

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MÁSCARAS DE TUTORIA

LEONARDO CLAUDIANO PAES BARRETO

CRUZ DAS ALMAS
2016

LEONARDO CLAUDIANO PAES BARRETO

MÁSCARAS DE TUTORIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Juarez dos Santos Azevedo

Cruz das Almas

2016

FICHA CATALOGRÁFICA

B273r	<p>Barreto, Leonardo Claudiano Paes. Máscaras de tutoria / Leonardo Claudiano Paes Barreto. – Cruz das Almas, BA, 2016. 137f.; il.</p> <p>Orientador: Juarez dos Santos Azevedo.</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.</p> <p>1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Algoritmos – Análise combinatória. 3. Resolução de Problemas – Avaliação. I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II. Título.</p>
CDD: 519.1	

MÁSCARAS DE TUTORIA

LEONARDO CLAUDIANO PAES BARRETO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Orientador: Juarez dos Santos Azevedo

Prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo (UFRB)

Membro: Genilson Ribeiro de Melo

Prof. Dr. Genilson Ribeiro de Melo (UFRB)

Membro: Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires

Profa. Dra. Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires (UEFS)

Cruz das Almas, 07 de Abril de 2016.

*À minha família, Anemarríe, Monalisa, Nelinilda e Núbia e a todos os meus alunos:
atuais, pregressos e vindouros.*

Agradecimentos

A Deus: Romanos 8:28.

Às minhas filhas, Anemarrrie e Monalisa que, diante da enorme dificuldade em ajudá-las nas atividades escolares por conta dos meus compromissos profissionais, me inspiraram para criar a proposta em pauta.

À minha estimada esposa Núbria, pela compreensão e apoio.

À minha querida Mãe, Nelinilda, por me mostrar o poder da fé.

Ao meu orientador, Prof^o Dr. Juarez dos Santos Azevedo, que, com grande dedicação, pavimentou o caminho para que chegássemos à conclusão desta dissertação.

Ao devotado corpo docente da UFRB que, da graduação ao mestrado, foram imprescindíveis para minha formação. Sendo que, na elaboração deste trabalho, nomeadamente, agradeço ao Prof^o Dr. Eleazar Madriz, pelo incentivo e apoio; ao prof^o Dr. Juarez Azevedo, por compartilhar seu conhecimento e pela orientação e ao prof^o Me. Paulo Nascimento, pelas dicas a respeito do \LaTeX .

À Profa. Dra. Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires, cujo cabedal de observações e opiniões, diga-se de passagem, assaz pertinentes, contribuíram conjuntamente para o aprimoramento desta dissertação.

Aos idealizadores do Profmat, por darem uma oportunidade que, enquanto outrora era quase impossível, hoje, um professor de escola pública pode ter a chance de ter seu título de mestre.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Aos colegas de turma, em especial, Josias e Márcio, pela amizade e companheirismo durante todo o curso.

Ao colega de ofício e de mestrado, Alessandro, pelas dicas sobre o editor *Texstudio*.

Aos membros da banca examinadora pelas valiosas correções, sugestões e críticas.

E aos meus alunos e ex-alunos, pelos numerosos momentos de aprendizagem mútua.

(Leonardo Claudiano Paes Barreto)

“Se você quer saber o que representa a escola no futuro de uma criança, use o polegar para servir de assinatura.” (João dos Santos Neto, à época da frase , com 33 anos de idade e cursando a 7ª série.)

Resumo

O objetivo do presente trabalho é de defender o uso de um recurso pedagógico que consiste em um conjunto de cartões dotados de rasgos que permitam a sobreposição dos mesmos à algoritmos ou situações-problema. Tais cartões, da maneira como foram concebidos, funcionam como máscaras dotadas de instruções impressas que simulam as orientações de um tutor sendo, inclusive, este o motivo pelo qual a aludida proposta foi batizada de “Máscaras de Tutoria”. Tal recurso pedagógico ajuda na organização, na manutenção do foco, na inferência e no delineamento de estratégias de resolução de situações-problema e algoritmos por quem faz uso. Outrossim, o trabalho aqui apresentado ilustra como o recurso pode ser usado para delinear estratégias de resoluções de situações-problema em Análise Combinatória, particularmente em Teoria da Contagem.

Palavras-chave: Algoritmos, Análise Combinatória, Máscaras de Tutoria, Teoria da Contagem.

Abstract

The aim of this dissertation is to defend the use of a pedagogical resource that consists of a set of cards provided with cut openings which allow it to be overlapped onto algorithms or situational problems. These cards, as per design, work as masks with printed instructions that simulate the guidance of an instructor, reason for which the mentioned resource has been called "Mentoring Masks". This resource can assist an organization in maintaining focus, developing inference and outlining strategies for solving situational problems and in developing algorithms. Furthermore, this dissertation shows how such resource can be used to outline resolution strategies for problems in Combinatorial Analysis, particularly Counting Theory.

Keywords: Algorithms, Combinatorial Analysis, Counting theory, Mentoring Masks.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Mapa Conceitual do tipo Hierárquico	23
Figura 2 – Mapa conceitual do tipo Teia de Aranha.	26
Figura 3 – Mapa conceitual do tipo Fluxograma	27
Figura 4 – Tipo sistema: entrada e saída.	28
Figura 5 – Mapa conceitual do tipo organograma.	30
Figura 6 – Mapa conceitual do tipo organograma (Neste caso, chamado de heredograma).	30
Figura 7 – Diagrama de árvore mostrando os resultados possíveis para equipe campeã no sistema "melhor de três".	39
Figura 8 – Se considerarmos a sequência horária começando por A, vemos que as três disposições representam uma única sequência.	41
Figura 9 – P_1, P_2, \dots, P_n indicam as posições dos objetos ao redor do círculo.	49
Figura 10 – Triângulo de Pascal	54
Figura 11 – Mapa conceitual envolvendo o PFC.	78
Figura 12 – Aplicação do mapa conceitual na turma experimental.	79
Figura 13 – Mapa conceitual simplificado produzido por um aluno para facilitar a resolução de um exercício.	79
Figura 14 – Mapa conceitual envolvendo combinação simples.	80
Figura 15 – forma em que se apresenta o conjunto de cartões que constituem as Máscaras de Tutoria.	82
Figura 16 – Instruções.	83
Figura 17 – Sobreposição da Máscara sobre o algoritmo. No caso, estamos representando a divisão de 0,4 por 8.	83
Figura 18 – Observe o tratamento dado ao algoritmo de modo a facilitar o cálculo.	84
Figura 19 – À medida que as perguntas impressas são respondidas, o algoritmo vai sendo desenvolvido.	84

Figura 20 – Observe que a Máscara ajuda o usuário a manter o foco no algoritmo por fazer com que, ele, seja forçado a se concentrar nos detalhes do algoritmo. No caso em questão, deve-se concentrar no divisor.	85
Figura 21 – As instruções são elaboradas de modo que as respostas sejam do tipo sim/não.	85
Figura 22 – Cada pormenor é tratado individualmente.	86
Figura 23 – Exemplos deixam claro o desenvolvimento do algoritmo.	86
Figura 24 – Observe que o tamanho e disposição dos rasgos variam com o desenvolvimento do algoritmo.	87
Figura 25 – A Máscara proporciona uma certa organização no desenvolvimento do algoritmo graças à disposição de seus rasgos.	87
Figura 26 – Há o cuidado, em cada etapa, de abranger todo tipo de situações envolvendo o desenvolvimento do algoritmo da divisão.	88
Figura 27 – A Máscara permite que se trate o resultado a cada momento de modo que se infira quando o desenvolvimento do algoritmo chegou ao fim.	88
Figura 28 – Aspecto dos dois conjuntos/blocos de Máscaras. À esquerda temos o conjunto/bloco denominado “menu/procedimentos” e, à direita, temos o conjunto/bloco estratégias.	90
Figura 29 – “Menu/Procedimentos”: observe o rol de ícones representando as estratégias (nas três linhas horizontais) e procedimentos (no fluxograma vertical).	91
Figura 30 – “Menu/Procedimentos”: à medida que se sobrepõe cada “máscara” à situação problema, há uma sequência procedimental a ser seguida.	91
Figura 31 – Cada sequência procedimental é destacada por uma cor de fonte que se relaciona com o “menu” através de uma cor idêntica na borda que contém os ícones.	92
Figura 32 – A estratégia de resolução é lembrada a cada momento.	92
Figura 33 – Cada procedimento é dividido segundo Lima(2006b) em “postura”, “divisão” e “não adiar dificuldades”.	93
Figura 34 – A interseção das cores no “menu”, de acordo com o fluxograma procedimental, leva à estratégia a ser adotada no problema.	93
Figura 35 – “Estratégia: Recortar em fila de grupos (parte 1/2)”.	98
Figura 36 – “Estratégia: Recortar em fila de grupos (parte 2/2)”.	98
Figura 37 – “Estratégia: Deletar elementos (parte 1/2)”.	99
Figura 38 – “Estratégia: Deletar elementos (parte 2/2)”.	99
Figura 39 – “Estratégias: Contar a mais”.	100
Figura 40 – “Estratégia: Anexar elemento (parte 1/2)”.	100
Figura 41 – “Estratégia: Anexar elemento (parte 2/2)”.	101
Figura 42 – “Estratégia: Juntar em ordem fixa”.	101

Figura 43 – “Estratégias: Excluir elemento”.	102
Figura 44 – “Estratégia: Evento complementar”.	102
Figura 45 – “Estratégia: Fixar elemento”.	103
Figura 46 – “Estratégia: Juntar em qualquer ordem”.	103
Figura 47 – “Estratégia: Recortar em conjunto de grupos (parte 1/2)”.	104
Figura 48 – “Estratégia: Recortar em conjunto de grupos (parte 2/2)”.	104
Figura 49 – “Estratégia: Somar colunas do triângulo de Pascal ”.	105
Figura 50 – “Estratégia: Somar subconjuntos de um conjunto”.	105
Figura 51 – Detalhe da Figura 29.	113
Figura 52 – Detalhe da Figura 30.	114
Figura 53 – Detalhe da Figura 31.	115
Figura 54 – Detalhe da Figura 32.	116
Figura 55 – Detalhe da Figura 33.	117
Figura 56 – Detalhe da Figura 34.	118
Figura 57 – Detalhe da Figura 35.	119
Figura 58 – Detalhe da Figura 36.	120
Figura 59 – Detalhe da Figura 37.	121
Figura 60 – Detalhe da Figura 38.	122
Figura 61 – Detalhe da Figura 39.	123
Figura 62 – Detalhe da Figura 40.	124
Figura 63 – Detalhe da Figura 41.	125
Figura 64 – Detalhe da Figura 42.	126
Figura 65 – Detalhe da Figura 43.	127
Figura 66 – Detalhe da Figura 44.	128
Figura 67 – Detalhe da Figura 45.	129
Figura 68 – Detalhe da Figura 46.	130
Figura 69 – Detalhe da Figura 47.	131
Figura 70 – Detalhe da Figura 48.	132
Figura 71 – Detalhe da Figura 49.	133
Figura 72 – Detalhe da Figura 50.	134
Figura 73 – Máscara que não foi necessária no desenvolvimento da divisão de 0,4 por 8.	136
Figura 74 – Máscara que não foi necessária no desenvolvimento da divisão de 0,4 por 8.	137

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	NOÇÕES GERAIS SOBRE MAPAS CONCEITUAIS	18
2.1	Breve contextualização histórica.	18
2.2	Mapas Conceituais: o que são, quais os tipos e características	22
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE ANÁLISE COMBINATÓ- RIA (PARTE I)	31
3.1	Os quatro princípios básicos da Contagem	31
3.2	Estratégias decorrentes da aplicação dos princípios básicos da Con- tagem	42
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE ANÁLISE COMBINATÓ- RIA (PARTE II)	64
4.1	Heurística sugerida por diversos autores para resolução de proble- mas matemáticos (dos mais gerais aos específicos de Contagem) . .	64
4.2	Breve relato: uma experiência de emprego de Mapas Conceituais no ensino de Análise Combinatória	71
5	MÁSCARAS DE TUTORIA	81
5.1	O que são e para que servem?	81
5.2	Descrição detalhada das Máscaras destinadas à Problemas de con- tagem	94
5.3	Por que utilizar as Máscaras de Tutoria na Educação Básica?	96

6	CONCLUSÃO	106
	REFERÊNCIAS	107
	Referências	107
	APÊNDICES	111
APÊNDICE A	- DETALHES DAS FIGURAS	112
APÊNDICE B	- MÁSCARAS OMITIDAS (ALGORITMO DA DIVI- SÃO)	135

Introdução

Ao se conceber uma proposta metodológica para o ensino de matemática, faz-se mister perguntar-se a quem tal proposta é dirigida. Como a sociedade (em termos de valores, ideologias e comportamentos) é mutável ao longo dos anos, não faz sentido que uma metodologia de ensino consagrada para determinada geração seja utilizada em outra e que se espere os mesmos, ou melhores, resultados. Atualmente, os professores estão se deparando com o que os sociólogos classificam como a *Geração Z* (geração de pessoas nascidas no final da década de 90 até o presente). Tal classificação, faz alusão ao termo inglês *zapping* cujo correspondente em Português é o neologismo “zapear” que significa o ato de mudar constantemente os canais da televisão. Ainda segundo os sociólogos, salvo exceções, algumas características comuns da juventude desta geração, segundo Siqueira, Albuquerque e Magalhães (2012), são de serem fazedores de tarefas múltiplas, isto é, os jovens são capazes, por exemplo, de assistir televisão ao mesmo tempo em que enviam mensagens pelo *smartphone* ou fazem outra atividade. Além disso, tais jovens mudam constantemente de um canal para outro da televisão e dificilmente assistem um filme ou um programa do início ao fim, ou seja, eles têm dificuldade em manter o foco em determinada atividade. Outra característica é que esses jovens estão acostumados a obterem o que querem sem muito esforço e de forma quase que imediata, esta última se devendo em muito ao advento da internet. Destarte, não é de se espantar a queixa atual, quase que generalizada, de professores que afirmam que seus alunos apresentam pensamento fragmentado, pouco reflexivo e muito superficial. Isto é mais notório quando em avaliações se é exigido questões dissertativas cujas respostas são, muitas vezes, evasivas e/ou sem foco na pergunta ou mesmo quando no desenvolvimento de equações o aluno ignora completamente etapas e/ou sinais de operações, por exemplo.

Em virtude dos desafios a serem superados ao se lidar com as dificuldades no ensino direcionado às novas gerações de estudantes, foram propostos diversos métodos e teorias cujas pretensões eram de se coadunarem com as necessidades e peculiaridades de cada estudante de forma que a aprendizagem fosse eficaz. Uma dessas teorias, que

será também objeto de estudo deste trabalho, é o dos mapas conceituais desenvolvida pelo professor e pesquisador estadunidense *Joseph Donald Novak* da *Cornell University* baseado na teoria da aprendizagem significativa do psicólogo e também estadunidense *David Paul Ausubel* (vide Novak e Gowin (1984)). Tal teoria será abordada à luz da dissertação de Lima (2011) e, também, à luz de nossa própria práxis pedagógica. Além disso, o presente trabalho visa mostrar que, conquanto haja a facilitação da compreensão global de conteúdos através de mapas conceituais, estes, por si só não são tão eficazes para ajudar no delineamento de estratégias de resolução de situações-problema específicas como será visto. Assim, a proposta deste trabalho é de defender a utilização de um recurso pedagógico auxiliar ao dos mapas conceituais que poderia ser usado em conjugação ou em substituição ao mesmo. O referido recurso se baseia na maiêutica socrática para simular a intervenção de um tutor no ensino de algoritmos e na modelagem de situações-problema. Com isso, espera-se que o estudante que faz uso desse recurso mantenha o foco no algoritmo e/ou situação-problema abordada de modo a resolvê-la eficientemente. Por outro lado, o recurso pedagógico proposto não visa deixar o estudante refém do mesmo, mas, pelo contrário, visa que o estudante se aproprie de esquemas mentais que proporcionem uma maior independência na resolução de situações-problemas e algoritmos.

À título de ilustração, foi escolhido o algoritmo da divisão para demonstrar a utilização das Máscaras de Tutoria no desenvolvimento de algoritmos. Essa escolha se justifica pelo fato de que segundo dados do Inep (PROVA BRASIL, 2013, apud MERITT; FUNDAÇÃO LEMANN, 2015) cerca de quarenta por cento dos alunos que chegam ao ensino médio, oriundos de escolas municipais no Brasil como um todo, têm proficiência insuficiente em matemática. Ou seja, tais alunos não dominam sequer algoritmos como o da divisão. Desta forma, esses alunos devem ter um acompanhamento diferenciado de modo que possam, ao menos, dominar algoritmos básicos de operações aritméticas. Como será explanado, as Máscaras de Tutoria permitem que o desenvolvimento de algoritmos seja factível mesmo sem a intervenção de um professor ou tutor.

Quanto à modelagem de situações-problema, foi escolhido a análise combinatória, particularmente as técnicas de contagem, para exemplificar o uso das Máscaras de Tutoria no delineamento de estratégias de resolução. Tal escolha se deve ao fato de que a análise combinatória é um dos assuntos do ensino médio que mais suscita dúvidas e o que é mais passível à erros de estratégias de resolução. O ensino através da memorização de fórmulas tem se mostrado pouco profícuo, sendo este o motivo pelo qual se buscam métodos e técnicas que possam interferir positivamente na didática deste assunto. As Máscaras de Tutoria permitem que através de uma postura maiêutica se infira a modelagem adequada a ser dada ao problema de contagem de modo que seja possível encontrar sua solução.

Portanto, a dissertação em pauta tem por finalidade mostrar que a adoção das Máscaras de Tutoria se constitui em um relevante instrumento didático concebido em consonância com as necessidades e peculiaridades dos estudantes da denominada *Geração Z* e, ao mesmo tempo, inova ao reunir atributos que fazem com que o recurso em questão represente um avanço no estado da técnica. Outrossim, esta dissertação, por ser um dos requisitos para a conclusão do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), está de acordo com o regimento do referido programa, mais especificamente em relação ao capítulo VII, artigo 23, a saber: “A Dissertação de Mestrado versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula”. O que, como poderá ser percebido, é o caso neste trabalho.

O trabalho é dividido como segue: o **Capítulo 1** trata-se da presente introdução; o **Capítulo 2**, noções gerais sobre Mapas Conceituais, consta de duas seções, a primeira, refere-se a uma breve contextualização histórica acerca do surgimento da Teoria dos Mapas Conceituais, a segunda, faz alusão à alguns dos principais conceitos, definições e classificação em tipos, para melhor entendimento dos Mapas Conceituais; o **Capítulo 3**, fundamentação teórica sobre Análise Combinatória (parte I): principais assertivas (Lemas, Teoremas e Corolários) envolvendo Contagem, consta de duas seções, a primeira aborda os quatro princípios básicos da Análise Combinatória (a ênfase em quatro e não em dois, como normalmente é na literatura, foi feita propositadamente como será vista), a segunda, trata das estratégias decorrentes da aplicação dos princípios básicos da contagem; o **Capítulo 4**, fundamentação teórica sobre Análise Combinatória (parte II): alusão à habilidade para resolução de problemas, consta de duas seções, a primeira enfatiza a heurística sugerida por diversos autores para resolução de problemas matemáticos (dos mais gerais aos específicos de Contagem) e, a segunda, faz um breve relato de uma experiência de emprego de mapas conceituais no ensino de Análise Combinatória (onde, também, são feitas considerações sobre esse experimento à luz da literatura); o **Capítulo 5** consta de três seções, a primeira, esclarece o que são e para o que servem as Máscaras de Tutoria onde é ilustrado o uso do recurso defendido na resolução do algoritmo da divisão, a segunda, refere-se à descrição detalhada do uso das Máscaras de Tutoria para a resolução de problemas de Contagem em Análise Combinatória, a terceira, traz a discussão do porquê se utilizar as Máscaras de Tutoria na Educação Básica e qual a contribuição para o avanço do estado da técnica é proporcionado por elas. Concluiremos a presente dissertação demonstrando a factibilidade, aplicabilidade e avanço em relação ao estado da arte com a adoção do recurso pedagógico aqui defendido. E, conjuntamente, acrescentamos os apêndices para detalhamento de figuras essenciais no contexto dessa dissertação.

Noções gerais sobre Mapas Conceituais

NESTE capítulo são expostos uma breve contextualização histórica acerca da origem da Teoria dos Mapas Conceituais, além de conceitos, definições e classificações relevantes no estudo de tal Teoria. Para maiores detalhes vide (LIMA, 2011), (MOREIRA, 1997, 2000, 2005, 2011) e (TAVARES, 2007).

2.1 Breve contextualização histórica.

A teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget trata da forma pela qual o ser humano, em quaisquer etapas da vida, constrói o conhecimento. Piaget concebia o desenvolvimento cognitivo como sendo em estágios que, progressivamente, se reorganizavam até chegar à maturação e, daí, segundo as próprias palavras de Piaget (2005, p.13), “[...] concluída a evolução ascendente, começa, logo em seguida, automaticamente uma evolução regressiva que conduz à velhice”. Ainda segundo Piaget (2005), o desenvolvimento de tais estágios era fruto de fatores biológicos e da interação do indivíduo com o ambiente em que vive. Com o fito de mostrar como as estruturas do pensamento mudam tanto qualitativa quanto quantitativamente, Piaget cunhou os termos: esquemas mentais, assimilação, acomodação e equilíbrio. O primeiro, refere-se, de acordo com as palavras de Wadsworth (1996, p.7), às “[...] estruturas mentais, ou cognitivas, pelas quais os indivíduos intelectualmente se adaptam e organizam o meio”. Quanto ao segundo, de acordo com Berger (2003), consiste na maneira pela qual os indivíduos identificam e se adaptam às novas informações. Em outras palavras, é o processo de acomodação da nova informação aos esquemas mentais preexistentes. Já o terceiro:

O mundo interno do indivíduo tem de se acomodar aos elementos com os quais ele é confrontado e, assim, adaptar-se a ele, o que pode ser um processo difícil e doloroso. Numa analogia com banco de dados, é como o que acontece quando você tenta colocar informações que não se encaixam nos campos e categorias preexistentes. Você tem que desenvolver novos campos e categorias para acomodar as novas informações. (ATHERTON, 2013, p.1, tradução nossa)

Por fim, Piaget (2005) chamou o balanço entre assimilação e acomodação de equilíbrio. Assim, o sujeito constrói o conhecimento quando, a partir da interação com o ambiente, novas informações se ajustam ou entram em conflito com esquemas mentais preexistentes provocando, respectivamente, os processos de assimilação e acomodação, este último, ensejando o desequilíbrio dos esquemas preexistentes que, por sua vez, são substituídos por outros esquemas mais adequados à nova informação. Inspirada na teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget, surge a linha pedagógica construtivista que, em linhas gerais:

[...]tem diversas vertentes, mas todas concordam em considerar a aprendizagem como um processo no qual o aprendiz relaciona a informação que lhe é apresentada com o seu conhecimento prévio sobre esse tema.(TAVARES, 2007, p.72)

Desta forma, ao se considerar o aprendiz como sujeito ativo da própria aprendizagem, o construtivismo inaugura a meta-aprendizagem, isto é, o ato de aprender a aprender. Aliás, a meta-aprendizagem é um conceito tão fundamental, que foi considerado um dos quatro pilares da educação, segundo relatório para UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI. Por outro lado, essa relação que o sujeito faz entre informação apresentada e conhecimento prévio é feita de maneira idiossincrásica. Isso é melhor ilustrado por Tavares (2007, p.73):

A construção do conceito sobre um objeto de uso corriqueiro, como cadeira, tem características comuns a todos nós, tais como a sua forma e funcionalidade. Mas existe algo de específico na maneira que cada um de nós vê uma cadeira, que reflete a forma idiossincrática que construímos esse conceito.

Em razão disso, numa proposta pedagógica construtivista, faz-se necessário que o professor conheça a forma pela qual o aprendiz se apropria do conhecimento para que, se for o caso, ulteriormente intervenha nesse processo de aprendizagem. Como ressalta Ausubel et al. (1980, apud TAVARES, 2007, p.73): “O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece.

Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos.” Seguindo a linha construtivista e com nítida influência da Teoria do Desenvolvimento cognitivo de Piaget, o psicólogo estadunidense David Paul Ausubel formula, na década de 60, a sua Teoria da Aprendizagem Significativa. Conforme Aragão (1976, apud LIMA, 2011, p.2), “a aprendizagem significativa é a aquisição, retenção e organização de significados na estrutura cognitiva”. Ou, mais especificamente:

Aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer idéia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.(MOREIRA, 2000, p.5)

Depreendendo-se destas definições a aludida influencia piagetiana na teoria da Aprendizagem Significativa, Moreira (2011, p.2) ainda acrescenta:

A este conhecimento, especificamente relevante à nova aprendizagem, o qual pode ser, por exemplo, um símbolo já significativo, um conceito, uma proposição, um modelo mental, uma imagem, David Ausubel (1918-2008) chamava de subsunçor ou idéia-âncora.

Assim, para Ausubel, numa situação de Aprendizagem Significativa, as novas informações a serem adquiridas deveriam se relacionar com o conhecimento prévio (subsunçor ou idéia-âncora) do aprendiz. Caso contrário, a aprendizagem passaria a ser chamada de Memorística. A fim de demonstrar a maneira pela qual pode-se proporcionar uma facilitação da Aprendizagem Significativa, Ausubel definiu quatro princípios programáticos dos conteúdos curriculares, a saber: princípios da diferenciação progressiva, da reconciliação integrativa, da organização sequencial e da consolidação. O primeiro, refere-se à forma de aprendizagem em que os conteúdos são apresentados em uma determinada ordem, começando com os mais gerais e inclusivos para que, gradualmente, sejam diferenciados aos conteúdos mais específicos e menos inclusivos. Quanto ao segundo princípio, Tavares (2007, p.74) resume assim: "Na reconciliação integrativa um determinado conceito é relacionado a outro aparentemente díspar." Já o terceiro princípio, Moreira (2000, p.6) enfatiza que:

[...] organização sequencial dos conteúdos programáticos, consiste em sequenciar os tópicos, ou unidades de estudo, de maneira tão coerente quanto possível (atendendo aos princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa) com as relações de dependência naturalmente existentes na matéria de ensino.

Finalmente, o princípio da consolidação é definido por Lima (2011, p.36) como segue: “[...] trata-se de insistir no domínio do conteúdo em que o aluno já sabe para promover o aprendizado, utilizando da aprendizagem sequencialmente organizada”. A execução dos princípios suprarreferidos, em sala de aula, se dá, segundo Praia (2000), de duas maneiras: substantivamente e programaticamente. Lima (2011) explica que, substantivamente porque:

Primeiro deve-se substantivar, usando os conceitos e proposições unificadoras do conteúdo, pois esses têm o poder explicativo, inclusivo e generalizado do assunto. É importante selecionar ideias básicas para não sobrecarregar o aluno com o que não é importante e não lhe prejudicar na aquisição de uma estrutura cognitiva adequada. (LIMA, 2011, p.37)

A mesma autora ainda esclarece que deve ser progressivamente, pois:

Depois que selecionar o conteúdo unificador, deve-se programar a matéria em estudo, identificando os conceitos e sua relação hierárquica, para depois sequenciar os conteúdos em ordem decrescente de inclusividade, utilizando das dependências sequenciais naturalmente existentes entre os tópicos. (LIMA, 2011, p.37)

E, conquanto Ausubel tenha embasado sua teoria em diversos princípios como foram mencionados acima, segundo Ausubel et al. (1980, apud TAVARES, 2007, p.73):

[...] se tivesse que reduzir toda a Psicologia Educacional a um único princípio, diria isto: “O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos.”

No início da década de 70, Apoiado pelos princípios ausubelianos e pela recém-criada ciência cognitivista, *Joseph David Novak* e sua equipe da *Cornell University* desenvolveram a técnica dos mapas conceituais como uma ferramenta para o estudo da cognição. A partir daí, favorecida pela linha pedagógica construtivista, a técnica dos mapas conceituais começou a ser utilizada como instrumento pedagógico.

2.2 Mapas Conceituais: o que são, quais os tipos e características

Segundo Lima (2011, p.40): “O processo de construção de mapas conceituais permite a exteriorização do conhecimento através da representação visual que cada indivíduo elabora. Está estruturado em: conceitos, palavras de ligações e proposições.” A mesma autora ainda acrescenta:

Os conceitos (geralmente substantivos), segundo Novak e Gowin (1984), a partir da perspectiva do indivíduo, são as imagens mentais que provocam em nós as palavras ou signos com os quais expressamos regularidades. Nossos conceitos não são exatamente iguais, ainda que utilizemos as mesmas palavras. Assim um mapa conceitual nunca é igual a outro, pois os conceitos vão exprimir significados de nossa própria experiência, tornando-se idiossincrático. (LIMA, 2011, p.40)

Desta forma, quando um aluno constrói um mapa conceitual a respeito de determinado conhecimento específico, ele deixa visível a maneira pela qual compreende aquele conhecimento específico dentro de um panorama cognitivo mais amplo e pessoal. Conseqüentemente, o professor, uma vez sabedor desse panorama cognitivo por meio dos mapas conceituais, pode intervir positivamente no processo de aprendizagem. Mas não só o professor, como o próprio aluno pode ter ciência das lacunas de sua própria aprendizagem por meio de seu mapa. E, o aluno uma vez ciente, pode buscar meios para corrigir essas lacunas o que, nesta última situação, é chamada de meta-aprendizagem. Lima (2011) esclarece que uma das principais características que diferenciam os mapas conceituais das outras representações esquemáticas (resumos, organogramas, mapas mentais, fluxogramas, etc.) é o uso de proposições. A designação proposição refere-se, ainda conforme Lima (2011, p.41), à:

[...] unidade semântica formada pela união entre conceitos e, através dela se determina algo ou a ideia que se tem do conceito, ampliando a simples denominação conceitual. Pode ser representado assim:
Conceito + palavra de ligação + conceito = proposição.

Além disso, a relação entre os conceitos deve ser feita na forma hierárquica, isto é os conceitos mais gerais e inclusivos, que aqui chamaremos de conceitos-pai, encontram-se superiormente ao mapa, enquanto os conceitos mais específicos (pouco abrangentes), que aqui chamaremos de conceitos-filho, apresentam-se inferiormente ao mapa. Ao ato de se hierarquizar progressivamente os conceitos-pai (ideias âncoras) em conceitos-filho, denomina-se diferenciação progressiva sendo, portanto, um dos

Por outro lado, Moreira (1997, p.1) esclarece, se referindo aos mapas conceituais como diagramas:

Embora normalmente tenham uma organização hierárquica e, muitas vezes, incluam setas, tais diagramas não devem ser confundidos com organogramas ou diagramas de fluxo, pois não implicam sequência, temporalidade ou direcionalidade, nem hierarquias organizacionais ou de poder. Mapas conceituais são diagramas de significados, de relações significativas; de hierarquias conceituais, se for o caso. Isso também os diferencia das redes semânticas que não necessariamente se organizam por níveis hierárquicos e não obrigatoriamente incluem apenas conceito.

Moreira (2005, p.1) ainda acrescenta:

Mapas conceituais também não devem ser confundidos com mapas mentais que são livres, associacionistas, não se ocupam de relações entre conceitos, incluem coisas que não são conceitos e não estão organizados hierarquicamente. Não devem, igualmente, ser confundidos com quadros sinópticos que são diagramas classificatórios. Mapas conceituais não buscam classificar conceitos, mas sim relacioná-los e hierarquizá-los.

O próprio Tavares (2007, p.75) anui: “No entanto, o único tipo de mapa que explicitamente utiliza uma teoria cognitiva em sua elaboração é o mapa hierárquico do tipo proposto por Novak e Gowin (1999).” E, conquanto haja essa divergência na classificação dos tipos de diagramas cognitivos, neste trabalho iremos elencar os outros diagramas cognitivos como sendo tipos de mapas conceituais como apresentado por Tavares (2007), em razão da simplificação conceitual.

Definição 2.1. *Mapa conceitual do tipo teia de aranha (Figura 2). Também conhecido como mapa mental, tal conceito foi concebido pelo escritor inglês Tony Buzan com a publicação do livro “Use your head”, em 1972. Segundo Buzan (1982), um mapa mental é organizado associando-se todas as ideias (conceitos e/ou imagens) relacionadas com uma ideia (conceito e/ou imagem) central.*

Fica evidente, portanto, que há algumas diferenças de ordem conceitual entre os mapas mentais e os mapas conceituais hierárquicos tais como concebidos por Novak e Gowin (1984). A primeira é que nos mapas mentais há o encorajamento do uso

de imagens como conceitos, ao passo que nos mapas conceituais se encoraja o uso de substantivos. A segunda diferença é que nos mapas conceituais não há uma relação visível entre as ideias subordinadas (isto é, aquelas ligadas à ideia central “geradora”), enquanto que, nos mapas conceituais hierárquicos, os conceitos são sempre inter-relacionados uns aos outros independentemente de sua posição hierárquica. E, em consequência dessa última diferença, os mapas conceituais hierárquicos são mais abrangentes do que os mapas mentais já que, estes últimos, enfocam, cada um, uma única ideia geradora. Buzan (1982) aponta como vantagens dos mapas mentais:

- ✓a facilidade de definir a ideia central;
- ✓a clareza do grau de importância de cada conceito (conceitos mais centrais têm maior importância do que os conceitos que se irradiam periféricamente);
- ✓os links entre os conceitos-chave são imediatamente identificados graças à proximidade das conexões;
- ✓por causa do item anterior, a revisão e correção do mapa é simples e rápida;
- ✓a natureza da estrutura permite uma fácil incorporação de nova informação à estrutura preexistente sem necessitar rasurar ou espremer conceitos dentro do mapa.

Entre outras vantagens. Em contrapartida, Tavares(2007, p.75) aponta como desvantagens:

Dificuldade em mostrar as relações entre os conceitos, e desse modo permitir a percepção de uma integração entre as informações. Não fica clara a opinião do autor sobre a importância relativa entre os vários conceitos e o conceito central.

Entre os usos mais comuns dos mapas mentais estão a de ser ferramenta para memorização e *brainstorming*. E, dentro destes usos, já existem diversos softwares com o objetivo de ajudar na construção destes mapas, podemos citar o *iMindMap*.

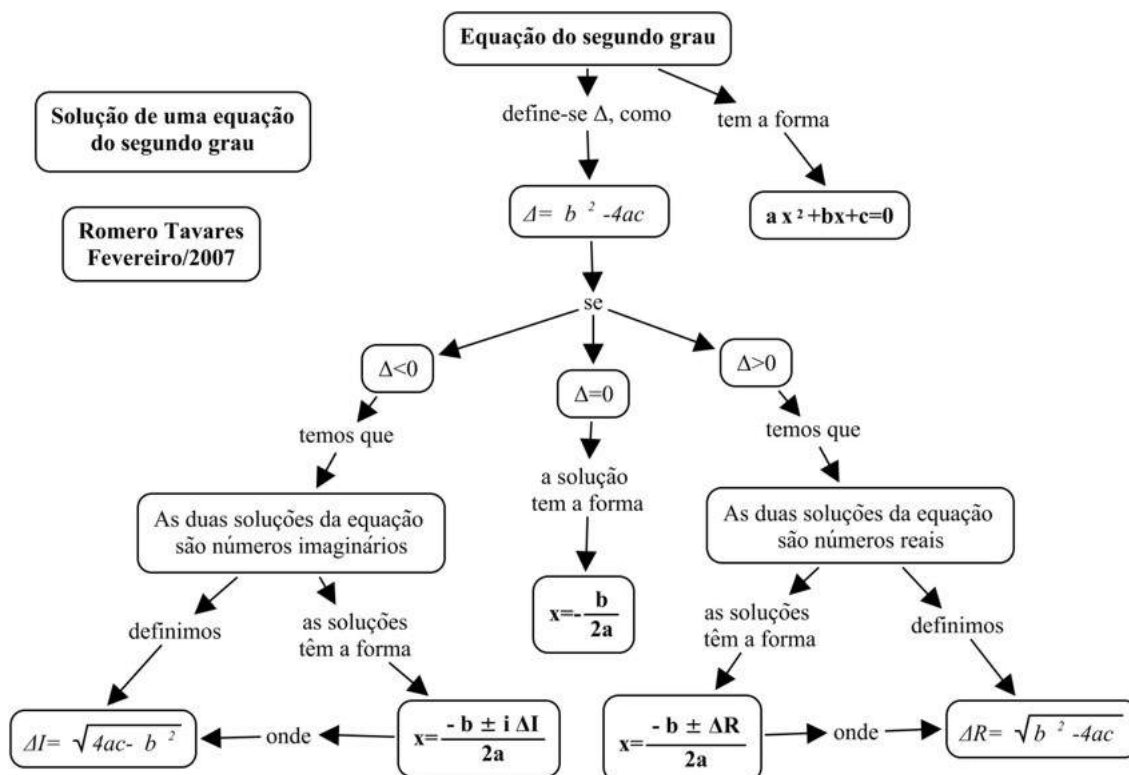
Definição 2.2. *Mapa conceitual tipo fluxograma (Figura 3). Também conhecido como fluxograma de processo, mapa de processo, notação de modelagem de processos de negócio entre outras designações. Trata-se de uma representação diagramática, com notação normalizada, que ajuda na visualização de processos, programas ou algoritmos.*

De acordo com Tavares (2007, p.75):

Ele organiza a informação de uma maneira linear. Ele é utilizado para mostrar passo a passo determinado procedimento, e normalmente inclui um ponto inicial e outro ponto final. Um fluxograma é normalmente usado para melhorar a performance de um procedimento.

a preocupação de explicar determinado tema; na sua gênese não pretende facilitar a compreensão do processo, mas otimizar a sua execução.” (TAVARES, 2007, p.75) Entre os usos mais comuns dos fluxogramas estão a de descrever algoritmos computacionais, a de ser ferramenta de desenvolvimento na engenharia e a de orientação e treinamento pessoal na indústria. Há softwares específicos para construção de fluxogramas, como é o caso do *Microsoft Office Visio*, ou como ferramentas do pacote *Power Point* ou do *Excell*.

Figura 3 – Mapa conceitual do tipo Fluxograma



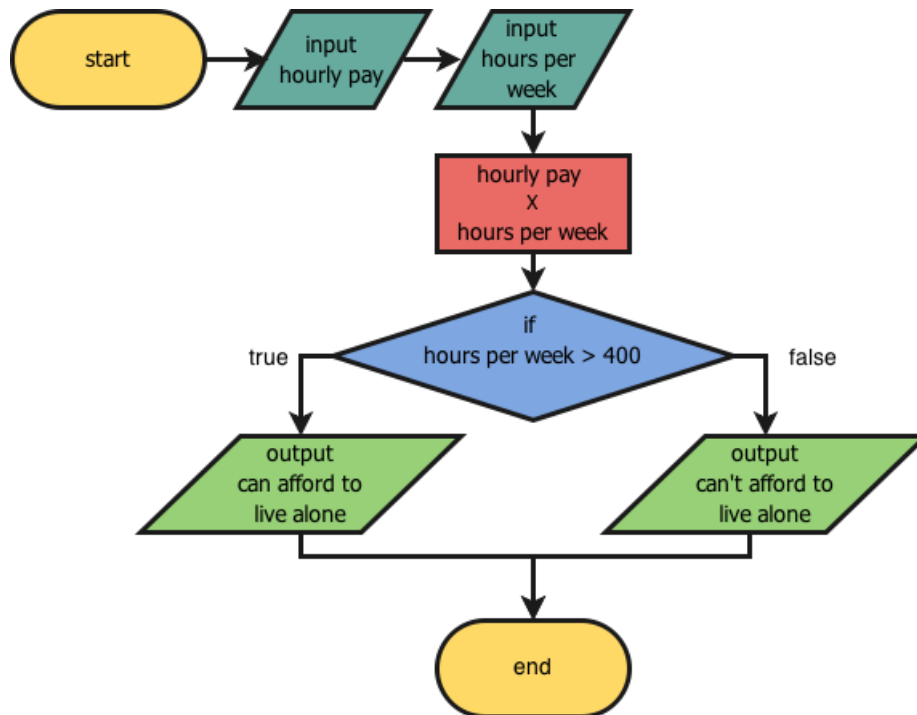
Fonte: Tavares(2007).

