



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
Centro de Ciências da Natureza  
Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

# O Uso de Material Concreto para o Ensino da Propriedade Reflexiva das Cônicas

Fernando Rocha Barbosa

Teresina  
2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
Centro de Ciências da Natureza  
Departamento de Matemática

# O Uso de Material Concreto para o Ensino da Propriedade Reflexiva das Cônicas

**Fernando Rocha Barbosa**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação – Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional como  
requisito parcial para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática

Orientador  
**Prof. Dr. João Benício de Melo Neto**

**Teresina**  
**2016**

## FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial do CCN

B238u Barbosa, Fernando Rocha

O Uso de Material Concreto para o Ensino da Propriedade Reflexiva das Cônicas/ Fernando Rocha Barbosa. - Teresina, 2016.  
66f. il.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Piauí,  
Orientador: Prof. Dr. João Benício de Melo Neto

1. Geometria - Estudo e Ensino. 2. Seções cônicas. I. Título

CDD 516.32



**PROFMAT**



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **Mestre em Matemática** intitulada: **O Uso de Material Concreto para o Ensino da Propriedade Reflexiva das Cônicas**, defendida por **FERNANDO ROCHA BARBOSA** em **16 / 03 / 2016** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

**Prof. Dr. João Benício de Melo Neto**

Presidente da Banca Examinadora

**Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira (UFPI)**

Examinador

**Prof. Dr. Roberto Arruda Lima Soares (IFPI)**

Examinador

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus que possibilitou mais essa conquista, pois sempre me deu saúde nesse período e me guia na vida.

Aos meus pais, Pedro e Maria, exemplos de companheirismo, amor e dedicação aos filhos que são indispensáveis para superar muitos obstáculos.

Aos meus irmãos, Credemir e Vanessa, pela compreensão e ajuda em diversos momentos dessa jornada.

A todos os meus familiares, pelo apoio dado a essa conquista, por compartilharem momentos de felicidades e de dificuldades.

A todos os meus amigos de infância, de ensino básico, de graduação e trabalho, pelas opiniões valorosas. Em especial, aos amigos da turma 2014 do PROFMAT, pela união e ajuda nos vários desafios que nos foram colocados.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela idealização desse mestrado que melhora a formação do professor de Matemática do Ensino Básico e o ensino de Matemática.

A todos os professores e coordenador do PROFMAT-UFPI pelos conhecimentos compartilhados e empenho para que pudéssemos superar as tantas avaliações que fomos submetidos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Benício de Melo Neto, pela disponibilidade e dedicação na orientação dessa dissertação.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí por possibilitar minha graduação, pós-graduação Lato sensu e, hoje, fazer parte do quadro de professores de Matemática da instituição.

Ao amigo Prof. Francisco José de Sousa pelo dedicado trabalho de revisão gramatical.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte dessa realização, o meu muito obrigado.

*Se fizer uma reta, de comprimento indefinido que passa sempre por um ponto fixo (Vértice), mover-se ao longo de um círculo (base do cone) que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.*

*(Apolônio de Perga)*

*Quem entende Arquimedes e Apolônio, admirará menos as realizações dos homens mais célebres de épocas posteriores.*

*(Leibniz)*

*A paciência é amarga, mas seu fruto é doce.*

*(Jean-Jacques Rousseau)*

# Resumo

O presente trabalho tem por finalidade apresentar o material didático “Sinuca das Cônicas” como recurso didático para favorecer o ensino-aprendizagem de definições e propriedades das cônicas no ensino médio, em especial a propriedade refletora. Acredita-se que o uso de materiais concretos para ensinar matemática é um recurso facilitador para o desenvolvimento didático do professor e a aprendizagem do aluno. A priori, faz-se um levantamento histórico das cônicas e é apresentado o método de aplicação de áreas da geometria grega. Em seguida, justificam-se os nomes das cônicas dados por Apolônio de Perga e é apresentada a caracterização dessas curvas pelos teoremas de Dandelin-Quetelet e Pierce Morton. Dando continuidade, dá-se uma abordagem geométrica e analítica das cônicas no plano, onde se verifica: a definição do lugar geométrico, a construção com régua e compasso, os elementos e algumas propriedades. Por fim, propõe-se a confecção dos materiais concretos “Sinucas das Cônicas” e se discute a utilização de materiais concretos para o ensino de matemática.

**Palavras-chave:** Geometria, Seções Cônicas, Propriedade Reflexiva, Sinucas das Cônicas.

# Abstract

This study aims to present the courseware “Pool of Conical” as a teaching resource to support education and learning definitions and conical properties in high school, especially the reflective property. It is believed that the use of concrete materials for teaching mathematics is a facilitator resource for teaching development to teacher and student learning. Initially, it is a historical survey of conical and presents the method of application areas of Greek geometry. Then justified the names of conical given by Apollonius of Perga and shows the characteristics of these curves by theorems Dandelin-Quetelet and Morton Pierce. Continuing, gives yourself a geometric and analytical approach to the conic in the plane, where there is: the definition of the locus, the construction with ruler and compass, the elements and some properties. Finally, propose to manufacture of concrete materials “Sinucas of Conical” and discusses the use of concrete materials for teaching mathematics.

**Keywords:** Geometry, Conic Sections, Reflective Property, Sinucas of Conical.

# Lista de Figuras

1.1	Elementos do Cone . . . . .	14
1.2	Seções Cônicas . . . . .	15
1.3	Aplicação de Áreas . . . . .	16
1.4	Aplicação de Áreas Parabólica . . . . .	17
1.5	Aplicação de Áreas Elíptica . . . . .	18
1.6	Aplicação de Áreas Hiperbólica . . . . .	18
1.7	a) Representação da trajetória elíptica de um planeta ao redor do Sol. b) Em intervalos de tempo iguais, as áreas “varridas” pelo raio vetor que liga o planeta ao SOL (em um dos focos) também são iguais: $\Delta t = t_2 - t_1 = t_4 - t_3$	19
2.1	Seções Cônicas definidas por Apolônio . . . . .	21
2.2	Retas tangentes a $S$ que passam um ponto exterior $P$ . . . . .	27
2.3	Esferas $S_1$ e $S_2$ tangentes ao plano $\pi$ e ao cone $C$ no mesmo ramo . . . . .	28
2.4	Esferas $S_1$ e $S_2$ tangentes ao plano $\pi$ e ao cone $C$ em ramos distintos . . . . .	29
2.5	Esfera $S$ tangente ao plano $\pi_1$ e ao cone $C$ . . . . .	30
2.6	Relação Foco, Diretriz e Excentricidade . . . . .	31
3.1	Construção da Elipse com Régua e Compasso . . . . .	34
3.2	Propriedade do Diâmetro de uma Elipse . . . . .	35
3.3	Propriedade da Reta Mediatriz na Elipse . . . . .	36
3.4	Propriedade da Reta Normal à Elipse . . . . .	37
3.5	Construção da Hipérbole com Régua e Compasso . . . . .	38
3.6	Assíntotas e Retângulo de Base de uma Hipérbole . . . . .	39
3.7	Propriedade do Diâmetro de uma Hipérbole . . . . .	40
3.8	Propriedade da Reta Mediatriz na Hipérbole . . . . .	41
3.9	Propriedade da Reta Normal à Hipérbole . . . . .	42
3.10	Construção da Parábola com Régua e Compasso . . . . .	43
3.11	Propriedade do Diâmetro de uma Parábola . . . . .	44
3.12	Propriedade da Reta Mediatriz na Parábola . . . . .	44
3.13	Propriedade Refletora da Parábola . . . . .	45
3.14	Lugares Geométricos da Equação 1.1, variando o valor de $e$ . . . . .	46

3.15	Esboço da Elipse de centro na origem e reta focal sobre o eixo $OX$ . . . . .	47
3.16	Reta $s$ secante à Elipse . . . . .	48
3.17	Esboço da Hipérbole de centro na origem e reta focal sobre o eixo $OX$ . . .	50
3.18	Esboço da Parábola de vértice na origem e reta focal sobre o eixo $OX$ . . .	53
5.1	Projeto da tabela elíptica feito no AutoCAD . . . . .	59
5.2	Projeto da tabela hiperbólica feito no AutoCAD . . . . .	60
5.3	Projeto da tabela parabólica feito no AutoCAD . . . . .	60
5.4	Manipulação do material concreto “Sinuca Elíptica” . . . . .	61
5.5	Material concreto “Sinuca Hiperbólica” . . . . .	61
5.6	Material concreto “Sinuca Parabólica” . . . . .	62

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 A História das Cônicas de Apolônio de Perga</b>	<b>13</b>
1.1 A Idade Áurea da matemática grega . . . . .	13
1.2 As Aplicações de Áreas . . . . .	16
1.2.1 Aplicações de Áreas Parabólica . . . . .	17
1.2.2 Aplicações de Áreas Elíptica . . . . .	17
1.2.3 Aplicações de Áreas Hiperbólica . . . . .	18
1.3 A aplicação das cônicas em fenômenos da natureza . . . . .	19
<b>2 As Cônicas de Apolônio e os Teoremas de Dandelin-Quetelet e Pierce Morton</b>	<b>21</b>
2.1 Os Nomes das Cônicas . . . . .	21
2.2 Os Teoremas de Dandelin-Quetelet e Pierce Morton . . . . .	26
2.2.1 A Relação Foco, Direção e Excentricidade . . . . .	31
<b>3 As Cônicas no Plano</b>	<b>33</b>
3.1 Uma Abordagem Geométrica . . . . .	33
3.1.1 Elipse . . . . .	33
3.1.1.1 Elementos de uma Elipse . . . . .	34
3.1.1.2 Algumas Propriedades da Elipse . . . . .	35
3.1.2 Hipérbole . . . . .	37
3.1.2.1 Elementos de uma Hipérbole . . . . .	38
3.1.2.2 Algumas Propriedades da Hipérbole . . . . .	40
3.1.3 Parábola . . . . .	42
3.1.3.1 Elementos de uma Parábola . . . . .	43
3.1.3.2 Algumas Propriedades da Parábola . . . . .	43

3.2	Uma Abordagem Analítica . . . . .	45
3.2.1	Elipse . . . . .	47
3.2.1.1	Elipse de centro na origem e reta focal sobre o eixo $OX$ . . . . .	47
3.2.1.2	Equação da Reta Tangente à Elipse . . . . .	48
3.2.1.3	Propriedade Refletora da Elipse . . . . .	49
3.2.2	Hipérbole . . . . .	50
3.2.2.1	Hipérbole de centro na origem e reta focal sobre o eixo $OX$ . . . . .	50
3.2.2.2	Equação da Reta Tangente à Hipérbole . . . . .	51
3.2.2.3	Propriedade Refletora da Hipérbole . . . . .	52
3.2.3	Parábola . . . . .	53
3.2.3.1	Parábola com vértice na origem e reta focal sobre o eixo $OX$ . . . . .	53
3.2.3.2	Equação da Reta Tangente à Parábola . . . . .	54
3.2.3.3	Propriedade Refletora da Parábola . . . . .	55
<b>4</b>	<b>A Utilização de Materiais Concretos no Ensino de Matemática</b>	<b>56</b>
<b>5</b>	<b>Sinucas das Cônicas</b>	<b>59</b>
5.1	A Confecção das Sinucas . . . . .	59
5.2	Sinuca Elíptica . . . . .	61
5.3	Sinuca Hiperbólica . . . . .	61
5.4	Sinuca Parabólica . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>63</b>
	<b>Referências</b>	<b>65</b>

## Introdução

A presente dissertação, dividida em seis capítulos, tem por objetivo principal apresentar o material didático “Sinucas das Cônicas” como recurso didático para favorecer o ensino-aprendizagem de definições e propriedades das cônicas no ensino médio, em especial a propriedade refletora. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s):

[...] a Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. A matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. A atividade matemática não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. (BRASIL, 1997, p. 19).

No primeiro capítulo deste trabalho, será apresentado um breve histórico do desenvolvimento das Cônicas na conhecida Idade Áurea da Matemática Grega, seguido da explanação do método de aplicação de áreas da geometria grega utilizado por Apolônio.

No capítulo 2, serão verificados os *sinomas* que Apolônio usou para caracterizar e dar nomes às seções cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Logo depois, discutir-se-ão os Teoremas de Dandelin, Quetelet e Pierce Morton. Os dois primeiros demonstraram a elipse e a hipérbole por uma caracterização bifocal, e o último demonstrou a parábola por uma caracterização foco e diretriz. Finalizando o capítulo com a apresentação da relação Foco, Diretriz e Excentricidade.

Em seguida, no capítulo 3, as Cônicas serão abordadas de forma geométrica e analítica no plano, levantar-se-ão os tópicos: esboço das curvas, os elementos, propriedade do diâmetro, propriedade da reta mediatriz e a propriedade refletora. Na Abordagem Analítica, será apresentada a *equação geral do segundo grau com duas variáveis* que Fermat utilizou para obter lugares geométricos.

No capítulo 4, será mostrado como foi o processo de confecção do material didático “Sinucas das Cônicas” com o intuito de ensinar a propriedade reflexiva que essas curvas possuem, além de identificar os seus elementos.

O capítulo 5, falará das dificuldades encontradas no sistema educacional brasileiro e como o material didático, aqui proposto, pode ser um facilitador do ensino-aprendizagem desse conteúdo no ensino médio.

Por fim, no capítulo 6, seguem as considerações finais acerca deste trabalho, destacando a importância do estudo das Cônicas e a forma como é feito no Ensino Médio. Alerta-se para a possibilidade desse conteúdo ser cada vez mais esquecido nesse nível de ensino.

# 1 A História das Cônicas de Apolônio de Perga

## 1.1 A Idade Áurea da matemática grega

A Idade Áurea da matemática grega, de 300 a 200 a. C., deve-se principalmente a três grandes matemáticos – Euclides, Arquimedes e Apolônio. Este, conhecido como Apolônio de Perga, viveu aproximadamente entre 262 e 190 a. C. Pouco se sabe sobre sua vida, apenas que foi um contemporâneo e rival de Arquimedes. Essa rivalidade era evidente em vários assuntos matemáticos discutidos da época (BOYER, 2003).

Muitas das obras de Apolônio desapareceram parcial ou totalmente, dentre elas: sobre Dividir em uma razão, Cortar uma área, Secção determinada, Tangências (ou Contatos), Inclinações e sobre Lugares planos. Essas obras e outras estavam juntas com dois tratados de Euclides (de 325 a 256 a. C) numa coleção chamada “Tesouro da Análise”, descrita posteriormente pelo matemático Pappus (de 350 a 290 a. C). Apolônio foi o precursor do que chamamos hoje de Geometria Analítica; foi, em decorrência desse pioneirismo, então apelidado de O Grande Geômetra (BOYER, 2003).

Dentre as obras de Apolônio, uma preservou-se significativamente, As Cônicas, sua obra prima. Dessa obra, dispõem-se apenas de quatro do total de oito livros que a compunham. Tinha-se entendimento das seções cônicas cerca de um século e meio antes de Apolônio escrever sobre essas curvas, todavia seu trabalho substituiu textos anteriores não acabados ou poucos menos rigorosos do ponto de vista matemático. Essa mesma substituição de textos aconteceu semelhante ao surgimento de *Os Elementos de Euclides* (BOYER, 2003).

Antes desse matemático, as cônicas eram obtidas como seções de três tipos bem diferentes de cone circular reto por um plano, conforme o ângulo do plano com o eixo do

cone. Apolônio generalizou que não ser necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone; que de um único cone podem ser obtidas todas as seções cônicas e que o cone não precisa ser reto. Ainda, substituiu o cone de uma só folha por um duplo e deu a seguinte definição de cone circular usada até hoje:

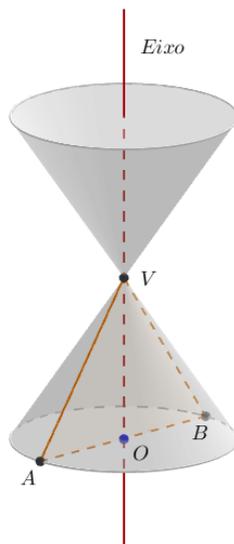
Se fizer uma reta, de comprimento indefinido que passa sempre por um ponto fixo (Vértice), mover-se ao longo de um círculo (base do cone) que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. (BOYER, 2003)

Essas generalizações fizeram da hipérbole a curva de dois ramos como é conhecida atualmente.

No decorrer do trabalho leia:  $r = \overleftrightarrow{AB}$  a reta  $r$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ ; um ponto  $A$ , sobre uma reta  $r$ , a divide em dois pedaços chamados semirretas, se  $B$  e  $C$  são pontos sobre cada um de tais pedaços, pode-se denotar as semirretas de origem  $A$  por  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ ;  $AB$  o segmento de reta que é a porção da reta  $r$  que a contém, situada de  $A$  a  $B$ ;  $\overline{AB}$  ou  $d(A, B)$  a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  ou o comprimento do segmento  $AB$ ;  $d(P, r)$  a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ ;  $ABC$  o triângulo de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ ;  $\angle AOB$  o ângulo de lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ ;  $\widehat{AOB}$  a medida do ângulo  $\angle AOB$ ;  $A_1A_2 \cdots A_n$  o polígono de vértices  $A_1, A_2, \cdots, A_n$ .

