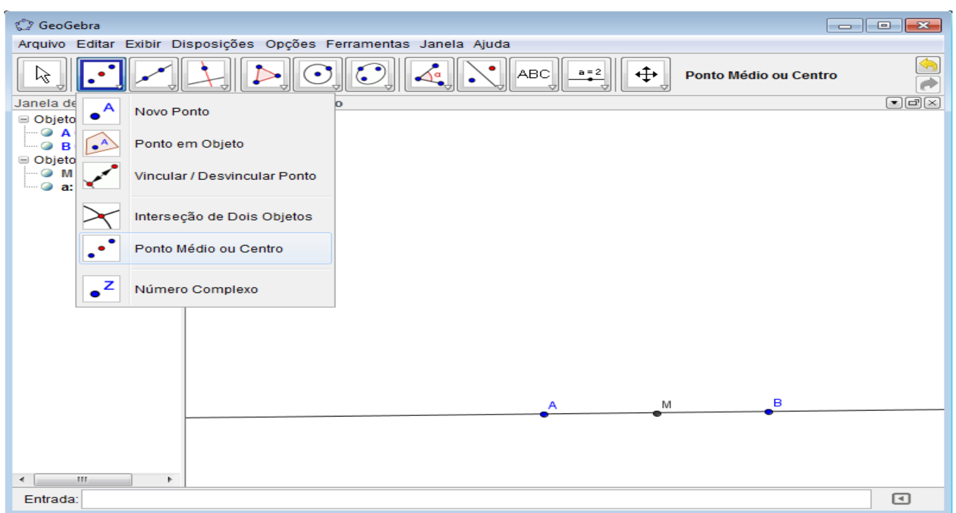


Figura 22 – Ponto médio de $\overline{AB}$

3º Passo

Utilizando o botão "Reta perpendicular", construir uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e passando pelo ponto B, (FIG.23).

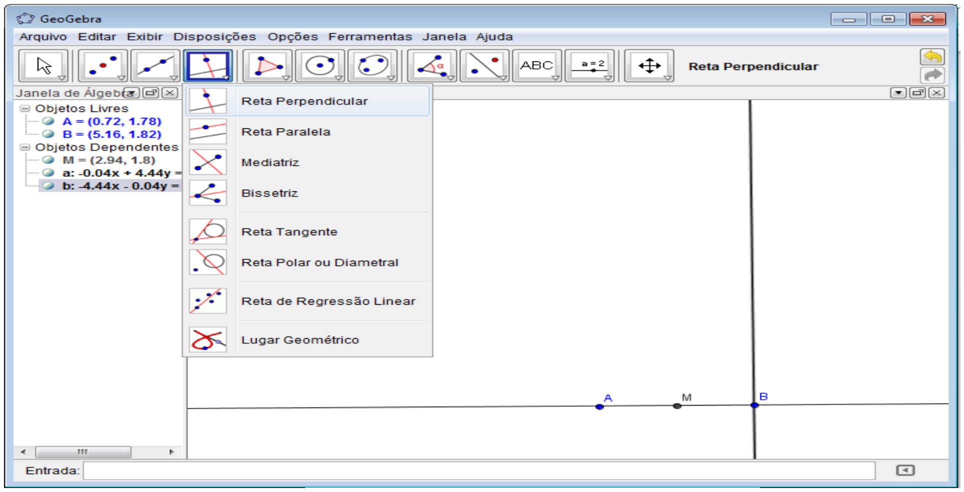


Figura 23 – Reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$

4º Passo

Com o botão "Círculo dados centro e Um de seus Pontos", construir um círculo centrado no ponto B e que passe pelo ponto A, marcar o ponto C intersecção do círculo com a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, (FIG.24).

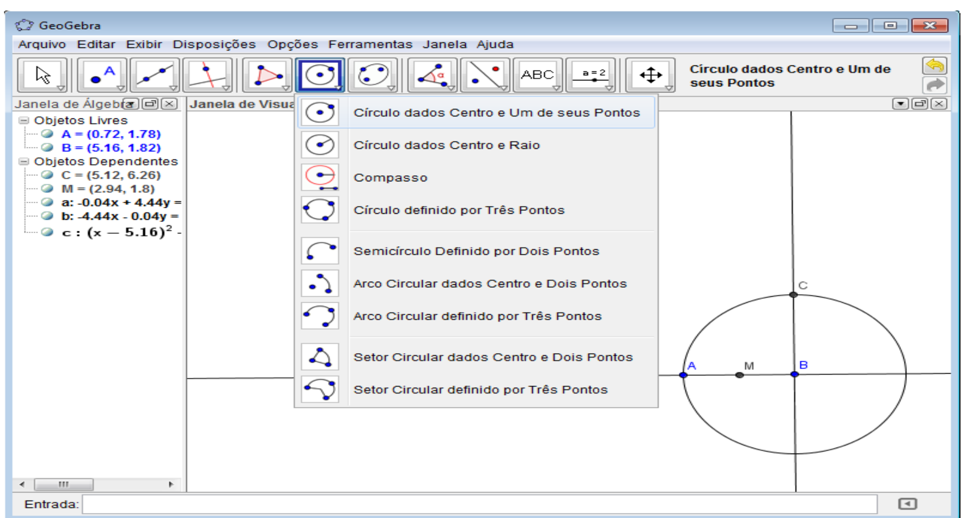


Figura 24 – Círculo de centro em B que passa por A

5º Passo

Com o botão “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”, construir um círculo centrado no ponto M e que passe pelo ponto C, marcar o ponto D intersecção do círculo com a $\overleftrightarrow{AB}$, (FIG.25).

