

Universidade Estadual de Santa Cruz
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DA SIMETRIA
POR MEIO DA ARTE**

Dreyko Hemerly Rodrigues Santos

Orientador: Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

Co-Orientador: André Malvezzi Lopes

ILHÉUS- BAHIA

Abril de 2016

DREYKO HEMERLY RODRIGUES SANTOS

**UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DA SIMETRIA
POR MEIO DA ARTE**

**ILHÉUS - BAHIA
2015**

S237

Santos, Dreyko Hemerly Rodrigues.

Uma sequência de atividades para o ensino da simetria por meio da arte / Dreyko Hemerly Rodrigues Santos. – Ilhéus, BA: UESC, 2016.

46 f. : il.

Orientador: Vinicius Augusto Takahashi Arakawa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Simetria (Matemática). 3. Arte na educação. 4. Atividades criativas na sala de aula. I. Título.

CDD 510.7

DREYKO HEMERLY RODRIGUES SANTOS

**UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DA
SIMETRIA POR MEIO DA ARTE**

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz para obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado, Ilhéus, 29 de abril de 2016.



Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa – Orientador, UESC.



Prof. Me. André Malvezzi Lopes - Co-Orientador, UESC.



Prof. Dr. Josaphat Ricardo Gouveia Júnior, IFBA – Campus Eunápolis.

DEDICATÓRIA

Ao meu primogênito Davi.

Feliz o homem que se permite ser pai e cria seus filhos com muito amor e dedicação! Porque ser pai é o maior dom que um homem pode receber de Deus.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus. Por mostrar todos os caminhos, por me ajudar a superar os desafios e os meus limites.

À minha esposa (lala), que foi paciente em suas esperas, que me apoiou, me deu forças e acreditou. Orando sempre por mim em minhas viagens, para que Deus pudesse me proteger em minhas idas e vindas de Ilhéus para as aulas e avaliações do mestrado, que aqui almejo.

À minha mãe e Lorenzo, que mesmo longe, me apoiaram, me ajudaram, torcendo por mim, e sempre acreditando em minha capacidade, não deixando de orar pelo meu sucesso.

Aos meus tios (Jailton e Dina). Que por todas às vezes, gostariam de saber como foi a minha viagem de ida e volta, sempre os avisando em minhas partidas. Tios, mas como amor, e carinho de pais, sempre me orientando, me apoiando, ajudando. Estiveram comigo em todos os momentos, sendo amigos, me acolhendo.

Quero agradecer ao meu Orientador, Professor Doutor Vinicius Augusto Takahashi Arakawa. Pelas aulas ministradas no Profmat, pela dedicação, paciências em suas orientações da dissertação.

Ao meu Professor Mestre André Malvezzi. Pelos conhecimentos que nos foi transmitido em suas aulas, tornando-as prazerosas.

Á minha irmã, meus pais, meus irmãos e amigos: meu muito obrigado!

Por fim, agradeço a CAPES por proporcionar os recursos financeiros tão necessários.

*“Somos todos famintos e sedentos por imagens concretas.
A arte abstrata terá sido boa por uma coisa:
restaurar sua exata virgindade para a arte figurativa.”*
Salvador Dali

RESUMO

Esta dissertação versa sobre **Uma sequência de atividades para o ensino da simetria por meio da arte**. Nesse projeto apresentamos ao professor uma sequência de atividades para que o mesmo adquira um melhor resultado diante do assunto abordado. Na proposta inicial o docente aplicará um pré-teste, sem nenhuma abordagem prévia do assunto, sabendo que os resultados poderão ser desastrosos. Realizada a aplicação do pré-teste o professor deverá fazer uma intervenção através de uma estratégia didática, onde nessa estratégia serão aplicadas diversas atividades abordando o assunto de simetria por meio de obras de arte. Por fim, a aplicação do pós-teste, no qual as questões elaboradas são paralelas às questões abordadas no pré-teste, para que através de tabelas e gráficos o professor possa comparar o desenvolvimento e crescimento da turma.

Palavras- Chave: Sequência de Atividades, Arte, Matemática, Ensino.

ABSTRACT

This dissertation deals with a sequence of activities for teaching symmetry through art. In this project we present for the teacher a sequence of activities for them to get a better result on the subject matter. In the initial proposal, the teacher will apply a pre-test, without any prior approach to the subject, knowing that the results could be disastrous. Applied the pre-test, the teacher should make an intervention through a teaching strategy where this strategy will be implemented several activities addressing the issue of symmetry through art. Finally, the application of the post-test, in which the elaborate issues are parallel to the issues addressed in the pre-test, so that through tables and graphs the teacher can compare the development and growth of the group.

Key Words: Sequence of Activities, Art, Mathematic, Teaching.

Lista de Figuras

Figura 01.....	11
A Ceia, (1495-1498), afresco pintado no refeitório do Convento de Santa Maria dele Grazie, em Milão, Itália, por Leonardo da Vinci.	
Figura 02.....	11
O Café, 1934, óleo sobre tela, de autoria de Cândido Portinari. Com Perspectiva. Museu Nacional de Belas Artes. Rio de Janeiro.	
Figura 03.....	12
Albrecht Dürer, Melancolia.	
Figura 04.....	12
Luiz Sacilotto e algumas de suas obras.	
Figura 05.....	18
Composição do tabuleiro de damas com cores claras. Piet Mondrian, 1919, óleo sobre tela. Museu Municipal de Haia, Haia.	
Figura 06.....	19
Tower of Babel, 1928. M.C. Escher	
Figura 07.....	19
Still life with mirror ,1934. M.C. Escher	
Figura 08.....	20
Hand with reflecting sphere, 1935. M.C. Escher	
Figura 09.....	24
Reptiles, 1943. M.C. Escher	

Figura 10.....	33
Primeira parte dos slides	
Figura 11.....	34
Segunda parte dos slides	
Figura 12.....	35
Terceira parte dos slides	
Figura 13.....	35
O jogo das diagonais	

SUMÁRIO

Resumo.....	07
Abstract.....	08
Introdução.....	12
1. Obras de arte, mosaicos e ornamentos como recursos no ensino e aprendizagem da geometria no ensino fundamental.....	16
1.1. Algumas definições essenciais.....	16
1.2. Um pouco da história da geometria.....	17
1.3. Análise do tratamento do conceito de simetria no processo de ensino e aprendizagem no ensino fundamental no Brasil.....	18
1.4. Alguns dos artistas que se inspiraram na matemática para pintar suas obras.....	19
1.5. Metodologia utilizada na estratégia didática.....	25
1.6. Uma fundamentação das teorias de Vigotsky.	26
2. O diagnóstico, a estratégia didática para aperfeiçoar o processo de ensino-aprendizagem da simetria e seus resultados.....	28
2.1. Sobre o diagnóstico	28
2.2. Pré - Teste.....	29
2.3. Atividades desenvolvidas na estratégia didática.	31
2.4. Conclusão da estratégia didática.....	38
2.5. Pós-Teste.....	39
2.6. Da estrutura do projeto.....	43
Considerações Finais.....	44
Referências.....	46

INTRODUÇÃO

Devido às limitações dos alunos observadas por esse autor em sala de aula, quanto a conhecimentos que já deveriam ter sido produzidos anteriormente em sua educação, há uma exigência maior para nós professores, uma disponibilidade e um despojamento para os quais temos que desenvolver e ampliar, nossas possibilidades de ação transformadora sobre nossa prática docente.

Nos variados campos da atividade humana, torna-se cada dia mais necessário o domínio de alguns conceitos e processos da matemática. Muitas pessoas, no entanto, mostram-se inseguras em utilizá-los, mesmo em questões simples e corriqueiras. E com isto, verifica-se que um número muito grande de alunos apresenta baixo desempenho em questões que envolvem noções elementares nesse ramo do conhecimento.

A dinâmica de trabalho do professor, entretanto, precisa ser tal que não apenas permita, mas também provoque a manifestação dos alunos, bem como a apresentação de suas necessidades. Por isso procuramos construir atividades que orientem as discussões e que nos permitam identificar as suas defasagens, atividades estas além dos livros didáticos.

Sendo assim, o desenvolvimento desse projeto visa trabalhar de forma diferenciada o plano de aprendizagem da geometria, em consequência disso, acreditamos em um interesse maior do aluno pelo conteúdo abordado. Atualmente, são várias as propostas de trabalho para um ensino consistente da matemática, mas neste projeto o professor apresenta obras de arte, recurso não muito conhecido, mas que alguns escritores de livros didáticos citam em suas obras.

Luiz Roberto Dante [2, Pg. 74] cita que “Leonardo da Vinci, italiano, foi um dos mais importantes artistas do Renascimento. Seu quadro *A ceia* é um exemplo do uso de perspectiva na pintura”.