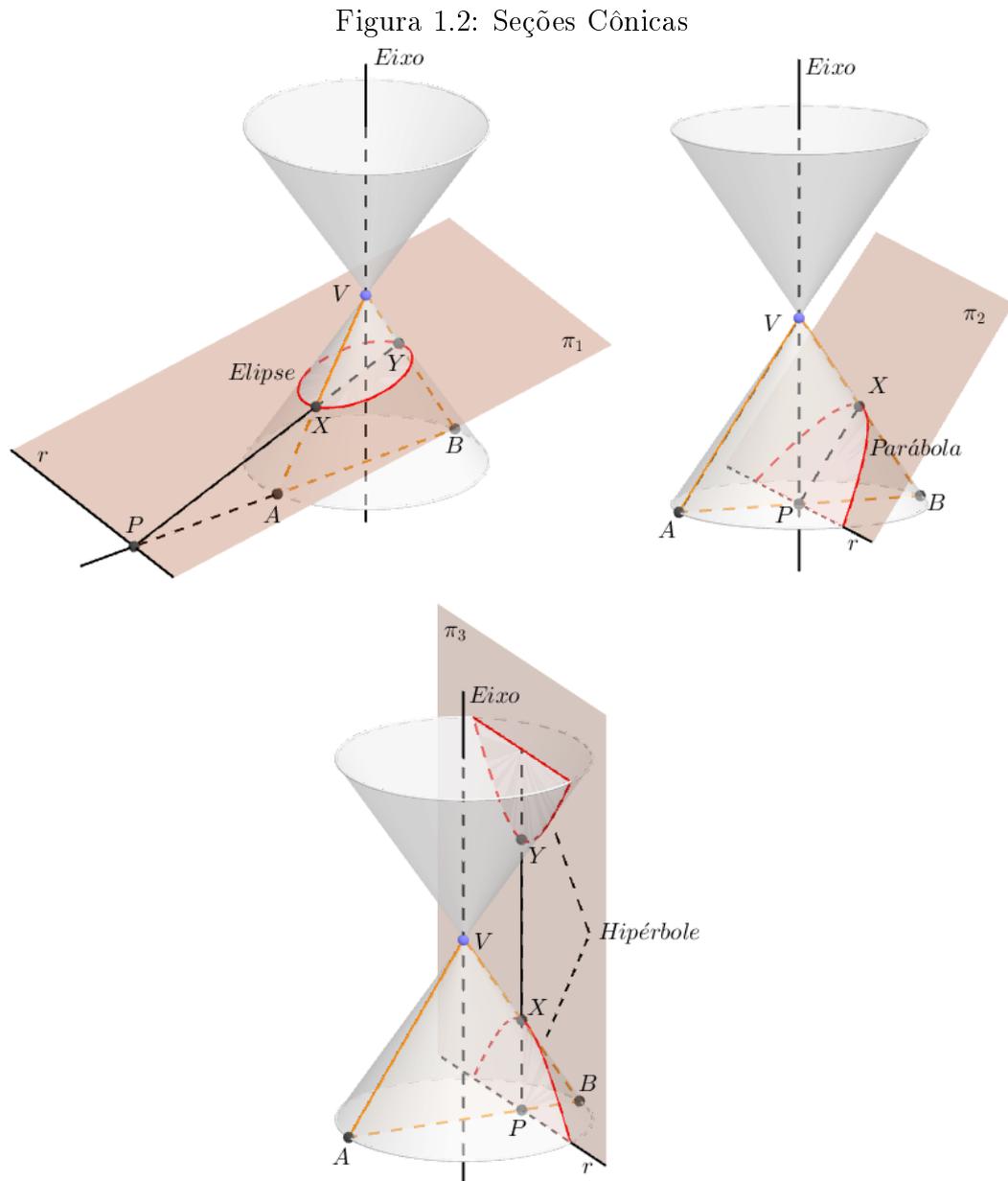
Dessa forma, dado um cone de dupla folha com vértice  $V$  cortado por um plano que contém o eixo. No ramo inferior, determina o diâmetro  $AB$  e o triângulo  $VAB$ , chamado *triângulo axial*, conforme figura 1.1:

Figura 1.1: Elementos do Cone



Fonte: Elaborada pelo Autor

As cônicas passam a ser interpretadas geometricamente como as interseções deste cone por planos que cortam o segmento  $AB$  ou o prolongamento de  $AB$  sobre a reta  $r$  (perpendicular a  $AB$ ), conforme figura 1.2:



Fonte: Elaborada pelo Autor

$\overleftrightarrow{PX}$  é a interseção do plano que contém o triângulo axial com o plano que corta o segmento  $AB$  ou o prolongamento de  $AB$  sobre a reta  $r$ . Logo, a cônica será uma:

- Elipse, se  $\overleftrightarrow{PX}$  intersecta os dois lados do triângulo axial;
- Parábola, se  $PX$  é paralela a um dos lados do triângulo axial;

- Hipérbole, se  $\overleftrightarrow{PX}$  intersecta um dos lados do triângulo axial e o prologamento do outro (LOPES, 2011).

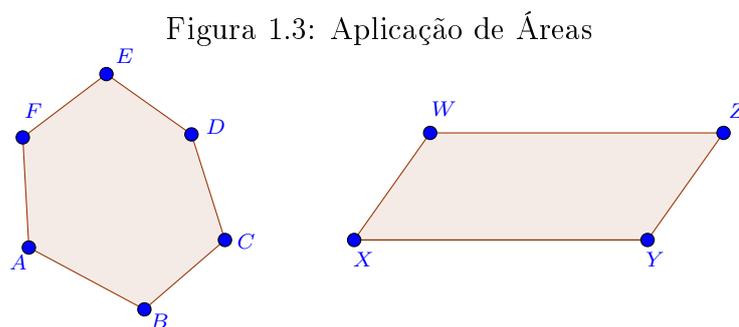
Um recurso importante usado por Apolônio, empregado por antecessores, é a caracterização das cônicas por meio de um *sintoma* que é uma relação entre grandezas que caracteriza os pontos que estão sobre a cônica (ROQUE; CARVALHO, 2012). Em suma, marca-se um ponto  $K$  sobre a seção e faz-se passar por este um plano paralelo à base (LOPES, 2011).

As referidas nomenclaturas (elipse, parábola, hipérbole) foram introduzidas por ele quando observou as soluções de equações quadráticas por aplicações de áreas da geometria grega (BOYER, 2003). Segundo Roque e Carvalho (2012, p.161): “a aplicação exata é chamada de ‘parábola’, aplicação com falta é uma ‘elipse’ e aplicação com excesso é uma ‘hipérbole’”.

## 1.2 As Aplicações de Áreas

O método de aplicação de áreas consiste em aplicar uma poligonal a um segmento dado, isto é, consiste em construir uma outra poligonal de tal modo que o segmento de reta seja um de seus lados. Em suma, exige-se que a poligonal construída tenha algumas características.

Por exemplo, dado  $ABCDEF$  um polígono e  $XY$  um segmento de reta. Aplicar um paralelogramo de área igual à de  $ABCDEF$  ao segmento  $XY$ , consiste em construir um paralelogramo  $XYZW$  em que  $XY$  é um dos lados, e cuja área seja igual à área de  $ABCDEF$ , conforme figura 1.3:



Fonte: Elaborada pelo Autor

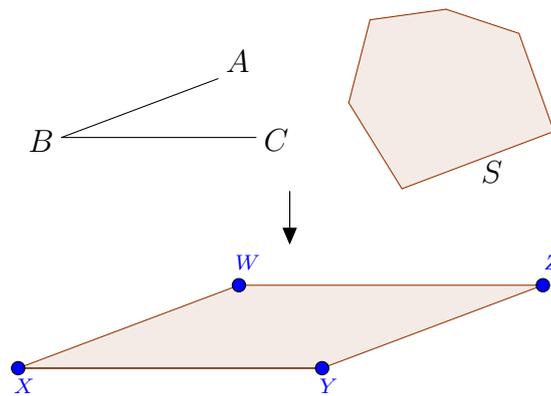
O paralelogramo construído pode atender outras exigências, como ter a medida do ângulo  $\angle WXY$  igual à medida de um ângulo dado, na maioria das ocasiões o paralelogramo

aplicado é um retângulo. Na Grécia, usava-se três tipos de aplicação de áreas: aplicação parabólica; aplicação elíptica e aplicação hiperbólica (ROQUE; CARVALHO, 2012).

### 1.2.1 Aplicações de Áreas Parabólica

A aplicação parabólica consiste em aplicar um paralelogramo  $XYZW$  com área igual à de uma figura  $S$  a um segmento  $XY$ , com um ângulo  $\angle ABC$  especificado, conforme figura 1.4:

Figura 1.4: Aplicação de Áreas Parabólica

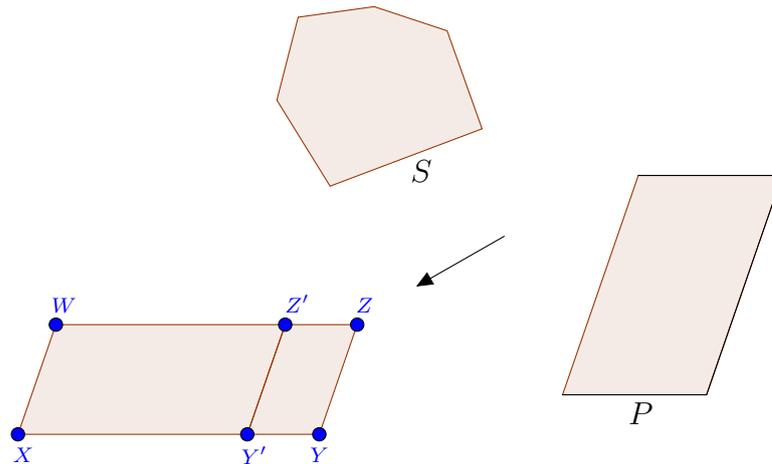


Fonte: Elaborada pelo Autor

### 1.2.2 Aplicações de Áreas Elíptica

Uma aplicação elíptica ou *com falta* consiste em aplicar um paralelogramo  $XY'Z'W$  com ângulos dados (ângulos internos do paralelogramo  $P$ ) e área igual à de um polígono dado  $S$  a um segmento de reta  $XY$ . De maneira que o paralelogramo  $Y'YZZ'$ , que falta para completar a figura e cobrir todo o segmento  $XY$ , seja um paralelogramo semelhante ao  $P$ . Em outras palavras, o paralelogramo  $Y'YZZ'$  é o que falta para que  $XYZW$  esteja aplicado a  $XY$ , conforme figura 1.5:

Figura 1.5: Aplicação de Áreas Elíptica

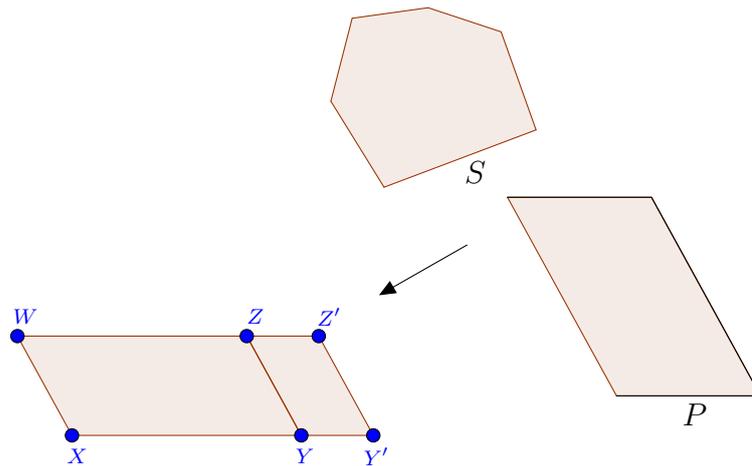


Fonte: Elaborada pelo Autor

### 1.2.3 Aplicações de Áreas Hiperbólica

Uma aplicação hiperbólica ou *com excesso* consiste em aplicar um paralelogramo  $XY'Z'W$  com ângulos dados (ângulos internos do paralelogramo  $P$ ) e área igual à de um polígono dado  $S$  a um segmento de reta  $XY$ . De maneira que o paralelogramo  $YY'Z'Z$ , que excede para completar a figura, seja um paralelogramo semelhante ao  $P$ . Em outras palavras, o paralelogramo  $YY'Z'Z$  é o excesso para que  $XYZW$  esteja aplicado a  $XY$ , conforme figura 1.6:

Figura 1.6: Aplicação de Áreas Hiperbólica



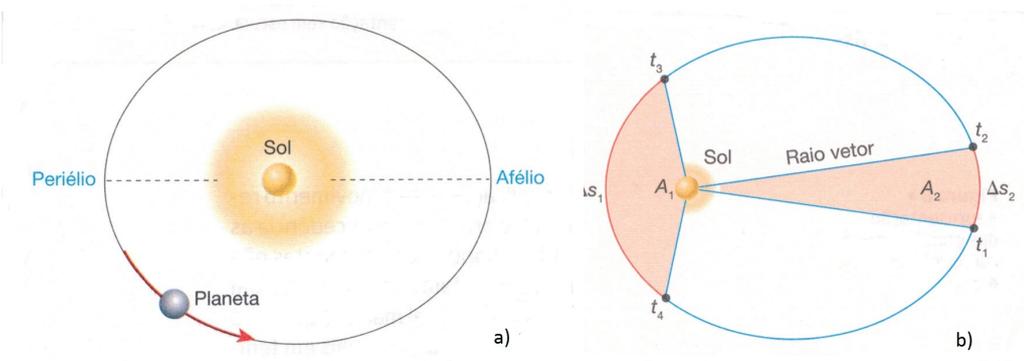
Fonte: Elaborada pelo Autor

### 1.3 A aplicação das cônicas em fenômenos da natureza

As definições de reta tangente e normal a um ponto de uma cônica já eram conhecidas e apresentadas por Apolônio no trabalho relativo a Retas Máximas e Mínimas, presente no livro V. Embora conhecidas, não tinha perspectivas em aplicá-las. Hoje, a variedade de aplicações dessa definição é extensa (BOYER, 2003). Foco e excentricidade eram nomes que também não faziam parte da obra; porém, o matemático fazia referências indiretamente (sem usar as nomenclaturas atuais) em diversos teoremas. Conforme Boyer (2003): é possível que algumas ou todas essas omissões somadas resultem do fato de terem sido tratadas em algum lugar, em obras perdidas de Apolônio ou outros autores.

Por quase 2000 anos, as cônicas eram tidas como um conhecimento abstrato sem aplicações nos fenômenos no mundo real, até que, com os estudos aplicados à astronomia de Johannes Kepler (1571-1630), em 1609, descobriu-se as órbitas elípticas descritas pelos planetas. Kepler contribuiu com novas abordagens sobre as cônicas (o termo *foco* foi empregado por ele nesse período) e esses resultados abriram caminhos para suas duas leis da astronomia conhecidas até hoje: 1 - os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos, e 2 - o raio vetor que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais (BOYER, 2003).

Figura 1.7: a) Representação da trajetória elíptica de um planeta ao redor do Sol. b) Em intervalos de tempo iguais, as áreas “varridas” pelo raio vetor que liga o planeta ao SOL (em um dos focos) também são iguais:  $\Delta t = t_2 - t_1 = t_4 - t_3$



Fonte: SANT'ANNA et. al., 2010, p. 259

A ausência de ferramentas algébricas impôs uma limitação ao estudo dos *lugares geométricos* pelos antigos matemáticos gregos. Nesse sentido, o matemático Pierre Fermat (1601-1665), um dos colaboradores na criação e desenvolvimento da Geometria Analítica, estabelece um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana em sua obra *Ad locos planos et solidos isagoge* (1636). Essa aplicação da Álgebra à Geometria mostrou a Fermat

que todos os lugares geométricos, discutidos por Apolônio, poderiam ser obtidos na forma de equações algébricas com duas variáveis (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

O matemático aplicou a mesma ideia na obra *Cônicas* e, através das caracterizações das seções cônicas, obteve suas equações. Com os avanços dos estudos nessa nova perspectiva, Fermat estabelece uma correspondência com os lugares geométricos, dividindo a família de equações com duas incógnitas até o 2º grau em 7 subfamílias: reta, hipérbole equilátera, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole axial. Podendo essas subfamílias serem obtidas a partir da *equação geral do segundo grau com duas variáveis* que, escrita na linguagem atual, é conforme equação 1.1:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1.1)$$

Variando os valores dos coeficientes (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

Após quase sessenta anos das descobertas de Kepler, Isaac Newton (1642-1716) provou que as órbitas elípticas descritas pelos planetas são consequências de sua Lei de Atração Universal e, em 1687, publicou a Teoria da Gravitação Universal, explicando o sistema solar (BOYER, 2003).

Em 1822, o matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) com a ajuda de seu amigo Lambert Adolph Jacques Quetelet (1796-1874), demonstra o Teorema de Apolônio utilizando esferas inscritas no cone, conhecidas como Esferas de Dandelin. Esse teorema, conhecido como Teorema de Dandelin-Quetelet, afirma que: Dado um plano que secciona um cone, existe uma ou duas esferas que são tangentes ao plano e ao cone. No primeiro caso, tem-se uma parábola e, no segundo, uma elipse ou hipérbole (SOUSA, 2014).

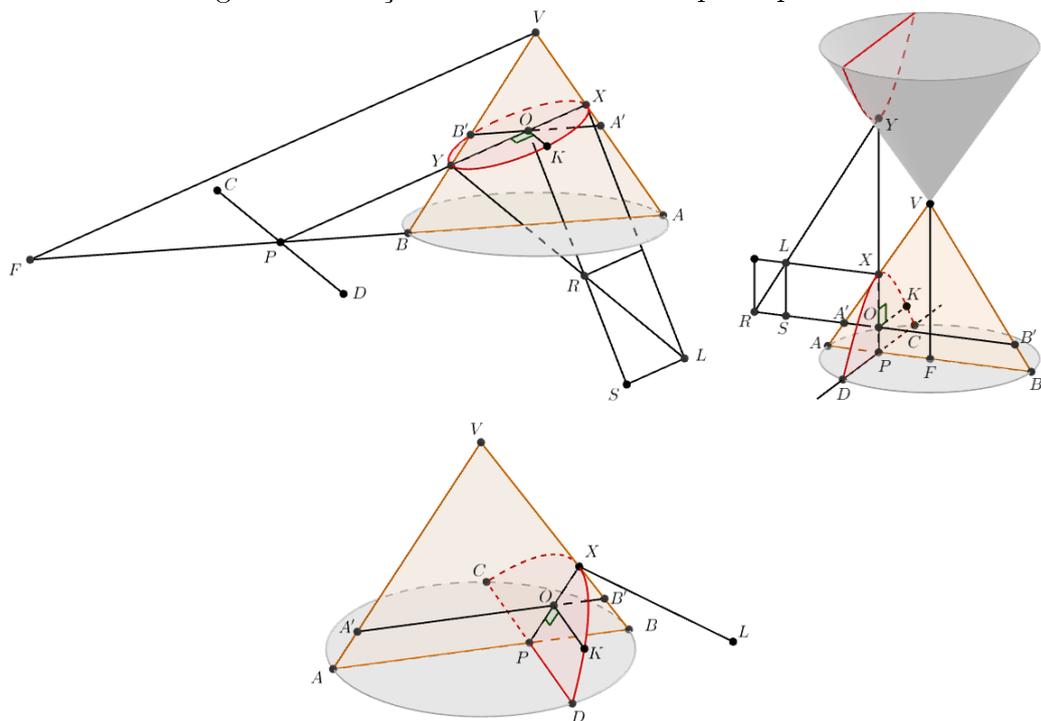
Para tal, Dandelin utiliza a propriedade de que, dada uma esfera e um ponto exterior a ela, existem duas retas que têm este ponto em comum e são tangentes à esfera, a distância entre os pontos descritos em cada reta são iguais. Com isso, ele consegue encontrar os focos e verificar a propriedade focal da elipse e da hipérbole. Pierce Morton, em 1829, prova a propriedade focal da parábola (MONTEIRO, 2014).

# 2 As Cônicas de Apolônio e os Teoremas de Dandelin-Quetelet e Pierce Morton

## 2.1 Os Nomes das Cônicas

O método pelo qual Apolônio atribuiu os nomes às cônicas é baseado no método de aplicações de áreas que foi a caracterização adotada pelo grande geômetra (LOPES, 2011), conforme as seções cônicas da figura 2.1:

Figura 2.1: Seções Cônicas definidas por Apolônio



Fonte: Elaborada pelo Autor

Das construções, têm-se:

- (a)  $AB$  é base do triângulo axial;
- (b) o segmento  $CD$  pertencente ao plano da base é perpendicular a  $AB$  ou o prolongamento de  $AB$ ;
- (c) os segmentos  $XY$  (na elipse) e  $PX$  (na parábola e hipérbole) são a interseção do triângulo axial e do plano de seção;
- (d) o segmento  $VF$ , na elipse e hipérbole, é paralelo a  $PX$  e encontra  $AB$  ou o prolongamento de  $AB$ ;
- (e)  $K$  é um ponto qualquer da curva e  $O$  é o pé da perpendicular baixada de  $K$  ao triângulo axial. Assim,  $KO$  é perpendicular a  $XY$  e  $PX$ ;
- (f) o segmento  $A'B'$  é o diâmetro da círculo determinado por um plano que contém o segmento  $KO$  e é paralelo a  $AB$  em  $K$ . Segue que,  $KO$  é perpendicular a  $A'B'$  em  $O$ ;
- (g) os pontos  $X$  e  $Y$  são as interseções das curvas com os lados do triângulo axial;
- (h)  $XL$  é um segmento perpendicular a  $PX$ , onde  $XL$ , de comprimento a ser definido, está contido no plano perpendicular a curva que passa por  $X$ ;
- (i) o retângulo  $XOSL$  está situado num plano perpendicular ao plano de seção;
- (j) o ponto  $R$  é a interseção dos segmentos  $OS$  e  $YL$  ou dos prolongamentos desses dois segmentos.

