FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS – CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E EXEMPLOS NA CONSTRUÇÃO CIVIL

JOADIR FERREIRA DA SILVA

TRÊS LAGOAS – MS
2016

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS – CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E EXEMPLOS NA CONSTRUÇÃO CIVIL

JOADIR FERREIRA DA SILVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.
Orientadora: Profª. Drª Eugenia Brunilda Opazo Uribe

TRÊS LAGOAS – MS

2016

AGRADECIMENTOS

A Deus por me dar saúde e forças para correr atrás dos meus objetivos.

Aos meus pais Antônio e Maria, pela educação, pelo apoio e incentivo constante em todos os momentos da minha vida.

Ao meu irmão Joemir, pelo diálogo e pela torcida nessa caminhada.

Aos meus amigos Érick, Fernando e Vagner por sempre estarem ao meu lado quando precisei.

A minha noiva Jacqueline, pela paciência, pela compreensão e por deixar os meus dias mais alegres.

Ao coordenador do curso prof. Dr. Antônio Carlos Tamarozzi, pela competência e apoio aos seus alunos.

A minha orientadora profª Drª Eugenia Opazo Uribe, na qual tenho uma imensa admiração, pela dedicação e auxílio na elaboração desse trabalho.

Aos professores desta instituição pela dedicação e empenho.

Aos colegas do curso, pois contribuíram de forma significativa no meu aprendizado.

Agradeço a direção, coordenação e aos colegas de trabalho da Escola Estadual João Ponce de Arruda, pois sempre tive o apoio e a torcida de todos.

Por fim, agradeço a CAPES pelo incentivo financeiro durante o curso.

RESUMO

Antigamente a trigonometria estava relacionada apenas ao estudo de triângulos, porém, com o passar do tempo ela foi ganhando magnitude e, atualmente, existem aplicações da trigonometria em diversas áreas de conhecimento. Este trabalho é composto por duas partes, a primeira parte está relacionada ao estudo teórico de triângulos, desde o seu uso na antiguidade até os dias de hoje, dessa forma, para uma melhor compreensão e entendimento, foi feito um breve estudo sobre os casos de congruência e semelhança, bem como as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, não deixando de lado o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras, apresentando exemplos de aplicação na construção civil. A segunda parte é composta por atividades práticas realizadas com os alunos do primeiro ano do ensino médio de um a escola estadual da cidade de Três Lagoas - MS, sendo atividades que envolvem o conhecimento de triângulos retângulos, de maneira que possam fixar melhor o tema abordado, utilizando a prática como fonte inspiradora para tal conhecimento.

Palavras-chaves: trigonometria, congruência, semelhança, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

In the past, the trigonometry was related to only to study triangles, however, over time, it was gaining importance and, nowadays, trigonometry is applied in several fields of knowledge. This paper has two parts. The first one is related to theoretical study of triangles, since its use in the past until nowadays. In order to have a better understanding, a short study was done about the cases of congruence and similarity as well as, metric and trigonometric relations in the triangle rectangle, without disregarding the Tales Theorem and Pythagorean Theorem, presenting examples of application on civil construction. The second part consists of pratical activities applied with students in the first year of high school in a state school in the city of Três Lagoas - MS. These activities involve knowlegde of triangle rectangle in order to the students may learn better the theme discussed, using the practice as source of inspiration for such knowledge.

Keywords: Trigonometry, Congruence, Similarity, Tales Theorem, Pythagorean Theorem.

Sumário

INTRODUÇÃO 9
CONCEITOS PRELIMINARES DE GEOMETRIA 11
1. 1 Triângulos 11
1.2 Congruência de Triângulos 13
1.3 Semelhança de Triângulos 15
1.4 Tales de Mileto e o Teorema de Tales 18
1.5 O Teorema de Pitágoras 22
1.5.1 O Enunciado do Teorema de Pitágoras e uma Demonstração Clássica 22
1.5.2 A Recíproca do Teorema de Pitágoras 24
1.6 Uma Aplicação do Teorema de Pitágoras na Construção Civil 26
TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO 30
2.1 Um Pouco de História: A Origem da Trigonometria 30
2.2 Relações Métricas no Triângulo Retângulo 31
2.3 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo 34
2.4 Seno, Cosseno e Tangente dos Ângulos 30°, 45° e 60° 35
2.5 Aplicação 39
EXEMPLOS NA CONSTRUÇÃO CIVIL 41
3.1 Tesouras dos Telhados 41
3.2 Mão Francesa 43
3.3 Cálculos de Medidas Inacessíveis 44
3.4 Construção de Escadas Residenciais 46
3.5 Inclinação das Rampas de Acesso 47
ATIVIDADE PRÁTICA NA ESCOLA 51
4.1 A Escola 51
4.2 Descrição das Atividades Práticas 51
4.2 Primeira Atividade 52
4.2.1 Desenvolvimento da Atividade 53
4.2.2 Resultado 54
4.3 Segunda Atividade 55
4.3.1 Materiais utilizados 55
4.3.2 Desenvolvimento da atividade 56
4.3.3 Resultados 60