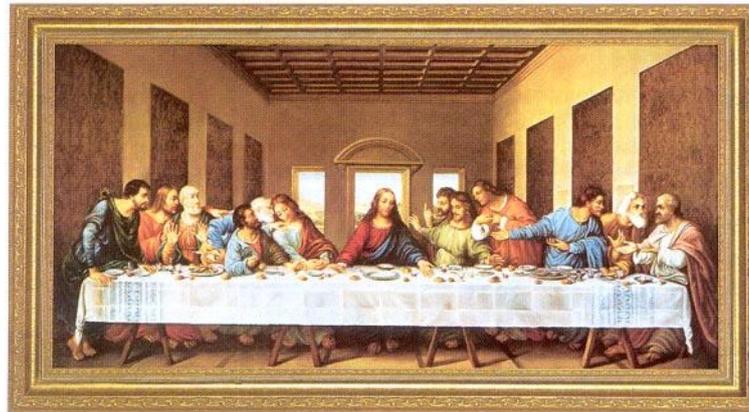


Figura 01: *A Ceia*, (1495-1498), afresco pintado no refeitório do Convento de Santa Maria dele Grazie, em Milão, Itália, por Leonardo da Vinci.

Outro exemplo mostrado por esse mesmo escritor é dado em uma das atividades e [2, Pg. 74], onde pergunta “você consegue identificar nas figuras a seguir aquela que foi pintada usando o recurso da perspectiva?” Dante mostra a obra *O café*, 1934, óleo sobre tela, de autoria de Cândido Portinari.



Figura 02: *O Café*, 1934, óleo sobre tela, de autoria de Cândido Portinari. Com Perspectiva. Museu Nacional de Belas Artes. Rio de Janeiro.

Luiz Márcio Imenes [6, Pg. 45] também escreve sobre o vínculo da Matemática com obras de arte, quando cita “Albrecht Dürer, um artista alemão do Renascimento, que explorou bastante a relação da matemática com a arte. Veja a figura 03, que ele chamou *Melancolia*. Observe a régua, o compasso, a esfera, o poliedro e o quadrado mágico”. Imenes mostra a gravura que indica exatamente o que escreveu.

Percebe-se que o trabalho em utilizar obras de arte para aperfeiçoar o ensino-aprendizagem de um conteúdo matemático é possível, visto que autores de livros didáticos importantes já realizam de alguma forma, esse trabalho. Grande é a importância do conteúdo de simetria na matemática. Por isso, nesta proposta, podemos trabalhar os conceitos de simetria com a arte de construir e analisar ornamentos. A proposta permite desenvolver geometria plana, principalmente a simetria, utilizando obras de arte, mosaicos e ornamentos, para estimular a criatividade do aluno.

Quando um aluno traça uma parábola, ele faz uso da ideia de simetria de reflexão. Quando um aluno trabalha com funções inversas, ele utiliza no traçado a bissetrizes do primeiro e do terceiro quadrantes como eixo simétrico entre os gráficos de duas funções inversas. Existe simetria no campo da Química, da Biologia e em várias outras ciências. Por isso a ideia da proposta é em aprimorar o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo. Então, surgiu um problema de ordem teórica e metodológica: como trabalhar simetria no 9º ano do Ensino Fundamental II utilizando obras de arte, mosaicos e ornamentos?

Tendo em conta, o problema, o objeto e o campo de investigação, foi traçado como objetivo geral elaborar uma atividade que utilize obras de arte, mosaicos e ornamentos para aperfeiçoar o processo de ensino-aprendizagem da simetria.

Para o desenvolvimento desse projeto, pesquisamos nos livros didáticos do Ensino Fundamental II como a simetria era apresentada, e assim fundamentar a proposta baseando-se também em livros textos.

CAPÍTULO 1

OBRAS DE ARTE, MOSAICOS E ORNAMENTOS COMO RECURSOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

1.1. Algumas definições essenciais

Para iniciar a confecção da proposta, uma das definições essenciais era a da própria estratégia didática, que de acordo com o critério do coletivo de autores Editorial Pueblo y Educación

a estratégia didática estabelece a direção inteligente, e desde uma perspectiva ampla e global, das ações encaminhadas a resolver os problemas detectados em um determinado segmento da atividade humana. Entende-se como problemas as contradições ou discrepâncias entre o estado atual e o desejado, entre o que é e deveria ser. Seu desenho implica a articulação dialética entre os objetivos (metas perseguidas) e a metodologia (vias instrumentadas para alcançá-los) [1, Pg. 39-40].

A estratégia apresenta uma introdução, onde se estabelece o contexto do problema, um diagnóstico, que indica o estado real do objeto, o planejamento, onde se definem objetivos e metas a alcançar em determinados prazos de tempo, a definição de atividades e ações que respondam aos objetivos traçados, a planificação de recursos e métodos para viabilizar a execução, e a avaliação dos resultados.

De acordo com estas reflexões, a estratégia didática se conceitua como a combinação de atividades, algumas elaboradas pelo professor, outras selecionadas de algum livro ou própria experiência no magistério, que são organizadas para atender a todos os componentes do processo de ensino e aprendizagem, e que permitem a transformação do estado real do objeto a modificar ao estado desejado, de maneira que se possam alcançar os fins propostos.

Outra definição a ser elucidada, se refere à de simetria, que é “um movimento rígido no plano que aplica um ornamento sobre si mesmo”. Além disso, a simetria pode ser de translação, rotação e reflexão. Translação é o deslizamento da figura entre duas retas paralelas. Rotação é um giro da figura em torno de um ponto fixo. Reflexão é a transformação (movimento) que conserva a distância de um ponto a um eixo fixo.

1.2. Um pouco da história da geometria

Há regularidade de algumas formas observadas na natureza como: casca do abacaxi, favo de mel, são alguns exemplos da presença da geometria na natureza. E essa regularidade é reproduzida pelo homem nas suas obras. Alguns historiadores atribuíram aos caldeus e aos egípcios a criação da geometria. Os caldeus, para calcular áreas e volumes, empregavam fórmulas da geometria. Os egípcios e os babilônios precisavam construir os templos e para isso adotaram fórmulas geométricas.

Os gregos herdaram dos babilônios a ideia de ângulo, sabendo que eram definidos apenas ângulos menores que 180° . Os gregos utilizavam as ordenadas em relação a dois ou mais eixos no plano, mas devido à falta de conhecimento da álgebra eles não tinham a ideia do seu princípio fundamental. Os sacerdotes observaram trabalhadores pavimentando uma superfície e concluíram que para cobrir a superfície plana seria necessário contar os mosaicos de uma fileira e repetir quantas fileiras fossem necessárias para cobrir toda a área, daí verificaram que a área do retângulo é igual à base da superfície plana pela altura. Para calcular a área da superfície plana do triângulo, eles tomaram um quadrado ou um retângulo e dividiram em quadrados iguais. Traçando a diagonal do quadrado ou do retângulo, aparecem dois triângulos iguais.

Outro avanço obtido sobre a geometria dos gregos foi quando se estabeleceu à correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais. Marcando-se um ponto na reta correspondendo a origem, e fixando-se uma unidade de medida e um sentido, a cada ponto corresponderá um número, que é o resultado da medida de sua distância à origem, sendo verdadeira a recíproca. Essa correspondência permitiu o aparecimento da geometria analítica. As origens da geometria coincide com o nosso dia-a-dia. Construir casas, observar, prever os movimentos dos astros são algumas das muitas atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas.

Tanto entre os sumérios como entre os egípcios, os campos primitivos tinham forma retangular. Também os edifícios possuíam plantas regulares, o que obrigava os arquitetos a construírem muitos ângulos retos (de 90°). Embora de bagagem

intelectual reduzida, aqueles homens já resolviam o problema como um desenhista de hoje. Por meio de duas estacas cravadas na terra assinalavam um segmento de reta. Em seguida prendiam e esticavam cordas que funcionavam à maneira de compassos: dois arcos de circunferência se cortam e determinam dois pontos que, unidos, seccionam perpendicularmente a outra reta, formam ângulos retos.

1.3. Análise do tratamento do conceito de simetria no processo de ensino e aprendizagem no ensino fundamental no Brasil.

Analisando a forma como é tratada a simetria, foi observado que Dante emprega o conceito formal, mas não deixa escapar a oportunidade de trabalhar com resolução de problemas e utilize também obras de arte, recurso utilizado nesta proposta. Para que o professor possa ministrar o conceito de simetria, o autor trabalha com as seguintes nomenclaturas:

- simetria em relação a um eixo (simetria axial);
- simetria em relação a um ponto (simetria central);
- simetria espacial (em relação a um plano).

Esses tópicos são trabalhados com figuras geométricas planas e espaciais, objetos e seres.