O segmento  $XL$ , conhecido como “Lactus Eretum”, será responsável por caracterizar a curva. É um parâmetro que Apolônio definiu em função dos lados do triângulo axial e dos segmentos  $VX$  e  $VF$ , de maneira que:

1. quando a seção for elipse ou uma hipérbole:

$$\overline{XL} = \frac{\overline{AF} \times \overline{FB}}{\overline{VF}^2} \times \overline{XY} \Leftrightarrow \frac{\overline{XL}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AF} \times \overline{FB}}{\overline{VF}^2} \quad (2.1)$$

2. quando for uma parábola:

$$\overline{XL} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{VA} \times \overline{VB}} \times \overline{VX} \Leftrightarrow \frac{\overline{XL}}{\overline{VX}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{VA} \times \overline{VB}} \quad (2.2)$$

Apolônio escreveu a expressão algébrica das três curvas relacionando o que se pode imaginar como coordenadas de um ponto  $K$  qualquer da seção com o parâmetro  $XL$ , isto é, determinou uma expressão para cada cônica por uma relação entre os segmentos  $KO$ ,  $XO$  e  $XL$  e, daí, as interpretações geométricas deram origem aos nomes das seções cônicas (LOPES, 2011).

Sabe-se que  $A'B'$  é o diâmetro da circunferência que passa por  $K$  e o segmento  $KO$

é perpendicular ao segmento  $A'B'$ , pois  $KO$  é perpendicular ao triângulo axial. Pela propriedade de circunferência, segue-se que:

$$\overline{KO}^2 = \overline{A'O} \times \overline{OB'} \quad (2.3)$$

Essa relação é válida para as três curvas e a análise será feita separadamente. Tem-se um dos casos:

- i) o segmento  $PX$  é paralelo ao lado  $VA$  (Notação:  $PX \parallel VA$ ) do triângulo axial; ou
- ii) o segmento  $PX$  não é paralelo ao lado  $VA$  do triângulo axial;

No primeiro caso, como  $PX \parallel VA$  e  $A'B' \parallel AB$ , os triângulos  $VAB$ ,  $XOB'$  e  $VA'B'$  são semelhantes pelo caso  $AA$  (Ângulo-Ângulo). Segue que:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{XO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{VA}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{A'O}}{\overline{VX}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{VB}} \quad (2.4)$$

Dividindo ambos os membros da equação 2.3 por  $\overline{XO} \times \overline{VX}$ , obtém-se:

$$\frac{\overline{KO}^2}{\overline{XO} \times \overline{VX}} = \frac{\overline{A'O} \times \overline{OB'}}{\overline{XO} \times \overline{VX}} \quad (2.5)$$

Substituindo as equações 2.2 e 2.4 em 2.5, resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{KO}^2}{\overline{XO} \times \overline{VX}} &= \frac{\overline{A'O} \times \overline{OB'}}{\overline{XO} \times \overline{VX}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{\overline{VB}} \times \overline{VX} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{VA}} \times \overline{XO}}{\overline{XO} \times \overline{VX}} \\ &= \frac{\overline{AB}^2}{\overline{VB} \times \overline{VA}} = \frac{\overline{XL}}{\overline{VX}} \\ \Leftrightarrow \overline{KO}^2 &= \overline{XL} \times \overline{XO} \end{aligned} \quad (2.6)$$

A relação 2.6 é o *sintoma* da parábola resultante da intersecção do cone pelo plano de seção paralelo a um dos lados do triângulo axial. Além disso, a parábola é o lugar geométrico dos pontos  $K$  que satisfazem 2.6.

A interpretação geométrica de aplicação de área é que a área do quadrado de lado  $\overline{KO}$  é igual à área do retângulo de lados  $\overline{XL}$  e  $\overline{OX}$ . A curva que passa pelos pontos  $C$ ,  $X$  e  $D$  é denominada parábola, que vem do grego *paraboli*, isto é, corresponde à aplicação de área sem falta.

Quando  $PX$  não é paralelo ao lado  $VA$  do triângulo axial, pode-se ter  $PX$  intersectando o segmento  $VB$  ou o prolongamento de  $VB$ . Sabe-se que:  $A'B' \parallel AB$  e  $VF \parallel PX$ ; daí  $V\widehat{A}F = X\widehat{A}'O$  e  $V\widehat{F}A = X\widehat{O}A'$ . Logo, os triângulos  $VAF$  e  $XA'O$  são semelhantes pelo caso  $AA$ . Daí,

$$\frac{\overline{A'O}}{\overline{XO}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{VF}} \quad (2.7)$$

$OB' \parallel FB$  e  $YO \parallel VF$ ; daí  $Y\widehat{O}B' = V\widehat{F}B$  e  $Y\widehat{B}'O = V\widehat{B}F$ . Logo, os triângulos  $YOB'$  e  $VBF$  são semelhantes pelo caso  $AA$ . Daí,

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{YO}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{VF}} \quad (2.8)$$

Ainda,  $XL \parallel OR$  e  $XOSL$  é retângulo; daí,  $Y\widehat{X}L = Y\widehat{O}R$  e  $Y\widehat{L}X = Y\widehat{R}O$ . Logo, os triângulos  $YXL$  e  $YOR$  são semelhantes pelo caso  $AA$ . Daí,

$$\frac{\overline{XL}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{YO}} \quad (2.9)$$

É fácil notar que os triângulos  $YXL$  e  $LSR$  são semelhantes pelo caso  $AA$ . Daí,

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{SL}} = \frac{\overline{LX}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{XL}}{\overline{XY}} \quad (2.10)$$

Da equação 2.10, como  $XO$  e  $SL$  têm o mesmo comprimento, obtém-se

$$\overline{RS} = \frac{\overline{XL}}{\overline{XY}} \times \overline{XO} \quad (2.11)$$

A expressão correspondente à elipse e a hipérbole pode ser obtida dividindo 2.3 por  $\overline{XO} \times \overline{YO}$ , obtém-se:

$$\frac{\overline{KO}^2}{\overline{XO} \times \overline{YO}} = \frac{\overline{A'O} \times \overline{OB'}}{\overline{XO} \times \overline{YO}} \quad (2.12)$$

Substituindo 2.7 e 2.8 em 2.12, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{KO}^2}{\overline{XO} \times \overline{YO}} &= \frac{\overline{A'O} \times \overline{OB'}}{\overline{XO} \times \overline{YO}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{VF}} \times \overline{XO} \times \frac{\overline{FB}}{\overline{VF}} \times \overline{YO} \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{KO}^2}{\overline{XO} \times \overline{YO}} &= \frac{\overline{AF} \times \overline{BF}}{\overline{FB}^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Substituindo 2.1 e 2.9 em 2.13, resulta em:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{KO}^2}{\overline{XO} \times \overline{YO}} &= \frac{\overline{XL}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{YO}} \\ \Leftrightarrow \overline{KO}^2 &= \overline{OR} \times \overline{XO}\end{aligned}\quad (2.14)$$

Assim,  $\overline{KO}^2 = \overline{OR} \times \overline{XO}$  é uma expressão geral para as duas curvas, o que irá diferenciar é  $\overline{OR}$ . Escrevendo  $\overline{OR}$  em função da constante  $\overline{XL}$  e analisando as duas curvas na figura 2.1, têm-se:

(a) Para  $PX$  intersectando  $VB$ , observa-se que  $\overline{OR} = \overline{XL} - \overline{RS}$ . Então,

$$\overline{KO}^2 = \overline{XO} (\overline{XL} - \overline{RS}) \quad (2.15)$$

Substituindo 2.11 em 2.15, obtém-se:

$$\overline{KO}^2 = \overline{XO} \left( \overline{XL} - \frac{\overline{XL}}{\overline{XY}} \times \overline{XO} \right) \quad (2.16)$$

A relação 2.16 é o *sintoma* da elipse resultante da intersecção do cone pelo plano de seção que intersecta os dois lados do triângulo axial. Além disso, a elipse é o lugar geométrico dos pontos  $K$  que satisfazem 2.16.

A interpretação geométrica da equação 2.16 é que a área do quadrado de lado  $\overline{KO}$  é igual à área do retângulo de lados  $\overline{XO}$  e  $\overline{XL}$  menos o valor  $\frac{\overline{XL}}{\overline{XY}} \times \overline{XO}$ . A curva, nesse caso, é denominada elipse que vem do grego *ellipis*, isto é, corresponde à aplicação de área com falta.

(b) Para  $PX$  intersectando o prolongamento de  $VB$ , observa-se que  $\overline{OR} = \overline{XL} + \overline{RS}$ . Então,

$$\overline{KO}^2 = \overline{XO} (\overline{XL} + \overline{RS}) \quad (2.17)$$

Substituindo 2.11 em 2.17, obtém-se:

$$\overline{KO}^2 = \overline{XO} \left( \overline{XL} + \frac{\overline{XL}}{\overline{XY}} \times \overline{XO} \right) \quad (2.18)$$

A relação 2.18 é o *sintoma* da hipérbole resultante da intersecção do cone pelo plano de seção que intersecta um dos lados do triângulo axial e o prolongamento do outro. Além disso, a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos  $K$  que satisfazem 2.18.

A interpretação geométrica da equação 2.18 é que a área do quadrado de lado  $\overline{KO}$  é igual à área do retângulo de lados  $\overline{XO}$  e  $\overline{XL}$  mais o valor  $\frac{\overline{XL}}{\overline{XY}} \times \overline{XO}$ . A curva, nesse caso, é denominada hipérbole que vem do grego *yperboli*, isto é, corresponde à aplicação de área com excesso.

Usando a linguagem algébrica atual, em um determinado sistema bidimensional de coordenadas, fazendo  $\overline{KO} = y$ ,  $\overline{XY} = d$ ,  $\overline{XL} = p$  (é uma constante) e  $\overline{XO} = x$ ; os *sintomas* poderiam ser traduzidos em:

$$y^2 = px \quad (2.19)$$

$$y^2 = x \left( p - \frac{p}{d} \times x \right) \quad (2.20)$$

$$y^2 = x \left( p + \frac{p}{d} \times x \right) \quad (2.21)$$

que são as equações algébricas da parábola, elipse e hipérbole respectivamente.

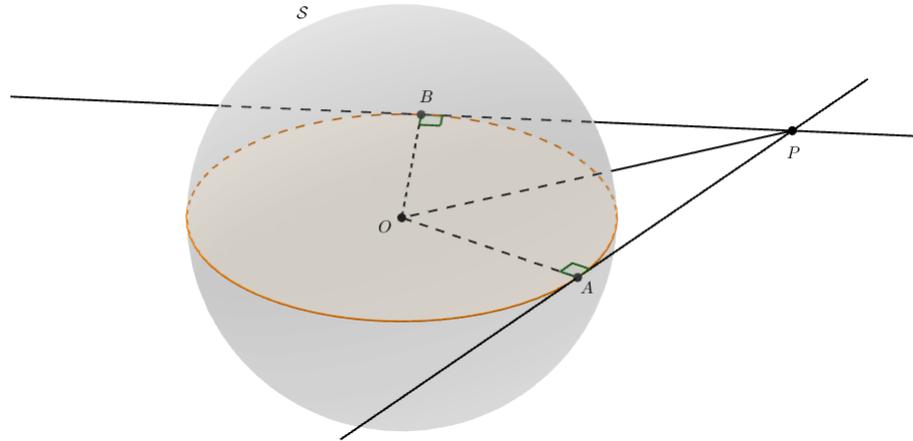
## 2.2 Os Teoremas de Dandelin-Quetelet e Pierce Morton

As definições de cônicas, que se conhece atualmente, foram demonstradas pelos matemáticos Dandelin, Quetelet e Pierce Morton. Os dois primeiros demonstraram a elipse e a hipérbole por uma caracterização bifocal, e o último demonstra a parábola por uma caracterização foco e diretriz, conforme segue-se:

Para tais, os matemáticos fizeram uso do teorema:

**Lema 2.1.** *Sejam  $P$  um ponto exterior à esfera  $S$  e duas retas distintas tangentes a  $S$  nos pontos  $A$  e  $B$  que passam por  $P$ , então  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$ , são iguais.*

*Demonstração.* Sejam  $O$  e  $r = \overline{OA} = \overline{OB}$  o centro e raio da esfera  $S$ , respectivamente. Utilizando a Geometria Euclidiana Plana e a figura 2.2

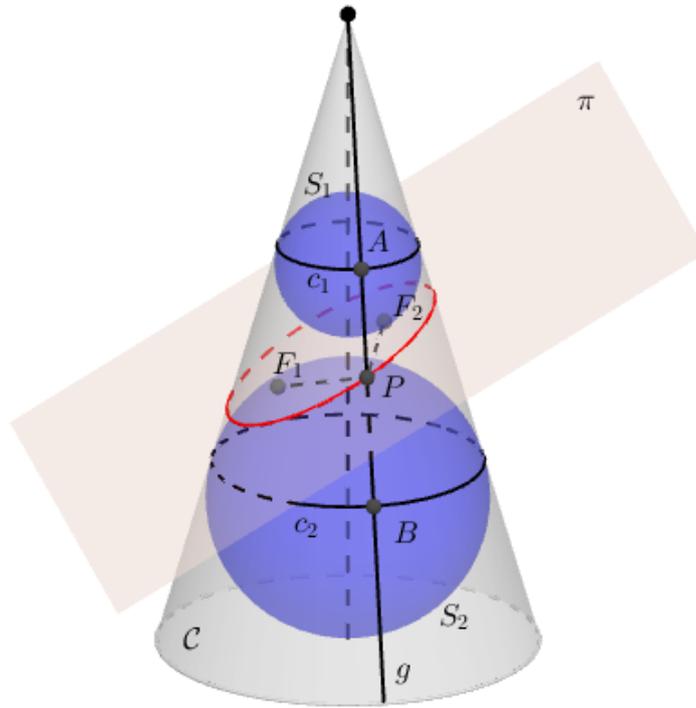
Figura 2.2: Retas tangentes a  $S$  que passam um ponto exterior  $P$ 

Fonte: Elaborada pelo Autor

Note que  $\overline{OB} = \overline{OA}$  e  $OP$  é lado comum aos triângulos  $AOP$  e  $BOP$ . Suponha  $P'$  um ponto sobre o segmento  $PB$  tal que  $\overline{P'B} = \overline{PA}$ , daí pelo caso de congruência  $LAL$ , tem-se que os triângulos  $AOP$  e  $BOP'$  são congruentes  $\Rightarrow \overline{OP'} = \overline{OP}$ , isto é,  $P'$  é o próprio  $P$ . Portanto, Os triângulos  $AOP$  e  $BOP$  são congruentes.  $\square$

**Teorema 2.1** (Dandelin-Quetelet - Elipse). *Sejam  $\mathcal{C}$  um cone circular reto de uma folha, um plano  $\pi$  que o intersecta e duas esferas,  $S_1$  e  $S_2$ , tangentes a  $\mathcal{C}$  (internamente) e a  $\pi$ , conforme figura 2.3. Se os pontos  $F_1$  e  $F_2$ , distintos, são os pontos de interseção das esferas  $S_1$  e  $S_2$  com o plano  $\pi$  respectivamente, então dado um ponto  $P \in \mathcal{C} \cap \pi$ , tem-se que  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$  não depende de  $P$ . Em outras palavras, neste caso, todo ponto na interseção do cone com o plano tem a propriedade de que a soma das suas distâncias a dois pontos fixos,  $F_1$  e  $F_2$ , é uma constante que não depende desse ponto escolhido.*

*Demonstração.* Suponha  $F_1$  e  $F_2$  os pontos de interseção das esferas  $S_1$  e  $S_2$  com o plano  $\pi$  respectivamente. Sejam  $c_1$  e  $c_2$  a interseção do cone  $\mathcal{C}$  com as esferas  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente. Ainda, sejam  $A = g \cap c_1$ ,  $B = g \cap c_2$ ,  $P = g \cap \pi$  e  $\overline{AB}$  o comprimento do segmento entre  $c_1$  e  $c_2$  que passa por  $P$ .

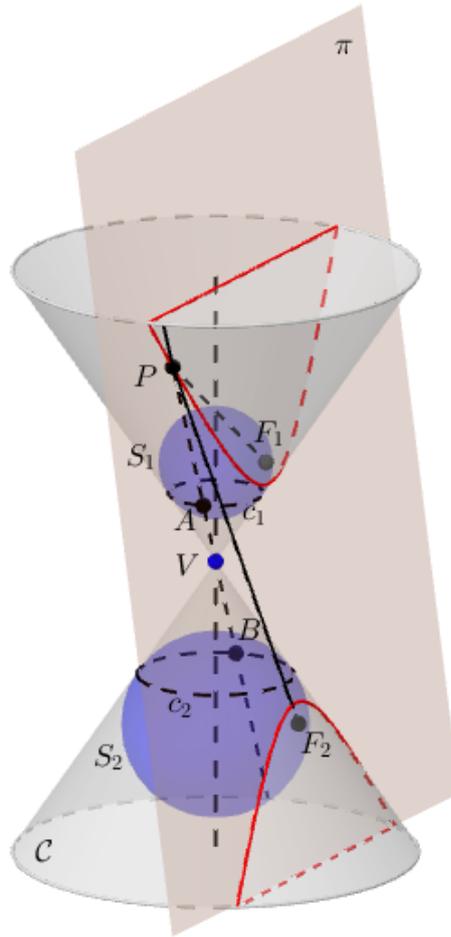
Figura 2.3: Esferas  $S_1$  e  $S_2$  tangentes ao plano  $\pi$  e ao cone  $C$  no mesmo ramo

Fonte: Elaborada pelo Autor

Pelo lema anterior, tem-se que  $\overline{PF_1} = \overline{PB}$  e  $\overline{PF_2} = \overline{PA} \Rightarrow \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{AB}$  que é constante, independente da escolha de  $P$ . O lugar geométrico dos pontos com esta propriedade é chamado de elipse. Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são chamados de focos da elipse.  $\square$

**Teorema 2.2** (Dandelin-Quetelet - Hipérbole). *Sejam  $C$  um cone circular reto de duas folhas, um plano  $\pi$  que o intersecta e duas esferas,  $S_1$  e  $S_2$ , tangentes a  $C$  (internamente) e a  $\pi$ , conforme figura 2.4. Se os pontos  $F_1$  e  $F_2$ , distintos, são os pontos de interseção das esferas com o plano  $\pi$ , então dado um ponto  $P \in C \cap \pi$ , tem-se que  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}|$  não depende de  $P$ . Em outras palavras, neste caso, todo ponto na intersecção do cone com o plano tem a propriedade de que o valor absoluto da diferença entre suas distâncias a dois pontos fixos,  $F_1$  e  $F_2$ , é uma constante que não depende desse ponto escolhido.*

*Demonstração.* Suponha  $F_1$  e  $F_2$  os pontos de interseção das esferas  $S_1$  e  $S_2$  com o plano  $\pi$  respectivamente. Sejam  $c_1$  e  $c_2$  a interseção do cone  $C$  com as esferas  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente. Ainda, seja um dado ponto  $P$  da interseção do plano  $\pi$  com a folha superior do cone que determina a geratriz que passa por  $P$  e  $V$ . Dessa forma, essa geratriz tangencia as esferas  $S_1$  e  $S_2$  nos pontos  $A$  e  $B$  respectivamente.