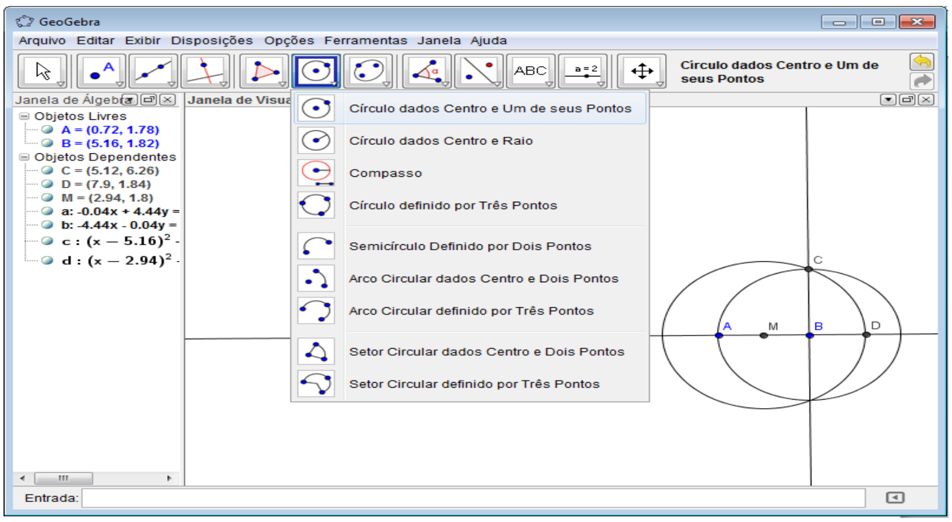


Figura 25 – Círculo de centro em M que passa por C

6º passo

Com o botão “Reta Perpendicular”, construir retas R_1 e R_2 perpendiculares ao $\overline{AB}$ passando, respectivamente, pelos pontos A e D, (FIG.26).

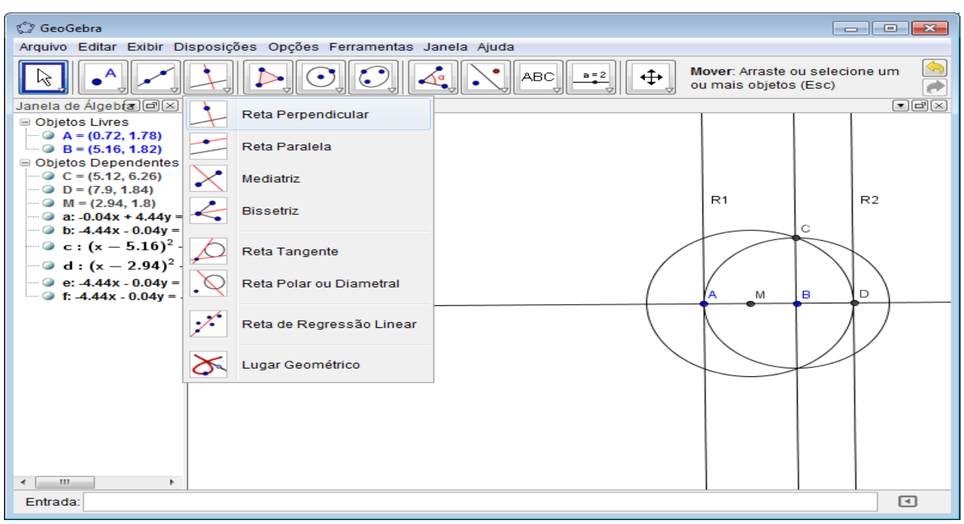


Figura 26 – Retas R_1 e R_2 perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$

7º passo

Utilizando o botão "Reta perpendicular", construir uma reta R_3 perpendicular ao $\overline{BC}$ que passe pelo ponto C, marcar os pontos E e F, sendo $R_3 \cap R_1 = \{F\}$ e $R_3 \cap R_2 = \{E\}$, (FIG.27).

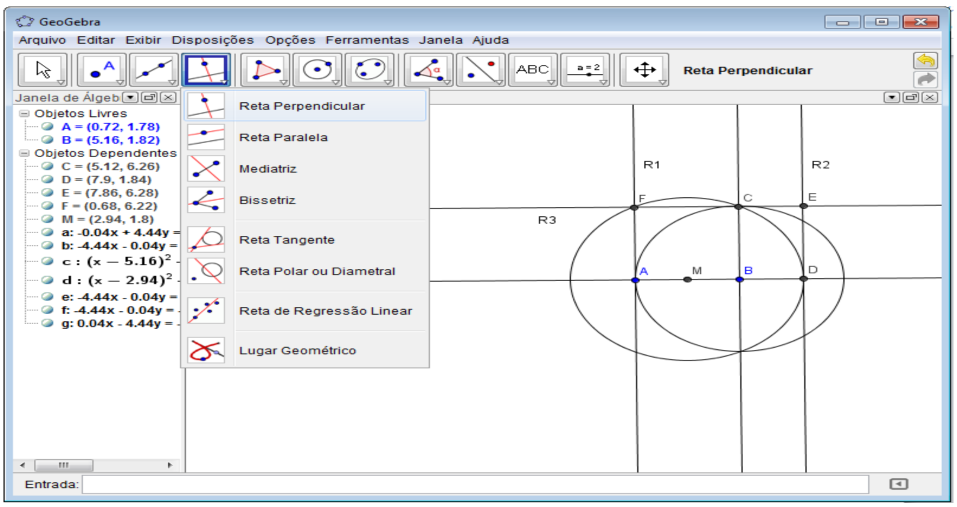


Figura 27 – Reta R_3 perpendicular a $\overline{BC}$

O quadrilátero $ADEF$ é um Retângulo Áureo.