Livros didáticos, a exemplo dos elaborados por Imenes e Lellis [5], também trabalham simetria via resolução de problemas, utilizando figuras planas e espaciais, malhas para a construção de figuras simétricas e também o conceito de simetria via obras de arte. Sendo um pouco semelhante com o livro citado anteriormente (Dante), este também divide em etapas o ensino de simetria:

- simetria axial;
- simetria de rotação;
- simetria central.

A proposta deste projeto vincula o conteúdo simetria ao cotidiano do aluno. Apesar de terem sido citados dois livros que se preocupam em vincular a simetria

com ornamentos, mosaicos e obras de arte, a grande maioria dos livros didáticos não tem essa preocupação. Muitos autores trabalham o conceito de simetria de reflexão, mas não citam a rotação e a translação. Praticamente todos os livros pesquisados trabalham eixos de simetria, mas a maioria não se preocupa em vincular a simetria com os quadriláteros notáveis. Muitas características desses polígonos podem ser trabalhadas por meio de simetria.

A proposta aplicada trabalhou essas questões consideradas importantes. Juntamente com as atividades artísticas, envolvendo uma ou mais simetrias, foram trabalhados questionamentos sobre quadriláteros, ângulos e outros conceitos matemáticos.

1.4. Alguns dos artistas que se inspiraram na matemática para pintar suas obras

Pensando numa melhor forma para o ensino e aprendizagem de simetria, trabalharemos com obras de arte, mosaicos e ornamentos. Portanto, para o trabalho com obras de artes, nos baseamos em alguns artistas:

MONDRIAN P. – (Holanda, 1872 – 1944) Começou como um acadêmico pintor de paisagens, na melhor das tradições holandesas. Passou em seguida por várias fases: do impressionismo ao cubismo. A influência desta última escola foi decisiva. A partir de 1909, ele gradativamente eliminou os elementos descritivos de seus trabalhos, até que, em 1917, desenvolveu em toda plenitude seu estilo amadurecido e totalmente abstrato.

Até o fim de sua vida, Mondrian utilizaria apenas as três cores primárias mais o negro, o cinza e o branco, dispostos em retângulos, sobre uma rede de linhas negras. Em torno desse aparentemente rígido tema, Mondrian executou uma longa série de sutis variações, nas quais cores, formas e traços surgiam em harmônicas combinações.

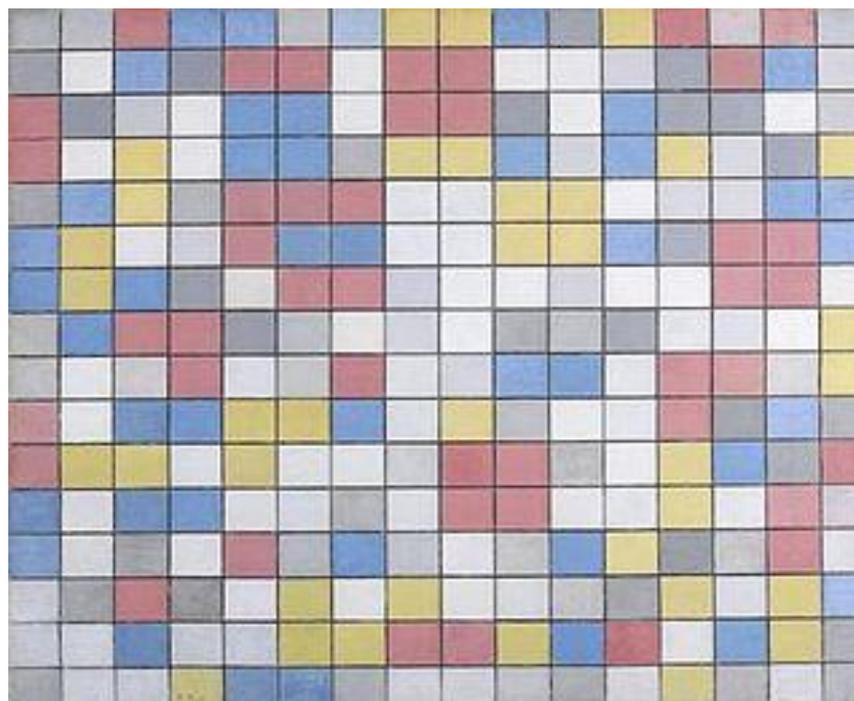


Figura 05: *Composição do tabuleiro de damas com cores claras.*
Piet Mondrian, 1919, óleo sobre tela. Museu Municipal de Haia, Haia.

Suas criações abstratas de estruturas geométricas iriam influenciar, anos depois, não só a pintura, mas também a arquitetura contemporânea, o desenho industrial, as artes decorativas e mesmo as técnicas de diagramação das artes gráficas.

ESCHER M. C. – (Holanda, 1898 – 1972) Estudou arquitetura e arte decorativa, tendo seu talento para as artes gráficas descoberto pelo artista Samuel Jerussurum, com quem estudou e trabalhou de 1919 a 1922.

De maio a julho (1923 a 1935) visitou a Costa italiana e a Espanha, tendo então feito cópias detalhadas dos mosaicos mouros do palácio de Alhambra em Granada e da Mesquita de Córdoba. Duas fases marcaram os trabalhos de Escher.

Na primeira, até 1937, eles correspondem à realidade visível de cidades e regiões italianas. Expressando detalhes, peculiaridades e irregularidades, mas também preocupação com a estrutura espacial e mostrando notável uso de perspectiva. Destaca-se sua *Tower of Babel* (1928), com ponto principal no quarto diedro e uso de 4 pontos de fuga, assim como seus belíssimos trabalhos de reflexão, como, por exemplo, *Still life with mirror* (1934), com espelho plano, e ainda *Hand with reflecting sphere* (1935) com reflexões em esfera.

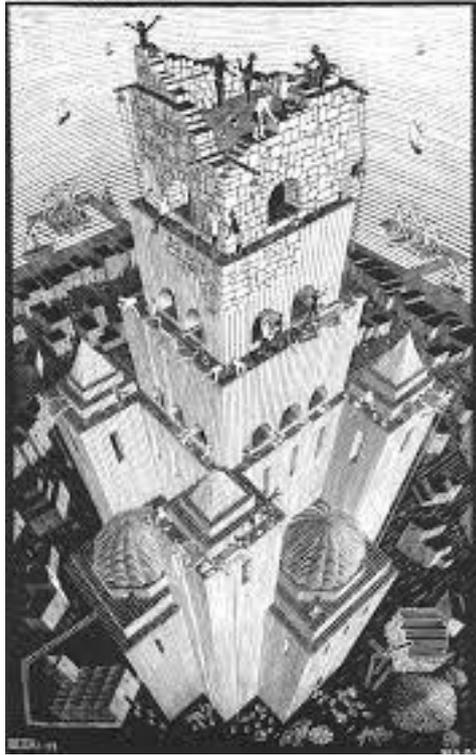


Figura 06: *Tower of Babel*, 1928. M.C. Escher



Figura 07: *Still life with mirror*, 1934. M.C. Escher



Figura 08: *Hand with reflecting sphere*, 1935. M.C. Escher

Na Segunda fase, posterior a 1937, seus trabalhos mostram afastamento do mundo físico. Usando a partir de então sua própria imaginação e visão detalhista, mas buscando regularidade, produziu composições geométricas de várias geometrias.

Escher aprendeu muito com seus professores e, ao conhecer as técnicas de desenho, deixou-se fascinar pela arte da gravura. Este fascínio foi tão forte que levou Mauritus a abandonar a Arquitetura e a seguir as Artes Gráficas. Quando terminou os seus estudos Escher decidiu viajar para conhecer o mundo. Passou por Espanha, Itália e fixou-se em Roma, onde se dedicou ao trabalho gráfico. Mais tarde, por razões políticas muda-se para a Suíça, posteriormente para a Bélgica e em 1941 regressa ao seu país natal.

Estas passagens por diferentes sítios, por diferentes culturas, inspiraram a mente de Escher, nomeadamente a passagem por Alhambra, em Granada, onde conheceu os azulejos mouros. Este contato com a arte árabe está na base do interesse e da paixão de Escher pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, se repetem e refletem, pelas pavimentações. Porém, no preenchimento de superfícies, Escher substituiu as figuras abstrato-

geométricas, usadas pelos árabes, por figuras concretas, perceptíveis e existentes na natureza, como pássaros, peixes, pessoas, répteis, etc. Ele era um grande observador da natureza, tinha profundo interesse não só pelo mundo microscópico, mas também pelo mundo macroscópico, chegou a fazer mapas detalhados do céu.

Escher, sem conhecimento matemático prévio, mas através do estudo sistemático e da experimentação, descobre todos os diferentes grupos de combinações isométricas que deixam um determinado ornamento invariante. A reflexão é brilhantemente utilizada na xilografia *Day and Night*, uma das gravuras mais emblemáticas da carreira de Escher.