Figura 2.4: Esferas  $S_1$  e  $S_2$  tangentes ao plano  $\pi$  e ao cone  $C$  em ramos distintos

Fonte: Elaborada pelo Autor

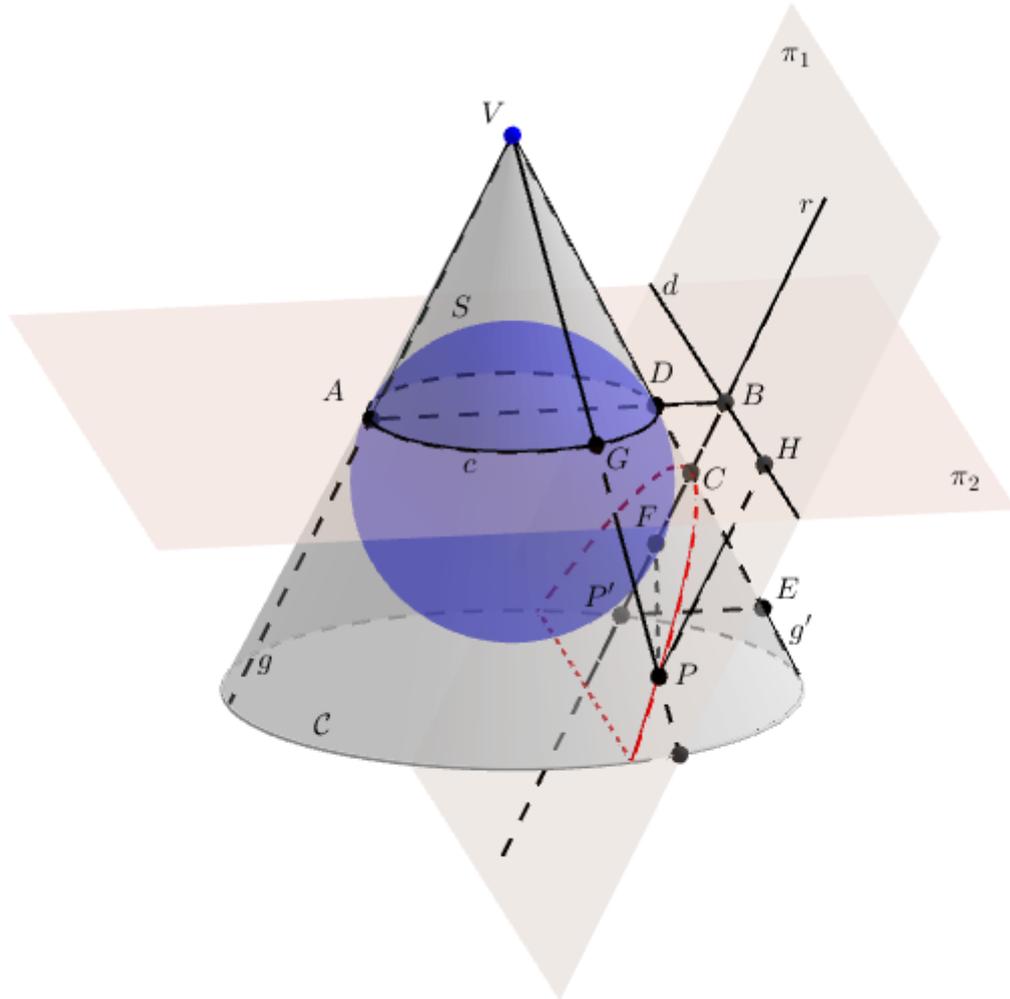
Pelo lema anterior, tem-se que  $\overline{PF_1} = \overline{PA}$  e  $\overline{PF_2} = \overline{PB} \Rightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PA} - \overline{PB}| = \overline{AB}$  que é constante, independente da escolha de  $P$ . O lugar geométrico dos pontos com esta propriedade é chamado de hipérbole. Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são chamados de focos da hipérbole.  $\square$

**Teorema 2.3** (Pierce Morton - Parábola). *Sejam  $C$  um cone circular reto de uma folha,  $\pi_1$  um plano que o intersecta e uma esfera  $S$  tangente a  $C$  (internamente) e a  $\pi_1$ , conforme figura 2.5. Se  $F$  é o ponto de interseção da esfera  $S$  com o plano  $\pi_1$ , e  $d$  é a reta de interseção do plano  $\pi_1$  com o plano  $\pi_2$  que contém a circunferência  $c = S \cap C$ , então dado um ponto  $P \in C \cap \pi_1$ , tem-se que  $d(P, F) = d(P, d)$*

*Demonstração.* Suponha que  $F$  é o ponto de interseção da esfera  $S$  com o plano  $\pi_1$ . Sejam  $c$  a interseção do cone  $C$  com a esfera  $S$ ,  $g$  a geratriz do cone paralela ao plano  $\pi_1$ , tal que  $c \cap g = A$ , e  $d$  a interseção do plano  $\pi_1$  com o plano  $\pi_2$  que contém  $c$ . Tome  $B$  um ponto de interseção da reta que contém o diâmetro de  $c$ , cujo ponto  $A$  pertence, com a

reta  $d$ . Indique por  $r$  a reta que passa pelos pontos  $B$  e  $F$ . Além disso, considere o ponto  $C = r \cap \mathcal{C}$  que pertence à geratriz  $g'$ , tal que  $g' \supset VD$  e  $D = AB \cap \mathcal{C}$ . Trace por um ponto  $P \in \pi_1 \cap \mathcal{C}$  um plano paralelo a  $\pi_2$  que intersecta  $r$  e  $g'$  nos pontos  $P'$  e  $E$ .

Figura 2.5: Esfera  $S$  tangente ao plano  $\pi_1$  e ao cone  $\mathcal{C}$



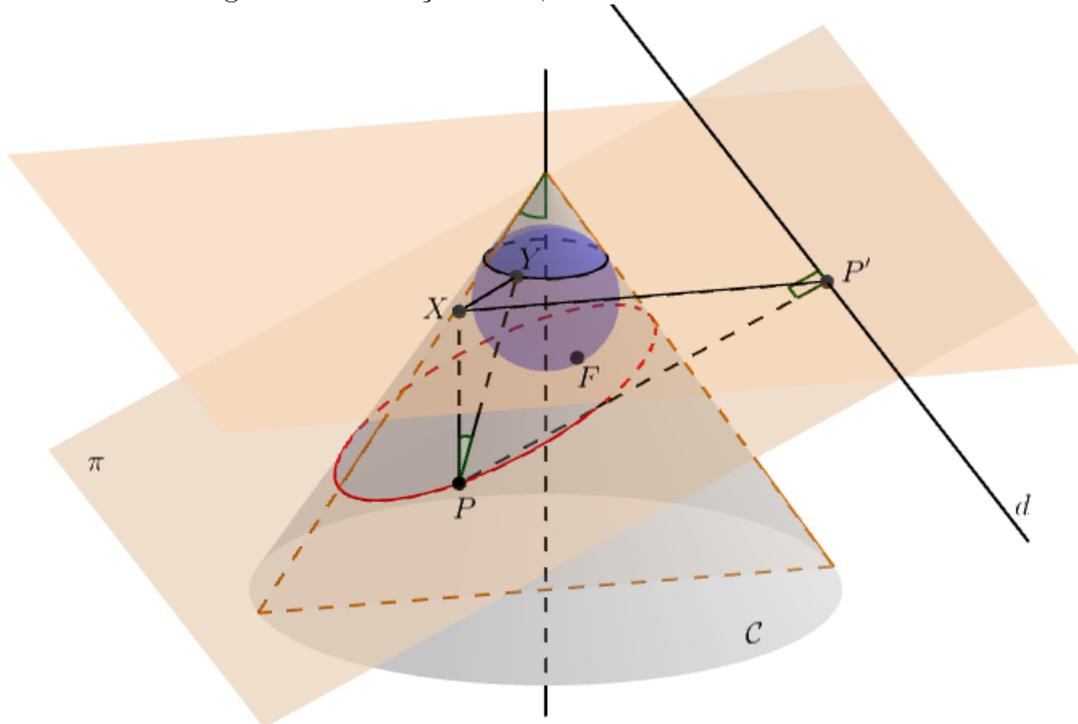
Fonte: Elaborada pelo Autor

Note que os triângulos  $BCD$  e  $CEP'$  são semelhantes ao triângulo  $ADV$  pelo caso AA (Ângulo-Ângulo), daí como este é um triângulo isósceles aqueles também são  $\Rightarrow \overline{P'B} = \overline{DE}$ . Pelo lema anterior, temos que  $\overline{PF} = \overline{PG}$ , onde  $G = c \cap VP$ , segue que  $\overline{PF} = \overline{PG} = \overline{DE} = \overline{P'B}$ . Tome  $H \in d$ , tal que  $\overline{PH} = \overline{P'B}$ . Tem-se que  $\overline{PH} = \overline{P'B} = \overline{PF}$ . Neste caso, conclui-se que todo ponto  $P \in \pi_1 \cap \mathcal{C}$  equidista do ponto  $F$  e da reta  $d$ . Portanto, o lugar geométrico dos pontos  $P$  que possuem essa propriedade é chamado de parábola. O ponto  $F$  é chamado de foco da parábola e  $d$  é a reta diretriz.  $\square$

### 2.2.1 A Relação Foco, Direção e Excentricidade

Considere uma esfera  $S$ , inscrita em uma superfície de um cone duplo  $\mathcal{C}$  tal que  $c = S \cap \mathcal{C}$ , tangente ao plano  $\pi$  em  $F$ . Sejam ainda  $P \in \pi \cap \mathcal{C}$ ;  $d$  a reta de interseção entre o plano que contém  $c$  e o plano  $\pi$ ;  $X$  o ponto de interseção entre o plano que contém  $c$  e a reta paralela ao eixo do cone que passa por  $P$ ;  $Y$  o ponto de interseção entre  $c$  e a geratriz que passa por  $P$  e, por fim,  $P'$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  à reta  $d$ . Sem perda de generalidade, será utilizada uma figura que remete a uma elipse:

Figura 2.6: Relação Foco, Diretriz e Excentricidade



Fonte: Elaborada pelo Autor

Note que os triângulos  $PXY$  e  $PXP'$  são retângulos. Sejam  $\alpha = \widehat{XPY}$  e  $\beta = \widehat{PXP'}$ , com  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ .

**Teorema 2.4** (Dandelin). *A seção cônica tem em  $F$  seu foco e em  $d$  sua diretriz. Em outras palavras, para todo ponto  $P$  da seção, a razão  $\frac{\overline{PF}}{\overline{PP'}}$  é uma constante,  $e > 0$ , chamada **excentricidade**. A seção será uma parábola quando  $e = 1$ ; uma elipse quando  $0 < e < 1$  e uma hipérbole quando  $e > 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $P$  um ponto da seção cônica. Pelo lema 2.1, tem-se que  $\overline{PX} = \overline{PY}$ . Dos triângulos  $PXY$  e  $PXP'$  segue:

$$\overline{PX} = \overline{PY} \cos \alpha \quad (2.22)$$

$$\overline{PX} = \overline{PP'} \cos \beta \quad (2.23)$$

Logo,

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{PP'}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PP'}} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = e \quad (2.24)$$

Ainda, note que: 1 - A excentricidade,  $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ , depende apenas do cone e do plano secante; 2 - Se  $\beta = \alpha$ , o plano de seção é paralelo à uma geratriz e daí, tem-se uma parábola, como a função cosseno é decrescente em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , temos que  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow e = 1$ ; 3 - Quando  $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , tem-se que  $\pi$  seccionará todas as geratrizes em um mesmo ramo do cone duplo, determinando uma curva fechada, no caso uma elipse, segue que em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , tem-se  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \cos \alpha > \cos \beta \Rightarrow e < 1$ ; 4 - Por fim, quando  $0 < \beta < \alpha$ ,  $\pi$  seccionará as duas folhas da superfície cônica, determinando a curva aberta de dois ramos denominada hipérbole, segue que em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , tem-se  $\beta < \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha < \cos \beta \Rightarrow e > 1$   $\square$

## 3 As Cônicas no Plano

### 3.1 Uma Abordagem Geométrica

As cônicas podem ser definidas de forma geométrica por:

**Definição 3.1.** *Elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos distintos fixados é igual a uma constante, maior que a distância entre esses pontos fixados.*

**Definição 3.2.** *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos distintos fixados é em valor absoluto igual a uma constante, menor que a distância entre estes pontos fixados.*

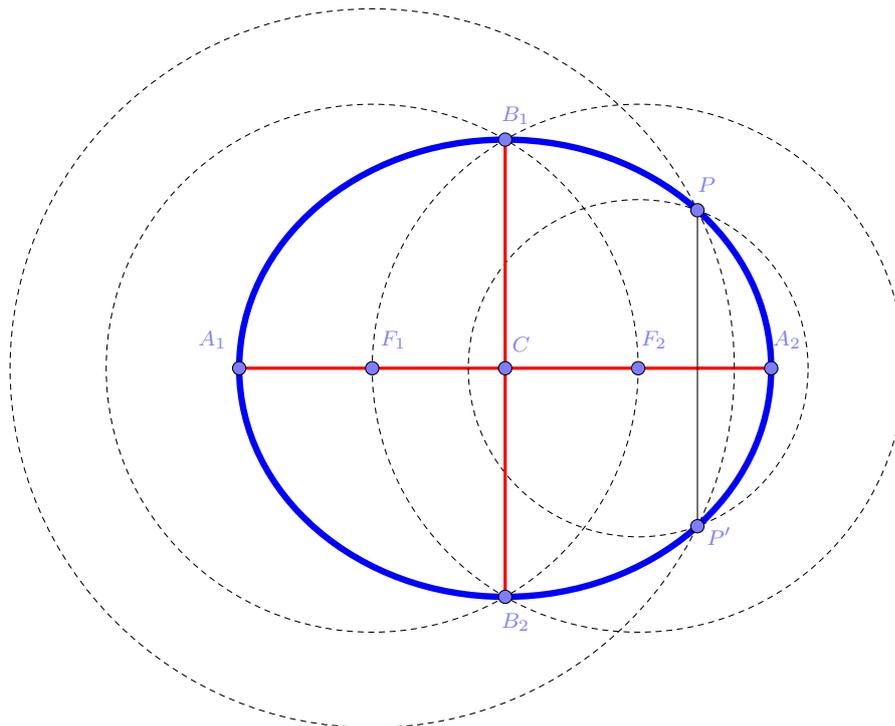
**Definição 3.3.** *Fixados uma reta e um ponto não pertencente a ela, denomina-se parábola o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes da reta e do ponto fixado.*

#### 3.1.1 Elipse

Pode-se esboçar a curva elipse da seguinte forma:

1. Sobre um plano, trace um segmento  $A_1A_2$ ;
2. Divida o segmento  $A_1A_2$  em duas partes iguais em  $C$ ;
3. Tome os pontos  $F_1$  e  $F_2$ , em  $A_1A_2$  (não os próprios), igualmente distantes de  $C$ ;
4. Divida  $A_1A_2$  em duas partes de qualquer forma;
5. Faça círculos de centro em  $F_1$  e raio igual ao comprimento de uma das partes e de centro em  $F_2$  e raio igual ao comprimento da outra parte. O(s) ponto(s) de interseção pertence(m) à curva elipse;
6. Faça os dois procedimentos anteriores uma infinidade de vezes.

Figura 3.1: Construção da Elipse com Régua e Compasso



Fonte: Elaborada pelo Autor

Note que os círculos se intersectarão em nenhum, em um ou em dois pontos. Neste caso, quando a divisão do segmento  $A_1A_2$  for realizada em  $C$ , tem-se que existirão  $B_1$  e  $B_2$  tais que a distância ao ponto  $F_1$  será igual à distância ao ponto  $F_2$ ; portanto, os segmentos  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$  serão perpendiculares. De fato, os triângulos  $F_1CB_1$  e  $F_2CB_1$  serão congruentes pelo caso  $LLL$  e, daí,  $F_1\widehat{C}B_1 = F_2\widehat{C}B_1$ . Mas, como  $F_1\widehat{C}B_1 + F_2\widehat{C}B_1 = 180^\circ$ , deve-se ter que  $F_1\widehat{C}B_1 = F_2\widehat{C}B_1 = 90^\circ$  ou, ainda,  $B_1C \perp A_1A_2$ . De maneira análoga, mostra-se que  $PP'$  é perpendicular a  $A_1A_2$  para outras divisões de  $A_1A_2$  deste caso. Além disso,  $A_1A_2$  é mediatriz dos segmentos  $PP'$ .

### 3.1.1.1 Elementos de uma Elipse

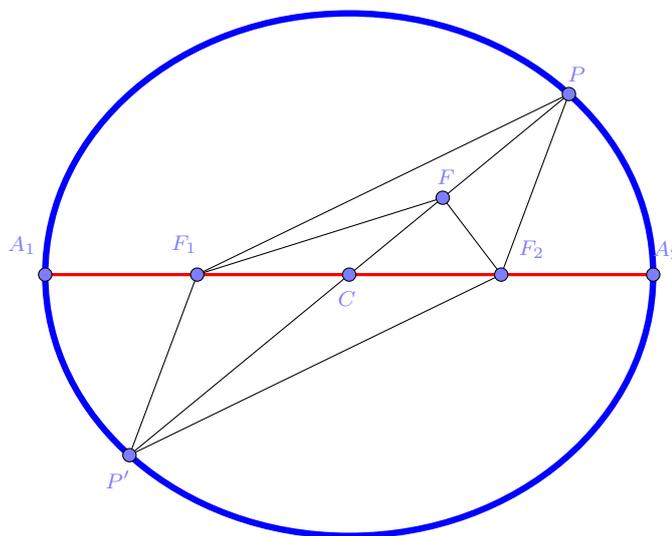
- Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os **focos** da elipse;
- A reta que contém os focos é a **reta focal**;
- Os pontos  $A_1$  e  $A_2$  são os **vértices** da elipse sobre a reta focal e o segmento  $A_1A_2$  é hoje conhecido como **eixo focal** da elipse;
- O **centro**  $C$  da elipse é o ponto médio do eixo focal. Note também que  $C$  é o ponto médio do segmento  $F_1F_2$ ;

- A **reta não focal** é a reta perpendicular à reta focal que passa no ponto  $C$ ;
- Os pontos  $B_1$  e  $B_2$  são os **vértices** da elipse sobre a reta não focal e o segmento  $B_1B_2$  é hoje conhecido como **eixo não focal**;
- Todas as linhas retas que passam pelo centro  $C$ , limitadas em cada extremidade pela elipse, são chamadas **diâmetros**;
- Uma reta que encontra a elipse em um único ponto é chamada **tangente** à elipse nesse ponto.