5.9 Atividade lll

Construir um triângulo isósceles[19], com sua base na Razão Áurea com os lados congruentes (Triangulo Áureo), utilizando uma régua não graduada e compasso e o *software* matemático Geogebra.

1º Passo

Construir um ponto B' simétrico ao ponto A na $\overrightarrow{AB}$ (FIG.28).

[19] Triangulo com dois lados e dois ângulos de medidas iguais

1) Traçar um $\overline{AB}$ e com compasso centrado em B marcar na $\overrightarrow{AB}$, o ponto B' simétrico ao ponto A em relação ao ponto B.

Figura 28 – Ponto *B*' simétrico ao ponto *A*

2º Passo

Com o compasso centrado em B construir o $arc(AB')$, (FIG.29).

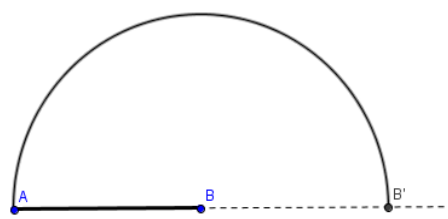


Figura 29 - $arc(AB')$

3º Passo

Dividir o $\overline{AB'}$ em cinco partes de medidas iguais, (FIG.30).

1) Traçar uma reta R qualquer obliqua, passando pelo ponto A.

2) Com abertura constante no compasso marcar cinco pontos (*C'*,*D'*,*E'*, *F'* e *G'*) equidistantes em R e trace o $\overline{G'B'}$.

4) Construir retas S_1,S_2 ,S_3 e S_4 paralelas a $\overline{G'B'}$ passando por *C', D', E'* e *F'*.

5) Marcar os pontos $\{C\}$= $S_1 \cap \overline{AB'}$, $\{D\}$ = $S_2 \cap \overline{AB'}$, $\{E\}$ = $S_3 \cap \overline{AB'}$ e $\{F\}$ = $S_4 \cap \overline{AB'}$. Pelo Teorema de Tales[20], conclui-se que $med(\overline{AC})$ = $med(\overline{CD})$ = $med(\overline{DE})$ = $med(\overline{EF})$ = $med(\overline{FB})$.

[20] Sejam r, s e t retas paralelas, escolhemos *A* e *A*' ∈ r, *B* e *B*' ∈ s e *C* e *C*' ∈ t de modo que *A*, *B*,*C* e *A*',*B*',*C*' sejam dois ternos de pontos colineares. Então $\frac{med(\overline{AB})}{med(\overline{BC})} = \frac{med(\overline{A'B'})}{med(\overline{B'C'})}$

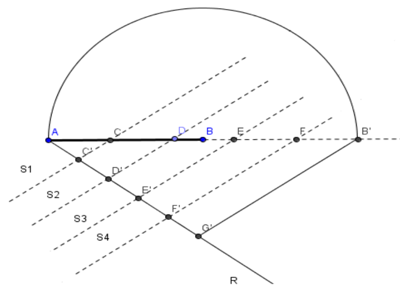


Figura 30 – Divisão do segmento $\overline{AB'}$

4º Passo

Localizar o ponto H intersecção de dois arcos com raio de $med(\overline{AB'})$, (FIG.31).

1) Centrado no ponto A e raio igual à $med(\overline{AB'})$ traçar o arco C_1 (ver figura).

2) Centrado no ponto B' e raio igual à $med(\overline{AB'})$ traçar o arco C_2.

3) Marcar o ponto $\{H\} = C_1 \cap C_2$.

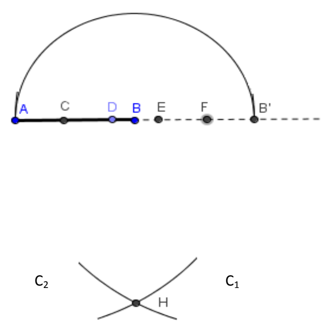


Figura 31 – Ponto H intersecção de dois arcos

5º Passo

Dividir o $arc(AB')$ em cinco segmentos de arco de medidas iguais**,** (FIG.32).

1) Traçar semirretas $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HE}$ e $\overrightarrow{HF}$.

2) Marcar os respectivos pontos $\{I\} = \overrightarrow{HC} \cap\ arc(AB')$, $\{J\} = \overrightarrow{HD} \cap arc(AB')$, $\{K\} = \overrightarrow{HE} \cap arc(AB')$ e $\{L\} = \overrightarrow{HF} \cap arc(AB')$.

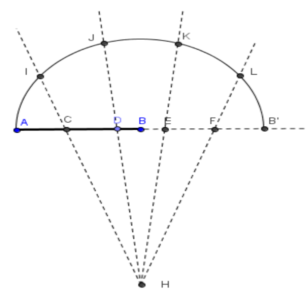


Figura 32 – Pontos I, J, K e L

6º Passo

Traçar o segmento $\overline{BI}$ e $\overline{AI}$, (FIG.33).