4.4 Comentários dos alunos 61
4.5 Atividade Realizada em Sala de Aula 64
CONSIDERAÇÕES FINAIS 65
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.. 66

Lista de Figuras

1.1: Elementos de um triângulo.. 11

1.2: Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer...................... 12

1.3: Congruência de triângulos *LAL*.. 13

1.4: Congruência de triângulos *LLL*.. 14

1.5: Congruência de triângulos *ALA*.. 14

1.6: Congruência de triângulos LAA_o 15

1.7: Caso especial de congruência de triângulos.. 15

1.8: Semelhança de triângulos *AA*.. 16

1.9: Semelhança de triângulos *LLL*.. 16

1.10: Semelhança de triângulos *LAL*.. 17

1.11: Teorema Fundamental da Semelhança.. 17

1.12: Paralelogramo *ABCD* 18

1.13: Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais.. 19

1.14: Demonstração do Teorema de Tales.. 20

1.15: Aplicação do Teorema de Tales.. 21

1.16: Demonstração do Teorema de Pitágoras... 23

1.17: Demonstração do Teorema de Pitágoras... 23

1.18: Demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras... 24

1.19: Demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras... 25

1.20: Aplicação do Teorema de Pitágoras na Construção Civil... 27

1.21: Inclinação de um telhado.. 28

1.22: Triângulo representando a água de um telhado... 29

2.1: Dedução das relações métricas no triângulo retângulo... 31

2.2: Dedução das relações métricas no triângulo retângulo... 31

2.3: Aplicação das relações métricas no triângulo *MNP*.. 32

2.4: Elementos de um triângulo retângulo fixando um ângulo agudo................................... 34

2.5: Triângulos retângulos semelhantes.. 35

2.6: Triângulo equilátero *ABC*... 35

2.7: Dedução de seno, cosseno e tangente dos ângulos 30° e 60°.................................... 36
2.8: Quadrado *ABCD*.. 37
2.9: Dedução de seno, cosseno e tangente de 45°.. 38
2.10: Aplicação das razões trigonométricas... 39
3.1: Elementos de uma tesoura de telhado.. 42
3.2: Triângulo representando a tesoura de um telhado... 42
3.3: Mão francesa na construção de beiral de laje.. 43
3.4: Mão francesa na construção de beiral de laje.. 44
3.5: Teodolito.. 44
3.6: Cálculo de distância inacessível utilizando o teodolito.................................... 45
3.7: Triângulo representando uma escada residencial.. 47
3.8: Rampa de acesso de uma escola.. 48
3.9: Triângulo representando uma rampa de acesso 49
4.1: Materiais utilizados na primeira atividade prática... 52
4.2: Primeira atividade prática... 53
4.3: Primeira atividade prática... 54
4.4: Materiais utlizados na primeira atividade prática.. 56
4.5: Esquadro de madeira construído pelos alunos.. 57
4.6: Esquadro de madeira construído pelos alunos.. 57
4.7: Segunda atividade prática... 58
4.8: Segunda atividade prática... 58
4.9: Segunda atividade prática... 59
4.10: Segunda atividade prática.. 59
4.11: Segunda atividade prática.. 60
4.12: Segunda atividade prática.. 61

Lista de Tabelas

2.1: Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis... 38

3.1: Dimensionamento das rampas.. 48

INTRODUÇÃO

Sem dúvida nenhuma o ensino da trigonometria no ensino básico vem enfrentando muitas dificuldades, começando pelo preconceito da matemática por parte de alguns estudantes, além do déficit nos fundamentos de matemática como, por exemplo: regra de sinais, operações com frações, potenciação, radiciação, equação do primeiro grau e equação do segundo grau.

Outro fator que influência bastante para essa dificuldade, é o fato de, muitas vezes, esse tema ser abordado apenas de maneira teórica, ou simplesmente fazendo o uso do giz e lousa, dessa forma, muitos alunos sentem-se desmotivados e acabam achando a aula entediante, fazendo aquela famosa pergunta: “Onde vou utilizar isso na minha vida?”.