### 3.1.1.2 Algumas Propriedades da Elipse

**Proposição 3.1.** *Todos os diâmetros são divididos igualmente pelo centro  $C$ .*

Figura 3.2: Propriedade do Diâmetro de uma Elipse

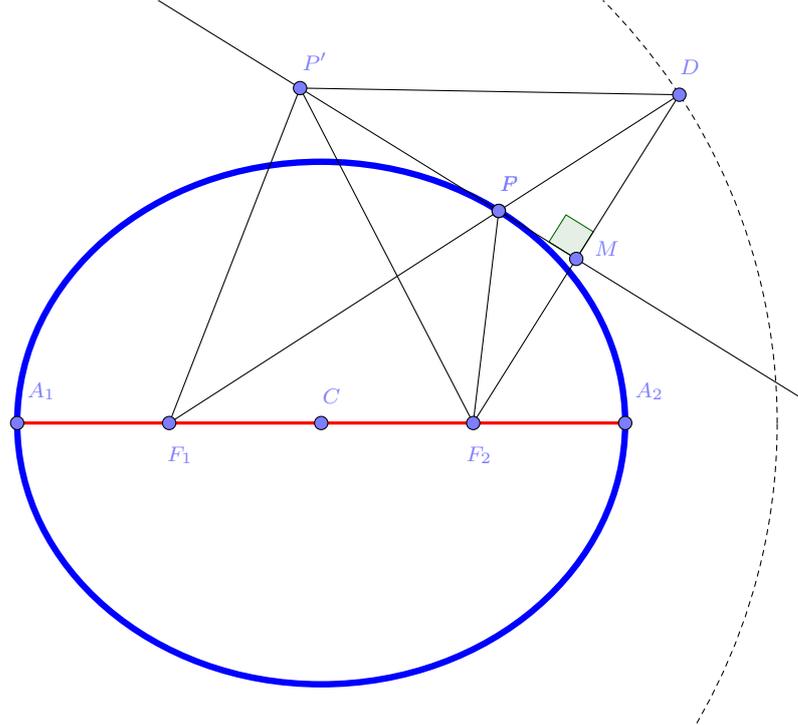


Fonte: Elaborada pelo Autor

*Demonstração.* Seja  $PP'$  um diâmetro da elipse. Suponha que  $\overline{CP} > \overline{CP'}$ , daí existe  $F \in CP$  tal que  $\overline{CF} = \overline{CP'}$ . Os triângulos  $CFP_1$  e  $CP'F_2$  são congruentes pelo caso  $LAL$ , pois  $\overline{CF_1} = \overline{CF_2}$ ,  $\overline{CF} = \overline{CP'}$  e os ângulos opostos ao ponto  $C$  são iguais. Tem-se que  $\overline{F_1F} + \overline{F_2F} = \overline{A_1A_2} = \overline{F_1P'} + \overline{F_2P'}$ . Além disso,  $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{A_1A_2}$  que é um absurdo. Portanto,  $F$  é o próprio ponto  $P$  e  $\overline{CP'} = \overline{CF} = \overline{CP}$   $\square$

**Proposição 3.2.** *A reta mediatriz do segmento  $F_2D$  é tangente à elipse em  $P$ , onde  $D$  é um ponto sobre o círculo de centro  $F_1$  e raio de comprimento igual a  $\overline{A_1A_2}$ , tal que  $\overrightarrow{F_1D}$  intersecta a elipse em  $P$ .*

Figura 3.3: Propriedade da Reta Mediatriz na Elipse



Fonte: Elaborada pelo Autor

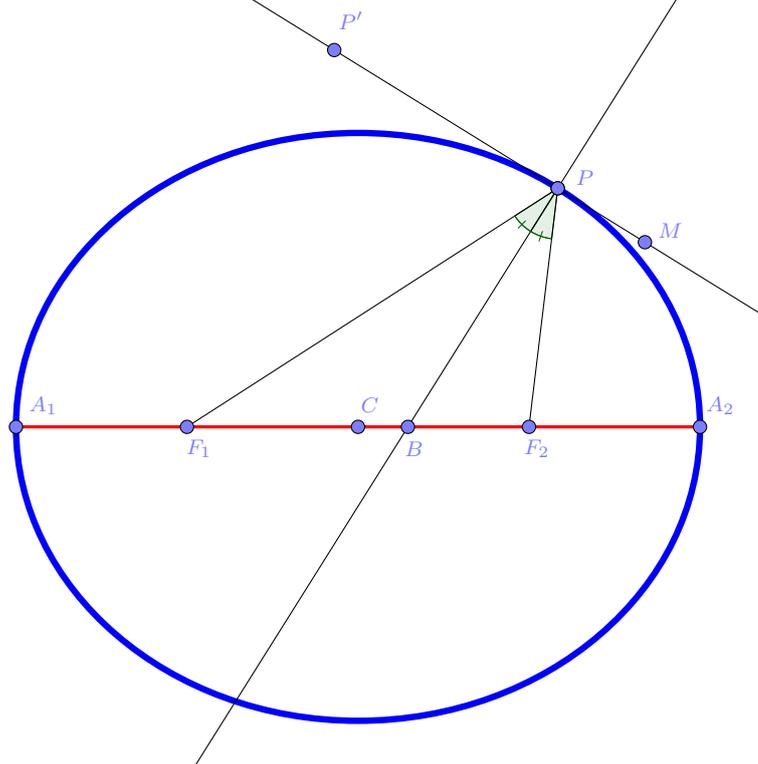
*Demonstração.* Tem-se que mostrar que o ponto  $P$  sobre a mediatriz do segmento  $F_2D$  é o único. Suponha que exista outro ponto  $P'$  de tangência dessa mediatriz na elipse; por definição, tem-se  $\overline{P'F_1} + \overline{P'F_2} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{A_1A_2}$ . Note que  $\overline{P'F_2} = \overline{P'D} \implies \overline{P'F_1} + \overline{P'D} = \overline{F_1D} = \overline{A_1A_2}$ , o que é um absurdo, pois, pela desigualdade triangular, deveria-se ter  $\overline{P'F_1} + \overline{P'D} > \overline{F_1D} = \overline{A_1A_2}$ . Portanto, a reta mediatriz do segmento  $F_2D$  é tangente à elipse em  $P$ .  $\square$

**Proposição 3.3 (Propriedade Refletora da Elipse).** *Os ângulos formados entre a reta tangente à elipse em um ponto  $P$  e os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$  são iguais.*

*Demonstração.* Na figura 3.3, observe que o triângulo  $F_2PD$  é isósceles e  $\overline{F_2M} = \overline{MD}$ ; logo, os triângulos  $F_2PM$  e  $DPM$  são congruentes pelo caso  $ALA$  (Ângulo-Lado-Ângulo), daí  $\widehat{F_2PM} = \widehat{DPM}$ . Note que  $\widehat{F_1PP'} = \widehat{MPD}$  (ângulos  $OPV$ ). Portanto,  $\widehat{F_1PP'} = \widehat{F_2PM}$ , isto é, os ângulos formados entre a reta tangente à elipse em um ponto  $P$  e os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$  são iguais.  $\square$

**Proposição 3.4.** *A normal à elipse, em um ponto  $P$ , é bissetriz do ângulo formado entre o segmento  $F_1P$  e  $F_2P$ .*

Figura 3.4: Propriedade da Reta Normal à Elipse



Fonte: Elaborada pelo Autor

*Demonstração.* Tem-se que  $F_1\hat{P}B = 90^\circ - F_1\hat{P}P'$  e  $F_2\hat{P}B = 90^\circ - F_2\hat{P}M$ . Como  $F_1\hat{P}P' = F_2\hat{P}M$ , segue que  $F_1\hat{P}B = F_2\hat{P}B$   $\square$

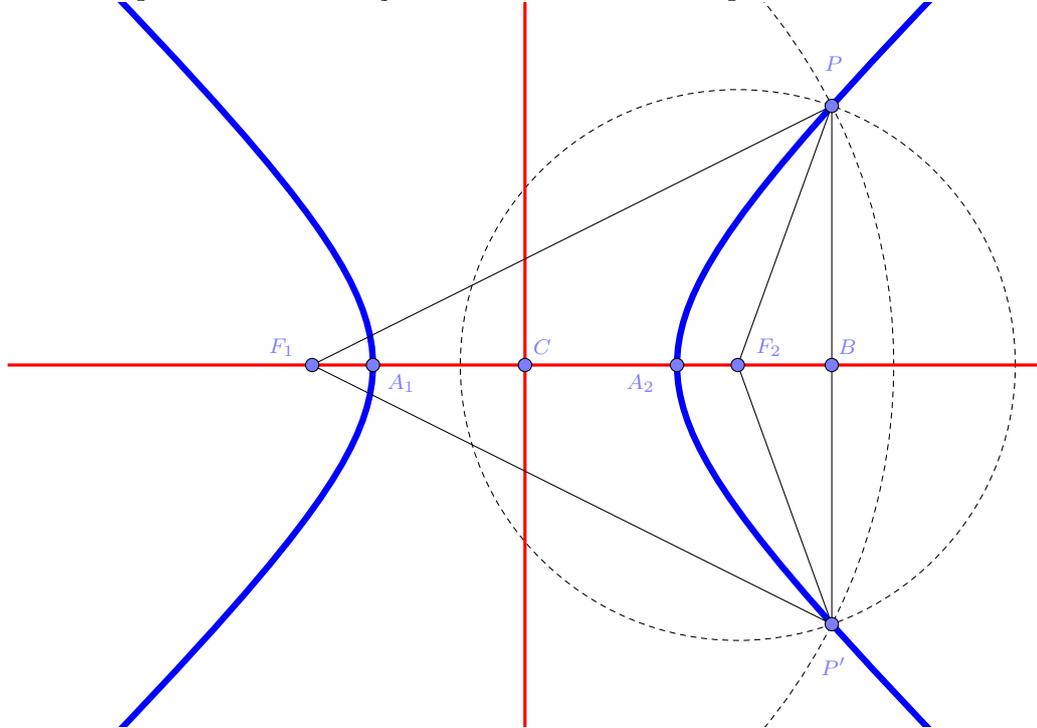
### 3.1.2 Hipérbole

Pode-se esboçar a curva hipérbole da seguinte forma:

1. Sobre um plano, trace um segmento  $A_1A_2$ ;
2. Divida o segmento  $A_1A_2$  em duas partes iguais em  $C$ ;
3. Tome os pontos  $F_1$  e  $F_2$ , cada ponto sobre um dos prolongamentos dos dois lados de  $A_1A_2$ , igualmente distantes de  $C$ ;
4. Faça um círculo  $c_1$  de centro  $F_1$  e raio de comprimento maior do que ou igual a  $\overline{F_1A_2}$  e outro  $c_2$  de centro  $F_2$  e raio de comprimento igual à diferença entre o comprimento do raio de  $c_1$  e  $\overline{A_1A_2}$ . O(s) ponto(s) de interseção pertence(m) à curva hipérbole;
5. Repita o passo anterior uma infinidade de vezes;

6. O outro ramo da hipérbole é feito de forma análoga, tomando  $F_2$  como ponto de partida no procedimento 4.

Figura 3.5: Construção da Hipérbole com Régua e Compasso



Fonte: Elaborada pelo Autor

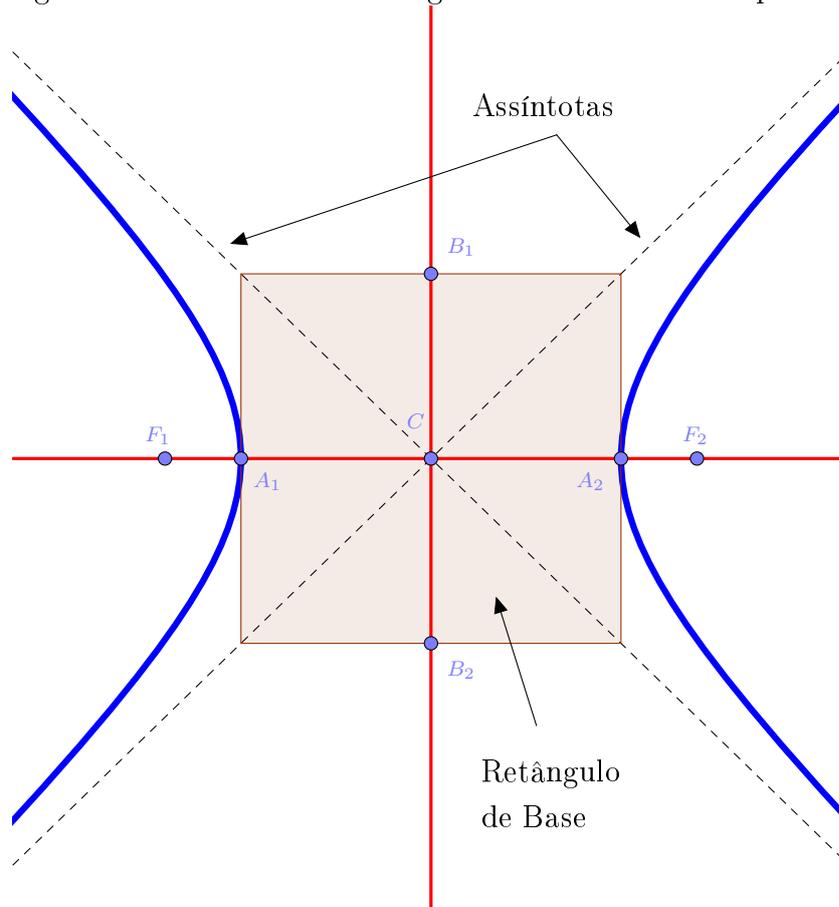
Note que os círculos se intersectarão em um ou em dois pontos. Esse caso acontecerá quando o raio do círculo de centro  $F_1$  for igual a  $\overline{F_1A_2}$ ; este acontecerá quando o raio do círculo de centro  $F_1$  for maior do que  $\overline{F_1A_2}$ , daí existirão  $P$  e  $P'$  tal que  $PP'$  será perpendicular ao prolongamento de  $A_1A_2$  em  $B$ . De fato, os triângulos  $F_1PF_2$  e  $F_1P'F_2$  são congruentes pelo caso  $LLL$ ; daí, tem-se que as medidas dos ângulos externos  $\widehat{PF_2B}$  e  $\widehat{P'F_2B}$  são iguais. Segue que os triângulos  $PF_2B$  e  $P'F_2B$  são congruentes pelo caso  $LAL$ , daí  $\widehat{F_2BP} = \widehat{F_2BP'}$ . Mas, como  $\widehat{F_2BP} + \widehat{F_2BP'} = 180^\circ$ , deve-se ter que  $\widehat{F_2BP} = \widehat{F_2BP'} = 90^\circ$ .

### 3.1.2.1 Elementos de uma Hipérbole

- Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os **focos** da hipérbole;
- A reta que contém os focos é a **reta focal**;
- Os pontos  $A_1$  e  $A_2$  são os **vértices** da hipérbole sobre a reta focal e o segmento  $A_1A_2$  é hoje conhecido como **eixo focal** da hipérbole;

- O **centro**  $C$  da hipérbole é o ponto médio do eixo focal. Note também que  $C$  é o ponto médio do segmento  $F_1F_2$ ;
- A **reta não focal** é a reta perpendicular à reta focal que passa no ponto  $C$ ;
- Os pontos  $B_1$  e  $B_2$  são os **vértices imaginários** da hipérbole sobre a reta não focal e o segmento  $B_1B_2$  é hoje conhecido como **eixo não focal**, onde  $A_1B_1A_2B_2$  é quadrado de lado de comprimento igual a distância do ponto  $C$  ao ponto  $F_1$  ou  $F_2$ ;

Figura 3.6: Assíntotas e Retângulo de Base de uma Hipérbole



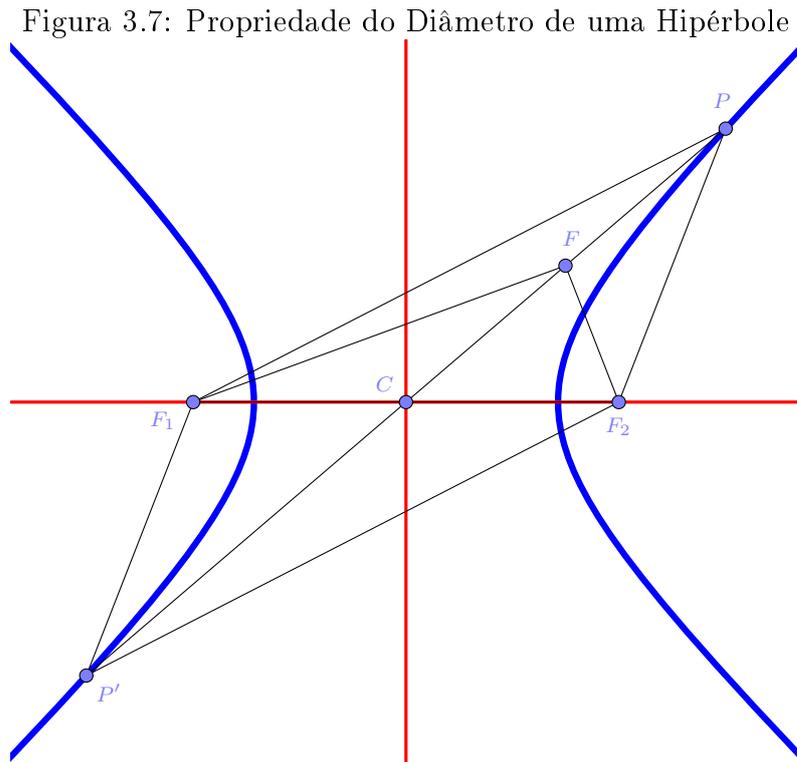
Fonte: Elaborada pelo Autor

- O retângulo cujos lados têm  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  como pontos médios é chamado **retângulo de base**;
- As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as **assíntotas** da hipérbole;
- Uma hipérbole é **equilátera** quando o retângulo de base é um quadrado;

- Todas as linhas retas que passam pelo centro  $C$  e são limitadas em cada extremidade por um dos ramos da hipérbole são chamadas de **diâmetros**.
- Uma reta que encontra a hipérbole em um único ponto e que não passa no seu interior é chamada **tangente** à hipérbole nesse ponto.