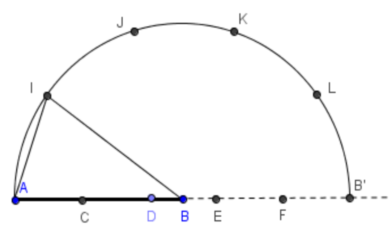


Figura 33 – Triângulo Áureo

O ΔABI é isósceles com medida do $\measuredangle ABI$ = 36º, portanto é um Triângulo Áureo.

5.9.1 Demonstração

Demonstração que o ΔABI (FIG.34) é um Triângulo Áureo, ou seja, $\frac{med(\overline{AB})}{med(\overline{AI})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

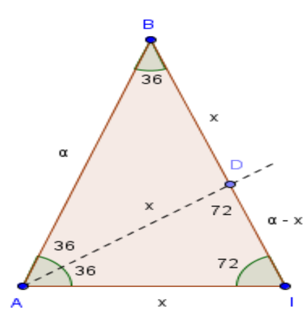


Figura 34 - ΔABI

Observe que o ΔAIB é isósceles e $\measuredangle ABI$ = 36º então $\measuredangle BAI = \measuredangle BIA = 72^0$. Seja $med(\overline{AB}) = med(\overline{BI}) = \alpha$, com $\alpha \in \mathcal{R}$ e seja também o ponto D intersecção de $\overline{BI}$ com a bissetriz do ângulo $\measuredangle BAI$, os triângulos ΔAID e ΔABD são isósceles, pois $\measuredangle BAD = \measuredangle ABD = 36^0$ e $\measuredangle ADI = \measuredangle AID = 72^0$.

Se $med(\overline{AI}) = x$, então $med(\overline{AI}) = med(\overline{BD}) = med(\overline{AD}) = x$ logo tem-se,

$$med(\overline{DI}) = \alpha - x.$$

Como $\measuredangle DAI = \measuredangle ABI$ e $\measuredangle AIB$ é comum ao ΔBAI e ao ΔADI, pelo caso (Ângulo, Angulo) de semelhança de triângulos temos, $\Delta BAI \approx \Delta ADI$, então aplica-se a proporcionalidade:

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$$

Sendo x e α valores não nulos, multiplicamos ambos os lados por $x(\alpha - x)$, obtendo a equação:

$$x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$$

Deve-se achar o valor de x que satisfaça essa equação do segundo grau, logo:

$$x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4.1.(-\alpha^2)}}{2.1},$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{\alpha(-1-\sqrt{5})}{2} < 0 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{\alpha(-1+\sqrt{5})}{2} > 0$$

Como se trata de medidas positivas considera-se $x_2 > 0$, portanto:

$$\frac{med(\overline{AB})}{med(\overline{AI})} = \frac{\alpha}{x_2} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha(-1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}},$$

Racionalizando,

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180\ldots \qquad \text{CQD.}$$

5.9.2 Geogebra

Agora vamos construir um Triângulo Áureo utilizando o *Software* matemático Geogebra.

1º Passo

Com o botão "Semirreta Definida por Dois Pontos", crie a $\overrightarrow{AB}$, (FIG.35).

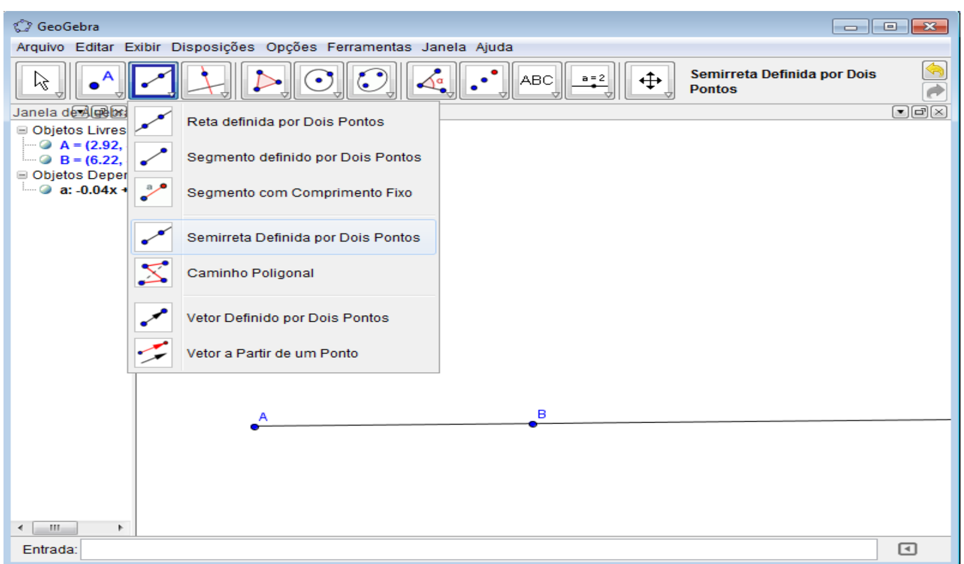


Figura 35 – Semirreta definida por dois pontos

2º Passo

Com botão “Reflexão em Relação a um Ponto”, clique no ponto A e depois no ponto B e criar o ponto B' simétrico de A em relação ao ponto B na $\overrightarrow{AB}$, (FIG.36).