Definição 2.3. Mapa conceitual tipo sistema: entrada e saída (Figura 4). Muito similar aos mapas do tipo fluxograma, eles também são estruturados de forma verticalizada ou horizontalizada. No entanto, Tavares (2007, p.76) aponta como diferença a “imposição das possibilidades ‘entrada’ e ‘saída’”.

Tavares (2007, p.76) apresenta como vantagem: “Mostra várias relações entre os conceitos.” E, como desvantagem: “Alguma vezes é difícil de se ler devido ao grande número de relações entre os conceitos. Na sua gênese pretende explicar a transformação de insumos em produto acabado. É adequado para explicar processos que impliquem em entrada e saída.” (TAVARES, 2007, p.76)

Definição 2.4. Mapa conceitual hierárquico (Figura 1). É o tipo que está mais de acordo com a teoria cognitivista de Ausubel. De acordo com Lima (2011, p.39):

Figura 4 – Tipo sistema: entrada e saída.



Fonte: mapa conceitual acessado em 22/01/2016, no endereço eletrônico: <https://www.codeavengers.com/notes/planning/flowcharts>)

[...] são representações visuais que podem estabelecer relações bidirecionais (vertical /ou horizontal), podendo ser constituído por círculos e/ou retângulos onde se escrevem conceitos seguidos de linha (ligações), com proposições que estabelecerão a relação entre esses conceitos. Representam uma estrutura hierárquica que vai desde os conceitos mais abrangentes até os menos inclusivos.

Tavares (2007, p.78) aponta como vantagens:

Os conceitos mais inclusivos estão explícitos; os conceitos auxiliares e menos inclusivos estão inter-relacionados. Estrutura o conhecimento de maneira mais adequada a compreensão humana, considerando em posição de destaque os conceitos mais inclusivos.

E, como desvantagens:

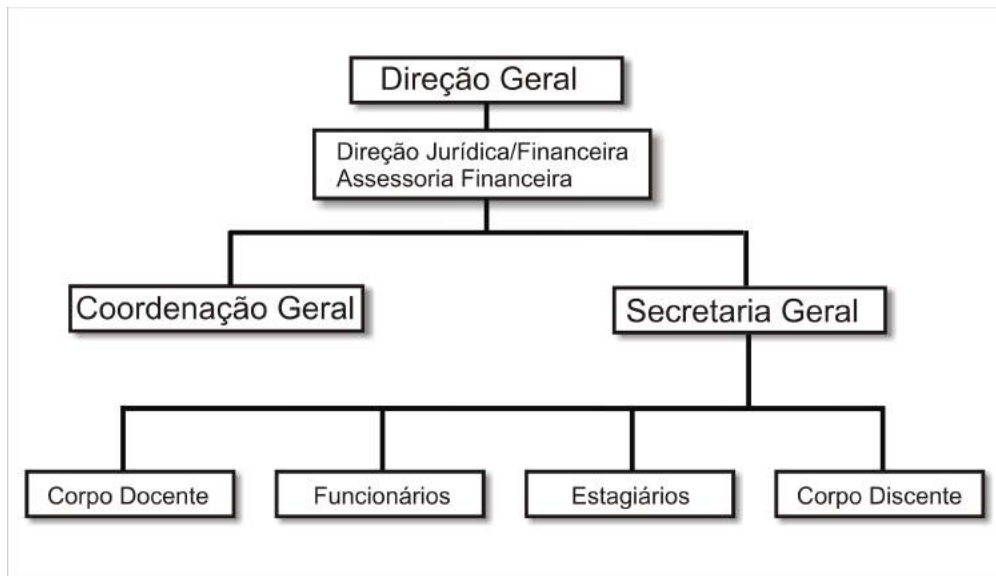
Mais difícil de externar e construir, visto que expõe a estrutura cognitiva do autor sobre o assunto. A clareza do autor sobre o tema fica evidente quando da sua construção. A sua construção sempre representa um desafio, visto que explicita (principalmente para si) a profundidade do conhecimento do autor sobre o tema do mapa. (TAVARES, 2007, p.78)

O referido mapa tem sido amplamente utilizado como instrumento pedagógico. O software mais conhecido para construção desse tipo de mapa é o (*cmapTools* desenvolvido pela *Florida Institute for Human & Machine Cognition (IHMC)*).

Definição 2.5. *Mapa conceitual tipo organograma (Figura 5). Apesar deste tipo de mapa, ou diagrama cognitivo se preferir, não ter sido elencado no trabalho de Tavares(2007), vamos citá-lo já que ele poderia ser confundido com o tipo hierárquico. Um organograma é uma representação diagramática que ilustra as relações estritamente hierárquicas entre elementos do todo analisado. Se diferencia do mapa hierárquico por não usar proposições e por não levar em consideração a reconciliação integrativa. Existem vários tipos de organogramas, entre eles podemos citar o heredograma que é muito utilizado na elaboração de mapas genéticos (Figura 6).*

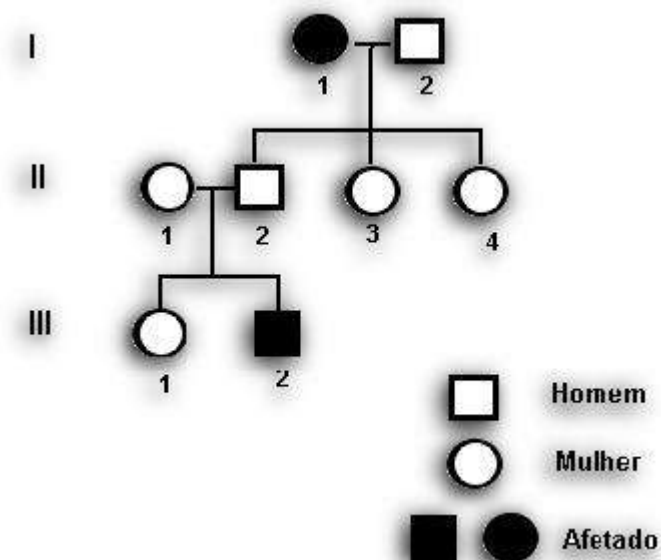
Podemos citar como vantagem deste tipo de mapa a simplicidade na elaboração e leitura. Como desvantagem, o fato de que na estrutura desse mapa se considere unicamente as relações hierárquicas em detrimento de outros tipos de relações que poderiam ser aventadas tornando, assim, seu uso muito restrito.

Figura 5 – Mapa conceitual do tipo organograma.



Fonte: mapa conceitual acessado em 22/01/2016, no endereço eletrônico: <http://www.cepromec.com.br/organograma.html>

Figura 6 – Mapa conceitual do tipo organograma (Neste caso, chamado de heredograma).



Fonte: mapa conceitual acessado em 22/01/2016, no endereço eletrônico: <http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Genetica/leismendel5.php>

Fundamentação teórica sobre Análise Combinatória (parte I): principais assertivas envolvendo Contagem

AQUI, leia-se como principais, os enunciados diretamente relacionados com a abordagem dada no ensino de Análise Combinatória nas escolas públicas e privadas do país. Os principais autores que fundamentaram teoricamente este capítulo foram Brualdi (2009), Cerioli e Viana (2012), Columbia University (2009), Dante (2011), Hazzan (1993), Lima et al. (2006a, 2006b) e Morgado et al. (1991).

3.1 Os quatro princípios básicos da Contagem

Cabe aqui uma ressalva: normalmente, a literatura que aborda a análise combinatória dá ênfase ao princípio multiplicativo (também conhecido como princípio fundamental da contagem) e, de forma mais discreta, ao princípio aditivo da contagem. Porém, pouco é mencionado sobre os princípios da subtração e divisão da contagem sendo, no máximo, indicados como estratégias de resolução de problemas tais como contar a mais (*overcounting*), no caso da subtração e divisão. Acreditamos que isso seja um equívoco e, por isso mesmo, compartilhamos com a propositura de Brualdi (2009) quando enuncia esses quatro princípios em seu livro: “*Introductory Combinatorics*”. Além disso, alguns autores sequer mencionam o princípio aditivo como é o caso de Hazzan (1993) que, sem explicitar de maneira evidente tal princípio, inicia o capítulo introdutório de análise combinatória pelo princípio multiplicativo (PFC). E, conquanto saibamos sua importância, ao se dar essa prerrogativa, subentende-se que o princípio multiplicativo é condição *sine qua non* ou serve de base para se resolver quaisquer problemas em análise combinatória, o que não é verdade. Observe o exemplo:

Possuo seis livros de contos, dois de romances e três de crônicas. De quantas maneiras posso escolher um livro para ler?

Veremos mais adiante que esse tipo de problema não pode ser resolvido pelo

princípio multiplicativo, mas, sim, pelo princípio aditivo que, como será visto nas demonstrações, serve de base para o princípio multiplicativo. Sendo, portanto, em sua essência, o princípio multiplicativo um caso particular do princípio aditivo. E, uma vez que os quatro princípios são indispensáveis para resolução de problemas de contagem justificamos, assim, o título desta seção. Feita essa ressalva, vejamos algumas Definições, Teoremas e Lemas preliminares:

Definição 3.1 (Cardinalidade). *Inicialmente, adotaremos a estratégia descrita por, Lima et al. (2006a) em que é denotado por I_n um subconjunto enumerável do conjunto dos números naturais e tal que I_n contém os números naturais de 1 a n . Desta forma, I_n serve como um indexador de elementos de um conjunto e, de agora em diante, será utilizado com esse objetivo em outras ocasiões.*

Assim, dado um conjunto A finito, diremos que ele possui n elementos, ou o tamanho desse conjunto é n denotando por $|A| = n$ quando pudermos estabelecer uma bijeção entre $I_n = \{k \mid 1 \leq k \leq n\}$, conjunto com k , $n \in \mathbb{N}$, e o conjunto A . Admite-se, para o caso do conjunto A ser vazio, que $|A| = 0$.

Definição 3.2 (Princípio da bijeção (PB)). *Seja C um conjunto finito. Se B é um conjunto tal que existe uma bijeção entre C e B , então:*

$$|C| = |B|. \quad (1)$$

Observação 3.1. *Apesar do princípio da bijeção parecer muito elementar, ele pode ser uma poderosa “ferramenta” para contagem quando aplicado na seguinte situação citada por Cerioli e Viana (2012, p.31):*

1. *Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, à primeira vista, determinar.*
2. *Transformamos, através de uma bijeção, o conjunto X em um conjunto A cujo número de elementos já sabemos determinar.*
3. *Aplicamos o PB e concluímos que X tem o mesmo número de elementos que A .*

Exemplo 3.1. *O setor pessoal de uma empresa declarou que no departamento de vendas há trinta e sete pessoas registradas e, estas, não possuem parentesco materno. Quantas são as mães das pessoas registradas no departamento de vendas?*

Solução: Sejam P o conjunto das pessoas registradas no departamento de vendas e M o conjunto das mães das pessoas registradas no departamento de vendas. Como cada pessoa pertencente ao P está relacionada a exatamente uma mãe pertencente ao M e cada mãe pertencente ao M está relacionada a exatamente uma pessoa pertencente ao P podemos estabelecer uma bijeção entre M e P de forma que $|M| = 37$.

Exemplo 3.2. [Adaptado de Cerioli e Viana (2012)] Quantos são os números naturais de 73 até 1459?

Solução: Seja então o conjunto $A = \{73, 74, \dots, 1459\}$. Para determinarmos a cardinalidade de A basta formarmos um outro conjunto S constituído dos elementos de A subtraídos, cada um, de 72 unidades, ou seja, $S = \{73 - 72, 74 - 72, \dots, 1459 - 72\} = \{1, 2, \dots, 1387\}$ tendo, pela Definição 3.1, $|S| = 1387$. Segue que isso é equivalente ao estabelecimento de uma função bijetiva entre S e A , $f: S \rightarrow A$, definida por $f(i) = i + 72 \quad \forall i \in S$, logo, pela Definição 3.2: $|A| = 1387$.

Teorema 3.1 (Princípio da inclusão e exclusão). Considere A_i , com $i \in \mathbb{N}$, conjuntos finitos. Segue que, segundo esse princípio:

1. A cardinalidade da união de dois conjuntos quaisquer é dada por:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|. \quad (2)$$

Demonstração. Considere as diferenças: $A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)$ e $A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$, como as cardinalidades satisfazem as igualdades:

$$\begin{aligned} |A_1| &= |A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)| + |A_1 \cap A_2|, \\ |A_2| &= |A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)| + |A_1 \cap A_2|. \end{aligned} \quad (3)$$

Segue que podemos escrever a cardinalidade da união como:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)|, \\ |A_1 \cup A_2| &= |A_1| - |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|, \\ |A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|. \end{aligned} \quad (4)$$

□

Exemplo 3.3. Adaptado de Morgado et al.(1991). Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 11 ou por 13?

Solução: sejam os conjuntos O e T os conjuntos dos inteiros de 1 a 1000 divisíveis por onze e treze respectivamente. E, denotemos por $[O]$ e $[T]$ as partes inteiras dos conjuntos citados nesta ordem. Assim, como:

$$[O] = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90, \quad [T] = \left\lfloor \frac{1000}{13} \right\rfloor = 76, \quad [(O \cap T)] = \left\lfloor \frac{1000}{143} \right\rfloor = 6. \quad (5)$$

Segue por (2) que: $[O \cup T] = [O] + [T] - [(O \cap T)] = 90 + 76 - 6 = 160$ inteiros.

2. Mais geralmente, para conjuntos não vazios e finitos A_1, A_2, \dots, A_n temos:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{|S|=i; S \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|. \quad (6)$$

que pode ser simplificada ainda mais, nos preocupando primeiro com a escolha do conjunto e depois com o seu tamanho, deixando-a, por conseguinte, mais compacta:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|. \quad (7)$$

Demonstração. Provaremos por indução em n . Caso base: para $n = 1$ é imediato. Quanto para $n = 2$, já provamos no item 1. Assim, considerando a forma mais compacta da equação, podemos escrever para $n = 1$:

$$|A_1| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1\}} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|.$$

Para o passo indutivo, assumiremos que:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n| \\ &= |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n| \\ &= |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| \\ &= \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right| + |A_n| - \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \cap A_n \right| \\ &= \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right| + |A_n| - \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \left(\bigcap_{j \in S} A_j \right) \cap A_n \right| \\ &= \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right| + |A_n| - \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \left(\bigcap_{j \in (S \cup \{n\})} A_j \right) \right| \quad (8) \\ &= \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right| + \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}} (-1)^{|S|} \left| \left(\bigcap_{j \in (S \cup \{n\})} A_j \right) \right| \\ &= \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n-1\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right| + \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n\}; n \in S} (-1)^{|S|-1} \left| \left(\bigcap_{j \in S} A_j \right) \right| \\ &= \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n\}; S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.1 (União disjunta de dois conjuntos.). *Se A e B são conjuntos não vazios e tais que $A \cap B = \emptyset$, então:*

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \quad (9)$$

Demonstração. Imediata da aplicação da Equação (2) □

Definição 3.3 (Partição de um conjunto). *Dado um conjunto A , denominamos uma partição de (ou sobre) A todas as vezes que a família de subconjuntos $\{A_i; i \in I_n\}$ associados ao conjunto A cumpre as propriedades a seguir:*

1. $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I_n$.
2. $\bigcup_{i \in I_n} A_i = A$
3. Se $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Ou em sua forma contrapositiva: se $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $i = j$.

Teorema 3.2 (Princípio aditivo). *Na verdade, o princípio aditivo decorre de uma generalização do Corolário 3.1 e afirma que se tomarmos um conjunto não vazio e finito, digamos A , e aplicarmos nesse conjunto uma partição de modo a formarmos n pares de conjuntos disjuntos, então, teremos:*

$$\left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_j|. \quad (10)$$

Demonstração. Provaremos por indução em n . Caso base: para $n = 1$ é imediato. Quanto para $n = 2$, já provamos no Corolário 3.1. Assim, para nossa hipótese de indução, assumimos que para algum k e para quaisquer A_1, A_2, \dots, A_k disjuntos dois a dois, temos:

$$\left| \bigcup_{j=1}^k A_j \right| = \sum_{j=1}^k |A_j|.$$

Supondo que $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$ são disjuntos dois a dois. Segue que $\bigcup_{j=1}^k A_j$ e A_{k+1} são conjuntos disjuntos. Logo, pelo Corolário 3.1, mais especificamente equação (9), podemos fazer:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \right| = \left| \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \cup A_{k+1} \right| = \left| \bigcup_{j=1}^k A_j \right| + |A_{k+1}|.$$

Aplicando a hipótese de indução, teremos:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \right| = \left(\sum_{j=1}^k |A_j| \right) + |A_{k+1}| = \sum_{j=1}^{k+1} |A_j|.$$

□

Observação 3.2. O princípio aditivo, em sua forma mais simples (isto é, Corolário 3.1), também poderia ser enunciado de uma maneira não tão formal como segue: se tivermos n escolhas para tomar uma decisão, e m escolhas de tomar outra decisão, não sendo possível escolher ambas ao mesmo tempo, então há $n + m$ modos de escolher uma das decisões.

Exemplo 3.4. Voltando ao problema proposto no final do primeiro parágrafo desta seção:

Solução: observe que como os livros de cada gênero podem ser considerados como conjuntos disjuntos. E, como desejo ler um livro apenas (observe que não podemos escolher mais de um livro ao mesmo tempo) sem restrição de gênero, então pelo Teorema 3.2 poderei ler o livro de $6 + 2 + 3 = 11$ maneiras diferentes.

Lema 3.1. Considere os conjuntos não vazios: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_x\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_y\}$ (ou seja, $|A| = x$ e $|B| = y$). A partir desses conjuntos podemos formar $x \cdot y$ pares ordenados (a_i, b_j) , com $i, j \in I_n$.

Demonstração. Seja P o conjunto dos pares ordenados (a_i, b_j) , conforme o enunciado do Lema, com $a_i \in A$ e $b_j \in B$. Observe que aplicando-se uma partição em P de modo que cada parte P_i seja obtida fixando-se o primeiro elemento do par, ou seja a_i , com $i \in \{1, 2, \dots, x\}$ e, em seguida, variando-se o segundo, ou seja b_j , com $j \in \{1, 2, \dots, y\}$, obtemos:

$$\begin{aligned} P_1 &= (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_y) \longrightarrow y \text{ pares} \\ P_2 &= (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_y) \longrightarrow y \text{ pares} \\ &\vdots \\ P_x &= (a_x, b_1), (a_x, b_2), \dots, (a_x, b_y) \longrightarrow y \text{ pares.} \end{aligned} \tag{11}$$

Segue, aplicando o princípio aditivo (Teorema 3.2):

$$|P| = |P_1| + |P_2| + \dots + |P_x| = \underbrace{(y + y + \dots + y)}_{x \text{ vezes}} = x \cdot y. \tag{12}$$

□

Lema 3.2. Considere os pares ordenados (a_i, a_j) tais que $a_i \neq a_j$ e $a_i, a_j \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_x\}$, com $A \neq \emptyset$. Assim, podemos formar $x \cdot (x - 1)$ pares ordenados (a_i, a_j) , com $i, j \in I_n$.

Demonstração. Seja Q o conjunto dos pares ordenados (a_i, a_j) , conforme o enunciado no Lema 3.2, com $a_i, a_j \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_x\}$. Observe que aplicando-se uma partição em Q de modo que cada parte seja obtida fixando-se o primeiro elemento do par e, em

seguida, variando-se o segundo, obtemos:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= (a_1, a_2), (a_1, a_3), \dots, (a_1, a_x) \longrightarrow (x-1)\text{pares} \\
 Q_2 &= (a_2, a_1), (a_2, a_3), \dots, (a_2, a_x) \longrightarrow (x-1)\text{pares} \\
 &\vdots \\
 Q_x &= (a_x, a_1), (a_x, a_2), \dots, (a_x, a_{x-1}) \longrightarrow (x-1)\text{pares}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Segue, aplicando o princípio aditivo (Teorema 3.2):

$$|Q| = |Q_1| + |Q_2| + \dots + |Q_x| = \underbrace{(x-1) + (x-1) + \dots + (x-1)}_{x \text{ vezes}} = x \cdot (x-1). \tag{14}$$

□

Observação, o teorema a seguir é dividido em duas partes:

Teorema 3.3 (Princípio Multiplicativo ou Teorema Fundamental da Contagem **parte I**). *Seja o conjunto W finito e não vazio de n -uplas ordenadas (a_i, b_j, \dots, s_r) , onde o primeiro elemento pertence a um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{x_1}\}$, com $|A| = x_1$, o segundo elemento pertence a um conjunto $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{x_2}\}$, com $|B| = x_2, \dots$, e o último elemento pertence ao conjunto $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{x_n}\}$, com $|T| = x_n$. Então, segue que:*

$$|W| = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2.$$

Demonstração. Considere, então, um conjunto W conforme o enunciado. O caso base para $n = 2$ já foi provado no Lema 3.1. Suponha, como hipótese de indução, que este Teorema seja válido para um inteiro $(k-1) \geq 2$. Devemos provar que ele é válido para um inteiro k . Assim, usando a hipótese de indução, para um inteiro $(k-1)$, existem $|W - T| = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}$ sequências de $k-1$ elementos (a_i, b_j, \dots, q_v) pertencentes a $\{W \setminus T\}$. Logo, cada sequência de W é formada por uma sequência (a_i, b_j, \dots, q_v) e um elemento pertencente a T , digamos $t_u \in T$. Segue que o número de sequências do tipo $(a_i, b_j, \dots, q_v, t_u)$ é dada, segundo o Lema 3.1, por:

$$|W| = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}) \cdot x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2. \tag{15}$$

□

Observação 3.3. *Analogamente à observação anterior, o princípio multiplicativo **parte I**, em sua forma mais simples (isto é, Lema 3.1), também poderia ser enunciado, segundo Brualdi(2009) de uma maneira não tão formal como segue: se tivermos n escolhas para tomar uma decisão e, **não importando que decisão foi tomada na primeira escolha**, há m escolhas para tomar a outra decisão, então há $n \cdot m$ modos de escolher ambas as decisões.*

Exemplo 3.5. Embora o exemplo a seguir seja muito elementar, ele serve para mostrar que o trecho em negrito na observação 3.3 expõe de maneira bastante precisa a condição de **independência** das escolhas no princípio multiplicativo **parte I**, como poderá ser visto:

Desejo fazer um pedido de um lanche formado por um sanduíche e um refrigerante numa lanchonete que oferece apenas cinco tipos de sanduíches e quatro tipos de refrigerantes. De quantas maneiras diferentes esse pedido pode ser feito?

Solução: como há cinco modos de escolher o sanduíche e quatro modos de escolher o refrigerante (observe que a escolha do tipo de sanduíche não interfere na escolha do tipo de refrigerante). Então há, pelo princípio multiplicativo **parte I**, $5 \cdot 4 = 20$ modos de fazer o pedido.

Teorema 3.4 (Princípio Multiplicativo ou Teorema Fundamental da Contagem **parte II**). Seja o conjunto M finito e não vazio de s -uplas ordenadas formadas a partir de elementos distintos dois a dois de um conjunto A com n elementos ($n \geq 2$). Então:

$$|M| = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(s-1)]}_{s \text{ fatores}}. \quad (16)$$

Demonstração. Provemos por indução finita. Sejam os conjuntos não vazios e finitos M e A conforme o enunciado. Digamos, então, que o conjunto M seja formado por sequências (obtidas a partir de um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, com $n \geq 2$) do tipo:

$$\underbrace{(a_i, a_j, \dots, a_k, \dots, a_v)}_{s \text{ elementos}}, \text{ com } a_i, \dots, a_v \in A \forall i, \dots, v \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ com } a_k \neq a_q \text{ para } k \neq q.$$

Caso base: para $s = 2$ o Teorema já foi provado no Lema 3.2. Suponha, como hipótese de indução, que o Teorema seja válido para um inteiro $(s-1) \geq 2$. Ou seja, o número de sequências com $(s-1) \geq 2$ elementos tais que $a_k \neq a_q$ para $k \neq q$ obtidos a partir do conjunto $A - \{a_n\}$ é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(s-1-1)]$. Logo, cada sequência de s elementos do conjunto M é formada por uma das sequências mencionadas como hipótese de indução e um elemento $a_n \in A$. Segue, segundo o Lema 3.2, que o número de sequências é dado por:

$$\begin{aligned} |M| &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(s-1-1)] \cdot [n-(s-1)] \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(s-1-1)] \cdot [n-(s-1)] \forall s \in \mathbb{N}, \text{ e } s \geq 2. \end{aligned} \quad (17)$$

□

Exemplo 3.6. Agora suponha, considerando o Exemplo 3.5, que em vez de fazer o pedido do sanduíche e do refrigerante, faça o pedido de dois sanduíches distintos um do outro. De quantas maneiras diferentes esse pedido pode ser feito?

Solução: observe que o conceito de **independência** das escolhas não cabe mais aqui já que a escolha do primeiro sanduíche interfere no número de escolhas para o segundo sanduíche

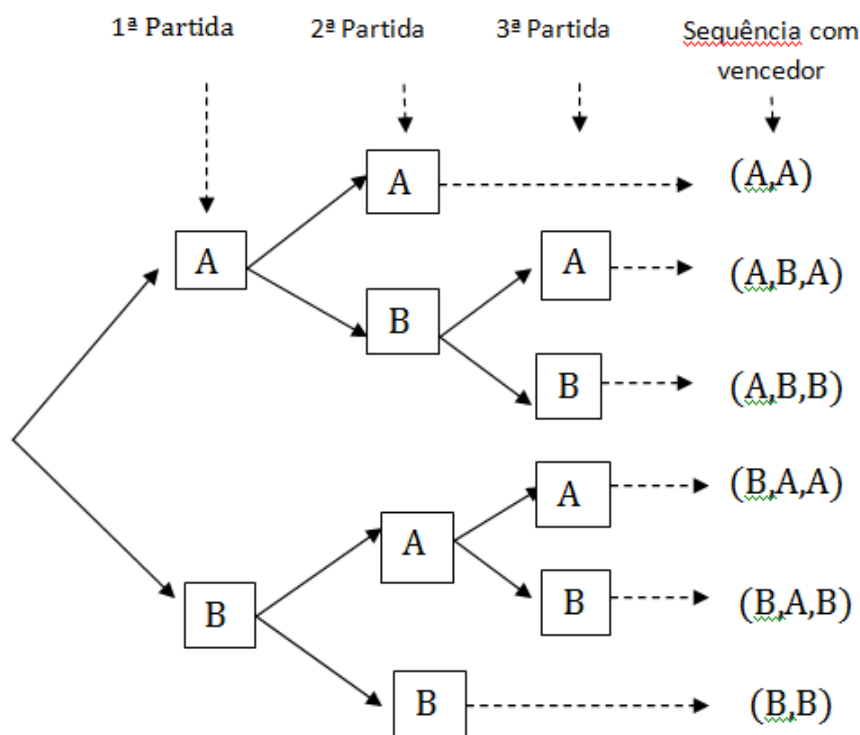
(não pode ser igual ao primeiro). Desta forma, usando o princípio multiplicativo **parte II**, temos: $5 \cdot (5 - 1) = 5 \cdot 4 = 20$ maneiras diferentes.

Observação 3.4. Uma das condições para que se aplique o princípio multiplicativo parte I ou parte II, na contagem, é que as sequências ordenadas que constituem os elementos de determinado conjunto devem ter um mesmo tamanho (ou seja, um mesmo número de elementos). No entanto, em certas circunstâncias, isso não ocorre. Isto é, devemos contar sequências ordenadas de tamanhos diferentes. Nestes casos não podemos usar o princípio multiplicativo, mas, em vez dele, podemos usar o diagrama de árvore como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 3.7. Um campeonato será disputado, por duas equipes denominadas A e B, pelo sistema "melhor de três". De quantas maneiras diferentes uma equipe pode vencer o campeonato?

Solução: observe que o diagrama de árvore da Figura 7 nos mostra que há seis maneiras diferentes de termos uma equipe campeã nesse campeonato.

Figura 7 – Diagrama de árvore mostrando os resultados possíveis para equipe campeã no sistema "melhor de três".



Fonte: elaborado pelo autor.

Definição 3.4 (Princípio da subtração). Sejam os conjuntos finitos e não vazios A e U tais que $A \subsetneq U$ e tal que $\bar{A} = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$. Assim, a cardinalidade de A é dada pela expressão:

$$|A| = |U| - |\bar{A}|. \quad (18)$$

Onde o conjunto U é chamado de universo do discurso (ou conjunto universo).

Exemplo 3.8. Adaptado de Dante (2011). Quantas “palavras”, com significado ou não, de quatro letras distintas podemos formar a partir das letras (exceto a letra “R”) da palavra ESCURO?

Solução: vamos inicialmente ignorar a restrição e contaremos todas as “palavras” de quatro letras formadas a partir das letras da palavra ESCURO, isto é: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ “palavras”. Consideremos essas 360 “palavras” como a cardinalidade do conjunto universo. Em seguida contaremos quantas “palavras” contém a letra “R”. Fixando a letra “R” como primeira letra, teremos 5 escolhas para segunda letra, 4 para terceira e 3 para quarta. Logo, teremos $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ “palavras”. Analogamente, se fixarmos a letra “R” em qualquer uma das outras três posições possíveis formaremos em cada uma delas 60 “palavras”. Segue que há $4 \cdot 60 = 240$ “palavras” contendo a letra “R”. Desta forma, pelo princípio da subtração, temos: $360 - 240 = 120$ “palavras”.

Observação 3.5. Note que o uso do princípio da subtração só é viável quando for mais fácil determinar a cardinalidade do conjunto universo e a cardinalidade do complementar do conjunto cujos elementos queremos contar.

Definição 3.5 (Princípio da divisão). Seja o conjunto D finito e não vazio cuja partição em y partes é feita de tal modo que cada parte contém o mesmo número de elementos. Então o número de partes da partição é dada por:

$$y = \frac{|D|}{n}, \quad (19)$$

em que n é o número de objetos de cada parte.

Exemplo 3.9. De quantas maneiras três pessoas podem se sentar em uma mesa circular?

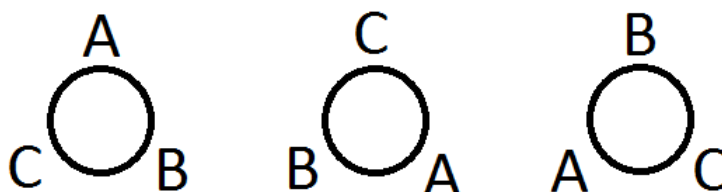
Solução: Temos três escolhas para primeira posição à mesa, duas para a segunda e uma para última. Pelo princípio multiplicativo parte I, temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras. Contudo essa contagem extrapolou o real número de maneiras porque estamos contando uma mesma sequência mais de uma vez, (vide Figura 8).

Assim, cada tripla ordenada é contada três vezes. Isto posto, considerando cada tripla ordenada como uma partição, devemos “descontar” essa contagem a mais usando a Equação 19, ou seja: $\frac{6}{3} = 2$ maneiras diferentes.

Observação 3.6. Note, com esse exemplo, que não foi preciso usar fórmulas prontas como da permutação cíclica (a ser vista mais adiante) ao se utilizar os princípios básicos da contagem.

Observação 3.7. O princípio da divisão tal como proposto por Brualdi (2009) é, na verdade, uma das versões do princípio $Pk1$, como poderá ser visto na definição a seguir.

Figura 8 – Se considerarmos a sequência horária começando por A, vemos que as três disposições representam uma única sequência.



Fonte: imagem acessada no dia 26/01/2016, no endereço eletrônico: <https://www.dyclassroom.com/aptitude/circular-permutation>

Definição 3.6 (Princípio Pk1). *Considere os conjuntos finitos M e N . Chamamos de uma função de k para 1 de M em N aquela cuja relação de elementos de M com os elementos de N se dá de tal forma que cada k elementos de M associa-se, cada um deles, a 1 elemento de N . E, reciprocamente, cada elemento de N está associado a exatamente k elementos de m .*

De maneira mais formal, podemos enunciar:

Sejam M e N conjuntos finitos. Se existe uma função k para 1 de M em N , então:

$$|M| = k \cdot |N| \quad (20)$$

Mas isso é equivalente a:

Sejam M e N conjuntos finitos e $k \neq 0$. Se existe uma função k para 1 de M em N , então:

$$|N| = \frac{|M|}{k} \quad (21)$$

Observe que essa última Equação é idêntica à Equação 19 conforme evidenciado na Observação 3.7.

Exemplo 3.10. *Quantos são os números naturais de 1 a 765 que são múltiplos de 15?*

Solução: Considere, então, os conjuntos $M = \{1, 2, \dots, 765\}$ e $N = \{n \in M: n \text{ é múltiplo de } 15\}$. Como a cada 15 elementos distintos de M podemos associar, cada um deles, a um único elemento de N e, como cada elemento de N pode ser associado a grupos de 15 elementos de M distintos uns dos outros, então podemos aplicar a Equação 21, como segue:

$$|N| = \frac{|M|}{k}, \text{ com } \begin{cases} |M|=765 \\ k = 15. \end{cases}$$

Logo, há $\frac{765}{15} = 51$ múltiplos.

Exemplo 3.11. *Quantos são os números naturais de 1 a 987 que são múltiplos de 4?*

Solução: Neste caso devemos restringir o domínio de modo que possamos aplicar a função k para 1, segue que $M = \{1, 2, \dots, 984\}$ e $N = \{n \in M: n \text{ é múltiplo de } 4\}$, então podemos aplicar a Equação 21, como segue:

$$|N| = \frac{|M|}{k}, \text{ com } \begin{cases} |M|=984 \\ k = 4. \end{cases}$$

Logo, há $\frac{984}{4} = 246$ múltiplos.

3.2 Estratégias decorrentes da aplicação dos princípios básicos da Contagem

Definição 3.7. (Conjunto das partes). Seja um conjunto finito A , chamamos de conjunto das partes de A (denotado por $\mathcal{P}(A)$) como sendo o conjunto de todos os subconjuntos de A .

Teorema 3.5. Um conjunto com $n, n \geq 0$ e \mathbb{Z} , elementos possui 2^n subconjuntos.

Demonstração. Provaremos por indução. O caso base é verdadeiro para $n = 0$ pois $2^0 = 1$ e, como sabemos, um conjunto com zero elementos possui um único subconjunto que é o conjunto vazio. Agora considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, ou seja $|A| = k$. Supondo que a hipótese indutiva seja verdadeira para esse $k \geq 0$, ou seja, $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$. Considere, agora, o conjunto $B = A \cup \{b\}$, ou seja $|A \cup \{b\}| = k + 1$. Podemos formar $\mathcal{P}(B)$ tomando duas decisões, a saber: escolher os subconjuntos de A , o que acontece de $\mathcal{P}(A) = 2^k$ maneiras e, a seguir, devemos decidir se o elemento b pertence ou não pertence aos subconjuntos anteriormente escolhidos, o que se dá de duas maneiras, como pode ser visto na Tabela 1. Logo, aplicando o princípio multiplicativo **parte I** e o Teorema 3.3, temos:

Tabela 1 – Composição do conjunto B .

Subconjuntos em que b não figura	Subconjuntos em que b figura
$\{\}$	$\{b\}$
$\{a_1\}$	$\{a_1, b\}$
\vdots	\vdots
$\{a_k\}$	$\{a_k, b\}$
$\{a_1, a_2\}$	$\{a_1, a_2, b\}$
\vdots	\vdots
$\{a_{k-1}, a_k\}$	$\{a_{k-1}, a_k, b\}$
\vdots	\vdots
$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$	$\{a_1, a_2, \dots, a_k, b\}$

Fonte: tabela elaborada pelo autor.

$$|\mathcal{P}(B)| = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}.$$

□

Definição 3.8 (Arranjos com repetição, também conhecidos como Arranjos Completos). Considere um conjunto finito e não vazio qualquer, digamos $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ tendo, portanto, $|C| = n$ elementos. Chama-se Arranjo com Repetição dos n elementos obtidos a partir de C tomados p a p , a configuração em p -uplas ordenadas (sequências com p elementos) que podemos formar com esses elementos, podendo estes últimos, serem ou não repetidos reiteradamente.

Teorema 3.6. O número, denotado por $(AR)_{n,p}$, de p -uplas ordenadas obtidas a partir de um conjunto finito e não vazio com n elementos (podendo cada elemento ser ou não repetido reiteradamente em cada p -upla) é dado por:

$$(AR)_{n,p} = n^p. \quad (22)$$

Demonstração. Observe que para formarmos as p -uplas ordenadas obtidas a partir de um conjunto finito e não vazio com n elementos devemos escolher de n maneiras a posição do primeiro elemento da p -upla, de n maneiras a posição do segundo (observe que a escolha do primeiro elemento não interfere no número de maneiras de escolha do segundo) e assim sucessivamente até o número n de escolhas para o elemento que irá ocupar a última posição da p -upla. Logo, aplicando o princípio multiplicativo **parte I**, Teorema 3.3, teremos:

$$(AR)_{n,p} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{p \text{ vezes}} = n^p.$$

□

Exemplo 3.12. Extraído de Hazzan (1993). “Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal de eixos Ox e Oy . Ele pode dar um passo de cada vez, para norte (N) ou para leste (L). Quantas trajetórias ele pode percorrer se der exatamente 4 passos”.

Solução: Observe que cada uma das trajetórias percorridas pelo homem pode ser expressa por uma quádrupla ordenada onde cada elemento pode ser escolhido de duas maneiras, a saber: N ou L. Como os elementos podem ser repetidos, então, pelo Teorema 3.6, o número de trajetórias é:

$$(AR)_{2,4} = 2^4 = 16.$$

Definição 3.9 (Arranjos simples). Considere um conjunto finito qualquer, digamos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ tendo, portanto, $|S| = m$ elementos. Chama-se arranjo simples dos m elementos obtidos a partir de S tomados s a s , a configuração em s -uplas ordenadas que podemos formar com esses elementos todos distintos um do outro.