Fascinado pelos paradoxos visuais, Escher chegou à criação de mundos impossíveis. Nesses trabalhos, o artista joga com as leis da perspectiva para produzir surpreendentes efeitos de ilusão de óptica. Nos seus desenhos somos levados a novos universos, a sítios verdadeiramente misteriosos. Para Escher a realidade pouco interessa, antes pelo contrário, prefere criar mundos impossíveis que apenas pareçam reais. Eis porque se tornou uma espécie de mágico das artes gráficas.

Escher suscitou a atenção por parte de muitos matemáticos, cientistas e cristalógrafos. O mais curioso é que Escher não tinha uma formação específica nestas áreas, mas elas aparecem nas suas criações. Cada vez mais assediado pelos matemáticos, Escher acabou muitas vezes por se inspirar em suas novas descobertas. Por exemplo, "Waterfall" foi baseada na figura do tribar. Uma construção geometricamente impossível criada pelo matemático Penrose.

O formato dos sólidos geométricos, em especial, dos poliedros também atraiu Escher. Seu interesse nasceu a partir da observação dos cristais, possivelmente influenciado por seu irmão que era geólogo. Realizou diversos trabalhos explorando as possibilidades dos poliedros. Maravilhado pelas suas formas afirma que no caos da sociedade moderna os poliedros "representam de maneira ímpar o anelo de harmonia e ordem do homem".

São todos os trabalhos originais e extraordinários. Escher foi reconhecido pelo mundo, aliando a matemática com sua mente artística, resultando num desenho de ilusões espaciais, de construções impossíveis, onde a geometria se transforma

em arte ou a arte em geometria. M. C. Escher cita que "apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sinto muitas vezes que tenho mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas" em [12, Pg. 09].

Aos poucos, Escher, vai sendo cada vez mais ousado e para além da “dança” com a geometria, vai também ao encontro do infinito. A divisão regular da superfície aparece misturada a formas tridimensionais, geralmente num ciclo sem fim, onde uma fase se dilui na outra. A litografia "Reptiles" é um bom exemplo disso.



Figura 09: *Reptiles*, 1943 M.C. Escher

Desde o início que um dos seus fascínios era a representação tridimensional dos objetos na inevitável bidimensionalidade do papel. Escher explorou em profundidade as leis da perspectiva e desafiou essas leis nas representações bidimensionais e tridimensionais, provocando o conflito das representações.

Dono de uma personalidade humilde, Escher, não se considerava artista nem matemático. Mas a verdade é que transportou para os seus desenhos estruturas matemáticas complexas, perspectivas espaciais que necessitam, sempre de um apurado segundo olhar, podemos mesmo dizer de um terceiro, quarto.

Quando faleceu, em 1972, suas obras já tinham sido expostas nos principais museus e galerias da Europa e da América do Norte, sendo reconhecidas pela notável combinação da sensibilidade, precisão técnica e conhecimento matemático que expressavam.

1.5. Metodologia utilizada na estratégia didática

Esta pesquisa tem como objetivo apresentar uma sequência de atividades, pré-teste, atividades, e um pós-teste, utilizando obras de artes, mosaicos e ornamentos para trabalhar simetria.

Inicialmente, o professor deverá aplicar um diagnóstico (pré-teste), para detectar a situação real do grupo, quanto ao conhecimento de simetria. Aplicado o diagnóstico, o professor deverá tabular os resultados, para futuro comparativo.

A partir do diagnóstico, será elaborada uma estratégia didática, num total de oito atividades sobre simetria, a serem aplicadas pelo professor, como intervenção. Algumas atividades foram retiradas de livros didáticos, outras foram adaptadas de livros, e algumas propostas pelo autor deste trabalho.

Depois de criada a estratégia didática, o professor deverá fazer uma observação em todas as atividades que foram aplicadas.

Na etapa final o professor deverá aplicar um pós-teste na turma com o objetivo de levantar dados. Esses dados deverão ser tabulados, para futura comparação com o pré-teste. O intuito dessa comparação é verificar se o que foi proposto possibilitou ao aluno um maior significado ao conceito de simetria.

Segundo os objetivos, o projeto é caracterizado como exploratório, afinal foi feito um levantamento bibliográfico para obter mais conhecimento sobre o conteúdo de simetria, para estudar sobre os artistas trabalhados, para saber como está o ensino de simetria no Brasil e fundamentar com a intenção de apoiar teoricamente a proposta.

O projeto também é caracterizado como descritivo, pois após exploração, o professor deverá descrever os fatos ocorridos nos problemas.

Segundo os procedimentos de coletas de dados, o projeto é considerado de levantamento, pois deverão ser recolhidos informações e dados para a pesquisa, junto ao grupo de alunos trabalhados. Será utilizado um diagnóstico como instrumento para recolher essas informações. Além disso, após a aplicação da proposta, será aplicado um pós-teste, que servirá como instrumento para coletar dados.

1.6. Uma fundamentação das Teorias de Vigotsky.

Nessa pesquisa será aplicado um diagnóstico para identificar a situação real em relação ao conhecimento sobre simetria de um grupo de alunos. Após esse diagnóstico (pré-teste) possivelmente a grande maioria dos alunos apresentará dificuldades com relação a esse conteúdo. Conhecendo a situação real do grupo escolhido e acreditando que o grupo será capaz de atingir um nível mais alto, foi elaborada uma estratégia didática. Vigotsky chama esse espaço entre a situação real e proximal do aluno de zona de desenvolvimento proximal. Oliveira cita

Vigotsky define a zona de desenvolvimento proximal como a distância entre o desenvolvimento real, que é costume determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas com a orientação de um adulto ou com a colaboração de companheiros mais capazes (OLIVEIRA, 1991: 61).

A estratégia didática foi elaborada de forma que algumas atividades sejam realizadas em equipes e outras individualmente. O trabalho em grupos heterogêneos é muito importante, afinal os companheiros com maior facilidade com os assuntos abordados podem funcionar como mediadores, ou seja, como pessoas que ajudam os demais alunos do grupo a realizar o trabalho. O trabalho em grupo permite visualizar as interações entre os alunos e o trabalho individual permite observar o desenvolvimento de cada aluno.

Existe uma cultura na adolescência brasileira em sentido geral, em relação a trabalhos em equipe. Alguns visualizam o trabalho em equipe como uma maneira de conseguir boas notas, copiando as tarefas de outros, sem a preocupação e responsabilidade em ajudar o grupo a progredir, e essa cultura tem consequências

dentro das escolas, porque grande parte dos professores evitam esse tipo de trabalho, e quando o utilizam nada fazem para mudar essa cultura de só copiar. Trabalho em equipe é muito mais que isso, e se forem tratadas com os estudantes a necessidade e a importância de trabalhar conjuntamente, alunos e professores só ganhariam, pois trabalhar assim é essencial para o desenvolvimento do indivíduo. Para Vigotsky, o ser humano cresce em um ambiente social e a interação com outras pessoas é essencial a seu desenvolvimento. Oliveira cita que:

a concepção de Vigotsky sobre as relações entre desenvolvimento e aprendizagem, estabelece um forte vínculo entre o processo de desenvolvimento e a relação do indivíduo com seu ambiente sócio-cultural e com sua situação de organismo que não se desenvolve plenamente sem o suporte de outros indivíduos de sua espécie (OLIVEIRA, 1991:61).

O trabalho em grupo possibilita que os alunos do grupo adquiram estratégias de resolução com seus companheiros. Frente a um determinado problema, um aluno pode conseguir solucioná-lo por recordar o caminho utilizado por seu companheiro em um problema apresentado anteriormente. O grupo tem o importante papel de discutir e transmitir ideias, que no futuro poderiam ser utilizadas por todos os componentes do grupo. Isso pode ser relacionado ao mecanismo de imitação, destacado explicitamente por Vigotsky. Marta Kohl de Oliveira, em [8, Pg 63] destaca em seu livro que

Imitação, para Vigotsky, não é a mera cópia de um modelo, sim a reconstrução individual daquilo que é observado nos outros. Essa reconstrução é válida pelas possibilidades psicológicas da pessoa que realiza a imitação, e constitui para ela a criação de algo novo a partir do que observa no outro. Vigotsky não toma a atividade imitativa como um processo mecânico, mas sim como uma oportunidade da pessoa realizar ações que estão ao alcance de suas próprias capacidades, o que contribui a seu desenvolvimento.

A ideia nessa proposta é sempre trabalhar com equipes antes de trabalhar individualmente. Assim, além de estratégias de solução para fazer as atividades e responder os questionamentos, os alunos adquirem também segurança para trabalhar.

CAPÍTULO 2

O DIAGNÓSTICO, A ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA APERFEIÇOAR O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA SIMETRIA E SEUS RESULTADOS

2.1. Sobre o Diagnóstico

O objetivo geral desse projeto é elaborar e aplicar uma estratégia didática utilizando obras de arte, mosaicos e ornamentos para aperfeiçoar o processo de ensino-aprendizagem da simetria. Para isso na seção 2.1.1, o docente deverá aplicar um diagnóstico que permitirá saber se um determinado grupo de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II terá aprendido esse conteúdo, já trabalhado em séries anteriores. A intenção é fazer uma comparação da situação anterior e posterior à aplicação da estratégia didática nesses alunos.