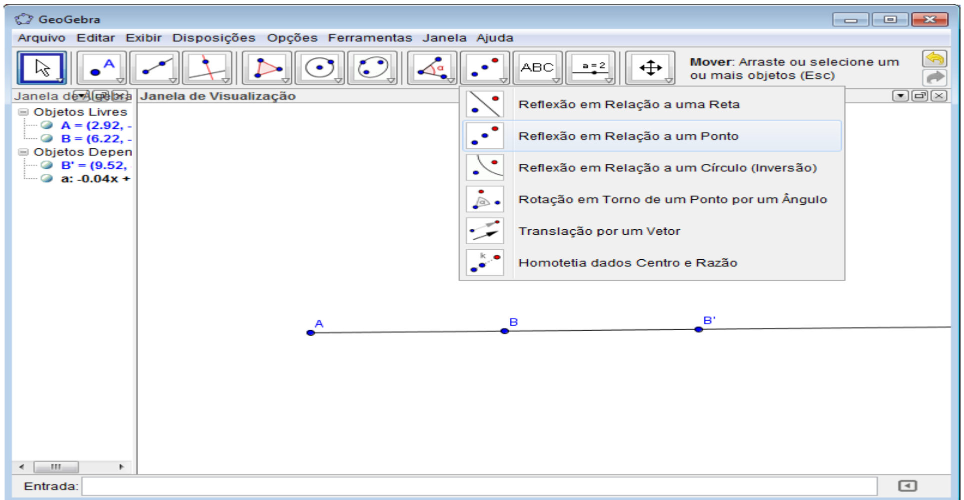


Figura 36 – Ponto B' simétrico ao ponto A

3º Passo

Com o botão “Semicírculo Definido por Dois Pontos” traçar o $arc(AB')$, (FIG.37).

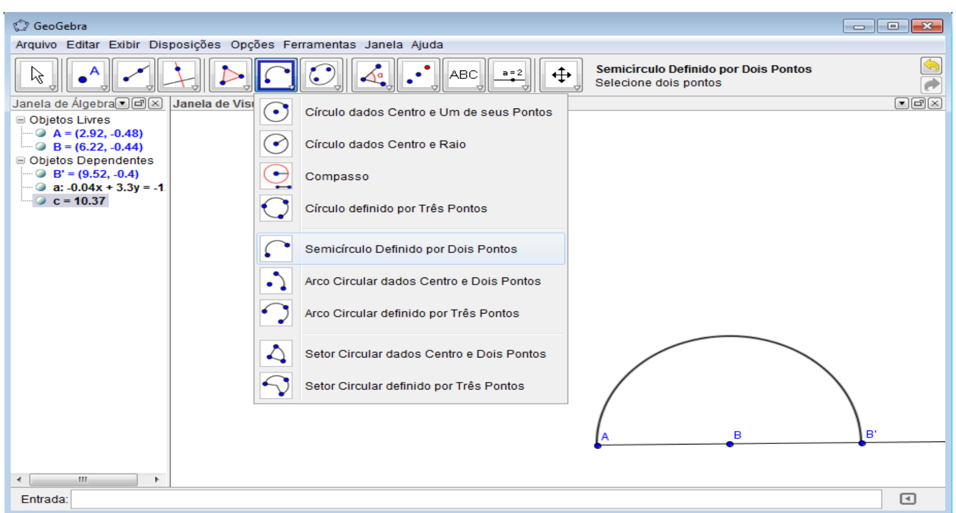


Figura 37 – $arc(AB')$

4º Passo

Com o botão "Segmento Definido por Dois Pontos", criar o $\overline{AC'}$ oblíquo com origem em A, (FIG.38).

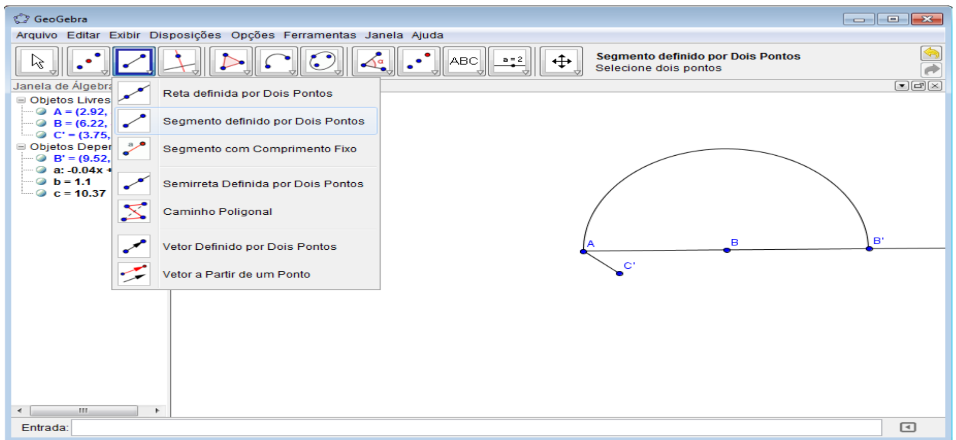


Figura 38 – Segmento $\overline{AC'}$ oblíquo

5º Passo

É preciso um segmento dividido em cinco partes com medidas iguais (FIG.39), será utilizado um método alternativo. Com botão "Reflexão em Relação a um Ponto", criar os pontos:

D' simétrico ao ponto A em relação a C';

E' simétrico a C' em relação a D';

F' simétrico a D' em relação a E' e

G' simétrico a E' em relação a F'.