Segundo as orientações curriculares para o ensino médio, existem duas concepções relacionadas ao processo ensino aprendizagem:

> *A primeira concepção dá origem ao padrão de ensino “definição exemplos exercícios”, ou seja, a introdução de um novo conceito dar-se-ia pela sua apresentação direta, seguida de certo número de exemplos, que serviriam como padrão, e aos quais os alunos iriam se referir em momentos posteriores; a cadeia seria fechada com a apresentação de um grande número de exercícios, bastante conhecidos como “exercícios de fixação”.*
> *Já na segunda concepção, tem-se o caminho inverso, ou seja, a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento.* (BRASIL, 2006)

Em relação às aplicações da trigonometria na escola, a orientação coloca como sugestão trabalhar problemas de cálculos de distâncias inacessíveis, como por exemplo, calcular a largura de um rio.

Existe uma ampla literatura sobre o tema trigonometria, a biblioteca digital do PROFMAT, por exemplo, permite o acesso aos trabalhos de conclusão de curso dos anos anteriores, dentre os quais podemos destacar: Arantes (2013) que desenvolveu um trabalho na qual aborda questões teóricas ligadas à trigonometria e utilizou estas questões para verificar se a inclinação das rampas de acesso da escola estava atendendo a norma NBR 5090 da ABNT, já Leôncio (2013) além de um relato teórico em seu trabalho, sugere como uma atividade prática a construção de um teodolito caseiro para medir ângulos. Um software muito utilizado pelos professores para introduzir o conceito de trigonometria é o GeoGebra, e Júnior (2013) coloca o GeoGebra como instrumento para o ensino do ciclo trigonométrico, das relações métricas no triângulo retângulo, lei dos senos e cossenos e área de um triângulo. Ainda sobre este software, Strasburg (2014) realizou um trabalho no qual desenvolve construções trigonométricas no software GeoGebra, sendo ensinados minuciosamente todos os comandos necessários, o que possibilita a leigos ter o GeoGebra como uma nova alternativa de atividade para o seu trabalho. De um modo geral, os principais instrumentos utilizados em trabalhos práticos são GeoGebra e o teodolito caseiro, Sousa (2014) realizou um trabalho na qual utilizou o GeoGebra para o ensino da trigonometria e, posteriormente, uma atividade prática com o auxílio de um teodolito caseiro. Esse trabalho, além de abordar a parte teórica do estudo da trigonometria voltada ao triângulo retângulo, tem como principal objetivo trabalhar a parte prática, utilizando como exemplos, situações no ramo da construção civil, podendo ser utilizado como sugestão de atividade prática.

O presente trabalho foi organizado em quatro capítulos, abordando teoria, história da Trigonometria, aplicações à Construção Civil e uma atividade prática desenvolvida na escola com alunos do ensino médio. No capítulo 1 abordaremos alguns conceitos geométricos necessários para a aprendizagem da Trigonometria, incluindo congruência e semelhança de triângulos, o Teorema de Tales e o Teorema e Pitágoras. No capítulo 2 faremos um breve relato histórico da Trigonometria, além de um estudo sobre as razões trigonométricas. No capítulo 3 mostraremos alguns exemplos de aplicação da Trigonometria na Construção Civil. Finalmente o capítulo 4 descreve uma atividade prática realizada com alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola estadual da cidade de Três Lagoas – MS. A maioria das figuras encontradas neste trabalho foram construídas com o auxílio do programa AUTOCAD 2013.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES DE GEOMETRIA

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos de Geometria que precisam ser introduzidos na hora de estudar Trigonometria, tais como triângulos e os conceitos de congruência e semelhança, o Teorema Fundamental da Semelhança e uma aplicação, o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras, finalizando-o com um exemplo simples de aplicação do Teorema de Pitágoras ao cálculo da altura da cumeeira de uma casa.

1. 1 Triângulos

Os triângulos são figuras geométricas planas formadas por segmentos de retas que concorrem duas a duas em três pontos diferentes formando três lados e três ângulos internos. Assim, na figura 1.1, podemos destacar os seguintes elementos de um triângulo ΔABC: os pontos A, B e C denominados vértices do triângulo, os segmentos AB, BC e AC denominados lados do triângulo e $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ que são os ângulos do triângulo.