Teorema 3.7. O número, denotado por $A_{m,s}$, de s -uplas ordenadas obtidas a partir de um conjunto finito com m elementos (todos distintos entre si), com $m, s \in \mathbb{N}$ e $1 \leq s \leq m$, é dado por:

$$A_{m,s} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot [m-(s-1)]}_{s \text{ fatores}}. \quad (23)$$

Demonstração. Observe que para formarmos as s -uplas ordenadas obtidas a partir de um conjunto finito e não vazio com m elementos devemos escolher de m maneiras a posição do primeiro elemento da s -upla, de $(m - 1)$ maneiras a posição do segundo (observe que não podemos selecionar o mesmo elemento colocado na primeira posição), de $(m - 1 - 1)$ maneiras a posição do terceiro (observe que não podemos selecionar o mesmo elemento colocado na primeira posição nem o elemento colocado na segunda posição) e assim sucessivamente até o número $[m - (s - 1)]$ de escolhas para o elemento que irá ocupar a última posição da s -upla. Logo aplicando o princípio multiplicativo **parte II**, Teorema 3.4, teremos:

$$A_{m,s} = \underbrace{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot [m - (s - 1)]}_{s \text{ fatores}}, \text{ com } 1 \leq s \leq m.$$

□

Observação 3.8. *Perceba, o leitor, que as definições, “princípio fundamental da contagem parte II” e “arranjos simples”, conforme adotadas por Hazzan (1993), representam, em essência, a mesma coisa. Dessa forma, consideramos desnecessária a ênfase nesse tipo de agrupamento denominado de “arranjos simples”. Em livros que abordam análise combinatória em língua inglesa, por exemplo, não existe essa distinção. Por outro lado, por ser uma definição amplamente utilizada em livros didáticos brasileiros, a definição de “arranjos simples” foi mantida nesse trabalho.*

Definição 3.10 (Fatorial). *Definimos fatorial, denotando por $n!$, como sendo um número inteiro $n \geq 0$ com $0! = 1! = 1$, tal que:*

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = \prod_{j=1}^n j. \quad (24)$$

Observação 3.9. *Também poderíamos definir o fatorial de um número recursivamente:*

$$n! = n \cdot (n - 1)! = n \cdot \prod_{j=1}^{n-1} j. \quad (25)$$

Aliás, esta maneira recursiva permite mostrar que $0! = 1$. Já sabemos que $1! = 1$, então se exprimirmos $1!$ recursivamente, teremos: $1! = 1 \cdot 0! = 1$. Obviamente, tal identidade só é possível se $0! = 1$. Embora essa não seja uma prova formal, serve para mostrar que, de fato, $0! = 1$.

Observação 3.10. *Notemos, agora, que a partir da definição de fatorial poderíamos expressar a fórmula do arranjo simples Equação 23 da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} A_{m,s} &= m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot [m - (s - 1)] = \\ &= \{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot [m - (s - 1)]\} \cdot \frac{(m - s)!}{(m - s)!} = \\ &= \frac{m!}{(m - s)!} \end{aligned} \quad (26)$$

Exemplo 3.13. Adaptado de Dante (2011). Com os algarismos de 1 a 8, quantos números de três algarismos distintos maiores do que 670 podemos formar?

Solução: Queremos formar triplas ordenadas do tipo (a_1, a_2, a_3) , onde a_1 representa a centena, a_2 a dezena e a_3 a unidade. Como $a_1 \in \{6, 7, 8\}$ e $a_2, a_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ então começaremos por a_1 por ser mais restrito do que a_2 e a_3 . Temos três casos para o valor de a_1 :

1. Fixando, então, $a_1 = 6$, temos dois casos:
 - i. se $a_2 = 7$, então a_3 pode ser escolhido de $A_{6,1} = 6$ maneiras;
 - ii. se $a_2 = 8$, então a_3 pode ser escolhido de $A_{6,1} = 6$ maneiras;
2. Se Fixarmos, agora, $a_1 = 7$, então a_2 e a_3 podem ser escolhidos de $A_{7,2} = 42$ maneiras.
3. Finalmente, tomando $a_1 = 8$, então a_2 e a_3 podem ser escolhidos de $A_{7,2} = 42$ maneiras.

Logo, aplicando o princípio aditivo Teorema 3.2, teremos: $6 + 6 + 42 + 42 = 96$ números.

Definição 3.11 (Permutações simples, também chamadas simplesmente de permutações). É, na verdade, uma configuração particular do arranjo simples em que o número de elementos de cada sequência ordenada obtida a partir de um conjunto finito é o mesmo do número de elementos deste mesmo conjunto.

Corolário 3.2. O número de permutações simples, denotado por P_n dos elementos de um conjunto com n ($n > 0$) elementos é $n!$.

Demonstração. Considere um conjunto C com n elementos. É imediato da Definição 3.9 que:

$$P_n = A_{n,n} = n!, \quad (27)$$

onde P_n representa o número de permutações simples dos n elementos pertencentes ao conjunto C . □

Exemplo 3.14. Adaptado de Lima et al. (2006b). Quantos são os anagramas da palavra "NÚMERO":

- a) possíveis?
- b) que começam e terminam por vogal?
- c) que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
- d) que têm as letras e,r,o juntas nessa ordem?
- e) que têm as letras e,r,o juntas em qualquer ordem?
- f) que têm a letra o em primeiro lugar e a letra r em segundo?

- g)** que têm a letra *o* em primeiro lugar ou a letra *r* em segundo?
- h)** que têm a letra *o* em primeiro lugar ou a letra *r* em segundo ou a letra *m* em terceiro?
- i)** nos quais a letra *r* é uma das letras à esquerda de *o* e a letra *m* é uma das letras à direita de *o*?

Solução:

- a)** $P_6 = 6! = 720$ anagramas.
- b)** Devemos tomar três decisões, a saber: começando pelas mais restritivas, temos que escolher qual vogal iniciará a palavra, o que pode acontecer de três maneiras; a seguir devemos escolher a vogal que será a última letra do anagrama, o que pode acontecer de duas maneiras (não pode ser igual à primeira vogal escolhida); finalmente, devemos posicionar as outras letras entre as duas vogais já posicionadas, ou seja, devemos permutar quatro letras nos quatro lugares possíveis, o que pode acontecer de $4!$ maneiras. Assim, temos: $3 \cdot 2 \cdot 4! = 144$ anagramas.
- c)** Há duas maneiras de fazer essa intercalação:
- (i)** as vogais ocupam as posições de ordem par e as consoantes ocupam as posições de ordem ímpar;
- (ii)** as vogais ocupam as posições de ordem ímpar e as consoantes ocupam as posições de ordem par. No item (i) devemos arrumar as três consoantes nas três posições de ordem ímpar possíveis, ou seja, de $P_3 = 3!$ maneiras. Analogamente, temos $P_3 = 3!$ maneiras de arrumar as três vogais nas posições de ordem par. Logo temos, $3! \cdot 3! = 36$ maneiras de fazer esse tipo de intercalação. Com raciocínio semelhante ao anterior, temos 36 maneiras de fazer essa intercalação no item (ii). Portanto, há $36 + 36 = 72$ anagramas.
- d)** A estratégia a ser adotada nesse caso é considerar as três letras como se fossem uma única letra. Assim sendo, temos $6 - 3 + 1 = 4$ letras para serem permutadas em quatro posições, logo obtemos: $P_4 = 4! = 24$ anagramas.
- e)** Esse problema é semelhante ao anterior, a diferença é que para cada permutação de *e, o, r* teremos um bloco diferente de cada permutação de quatro letras. O que resulta em: $3! \cdot 4! = 144$ anagramas.
- f)** fixadas as letras *o* e *r* na primeira e segunda posições respectivamente, devemos permutar as quatro letras nas quatro posições restantes. Portanto, são $4! = 24$ anagramas.
- g)** Nesta questão está implícita uma interseção não vazia pois ao contarmos os anagramas em que a letra *o* está na primeira posição ou os anagramas em que a letra *r* está na segunda posição inevitavelmente haverá casos em que as letras *o* e *r* estão na primeira e segunda posição

respectivamente num mesmo anagrama. Logo, devemos usar o princípio da inclusão e exclusão, mais precisamente a Equação 2 como segue. Se fixarmos a letra o na primeira posição, temos $(6 - 1)! = 5!$ modos de arrumar as outras cinco letras. Da mesma forma, se fixarmos a letra r na segunda posição, temos $5!$ anagramas. E, como já vimos no item f , há $4! = 24$ anagramas com a letra o em primeiro lugar e a letra r em segundo. Segue da Equação 2 que há $5! + 5! - 4! = 120 + 120 - 24 = 216$ anagramas.

h) De maneira semelhante à questão anterior, usaremos o princípio da inclusão e exclusão, Equação 7, só que para três conjuntos, como segue. Existem:

✓ $5!$ anagramas com a letra o em primeiro lugar;

✓ $5!$ anagramas com a letra r em segundo;

✓ $5!$ anagramas com a letra m em terceiro;

✓ $4!$ anagramas com a letra o em primeiro lugar e a letra r em segundo;

✓ $4!$ anagramas com a letra o em primeiro lugar e a letra m em terceiro;

✓ $4!$ anagramas com a letra r em segundo lugar e a letra m em terceiro;

✓ $3!$ anagramas com a letra o em primeiro lugar, a letra r em segundo e a letra m em terceiro;

Logo, pelo princípio da inclusão e exclusão, temos:

$$5! + 5! + 5! - 4! - 4! - 4! + 3! = 3 \cdot 5! - 3 \cdot 4! + 3! = 360 - 72 + 6 = 294 \text{ anagramas.}$$

i) Observe que a configuração em que r é uma das letras à esquerda de o e a letra m é uma das letras à direita de o é uma em $3! = 6$ possíveis disposições para essas letras. Logo, devemos dividir o número total de anagramas por seis para obtermos as sequências desejadas.

Portanto, temos:

$$\frac{6!}{6} = 5! = 120,$$

anagramas.

Definição 3.12 (Permutações circulares). É uma configuração similar a da permutação simples sendo que os k ($k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$) objetos são dispostos em forma circular e tal que apenas a posição relativa entre eles seja relevante.

Teorema 3.8. Seja o conjunto finito K com k elementos (com $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$). Então o número de permutações circulares, denotado por PC_k , dos elementos de K é dado por:

$$PC_k = (k - 1)! \tag{28}$$

Demonstração. Sejam R o conjunto das rodas formadas e P o conjunto das permutações circulares ambos formados a partir dos elementos do conjunto K . Observe que os elementos de R podem ser formados da seguinte forma (ver Figura 9):

i Escolhemos o elemento a a ser fixado na posição P_1 , o que pode ser feito de k maneiras;

ii A seguir, completamos o círculo com os $(k - 1)$ elementos restantes, essa última de $(k - 1)!$ maneiras. Logo,

$$|R| = k \cdot (k - 1)! = k!$$

Por outro lado, ao contarmos assim estamos contando também as permutações que equivalem a rotação de cada elemento mantendo a mesma posição relativa entre os elementos. E como para cada n elementos em R há um elemento equivalente em P , pelo princípio Pk1 (equação 21), temos:

$$PC(k) = |P| = \frac{|R|}{k} = \frac{k!}{k} = (k - 1)! \quad (29)$$

□

Observação 3.11. Embora a fórmula das permutações circulares seja importante para facilitar os cálculos ela, assim como outras mencionadas neste trabalho, não substituem o raciocínio envolvido em sua concepção, como poderá ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 3.15 (Extraído de Brualdi (2009), tradução livre nossa). Dez pessoas, incluindo duas que não desejam sentar próximas uma da outra, devem se sentar ao redor de uma mesa circular. Quantas permutações circulares há para essas dez pessoas sentadas à mesa?

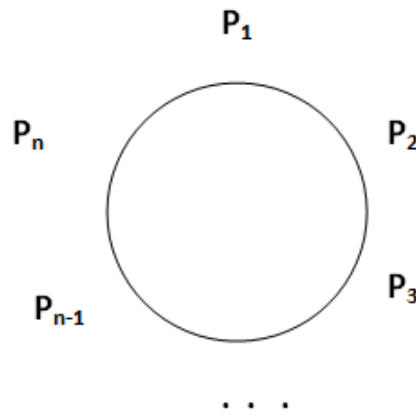
Solução: Denotemos as dez pessoas por P_1, P_2, \dots, P_{10} onde P_1 e P_2 são as duas pessoas que não desejam sentar próximas uma da outra. Em seguida, posicionamos a pessoa P_1 na "cabeceira" da mesa. Então P_2 não pode estar na posição vizinha nem à direita nem à esquerda de P_1 . Segue que há oito escolhas (não pode ser igual nem à posição de P_1 nem à reservada a P_2) para a pessoa, digamos P_3 , se sentar à esquerda de P_1 , sete escolhas para a pessoa, digamos P_4 , se sentar à direita de P_1 (não pode ser igual nem à posição de P_1 nem à reservada a P_2 nem à posição de P_3). As demais posições podem ser escolhidas de $7!$ maneiras. Assim, o número de permutações circulares nos quais P_1 e P_2 não estão juntos é:

$$8 \cdot 7 \cdot 7! = 7 \cdot 8! = 282240.$$

Definição 3.13 (Combinações Simples). Considere um conjunto finito qualquer, digamos: $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ tendo, portanto, $|Q| = r$ elementos. Chama-se Combinação Simples dos r elementos obtidos a partir de Q tomados s a s , a configuração em subconjuntos com s elementos obtidos a partir dos r elementos do conjunto Q . Por outro lado, quando nos referimos ao **número** destes subconjuntos, então devemos denotar esse número por $C_{r,s}$ ou por $\binom{r}{s}$, esta última sendo chamada de notação binomial.

Observação 3.12. Segundo Cerioli e Viana (2012, p.107) "Combinação simples é uma configuração, ou seja, um objeto que está sendo contado". Já $C_{r,s}$ ou $\binom{r}{s}$ "é um número natural, ou seja, o número de combinações simples que podem ser formadas". De maneira análoga, os mesmos

Figura 9 – P_1, P_2, \dots, P_n indicam as posições dos objetos ao redor do círculo.



Fonte: ilustração elaborada pelo autor.

autores adverte para que não se confunda as configurações de arranjos (simples e completo), de permutações (simples, completas e circulares) e de combinações completas com suas respectivas notações numéricas.

Teorema 3.9. Para $0 \leq s \leq q$, temos:

$$A_{r,s} = s! \cdot \binom{r}{s}. \quad (30)$$

Portanto:

$$\binom{r}{s} = \frac{n!}{s!(r-s)!}. \quad (31)$$

Demonstração. Considere então um conjunto Q exatamente como na Definição 3.13, cada s -upla ordenada proveniente dos r elementos do conjunto Q se deve a duas ações: primeiro devemos escolher os s elementos a partir dos r elementos do conjunto Q . Tal ação é, por definição, denotada por $\binom{r}{s}$. A seguir, como segunda ação, devemos permutar os s elementos escolhidos em s posições, ou seja, de $A_{s,s} = P_s = s!$. Logo, pelo princípio multiplicativo **parte I**, temos:

$$A_{r,s} = s! \cdot \binom{r}{s}.$$

Em particular, segue que:

$$\binom{r}{s} = \frac{A_{r,s}}{s!} = \frac{r!}{s!(r-s)!}.$$

□

Observação 3.13. A Equação 31 também pode ser demonstrada analiticamente, como segue.

Demonstração. Observe que o número de subconjuntos que podemos obter na escolha de s elementos dentre os r elementos de um conjunto finito, assim denotado por $\binom{r}{s}$, está implícito a escolha de s elementos para usarmos e $(r - s)$ elementos para não usarmos. Equivalentemente a isso, segue que a partir dos r elementos do conjunto devemos decidir de quantas maneiras podemos dividir s elementos para formar um subconjunto e os $(r - s)$ elementos remanescentes para formar o outro subconjunto. Agora, para efeito de simplificação da contagem, chamemos esses elementos de objetos, todos distintos entre si, e coloquemo-los em fila. Assim, após colocarmos os r objetos em fila façamos uma divisão nessa fila de modo a formar duas partes, a saber, uma com s elementos e outra com $r - s$ elementos. Como cada parte da bipartição foi contada uma vez para cada ordem dos objetos dentro de cada parte da fila, isto é foram contadas de $s! \cdot (r - s)!$ vezes, então devemos descontar dessa contagem a mais o fator redundante, o que nos leva a obter o segundo membro da equação: $\frac{r!}{s!(r - s)!}$

□

Observação 3.14. Temos três casos particulares:

1. Se $r, s \in \mathbb{N}$ e $r = s$, então $\binom{r}{r} = \frac{r!}{r!(r - r)!} = 1$. O único subconjunto com todos os elementos do conjunto é o próprio conjunto.
2. Se $r \in \mathbb{N}$ e $s = 0$, então $\binom{r}{0} = \frac{r!}{0!(r - 0)!} = 1$. O único subconjunto com zero elementos é o vazio.
3. Se $r = 0$ e $s = 0$, então $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0 - 0)!} = 1$. O único subconjunto do conjunto vazio é o próprio conjunto vazio.

Tais casos particulares mostram que a fórmula $\binom{r}{s} = \frac{r!}{s!(r - s)!}$ é válida para todo $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $s \leq r$.

Exemplo 3.16. O valor de uma aposta da mega sena é calculado da seguinte forma: a partir da marcação dos números (que pode ser de seis a quinze entre as sessenta opções de 1 a 60), calcula-se o número de subconjuntos de seis elementos formados a partir dos números selecionados na marcação. Em seguida multiplica-se esse número de subconjuntos pelo valor da aposta mínima que, atualmente, é de R\$ 3,50 por subconjunto. Desta forma, se um apostador desejar marcar dez números, quanto deverá pagar pela aposta?

Solução: primeiro vamos calcular o número de subconjuntos que é dado por:

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10 - 6)!} = 210$$

subconjuntos. Multiplicando por 3.50 vemos que o apostador deverá pagar R\$ 735,00.

Corolário 3.3 (Relação das Combinações Complementares). Para $0 \leq s \leq r$, temos:

$$\binom{r}{s} = \binom{r}{r-s} \quad (32)$$

Demonstraremos esse resultado de duas maneiras:

Primeira maneira: analiticamente. Ao selecionarmos s elementos para formarmos subconjuntos a partir de r elementos de um conjunto finito, digamos A , deixamos $(r - s)$ elementos remanescentes neste mesmo conjunto A . Desta forma, para cada combinação de s elementos, há uma combinação correspondente de $(r - s)$ elementos. Logo,

$$\binom{r}{s} = \binom{r}{r-s}.$$

□

Segunda maneira: pela fórmula. Observe que o primeiro membro da fórmula é dado por:

$$\binom{r}{s} = \frac{r!}{s!(r-s)!}. \quad (33)$$

Desenvolvendo-se o segundo membro, temos:

$$\binom{r}{r-s} = \frac{r!}{(r-s)![r-(r-s)]!} = \frac{r!}{(r-s)![r-r+s]!} = \frac{r!}{(r-s)!s!}. \quad (34)$$

Segue que o primeiro membro da Equação (33) é igual ao segundo da Equação (34) e, por conseguinte:

$$\binom{r}{s} = \binom{r}{r-s}.$$

□

Corolário 3.4. Se $C_{r,k} = C_{r,p}$ então $k = p$ ou $r = p + k$.

Corolário 3.5 (Relação de Stifel, também conhecida por regra de Pascal) Sejam $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq s \leq r$, então:

$$\binom{r}{s} = \binom{r-1}{s-1} + \binom{r-1}{s} \quad (35)$$

Demonstraremos esse resultado de duas maneiras:

Primeira maneira: analiticamente. Como já sabemos, podemos selecionar s elementos para formarmos subconjuntos a partir de r elementos de um conjunto finito de $\binom{r}{s}$ maneiras. Tal seleção nada mais é do que tomarmos os subconjuntos que contém um elemento particular, que serve como referência, o que pode ser feito de $\binom{r-1}{s-1}$ maneiras, pois uma vez fixado esse elemento nos subconjuntos devemos escolher os outros $(s - 1)$ elementos que formarão os subconjuntos a partir dos $(r - 1)$ elementos restantes do

conjunto. A esses subconjuntos devemos acrescentar aqueles subconjuntos que não possuem o elemento de referência, o que pode ser feito de $\binom{r-1}{s}$ maneiras, pois uma vez descartado do conjunto tal elemento de referência, restam $r - 1$ elementos entre os quais serão selecionados s elementos para formar os outros subconjuntos. Logo,

$$\binom{r}{s} = \binom{r-1}{s-1} + \binom{r-1}{s}.$$

□

Segunda maneira: pela fórmula. A partir do segundo membro da equação, temos:

$$\begin{aligned} \binom{r-1}{s-1} + \binom{r-1}{s} &= \frac{(r-1)!}{(r-s)!(s-1)!} + \frac{(r-1)!}{(r-s-1)!s!} = \\ &= \frac{(r-1)!s}{(r-s)!(s-1)!s} + \frac{(r-s)(r-1)!}{(r-s)(r-s-1)!s!} = \frac{[s + (r-s)](r-1)!}{(r-s)!s!} = \\ &= \frac{r(r-1)!}{(s-r)!r!} = \frac{r!}{(r-s)!s!} = \binom{r}{s} \end{aligned}$$

□

Corolário 3.6. Se Q é um conjunto finito com r elementos, digamos $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_r\}$, então Q possui $\binom{r-k}{s-k}$ subconjuntos com s elementos obtidos a partir dos elementos de Q e tais que k deles sempre figurem nos subconjuntos. Com $r, s, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 \leq k \leq s \leq r$.

Demonstração. Fixando os k elementos em cada subconjunto, devemos escolher os outros $s - k$ elementos a partir dos $(r - k)$ elementos do conjunto. □

Exemplo 3.17. Desejo formar um time de futsal (composto por 5 jogadores) a partir de oito jogadores que jogam em quaisquer posições. Entretanto, um dos oito jogadores é craque no futsal e, por isso, desejo que ele figure em quaisquer dos times que eu forme. De quantas maneiras diferentes posso formar esse time?

Solução: De acordo com o Corolário 3.6, esse time pode ser formado de:

$$\binom{8-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35 \text{ maneiras diferentes.}$$

Corolário 3.7. Se M é um conjunto finito com n elementos, digamos $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, então M possui $\binom{n-k}{t}$ subconjuntos com t elementos obtidos a partir dos elementos de M e tais que k deles não figurem nos subconjuntos. Com $n, t, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 \leq k \leq t \leq n$.

Demonstração. Devemos escolher os t elementos de cada subconjunto a partir dos $n - k$ elementos do conjunto. □

Exemplo 3.18. *Suponha agora que eu queira formar um quarteto de futevôlei a partir de oito jogadores que jogam em quaisquer posições. Entretanto, dois dos oito jogadores são péssimos jogadores de futevôlei e, por isso, desejo que eles não figurem em quaisquer dos times que eu forme. De quantas maneiras diferentes posso formar esse time?*

Solução: De acordo com o Corolário 3.7, esse time pode ser formado de:

$$\binom{8-2}{4} = \binom{6}{4} = 15 \text{ maneiras diferentes.}$$

Corolário 3.8. *Se N é um conjunto finito com u elementos, digamos $N = \{n_1, n_2, \dots, n_u\}$, então N possui $\binom{u}{v} - \binom{u-k}{v}$ subconjuntos com v elementos obtidos a partir dos elementos de N e tais que pelo menos um de k elementos figurem nos subconjuntos. Com $u, s, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 \leq k \leq v \leq u$.*

Demonstração. Observe que essa contagem é equivalente a elencar todos os subconjuntos com v elementos, o que pode ser feito de $\binom{u}{v}$ maneiras e dele subtrair os subconjuntos que não figurem os k elementos, o que acontece de $\binom{u-k}{v}$ maneiras. □

Exemplo 3.19. *Suponha que um graduando em bacharelado em matemática deseje se matricular em cinco disciplinas neste semestre entre as oito disciplinas que faltam para ele se formar. O graduando não tem restrições quanta às disciplinas que faltam, no entanto, devido à dificuldade em encontrar vaga em duas das oito disciplinas, ele deseja que pelo menos uma dessas disciplinas esteja presente em sua proposta de matrícula. De quantas formas diferentes esse graduando pode fazer sua proposta de matrícula para esse semestre?*

Solução: De acordo com o Corolário 3.8, ele pode fazer a proposta de matrícula de:

$$\binom{8}{5} - \binom{8-2}{5} = \binom{8}{5} - \binom{6}{5} = 50 \text{ maneiras diferentes.}$$

Corolário 3.9. *Se V é um conjunto finito com s elementos, digamos $V = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$, então V possui $\binom{s}{r} - \binom{s-k}{r}$ subconjuntos com r elementos obtidos a partir dos elementos de V e tais que k desses elementos não figurem ao mesmo tempo nos subconjuntos. Com $s, r, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 \leq k \leq r \leq s$.*

Demonstração. Observe que essa contagem é equivalente a elencar todos os subconjuntos com r elementos, o que pode ser feito de $\binom{s}{r}$ maneiras e dele subtrair os subconjuntos que figuram ao mesmo tempo os k elementos. □

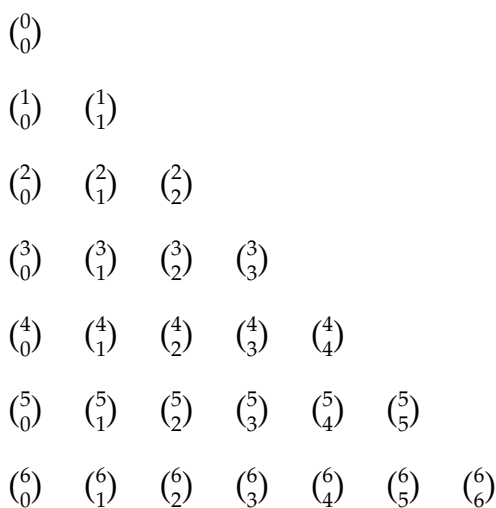
Exemplo 3.20. Num grupo de nove atletas, entre os quais dois deles se recusam a jogar juntos, desejamos formar um time com cinco jogadores. De quantas maneiras podemos formar esse time?

Solução: Pelo Corolário 3.9 podemos formar esse time de:

$$\binom{9}{5} - \binom{9-2}{5-2} = \binom{9}{5} - \binom{7}{3} = 91 \text{ maneiras distintas.}$$

Definição 3.14 (Triângulo de Pascal). Disposição em forma triangular de infinitos números binomiais $\binom{p}{q}$, onde p e q representam respectivamente o número da linha e o número da coluna em que cada um desses números se localizam nessa disposição (vide Figura 10).

Figura 10 – Triângulo de Pascal



Fonte: <http://tex.stackexchange.com/questions/17522/pascals-triangle-in-tikz>

Teorema 3.10 (Teorema das linhas (assim chamado em referência a soma das linhas do triângulo de Pascal)). Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n \geq 0$, vale:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \tag{36}$$

Demonstração. Como as parcelas do primeiro membro da equação representam todos os subconjuntos possíveis de um conjunto com n elementos, então pelo Teorema 3.5 sua soma é igual a 2^n .

□

Exemplo 3.21 (Adaptado de Lima et al.(2006b)). Num salão há dez lâmpadas que podem ser acesas individualmente. De quantos modos diferentes podemos acender as luzes desse salão?

Solução: Pelo Teorema 3.10 :

$$C_{10,0} + C_{10,1} + \dots + C_{10,10} = 2^{10}.$$

Mas, como queremos que pelo menos uma lâmpada seja acesa, então devemos subtrair deste total o número de subconjuntos em que todas as lâmpadas estejam apagadas. O que acontece de $2^{10} - C_{10,0} = 1024 - 1 = 1023$ maneiras.

Exemplo 3.22 (Adaptado de Spiegel(1956)). Um homem possui em seu bolso uma cédula de R\$20,00, uma cédula de R\$10,00, uma cédula de R\$5,00 e uma cédula de R\$2,00. De quantas maneiras diferentes esse homem pode retirar uma quantia de dinheiro do bolso?

Solução: Pelo Teorema 3.10 obtemos $2^4 - 1 = 15$ maneiras.

Exemplo 3.23 (Extraído de Spiegel(1956), tradução nossa.). Temos à disposição cinco tons diferentes de corantes verdes, quatro tons diferentes de corantes azuis e três tons diferentes de corantes vermelhos. De quantas maneiras diferentes podemos selecionar corantes tais que pelo menos um seja verde e o outro seja azul?

Solução: de $(2^5 - 1) \cdot (2^4 - 1) \cdot (2^3) = 31 \cdot 15 \cdot 8 = 3720$ modos.

Proposição 3.1 (Soma de uma coluna do triângulo de Pascal). Para $n, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 \leq b \leq m$, vale:

$$\sum_{j=0}^n \binom{j}{b} = \binom{n+1}{b+1}. \quad (37)$$

Demonstração. Provaremos por indução finita em n . Caso base: para $n = 0$ a equação se verifica, pois pela definição de número binomial, temos:

$$\binom{1}{b+1} = \begin{cases} 1, & \text{se } b = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (38)$$

Como hipótese de indução suponha que para **algum** $n \geq 1$ tenhamos:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{j}{b} = \binom{n}{b+1}.$$

Então,

$$\sum_{j=0}^n \binom{j}{b} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j}{b} + \binom{n}{b},$$

que, pela hipótese de indução estabelece:

$$\sum_{j=0}^n \binom{j}{b} = \binom{n}{b+1} + \binom{n}{b}.$$

Pela relação de Stifel, Corolário 3.5, temos:

$$\sum_{j=0}^n \binom{j}{b} = \binom{n+1}{b+1}.$$

□

Exemplo 3.24. Um homem, fez a seguinte estratégia para tentar ganhar na mega-sena: apostou seis números em um cartão. Depois, fez outra aposta, marcando sete números em outro cartão. Não satisfeito, continuou apostando de modo que a aposta subsequente diferísse da anterior pela marcação de um número. Se o homem fez esse processo até fazer a marcação de quinze números, em quantas senas o homem apostou?

Solução: Observe que a Proposição 3.1 é equivalente a:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

$$\text{Logo, ele apostou em: } \binom{6}{6} + \binom{7}{6} + \dots + \binom{15}{6} = \binom{16}{7} = 11440 \text{ senas.}$$

Proposição 3.2. Para $m, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e tal que $0 \leq s \leq m$, temos:

$$\binom{m}{s} \cdot s = m \cdot \binom{m-1}{s-1} \quad (39)$$

Demonstraremos esse resultado de duas maneiras:

Primeira maneira: através de manipulação algébrica. Desenvolvendo o primeiro membro:

$$\begin{aligned} \binom{m}{s} \cdot s &= \frac{m!}{(m-s)! \cdot s!} \cdot s = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-s)! \cdot s \cdot (s-1)!} \cdot s = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-s)! \cdot (s-1)!} \\ &= \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-s-1+1)! \cdot (s-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(s-1)! \cdot [(m-1) - (s-1)]!} = m \binom{m-1}{s-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

□

Segunda maneira: analiticamente, por argumentos combinatórios. Observe que o primeiro membro:

$$\binom{m}{s} \cdot s,$$

pode ser entendido como o número de maneiras de escolher subconjuntos com s elementos a partir de um conjunto com m elementos e, em seguida, escolher um elemento particular entre os s elementos de um desses subconjuntos. Mas isso é equivalente a escolher um elemento particular a partir de um conjunto com m elementos e, então, escolher os outros $(s-1)$ elementos que completam o subconjunto a partir dos $(m-1)$ elementos remanescentes do conjunto, o que é justamente o segundo membro:

$$m \cdot \binom{m-1}{s-1}.$$

□

Exemplo 3.25. Sérgio Soares, técnico do Bahia, deve decidir entre os dezoito jogadores que dispõe aqueles que serão os titulares e, entre esses titulares, deve decidir qual deles será o capitão. Sabendo que todos os jogadores titulares têm qualificação para serem capitães, de quantas maneiras Sérgio Soares pode tomar essas decisões?

Solução: Escolhido o time titular, o que pode ser feito de $\binom{18}{11}$ maneiras, há 11 modos de escolher o capitão. Logo, há:

$$\binom{18}{11} \cdot 11 = 350064 \text{ maneiras.}$$

Outro jeito de resolver seria pela Equação 39:

$$18 \cdot \binom{17}{10} = 350064 \text{ maneiras.}$$

Proposição 3.3. Para $p, q, r \in \mathbb{N}\{0\}$, com $0 \leq p \leq q \leq r$

$$\binom{r}{q} \cdot \binom{q}{p} = \binom{r}{p} \cdot \binom{r-p}{q-p} \quad (41)$$

Demonstraremos esse resultado de duas maneiras:

Primeira maneira: através de manipulação algébrica. Desenvolvendo o primeiro membro:

$$\begin{aligned} \binom{r}{q} \cdot \binom{q}{p} &= \frac{r!}{(r-q)! \cdot q!} \cdot \frac{q!}{(q-p)! \cdot p!} = \frac{r!}{p!(r-q)! \cdot (q-p)!} \\ &= \frac{r!}{p!(r-p)!} \cdot \frac{(r-p)!}{(r-q) \cdot (p-q)!} = \binom{r}{p} \cdot \binom{r-p}{q-p} \end{aligned} \quad (42)$$

□

Segunda maneira: analiticamente, por argumentos combinatórios. Observe que o primeiro membro:

$$\binom{r}{q} \cdot \binom{q}{p},$$

pode ser entendido como o número de maneiras de escolher subconjuntos com q elementos a partir de um conjunto com r elementos e, em seguida, escolher um subconjunto com p elementos a partir dos elementos de um daqueles subconjuntos com q elementos. Mas isso é equivalente a escolher um subconjunto com p elementos a partir de um conjunto com r elementos e, então, escolher os outros $(q-p)$ elementos que completam o subconjunto a partir dos $(r-p)$ elementos remanescentes do conjunto, o que é justamente o segundo membro:

$$\binom{r}{p} \cdot \binom{r-p}{q-p}.$$

□

Exemplo 3.26. O plantel do time do Bahia é de vinte e quatro jogadores, o técnico deve escalar primeiramente os dezoito jogadores que irão para a partida e, em seguida, desses dezoito jogadores, ele deverá definir quais são os titulares. De quantas maneiras o técnico poderá fazer isso?

Solução: a primeira etapa é feita de $\binom{24}{18}$ modos. A seguir, se escolhe o time titular de $\binom{18}{11}$ maneiras, logo há:

$$\binom{24}{18} \cdot \binom{18}{11} = 4283383104.$$

Outro jeito de resolver seria pela Equação 41:

$$\binom{24}{11} \cdot \binom{13}{7} = 4283383104.$$

Teorema 3.11 (Convolução de Vandermonde). *Sejam $i, p, q, r \in \mathbb{N}\{0\}$. Então:*

$$\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \cdot \binom{q}{p-i} = \binom{r+q}{p} \quad (43)$$

Analiticamente por argumentos combinatórios. Seja um conjunto composto por $r + q$ elementos, r deles tendo uma determinada característica, digamos característica “a”, e os outros q elementos tendo outra característica, digamos “b”, então o número de maneiras de formarmos subconjuntos com p elementos a partir dos elementos deste conjunto é $\binom{r+q}{p}$ correspondente ao segundo membro da equação. Por outra parte, observe que o número de maneiras que podemos selecionar i elementos com a característica “a” e $(p - i)$ de selecionarmos os elementos com a característica “b” é dada por $\binom{r}{i} \cdot \binom{q}{p-i}$; assim a soma de todos esses produtos, no primeiro membro, devem ser iguais ao resultado do segundo membro.

□

Exemplo 3.27. Entre os vinte e quatro jogadores do plantel do Bahia, há quatro jogadores com menos de vinte anos de idade e vinte jogadores com vinte ou mais anos. De quantas maneiras Sérgio Soares pode escalar o time com onze jogadores?

Solução: Ao escalar os onze jogadores ele terá o seguinte número de escolhas:

$$\binom{4}{0} \cdot \binom{20}{11} + \binom{4}{1} \cdot \binom{20}{10} + \binom{4}{2} \cdot \binom{20}{9} + \binom{4}{3} \cdot \binom{20}{8} + \binom{4}{4} \cdot \binom{20}{7} = 2496144 \text{ maneiras.}$$

Outra maneira, muito mais simples por sinal, é usando a Convolução de Vandermonde, Equação 43:

$$\binom{16+8}{11} = 2496144.$$

Definição 3.15 (Permutações com repetição, também chamadas de permutações completas.). *Considere um conjunto C com c elementos. Uma permutação com repetição é uma*

configuração na qual a partir dos c elementos de C constitui-se seqüências, s -uplas ordenadas, em que pelo menos um elemento de cada seqüência deva ser repetido uma ou mais vezes de modo que a soma do número de repetições dos elementos de cada seqüência seja igual a s e não necessariamente igual ao tamanho do conjunto C .

Observação 3.15. Aqui chamamos a atenção para o fato de que, diferentemente da contagem de elementos de um conjunto, elementos repetidos são contados como se fossem diferentes na determinação do tamanho da seqüência. Assim, por exemplo, são triplas ordenadas de mesmo tamanho: (a_1, a_2, a_3) e (a_1, a_1, a_1) .

Proposição 3.4. O número de r -uplas ordenadas constituída de α_1 elementos iguais a e_1 e os demais são todos distintos um ao outro e de e_1 , assim denotado por $P_r^{\alpha_1}$, é:

$$P_r^{\alpha_1} = \frac{r!}{\alpha_1!}. \quad (44)$$

Demonstração. Como em cada r -upla ordenada há r posições então podemos, arbitrariamente, escolher $r - \alpha_1$ posições para colocar os elementos todos distintos um ao outro e de e_1 . Tal escolha é feita de $\binom{r}{r-\alpha_1}$ maneiras. Segue que para cada escolha de $(r - \alpha_1)$ posições, há, para cada uma delas, $(r - \alpha_1)!$ maneiras em que podem ser permutados os $(r - \alpha_1)$ elementos. Portanto, pelo princípio multiplicativo **parte I**, temos:

$$P_r^{\alpha_1} = \binom{r}{r - \alpha_1} \cdot (r - \alpha_1)! = \frac{r!}{[r - (r - \alpha_1)]! \cdot (r - \alpha_1)!} \cdot (r - \alpha_1)! = \frac{r!}{\alpha_1!}.$$

□

Proposição 3.5. O número de r -uplas ordenadas constituída de α_1 elementos iguais a e_1 e de α_2 elementos iguais a e_2 os demais são todos distintos um do outro e de e_1 e e_2 , assim denotado por $P_r^{\alpha_1, \alpha_2}$, é:

$$P_r^{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{r!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2!}. \quad (45)$$

Demonstração. Como em cada r -upla ordenada há r posições então podemos, arbitrariamente, escolher $r - \alpha_2$ posições para colocar todos os elementos, exceto os iguais a e_2 . Tal escolha é feita de $\binom{r}{r-\alpha_2}$ maneiras. Segue que para cada escolha de $(r - \alpha_2)$ posições, há, para cada uma delas e pela Proposição 3.4, $\frac{(r-\alpha_2)!}{\alpha_1!}$ maneiras em que podem ser permutados os $(r - \alpha_2)$ elementos. Portanto, pelo princípio multiplicativo **parte I**, temos:

$$P_r^{\alpha_1, \alpha_2} = \binom{r}{r - \alpha_2} \cdot \frac{(r - \alpha_2)!}{\alpha_1!} = \frac{r!}{[r - (r - \alpha_2)]! \cdot (r - \alpha_2)!} \cdot \frac{(r - \alpha_2)!}{\alpha_1!} = \frac{r!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2!}.$$

□

Exemplo 3.28 (Extraído do ENA-PROFMAT(2012)). *Um engenheiro fará uma passarela de 10 metros de comprimento, ligando a porta da casa ao portão da rua. A passarela terá 1 metro de largura e ele, para revesti-la, dispõe de 10 pedras quadradas de lado 1 metro e 5 pedras retangulares de 1 metro por 2 metros. Todas as pedras são da mesma cor, as pedras de mesmo tamanho são indistinguíveis umas das outras e o rejunte ficará aparente, embora com espessura desprezível. De quantas maneiras ele pode revestir a passarela?*

Solução (alternativa): Observe inicialmente que se utilizarmos apenas pedras quadradas de lado 1 metro, devemos formar r -uplas ordenadas de tamanho $r = 10$ com 10 elementos repetidos. Por outro lado, cada vez que utilizamos uma pedra retangular no lugar em que antes havia pedras quadradas, devemos substituir duas pedras quadradas por uma retangular e, ao mesmo tempo, devemos descontar 1 unidade do tamanho da r -upla, ou seja, teremos (vide Tabela 2): Desta forma, há $1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$ maneiras do engenheiro revestir a passarela.