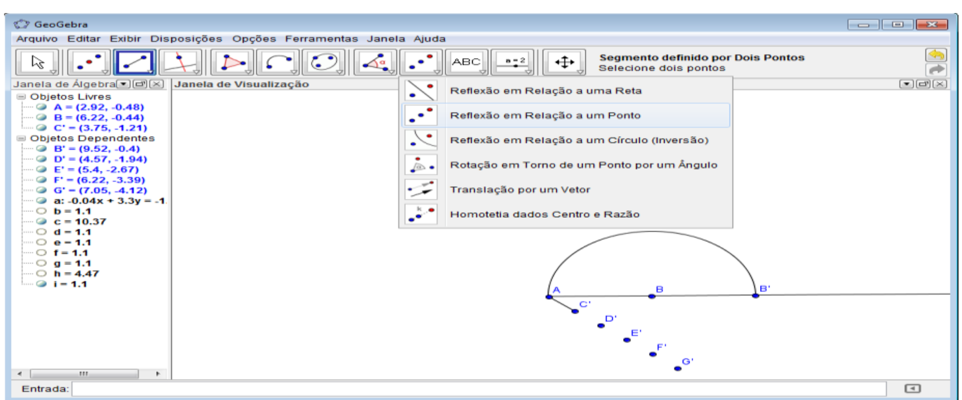


Figura 39 – Segmento $\overline{AG'}$ dividido em cinco partes de medidas iguais

6º Passo

Com o botão “Segmento definido por Dois Pontos” traçar os segmentos $\overline{AC'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$, $\overline{F'G'}$ e $\overline{G'B'}$, (FIG.40).

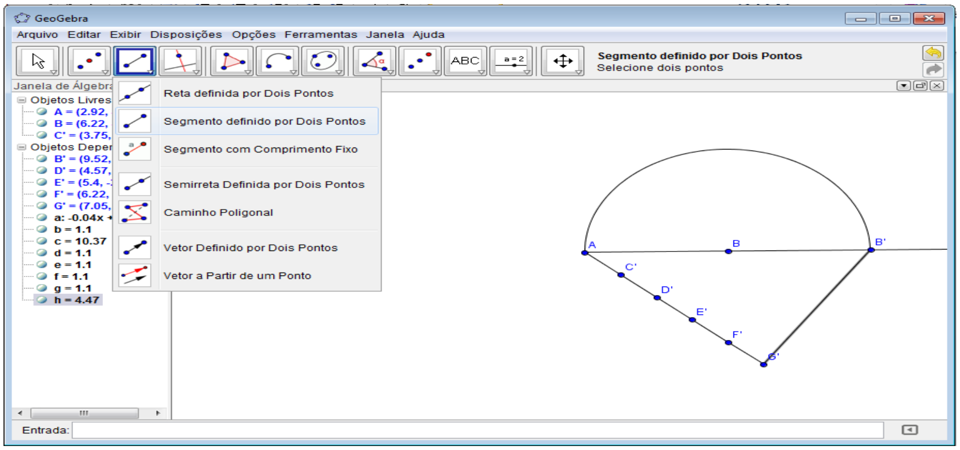


Figura 40 – segmentos $\overline{AC'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$, $\overline{F'G'}$ e

7º Passo

Com o botão “Retas Paralelas”, trace retas R_1, R_2, R_3 e R_4 paralelas ao $\overline{G'B'}$ passando respectivamente pelos pontos C',D',E'e F', marcar os pontos $\{C\}$=$R_1 \cap \overline{AB'}$, $\{D\} = R_2 \cap \overline{AB'}$, $\{E\} = R_3 \cap \overline{AB'}$ e $\{F\} = R_4 \cap \overline{AB'}$, (FIG.41).

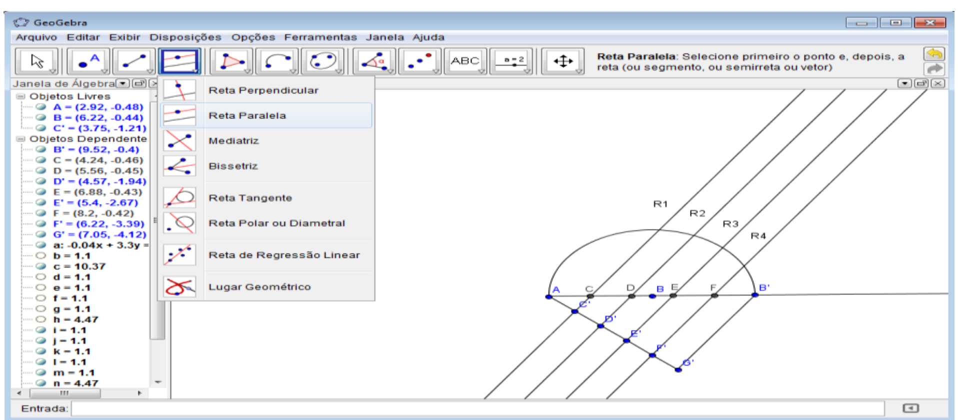


Figura 41 – Divisão do segmento $\overline{AB'}$ em cinco partes iguais

Para facilitar visualmente a construção, clicar com o botão direito do *mouse* sobre as retas e clicar em “Exibir Objeto”, com isso irá ocultar as retas

R_1, R_2, R3 e R_4 e os segmentos $\overline{AC'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$, $\overline{F'G'}$ e $\overline{G'B'}$, pois eles foram construídos unicamente para dividir o $\overline{AB'}$ em cinco partes de medidas iguais, (FIG.42).