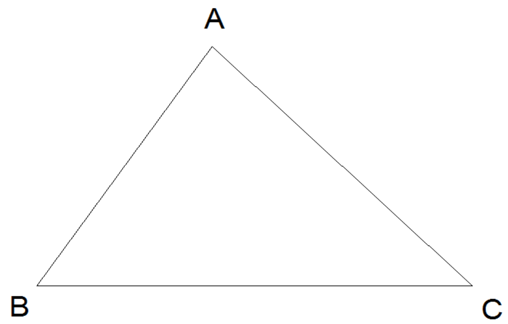


Figura 1.1: Elementos de um triângulo.

Provaremos agora que, em um triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos é igual a 180°. De fato, considerando o triângulo ΔABC e a reta r, paralela ao segmento AB, passando pelo ponto C, conforme a figura 1.2.

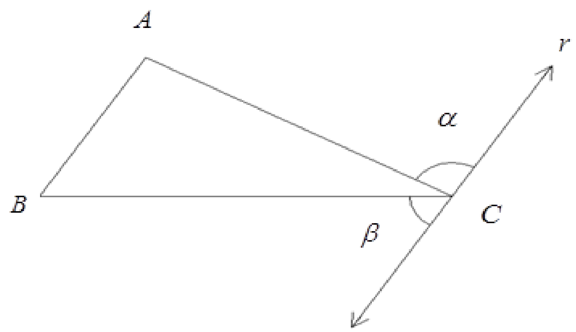


Figura 1.2: Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

Temos $\alpha = \hat{A}$ por serem alternos internos, da mesma forma temos $\beta = \hat{B}$.

Como a soma $\alpha + \beta + \hat{C}$ corresponde a um ângulo raso, segue que,

$$\alpha + \beta + \hat{C} = 180°$$

Logo,

$$\alpha + \beta + \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

Portanto, em um triângulo qualquer a soma dos ângulos internos mede 180 graus. ■

Os triângulos podem ser classificados pelas medidas dos seus lados ou até mesmo pela medida dos ângulos internos:

- Quanto aos lados os triângulos podem ser classificados em: equilátero, isósceles ou escaleno. Um triângulo será equilátero se as medidas dos lados são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida. Um triângulo será isósceles se possui pelo menos dois lados cujas medidas são congruentes. Por último, um triângulo será escaleno se os três lados possuem medidas diferentes.
- Quanto à medida dos ângulos os triângulos podem ser classificados em: acutângulo, retângulo ou obtusângulo. Um triângulo será acutângulo se todos os ângulos internos são agudos, ou seja, menores que 90°. Um triângulo será retângulo

se possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo cuja medida é 90°. Um triângulo será obtusângulo se possui um ângulo obtuso, ou seja, maior que 90°.

Um triângulo não pode ser construído com quaisquer medidas, devemos seguir a chamada condição de existência: Em um triângulo a medida de qualquer um dos lados deve ser menor que a soma dos outros dois lados e o valor absoluto da diferença de dois lados deve ser menor que a medida do outro lado, ou seja, sendo a, b e c lados de um triângulo qualquer, podemos escrever;

$$|a-b| < c < a+b$$
$$|c-b| < a < c+b$$
$$|a-c| < b < a+c$$

1.2 Congruência de Triângulos

Dois triângulos são ditos congruentes quando possuem os três lados e os três ângulos correspondentes iguais. Usaremos a notação $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ para indicar que os triângulos ΔABC e ΔDEF são congruentes.

Casos de congruência:

1° caso: LAL (lado, ângulo, lado).

Se dois triângulos possuem dois lados congruentes e o ângulo formado por esses dois lados também são congruentes, então eles são congruentes. (Figura 1.3).

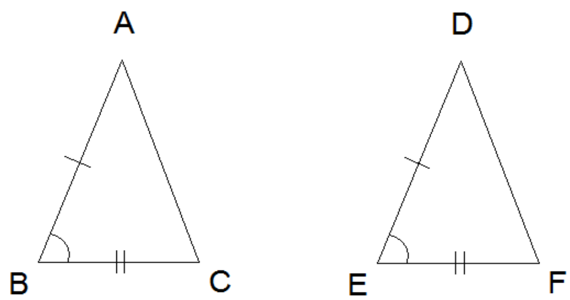


Figura 1.3: Congruência de triângulos *LAL.*

Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

2° caso: LLL (lado, lado, lado).

Se dois triângulos possuem os três lados congruentes, então eles são congruentes. (Figura 1.4).

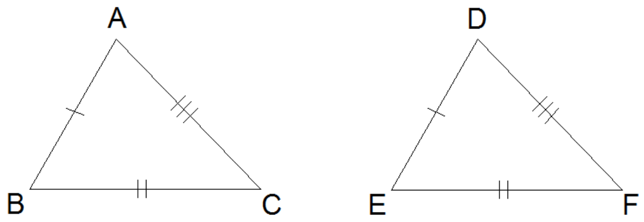


Figura 1.4: Congruência de triângulos *LLL.*

Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

3° caso: ALA (ângulo, lado, ângulo).