Tabela 2 – Composição da passarela.

Número de pedras retangulares	Maneiras de revestir a passarela
0	$P_{10}^{10} = 1$
1	$P_9^{8,1} = 9$
2	$P_8^{6,2} = 28$
3	$P_7^{4,3} = 35$
4	$P_6^{2,4} = 15$
5	$P_5^5 = 1$

Fonte: elaborado pelo autor.

Teorema 3.12. *Considere que cada s -upla ordenada obtida a partir dos r elementos de um conjunto $W = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ é tal que cada elemento constituinte da s -upla possa ser repetido um número de vezes, digamos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ (onde α_1 indica o número de vezes que o elemento w_1 se repete, α_2 indica o número de vezes que o elemento w_2 se repete e assim sucessivamente, ou seja, o índice representa a correspondência e não necessariamente o número de vezes) e tal que a soma dos α_i relativos a cada w_i , com $1 \leq i \leq r$, que constituem cada s -upla seja igual a s (observe que não é necessariamente igual a r). Portanto, o número de s -uplas ordenadas com as características descritas neste teorema é dado por:*

$$P_s^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} = \frac{s!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_r!} \tag{46}$$

Demonstração. Sejam então o conjunto $W = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ e os respectivos números de vezes em que cada elemento se repete $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Como em cada s -upla ordenada há s posições então podemos escolher de C_{s, α_1} posições para colocar os α_1 elementos w_1 . De maneira análoga, escolhemos a posição dos α_2 elementos w_2 entre as $(s - \alpha_1)$ posições remanescentes, o que pode ser feito de $C_{s - \alpha_1, \alpha_2}$ modos. Com o mesmo raciocínio teremos

$C_{s-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3}$ posições para os α_3 elementos w_3 entre as $(s - \alpha_1 - \alpha_2)$ posições remanescentes e assim por diante até a escolha do último elemento.

Daí, segue pelo princípio multiplicativo **parte I** que:

$$\begin{aligned}
 P_s^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r} &= C_{s,\alpha_1} \cdot C_{s-\alpha_1,\alpha_2} \cdot C_{s-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3} \cdot \dots \cdot C_{s-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_r} = \\
 &= \frac{s!}{(s-\alpha_1)! \cdot \alpha_1!} \cdot \frac{(s-\alpha_1)!}{(s-\alpha_1-\alpha_2)! \cdot \alpha_2!} \cdot \frac{(s-\alpha_1-\alpha_2)!}{(s-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)! \cdot \alpha_3!} \cdot \dots \\
 &\dots \cdot \frac{(s-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{r-1})!}{(s-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\dots-\alpha_r)! \cdot \alpha_r!} \\
 &= \frac{s!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3! \cdot \dots \cdot \alpha_r! \cdot (s-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\dots-\alpha_r)!} = \\
 &= \frac{s!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3! \cdot \dots \cdot \alpha_r! \cdot [s - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_r)]!} \\
 &= \frac{s!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3! \cdot \dots \cdot \alpha_r! \cdot [s - s]!} = \\
 &= \frac{s!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3! \cdot \dots \cdot \alpha_r! \cdot 0!} = \frac{s!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3! \cdot \dots \cdot \alpha_r!}
 \end{aligned} \tag{47}$$

□

Definição 3.16 (Partições ordenadas). *Seja o conjunto finito C formado por n subconjuntos não vazios, digamos C_1, C_2, \dots, C_n . Uma partição ordenada do conjunto C é a **seqüência** de conjuntos:*

$$(C_1, C_2, \dots, C_n), \text{ com } \begin{cases} C_i \cap C_j = \emptyset, \text{ para } i \neq j \\ \bigcup_{s=1}^n C_s = C. \end{cases} \tag{48}$$

Exemplo 3.29. *Adaptado de Lima et al. (2006b). De quantos modos é possível dividir doze atletas em três times de quatro atletas, denominados Bahia, Vitória e Jacobina?*

Solução: Como as denominações tornam distintas as formações dos times, estamos diante de uma partição ordenada. Assim, temos $\binom{12}{4}$ maneiras de escalar o Bahia. A seguir, a partir das oito pessoas restantes, temos $\binom{8}{4}$ maneiras de escalar o Vitória. E, a partir das quatro pessoas remanescentes, temos $\binom{4}{4}$ maneiras de escalar o Jacobina. Logo, há:

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 34650 \text{ maneiras.}$$

Definição 3.17 (Partições não ordenadas). *Seja o conjunto finito C formado por n subconjuntos não vazios, digamos C_1, C_2, \dots, C_n . Uma partição não ordenada do conjunto C é a **família** (conjunto cujos elementos são conjuntos) de conjuntos:*

$$\{C_1, C_2, \dots, C_n\}, \text{ com } \begin{cases} C_i \cap C_j = \emptyset, \text{ para } i \neq j \\ \bigcup_{s=1}^n C_s = C. \end{cases} \tag{49}$$

Exemplo 3.30. *Adaptado de Lima et al. (2006b). De quantos modos é possível dividir doze atletas em três times de quatro atletas?*

Solução: Como não há distinções para as formações dos times, estamos diante de uma partição não ordenada. Assim, faremos exatamente como no Exemplo 3.29, todavia a distinção arbitrária aplicada aqui deve ser descontada já que a ordem dos times não faz diferença na contagem. Logo, descontando as possíveis permutações dos times tais como se esses fossem distintos, temos:

$$\frac{34650}{3!} = 5775 \text{ maneiras.}$$

Definição 3.18 (Combinações com repetição, também chamadas de combinações completas.). Considere um conjunto $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Uma combinação com repetição é uma configuração na qual a partir dos n elementos distintos de C são tomados s elementos distintos ou não para se constituir conjuntos.

Teorema 3.13. Seja o conjunto $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ com n elementos. Então o número de maneiras de se selecionar s elementos, distintos ou não, entre os n elementos distintos de C , sendo tal número denotado por $CR_{n,s}$, é:

$$CR_{n,s} = \binom{n+s-1}{s} = \binom{n+s-1}{n-1} \quad (50)$$

Demonstração. Indiquemos por números inteiros não negativos a quantidade de cada elemento distinto do conjunto C a ser tomada na combinação com repetição, digamos x_1, x_2, \dots, x_n , onde x_1 representa a quantidade de elementos iguais a c_1 que utilizaremos para formar nosso novo conjunto, x_2 representa a quantidade de elementos iguais a c_2 e assim sucessivamente. Evidentemente, a $CR_{n,s}$ pode ser interpretada dessa forma como o número de soluções em inteiros não negativos de $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$. Para resolvermos essa equação considere a seguinte estratégia: separemos cada incógnita pelo símbolo |, o que é possível através de $(n-1)$ símbolos do tipo |. Depois, representemos os valores maiores do que zero assumidos por cada incógnita pelo símbolo ★ repetidos o número de vezes correspondentes ao valor da incógnita, sendo necessário, portanto, s símbolos do tipo ★. Ao fazermos isso, nosso problema se torna análogo ao da permutação de $(n-1)$ símbolos do tipo | e s símbolos do tipo ★, ou seja, da permutação com repetição (vide Teorema 3.12):

$$CR_{n,s} = P_{n-1+s}^{s,n-1} = \frac{(n+s-1)!}{(n-1)!s!} = \binom{n+s-1}{s} = \binom{n+s-1}{n-1}.$$

Onde a última igualdade da esquerda para direita se deve ao Corolário 3.3. □

Exemplo 3.31 (Extraído do ENQ-PROFMAT(2013.1)). *Maria tem 10 anéis idênticos e quer distribuí-los pelos 10 dedos de suas mãos. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isto? Suponha que é possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos.*

Solução: Seja x_1 a quantidade de anéis que podem ser colocados no primeiro dedo da esquerda para direita de Maria, x_2 a quantidade de anéis que podem ser colocados no segundo dedo e assim sucessivamente. Portanto, podemos modelar o problema como sendo o de encontrar o número de soluções inteiras e não negativa da equação: $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 10$ que é igual a:

$$CR_{10+10-1,10-1} = CR_{19,9} = \frac{19!}{9! \cdot 10!} = 92378 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 3.32 (Extraído do ENQ-PROFMAT(2013.1)). *Suponha agora que os 10 anéis sejam todos distintos. De quantas maneiras Maria pode distribuí-los em seus dedos? Aqui também, suponha que é possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos e que a ordem dos anéis nos dedos é relevante.*

Solução: Como os anéis são agora todos distintos, para cada configuração obtida no Exemplo 3.31 há $10!$ permutações dos anéis. Logo, há:

$$\frac{19!}{9! \cdot 10!} \cdot 10! = 92378 \cdot 10! \text{ maneiras.}$$

Fundamentação teórica sobre Análise Combinatória (parte II): alusão à habilidade para resolução de problemas

4.1 Heurística sugerida por diversos autores para resolução de problemas matemáticos (dos mais gerais aos específicos de Contagem)

Antes de se pensar em resolução de problemas, faz-se necessária a compreensão da natureza do problema propriamente dita. Nesse sentido, Butts (1998, p.33), divide o conjunto de problemas matemáticos em cinco categorias assim intituladas:

- i Exercícios de reconhecimento;
- ii Exercícios algorítmicos;
- iii Problemas de aplicação;
- iv Problemas de pesquisa aberta;
- v Situações-problema.

A primeira categoria refere-se aos problemas que requerem o reconhecimento de um enunciado de um teorema e/ou uma definição e/ou um fato específico essencial para estratégia de resolução; a segunda, como subentendido, são os problemas cujos procedimentos de resolução são aqueles que seguem um passo-a-passo; já na terceira categoria, os problemas envolvem a aplicação de algoritmos; a quarta, enfatiza os problemas cujos enunciados não deixam implícitas de forma evidente estratégias que permitam resolvê-los (algumas expressões comuns dos problemas desta categoria são: “Prove que...”, “Encontre todos...” entre outras); A última, segundo Butts (1998, p.36): “Tipifica-se melhor essa categoria com a advertência de Henry Pollak: ‘Em vez de dizer

aos alunos: *Eis um problema; resolvam-no. Diga-lhes Eis uma situação; pensem nela*". Notoriamente, a grande maioria dos problemas em análise combinatória podem ser categorizados como situações-problema e, por este motivo, o trabalho em pauta prioriza a heurística associada à essa categoria de problemas.

Quanto ao conjunto de métodos de resolução de problemas matemáticos, assim chamado de heurística, este também pode ser categorizado segundo sua aplicação, ou melhor, estratégia específica de resolução de problemas. De acordo com Musser e Shaughnessy (1998, p.189), tais estratégias podem ser do tipo:

- i Tentativa-e-erro;
- ii Padrões;
- iii Resolver um problema mais simples;
- iv Trabalhar em sentido inverso;
- v Simulação.

Para Musser e Shaughnessy (1998, p.189), o primeiro tipo refere-se simplesmente à "aplicação das operações pertinentes às informações dadas". O segundo, refere-se ao raciocínio indutivo em que, a partir de casos particulares do problema, chega-se à solução através da generalização (MUSSER, G; SHAUGHNESSY, J., 1998). A seguir, o terceiro tipo, ainda segundo Musser e Shaughnessy (1998, p.194), envolve "a resolução de um 'caso particular' de um problema, ou um recuo temporário de um problema complicado para uma versão resumida". Já o quarto, "difere dos anteriores, pelo fato de partir do objetivo, ou do que deve ser provado, e não dos dados" (MUSSER, G;SHAUGHNESSY, J., 1998, p.196). Finalmente, o quinto tipo abrange a coleta de dados e ulterior tomada de decisão a partir desses dados e, para isso, frequentemente é necessário que a situação-problema seja reformulada para um ambiente matemático (MUSSER, G;SHAUGHNESSY, J., 1998, p.198). Schoenfeld (1998, p.14) acrescenta ainda que na análise e entendimento de um problema deve-se:

1. Sempre que possível, Desenhar um diagrama.
2. Examinar casos particulares para:
 - a) exemplificar o problema;
 - b) explorar várias possibilidades, por meio do estudo de casos;
 - c) buscar padrões de indução fazendo variar os parâmetros inteiros.

3. Procurar a simplificação do problema por meio da simetria ou da estratégia de utilizar um caso particular análogo aos demais cuja expressão típica é “sem prejuízo da generalidade”.

Quanto ao delineamento e planejamento da solução, o Schoenfeld (1998, p.14) enfatiza a necessidade de que o resolvidor esteja apto a descrever, a qualquer momento, o quê, como e por quê está desenvolvendo cada etapa da solução. Além disso, as soluções devem ser planejadas hierarquicamente, aqui entendemos como hierarquicamente os raciocínios indutivos por um lado e dedutivos por outro. Schoenfeld (1998, p.15) ainda ressalta a necessidade de testes para verificação de uma solução do problema:

Use estes testes específicos: A solução usa todos os dados? É adequada a estimativas razoáveis? Resiste a testes de simetria, análise de dimensões, escala? Use estes testes gerais: Pode ser obtida de forma diferente? Pode ser comprovada em casos particulares? Reduzida a resultados conhecidos? Pode gerar alguma coisa que você conhece?

No campo da análise combinatória, por sua vez, de acordo com Cerioli e Viana (2012, p.14-15), os principais problemas que são objeto de estudo são:

Problemas de existência:

Existe alguma configuração satisfazendo a uma dada especificação?

Problemas de contagem:

Quantas configurações existem, satisfazendo a uma dada especificação?

Problemas de enumeração:

Listar todas as configurações, que correspondem a uma dada especificação.

Problemas de otimização:

Qual é a melhor configuração (de acordo com um critério dado), satisfazendo a uma dada especificação?

Podemos citar como exemplo de problemas de existência o Princípio de *Dirichlet* (também chamado de Princípio da Casa dos Pombos/Gavetas) onde se deseja determinar apenas a existência ou inexistência de conjuntos que atendam a certas exigências e ou propriedades preestabelecidas e, em certos casos, em se havendo a existência, deve-se também mostrar uma ou mais configurações ilustrativas; quanto aos problemas de enumeração, em que se lista todas as configurações de acordo com critérios preestabelecidos, podemos citar como exemplo as funções geradoras e, como exemplo de problemas de otimização, podemos citar a teoria dos grafos.

Por outro lado, como esse trabalho é direcionado aos problemas de contagem, particularmente àqueles cuja aplicação está diretamente relacionada aos problemas de análise combinatória ensinados no ensino médio, os outros tipos de problemas só serão abordados quando tiverem aplicação direta no ensino médio como é o caso do princípio da inclusão e exclusão (PIE) que, aliás, também é um problema de existência. Outra razão para esse enfoque é o fato de Morgado et al. (1991, p.2) afirmarem que os dois tipos mais frequentes de problemas em Análise Combinatória são:

- 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições;
- 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Em relação aos problemas de contagem, Lima et al. (2006b) aconselham que se adote as seguintes estratégias de resolução:

Postura:

É imperativo nos colocarmos no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver quais decisões devemos tomar.

Divisão:

Se factível, Devemos dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.

Não adiar dificuldades:

A procrastinação de pequenas dificuldades costuma gerar imensas dificuldades posteriormente. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Por outro lado, Cerioli e Viana (2012, p.1) citam que a estratégia que é amiúde adotada no ensino de análise combinatória é a “Didática da Classificação dos Problemas” (que de agora em diante será referida simplesmente como (DCP)) cujo critério aplicado é:

1. Tentar aplicar o princípio multiplicativo, também chamado de princípio fundamental da contagem;

Se a tentativa for infrutífera, então:

1. Classificar o problema em problema de arranjo, problema de permutação ou problema de combinação;
2. Em seguida, aplicar a fórmula correspondente para resolver o problema.

Cerioli e Viana (2012) ainda acrescentam que a parte mais difícil para os estudantes que fazem uso da (DCP) é a classificação em problema “de arranjo” ou “de combinação” recorrendo à duas alternativas: a primeira consiste em perguntar-se: “A ordem importa?”. Caso a resposta seja positiva é arranjo, caso seja negativa, é combinação. A segunda alternativa é procurar exercícios resolvidos similares para se familiarizar com as estratégias de resolução. Entretanto, Cerioli e Viana (2012, p.3) advertem:

É fácil perceber que, apesar de se perpetuar por vários anos e ser amplamente empregada, a DCP é uma metodologia de pouca aplicabilidade. Isto decorre do fato de que muitos problemas, por exemplo os que são abordados nos contextos nos quais a combinatória de contagem é desenvolvida de maneira um pouco mais aprofundada, não podem ser classificados de acordo com o critério acima ou não podem ser resolvidos pela aplicação diligente de uma única fórmula.

O mesmo autor ainda reitera através de uma situação-problema a dificuldade de se aplicar a (DCP). Podemos também mostrar a dificuldade em utilizar esse método através da seguinte situação-problema extraída de Hazzan (1993):

Exemplo 4.1. *Obter o número de maneiras que nove 0's e seis 1's podem ser colocados em sequência de modo que dois 1's não compareçam juntos.*

Tente o leitor usar a (DCP) e verifique a dificuldade inerente à aplicação desse método. De fato,

O problema com a DCP é que ela é aplicada indiscriminadamente — como proposto em quase todos os livros didáticos em que a análise combinatória é abordada. Além disso, estas aplicações são feitas de maneira simplificada, não levando em conta o raciocínio combinatório intrínseco ao problema. Este não é apenas sintético (aplicação de fórmulas), mas também é analítico, no qual se deve: 1. determinar com exatidão os elementos que se quer contar; 2. procurar exemplos “concretos” destes elementos; 3. analisar as suas características; 4. entender e descrever como eles são formados; 5. e, só a partir daí, elaborar uma estratégia para efetivamente contá-los, possivelmente, até usando as fórmulas de arranjo, combinação ou permutação, além de outras. (CERIOLI;VIANA, 2012, p.3-4, grifo do autor)

A necessidade do pensamento analítico, tal como supracitado, pode ser melhor ilustrado na solução do Exemplo 4.1, como segue:

Disponemos os nove zeros da seguinte forma:

–0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0–

Fazendo isso temos dez posições possíveis (representada pelos traços) onde podemos colocar os 1's. Como há seis 1's, é necessário escolher seis lugares entre os dez existentes. O que acontece de $\binom{10}{6} = 210$ modos. Observe, nesse exemplo, que se fossemos utilizar a (DCP) teríamos problemas pois, como não é evidente o (PFC), recorreríamos às fórmulas de arranjo, combinação e permutação. Segue, pelo fato do enunciado mencionar a palavra "sequência" e esta remeter ao conceito de ordem, que se possa pensar equivocadamente em um arranjo ou em uma permutação em vez da combinação, esta última, a estratégia correta a se utilizar. Como se pode ver, o pensamento combinatório é tanto sintético quanto analítico e ambos são essenciais na resolução de problemas de contagem. Tal pensamento combinatório também é enfatizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio como segue:

A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. (BRASIL, 2002, p.126-127)

Como já visto no Exemplo 4.1, a utilização de certas palavras como parâmetro indicativo de estratégias de resolução de problemas não é uma maneira segura de resolver problemas em análise combinatória, embora, muitas vezes, elas de fato indiquem a estratégia de resolução como é o caso da palavra "pelo menos". Isso é reforçado por Garofalo e Lester (1987, apud Yahata, 2012, p.12, tradução do autor):

[...] estudantes acreditam que problemas verbais podem ser resolvidos por uma aplicação direta de uma ou mais operações aritméticas e que as operações corretas a serem usadas podem ser determinadas meramente pela identificação de palavras-chave; pouco planejamento ou busca de significado é necessário.

O mais indicado, então, é verificar cuidadosamente o contexto em que elas estão inseridas. Todavia, esta verificação depende da leitura e interpretação de textos que, atualmente no Brasil, tem sido um dos entraves para o ensino de matemática. Em reportagem à Folha de São Paulo o Dr. Marcelo Viana, segundo Alves e Versolato(2016, p.1), revela que (se referindo aos alunos brasileiros): “ 40% dos alunos não conseguem entender nem o enunciado de uma questão de matemática”. Desta forma, é difícil pensar em quaisquer metodologias para o ensino de problemas de contagem enquanto houver números tão desanimadores. Por outro lado, para aqueles outros 60% dos alunos que conseguem entender um enunciado de matemática, há esperança que dominem a heurística necessária para lidar com problemas de contagem. Para isso, Cerioli e Viana (2012, p.4-5) propõem a “Didática dos Princípios de Contagem, DPC”, que se baseia em cinco princípios que são aqui resumidos:

- i Leitura cuidadosa e reformulação da pergunta de forma mais simples e objetiva.
- ii Releitura da pergunta a fim de identificar objetos, configurações ou associações entre objetos e configurações que são de interesse na contagem.
- iii Deve-se entender como as configurações são formadas a partir dos objetos básicos, de acordo com o enunciado e destacando suas “características estruturais internas”.
- iv Elaborar uma descrição formal sobre a maneira pela qual uma configuração é formada a partir de objetos básicos levando em conta a natureza dos objetos usados na formação, a repetição ou a distinção, a ordem ou não em que estes objeto são usados, etc. Esta descrição deve ser elaborada de modo que todas as configurações, e somente elas, possam ser formadas a partir dos objetos básicos.
- v Utilizar a descrição obtida para elaborar uma estratégia de aplicação dos princípios básicos de contagem, que fornecerá o número total de configurações relativas à solução do problema proposto.

Realmente, tal proposta da Didática dos Princípios de Contagem pode ser considerado um avanço em relação à (DCP) por enfatizar a leitura cuidadosa e o pensamento combinatório como estratégia de resolução de problemas de contagem como reforça Morgado (1991, p.2):

[...] se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Assim, apesar de acreditarmos que não exista uma “fórmula mágica” para aprendizagem da Análise Combinatória e que, só através da resolução de muitos e variados problemas envolvendo esse assunto seja possível sua compreensão, também compartilhamos a ideia de que faz-se necessário o desenvolvimento do raciocínio combinatório em cuja essência se encontra a heurística da resolução de problemas matemáticos. Isso é corroborado pelo fato de que muitos professores, não obstante a passarem anos resolvendo e ensinando os mais variados e numerosos problemas em análise combinatória, ainda sintam dificuldade em resolverem problemas um pouco mais profundos nesta área, como afirma Costa (2003, apud Yahata, 2012, p.24):

[...] podemos constatar que os professores mostram certa insegurança, falta de conhecimentos básicos sobre o assunto e dificuldades em resolver a questão sem o auxílio de fórmulas como propomos no desenvolvimento do nosso quadro teórico.

Ou seja, tais professores não desenvolveram ou desenvolveram parcialmente o aludido pensamento combinatório. Portanto, a fim de desenvolver tal pensamento combinatório, é fundamental que se mostre as técnicas essenciais de contagem e se demonstre como usá-las da mesma forma que um aprendiz de marceneiro recebe seu *kit* de ferramentas e aprende como manuseá-lo, se nos permite a analogia.

4.2 Breve relato: uma experiência de emprego de Mapas Conceituais no ensino de Análise Combinatória

A dissertação de mestrado intitulada “Análise combinatória: uma aprendizagem significativa com mapas conceituais” cuja autoria é de Lima (2011), versa sobre a avaliação do uso de mapas conceituais como facilitador da aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio. Nesse sentido, a autora fundamentou sua dissertação na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e na estratégia do uso de mapas conceituais de J. Novak e B. Gowin que, também, guiou os procedimentos metodológicos inerentes à pesquisa. Em virtude do caráter experimental de sua dissertação, a autora (vide Lima(2011)) pautou os seguintes objetivos específicos, aqui resumidos:

1. Construir mapas conceituais do tipo hierárquico envolvendo Análise Combinatória.
2. Utilizar-se dos mapas conceituais construídos para a partir dos pressupostos ausubelianos resolver problemas em Análise Combinatória sem recorrer à exposição

de fórmulas e/ou memorização de estratégias prontas para resolver determinados problemas.

3. Avaliar a contribuição do uso de mapas conceituais na aprendizagem do aluno através de questionário.
4. Verificar por meio de questionário se houve a aprendizagem significativa nas turmas experimental e controle.

Quanto à justificativa para utilização dos mapas conceituais, a autora explica que apesar das diversas reformas no sistema de ensino brasileiro, é frequente o fato de muitos alunos não compreendem conceitos e ideias por falta de subsunçores que proporcionem a ancoragem de novos conceitos. Lima (2011, p.22) ainda acrescenta:

“Também observamos as várias dificuldades que os alunos enfrentam quando estão aprendendo o estudo da Análise Combinatória. Um dos problemas é aplicação do conteúdo através de fórmulas que para os alunos não têm muito sentido, se tornando muito abstrato e sem aprendizagem significativa. Acreditamos que essa aprendizagem poderia ser mais bem compreendida usando o Princípio Fundamental da Contagem – PFC como ponte subsunçora para o ensino da Análise Combinatória.

No desenvolvimento de sua dissertação a autora selecionou vinte questões envolvendo análise combinatória segundo diversos critérios preestabelecidos (relevância, objetivos educacionais entre outros). E, a partir dessas questões, elaborou os mapas conforme Ausubel (1980, apud Lima, 2011, p.73):

Para a elaboração de mapas conceituais, partimos dos princípios ausubelianos da ‘diferenciação progressiva’, em que os alunos devem aprender um conteúdo inicial (conceitos e ideias), e a partir desse conteúdo, associando progressivamente ao novo conteúdo fazendo uma distinção (diferenciação) entre esses conceitos. E da ‘reconciliação integrativa’, em que os conceitos originais buscam associações (reconciliadoras) entre si, interligando-se de forma expansiva e sistemática.

No total, a autora construiu vinte mapas versando sobre esses temas: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação (Simples, com repetição e circular), Arranjos (Simples e com repetição) e Combinatória (Simples) (vide Figuras 11 e 14). Além de construir mais cinco mapas resumindo os seguintes assuntos: PFC, Fatorial, Permutação, Arranjo e Combinação, totalizando, portanto, vinte e cinco mapas conceituais.

A intervenção foi feita da seguinte forma: foi aplicado um pré-teste envolvendo conhecimentos prévios sobre Análise Combinatória a duas turmas do segundo ano do ensino médio. Uma dessas turmas, considerada com maior facilidade para aprendizagem pelo professor regente, foi escolhida para ser a turma controle (recebendo, portanto, aulas tradicionais) e a outra seria a turma experimental em que as aulas seriam acompanhadas pelos mapas conceituais construídos pela autora (vide Figura 12). Durante as aulas, na turma experimental, os alunos construíram mapas conceituais simplificados utilizando *post-it* (adesivos) onde escreveriam “elementos”, “restrições” e “agrupamentos” com cores específicas de acordo com os exemplos dados nas aulas ou mesmo produziram mapas, nestes moldes, em folha de papel comum para resolver os exercícios (vide Figura 13). Isso, segundo a autora, facilitaria a familiarização com os mapas. Passado o período de intervenção, que foi do dia 18/05/2011 até o dia 15/06/2011, totalizando vinte horas-aula, foi aplicado um pós-teste da mesma forma que o pré-teste exceto pelo fato de ser permitida a consulta e, no caso da turma experimental, ser permitida a consulta extra aos mapas conceituais.

Para verificar os resultados da intervenção, a autora aplicou testes quantitativos de natureza experimental e testes qualitativos. Em relação ao testes quantitativos, Lima (2011, p.111), relata que: "O fato da turma experimental, ter se saído melhor nos resultados do pós-teste com relação à turma controle, não indica seguramente que tenha sido por causa do uso de mapas conceituais". E acrescenta:

Dessa forma, realizamos uma entrevista do tipo semi – estruturada, que segundo Appolinário (2009), trata-se de um roteiro previamente estabelecido que pode elucidar elementos que surgem de forma imprevista através das informações dadas pelo entrevistado, neste caso, alguns alunos da turma experimental, para que pudéssemos saber o que influenciou nas resoluções das questões do pós-teste e se os mapas conceituais contribuíram para a aprendizagem de tais conceitos e cálculos envolvidos no questionário. (LIMA, 2011, p.111)

Após a aplicação de tal questionário a autora, Lima (2011, p.118), conclui que:

Diante destas análises, é possível diagnosticar que uma estratégia pautada na Aprendizagem Significativa, com o uso dos mapas conceituais, proporciona um diferencial na efetivação da aprendizagem significativa de conceitos. Tomando esse estudo por base, é possível aceitar tais caminhos como razoavelmente seguros para a realização de mapas conceituais na aprendizagem de qualquer conteúdo matemático.

Pelo que se pode averiguar à luz da literatura presente neste trabalho e da nossa própria práxis pedagógica é que, no tocante à heurística, a proposta da autora apresenta muitos aspectos positivos os quais, alguns deles, são aqui elencados:

- ✓ Ajuda a identificação de elementos-chave na resolução de problemas, a saber: “elementos”, “restrições” e “agrupamentos” o que está de acordo com as estratégias de resolução de problemas sugeridas por Lima et al. (2006b).
- ✓ Facilita a aprendizagem significativa pela sua disposição hierárquica.
- ✓ Permite a associação entre ideias aparentemente díspares graças à reconciliação integrativa.
- ✓ propicia uma visão mais ampla da análise combinatória para quem faz uso do mesmo.
- ✓ É possível evidenciar, para o professor ou para o próprio aluno, lacunas ou falhas conceituais relacionadas à análise combinatória pela exteriorização do conhecimento através da representação visual e, por conseguinte, permite a intervenção do professor ou do próprio aluno no processo de aprendizagem.

Por outro lado, os mapas tal como foram concebidos pela autora têm uma natureza mais procedimental (no sentido amplo da palavra) do que estratégica. Tanto o é, que fora necessária a construção de um mapa diferente específico para cada tipo de questão a ser resolvida (vide Figuras 11 e 14), totalizando vinte mapas específicos. O que, como se pode perceber, é um número elevado de material para o tratamento de apenas vinte questões como a própria autora reconhece, Lima (2011, P.99): “Alguns alunos da turma experimental ainda comentaram que se formos verificar temos mais mapas do que folhas no caderno, fazendo referência à quantidade de material recebido nas aulas [...]”. Entretanto, a mesma autora esclarece que os alunos acrescentaram, “o uso de mapas diminui a quantidade numerosa de volumes de livros que temos que trazer para a escola, já que se concentra uma grande quantidade de informações” (LIMA, 2011, p.99). Contudo, do ponto de vista do professor, acreditamos que seria pouco prático se toda vez que o professor trabalhar com um tipo de exercício diferente tenha, para isso, que elaborar um mapa específico para este exercício. Além disso, muitos tipos de problemas em análise combinatória não se “encaixam” na estrutura “elementos” ↔ “restrições” ↔ “agrupamentos” como exemplo citamos as questões em que não é prático se determinar diretamente os elementos que se desejam contar, por exemplo, tente o leitor montar um mapa com a estrutura proposta pela autora que represente a questão a seguir e, a partir do mapa ora construído, tente resolvê-la:

Exemplo 4.2. *Lançaram-se dez moedas ao ar, de quantas maneiras podemos obter pelo menos duas coroas?*

Embora esse problema seja simples, a dificuldade em resolvê-lo através do mapa se deve ao fato de que a maioria dos problemas em análise combinatória exigem estratégias específicas para a sua resolução. E são justamente tais estratégias específicas

onde reside o maior número de erros de resolução pelos alunos. Batanero et al. (1997, apud Yahata, 2012, p.31-32) apontam como erros mais comuns os seguintes:

1. Enumeração não sistemática (uso da enumeração por tentativa-e-erro em lugar de procedimento recursivo).
2. Erro na elaboração do diagrama de árvore.
3. Erro de ordem (refere-se à dificuldade em avaliar se a ordem dos objetos tornará as configurações indistinguíveis).
4. Erro de repetição (desconsideração da possibilidade de repetir os elementos quando é possível, ou repetir quando não é possível).
5. Confusão do tipo de objeto (julgar objetos idênticos como distinguíveis ou quando objetos diferentes são considerados indistinguíveis.)
6. Confusão no tipo de receptáculo (tipo de subconjunto) no modelo de distribuição ou na partição (consiste em admitir erroneamente que se pode distinguir objetos idênticos, ou que não é possível diferenciar receptáculos distinguíveis (subconjuntos)).
7. Erro no tipo de partição requerida (pode ocorrer de duas formas: as uniões de todos os subconjuntos de uma partição não contêm todos os elementos do conjunto total, ou algumas possibilidades de partições são negligenciadas).

O próprio Yahata (2012, p.53-54) aponta algumas estratégias metacognitivas específicas para o ensino de Análise Combinatória visando minorar os erros mais comuns cometidos pelos alunos, são elas (para maiores esclarecimentos, vide Yahata (2012)):

1. Construir exemplos de objetos pertencentes à classe desejada, e outros que não pertencentes.
2. Tentar identificar de forma precisa quando um objeto pertence à classe e quando dois deles podem ser considerados como distintos. Verificar se ao alterarmos a ordem estaremos criando outro objeto ou se continuará sendo o mesmo objeto.
3. Verificar se, ao usar o Princípio Multiplicativo, interferirá no princípio da invariância da escolha (gerando um impasse) ou se estará contando objetos a mais.

Nessa última ocorrência, é necessário adotar outra estratégia:

- a) Há algo no enunciado que necessita de atenção especial, ou que tem uma restrição maior?
 - b) Dividindo o problema em etapas, pode-se usar o Princípio Multiplicativo em cada uma delas mantendo a invariância da escolha?
 - c) Existindo contagem a mais, é possível descontar o que foi contado indevidamente?
4. Elaborar um esquema ou uma representação.
 5. Tente imaginar um problema "menor".
 6. Negligenciar, *a priori*, alguma condição exigida no problema de modo que um objeto pertença a coleção.
 7. Reformular o problema de uma forma diferente ou descobrir problemas equivalentes, que em alguns casos serão mais simples de resolver.
 8. Após a resolução do problema repensar a solução de modo a verificar se não se está contando algum caso a mais ou esquecendo algum.

Como se pode perceber, existem muitos outros aspectos a serem considerados ao se tratar de métodos de resolução de problemas em análise combinatória e não apenas àqueles que envolvem "elementos" ↔ "restrições" ↔ "agrupamentos".

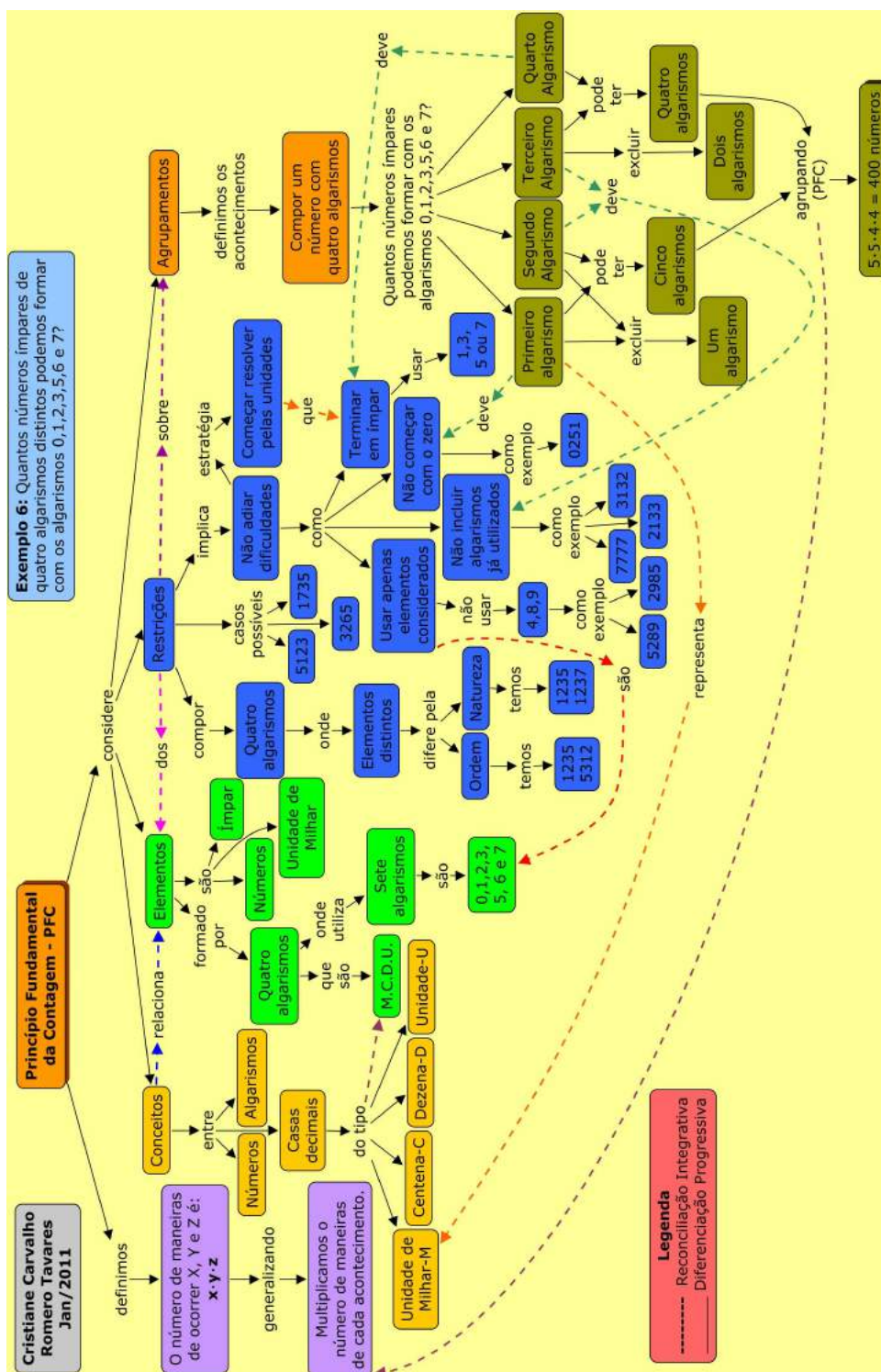
Outro problema concernente aos mapas conceituais é o aumento de complexidade à medida que há aprofundamento de um tema. Por exemplo, para uma questão relativamente simples como é a apresentada no mapa da Figura 14 temos, em contradição, um mapa relativamente complexo e carregado. A própria apresentação do mapa já "assusta" alguns alunos desencorajando, por conseguinte, aqueles que por ventura se aventurarem a analisá-lo. Desta forma, se o problema for um pouco mais complexo do que o usual o mapa, por sua vez, se torna assaz complexo e de difícil leitura. Ademais, tente o leitor ampliar a Figura 14 de modo que ocupe uma página inteira e, em seguida, imprima a figura para verificar a dificuldade de leitura do aludido mapa (conforme Figura 12). Além disso, os mapas conceituais são idiossincráticos (aqui nos referimos ao tipo hierárquico) como esclarece Tavares (2007, p.78):

Dois grandes especialistas sobre um assunto dificilmente construirão mapas iguais. Talvez eles concordem em linhas gerais sobre quais são os conceitos mais importantes, mas dificilmente eles escolherão as mesmas relações entre esses conceitos.

Assim, é provável que uma parcela dos alunos não compreendam totalmente ou parcialmente as relações estabelecidas entre os conceitos quando o mapa é feito por uma outra pessoa. Portanto, um mapa do tipo hierárquico se torna menos preciso quando comparado com um do tipo fluxograma, por exemplo, com uma conseqüente limitação do uso.