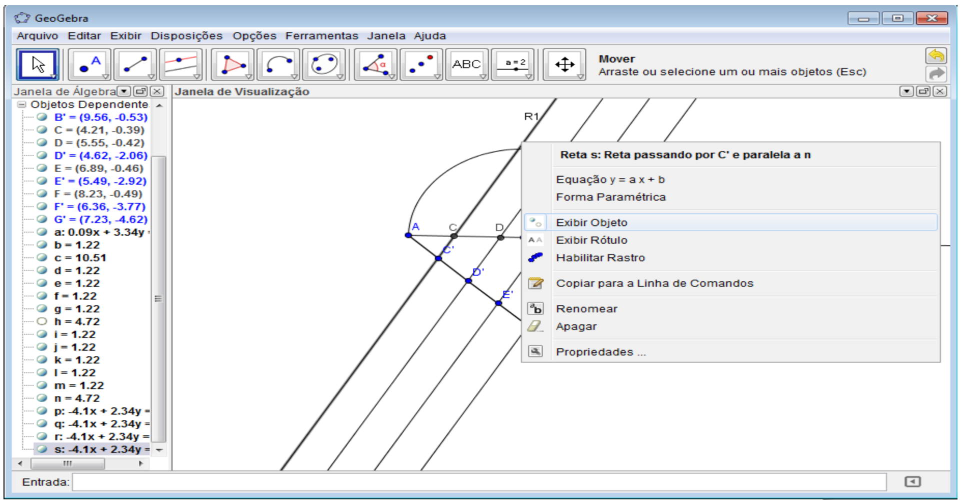


Figura 42 – Ocultar objetos

8º Passo

Com o botão “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” criar um círculo de centro no ponto A e passe pelo ponto B' e de centro no ponto B' e passe pelo ponto A, e marcar o ponto H interseção desses dois círculos. Para facilitar visualmente oculte os dois círculos, (FIG.43).

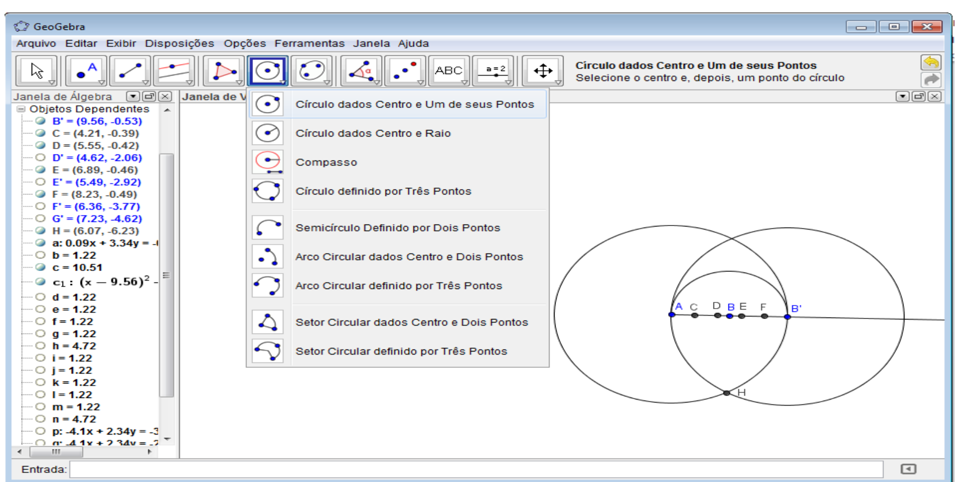


Figura 43 – Ponto H intersecção de dois círculos

9º Passo

Com botão “Semirreta definida por Dois Pontos”, criar as semirretas $\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HE}$ e $\overrightarrow{HF}$ e marcar os pontos $\{I\} = \overrightarrow{HC} \cap arc(AB')$, $\{J\} = \overrightarrow{HD} \cap arc(AB')$, $\{K\} = \overrightarrow{HE} \cap arc(AB')$ e $\{L\} = \overrightarrow{HF} \cap arc(AB')$, (FIG.44). Também oculte as semirretas, pois foram construídas para dividir o $arc(AB')$ em cinco partes de medidas iguais.

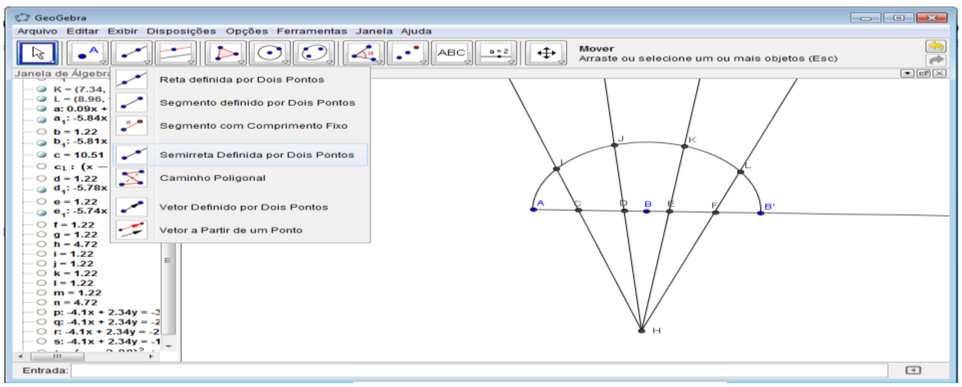


Figura 44 – Pontos *I, J, K* e *L*

10º Passo

Com o botão “Segmento definido por Dois Pontos”, traçar os segmentos $\overline{BI}$ e $\overline{AI}$, (FIG.45).