Os indicadores levados em conta para processar as questões aplicadas serão:

- O conhecimento sobre simetria.
- A presença do estudo da simetria na arte.
- A identificação dos eixos de simetria.
- A relação da simetria com quadriláteros.

O diagnóstico poderá ser realizado na própria escola onde o docente ministra, e/ou podendo ser realizado em qualquer outra com o intuito de apresentar o ensino da matemática através de uma aplicação mais cotidiana e contextual.

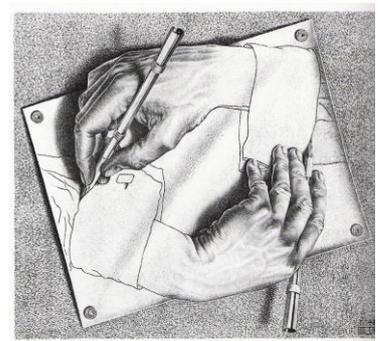
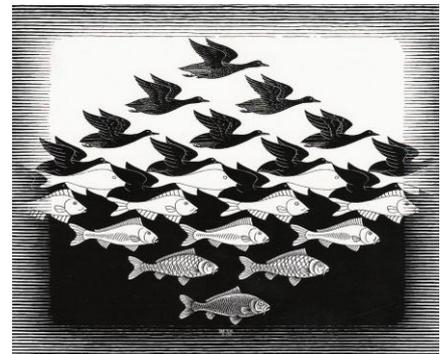
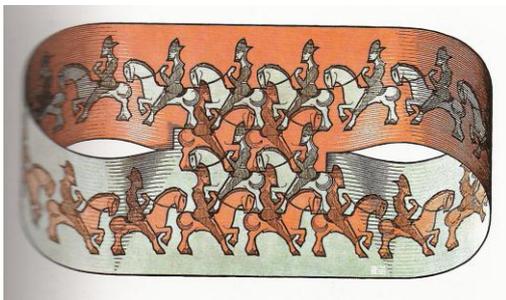
2.2 – Pré- Teste

Escola: _____

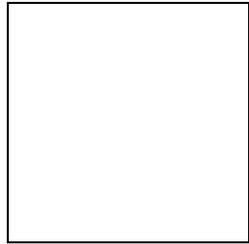
Aluno (a): _____ Turma: _____

Estimado aluno: necessito de sua colaboração na investigação sobre melhorias no Ensino de Simetria via Obras de Arte. Suas respostas sinceras podem ser de grande ajuda.

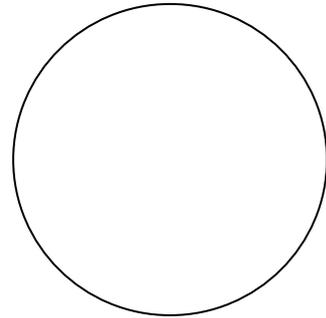
- 1) Qual a sua ideia sobre simetria?
- 2) Existem três tipos de simetria: rotação, reflexão e translação. Em cada obra abaixo, o artista se inspirou em um tipo de simetria. Escreva nos espaços abaixo de cada obra, a simetria utilizada pelo artista.



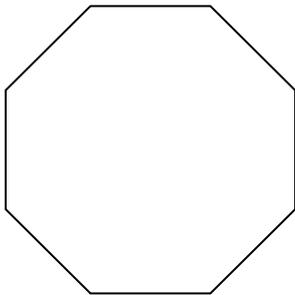
- 3) Trace os eixos de simetria (reflexão) das figuras abaixo.
Indique o número de eixos em cada figura.



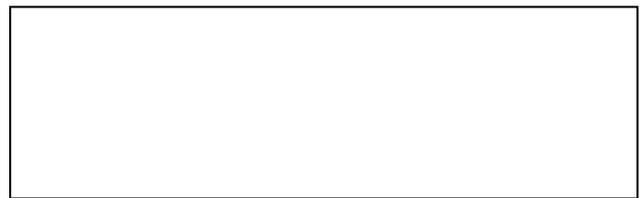
n° de eixos: _____



n° de eixos: _____

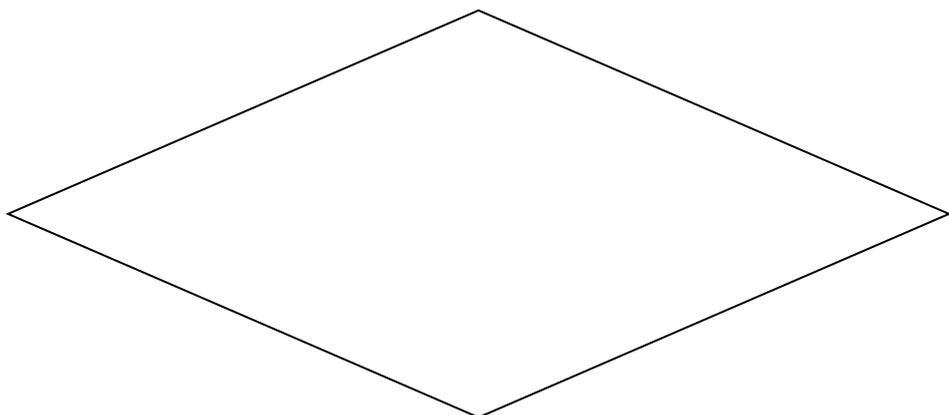


n° de eixos: _____



n° de eixos: _____

- 4) No losango há dois eixos de simetria. Indique – os e liste algumas características desses eixos.



2.3. Atividades desenvolvidas na estratégia didática.

Com o diagnóstico aplicado é possível propor uma estratégia didática para transformar a realidade existente de alunos que viram o conteúdo simetria, mas não assimilou.

A estratégia didática será feita a partir da elaboração de atividades com a utilização de obras de arte, mosaicos e ornamentos, totalizando oito atividades. Além disso, deverão ser aplicadas algumas listas de exercícios.

Das atividades:

Atividade A: Fazendo uma releitura.

Essa atividade tem como principal objetivo fazer com que os alunos tenham contato com vários artistas plásticos que foram de alguma forma, influenciados pela Matemática para compor suas obras. Os alunos devem escolher uma obra de um artista, entre M. C. Escher, Lygia Pape, Mondrian e Luiz Sacilotto, para que façam uma releitura (reproduzi-la, interpretar bem o que se vê e usar a criatividade) dessa obra.

Atividade B: Observando obras de arte e identificando a matemática.

Essa atividade tem como principal objetivo identificar elementos matemáticos em obras de artes dos artistas trabalhados na atividade anterior. A atividade deverá utilizar cópias ampliadas de obras desses artistas, as quais os alunos observarão e farão registros.

Atividade C: Aprendendo simetrias.

Depois de observarem e registrarem vários elementos matemáticos na atividade anterior, os alunos terão a oportunidade de conferir, observar e ainda saber que vários dos elementos identificados terão relação com o conteúdo simetria. Para essa atividade o docente deverá usar o programa PowerPoint para apresentação de

slides, mostrando algumas obras de arte conceituando os três tipos de simetria. O texto utilizado nos slides é do livro Matemática para todos, 7ª e 8ª séries em [6], do autor Imenes.

Slides da Atividade C: Aprendendo Simetrias

Figura 10

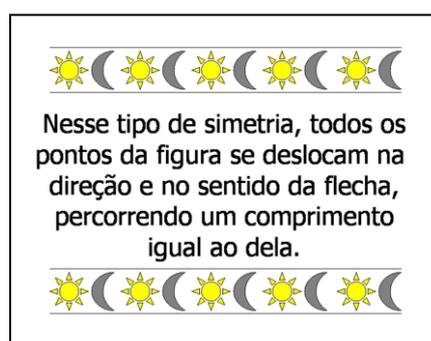
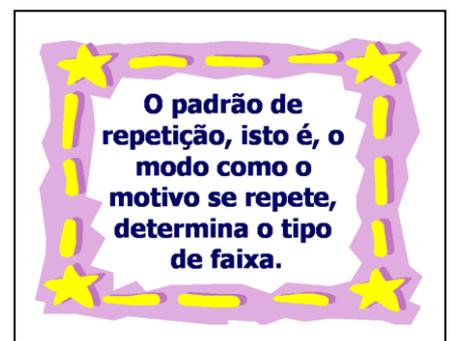
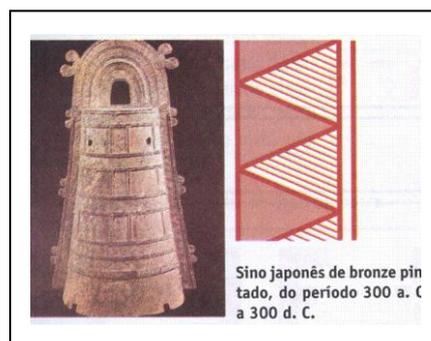
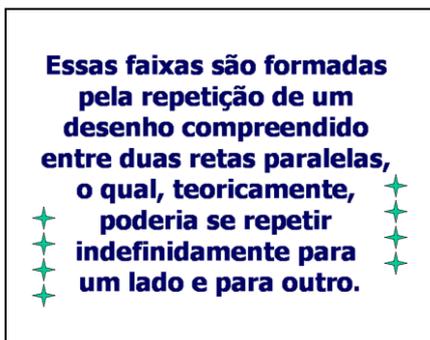
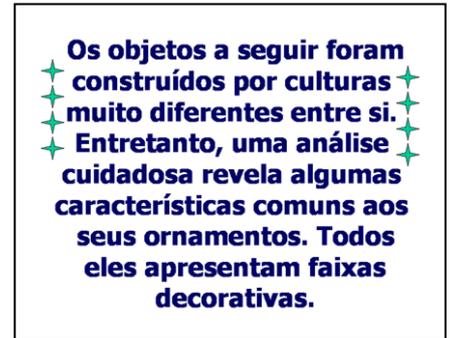