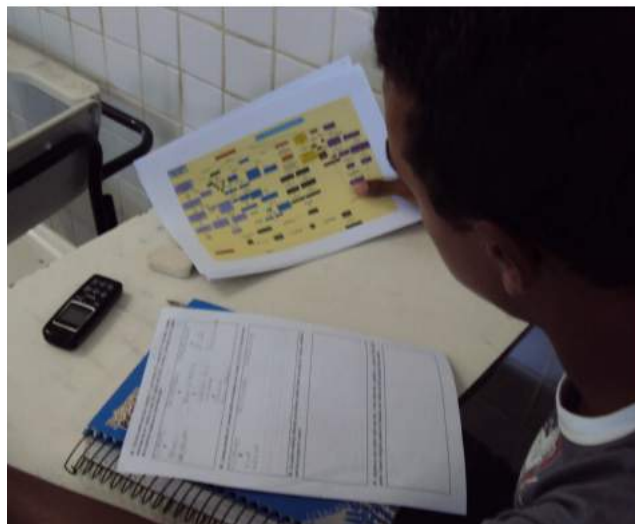
Levando em consideração os problemas supracitados, foi elaborado o presente trabalho cujo escopo é de propor um método alternativo que contorne os problemas elencados e, ao mesmo tempo, proporcione um uso mais abrangente dos mapas conceituais, como poderá ser visto no capítulo a seguir.

Figura 11 – Mapa conceitual envolvendo o PFC.



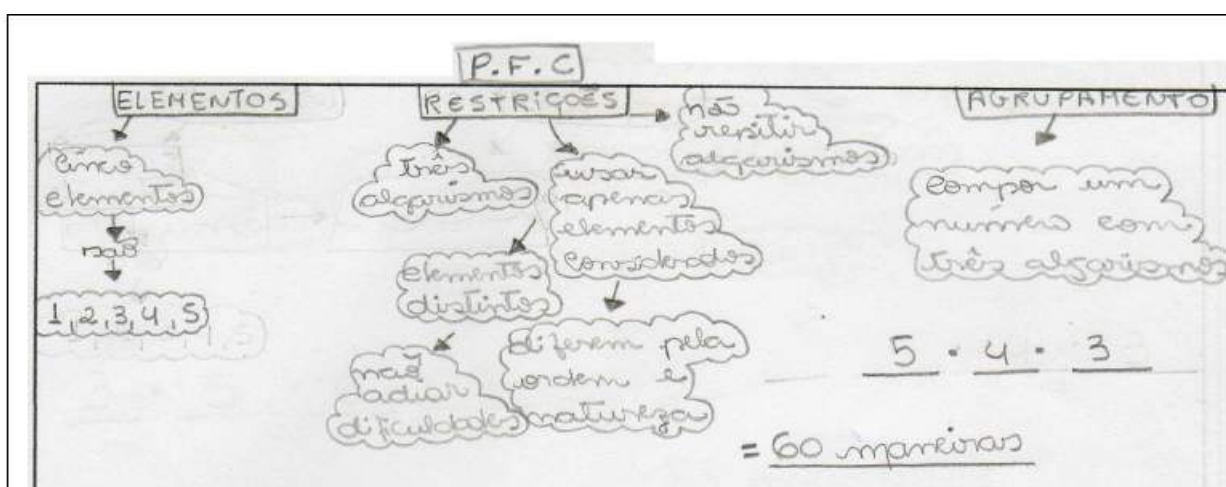
Fonte: mapa acessado em 22/01/2016, no endereço eletrônico: <http://www.fisica.ufpb.br/romero/pdf/DissertacaoCristiane.pdf>

Figura 12 – Aplicação do mapa conceitual na turma experimental.



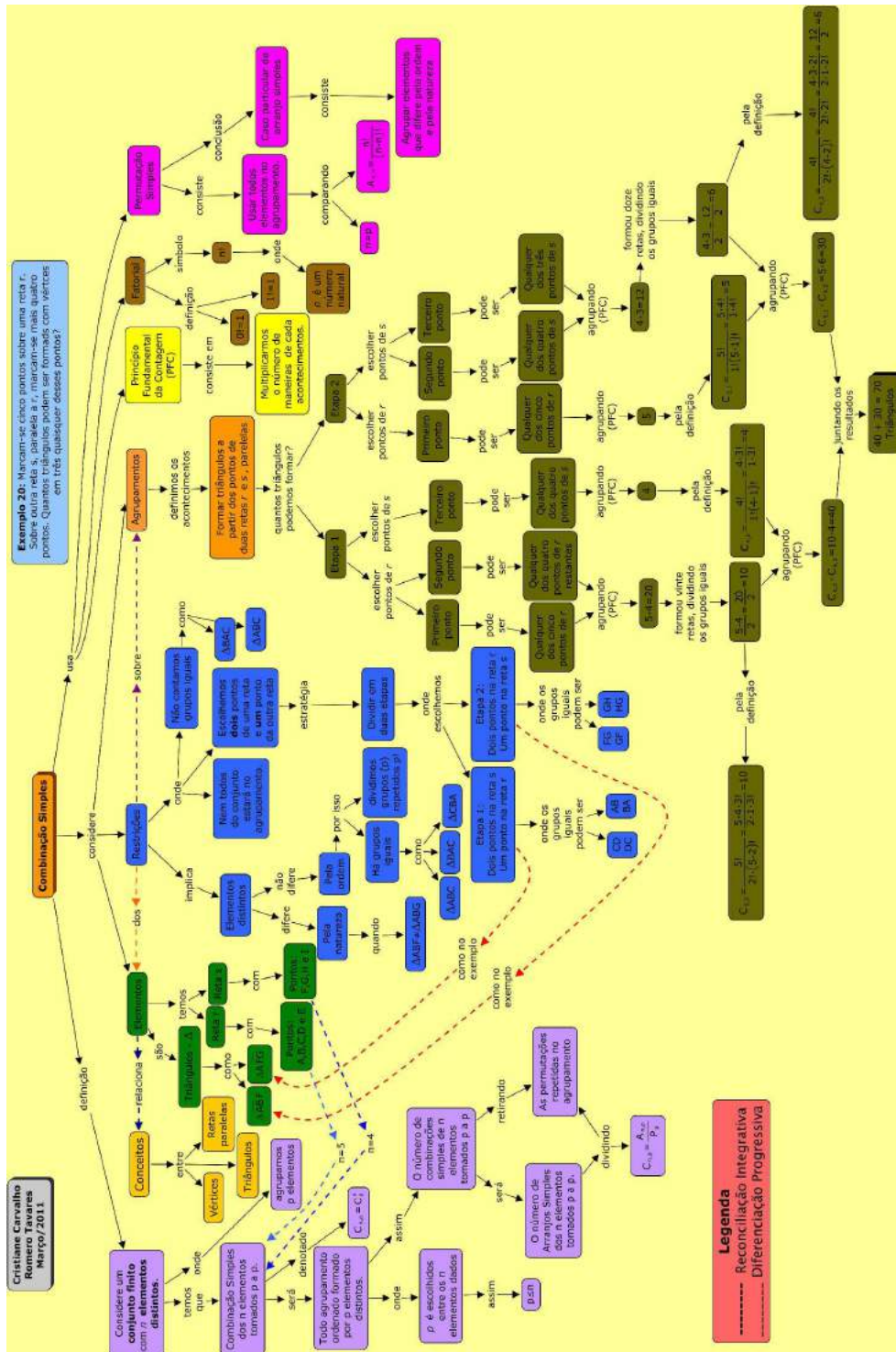
Fonte: mapa acessado em 22/01/2016, no endereço eletrônico: <http://www.fisica.ufpb.br/romero/pdf/DissertacaoCristiane.pdf>

Figura 13 – Mapa conceitual simplificado produzido por um aluno para facilitar a resolução de um exercício.



Fonte: mapa acessado em 22/01/2016, no endereço eletrônico: <http://www.fisica.ufpb.br/romero/pdf/DissertacaoCristiane.pdf>

Figura 14 – Mapa conceitual envolvendo combinação simples.



Fonte: mapa acessado em 22/01/2016, no endereço eletrônico: <http://www.fisica.ufpb.br/romero/pdf/DissertacaoCristiane.pdf>

Máscaras de tutoria

5.1 O que são e para que servem?

A presente proposta consiste em um recurso pedagógico que utiliza um conjunto de cartões dotados de rasgos que permitem a sobreposição dos mesmos à algoritmos e/ou situações-problema impressas em um caderno, em um livro, numa lista de exercícios entre outros. Tais cartões foram concebidos de forma que funcionem como máscaras contendo instruções impressas que simulam as orientações de um tutor, razão pela qual o método foi denominado de Máscaras de Tutoria (que doravante e de forma eventual, será referido apenas como Máscaras).

Tal recurso ajuda na organização da resolução de problemas ou na organização do desenvolvimento de algoritmos já que, a cada etapa, orienta o resolvidor sobre a maneira adequada de dispor a sua solução ou desenvolvimento. Isso, por sua vez, é particularmente importante quando consideramos o fato de ser notório que uma quantidade considerável de alunos apresentem resposta confusa e/ou desorganizada ao serem submetidos à algoritmos ou problemas. Também é fato notório a perda de foco ou supressão de etapas durante essas resoluções o que, provavelmente, é fruto de um pensamento sincrético. Desta forma, as Máscaras ajudam na manutenção do foco por evidenciar detalhes que, muitas vezes, passam despercebidos pelo resolvidor. Outrossim, amiúde, alunos tentam resolver problemas buscando uma “palavra chave” para a aplicação de uma fórmula específica e/ou procuram resolver a questão usando “tentativa e erro”, ou seja, tentando exaurir todas as possibilidades. Obviamente, tais alunos carecem de recursos estratégicos para atacar os problemas. Assim, as Máscaras, por deixarem à disposição do resolvidor um rol (“menu”) de possibilidades e por ser estruturado de forma a apresentar procedimentos de forma sequencial, auxiliam na inferência e no delineamento de estratégias de resolução de problemas e algoritmos por quem faz uso.

A fim de ilustrar a referida proposta para resolução de algoritmos, faz-se alusão

Figura 15 – forma em que se apresenta o conjunto de cartões que constituem as Máscaras de Tutoria.

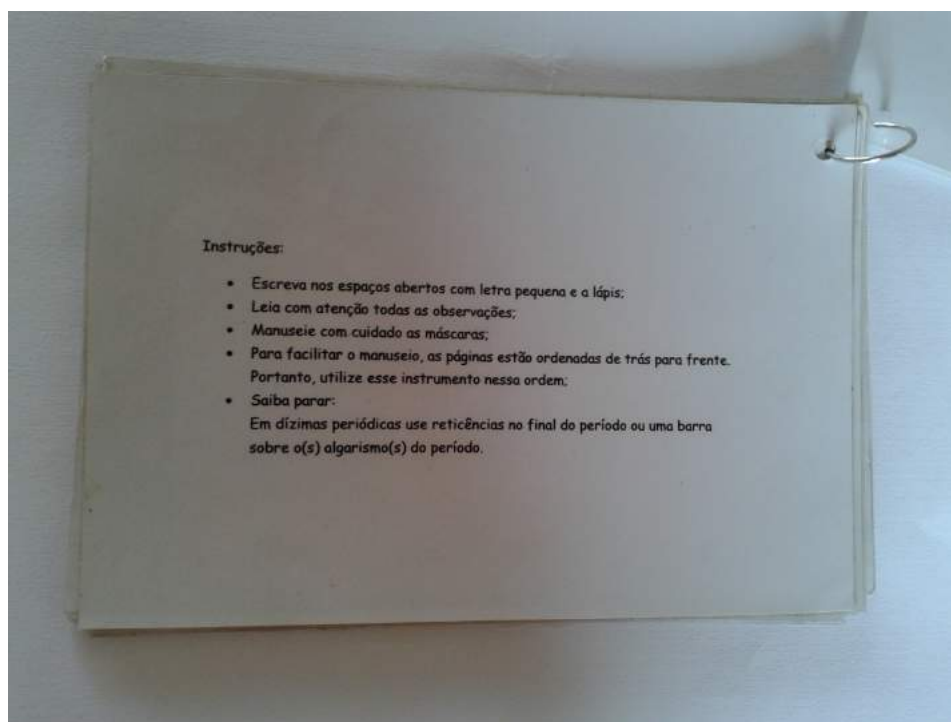


Fonte: elaborado pelo autor.

às figuras em anexo que, de modo algum, dão caráter limitativo ao alcance dessa proposta. Ademais, como o foco deste trabalho são os problemas de contagem em análise combinatória e como não desejamos deixar esse trabalho excessivamente longo, mostraremos apenas a factibilidade por meio de um exemplo simples, mas que, via de regra, suscita muitas respostas erráticas por parte dos alunos, a saber: a divisão de 0,4 por 8. A aludida divisão requereu, para o seu desenvolvimento, dez das doze Máscaras disponíveis no conjunto. Por outro lado, mesmo as divisões mais complexas que a mencionada podem ser desenvolvidas através das aludidas Máscaras (para ver as outras duas, que não aparecem no desenvolvimento do algoritmo, vide Figuras 73 e 74 no apêndice B). A Figura 15 mostra a disposição do conjunto de cartões supracitado. Tal conjunto contém instruções que facilitam seu manuseio (Figura 16). O usuário deverá sobrepor a Máscara sobre o algoritmo por meio do rasgo (Figura 17). Ao se manusear os cartões o usuário terá instruções sequenciadas de modo a chegar à resolução do algoritmo (Figuras 18 a 27).

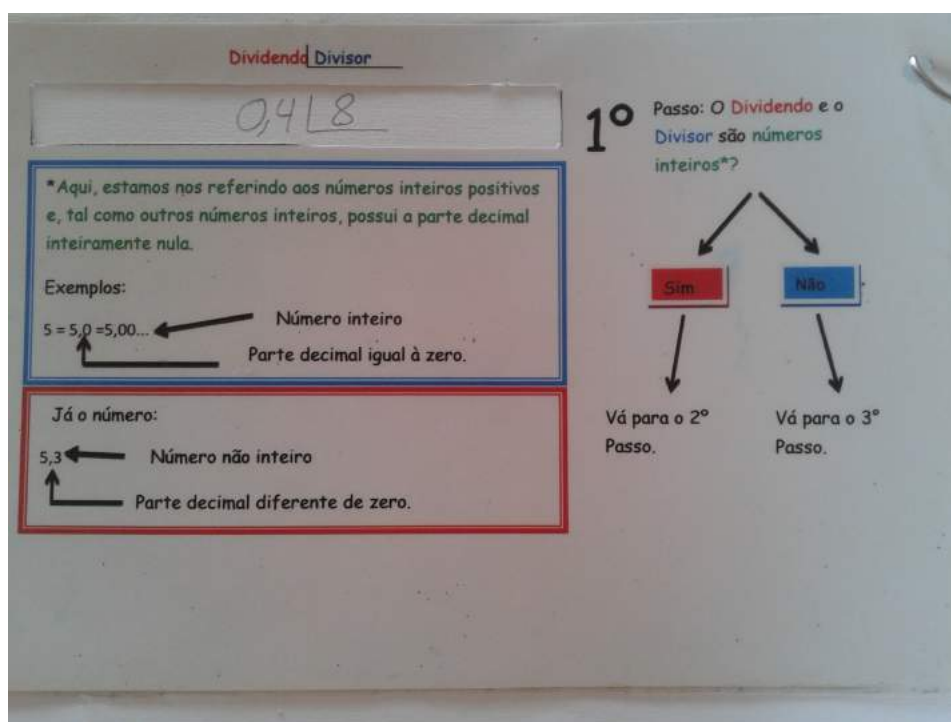
O recurso proposto também permite delinear estratégias de resoluções de situações-problema. Para demonstrar a aplicabilidade do recurso para esta última finalidade, foi escolhido o assunto análise combinatória (mais especificamente problemas de contagem) onde foi feito um apanhado das principais técnicas de resolução que, por sua vez, permitiram, *a priori*, a consecução das Máscaras e, *a posteriori*, sua aplicação

Figura 16 – Instruções.



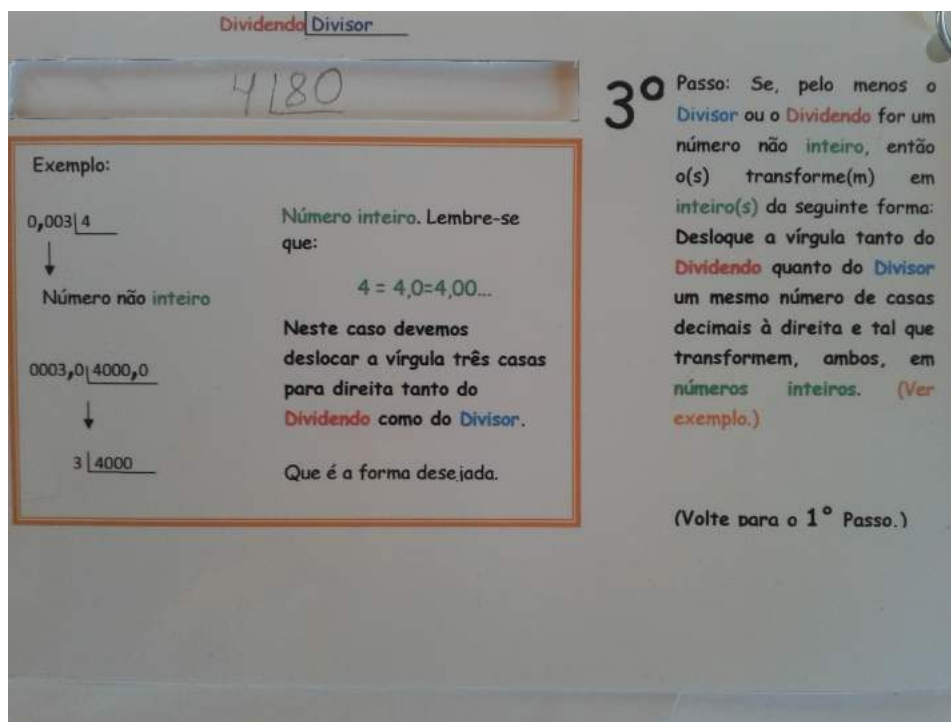
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 17 – Sobreposição da Máscara sobre o algoritmo. No caso, estamos representando a divisão de 0,4 por 8.



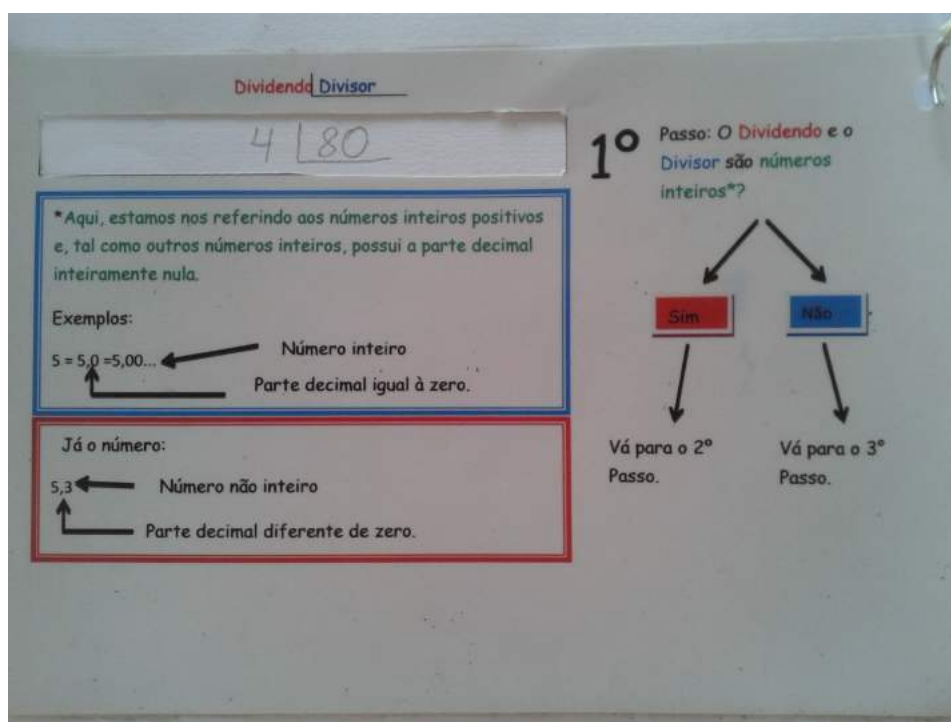
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 18 – Observe o tratamento dado ao algoritmo de modo a facilitar o cálculo.



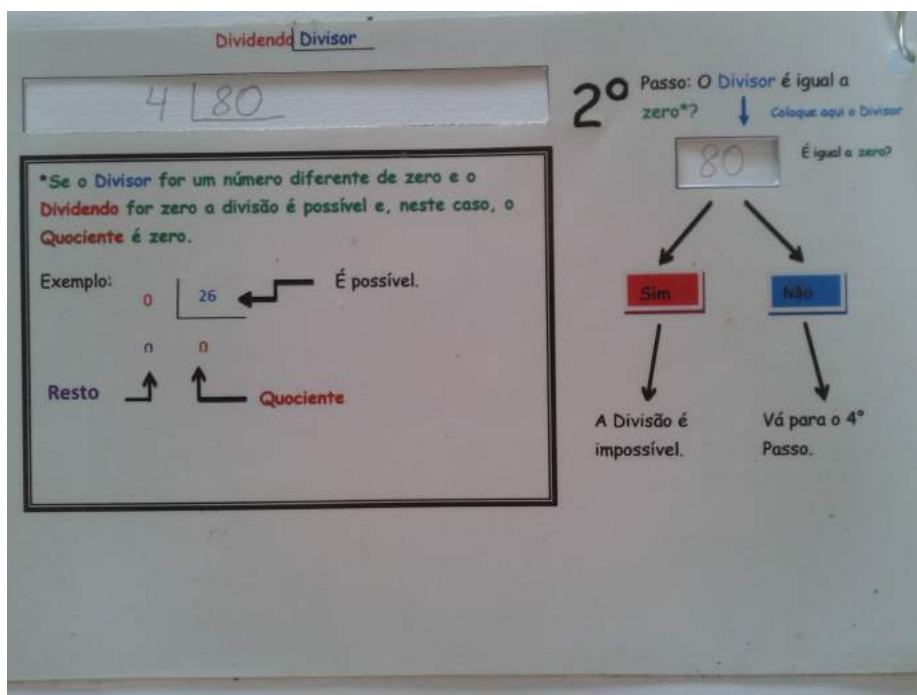
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 19 – À medida que as perguntas impressas são respondidas, o algoritmo vai sendo desenvolvido.



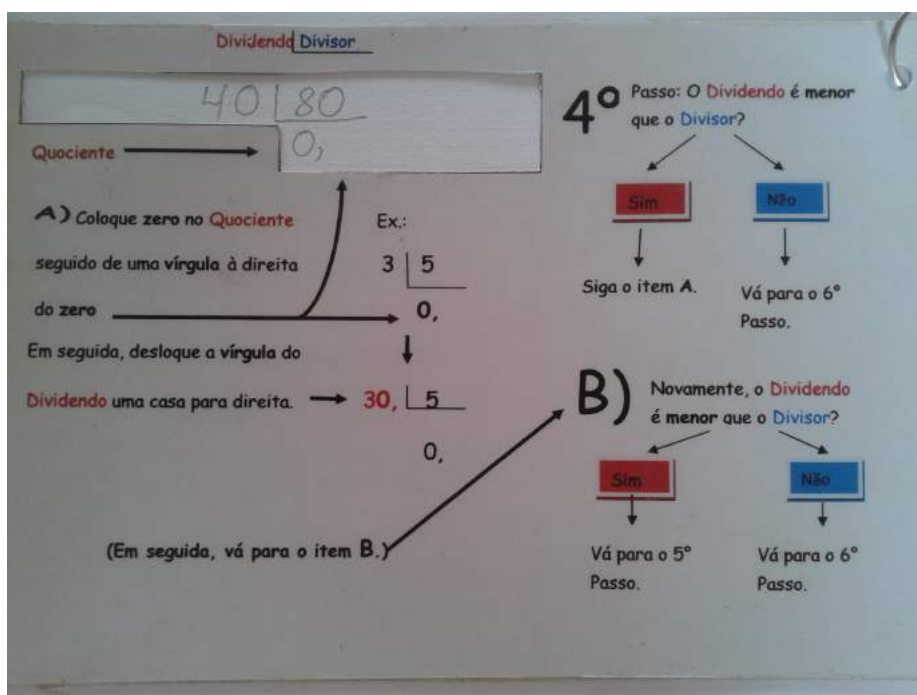
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 20 – Observe que a Máscara ajuda o usuário a manter o foco no algoritmo por fazer com que, ele, seja forçado a se concentrar nos detalhes do algoritmo. No caso em questão, deve-se concentrar no divisor.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 21 – As instruções são elaboradas de modo que as respostas sejam do tipo sim/não.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 22 – Cada pormenor é tratado individualmente.

Dividendo | **Divisor**

Quociente → $400 \overline{) 80}$
 $0,0$

Exemplo:

$30 \overline{) 700}$
 $\downarrow 0,$
 $30 \overline{) 700}$
 $\downarrow 0,0$
 $300 \overline{) 700}$
 $0,0$

5º Passo: Coloque novamente zero no Quociente.
 Em seguida, desloque a vírgula do Dividendo uma casa à direita.
 Vá para o item C.

C) O Dividendo é maior ou igual ao Divisor?

Sim → Vá para o 6º Passo.
Não → Volte para o 5º Passo.

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 23 – Exemplos deixam claro o desenvolvimento do algoritmo.

Dividendo | **Divisor**

Quociente → $400 \overline{) 80}$
 $0,0$

Exemplo:

$2378 \overline{) 36}$ ← Dois algarismos no Divisor

$23'78 \overline{) 36}$

Dois algarismos marcados, da esquerda para direita, com um apóstrofo no Dividendo
 (Vá para o item D.)

6º Passo: Conte quantos algarismos o Divisor é formado.
 O resultado da contagem acima é o número de casas decimais que devemos deslocar, da esquerda para direita, com um apóstrofo no Dividendo. (Ver exemplo)

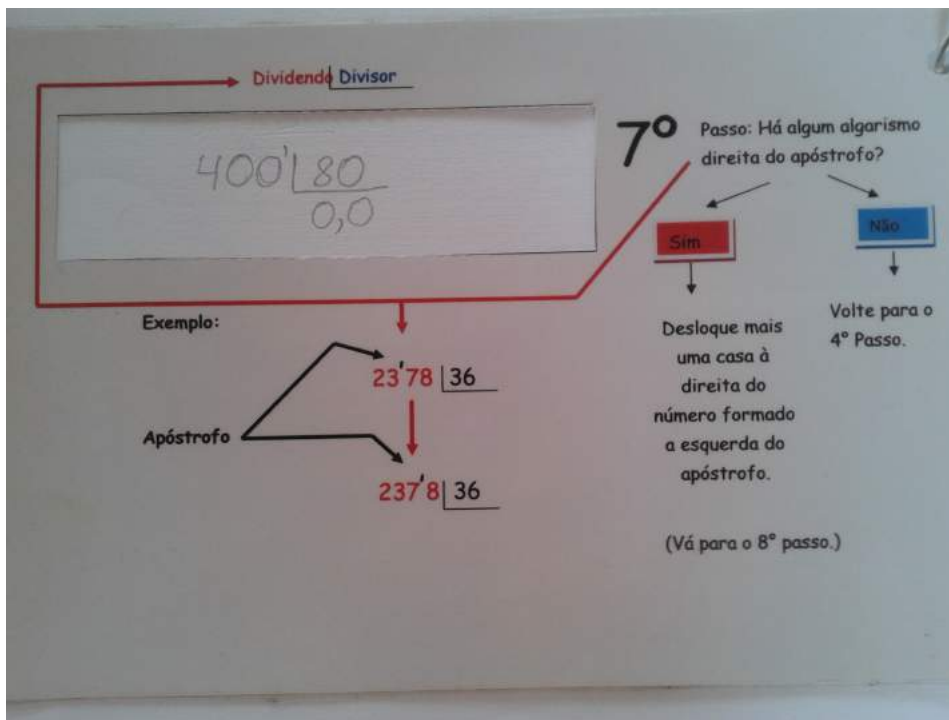
D) O Número formado à esquerda do apóstrofo* no Dividendo é maior ou igual ao Divisor?

Sim → Vá para o 8º Passo.
Não → Vá para o 7º Passo.

*Esse número formado no Dividendo é de mesma ordem do algarismo do Quociente.

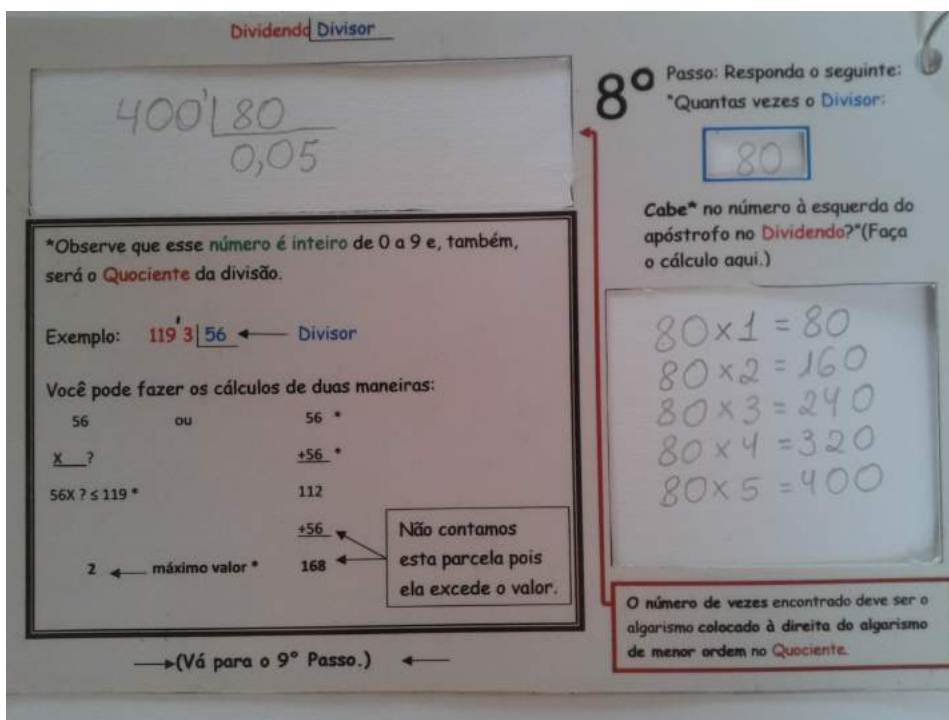
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 24 – Observe que o tamanho e disposição dos rasgos variam com o desenvolvimento do algoritmo.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 25 – A Máscara proporciona uma certa organização no desenvolvimento do algoritmo graças à disposição de seus rasgos.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 26 – Há o cuidado, em cada etapa, de abranger todo tipo de situações envolvendo o desenvolvimento do algoritmo da divisão.

Dividendo | Divisor

$$\begin{array}{r} 400 \overline{) 80} \\ - 400 \\ \hline 000 \end{array}$$

Exemplo 1:

$$\begin{array}{r} 258 \overline{) 56} \\ - 224 \\ \hline 34 \end{array}$$

(Logo após, vá para o item E.)

Exemplo 2:

$$\begin{array}{r} 258 \overline{) 56} \\ - 224 \\ \hline 347 \end{array}$$

9º Passo: Multiplique o **Divisor** pelo algarismo colocado no **Quociente** e, depois, subtraia esse número do número formado no **Dividendo** (ver exemplo 1).

E) Há algum algarismo à direita do apóstrofo?

Sim → Traga para o Resto da subtração esse algarismo, colocando-o na posição da unidade (ver exemplo 2). Em seguida, desloque o apóstrofo uma casa à direita.

Não → Vá para o 10º Passo.

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 27 – A Máscara permite que se trate o resultado a cada momento de modo que se infira quando o desenvolvimento do algoritmo chegou ao fim.

Dividendo | Divisor

$$\begin{array}{r} 400 \overline{) 80} \\ - 400 \\ \hline 000 \end{array}$$

FIM

10º Passo: O Resto é menor que o **Divisor**?

Sim → O Resto é zero?

Sim → F) Foi colocada alguma vírgula no **Quociente**?

Sim → Desloque a vírgula do Resto uma casa à direita e vá para o item G (página a seguir).

Não → Há algum algarismo à direita do apóstrofo no **Dividendo**?

Sim → Coloque zero no **Quociente** e volte para o item E.

Não → Vá para o 11º Passo.

Não → Vá para o 12º Passo.

Sim → Há algum algarismo à direita do apóstrofo?

Sim → Coloque zero no **Quociente** e volte para o item E.

Não → Fim

Fonte: elaborado pelo autor.

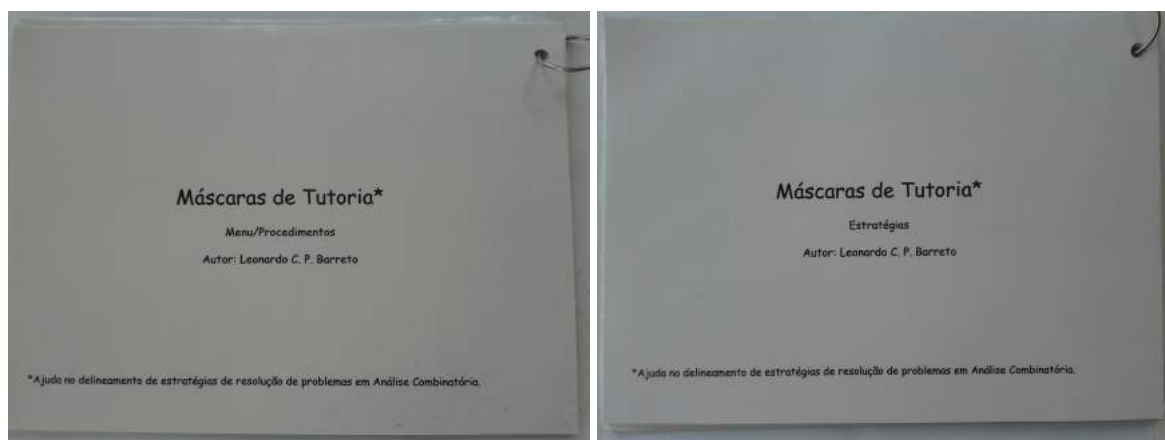
na resolução de situações-problema. Tal aplicabilidade se deve à disposição proposta para as Máscaras que permite a conjugação de mais de um tipo de mapa conceitual de modo que eles se complementem. Por conseguinte, essa conjugação torna o uso dos mapas mais abrangente já que, como visto na Seção 2.2, cada mapa tem suas vantagens e desvantagens. Além disso, o desdobramento dado aos mapas por meio da maneira particionada com que se apresenta o conjunto de Máscaras facilita a leitura e simplifica a compreensão dos pormenores do algoritmo ou da situação-problema.

Ainda em relação ao uso para o delineamento de estratégias de resolução de problemas, além das vantagens supracitadas, ele facilita a memorização e associação de ideias por utilizar imagens como pontos de ancoragem de conceitos, pois, de acordo com Tavares (2007), segundo a teoria da codificação dual de Allan Paivio (1991), é muito mais fácil aprender um conceito quando ele está inter-relacionado verbal e imageticamente. Aliás, a associação de palavras com imagens é uma técnica bastante conhecida e eficaz de memorização. Aqui, vale ressaltar que um dos diferenciais desta proposta é que, no caso das estratégias de resolução de situações-problemas em análise combinatória, ao invés de se fazer a associação *imagem* \longleftrightarrow *conceito*, como é o caso, por exemplo, dos ideogramas chineses ou os hieróglifos egípcios, faremos a associação *imagem* \longleftrightarrow *estratégia*. Esta última associação é feita com imagens que “lembrem” as ações, ou melhor, as estratégias de contagem tornando-se, desta forma, intuitivo o uso das Máscaras. Tal caráter intuitivo, faz com que as Máscaras de “menu/procedimentos”, como será visto a seguir, lembrem a área de trabalho de um aplicativo tal como o *Microsoft Paint*. A diferença é que tais aplicativos fazem a associação *imagem* \longleftrightarrow *edição/criação* e a manipulação dos objetos tratados nestas áreas de trabalho são imagens ou palavras, enquanto nesta proposta são manipulados problemas matemáticos e suas estratégias de resolução.

Com o escopo de utilizar as Máscaras para o delineamento de resolução de situações-problema em análise combinatória, propomos dois conjuntos de Máscaras (Figura 28): o primeiro refere-se ao “menu/procedimentos” (vide Figura 29) e consta de um rol de diversas estratégias utilizadas no Ensino Médio para resolução de problemas de contagem em Análise Combinatória, além disso, há também procedimentos (no sentido de estratégias gerais) que são apresentados em sequência de modo a orientar o resolvidor para a solução do problema (Vide Figuras 29 a 34); o segundo consta do detalhamento de cada estratégia específica (Vide Figuras 35 a 47), para isso utilizamos as estratégias descritas por Musser e Shaughnessy (1998, p.189) de buscar padrões e resolver um problema mais simples como citadas na Seção 4.1 e ilustradas em cada Máscara pelas definições gerais e exemplos que as acompanha.

Mostraremos com mais detalhes o uso das Máscaras de Tutoria para a finalidade supreferida na seção a seguir. Entretanto, cabe aqui uma ressalva, não estamos

Figura 28 – Aspecto dos dois conjuntos/blocos de Máscaras. À esquerda temos o conjunto/bloco denominado “menu/procedimentos” e, à direita, temos o conjunto/bloco estratégias.



Fonte: elaborado pelo autor.

afirmando que o uso dessas Máscaras servem para resolver todos os tipos de problemas combinatórios, mesmo porque a Matemática é dinâmica, a cada dia surgem novos problemas que exigem novos métodos de solução. Além disso, a própria heurística não pode ser considerada como uma “panaceia” para solucionar todo tipo de problema como afirmam Garey e Jhonson (1979 apud Kadioğlu, 2012, p.15, tradução nossa):

Infelizmente, a heurística pode ser falível. A heurística é apenas um palpite informado sobre o próximo passo a ser tomado na resolução de um problema. Muitas vezes, é baseado na experiência ou intuição. E como as heurísticas usam informação limitada, elas raramente são capazes de prever o comportamento exato do objeto de investigação [...].