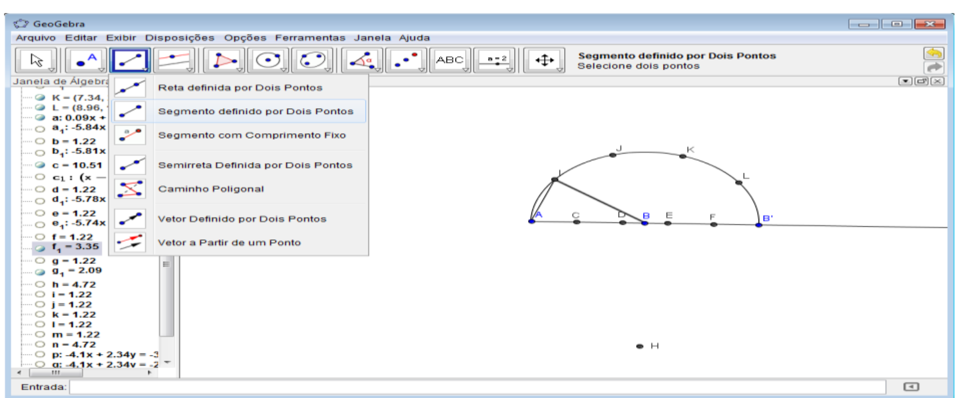


Figura 45 - ΔABI Áureo

Como $\measuredangle ABI = \frac{180^0}{5}$ = 36º e $med(\overline{AB}) = med(\overline{BI})$, obtém-se o Triângulo Áureo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino dos números Irracionais exige do docente possuir o domínio das demonstrações algébricas, das generalizações e da percepção de regularidades para proporcionar ao estudante construir o raciocínio lógico e desenvolver a capacidade de abstração. É preciso, além disso, instigar os alunos a questionar, esclarecer suas dúvidas e compreender seus próprios erros, levando-os, dessa maneira, às descobertas e comprovações. Dito de outra forma, o professor não deve se limitar a repassar aos discentes apenas fórmulas prontas e sem sentido aparente.

A presente proposta aponta como metodologia eficaz para o aprendizado dos números Irracionais, conforme afirmam os PCNs (Brasil, 2005), além da representação algébrica, a apresentação do contexto histórico e o uso de novas tecnologias. A contextualização vai permitir aos discentes compreender as origens desta ciência, bem como o seu constante processo de transformação e aprimoramento, já o uso de régua e compasso juntamente com novas tecnologias possibilitarão maior envolvimento dos alunos no assunto abordado.

Nessa linha, tivemos a oportunidade de nos integrar com alguns aspectos históricos da Razão Áurea, desde longa data até os tempos atuais. São eles que permitirão aperfeiçoar os conhecimentos sobre a irracionalidade dos números. A presente proposta representa uma forma diferenciada de se trabalhar com o Número Áureo, dinamizada e facilitada com a utilização do *software* matemático Geogebra e o manuseio de régua e compasso, comumente utilizados no Ensino Fundamental.

Contudo, em termos práticos, buscou-se desenvolver atividades que possam ser utilizadas com objetivo de criar oportunidades para uma aprendizagem significativa, levando para sala de aula uma sequência didática diferente. Nesse sentido, o docente pode aprimorar suas dinâmicas educacionais de forma a garantir melhor aprendizado dos conteúdos pelos alunos. Adicionalmente, pode constituir mais um recurso para o desenvolvimento de diversos conteúdos do Ensino Fundamental e Médio, tais como polígonos regulares, razões, proporções, equações do segundo grau, funções, gráficos, entre outros.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Conheça a ABNT**. Disponível em: <http://www.abnt.org.br>. Acesso em: 20 nov. 2012.

BRASIL. Mistério da Educação e Cultura. **PCN**: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Básica. **Matemática**: Ensino Fundamental. Brasília, 2010. v. 17.

DOCZI, G. **O poder dos limites**: harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura. Tradução Maria Helena de Oliveira Tricca e Júlia Barany Bartolomei. 6. ed. São Paulo: Mercúrio Novo Tempo, 2012 .

GIONGO, A. R. **Curso de desenho geométrico**. 34. ed. São Paulo: Nobel, 1984.

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

LIVIO, M. **Razão áurea**: a história do Fi, um número surpreendente. Tradução Marco Shinobu Matsumura. 6. ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

INSTITUTO DE AVALIAÇÃO E DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL. **Matriz de referência INADE**. Disponível em: <www.institutoinade.com.br>. Acesso em: 12 dez. 2012.

POMMER, W. M. Números irracionais no Ensino Fundamental: uma análise em livros didáticos. **Encontro Paranaense de Educação Matemática**, Belém, n. 2, p. 1-11, set. 2011.

ROQUE, T. **Tópicos de histórias da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.