Figura 11

REFLEXÃO REFLEXÃO REFLEXÃO
REFLEXÃO REFLEXÃO REFLEXÃO

Reconhecemos a simetria de reflexão pela presença de um eixo de simetria. Todos os pontos de um lado do eixo têm um ponto equidistante do outro lado do eixo.



A simetria de reflexão é também chamada de simetria axial.



ROTAÇÃO ROTAÇÃO ROTAÇÃO
ROTAÇÃO ROTAÇÃO ROTAÇÃO

A natureza mostra um outro tipo de simetria, que chamamos simetria de rotação. Nesse tipo de simetria, todos os pontos da figura giram alguns graus em torno de um centro.

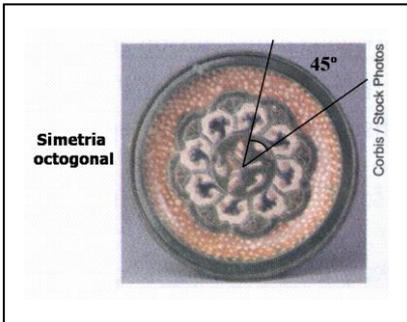
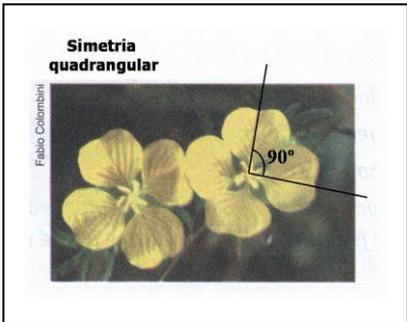
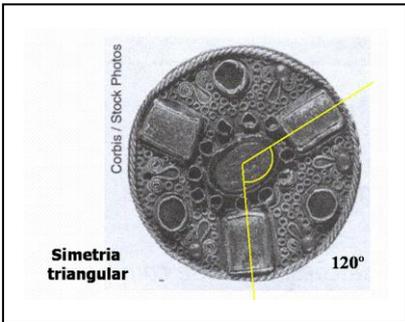
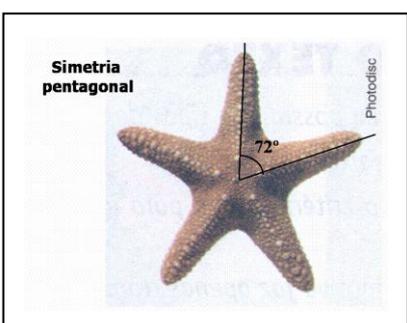
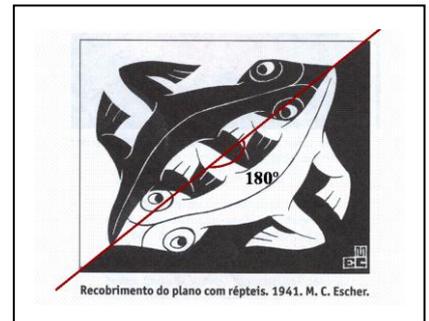
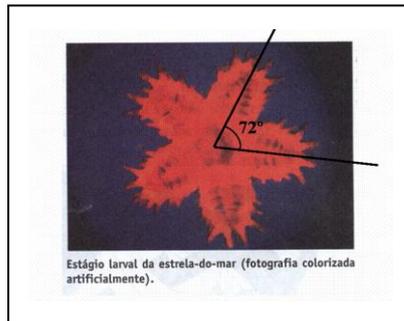
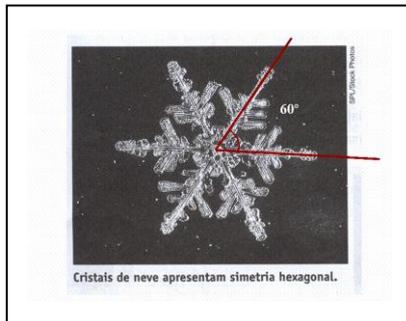


Figura 12

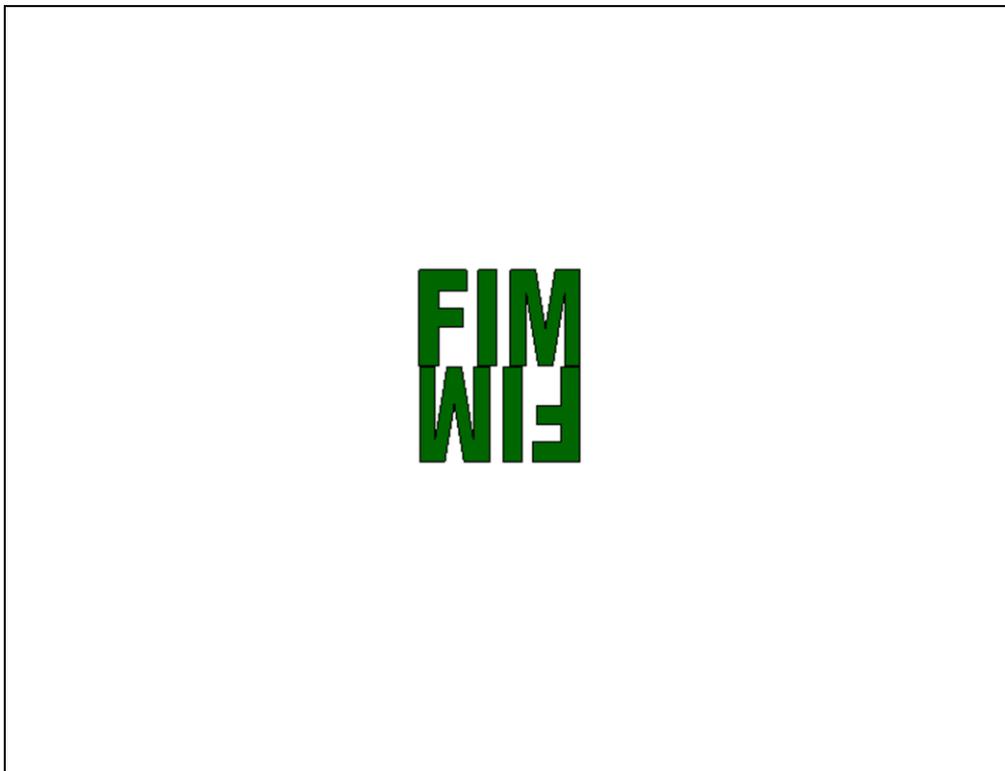


Quando a rotação é de 180° , como no caso da figura anterior, dizemos que a simetria é **central**. Então, a simetria central é um caso especial de simetria de rotação.



Vimos três casos de simetria:

- TRANSLAÇÃO
- REFLEXÃO
- ROTAÇÃO



Atividade D: Observando simetrias e criando uma translação.

Para iniciar a atividade, mais uma vez os alunos observarão algumas obras de arte, mas agora em tamanho menor, e com a intenção de identificar as simetrias observadas, justificando o porquê de cada uma estar presente nas obras. Depois disso, inspirando-se nas obras de arte já conhecidas pelos alunos, eles deverão criar uma faixa decorativa formada pela repetição de um desenho compreendido entre duas retas paralelas. A faixa deverá ter um padrão de cor. A atividade terá a intenção de finalizar com a criação de uma simetria de translação.

Atividade E: Reproduzindo e criando estrelas.