### 3.1.2.2 Algumas Propriedades da Hipérbole

**Proposição 3.5.** *Todos os diâmetros são divididos igualmente pelo centro  $C$ .*

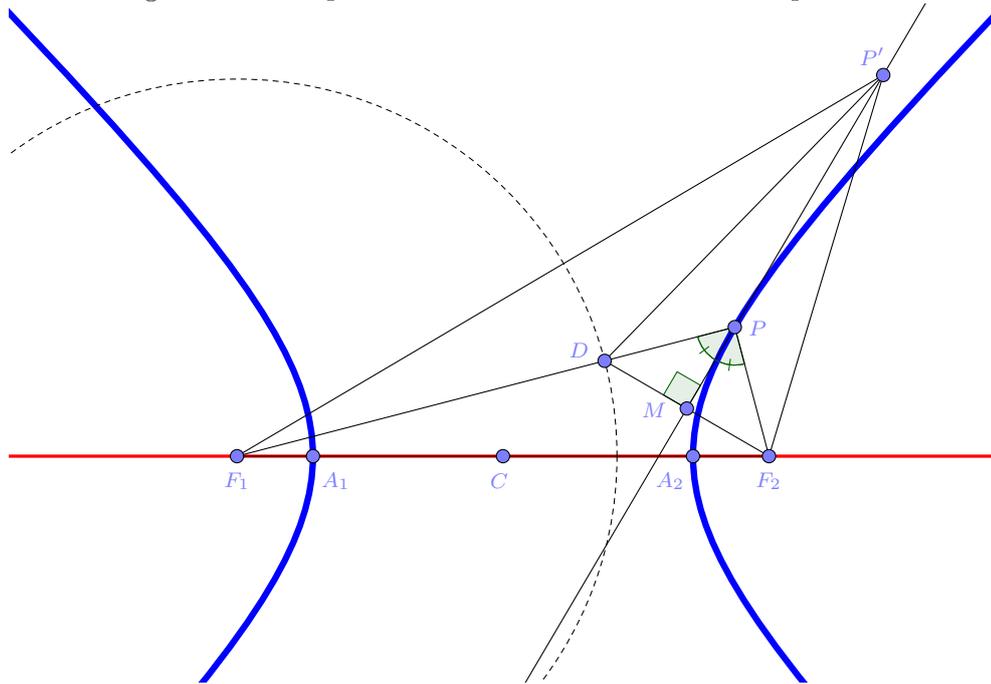


Fonte: Elaborada pelo Autor

*Demonstração.* Seja  $PP'$  um diâmetro da hipérbole. Suponha que  $\overline{CP} > \overline{CP'}$ , daí existe  $F \in CP$  tal que  $\overline{CF} = \overline{CP'}$ . Os triângulos  $CF_1F$  e  $CF_2F$  são congruentes pelo caso  $LAL$ , pois  $\overline{CF_1} = \overline{CF_2}$ ,  $\overline{CF} = \overline{CF}$  e os ângulos opostos ao ponto  $C$  são iguais. Tem-se que  $|\overline{F_1F} - \overline{F_2F}| = \overline{A_1A_2} = |\overline{F_1P'} - \overline{F_2P'}|$ . Além disso,  $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = \overline{A_1A_2}$ , logo  $|\overline{F_1F} - \overline{F_2F}| = |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}|$  que é um absurdo. Portanto,  $F$  é o próprio ponto  $P$  e  $\overline{CP'} = \overline{CF} = \overline{CP}$   $\square$

**Proposição 3.6.** *A reta mediatriz do segmento  $F_2D$  é tangente à hipérbole em  $P$ , onde  $D$  é um ponto sobre o círculo de centro  $F_1$  e raio de comprimento igual a  $\overline{A_1A_2}$ , tal que  $\overrightarrow{F_1D}$  intersecta a hipérbole em  $P$ .*

Figura 3.8: Propriedade da Reta Mediatrix na Hipérbole



Fonte: Elaborada pelo Autor

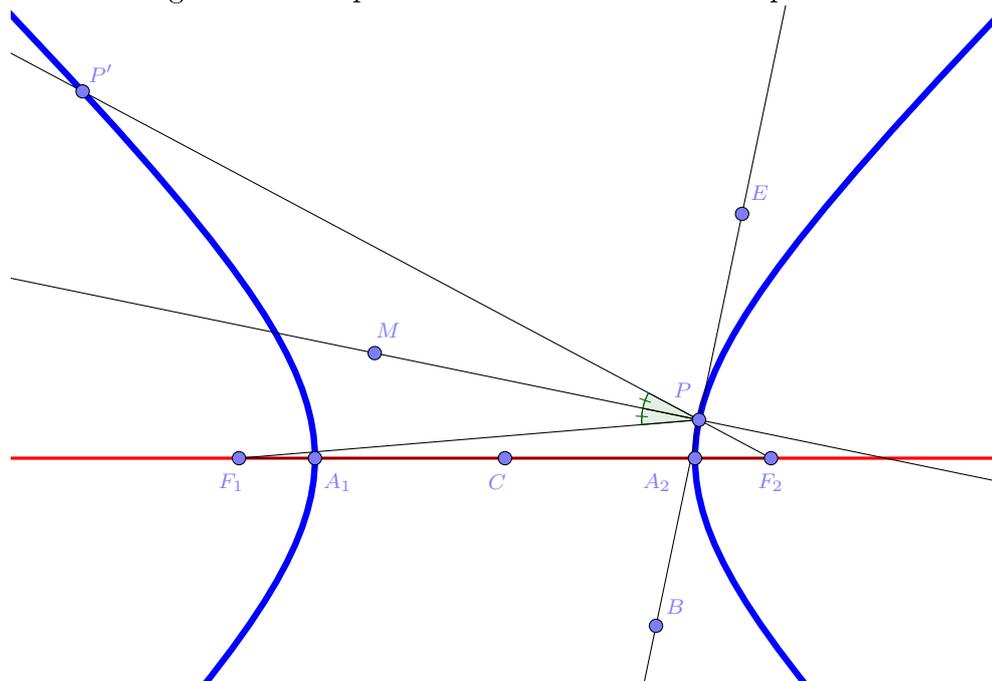
*Demonstração.* Tem-se que mostrar que o ponto  $P$  sobre a mediatrix do segmento  $F_2D$  é o único. Suponha que exista outro ponto  $P'$  de tangência dessa mediatrix na elipse; por definição, tem-se  $|\overline{P'F_1} - \overline{P'F_2}| = |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \overline{A_1A_2}$ . Note que  $\overline{P'F_2} = \overline{P'D} \implies |\overline{P'F_1} - \overline{P'D}| = \overline{F_1D} = \overline{A_1A_2}$ , o que é um absurdo, pois, pela desigualdade triangular deveria-se ter  $|\overline{P'F_1} - \overline{P'D}| < \overline{F_1D} = \overline{A_1A_2}$ . Portanto, a reta mediatrix do segmento  $F_2D$  é tangente à hipérbole em  $P$ .  $\square$

**Proposição 3.7 (Propriedade Refletora da Hipérbole).** *Os ângulos formados entre a reta tangente à hipérbole em um ponto  $P$  e os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$  são iguais, isto é, a reta tangente à hipérbole em  $P$  é bissetriz do ângulo  $F_1\hat{P}F_2$ .*

*Demonstração.* Na figura 3.8, observe que o triângulo  $F_2PD$  é isósceles e  $\overline{F_2M} = \overline{MD}$ ; logo, os triângulos  $F_2PM$  e  $DPM$  são congruentes pelo caso  $ALA$  (Ângulo-Lado-Ângulo), daí  $F_2\hat{P}M = D\hat{P}M$ , isto é, a reta tangente à hipérbole em  $P$  é bissetriz do ângulo  $F_1\hat{P}F_2$ .  $\square$

**Proposição 3.8.** *A normal à hipérbole, em um ponto  $P$  é bissetriz do ângulo formado entre o segmento  $F_1P$  e  $P'P$ , onde  $P'$  é a interseção do outro ramo da hipérbole com  $\overrightarrow{F_2P}$*

Figura 3.9: Propriedade da Reta Normal à Hipérbole



Fonte: Elaborada pelo Autor

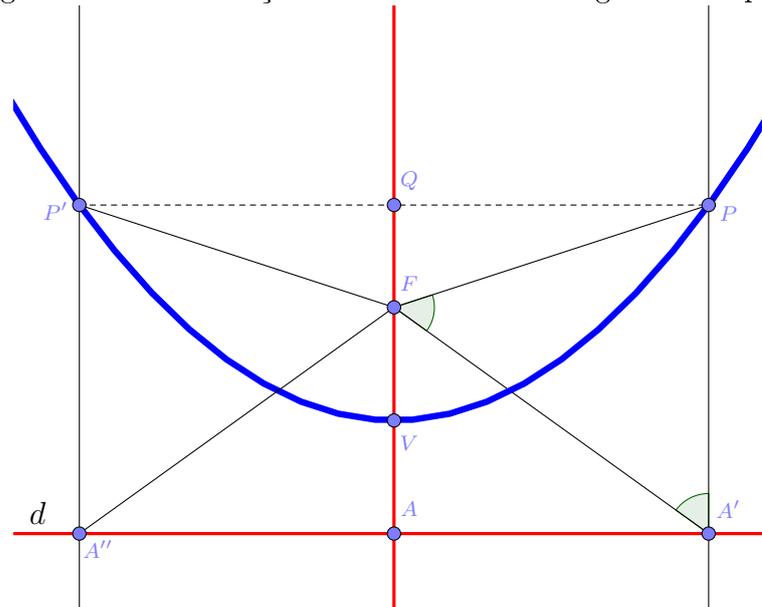
*Demonstração.* Tem-se que  $F_1\widehat{P}M = 90^\circ - F_1\widehat{P}B$  e  $P'\widehat{P}M = 90^\circ - P'\widehat{P}E$ . Como  $P'\widehat{P}E = F_2\widehat{P}B$  (ângulos  $OPV$ ), segue que  $F_1\widehat{P}M = P'\widehat{P}M$   $\square$

### 3.1.3 Parábola

Pode-se esboçar a curva parábola da seguinte forma:

1. Sobre um plano trace uma reta  $d$ ;
2. Tome um ponto  $F$  fora dessa reta;
3. Marque o ponto  $A$ : o pé da perpendicular baixada de  $F$  à reta  $d$ ;
4. Tome um ponto  $A'$ , sobre  $d$ , diferente de  $A$  e trace a perpendicular a  $d$  que passa por  $A'$ ;
5. Faça o segmento  $FA'$ ;
6. Tome o ponto  $P$  sobre a perpendicular do passo 4 de modo que o ângulo  $P\widehat{F}A'$  seja igual ao ângulo  $P\widehat{A}'F$ ;
7. Repita os três últimos processos uma infinidade de vezes.

Figura 3.10: Construção da Parábola com Régua e Compasso



Fonte: Elaborada pelo Autor

Tome  $A''$  o simétrico de  $A'$  em relação a  $A$ , tem-se que os triângulos  $FAA''$  e  $FAA'$  são congruentes pelo caso  $LAL$ , pois  $FA$  é lado comum,  $F\hat{A}A'' = F\hat{A}A'$  e  $\overline{AA'} = \overline{AA''} \implies \overline{FA'} = \overline{FA''}$ . Daí, os triângulos  $PFA'$  e  $P'FA''$  são congruentes pelo caso  $LLL \implies P\hat{F}Q = P'\hat{F}Q$ . Logo, os triângulos  $PFQ$  e  $P'FQ$  são congruentes pelo caso  $LAL$ , daí  $P\hat{Q}F = P'\hat{Q}F$ . Mas, como  $P\hat{Q}F + P'\hat{Q}F = 180^\circ$ , deve-se ter que  $P\hat{Q}F = P'\hat{Q}F = 90^\circ$ .

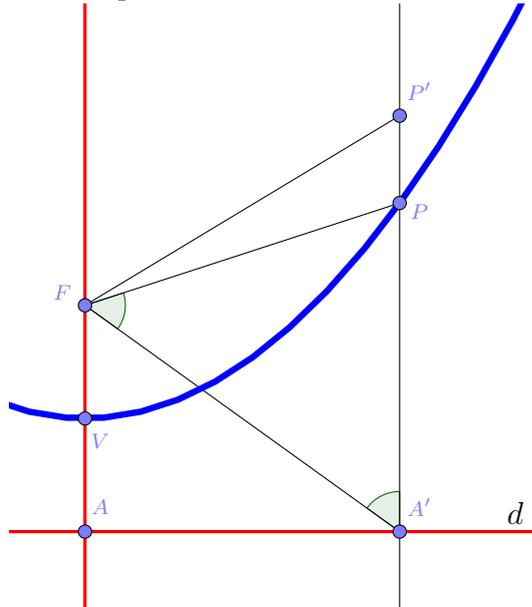
### 3.1.3.1 Elementos de uma Parábola

1. O ponto  $F$  e a reta  $d$  são, respectivamente, o **foco** e a reta **diretriz** da parábola;
2. A reta que é perpendicular a  $d$  e contém o foco é a **reta focal**;
3. o ponto  $V$  da parábola que pertence à reta focal é o **vértice** da parábola;
4. A  $d(F, A)$  é chamada de **parâmetro** da parábola;
5. Todas as retas que são internas à parábola e paralelas ao eixo focal são chamadas de **diâmetros**;
6. Uma reta que encontra a parábola em um único ponto e que não passa no seu interior é chamada **tangente** à hipérbole nesse ponto.

### 3.1.3.2 Algumas Propriedades da Parábola

**Proposição 3.9.** *Todo diâmetro encontra a parábola em um único ponto.*

Figura 3.11: Propriedade do Diâmetro de uma Parábola

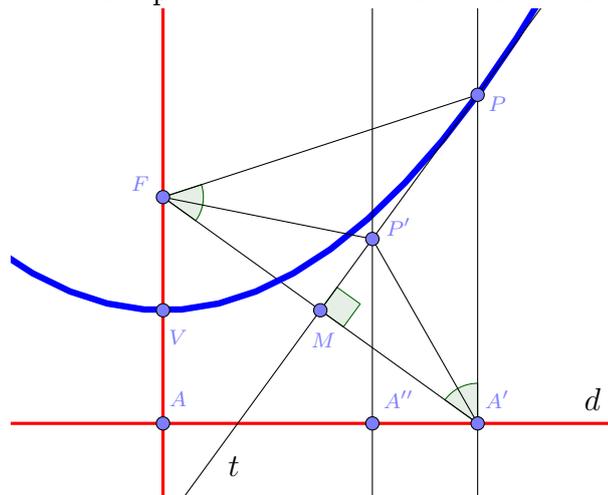


Fonte: Elaborada pelo Autor

*Demonstração.* Suponha que o diâmetro (contido na reta  $\overleftrightarrow{PA'}$ ) encontre a parábola em outro ponto  $P'$ . Por definição, tem-se que  $\overline{P'F} = \overline{P'A'}$  e  $\overline{PF} = \overline{PA'}$ . Segue que  $\overline{P'F} = \overline{PA'} + \overline{P'P} = \overline{PF} + \overline{P'P}$  o que é um absurdo; pois, pela desigualdade triangular, tem-se que  $\overline{P'F} < \overline{PF} + \overline{P'P}$ . Portanto, todo diâmetro encontra a parábola em um único ponto.  $\square$

**Proposição 3.10.** *A reta mediatriz  $t$ , do segmento  $FA'$ , é tangente à parábola no ponto  $P$ .*

Figura 3.12: Propriedade da Reta Mediatriz na Parábola

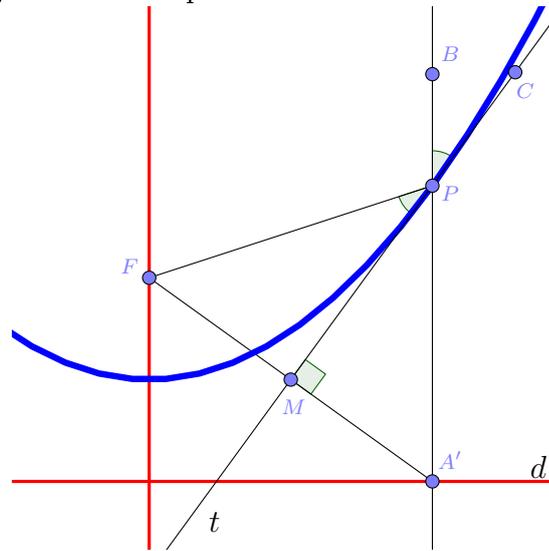


Fonte: Elaborada pelo Autor

*Demonstração.* Suponha que exista outro ponto  $P'$  onde a reta mediatriz  $t$  seja tangente à parábola. De  $t$  ser mediatriz do segmento  $FA'$  segue que  $\overline{P'F} = \overline{P'A'}$ . Seja  $A''$  o pé da perpendicular baixada de  $P'$  à reta  $d$ . Por definição, tem-se que  $\overline{P'F} = \overline{P'A''}$ . Note que  $P'A'$  é hipotenusa do triângulo  $P'A''A'$  retângulo em  $A''$ , logo  $\overline{P'A'} > \overline{P'A''} = \overline{P'F}$  o que é um absurdo. Portanto, a reta mediatriz  $t$ , do segmento  $FA'$ , é tangente à parábola no ponto  $P$ .  $\square$

**Proposição 3.11 (Propriedade Refletora da Parábola).** *A reta mediatriz  $t$  forma ângulos iguais com o segmento  $PF$  e com o diâmetro  $\overrightarrow{PB}$ .*

Figura 3.13: Propriedade Refletora da Parábola



Fonte: Elaborada pelo Autor

*Demonstração.* Pelo fato de  $t$  ser mediatriz, tem-se que os triângulos  $FPM$  e  $A'PM$  são congruentes pelo caso  $LLL$ , logo  $\widehat{FPM} = \widehat{A'PM}$ . Ainda,  $\widehat{A'PM} = \widehat{BPC}$ , pois são opostos pelo vértice. Portanto,  $\widehat{FPM} = \widehat{BPC}$   $\square$

## 3.2 Uma Abordagem Analítica

Seja  $OXY$  um sistema de eixos ortonais do plano. Pelo teorema 2.4, tem-se que:

**Proposição 3.12.**  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto de uma cônica se, e somente se, existem  $A, B, C, D, E$  e  $F \in \mathbb{R}$  tais que  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .

*Demonstração.* De fato, sejam  $F = (x', y')$  o foco,  $d$  a diretriz de equação cartesiana  $ax'' + by'' = c$  e  $e$  a excentricidade da cônica. Suponha que  $P = (x, y)$  pertence à cônica

e usando o teorema 2.4:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PF}}{\overline{PP'}} = e &\Leftrightarrow \frac{d(P, F)}{d(P, d)} = e \Leftrightarrow d(P, F) = e \cdot d(P, d) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = e \cdot \left[ \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \\ &\Leftrightarrow (x - x')^2 + (y - y')^2 = e^2 \cdot \left[ \frac{(|ax + by - c|)^2}{a^2 + b^2} \right] \\ &\Leftrightarrow \left[ \frac{(1 - e^2)a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \right] \cdot x^2 + \left[ -\frac{2abe^2}{a^2 + b^2} \right] \cdot xy + \left[ \frac{(1 - e^2)b^2 + a^2}{a^2 + b^2} \right] \cdot y^2 + \\ &\quad + 2 \cdot \left[ -x' + \frac{ace^2}{a^2 + b^2} \right] \cdot x + 2 \cdot \left[ -y' + \frac{bce^2}{a^2 + b^2} \right] \cdot y + \left[ x'^2 + y'^2 - \frac{c^2 e^2}{a^2 + b^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

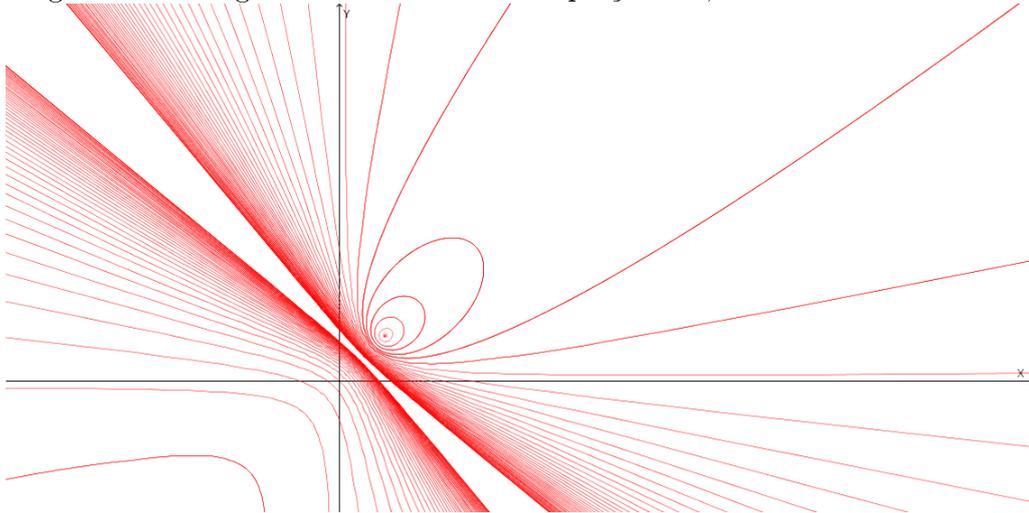
Fazendo  $A = \frac{(1 - e^2)a^2 + b^2}{a^2 + b^2}$ ,  $B = -\frac{2abe^2}{a^2 + b^2}$ ,  $C = \frac{(1 - e^2)b^2 + a^2}{a^2 + b^2}$ ,  $D = 2 \cdot \left[ -x' + \frac{ace^2}{a^2 + b^2} \right]$ ,  $E = 2 \cdot \left[ -y' + \frac{bce^2}{a^2 + b^2} \right]$  e  $F = x'^2 + y'^2 - \frac{c^2 e^2}{a^2 + b^2}$ . Resulta em:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

□

Fermat obteve as equações das cônicas a partir da equação 1.1, conhecida como *equação geral do segundo grau com duas variáveis*. Segundo os valores dos coeficientes, isto é, de  $e$ , obtêm-se os respectivos lugares geométricos.