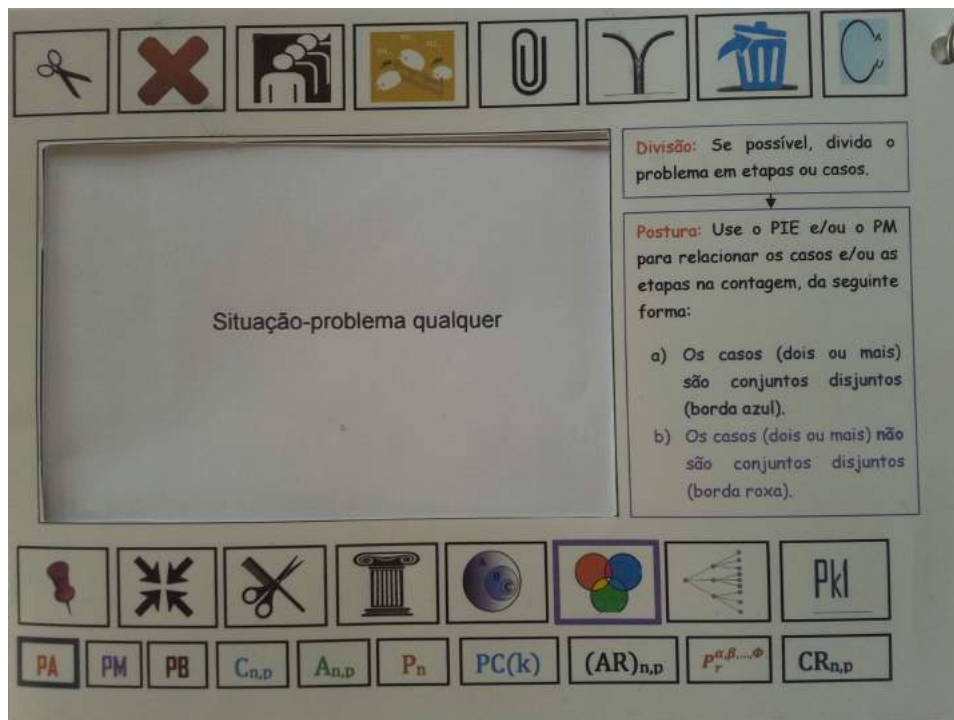
Assim, apesar das heurísticas geralmente levarem a uma solução não tão precisa ou mesmo errônea, elas também podem se constituir como único “caminho”, digamos, “enxergado” ou inspirar a criação de um “caminho” por parte do resolvidor que o conduza à solução do problema. Além disso, elas podem ampliar a perspectiva daqueles em cujas estratégias de resolução de situações-problema se resumem à aplicação, diga-se de passagem, muitas vezes desesperada, de uma fórmula e/ou da tentativa e erro. Por este motivo, as heurísticas são objeto de destaque neste trabalho.

Figura 29 – “Menu/Procedimentos”: observe o rol de ícones representando as estratégias (nas três linhas horizontais) e procedimentos (no fluxograma vertical).



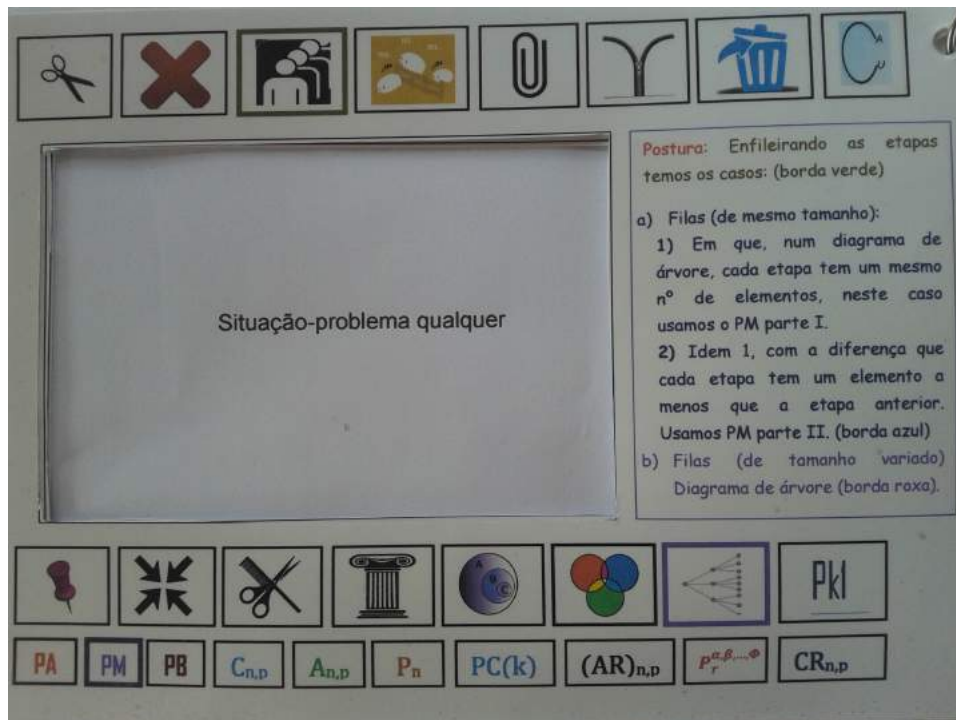
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 30 – “Menu/Procedimentos”: à medida que se sobrepõe cada “máscara” à situação problema, há uma sequência procedimental a ser seguida.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 31 – Cada sequência procedimental é destacada por uma cor de fonte que se relaciona com o “menu” através de uma cor idêntica na borda que contém os ícones.



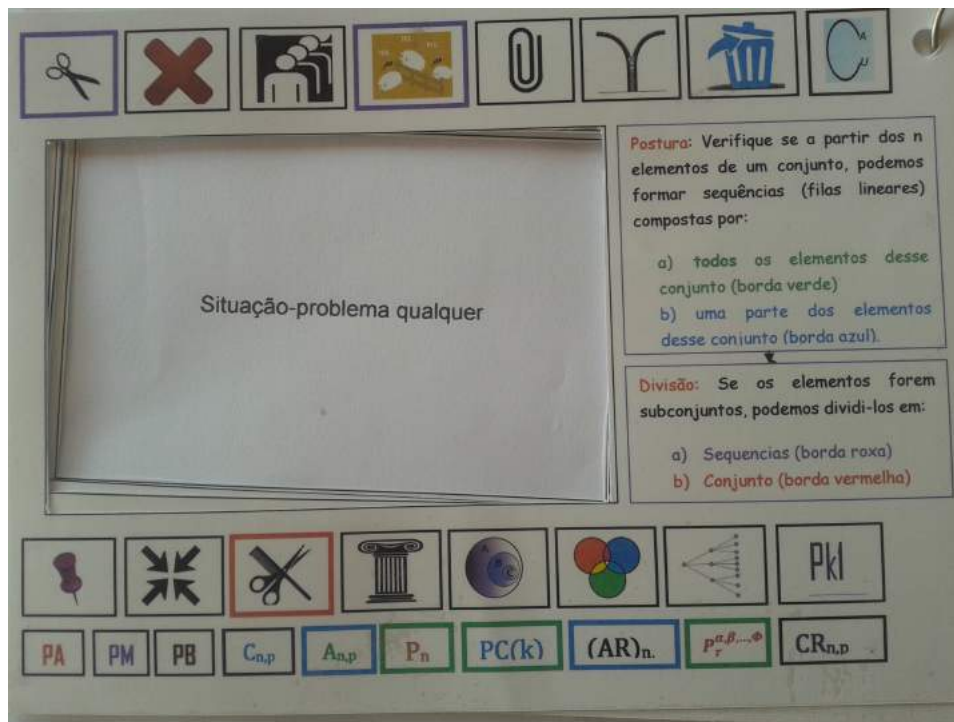
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 32 – A estratégia de resolução é lembrada a cada momento.



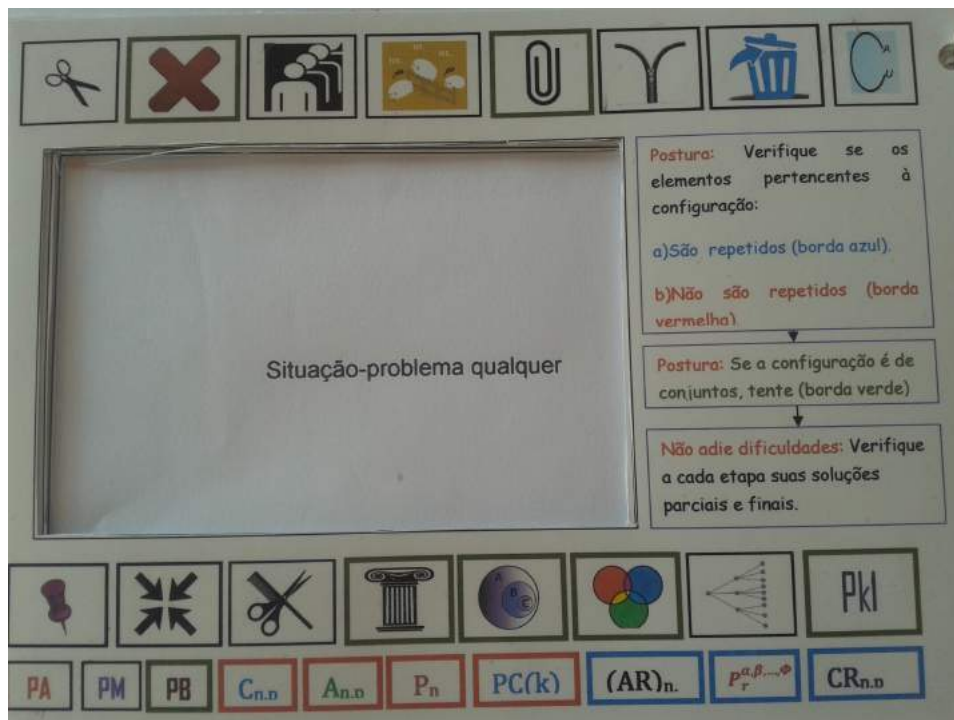
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 33 – Cada procedimento é dividido segundo Lima(2006b) em “postura”, “divisão” e “não adiar dificuldades” .



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 34 – A interseção das cores no “menu”, de acordo com o fluxograma procedimental, leva à estratégia a ser adotada no problema.



Fonte: elaborado pelo autor.

5.2 Descrição detalhada das Máscaras destinadas à Problemas de contagem

Como visto na Seção 5.1, um dos dois conjuntos de Máscaras que constitui o bloco intitulado “menu/procedimentos” é caracterizado por possuir diversos “ícones” dispostos horizontalmente em três linhas e tais que cada ícone “lembra” uma estratégia específica para resolução da situação-problema por meio de uma imagem concreta ou de uma abreviatura (vide Figura 29). Cada uma das estratégias associadas aos “ícones”, conforme mencionado, foi pormenorizada no Capítulo 3 tornando, desta forma, intuitiva a sua compreensão. Por esse motivo, denominaremos simplesmente de “menu” a área reservada a esses “ícones”.

Já, o fluxograma vertical à direita, refere-se ao que denominamos “procedimentos”, aqui tendo o valor semântico de estratégia geral. Tais “procedimentos” foram organizados à partir das estratégias para resolução de problemas em Análise Combinatória descrita por Lima et al.(2006b) e, embasados numa síntese das estratégias relatadas no Capítulo 4. Assim, à medida que o resolvidor vai sendo orientado por estes “procedimentos”, vai-se delineando uma estratégia de resolução de uma situação-problema (esta, devidamente posicionada na área do rasgo retangular). E, ao mesmo tempo, tais “procedimentos” se comunicam com o “menu” através das bordas coloridas em torno dos “ícones” sugerindo, com isso, uma estratégia específica de resolução a cada etapa. Segue que, ao final da orientação procedimental, o resolvidor terá uma estratégia específica para solucionar a situação-problema analisada em razão da interseção das regiões em que os “ícones” tiveram suas bordas coloridas numa dada cor (vide Figuras 29 a 34).

Quanto ao bloco (conjunto de Máscaras) denominado “estratégias”, ele se caracteriza por descrever as estratégias, ao mesmo tempo, menos evidentes para o resolvidor e muito comuns em exames de um modo geral. Para isso, a maioria dos “ícones” presentes no “menu” do bloco “menu/estratégias” é associado a uma Máscara específica do bloco “estratégias” (vide Figuras 35 a 50). Em cada Máscara do bloco “estratégias” temos um “ícone” (que “lembra” a ação executada na estratégia) o nome da estratégia (algumas vezes, optaremos pelo nome da ação executada na estratégia), a definição geral (em azul), um exemplo de problema (em verde), a resolução do problema (em vermelho) e, se for o caso, as informações complementares (em roxo). Tudo isso, em forma de fluxograma contornando o rasgo retangular (que, de agora em diante, chamaremos de área de trabalho).

A Figura 35 ilustra uma das Máscaras do bloco “estratégias”. Inicialmente, observe que, apesar do nome da estratégia ser **partição ordenada** (conforme Hazzan (1993)), optamos por chamar essa estratégia de “Recortar em fila de grupos”. Isso

foi feito a fim de dar um caráter de concretude à estratégia (por “lembrar” a ação executada na estratégia) conforme veremos na seção a seguir, sendo, todavia, inobstante à denominação de **partição ordenada**. Tal estratégia (Definição 3.16) é demonstrada pelo fluxograma em que se toma um exemplo, adaptado de Lima (2006b), devidamente resolvido etapa por etapa. Aliás, Lima (2006b), introduz o conceito de combinação simples através da aplicação de uma partição ordenada em que se toma p objetos distintos entre n objetos dados. Sendo, desta forma, a partição ordenada uma estratégia mais ampla do que a combinação simples e, por isso, ficando em destaque no “menu”. Tal estratégia é representada por duas “Máscaras” (Figuras 35 e 36), em que a estratégia é ilustrada em ordem crescente de complexidade. Semelhantemente, a estratégia denominada “Recortar em conjunto de grupos” (Figuras 47 e 48) corresponde a estratégia descrita por Hazzan (1993) chamada de **partição não ordenada** (Definição 3.17) e cuja associação ao respectivo ícone se deve ao fato de que devemos executar algo a mais (no caso, devemos descontar os elementos redundantes) em relação à estratégia da “Máscara” precedente (Figura 35).

Já a estratégia “Deletar elemento” (Figuras 37 e 38) é usada de acordo com o Corolário 3.9 e difere da estratégia “Excluir elemento” (Figura 43) pelo fato de que a primeira é indicada para conjuntos, enquanto a segunda é indicada para sequências. Analogamente, observe que a estratégia “Anexar elemento” (Figuras 40 e 41) segue do Corolário 3.6 e difere da estratégia “Fixar elemento” (Figura 45), pois a primeira é indicada para conjuntos, enquanto a segunda é indicada para sequências. Por outro lado, a estratégia “Contar a mais” (Figura 39) e “Evento complementar” (Figura 44) são estratégias praticamente idênticas, a diferença é que a segunda enfatiza de forma mais clara a teoria dos conjuntos.

Convém notar que a utilização dos ícones facilita a percepção das sutilezas de determinadas estratégias, por exemplo, observe que os ícones das estratégias “Juntar em ordem fixa” (Figura 42) e “Juntar em qualquer ordem” (Figura 46) permitem tal percepção graças a sugestão das imagens. Por outra parte, como afirma Paivio (2006, tradução nossa) “Em relação à concretude, o desempenho da memória geralmente aumenta uniformemente de palavras abstratas (por exemplo, verdade, justiça), a palavras concretas (por exemplo, cadeira, lagosta), a objetos (ou suas fotos)”. Ou seja, o uso da associação *imagem* \longleftrightarrow *estratégia* torna mnemônico o uso da estratégia facilitando, por conseguinte, a sua apropriação por parte do resolvedor. Em termos quantitativos, Paivio (2006) afirma que a memória associada às palavras que remetem à imagens concretas é superior às palavras associadas à imagens abstratas na razão, em média, de 2 : 1. E acrescenta que o efeito da concretude (palavras associadas a objetos concretos) é ainda mais marcante quando a recordação de itens é feita por estímulos concretos. Disso, decorre que a evocação de estratégias é facilitada por imagens de objetos concretos que o resolvedor associa à elas. O que, como se pode inferir, mostra

como o método proposto auxilia na aquisição do pensamento combinatório apregoado nessa dissertação.

5.3 Por que utilizar as Máscaras de Tutoria na Educação Básica?

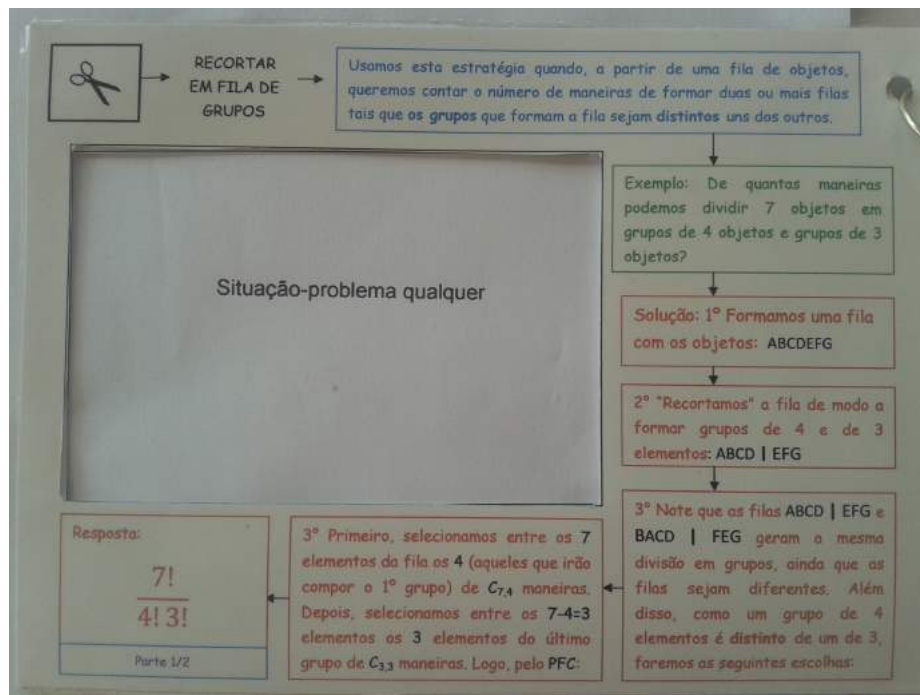
Sabemos que, toda vez que um responsável matricula um aluno em determinada escola, se estabelece um vínculo indissociável entre esses três sujeitos do processo educacional que, teoricamente, teriam os seguintes papéis: a escola criaria condições para a aprendizagem, o aluno se esforçaria para aprender o que lhe é ensinado e o(s) responsável(is) acompanharia(m) esse processo de aprendizagem. O mencionado acompanhamento pode ser realizado de diversas formas, entre elas podemos citar a tutoria das chamadas “tarefas de casa” podendo, tal tutoria, ser realizada pelo(s) próprio(s) responsável(is) ou ser delegada a outrem. Entretanto, não raro, acontecem problemas em tais tutorias seja pela própria má formação educacional do tutor, seja pela infrequência ou total ausência das mesmas. Quanto à escola, esta, muitas vezes, não disponibiliza meios para que o aluno desenvolva a metacognição, o que resulta na notória falta de autonomia que muitos alunos apresentam. Por sua vez, grande parte dos alunos, demonstra pouca motivação para os estudos ou, quando possuem, amiúde, não conseguem manter o foco no que se é estudado, ou mesmo, não conseguem compreender o que estudam. O resultado, digamos, dessa “quebra de contrato” educacional, é o lamentável desempenho dos estudantes brasileiros quando comparados com os estudantes de outros países nas mais diversas áreas do conhecimento.

Para contornar esses problemas, alguns alunos fazem uso da *internet* (mais especificamente de *sites* tais como *youtube*, *wikipedia*, entre outros), onde têm acesso à videoaulas, tutoriais, *applets* e muitos outros recursos educacionais que, de fato, auxiliam na aprendizagem. Por outro lado, embora decrescente, o número de brasileiros *offline* é bastante expressivo, segundo Chade (2015 apud ONU) “Oitenta e quatro milhões de brasileiros ainda não tem acesso à internet” o que, por conseguinte, deixa a *internet* como sendo um privilégio de alguns. Já em relação àqueles estudantes que possuem acesso à internet, há o problema inerente à própria natureza da *internet* que “seduz” o estudante à outros muitos “sites” não propriamente educacionais. Isso tem se tornado um problema inclusive durante às aulas, já que muitos estudantes perdem o foco da aula por acessarem, concomitantemente, músicas, jogos, redes sociais, entre outros através de dispositivos móveis com acesso à internet. Aliás, conforme mencionado no capítulo introdutório, esse tipo de comportamento, salvo as exceções, é uma característica dos estudantes da chamada *Geração Z*. Dessa forma, não é de se espantar o fato de que

muitas escolas estão proibindo o uso de celulares, *tablets* e outros dispositivos móveis ainda que eles tenham um grande potencial como instrumento pedagógico.

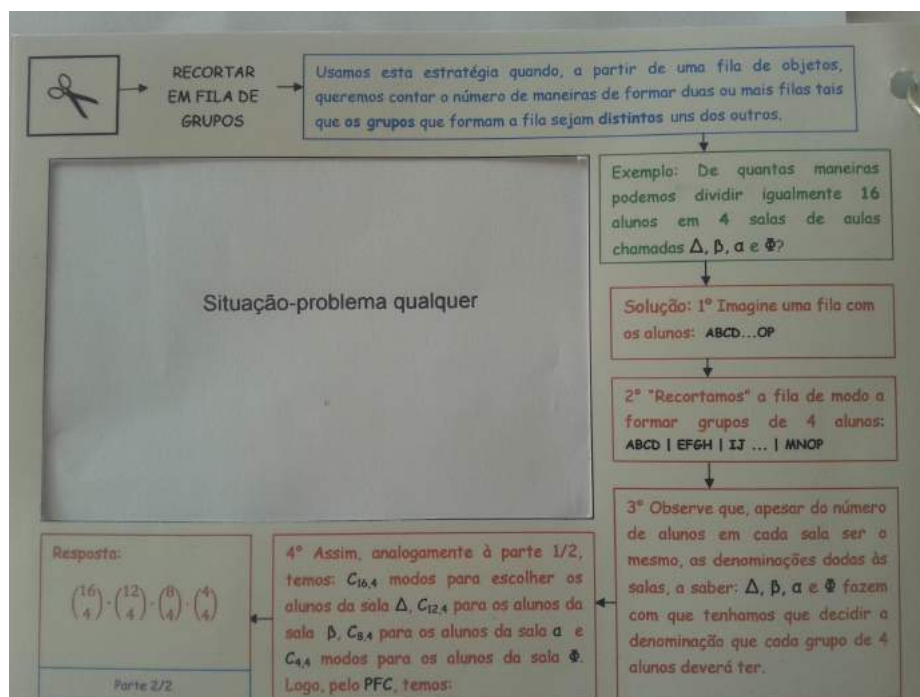
Assim, diante do panorama apresentado, a presente proposta se constitui num relevante instrumento de aprendizagem, pois orienta o aluno (ou o aluno e o tutor, quando for o caso) em virtude da maneira pela qual as instruções são organizadas em cada Máscara de Tutoria. Além disso, a disposição dada às Máscaras permite que o usuário mantenha o foco no algoritmo evitando possíveis distrações em seu desenvolvimento. Tal disposição ainda permite a organização do desenvolvimento algorítmico o que, diante da maneira confusa em que muitos alunos apresentam suas soluções, facilita a verificação dessa solução. A própria forma maiêutica com que se apresentam as Máscaras proporciona um raciocínio metacognitivo adequado ao desenvolvimento desses algoritmos que é, pouco a pouco, apropriado pelo aluno. Sob outra perspectiva, quanto ao uso para resolução de situações-problema, a ênfase dada nessa dissertação para a Análise Combinatória se deve ao fato de que, segundo Batanero et al. (1996 apud Sabo, 2010, p.21): “[...] os professores consideram o ensino desse tema difícil e, em muitas situações, preferem não abordá-lo”. Dessa forma, a proposta do uso das Máscaras de Tutoria tem como objetivo facilitar a aprendizagem de Análise Combinatória. Para isso, apresentamos a associação de imagens à estratégias com o fito de torná-las, ao mesmo tempo, mnemônicas e de fácil compreensão. Obviamente, com o uso, o aluno não precisará mais das Máscaras ao se deparar com situações-problemas em Análise Combinatória, pois terá à mão um repertório de estratégias associados às imagens mentais dos “ícones” que compõem cada Máscara.

Figura 35 – “Estratégia: Recortar em fila de grupos (parte 1/2)”.



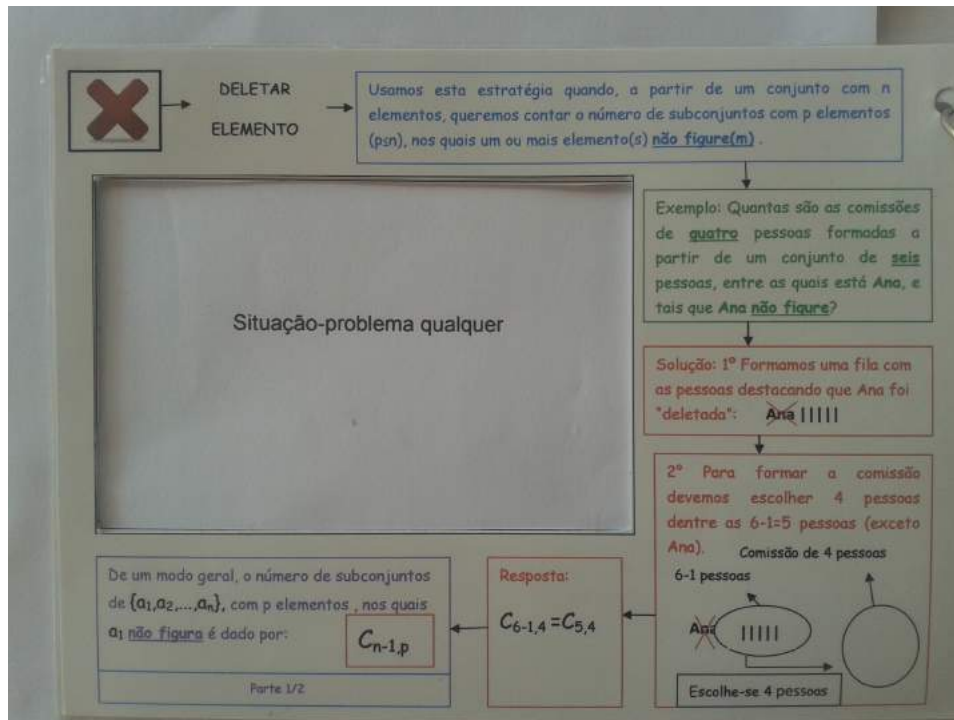
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 36 – “Estratégia: Recortar em fila de grupos (parte 2/2)”.



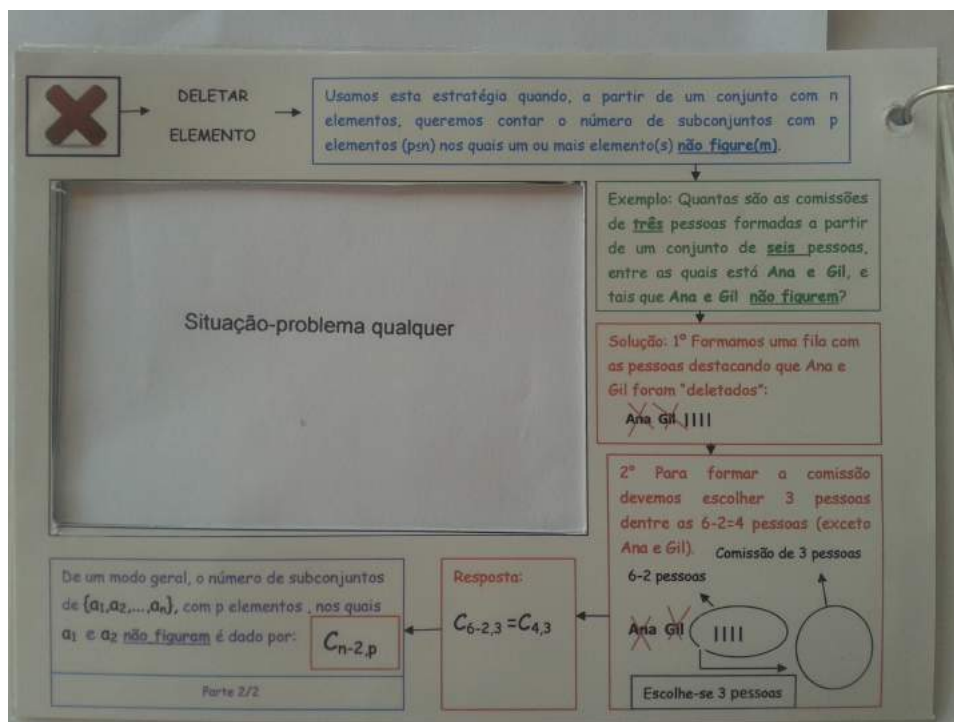
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 37 – “Estratégia: Deletar elementos (parte 1/2)”.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 38 – “Estratégia: Deletar elementos (parte 2/2)”.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 39 – “Estratégias: Contar a mais”.

CONTAR A MAIS

Esta estratégia consiste em ignorar uma ou mais restrições do problema, levando, assim, a uma extrapolação da contagem. A seguir, descontamos o que foi contado indevidamente.

Situação-problema qualquer

Exemplo: Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Solução: 1º admita que o zero possa ser usado como 1º dígito do número.

2º Formamos uma fila de traços para marcar a posição dos 3 algarismos: - - -

3º Há 5 modos de escolha para o último dígito (0, 2, 4, 6 ou 8) e, para cada um deles, há $10-1=9$ (pois não pode ser igual ao 3º dígito) modos para o 1º dígito e, para cada um deles, há $10-2=8$ (não pode ser igual nem ao 1º nem ao 3º) modos para o segundo dígito. Logo, pelo PFC, há $5 \cdot 9 \cdot 8 = 360$ números. Incluindo os números começados por zero.

4º A seguir contaremos quantos desses números começam por zero. Fixando zero como 1º dígito (1 modo), há 4 modos de escolher o 3º dígito (2, 4, 6 ou 8) e 8 modos para o 2º dígito. Portanto, pelo PFC, há $1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$ números começados por zero.

Resposta:
 $360 - 32 = 328$ números.

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 40 – “Estratégia: Anexar elemento (parte 1/2)”.

ANEXAR ELEMENTO

Usamos esta estratégia quando, a partir de um conjunto com n elementos, queremos contar o número de subconjuntos com p elementos ($p \leq n$), nos quais um ou mais elemento(s) figure(m).

Situação-problema qualquer

Exemplo: Quantas são as comissões de quatro pessoas formadas a partir de um conjunto de seis pessoas, entre as quais está Ana, e tais que Ana figure?

Solução: 1º Formamos uma fila com as pessoas destacando que Ana foi "anexada" na comissão:
 ⇒ Ana |||||

2º Para formar a comissão devemos escolher $4-1=3$ pessoas (Ana já figura) dentre as $6-1=5$ pessoas. Comissão de 4 pessoas
 6-1 pessoas

Resposta:
 $C_{6-1, 4-1} = C_{5, 3}$

De um modo geral, o número de subconjuntos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, com p elementos, nos quais a_1 figura é dado por: $C_{n-1, p-1}$

Parte 1/2

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 41 – “Estratégia: Anexar elemento (parte 2/2)”.

ANEXAR ELEMENTO

Usamos esta estratégia quando, a partir de um conjunto com n elementos, queremos contar o número de subconjuntos com p elementos ($p \leq n$) nos quais um ou mais elemento(s) figure(m).

Situação-problema qualquer

Exemplo: Quantas são as comissões de quatro pessoas formadas a partir de um conjunto de seis pessoas, entre as quais está Ana e Gil, e tais que Ana e Gil figurem?

Solução: 1º Formamos uma fila com as pessoas destacando que Ana e Gil foram "anexadas":
 \rightarrow Ana \rightarrow Gil ||||

2º Para formar a comissão devemos escolher $4-2=2$ pessoas (Ana e Gil já figuram) dentre $6-2=4$ pessoas. Comissão de 4 pessoas
 6-2 pessoas

Escolhe-se 2 pessoas

Resposta: $C_{6-2, 4-2} = C_{4, 2}$

De um modo geral, o número de subconjuntos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, com p elementos, nos quais a_1 e a_2 figuram, é dado por: $C_{n-2, p-2}$

Parte 2/2

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 42 – “Estratégia: Juntar em ordem fixa”.

JUNTAR EM ORDEM FIXA

Usamos esta estratégia quando, a partir de uma quantidade n de objetos, queremos contar o número de modos que podemos formar uma fila mantendo juntos mais de um elemento em determinada ordem fixa nesta fila.

Situação-problema qualquer

Exemplo: Com as letras da palavra FAMINTO, quantos anagramas de 4 letras podemos formar tais que as letras T, O apareçam juntas e nessa ordem?

Solução: 1º considere T, O como uma única letra (juntar em ordem fixa).

2º Formamos uma fila de traços para marcar a posição das 3 letras ("TO" + duas) consideradas: _ _ _

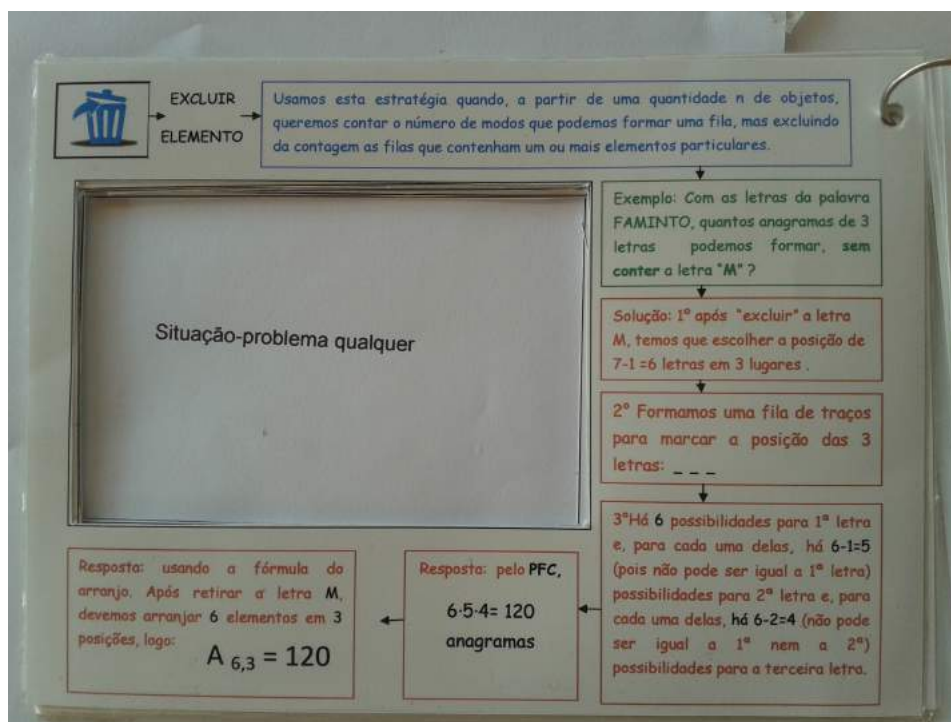
3º Fixando "TO" na 1ª posição há $6-1=5$ (não pode ser igual a 1ª posição) possibilidades para 2ª posição e, para cada uma delas, há $6-2=4$ (não pode ser igual a 1ª nem a 2ª) possibilidades para 3ª posição. Analogamente, para as outras duas posições que "TO" ocupa, temos:

Resposta: usando a fórmula do arranjo, Fixando TO em cada uma das 3 posições possíveis e, como para cada uma delas, devemos arranjar 5 elementos em 2 posições, temos: $3 \cdot A_{5, 2} = 60$.

Resposta: pelo PFC, $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ anagramas.

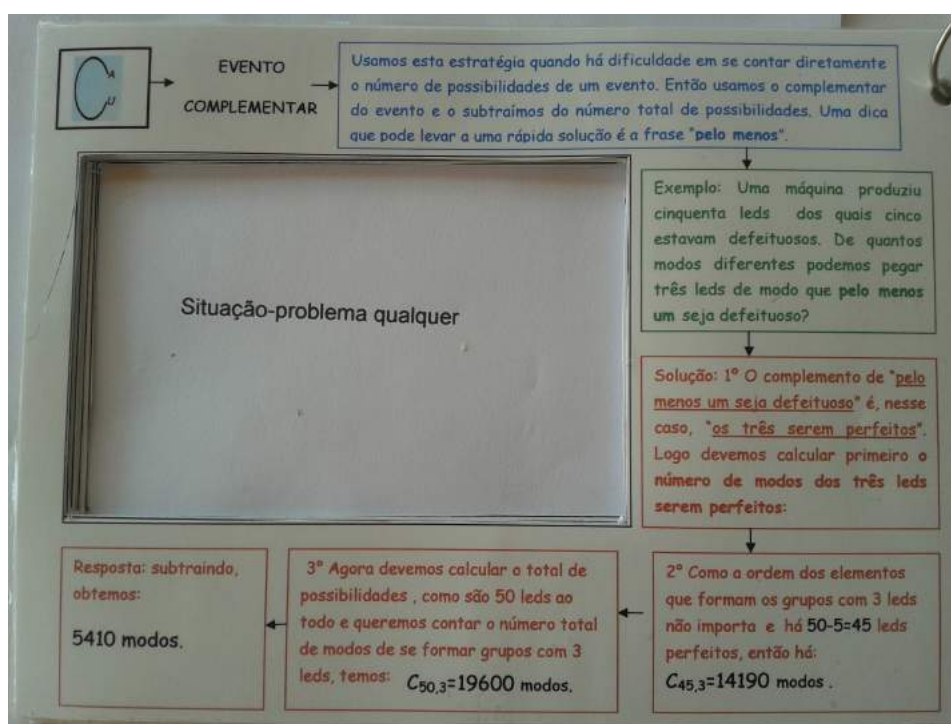
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 43 – “Estratégias: Excluir elemento”.



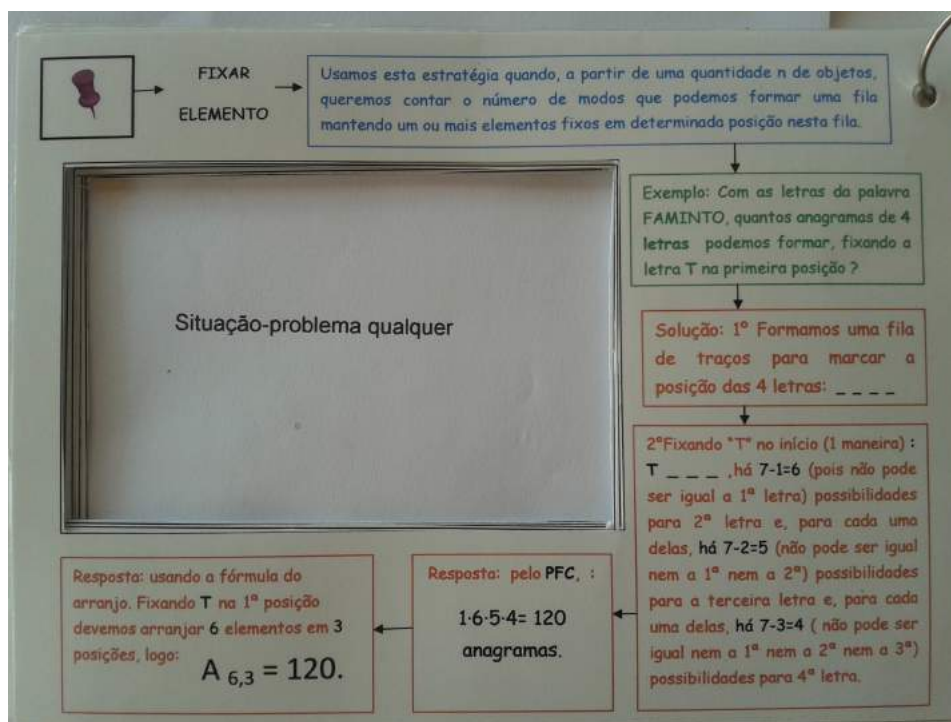
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 44 – “Estratégia: Evento complementar”.