A atividade será uma cópia de duas estrelas apresentadas pelos escritores *Imenes* e *Lellis* no livro *Matemática para todos*, [6]. O principal objetivo dessa atividade é que os alunos percebessem a simetria de rotação. Além disso, serão trabalhados os ângulos centrais e inscritos. Os alunos deverão criar um padrão de cor preocupando-se com o número de ângulos centrais apresentados nas estrelas. Além disso, os alunos deverão criar uma terceira estrela com ângulo central diferente das duas anteriores.

Atividade F: Criando mosaicos.

Nessa atividade os alunos receberão algumas malhas de polígonos. Os mesmos terão que escolher uma malha e criar um mosaico de forma que a figura apresente uma simetria de reflexão e rotação simultaneamente. Além disso, responderão algumas questões envolvendo geometria e o mosaico construído.

Atividade G: Confeccionando um artesanato.

A atividade será em criar um artesanato amarrando linhas em pregos fixados sobre madeira. O objetivo será visualizar simetrias, além disso, os alunos trabalharão segmentos e o número de diagonais de um polígono. O trabalho poderá ser realizado em grupos de quatro alunos, observando o trabalho em equipe. Essa

atividade foi adaptada do livro Explorando o Ensino da Matemática, selecionadas e organizadas por Ana Catarina P. Hellmeister, [4].

O jogo das diagonais

1º Passo – Aproveitando o maior espaço possível da tábua, desenhar sobre a mesma um polígono regular de n lados, com n ímpar. Para isso, trace as diagonais da tábua, que tem o formato de um quadrado, marcando no seu ponto de intersecção o centro da circunferência que circunscreve o polígono.

2º Passo - Tendo desenhado o polígono, nos seus vértices fixar os pregos. É importante que esses fiquem bem firmes. Se depois um deles se soltar, o trabalho estará perdido.

3º Paso – Construir, com a linha, a diagonal do polígono seguindo as seguintes regras:

- É preciso construir todas as diagonais.
- Lado não é diagonal e por isso, quando estiver construindo as diagonais, não é permitido passar a linha de um prego para um de seus vizinhos.
- Não vale construir a mesma diagonais duas vezes, isto é, não vale ir e vir pelo mesmo caminho.
- Também não vale, num dado momento, amarrar a linha num prego, cortá-la, amarrá-la novamente em outro prego, e prosseguir com trabalho.
- A linha só pode ser cortada quando a última diagonal tiver sido construída.

PROBLEMAS

- 1) Deduza a fórmula que calcula o número de diagonais de um polígono.
- 2) Qual o tipo de simetria que você observa no seu artesanato? Justifique.
- 3) Quantos segmentos de retas existem na figura? Generalize em função de n .

“Penso que o artesanato construído com pregos e linhas, e os problemas criados a partir dele, revelam com bastante força a fecundidade de um casamento entre a matemática e a arte!”

Luiz Márcio P. Imenes. 1984

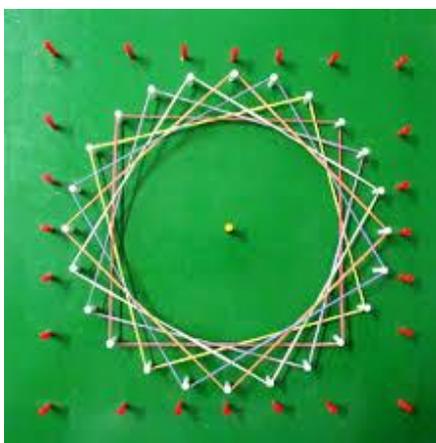


Figura 13

Atividade H: Recortando simetricamente.

Nesta atividade serão distribuídas para os alunos folhas A4 para que criem quadrados com estas folhas. O próximo passo será criar figuras recortando o quadrado, e após o recorte, analisarão qual a simetria está presente na figura criada, qual o ângulo observado e quantas vezes foi necessário dobrar o quadrado para construir a figura. Aqui utilizaremos uma atividade adaptada do Livro Pra que serve a matemática, dos autores Imenes, Jacubo e Lellis, em [5].

Recortando simetricamente

O objetivo principal.

Temos por principal objetivo, desenvolver em nossos alunos a capacidade de observação de simetrias, trabalhando a partir de uma situação-problema por eles criada.

Conteúdos Matemáticos:

- Simetria
- Ângulo
- Construções de polígonos usando régua e compasso

Recursos/Materiais:

- Folha A4 branca
- Cartolina
- Tesoura
- Cola
- Régua
- Compasso

Procedimentos:

- 1) Distribuir para os alunos folhas de papel A4.
- 2) De posse das folhas, cada aluno deve construir um quadrado, usando para isso apenas régua e compasso.
- 3) Recortar o quadrado desenhado.

- 4) Dobrar o quadrado várias vezes.
- 5) Neste quadrado dobrado, recortar uma figura qualquer.
- 6) Desdobrar a folha.
- 7) Colar esta folha em uma cartolina de qualquer cor, exceto branca.
- 8) Responder o questionário a seguir.

Questionário:

- 1) Quantas vezes foram necessárias dobrar a folha para construção da figura?
- 2) Que simetria foi enxergada ao final da atividade?
- 3) Qual o ângulo observado?

2.4. Conclusão da estratégia didática

Como foi dito anteriormente, o objetivo dessa pesquisa, é elaborar e aplicar uma estratégia didática utilizando obras de arte, mosaicos e ornamentos para aperfeiçoar o processo de ensino-aprendizagem da simetria. O docente deverá aplicar um diagnóstico (pré-teste) para verificar se um grupo de alunos do 9º ano havia aprendido o conteúdo sobre simetria, e, posteriormente outro diagnóstico (pós-teste) deverá ser aplicado com a intenção de fazer uma comparação da situação anterior e posterior à aplicação da estratégia didática.

Os indicadores levados em conta para processar as questões aplicadas nos alunos foram:

- O conhecimento sobre simetria.
- A presença do estudo da simetria na arte.
- A identificação dos eixos de simetria.
- A relação da simetria com quadriláteros.

O diagnóstico (pós-teste) deverá ser realizado na mesma escola, turma e alunos onde foi aplicado o pré-teste.

2.5 – Pós-Teste

Escola:

Aluno:

Turma:

1 – Indique um elemento matemático presente em cada simetria abaixo:

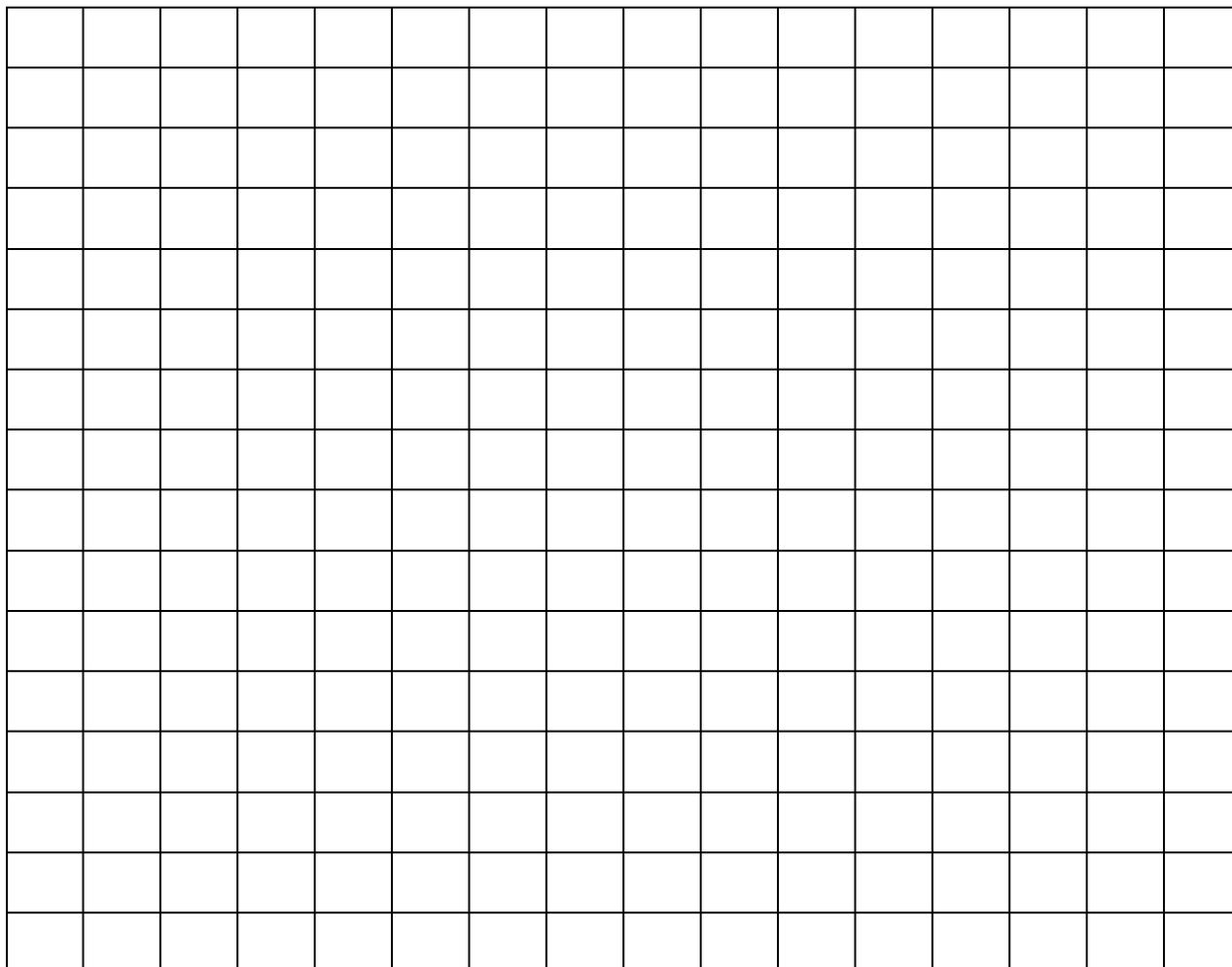
a) Simetria de rotação:

b) Simetria reflexão:

c) Simetria de translação:

2 – Desenhe o quadrilátero regular ABCD indicando todos os seus ângulos internos sabendo que o ângulo \hat{A} mede 30° .