Figura 3.14: Lugares Geométricos da Equação 1.1, variando o valor de  $e$ .



Fonte: Elaborada pelo Autor

A partir das definições das cônicas, obtêm-se as equações em relação a um sistema de

eixos ortogonais  $OXY$  para alguns casos especiais.

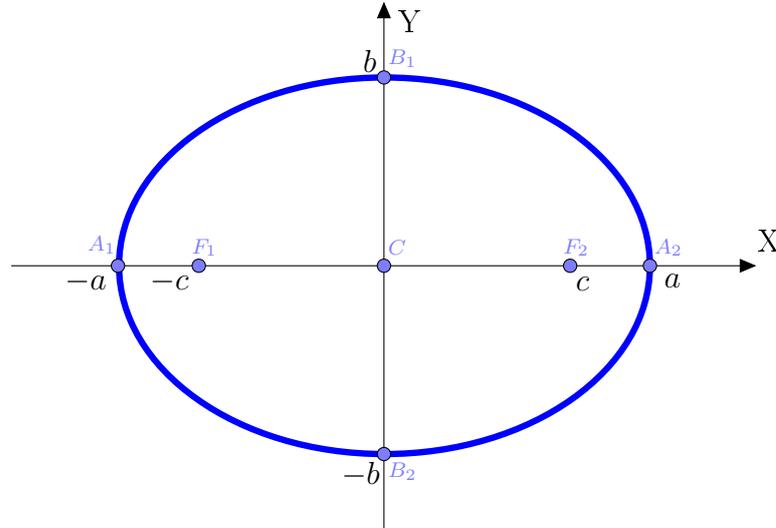
### 3.2.1 Elipse

#### 3.2.1.1 Elipse de centro na origem e reta focal sobre o eixo $OX$

Neste caso, os vértices e focos da elipse são:

$$\begin{aligned} A_1 &= (-a, 0) & A_2 &= (a, 0) & B_1 &= (b, 0) & B_2 &= (-b, 0) \\ F_1 &= (-c, 0) & F_2 &= (c, 0) \end{aligned}$$

Figura 3.15: Esboço da Elipse de centro na origem e reta focal sobre o eixo  $OX$



Fonte: Elaborada pelo Autor

onde  $0 < c < a$  e  $b^2 = a^2 - c^2$ . Logo,

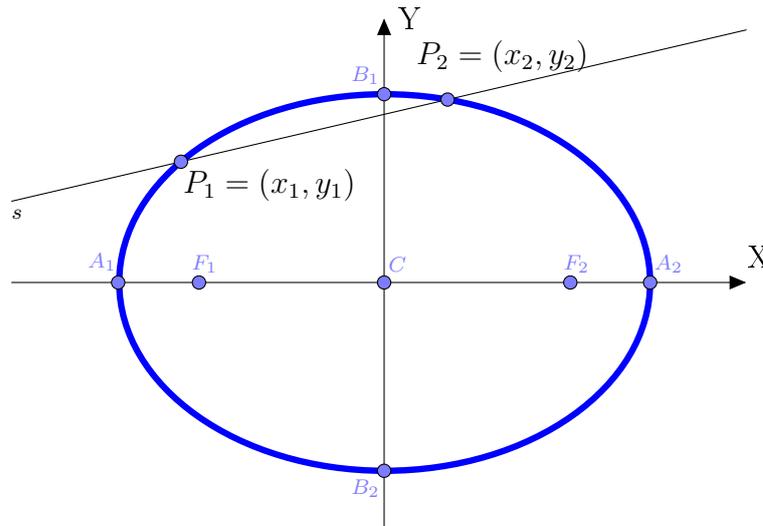
$$\begin{aligned} P = (x, y) \text{ pertence à elipse} &\Leftrightarrow d(P, F_1) = d(P, F_2) = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow b^2 + x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

A equação 3.1 é a forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal sobre o eixo  $OX$ .

### 3.2.1.2 Equação da Reta Tangente à Elipse

Nos casos em que uma reta  $t$  é tangente à elipse (de equação 3.1) em um dos vértices, sua equação é obtida de forma trivial. Assim sendo, considere o caso em que esse ponto,  $P_1 = (x_1, y_1)$ , não seja um dos vértices; segue que existe outro ponto  $P_2 = (x_2, y_2)$ , que também não é vértice, tal que uma reta secante  $s$  passa por eles, conforme figura 3.16:

Figura 3.16: Reta  $s$  secante à Elipse



Fonte: Elaborada pelo Autor

Sabe-se que a inclinação  $m_s$  da reta  $s$  é dada por:

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ainda,  $P_1$  e  $P_2$  pertencem à elipse de equação 3.1, logo:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (3.2)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad (3.3)$$

Fazendo a subtração de 3.2 em 3.3, obtém-se:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{b^2} = 0$$

Isolando  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , obtém-se:

$$m_s = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}$$

que é a inclinação da reta  $s$ . Logo, a inclinação  $m_t$  da reta  $t$ , tangente à elipse no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ , será igual a:

$$m_t = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} m_s$$

Isto é,

$$m_t = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Portanto, a equação da reta  $t$  tangente à elipse em  $P_1$  é:

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \quad (3.4)$$

### 3.2.1.3 Propriedade Refletora da Elipse

Uma demonstração analítica para a proposição 3.4, seria:

*Demonstração.* Sejam  $\alpha$  o ângulo formado entre segmento  $F_1P_1$  e a reta  $n$ , normal à elipse em  $P_1$ , e  $\beta$  o ângulo formado entre segmento  $F_2P_1$  e a reta normal  $n$ . É fácil notar que as inclinações da reta  $n$ , do segmento  $F_1P_1$  e  $F_2P_1$  são  $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ ,  $\frac{y_1}{x_1 + c}$  e  $\frac{y_1}{x_1 - c}$ , respectivamente. Segue que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \left| \frac{\frac{a^2y_1}{b^2x_1} - \frac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right) \left(\frac{y_1}{x_1 + c}\right)} \right| = \left| \frac{a^2y_1(x_1 + c) - b^2x_1y_1}{b^2x_1(x_1 + c) + a^2y_1^2} \right| \\ &= \left| \frac{x_1y_1(a^2 - b^2) + a^2y_1c}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 + b^2x_1c} \right| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \left| \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{a^2y_1}{b^2x_1}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1 - c}\right) \left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)} \right| = \left| \frac{b^2x_1y_1 - a^2y_1(x_1 - c)}{b^2x_1(x_1 - c) + a^2y_1^2} \right| \\ &= \left| \frac{x_1y_1(b^2 - a^2) + a^2y_1c}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - b^2x_1c} \right| \end{aligned}$$

Sabe-se que  $a^2 = b^2 + c^2$  e  $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2 + b^2$ . logo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{cy_1 (cx_1 + a^2)}{b^2 (cx_1 + a^2)} \right| = \left| \frac{cy_1}{b^2} \right|$$

e

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{cy_1 (a^2 - cx_1)}{b^2 (a^2 - cx_1)} \right| = \left| \frac{cy_1}{b^2} \right|$$

Portanto,  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

□

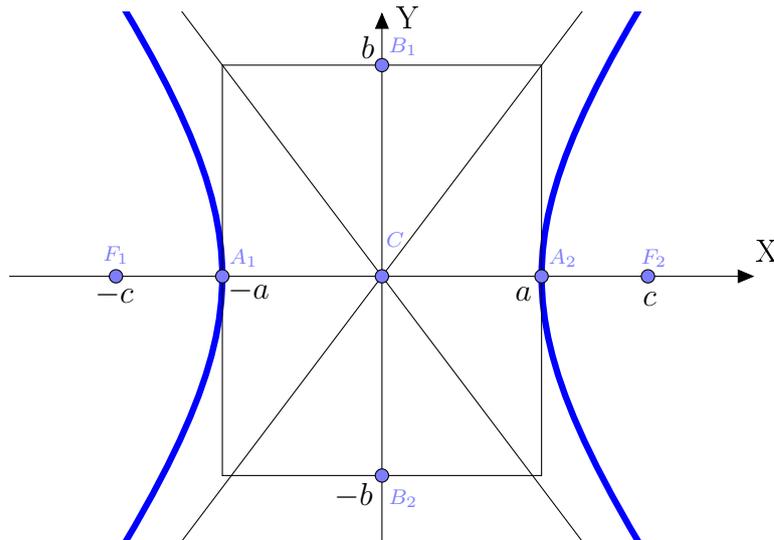
### 3.2.2 Hipérbole

#### 3.2.2.1 Hipérbole de centro na origem e reta focal sobre o eixo $OX$

Neste caso, os vértices e focos da hipérbole são:

$$\begin{aligned} A_1 &= (-a, 0) & A_2 &= (a, 0) & B_1 &= (0, b) & B_2 &= (0, -b) \\ F_1 &= (-c, 0) & F_2 &= (c, 0) \end{aligned}$$

Figura 3.17: Esboço da Hipérbole de centro na origem e reta focal sobre o eixo  $OX$



Fonte: Elaborada pelo Autor

onde  $0 < a < c$  e  $b^2 = c^2 - a^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \text{ pertence à hipérbole} &\Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \\ \Leftrightarrow \begin{cases} d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a & \text{(ramo direito da hipérbole)} \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a & \text{(ramo esquerdo da hipérbole)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a & \text{(ramo direito da hipérbole)} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a & \text{(ramo esquerdo da hipérbole)} \end{cases} \end{aligned}$$

De maneira análoga à elipse, chega-se ao resultado:

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \text{ pertence à hipérbole} &\Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \\
 &\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

A equação 3.5 é a forma canônica da hipérbole de centro na origem e reta focal sobre o eixo  $OX$ . As assíntotas são as retas que passam pela origem e têm inclinação  $\pm \frac{b}{a}$  em relação ao eixo  $OX$ , suas equações são  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , isto é,  $bx - ay = 0$  e  $bx + ay = 0$  como equações cartesianas.

### 3.2.2.2 Equação da Reta Tangente à Hipérbole

Nos casos em que uma reta  $t$  é tangente à hipérbole (de equação 3.5) em um dos vértices, sua equação é obtida de forma trivial. Assim sendo, considere o caso em que esse ponto,  $P_1 = (x_1, y_1)$ , não seja um dos vértices; segue que existe outro ponto  $P_2 = (x_2, y_2)$ , que também não é vértice, tal que uma reta secante  $s$  passa por eles.

Sabe-se que a inclinação  $m_s$  da reta  $s$  é dada por:

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ainda,  $P_1$  e  $P_2$  pertencem à hipérbole de equação 3.5, logo:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \tag{3.6}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \tag{3.7}$$

Fazendo a subtração de 3.6 em 3.7, obtém-se:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{a^2} - \frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{b^2} = 0$$

Isolando  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , obtém-se:

$$m_s = \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}$$

que é a inclinação da reta  $s$ . Logo, a inclinação  $m_t$  da reta  $t$ , tangente à hipérbole no

ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ , será igual a:

$$m_t = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} m_s$$

Isto é,

$$m_t = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Portanto, a equação da reta  $t$  tangente à hipérbole em  $P_1$  é:

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \quad (3.8)$$

### 3.2.2.3 Propriedade Refletora da Hipérbole

Uma demonstração analítica para a proposição 3.7, seria:

*Demonstração.* Sejam  $\alpha$  o ângulo formado entre segmento  $F_1P_1$  e a reta  $t$ , tangente à elipse em  $P_1$ , e  $\beta$  o ângulo formado entre segmento  $F_2P_1$  e a reta  $t$ . É fácil notar que as inclinações do segmento  $F_1P_1$  e do segmento  $F_2P_1$  são  $\frac{y_1}{x_1 + c}$  e  $\frac{y_1}{x_1 - c}$ , respectivamente.

Segue que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \left| \frac{\frac{b^2x_1}{a^2y_1} - \frac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right) \left(\frac{y_1}{x_1 + c}\right)} \right| = \left| \frac{b^2x_1(x_1 + c) - a^2y_1^2}{a^2y_1(x_1 + c) + b^2x_1y_1} \right| \\ &= \left| \frac{b^2x_1^2 - a^2y_1^2 + b^2x_1c}{x_1y_1(a^2 + b^2) + a^2y_1c} \right| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \left| \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1 - c}\right) \left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)} \right| = \left| \frac{a^2y_1^2 - b^2x_1(x_1 - c)}{a^2y_1(x_1 - c) + b^2x_1y_1} \right| \\ &= \left| \frac{a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + b^2x_1c}{x_1y_1(a^2 + b^2) - a^2y_1c} \right| \end{aligned}$$

Sabe-se que  $c^2 = a^2 + b^2$  e  $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2 + b^2$ . logo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{b^2(a^2 + x_1c)}{y_1c(a^2 + x_1c)} \right| = \left| \frac{b^2}{y_1c} \right|$$

e

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{b^2(-a^2 + x_1c)}{y_1c(-a^2 + x_1c)} \right| = \left| \frac{b^2}{y_1c} \right|$$

Portanto,  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ 

□

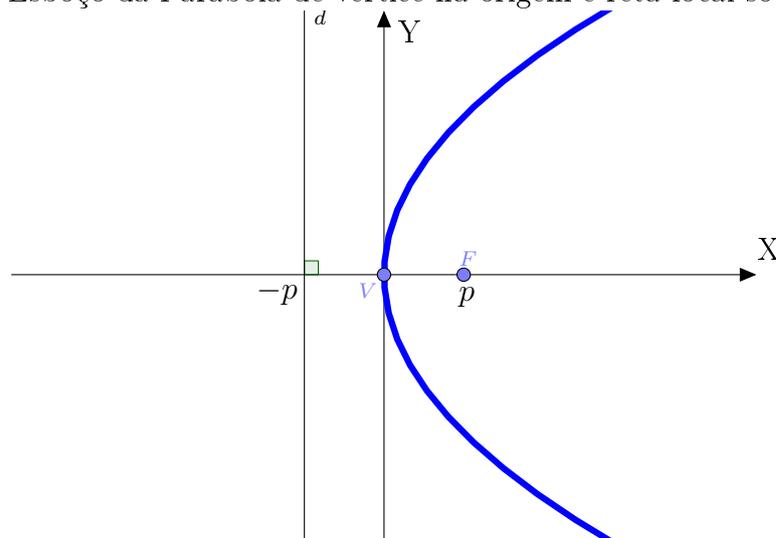
### 3.2.3 Parábola

#### 3.2.3.1 Parábola com vértice na origem e reta focal sobre o eixo $OX$

Existem dois casos de parábolas centradas na origem e com reta focal sobre o eixo  $OX$ : quando o foco  $F$  está **à direita** da reta diretriz  $d$  e quando o foco  $F$  está **à esquerda** da reta diretriz  $d$ . Nos dois casos, a obtenção da forma canônica é semelhante. Considere o caso em que o foco  $F$  está à direita da reta diretriz  $d$ , o vértice, o foco e a equação da reta diretriz são:

$$V = (0, 0) \quad F = (p, 0) \quad x = -p$$

Figura 3.18: Esboço da Parábola de vértice na origem e reta focal sobre o eixo  $OX$



Fonte: Elaborada pelo Autor

Logo,

$$P = (x, y) \text{ pertence à parábola} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

$$\Leftrightarrow -2px + y^2 = 2px$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 4px$$

(3.9)

A equação 3.9 é a forma canônica da parábola de vértice na origem, reta focal sobre o eixo  $OX$  e foco  $F$  à direita da reta diretriz  $d$ .

### 3.2.3.2 Equação da Reta Tangente à Parábola

No casos em que uma reta  $t$  é tangente à hipérbole (de equação 3.9) no vértice, sua equação é obtida de forma trivial. Assim sendo, considere o caso em que esse ponto,  $P_1 = (x_1, y_1)$ , é o vértice; segue que existe outro ponto  $P_2 = (x_2, y_2)$ , que também não é vértice, tal que uma reta secante  $s$  passa por eles.

Sabe-se que a inclinação  $m_s$  da reta  $s$  é dada por:

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ainda,  $P_1$  e  $P_2$  pertencem à parábola de equação 3.9, logo:

$$y_1^2 = 4px_1 \tag{3.10}$$

$$y_2^2 = 4px_2 \tag{3.11}$$

Fazendo a subtração de 3.10 em 3.11, obtém-se:

$$y_2^2 - y_1^2 = 4(px_2 - px_1) \Leftrightarrow (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4p(x_2 - x_1)$$

Isolando  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , obtém-se:

$$m_s = \frac{4p}{y_2 + y_1}$$

que é a inclinação da reta  $s$ . Logo, a inclinação  $m_t$  da reta  $t$ , tangente à parábola no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ , será igual a:

$$m_t = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} m_s$$

Isto é,

$$m_t = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} \frac{4p}{y_2 + y_1} = \frac{4p}{2y_1} = \frac{2p}{y_1}$$

Portanto, a equação da reta  $t$  tangente à parábola em  $P_1$  é:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1) \tag{3.12}$$

### 3.2.3.3 Propriedade Refletora da Parábola

Uma demonstração analítica para a proposição 3.11, seria:

*Demonstração.* Sejam  $\alpha$  o ângulo formado entre segmento  $FP_1$  e a reta  $n$ , normal à elipse em  $P_1$ , e  $\beta$  o ângulo formado entre o diâmetro que contém o ponto  $P_1$  e a reta normal  $n$ . É fácil notar que as inclinações da reta  $n$ , do diâmetro e  $FP_1$  são  $\frac{-y_1}{2p}$ ,  $0$  e  $\frac{y_1}{x_1 - p}$ , respectivamente. Segue que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \left| \frac{-\frac{y_1}{2p} - \frac{y_1}{x_1 - p}}{1 + \left(-\frac{y_1}{2p}\right) \left(\frac{y_1}{x_1 - p}\right)} \right| = \left| \frac{-y_1(x_1 - p) - 2y_1p}{2p(x_1 - p) - y_1^2} \right| \\ &= \left| \frac{-x_1y_1 - y_1p}{2px_1 - 2p^2 - y_1^2} \right| \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{0 + \frac{y_1}{2p}}{1 + (0) \left(\frac{y_1}{2p}\right)} \right| = \left| \frac{y_1}{2p} \right|$$

Sabe-se que  $y_1^2 = 4px_1$ . Logo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{y_1(-x_1 - p)}{2p(-x_1 - p)} \right| = \left| \frac{y_1}{2p} \right|$$

Portanto,  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

□

## 4 A Utilização de Materiais Concretos no Ensino de Matemática

Diante do pouco investimento no processo educacional brasileiro, que reflete na grande desmotivação de professores e na baixa aprendizagem dos alunos, tem-se buscado cada vez mais alternativas de ensino que amenizem a atual insatisfação dos alunos do ensino básico, em especial dos alunos do Ensino Médio da rede pública, que são o público deste estudo.