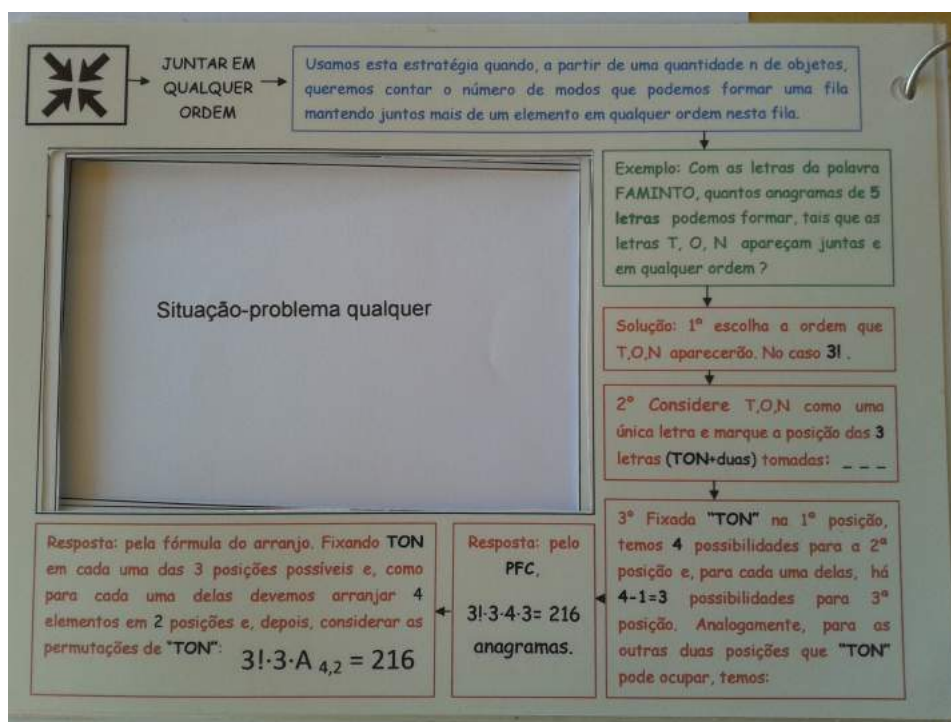
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 45 – “Estratégia: Fixar elemento”.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 46 – “Estratégia: Juntar em qualquer ordem”.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 47 – “Estratégia: Recortar em conjunto de grupos (parte 1/2)”.

RECORTAR EM CONJUNTO DE GRUPOS

Usamos esta estratégia quando, a partir de uma fila de objetos, queremos contar o número de maneiras de formar um conjunto constituído por dois ou mais grupos indistinguíveis entre si.

Situação-problema qualquer

Exemplo: De quantas maneiras podemos dividir 8 objetos em dois grupos de 4 objetos?

Solução: 1º Formamos uma fila com os objetos: ABCDEFGH

2º "Recortamos" a fila de modo a formar dois grupos de 4 elementos: ABCD | EFGH

3º Como as filas ABCD | EFGH e BACD | HFEG geram a mesma divisão em grupos, ainda que as filas sejam diferentes, temos $C_{8,4}$ modos para escolha do "1º grupo" e $C_{4,4}$ modos para escolha do "2º grupo". Logo, pelo PFC, temos: $C_{8,4} \cdot C_{4,4} = C_{8,4}$

4º Porém, repare que fizemos uma distinção artificial entre os grupos quando chamamos de "1º" e "2º" grupos. Portanto, devemos descontar da contagem as suas permutações, o que se dá de $2!$ Maneiras. Assim:

Resposta: $\frac{\binom{8}{4}}{2!}$

Parte 1/2

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 48 – “Estratégia: Recortar em conjunto de grupos (parte 2/2)”.

RECORTAR EM CONJUNTO DE GRUPOS

Usamos esta estratégia quando, a partir de uma fila de objetos, queremos contar o número de maneiras de formar um conjunto constituído por dois ou mais grupos indistinguíveis entre si.

Situação-problema qualquer

Exemplo: De quantas maneiras podemos dividir igualmente 16 alunos em 4 salas de aulas?

Solução: 1º Imagine uma fila com os alunos: ABCD...OP

2º "Recortamos" a fila de modo a formar grupos de 4 alunos: ABCD | EFGH | IJ ... | MNOP

3º Como as filas ABCD | EFGH | IJKL | MNOP e BACD | EFHG | JIKL | POMN geram a mesma divisão em grupos, ainda que as filas sejam diferentes, temos $C_{16,4}$ modos para escolha do "1º grupo", $C_{12,4}$ para o "2º", $C_{8,4}$ para o "3º" e $C_{4,4}$ para o "4º". Logo, pelo PFC, temos: $C_{16,4} \cdot C_{12,4} \cdot C_{8,4} \cdot C_{4,4}$

4º Porém, repare que fizemos uma distinção artificial entre os grupos quando chamamos de "1º", "2º", "3º" e "4º" grupos. Portanto, devemos descontar da contagem as suas permutações, o que se dá de $4!$ Maneiras. Assim:

Resposta: $\frac{\binom{16}{4} \binom{12}{4} \binom{8}{4} \binom{4}{4}}{4!}$

Parte 1/2

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 49 – “Estratégia: Somar colunas do triângulo de Pascal”.

SOMAR COLUNAS DO Δ DE PASCAL

Ao percebermos que na contagem da soma de uma dada configuração as parcelas se constituem em n^{os} do tipo: $C_{p,p} + C_{p+1,p} + \dots + C_{n,p}$ ou um múltiplo dessa soma, o resultado é $C_{n+1,p+1}$ ou um múltiplo de $C_{n+1,p+1}$ respectivamente.

Situação-problema qualquer

Exemplo: (UERJ-modificado) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração a seguir:

Qual o número total de laranjas que compõem quinze camadas desta arrumação?

Resposta:
 $2 \cdot \binom{17}{31 \cdot 141} = 1360$

Solução: observe que as parcelas são do tipo:
 $2 \cdot C_{2,2} + 2 \cdot C_{3,2} + \dots + 2 \cdot C_{16,2}$ e daí:
 $2 \cdot (C_{2,2} + C_{3,2} + \dots + C_{16,2}) = 2 \cdot C_{17,3}$

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 50 – “Estratégia: Somar subconjuntos de um conjunto”.

SOMAR SUBCONJUNTOS DE UM CONJUNTO

Usamos essa estratégia quando queremos contar o número de todos os subconjuntos possíveis de um conjunto com n elementos obtendo, desta forma: $C_{n,0} + C_{n,1} + \dots + C_{n,n} = 2^n$.

Situação-problema qualquer

Exemplo: De quantas maneiras podemos selecionar duas ou mais gravatas entre oito distintas entre si?

Resposta:
 $256 - 1 - 8 = 247$ modos.

Solução: 1º Observe que podemos considerar as diferentes gravatas como elementos de um conjunto. Assim, o número de subconjuntos do conjunto de gravatas é dado por:
 $C_{8,0} + C_{8,1} + \dots + C_{8,8} = 2^8 = 256$.

2º Como queremos selecionar duas ou mais gravatas, teremos:
 $256 - C_{8,0} - C_{8,1}$
 Daí:

Fonte: elaborado pelo autor.

Conclusão

Como pode ser visto, à luz da literatura, a relevância do uso das Máscaras de Tutoria consiste nos seguintes pontos:

- i Sua disposição permite a conjugação de mais de um tipo de mapa conceitual de modo que eles se complementem. Com isso, o uso dos mapas se torna mais abrangente;
- ii O desdobramento dado aos mapas por meio da maneira particionada com que se apresenta o conjunto de Máscaras facilita a leitura e simplifica a compreensão dos pormenores do algoritmo;
- iii Usa de uma forma mais imbricada a teoria da codificação dual de Allan Paivio (2006) facilitando, por conseguinte, a aprendizagem;
- iv Associa as estratégias às imagens concretas facilitando, assim, a consolidação de ideias;
- v Ajuda na metacognição, por usar a maiêutica socrática;
- iv Proporciona a formação do pensamento combinatório.

Desta forma, as Máscaras de Tutoria reúnem atributos que, juntos, constituem um avanço no estado da técnica. E, por ser uma proposta inovadora, abre caminho para diversas possibilidades, entre as quais podemos citar o uso para o ensino de equações e inequações algébricas ou mesmo a possibilidade de transformá-lo em um *software* interativo. Temas aos quais podem ser abordados em trabalhos futuros.

Referências

ALVES, G.; VERSOLATO, M. **Ensino de matemática no Brasil é catastrófico diz novo diretor do Impa**. São Paulo: Folha de S. Paulo, jan. 2016. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2016/01/1734373-ensino-de-matematica-no-brasil-e-catastrofico-diz-novo-diretor-do-impa.shtml> . Acesso em 07 de fevereiro de 2016.

ATHERTON, J. S. **Assimilation and Accommodation**. Learning and Teaching, 2013. Disponível em: <http://www.learningandteaching.info/learning/assimacc.htm>. Acesso em 09 de fevereiro de 2016.

AUN, O.S. **Advanced Flowchart**. s.l., 2014. Disponível em: http://www.tipskey.com/article/advanced_flowchart. Acesso em 23 de janeiro de 2016.

BERGER, K. S. **O desenvolvimento da pessoa: da infância à terceira idade** . 5. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2003.

BRASIL. **Ministério da Educação** .Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002. Disponível em:<http://www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> . Acesso em 07 de fevereiro de 2016.

BUTTS, T. **Formulando problemas adequadamente** . In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.(orgs.). A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1998, p. 32-47.

BUZAN, T. **Use your head**. 6th. ed.,London: British Broadcasting Corp, 1982.

BRUALDI, R.A. **Introductory Combinatorics**. 5 th. ed. USA: Pearson, 2009.

CERIOLI, R.M; VIANA, P. Minicurso de Combinatória de Contagem. In: II Colóquio de Matemática da Região Sul, Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2012. Disponível em: <http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SU-2.05.pdf> . Acesso em 31 de janeiro de 2016.

CHADE, J. 84 milhões de brasileiros ainda estão *offline*, afirma a ONU. *Estadão: Brasil*, São Paulo, 21 set. 2015. Disponível em: <http://brasil.estadao.com.br/noticias/geral,84-milhoes-de-brasileiros-ainda-estao-off-line,1766032>. Acesso em 31 de janeiro de 2016.

COLUMBIA UNIVERSITY. Chapter 4: Binomial Coefficients . Columbia University, s.l., 2009. Disponível em: <http://www.cs.columbia.edu/cs4205/files/CM4.pdf>. Acesso em 31 de janeiro de 2016.

DANTE, L. R. **Matemática, volume único**. 1. ed., Ed. Ática, 2011.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: combinatória e probabilidade**.v.5. 5 Ed. São Paulo: Atual, 1993.

KADIOĞLU, S. **Efficient Search Procedures for Solving Combinatorial Problems**. 2012. 182f. Dissertação (*Doctor of Philosophy*) - Rhode Island: Brown University. Disponível em: <https://cs.brown.edu/research/pubs/theses/phd/2012/kadioglu.pdf>. Acesso em 21 de fevereiro de 2016.

LIMA, C.C.B. **Análise combinatória: uma aprendizagem significativa com mapas conceituais**. 2011. 201f.. Dissertação (Mestrado em Educação) - UFPB, João Pessoa. Disponível em: <http://www.fisica.ufpb.br/romero/pdf/DissertacaoCristiane.pdf>. Acesso em 12 de dezembro de 2015.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**.v.1. 9. ed. - Rio de Janeiro: SBM,2006.

_____. **A Matemática do Ensino Médio**.v.2. 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM,2006.

MERITT; FUNDAÇÃO LEMANN. **Distribuição dos alunos por nível de proficiência**. QEDU, 2015. Disponível em: <http://www.qedu.org.br/brasil/proficiencia>. Acesso em 04 de janeiro de 2016.

MORAES, J.U.P.;VIANA-BARBOSA, C.J. **Tic e aprendizagem significativa nas revistas nacionais de ensino de física: o estado da arte (2005-2010)**.In: XIX Simpósio Nacional de Ensino de Física (SNEF),19, 2011, Manaus. Atas... São Paulo: Sociedade Brasileira de Física,2011. p. 1 – 10.

MOREIRA, M.A. **Aprendizagem Significativa Crítica**. 2000. In: III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa , Lisboa(Peniche). Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/moreira/apsigcritport.pdf>. Acesso em 12 de dezembro de 2015.

_____. **¿Al final, qué es aprendizaje significativo?**. Revista Qurrriculum, La Laguna, n. 25. Mar. 2012 Disponível em: <http://qurrriculum.webs.ull.es/?p=716>. Acesso em 12 de dezembro de 2015.

_____. **Mapas conceptuales y aprendizaje significativo de las ciencias.** Revista chilena de educación científica, v.4, n.2. 2005.p. 38-44

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade: com soluções dos exercícios.** 9ed. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM,2006.

MUSSER, G. L.; SHAUGHNESSY, J.M. **Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar.** In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.(orgs.). A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1998, p. 188-201.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Learning how to learn.** Cambridge University Press: Cambridge, 1984.

PAIVIO, A. **Dual coding theory and education.** 2006. 20f. In: Conference “Pathways to Literacy Achievement for High Poverty Children”, The University of Michigan School of Education.

PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia.** 24. ed. , Rio de Janeiro. Forense Universitária, 2005.

PRAIA, J. F. **Aprendizagem Significativa em D. Ausubel: Contributos para uma adequada visão da sua teoria e incidências no ensino.**In: III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa , Lisboa(Peniche), 2000. Disponível em: <http://www.mlrg.org/memberpublications/LivroPeniche2000.pdf>. Acesso em 12 de dezembro de 2015.

SABO, R.D. **Saberes Docentes: A análise combinatória no Ensino Médio .** 2010. 210f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC, São Paulo.

SIQUEIRA, R.N.; ALBUQUERQUE, R.A.F.; MAGALHÃES, A.R. **Métodos de ensino adequados para o ensino da geração Z – uma visão dos discentes: um estudo realizado no curso de graduação em administração de uma universidade federal.**In: XXIII ENANGRAD, Bento Gonçalves, 2012. Disponível em: <http://xxiiienangrad.enangrad.org.br/anaisenangrad/artigos/epd.html>. Acesso em 15 de janeiro de 2016.

SCHOENFELD, A. H. **Heurísticas na sala de aula .** In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.(orgs.). A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1998, p. 13-29.

TAVARES, R. **Construindo mapas conceituais.** v.12, p.72 – 85, Rio de Janeiro: Ciências e Cognição, nov. 2007.

LIMA, C.C.B. **Análise combinatória: uma aprendizagem significativa com mapas conceituais**. 2011. 201f.. Dissertação (Mestrado em Educação) - UFPB, João Pessoa. Disponível em: <http://www.fisica.ufpb.br/romero/pdf/DissertacaoCristiane.pdf>. Acesso em 12 de dezembro de 2015.

SPIEGEL, M. R. **Schaum's outline theory and problems of college algebra**. United States of America: McGraw-Hill Book Company, 1956.

WADSWORTH, B. J. **Inteligência e afetividade da criança na teoria de Piaget**. 4. ed., São Paulo: Pioneira, 1996.

YAHATA, E.A. **Desenvolvimento das Habilidades Metacognitivas no Ensino de Análise Combinatória**. 2012. 129f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Rio de Janeiro: UFRJ / IM. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/43%20Edson%20Yahata.pdf>. Acesso em 13 de janeiro de 2016.

Apêndices

Detalhes das Figuras

Neste Apêndice estão algumas ilustrações detalhadas que foram omitidas do corpo do texto.

Figura 51 – Detalhe da Figura 29.

Postura: Tente reformular a pergunta de forma mais simples.

Postura: O que deve ser contado no problema? (pense nisso como elementos de um conjunto).

Não adie dificuldades: há alguma restrição para o que será contado? Qual(is)? Reserve um local para escrevê-la(s) e comece a resolução por ela(s).

Postura: Algumas estratégias restritivas (borda verde).

PKI

$P_{r}^{\alpha, \beta, \dots, \phi}$

$CR_{n,p}$

PA

PM

PB

$C_{n,p}$

$A_{n,p}$

P_n

$PC(k)$









$(AR)_{n,p}$

Venn diagram

Tree diagram

Fonte: elaborado pelo autor.








Figura 52 – Detalhe da Figura 30.



















Divisão: Se possível, divida o problema em etapas ou casos.

Postura: Use o PIE e/ou o PM para relacionar os casos e/ou as etapas na contagem, da seguinte forma:

- a) Os casos (dois ou mais) são conjuntos disjuntos (borda azul).
- b) Os casos (dois ou mais) não são conjuntos disjuntos (borda roxa).

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 53 – Detalhe da Figura 31.

Postura: Enfileirando as etapas temos os casos: (borda verde)

a) Filas (de mesmo tamanho):

- 1) Em que, num diagrama de árvore, cada etapa tem um mesmo nº de elementos, neste caso usamos o PM parte I.
- 2) Idem 1, com a diferença que cada etapa tem um elemento a menos que a etapa anterior. Usamos PM parte II. (borda azul)

b) Filas (de tamanho variado)
Diagrama de árvore (borda roxa).

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 54 – Detalhe da Figura 32.

Postura: Caso não consiga usar: PIE e/ou o PM então tente (borda roxa) ou então:

Postura: Pergunte-se como é a configuração dos elementos a ser contada segundo o enunciado do problema, isto é:

a) sequências:
 • filas lineares (borda verde)
 • ou circulares (borda azul).

b) Conjuntos (borda vermelha)
 (vide 3ª linha do menu)

PA PM PB PC(k) P_n A_{n,d} C_{n,d} (AR)_n P^{α,β,γ,φ}_r CR_{n,d} PKI

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 55 – Detalhe da Figura 33.

Postura: Verifique se a partir dos n elementos de um conjunto, podemos formar seqüências (filas lineares) compostas por:

- a) Todos os elementos desse conjunto (borda verde)
- b) Uma parte dos elementos desse conjunto (borda azul).

Divisão: Se os elementos forem subconjuntos, podemos dividi-los em:

- a) Seqüências (borda roxa)
- b) Conjunto (borda vermelha)

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 56 – Detalhe da Figura 34.

Postura: Verifique se os elementos pertencentes à configuração:

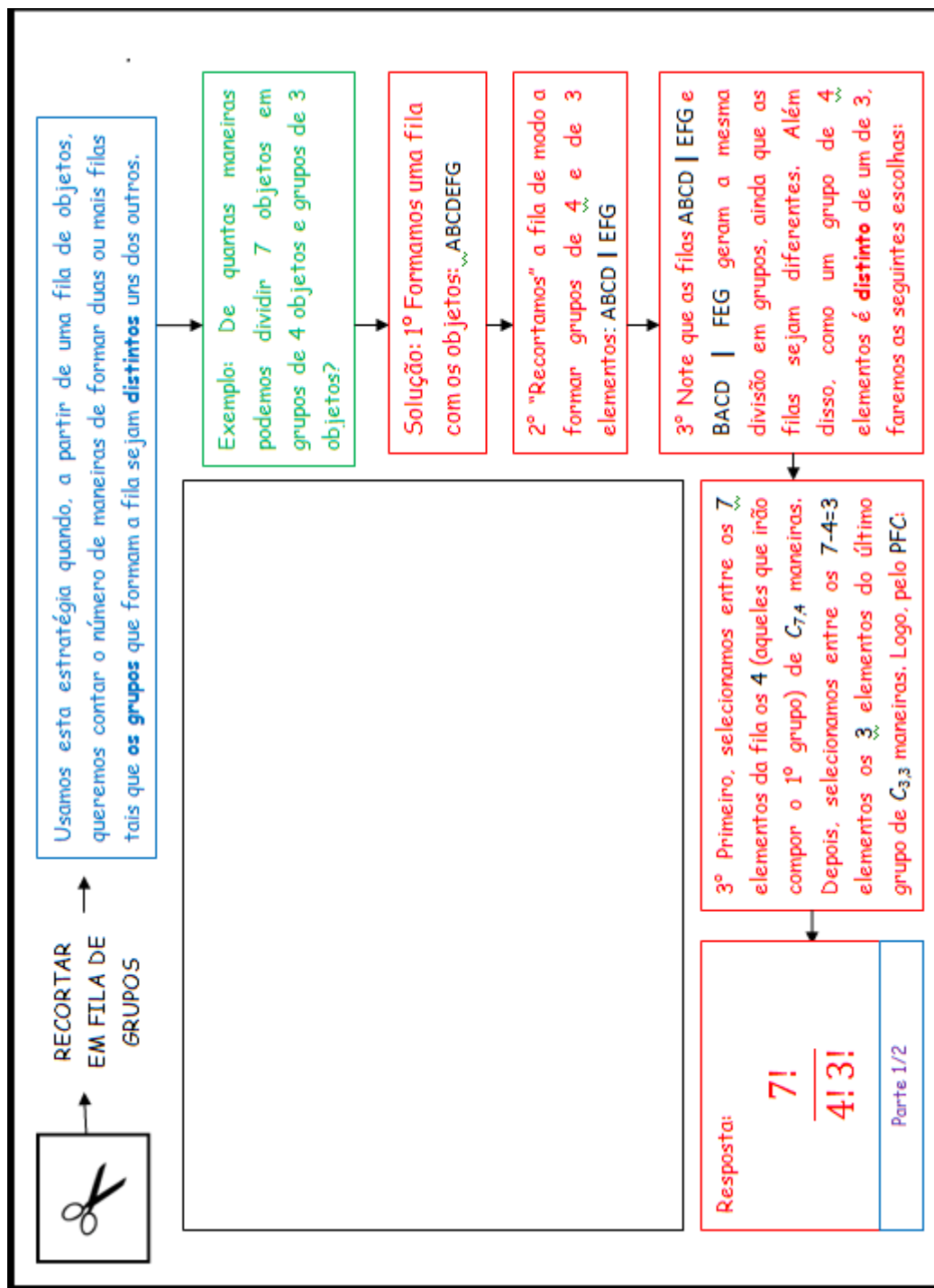
- a) São repetidos (borda azul).
- b) Não são repetidos (borda vermelha).

Postura: Se a configuração é de conjuntos, tente (borda verde)

Não adie dificuldades: Verifique a cada etapa suas soluções parciais e finais.

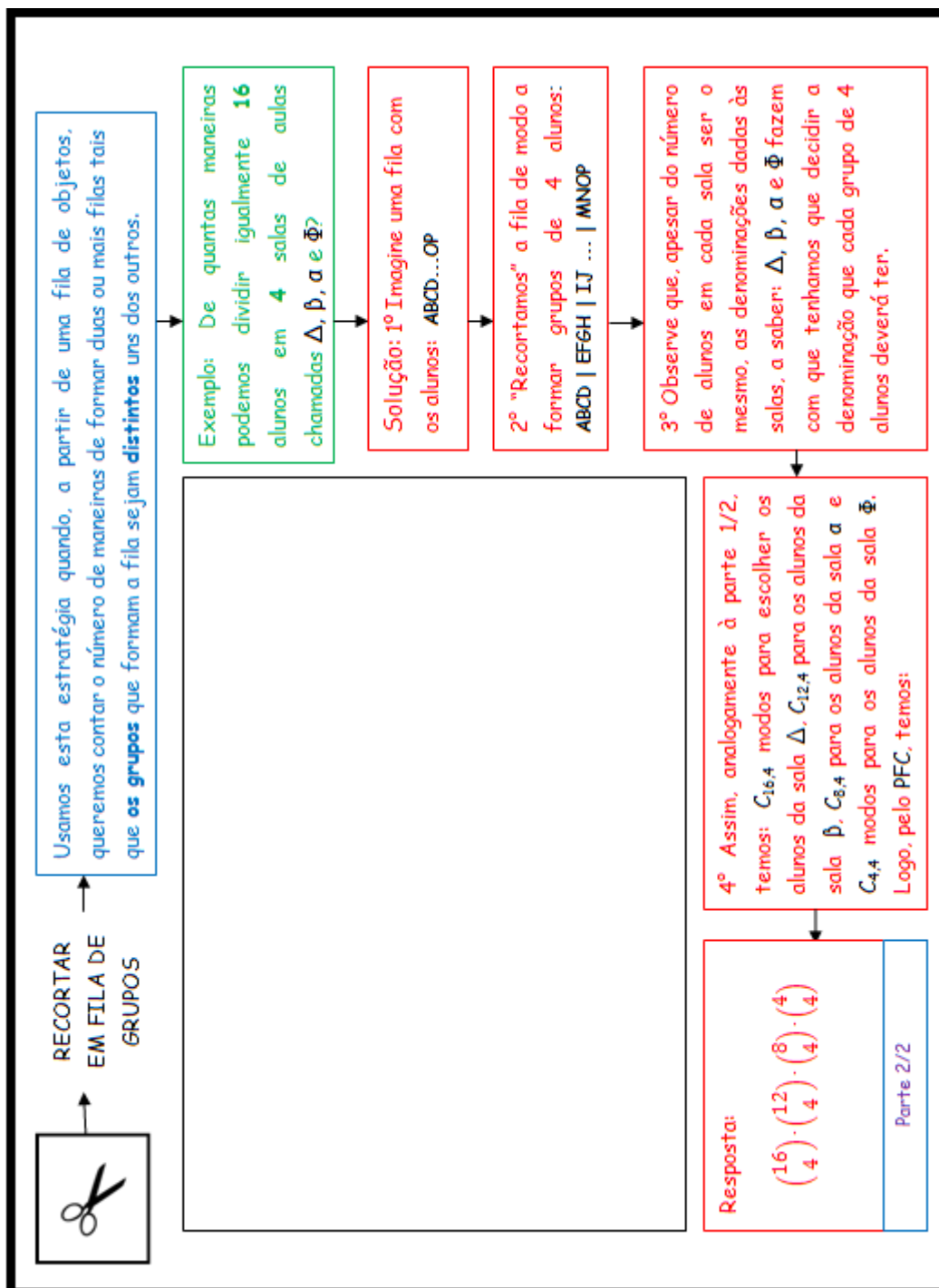
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 57 – Detalhe da Figura 35.



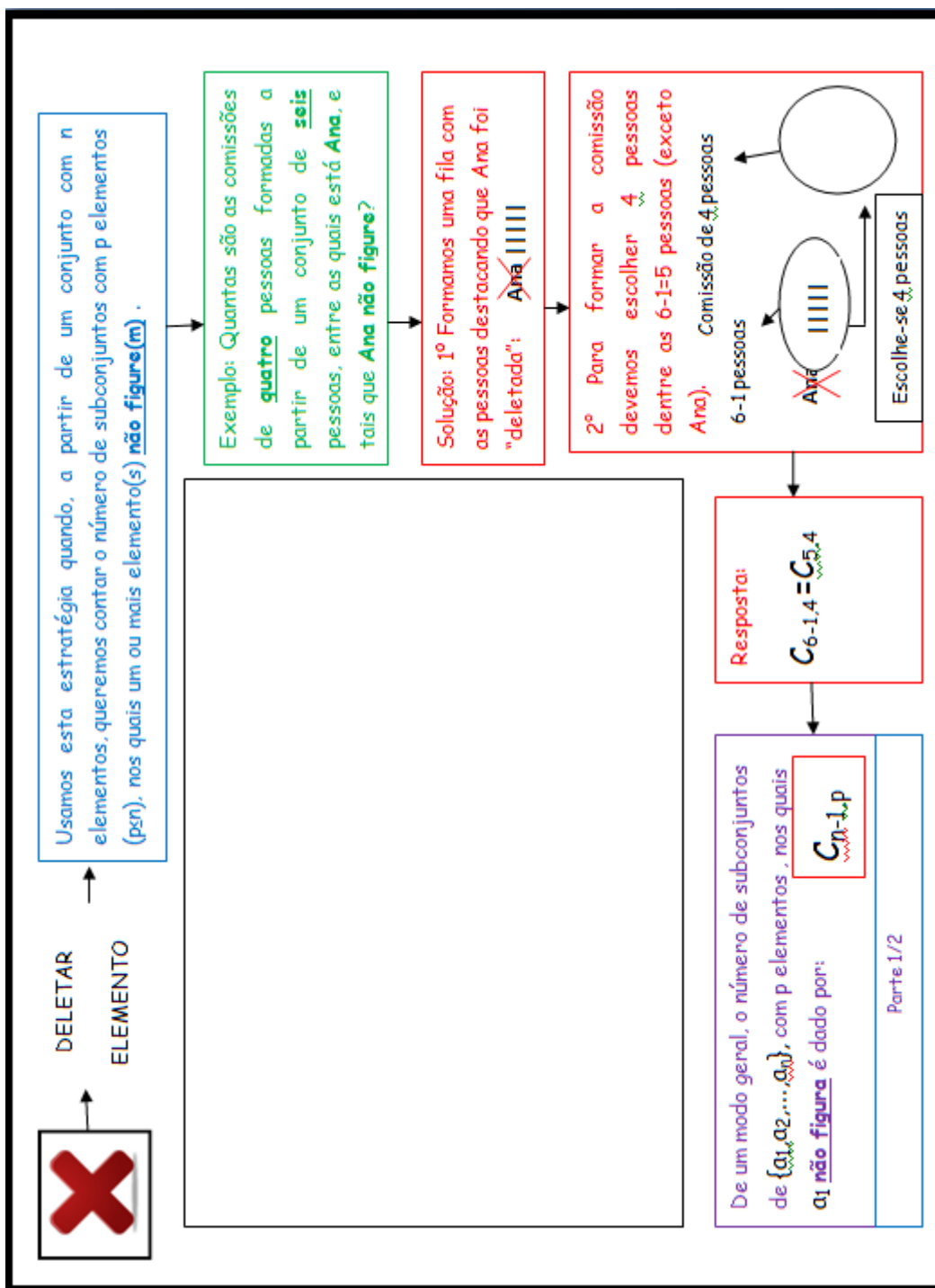
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 58 – Detalhe da Figura 36.



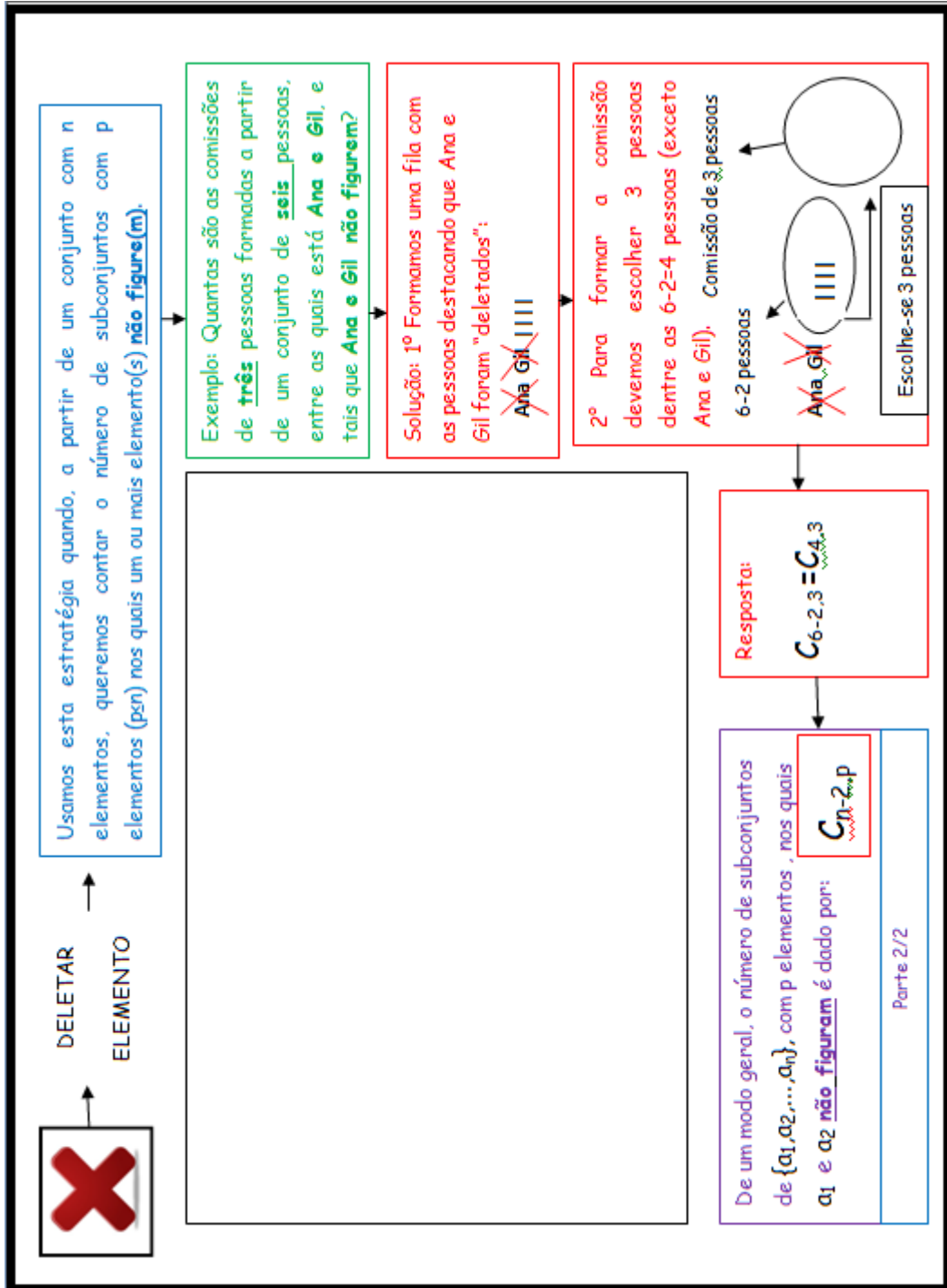
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 59 – Detalhe da Figura 37.



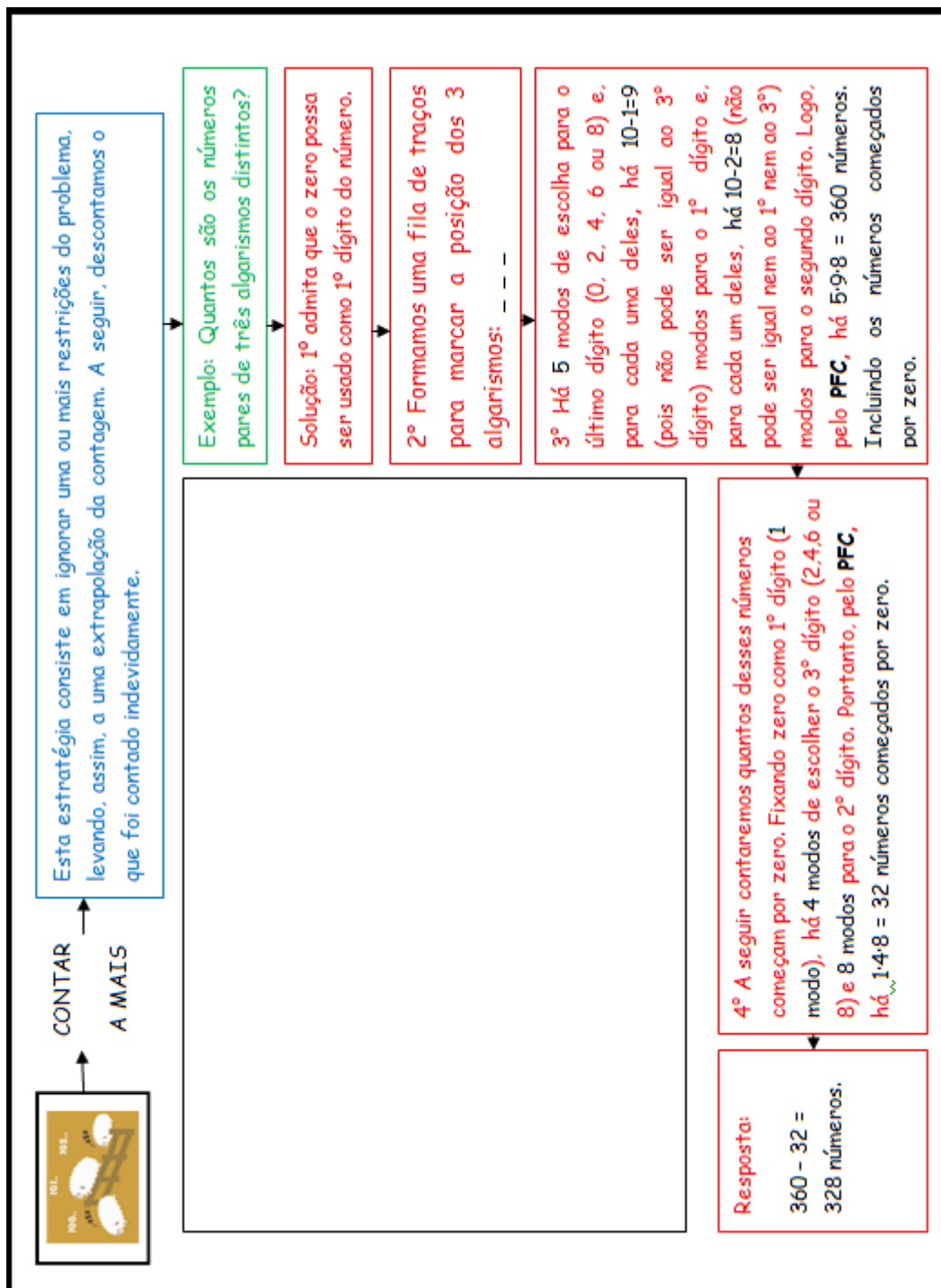
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 60 – Detalhe da Figura 38.



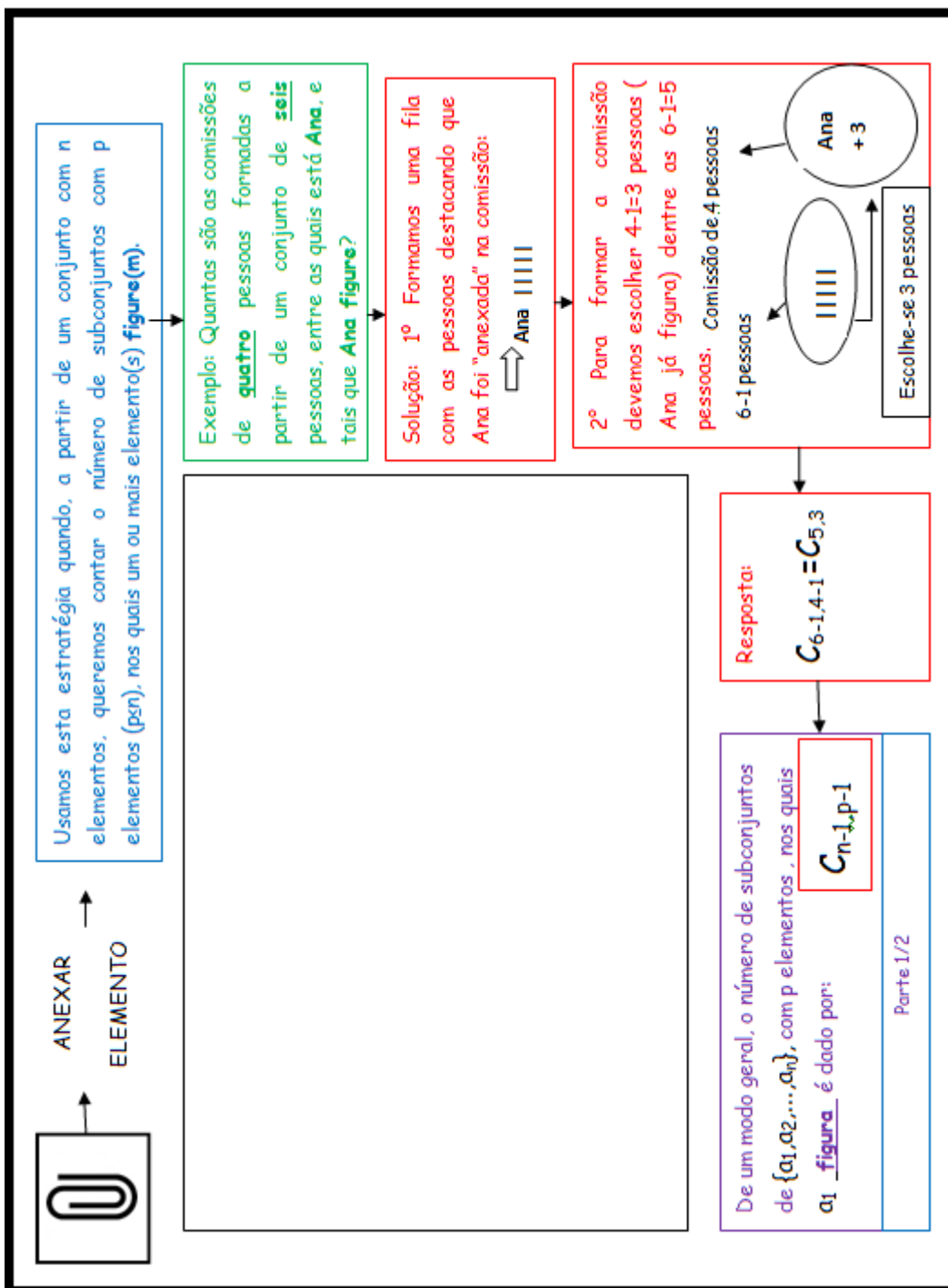
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 61 – Detalhe da Figura 39.