3 – Você foi contratado para criar uma logomarca de uma organização não – governamental (ONG) que trabalha pelo reflorestamento do planeta. O diretor da organização exige que a logomarca apresente algum dos três tipos de simetria: reflexão, translação ou de rotação.



Após a sua criação, indique o tipo de simetria e justifique.

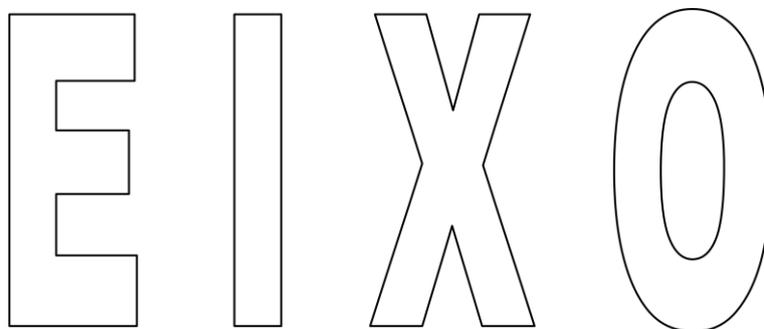
4 – A ilustração abaixo mostra uma das obras de M. C. Escher.



Percebe –se que essa ilustração tem simetria de rotação de:

- a) 15° b) 30° c) 120° d) 60° e) 45°

5 – Trace os eixos de simetria de cada uma das letras:



6 – Um quadrilátero que tem dois e apenas dois eixos de simetria é o:

- a) losango
- b) quadrado
- c) trapézio
- d) trapézio isósceles
- e) paralelogramo

7 – Sobre as diagonais dos losangos é errado afirmar que:

- a) estão nos eixos de simetria do quadrilátero
- b) cortam-se ao meio
- c) têm um mesmo comprimento
- d) são perpendiculares
- e) dividem os ângulos internos ao meio

8 – Um quadrilátero que tem simetria de rotação de 90° é o:

- a) retângulo
- b) quadrado
- c) trapézio
- d) trapézio isósceles
- e) paralelogramo

Para melhor análise dos resultados, o professor deverá comparar os indicadores:

- O conhecimento sobre simetria, relacionando a primeira questão do pré-teste com a primeira questão do pós-teste;
- A presença do estudo da simetria na arte, comparando a segunda questão do pré-teste com a quarta do pós-teste;
- A identificação dos eixos de simetria, questão três do pré-teste e questão do cinco do pós-teste;
- A relação da simetria com quadriláteros, por fim comparando a questão quatro do pré-teste com as questões seis, sete e oito do pós-teste.

Além dos resultados obtidos no pós-teste, deverá haver uma preocupação por parte do professor em saber se houve satisfação dos alunos com a aplicação da proposta.

2.6 – Da estrutura do projeto:

- i) Aplicação de um pré-teste, com o intuito de avaliar o conhecimento dos alunos quanto ao assunto de simetria, sem a abordagem do conteúdo. Ao final dessa aplicação o docente deverá tabular os dados obtidos em tabelas e por essas, criar gráficos para futuras comparações.
- ii) Aplicado o pré-teste, o docente fará uma intervenção com a estratégica didática proposta, trabalhando a simetria através das obras de arte, os tipos de simetria, num total de oito atividades. Essa estratégia servirá para que o professor aborde todo o conteúdo de simetria, esclarecendo todas as dúvidas para que possa ser aplicada a última etapa do processo.
- iii) Pós-teste, essa atividade será aplicada como última etapa do processo, utilizando os mesmos indicativos que foram abordados no pré-teste, para que ao final dos dados tabulados, e do gráfico esboçado, o docente possa efetuar comparações e analisar se a proposta obteve o resultado satisfatório.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que a matemática é vista como uma disciplina isolada em relação a outras áreas de conhecimento. Nesse projeto de pesquisa pode-se mostrar que não é bem assim, que ela se relaciona e se integra em inúmeros contextos.

A pesquisa tem como problema científico o seguinte questionamento: como trabalhar simetria no 9º ano do Ensino Fundamental II utilizando obras de arte, mosaicos e ornamentos? Assim iniciou-se o pensamento em como trabalhar a simetria com esses alunos. Como primeiro passo foi observado de que forma era apresentada a simetria em livros didáticos, para isso foram analisados livros de alguns autores famosos como Luiz Márcio Imenes e Luiz Roberto Dante. Após essa análise foi visto que os mesmos trabalham com obras de arte, o que propiciou um melhor entendimento do assunto, mas também foi observado que muitos livros didáticos não se preocupam em trabalhar dessa forma.

Com isso devemos escolher turma do 9º ano do Ensino Fundamental II, para desenvolvermos a pesquisa. Primeiramente aplicaremos um pré-teste para detectarmos a situação real dos alunos. Através dessa poderemos perceber que os mesmos não adquiriram o conhecimento de simetria aplicado nas séries anteriores e que sentirão dificuldades em trabalhar com simetria.

Sendo assim elaboramos uma estratégia didática com diversas atividades. Nessas atividades trabalharemos a simetria de diversas maneiras, como uma releitura de uma obra de arte, como a construção de polígonos regulares, mosaicos, ornamentos e criação de estrelas. Algumas dessas atividades deverão ser desenvolvidas em grupo e outras individualmente.

Aplicada a estratégia didática na turma, deveremos ter uma certa rejeição por parte dos alunos, ainda mais pela forma como as atividades serão propostas, mas, o professor poderá observar que no decorrer as mesmas serão bem aceitas por esses alunos.

Como o objetivo é buscar um melhor processo de ensino aprendizagem de simetria, essa estratégia fornecerá uma base muito eficaz para que isso se torne possível.

Finalizando, a aplicação do pós-teste, analisando as tabelas e seus gráficos, servirá para mostrar ao professor que excelentes resultados serão obtidos, mostrando que o objetivo foi alcançado.

REFERÊNCIAS

- [1] BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimdo Padrões em Mosaicos**. Editora Atual, São Paulo, 1998.
- [2] DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática: 7^a série**. São Paulo: Editora Ática, 2002.
- [3] FONSECA, Maria da Conceição F.R., Maria da Penha Lopes, Maria das Graças Gomes Barbosa, Maria Laura Magalhães Gomes, e, Mônica Maria Machado S.S. Dayrell. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental**. Autêntica, Belo Horizonte, 2002.
- [4] HELLMEISTER, Ana Catarina. **Explorando o ensino da matemática: atividades: vol.2**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.
- [5] IMENES, Luiz Márcio, José Jakubovic e Marcelo Cestari Lellis. **Geometria**. Pra que serve a matemática. São Paulo: Editora Ática, 1992.
- [6] IMENES, Luiz Márcio. **Matemática para todos: 7^a série, 4^o ciclo**. São Paulo: Scipione, 2002.
- [7] IMENES, Luiz Márcio. **Vivendo a Matemática – Geometria dos Mosaicos**. São Paulo: Editora Scipione, 1996.
- [8] OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vygotsky – Aprendizado e Desenvolvimento um Processo Sócio-Histórico**. Editora Scipione, 1991.
- [9] SMOLE, Kátia Stocco e Maria Ignez Diniz. **Matemática Ensino Médio, 3^o ano**, Editora Saraiva, 2003.
- [10] STEPHEN, Krulik e Robert E. Reys. Tradução Higino H. Domingues e Olga Corbo. **Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo, Ed. Atual 1997.
- [11] TASCHEN GmbH. **M. C. Escher Grafica e Disegni**. Alemanha, Ed. Taschen 2001.
- [12] 1967, cit. In APM, 1998, Pg. 09.