Esse modelo atual de ensino-aprendizagem requer a valorização do professor, melhorias estruturais da escola e uma nova abordagem didática, que possibilite ao professor e ao aluno a troca de experiências e aprendizagens constantes e evolutivas.

Em se tratando de Matemática, parece que a discussão é ainda maior. É nítida a baixa produtividade que alunos demonstram nas atividades e avaliações nacionais, como nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Essa insuficiência em Matemática é bastante visível quando esses alunos chegam no Ensino Médio, quando se constata que a grande maioria dos discentes não dominam as quatro operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Essas dificuldades de aprendizagens são consequências de vários fatores “endógenos” e “exógenos” os quais o sistema educativo sofre influência, dentre eles: o pouco interesse que os alunos demonstram diante do conteúdo matemático e o pouco significado que os professores dão às aulas. Esses dois fatores, quando vistos de forma isolada, são efeitos de causa e consequência, isto é, o pouco significado do conteúdo mostrado pelo professor gera pouco interesse do aluno.

Nesse sentido, é de fundamental importância que os professores tenham uma formação inicial que lhe apresente o real significado da situação docente e que lhe possibilite o desenvolvimento de recursos ou materiais didáticos para facilitar o processo de ensino

aprendizagem.

Esses ambientes de aprendizagem, na formação inicial do professor, são também realidade em Laboratórios de Ensino de Matemática (LEM), geralmente equipados com materiais concretos para o ensino.

A utilização dos materiais concretos, em sala de aula, deve estar relacionada aos objetivos que se deve alcançar, visto que são recursos que possibilitam ao aluno reconhecer conceitos matemáticos reais, cabendo ao professor mediar e apresentar o material como uma possibilidade a mais para a qual a definição e propriedades são verificadas.

Para Rêgo (2000 apud RODRIGUES; MOREIRA, 2009), o professor precisa ter sensibilidade para desenvolver esse tipo de atividade. Ele precisa estar ciente da metodologia que está utilizando, para que seu trabalho transcorra com mais aproveitamento. Ainda, conforme diz FIORENTINI e MIORIM (1996):

Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um “aprender” mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e porque faz. Muito menos um “aprender” que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo, do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.

Utilizar o material por si só não é garantia de aprendizagem. É importante que o professor enquanto mediador da ação possibilite experiências matemáticas por meio do material concreto, para posteriores abstrações e sistematizações (NOVELLO et. al., 2009).

Assim, o material concreto não é o único recurso e tampouco o mais importante para o entendimento da matemática. Seu uso deve está condicionado à proposta de ensino, visto que são excelentes ferramentas de aprendizagem, mas por si só não garantem o conhecimento (MAGINA; SPINILLO, 2004).

Dessa forma, a utilização de materiais concretos no Ensino de Conceitos Matemáticos, tem como finalidade tornar o aprendizado mais prazeroso, partindo do princípio de que esses recursos facilitam a ação docente e que possibilitam aos alunos retificarem conceitos errôneos ou vagos através da visualização e/ou manipulação. Culminando, assim, com a abstração matemática e associação com o seu cotidiano (BEZERRA, 2009).

A geometria reflete no desenvolvimento intelectual, na capacidade de abstração, generalização e no raciocínio lógico (MURARI, 2009); também possibilita a utilização de vários materiais para o ensino (PEREZ, 1995). Ainda, o estudo da geometria conforme

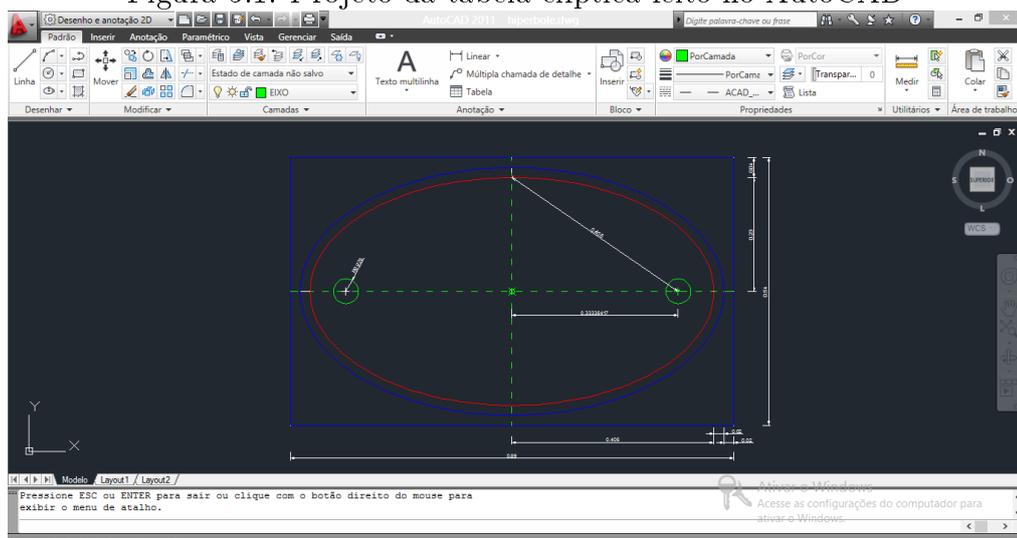
Lemos e Bairral (2010): “possibilita o desenvolvimento de habilidades que permitirão o entendimento das representações geométricas que estão presentes na natureza, nas artes e nas edificações”. Conforme o PCN: “o aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações”.

# 5 Sinucas das Cônicas

## 5.1 A Confecção das Sinucas

Inicialmente, adquiriu-se uma mesa de bilhar infantil que pode ser encontrada em lojas de materiais escolares. De posse da mesa, tirou-se suas medidas e, partir daí, foi elaborado o projeto do encaixe de uma tabela elíptica pelo Software AutoCAD na versão 2010.

Figura 5.1: Projeto da tabela elíptica feito no AutoCAD



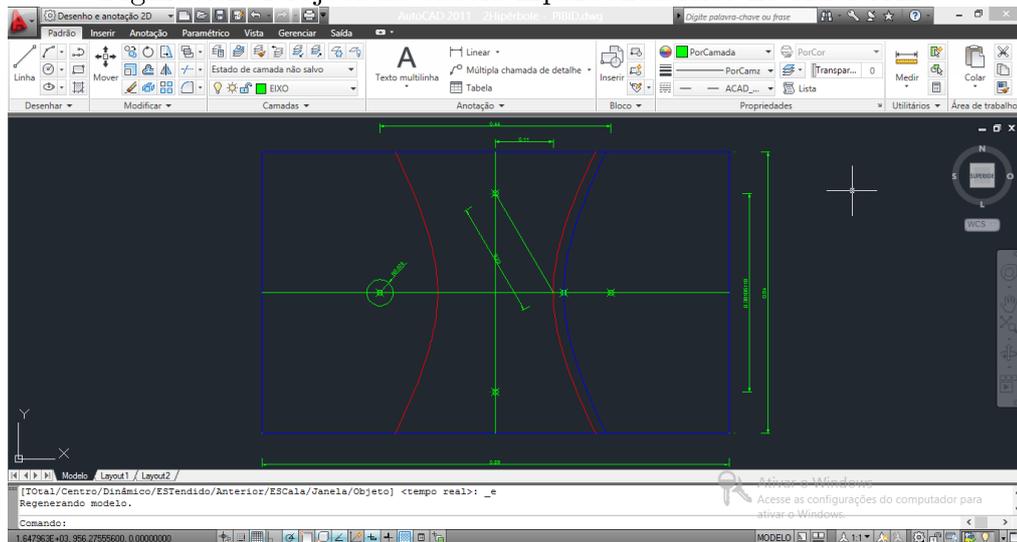
Fonte: Elaborada pelo Autor

Um marceneiro, de posse do projeto impresso, ficou responsável por fazer a curva do projeto na madeira e encaixar a tabela na mesa.

Após alguns testes na Sinuca Elíptica, verificou-se que alguns ajustes deveriam ser realizados, tais como: a borda da tabela deveria ser feita do mesmo material das bordas dos bilhares usuais, a bola deveria tocá-la em uma altura adequada, a maneira de tacar a bola deveria ser apropriada, entre outros. Com todos os ajustes feitos, a Sinuca Elíptica estava apta a ser um recurso de ensino.

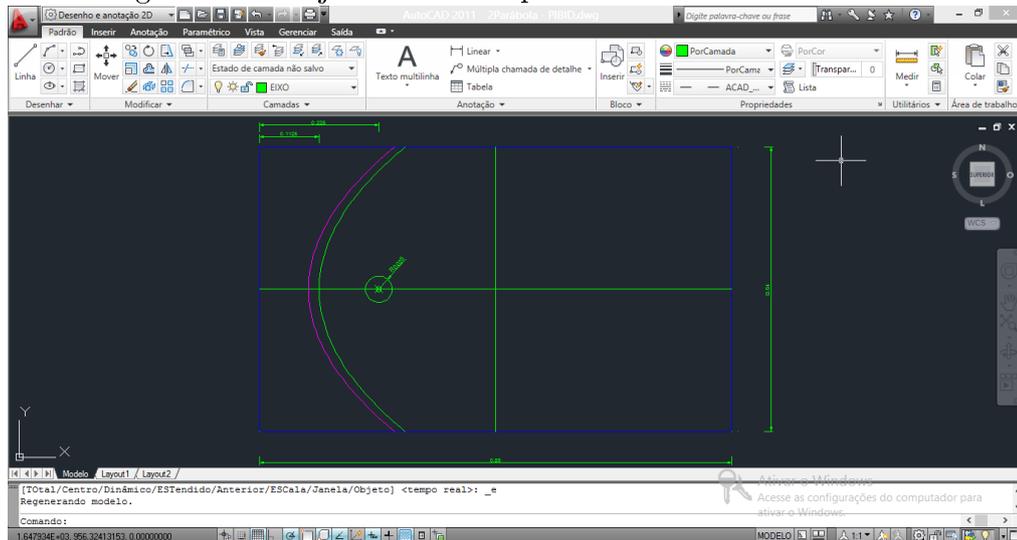
Observou-se que a mesa, a princípio com projeto de tabela idealizado apenas para a elipse, não ficaria adequada para os projetos de tabelas da hipérbole e parábola, pois o foco-caçapa ficou muito próximo da borda. Diante disso, elaborou-se um projeto de foco-caçapa que servisse tanto para a hipérbole quanto para a parábola, mas para isso foi necessária a confeção de outra mesa, feita semelhante à adquirida.

Figura 5.2: Projeto da tabela hiperbólica feito no AutoCAD



Fonte: Elaborada pelo Autor

Figura 5.3: Projeto da tabela parabólica feito no AutoCAD



Fonte: Elaborada pelo Autor

## 5.2 Sinuca Elíptica

A Mesa Sinuca Elíptica possui uma única tabela no formato de uma elipse com uma caçapa no foco  $F_2$  e uma marcação sobre a mesa no outro foco  $F_1$ . Quando uma bola, sobre o foco  $F_1$ , é tacada, sem efeito, em qualquer direção à tabela, a mesma deverá ser refletida pela tabela e cair na caçapa que corresponde ao foco  $F_2$ . Isso acontece, devido à propriedade refletora da elipse.

Figura 5.4: Manipulação do material concreto “Sinuca Elíptica”

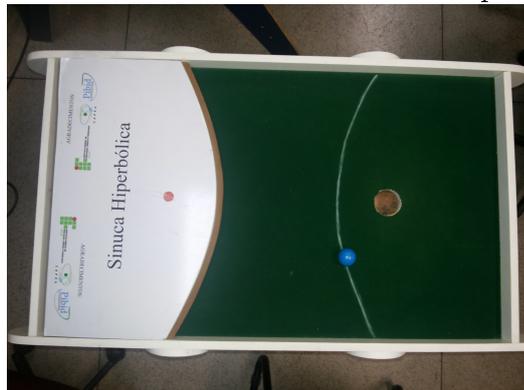


Fonte: Elaborada pelo Autor

## 5.3 Sinuca Hiperbólica

A Mesa Sinuca Hiperbólica possui uma única tabela no formato de um dos ramos da hipérbole, com uma caçapa no foco  $F_1$  e uma marcação sobre a mesa no formato do segundo ramo. Quando uma bola, sobre o ramo marcado na mesa, é tacada, sem efeito, em direção ao foco  $F_1$ , a mesma deverá ser refletida pela tabela e cair na caçapa que corresponde ao foco  $F_2$ . Isso acontece, devido à propriedade refletora da hipérbole.

Figura 5.5: Material concreto “Sinuca Hiperbólica”



Fonte: Elaborada pelo Autor

## 5.4 Sinuca Parabólica

A Mesa Sinuca Parabólica possui uma única tabela no formato de uma parábola com o foco sendo uma caçapa. Quando uma bola é tacada, sem efeito, na direção do diâmetro e sentido da tabela, a mesma deverá ser refletida pela tabela e cair no foco-caçapa. Isso acontece, devido à propriedade refletora que as cônicas possuem, neste caso a parábola.

Figura 5.6: Material concreto “Sinuca Parabólica”



Fonte: Elaborada pelo Autor

## 6 Considerações Finais

É recomendável que docentes destinem mais tempo para o ensino das cônicas nas aulas. Estes não devem se limitar a apresentarem as cônicas como resultado de uma fórmula algébrica. Primeiramente, foi estudado o caráter geométrico; em seguida, desenvolveu-se a matemática e as aplicações que conhecemos atualmente. Portanto, é sugerido que o docente siga a cronologia do desenvolvimento do saber, sempre mostrando as cônicas como um lugar geométrico que satisfazem determinada condição. Além disso, a propriedade reflexiva quase não é comentada nos livros didáticos.

Entende-se que o estudo das cônicas numa perspectiva histórica, geométrica e analítica é pouco explorado nos atuais livros didáticos de matemática. Mais preocupante é que existe o movimento da criação da Base Nacional Comum Curricular (BNC), inclusive para o Ensino Médio que, no texto atual, não faz menção explícita do estudo das cônicas nesse nível de ensino; um possível trabalho do conteúdo poderia ser feito no 2º Ano pelo objetivo geral: “Compreender o conceito de lugar geométrico”. Contudo, o texto dá-se exemplos simples de lugares geométricos e indica o seu não envolvimento, pois se entende que os objetivos nortearão a abordagem do conteúdo.

Ainda na BNC, nos objetivos gerais da parte de “Álgebra e Funções” do 1º Ano, existe o objetivo geral: “Reconhecer função quadrática em suas representações algébrica e gráfica, considerando domínio, imagem, ponto de máximo ou mínimo, intervalos de crescimento e decréscimo, pontos de intersecção com os eixos”. Nele, talvez seja feita menção à parábola, mas a partir do gráfico da função quadrática; logo, será provável que a parábola terá seu conceito associado ao gráfico dessa função. Portanto, é de grande importância que, nesse texto, seja incluído(s) objetivo(s) explícito(s) que aborde(m) o aprendizado das cônicas para conhecimentos posteriores.

Na Física, mais de um objetivo geral do texto da BNC sugere a noção das curvas cônicas no movimento dos planetas do Sistema Solar, por exemplo. Então, é mais um indício de que no mesmo, na parte de matemática, deve conter objetivos claros acerca das cônicas.

Neste trabalho, as cônicas foram estudadas centradas no sistema de eixos ortogonais  $OXY$  e com reta focal sobre o eixo  $OX$ , pois o objetivo principal era apresentar os materiais concretos como recurso didático para o ensino das cônicas no Ensino Médio e orientar para a confecção desses; além disso, os demais casos podem ser estudados de maneira análoga. Não foi abordada a translação, nem a rotação de eixos. Esta, por requerer conhecimentos não estudados no ensino médio nos dias atuais.

Os materiais concretos Sinucas das Cônicas se encontram presentes no Laboratório de Ensino e Modelagem Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - Campus Teresina Central.

# Referências

- [1] BEZERRA, M. C. A. *O Uso de Materiais Concretos para o Ensino/Aprendizagem das operações aritméticas*. Disponível em <<http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/iierem.html>>. Acesso em: 21 jul. 2013.
- [2] BICUDO, M. A.; BORBA, M. C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2009.
- [3] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.
- [4] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação, 2007.
- [5] ——. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: Ministério da Educação, 1997.
- [6] COSTA, G. A. T. F. Algumas propriedades notáveis das cônicas. *Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina*. Florianópolis, n. 5, p.47-55, 2008.
- [7] ——. O Cone e as Cônicas. *Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina*. Florianópolis, n. 4, p.79-87, 2007.
- [8] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [9] FIORENTINI, D.; MIORIM, M A. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática*. Boletim SBEM, São Paulo, v.4, n.7, 1990.
- [10] FRANCISCO-NETO, Q. *Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008. 310 p. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- [11] LEMOS, W. G.; BAIRRAL, M. A. *Poliedros Estrelados no Currículo do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: EDUR, 2010.

- 
- [12] LIMA, E. L. et. al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006, vol. 1, 2 e 3.
- [13] LOPES, J. F. *Cônicas e Aplicações*. Rio Claro: UNESP, 2011. 184 p. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2011.
- [14] MONTEIRO, R. M. *Resgate do Teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o geogebra*. Vitória: UFES, 2014. 57 p. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.
- [15] MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. *Cálculo*. Tradução de André L. Cordeiro. Rio de Janeiro: LTC, 1978.
- [16] MUNIZ-NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar*. Rio de Janeiro: SBM, 2013, vol. 2.
- [17] MURARI, C. *Espelhos, Caleidoscópios, Simetrias, Jogos e Softwares Educacionais no Ensino e Aprendizagem de Geometria*. In: *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2009. p. 198-212.
- [18] PEREZ, Geraldo. A Realidade sobre o Ensino de Geometria no 1º. e 2º. graus no Estado de São Paulo. *A Educação Matemática em Revista - SBEM*. São Paulo, n. 4, 1º sem. 1995.
- [19] RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. *Matemáticaativa*. João Pessoa-PB: EdUFPB, 2000.
- [20] RODRIGUES, A. G.; RODRIGUES, M. C.; MARQUES, G. A. *O uso de materiais concretos como estratégia facilitadora para o ensino da Matemática*. Disponível em: <<http://matconcretos1.blogspot.com.br/2009/10/o-uso-de-materiais-concretos-como.html>>. Acesso em: 21 jul. 2013.
- [21] ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [22] SANT'ANNA et. al. *Conexões com a Física*. São Paulo: Moderna, 2010.
- [23] SOUSA, L. D. *Cônicas e suas propriedades notáveis*. Florianópolis: UFSC, 2014. 66 p. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.