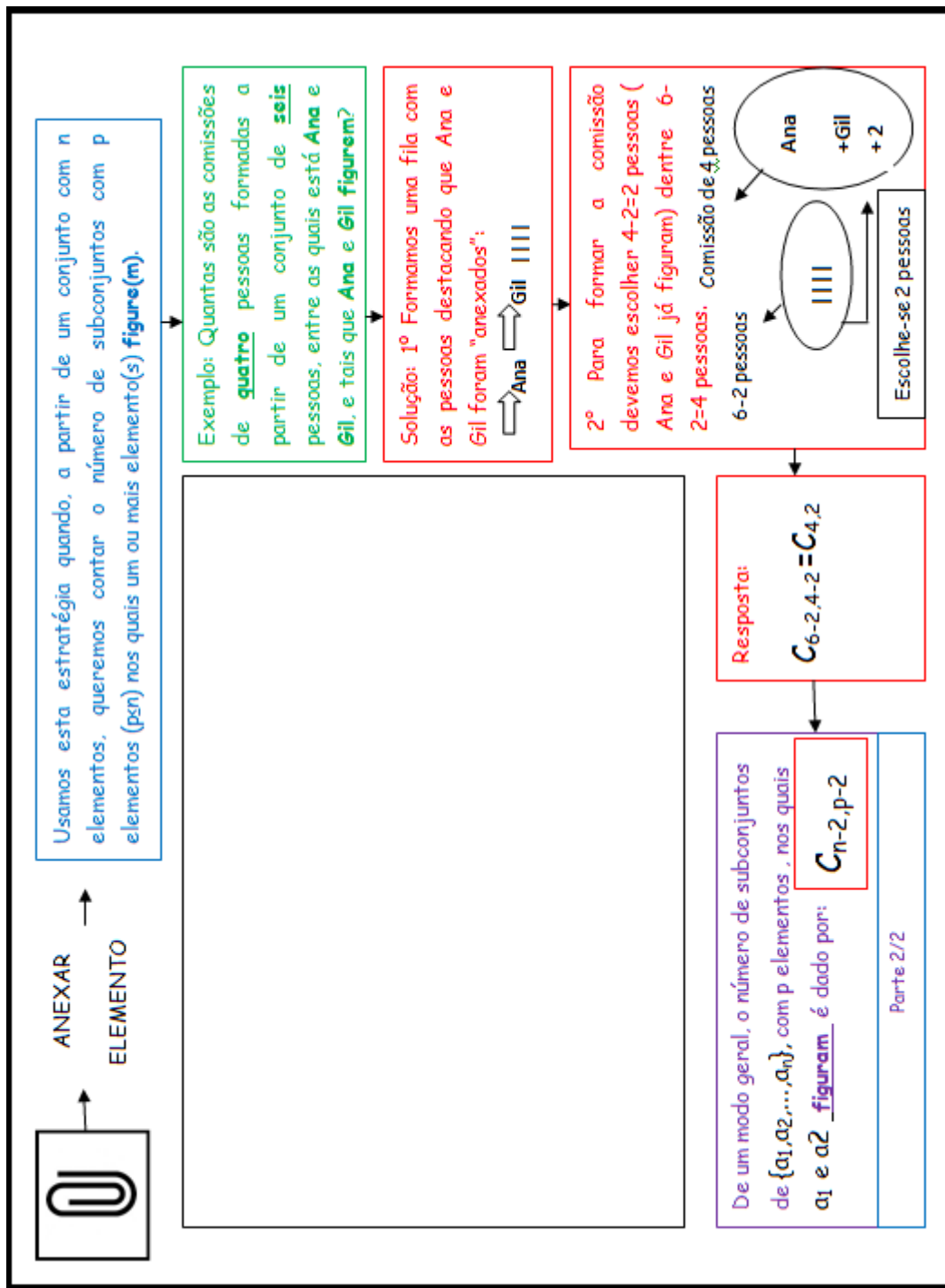
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 62 – Detalhe da Figura 40.



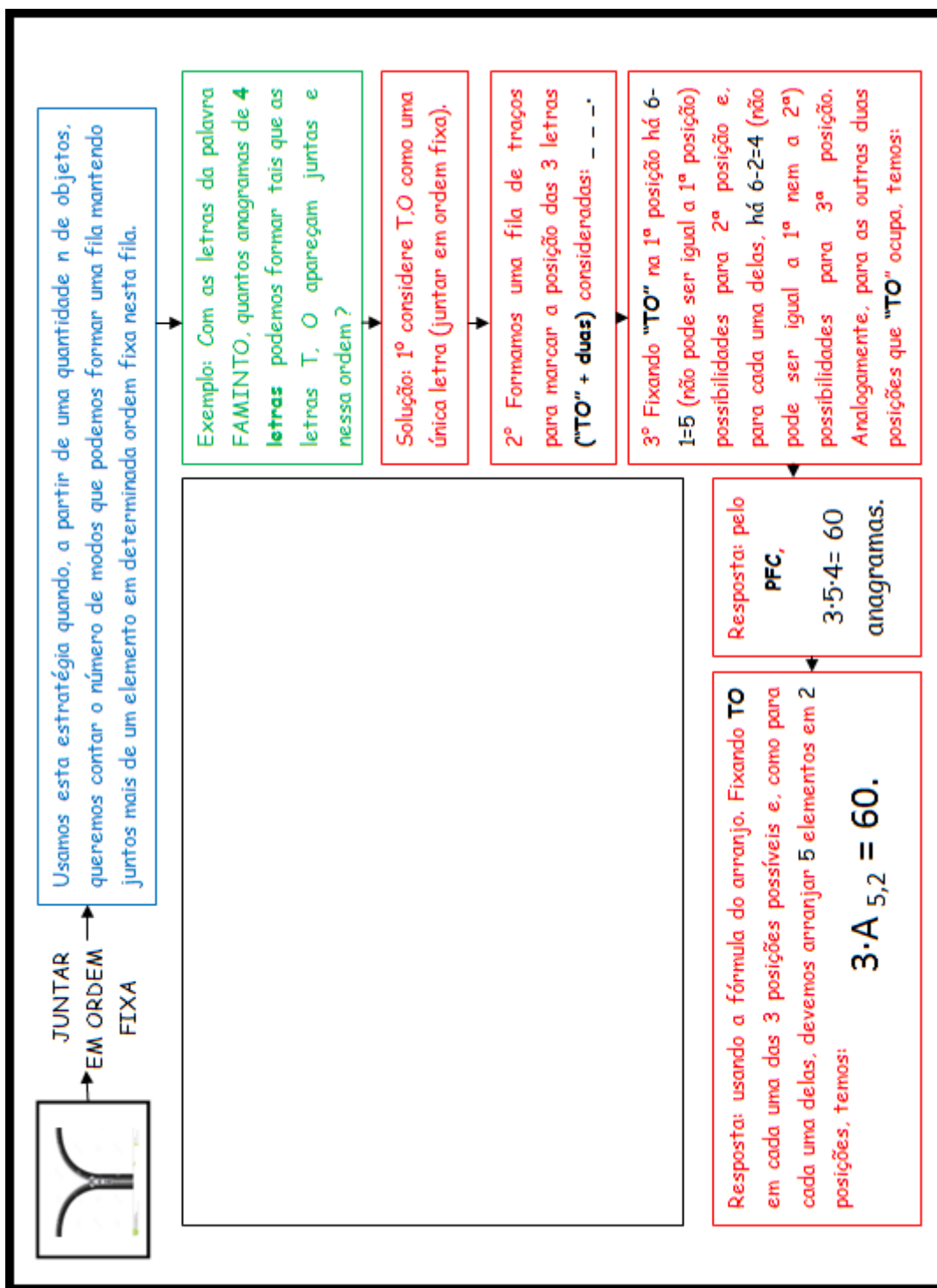
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 63 – Detalhe da Figura 41.



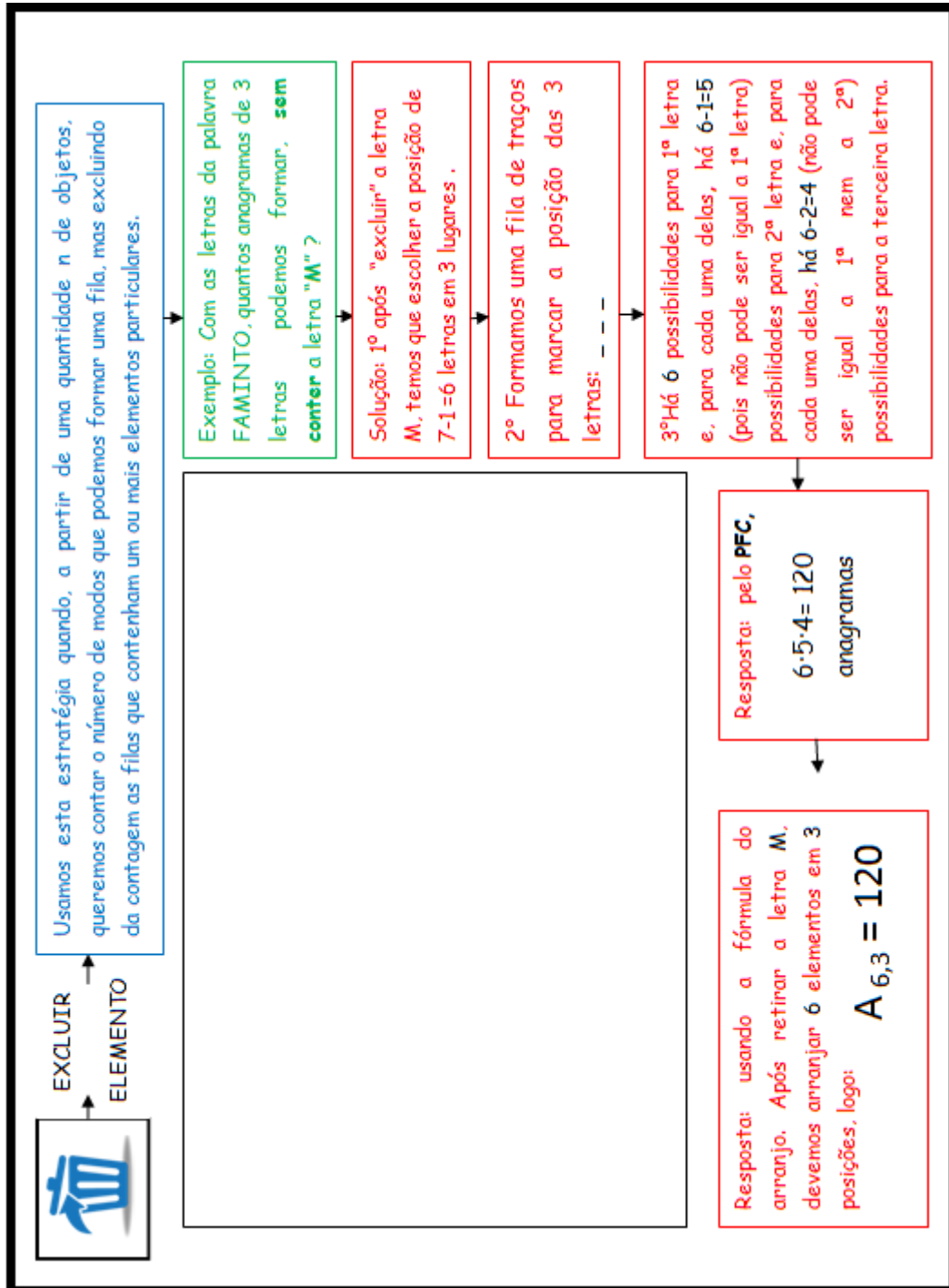
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 64 – Detalhe da Figura 42.



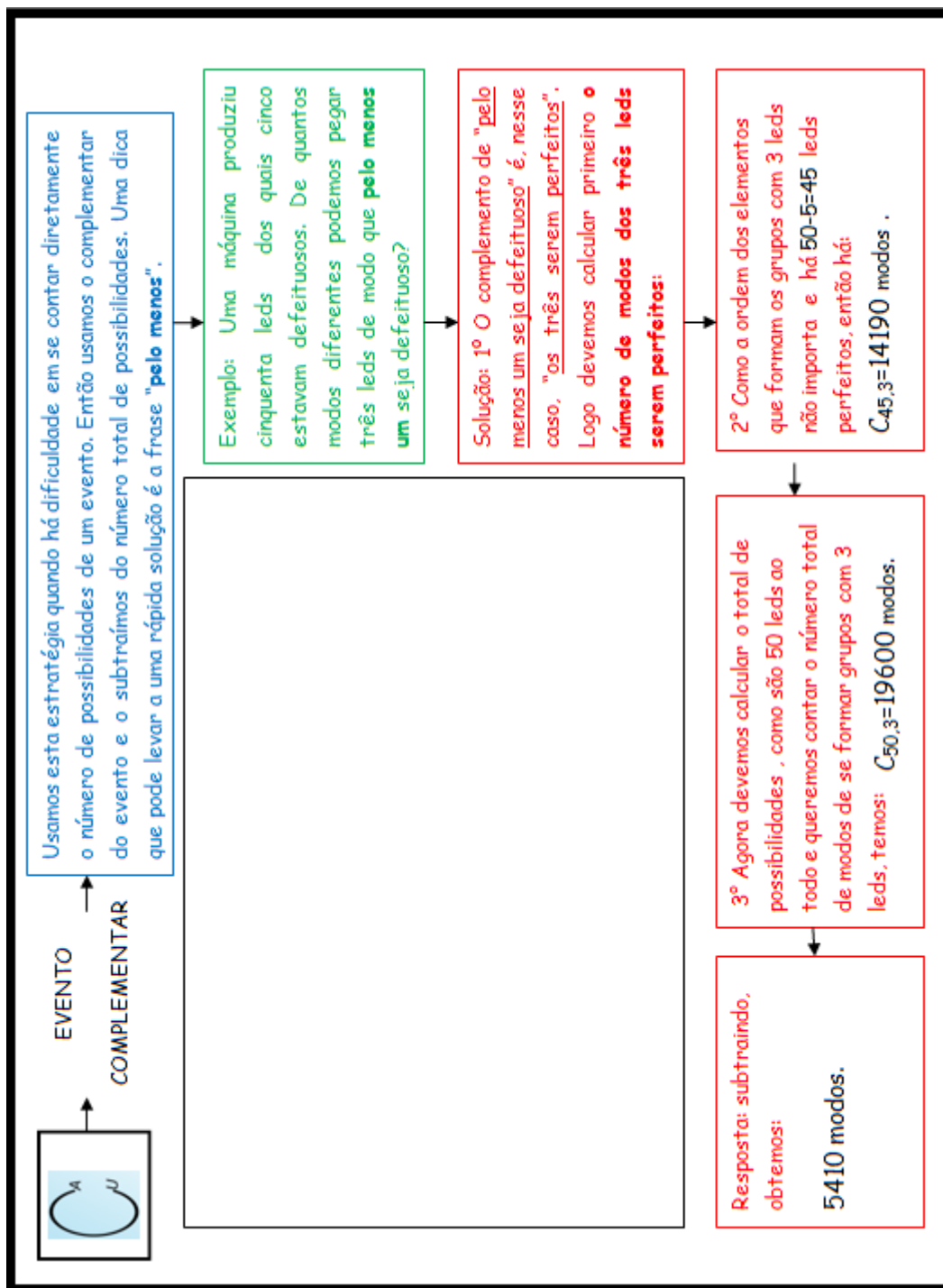
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 65 – Detalhe da Figura 43.



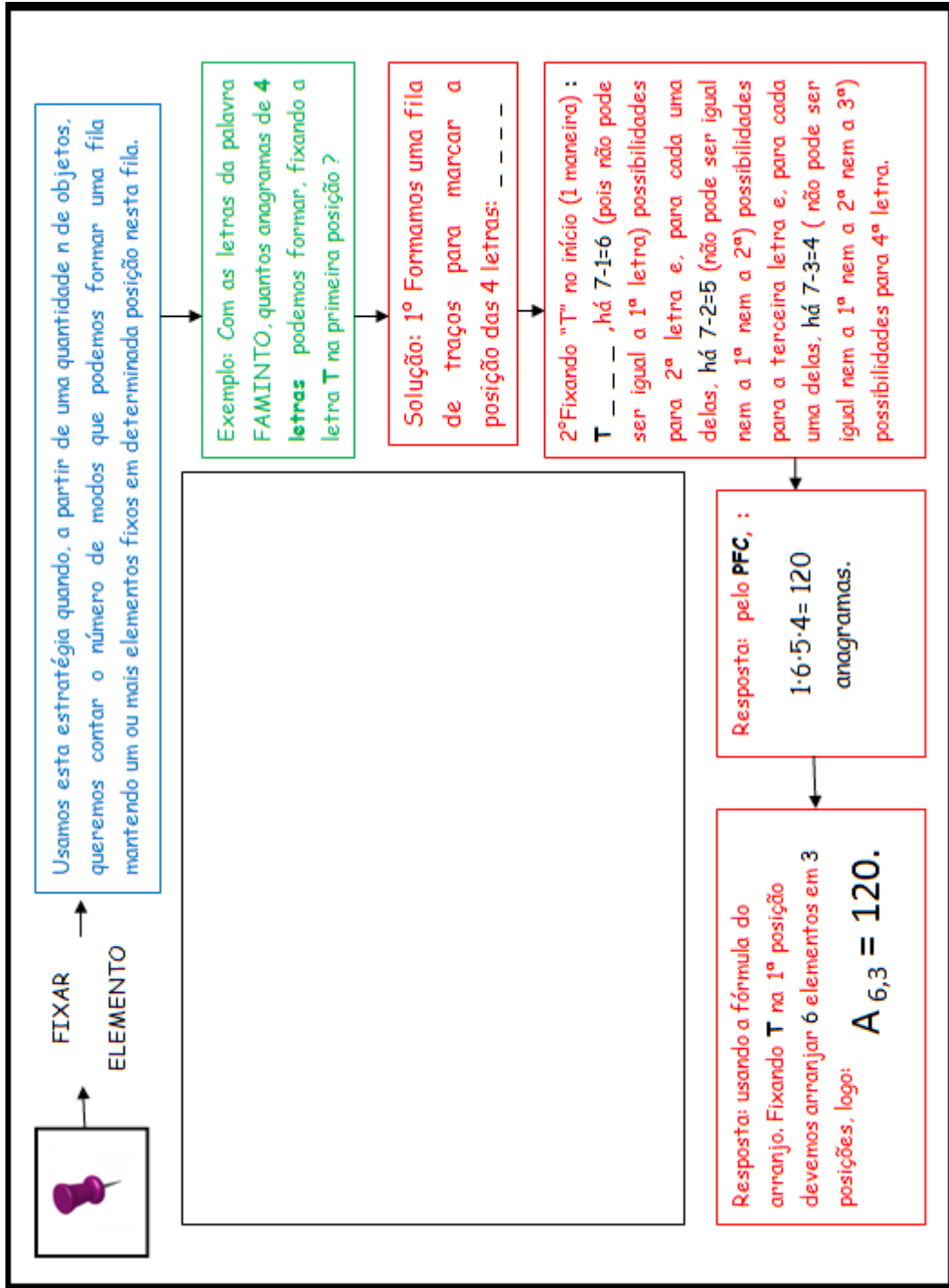
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 66 – Detalhe da Figura 44.



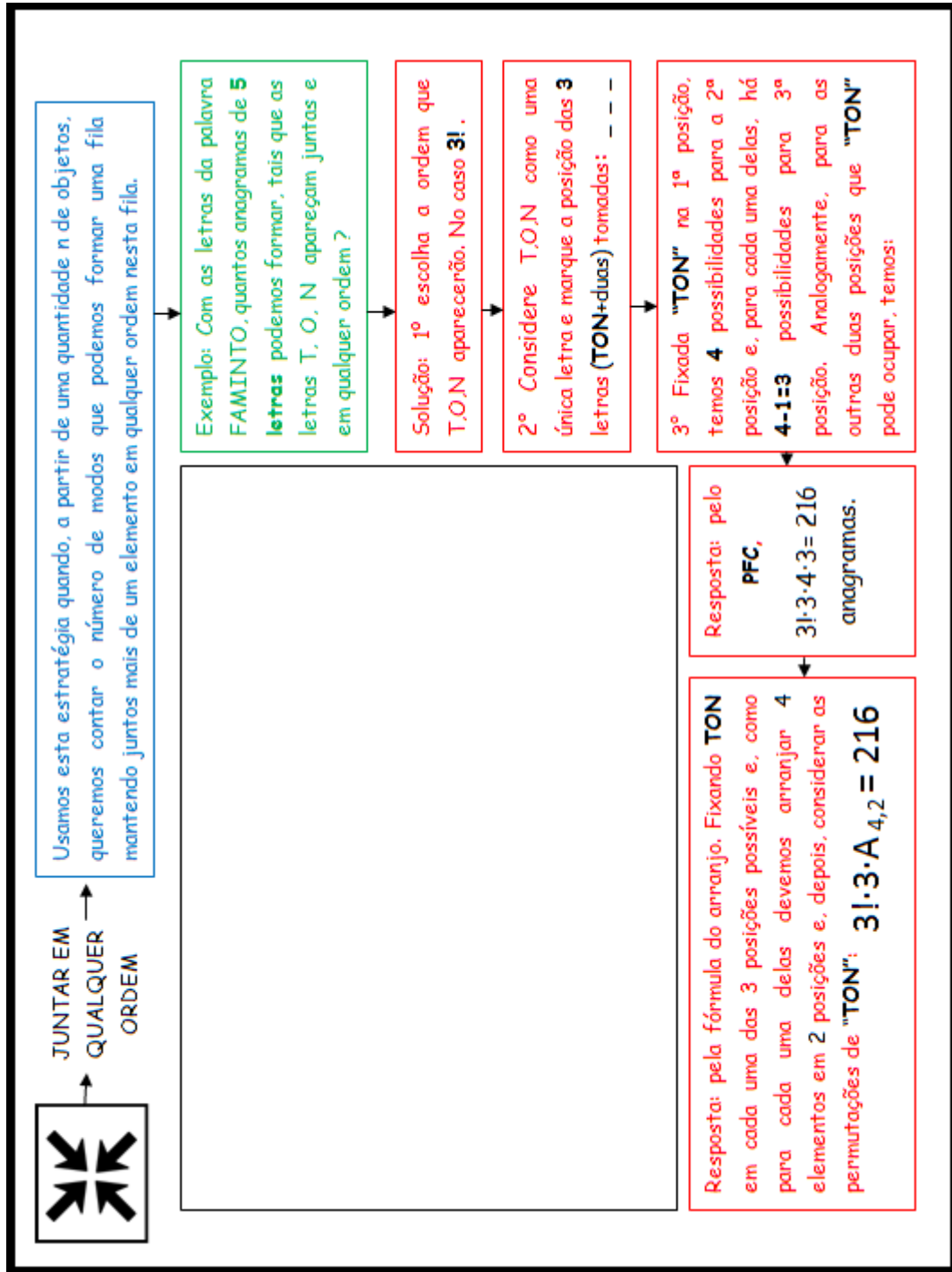
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 67 – Detalhe da Figura 45.



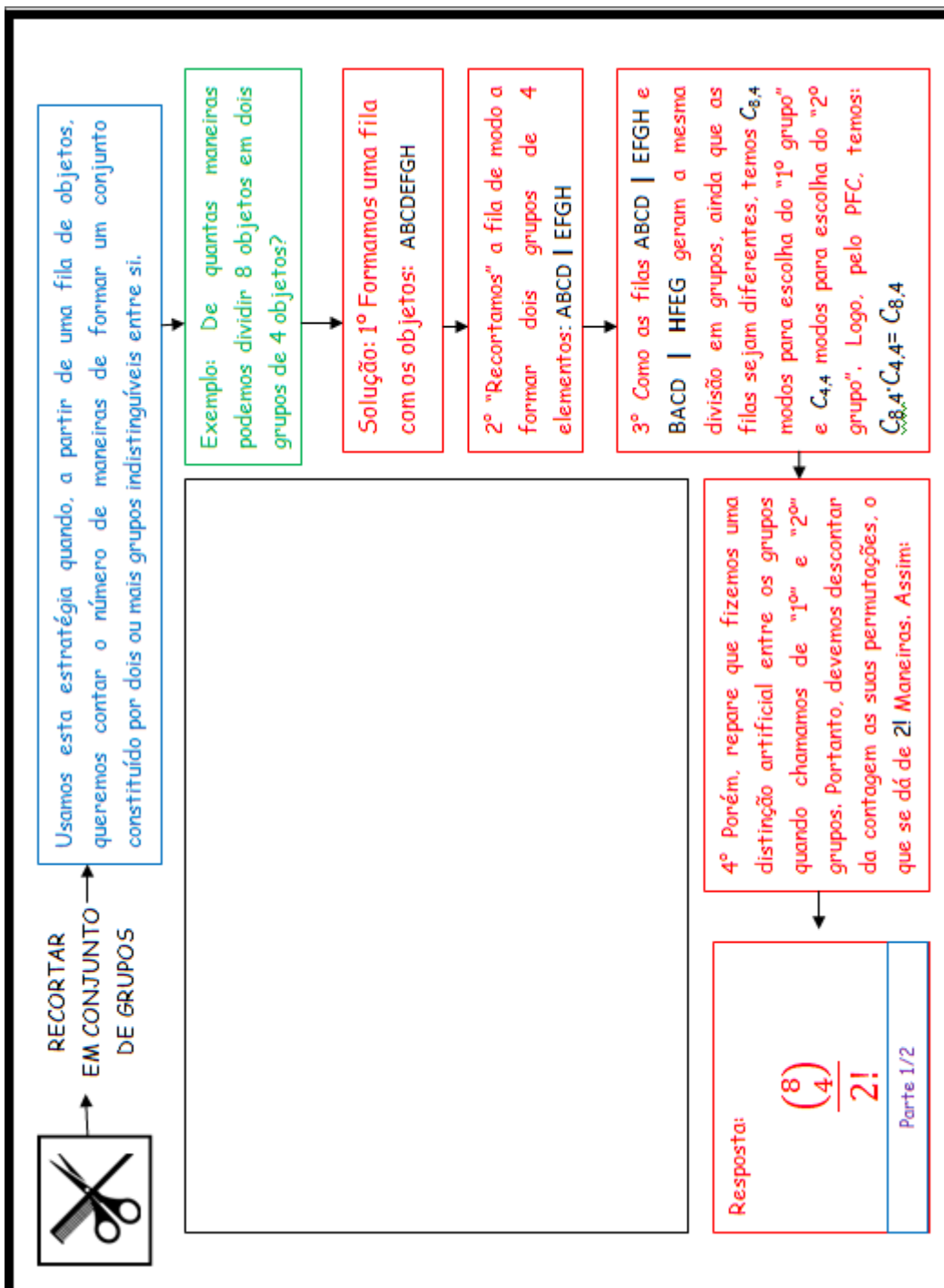
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 68 – Detalhe da Figura 46.



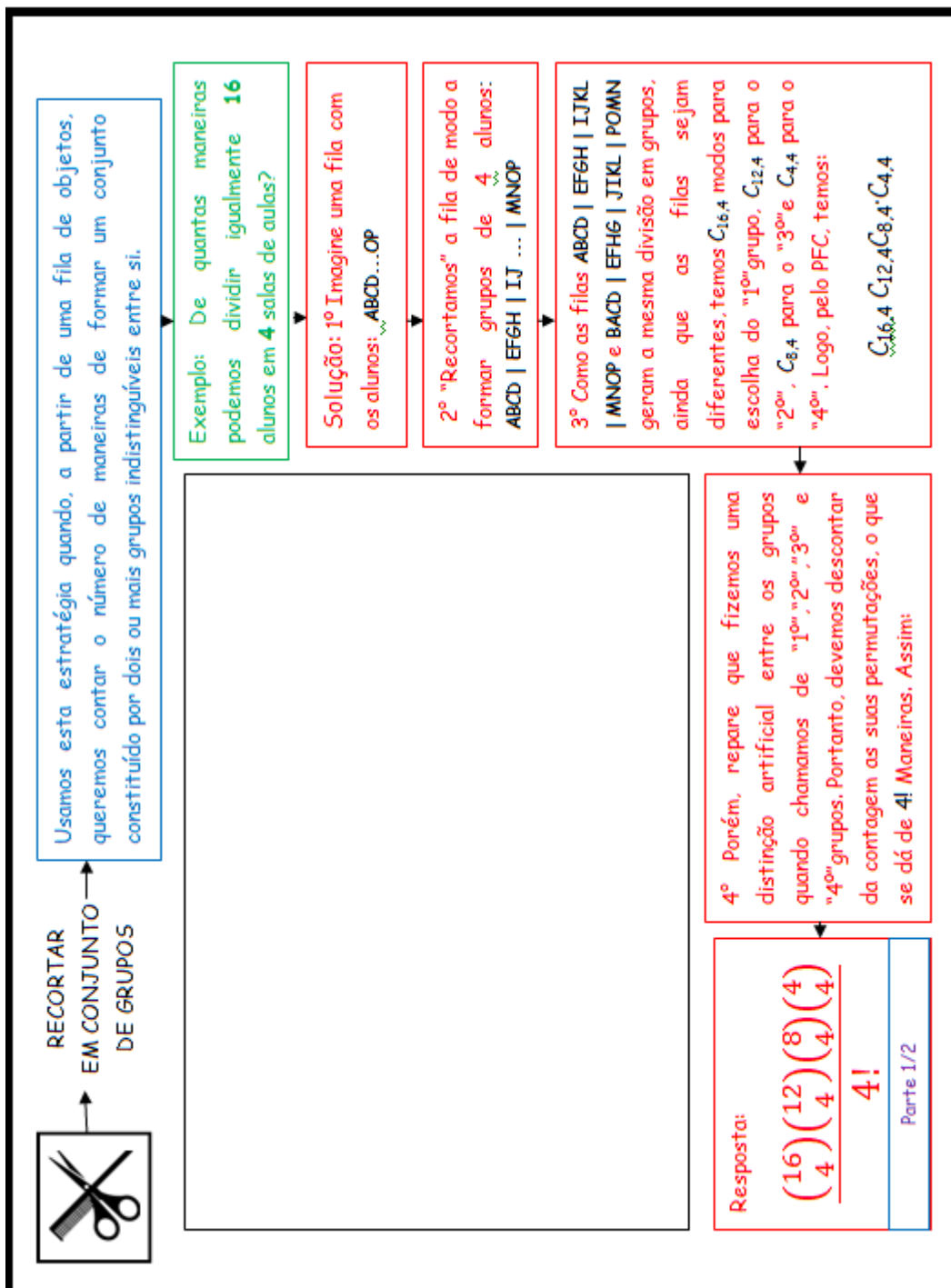
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 69 – Detalhe da Figura 47.




Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 70 – Detalhe da Figura 48.



Fonte: elaborado pelo autor.

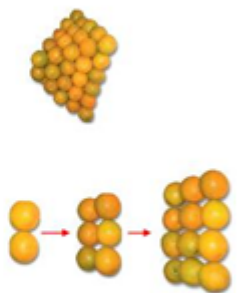
Figura 71 – Detalhe da Figura 49.



SOMAR
COLUNAS DO
Δ DE PASCAL

Ao percebermos que na contagem da soma de uma dada configuração as parcelas se constituem em n^os do tipo: $C_{p,p} + C_{p+1,p} + \dots + C_{n,p}$ ou um múltiplo dessa soma, o resultado é $C_{n+1,p+1}$ ou um múltiplo de $C_{n+1,p+1}$ respectivamente.

Exemplo: (UERJ-modificado) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração a seguir:



Qual o número total de laranjas que compõem quinze camadas desta arrumação?

Solução: observe que as parcelas são do tipo:

$$2 \cdot C_{2,2} + 2 \cdot C_{3,2} + \dots + 2 \cdot C_{16,2} \text{ e daí:}$$

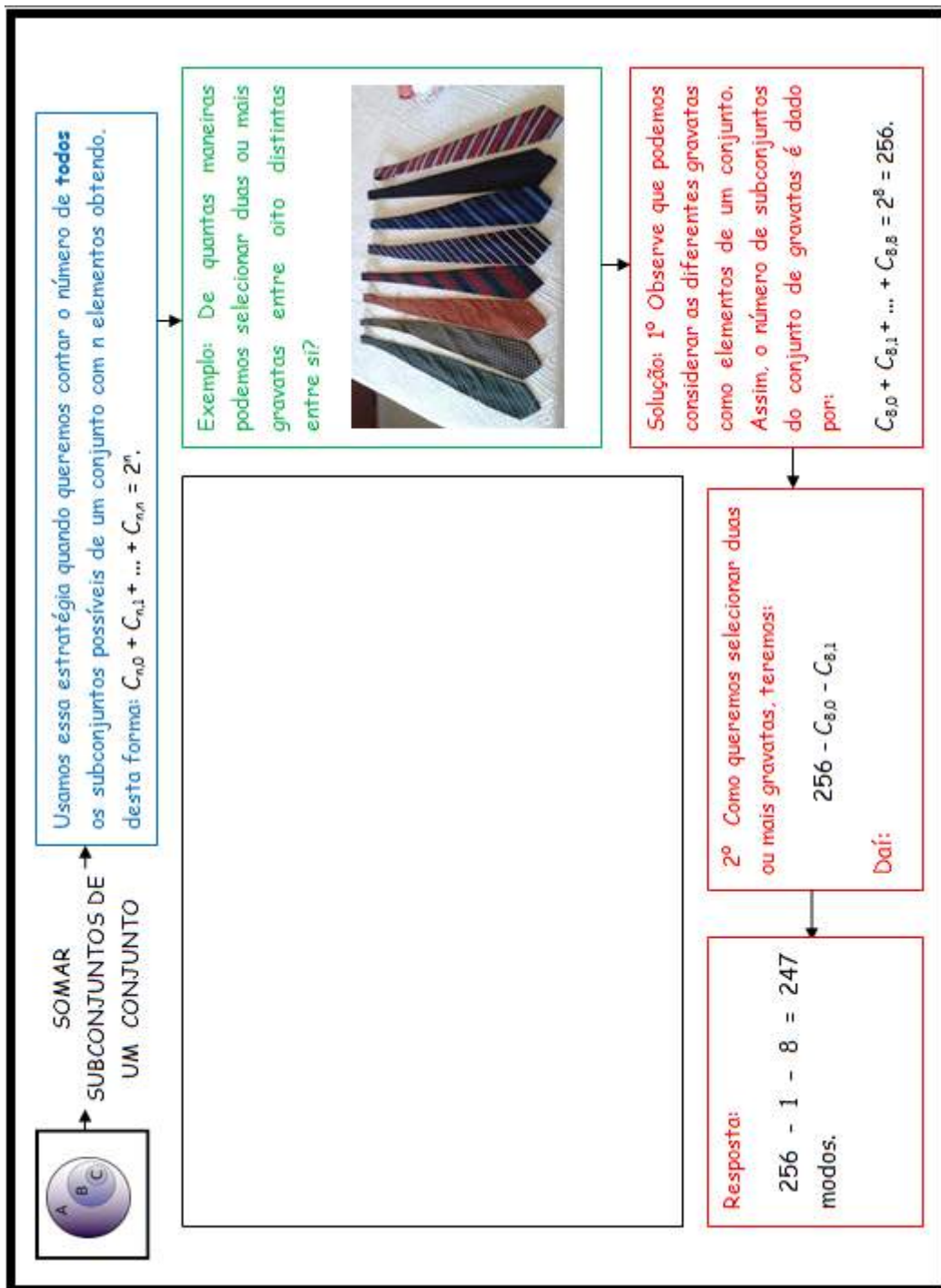
$$2 \cdot (C_{2,2} + C_{3,2} + \dots + C_{16,2}) = 2 \cdot C_{17,3}$$

Resposta:

$$2 \cdot \binom{17}{3! \cdot 14!} = 1360$$

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 72 – Detalhe da Figura 50.



Fonte: elaborado pelo autor.

Máscaras omitidas (algoritmo da divisão)

Neste Apêndice estão as Máscaras suprimidas do desenvolvimento do algoritmo da divisão exemplificado nesse trabalho.

Figura 73 – Máscara que não foi necessária no desenvolvimento da divisão de 0,4 por 8.

Dividendo | **Divisor**

Exemplo 1 (caso Sim):

$$\begin{array}{r} 200 \overline{) 9 \ 50} \\ - 200 \\ \hline 40, \\ - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

À esquerda, o Resto formado por um algarismo que acabou de ser trazido do Dividendo (neste caso, acrescentamos zero seguido de vírgula). Caso contrário, acrescentamos apenas a vírgula (à direita).

Exemplo 2 (caso Não):

$$\begin{array}{r} 30276 \overline{) 30} \\ - 30 \\ \hline 00276 \\ - 270 \\ \hline 6 \end{array}$$

11º

Passo: O Resto é formado por pelo menos um algarismo que acabou de ser trazido do Dividendo (Ver exemplos 1 e 2)?

Sim

Não

Coloque zero no Quociente seguido de uma vírgula à direita. Depois, desloque a vírgula do Resto uma casa à direita. Vá para o item 6.

Coloque uma vírgula no Quociente à direita do último algarismo. Depois, desloque a vírgula do Resto uma casa à direita. Vá para o item 6.

6)

O Resto continua menor do que o Divisor?

Sim

Não

Coloque zero no Quociente e desloque a vírgula do Resto uma casa à direita. Volte para o item 6.

Vá para o 12º Passo.

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 74 – Máscara que não foi necessária no desenvolvimento da divisão de 0,4 por 8.

Dividendo | **Divisor**

12º Passo: Quantas vezes o **Divisor** cabe no **Dividendo**?

(O resultado é obtido analogamente ao 8º Passo.)
(Faça o cálculo aqui.)

→ (Volte para o 9º Passo.) ←

*Observe que os novos **Dividendos** serão os restos parciais obtidos a partir do 9º Passo.

O número de vezes encontrado deve ser o algarismo colocado à direita do algarismo de menor ordem no **Quociente**.

Fonte: elaborado pelo autor.