Se dois triângulos possuem, ordenadamente, dois ângulos e o lado compreendido entre esses ângulos congruentes, então eles são congruentes. (Figura 1.5).

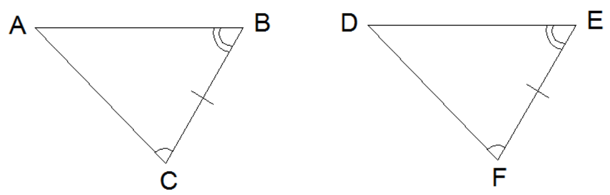


Figura 1.5: Congruência de triângulos *ALA.*

Se $\hat{C} \cong \hat{F}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

4° caso: LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto).

Se dois triângulos possuem, ordenadamente, um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado, congruentes, então eles são congruentes. (Figura 1.6).

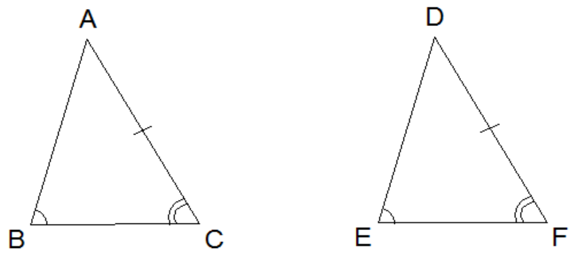


Figura 1.6: Congruência de triângulos LAA_o.

Se $\hat{B} \cong \hat{E}$, $\hat{C} \cong \hat{F}$ e $AC \cong DF$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

5º. Caso: Um caso especial de congruência no triângulo retângulo.

Se dois triângulos retângulos possuem um cateto e a hipotenusa congruentes, nessa ordem, então eles são congruentes. (Figura 1.7).

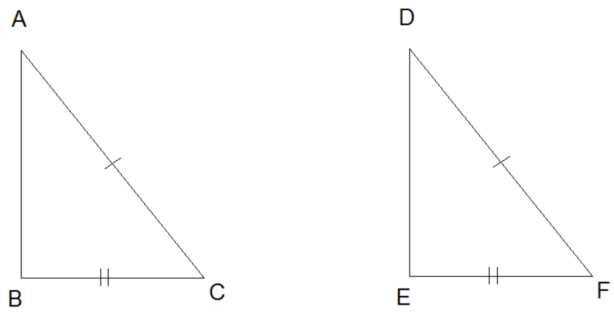


Figura 1.7: Caso especial de congruência de triângulos.

Se $\hat{B} \cong \hat{E} = 90°$, $BC \cong EF$ e $AC \cong DF$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

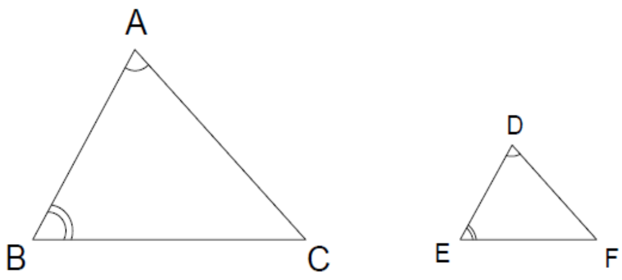
1.3 Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são ditos semelhantes se, e somente se, possuem ângulos correspondentes iguais e os lados homólogos proporcionais, a razão entre os lados correspondentes é chamada de constante de proporcionalidade. Usaremos a notação $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ para indicar que os triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes.

Casos de semelhança:

1° caso: Critério AA (Ângulo, Ângulo).

Se dois triângulos possuem ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes. (Figura 1.8).

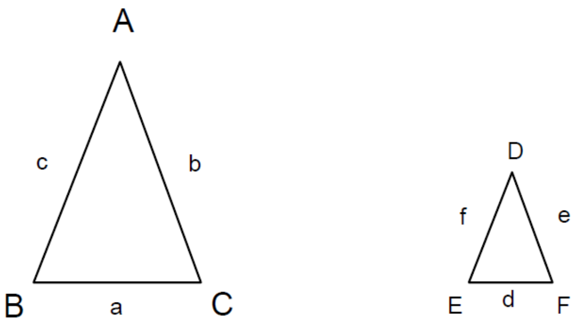


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Figura 1.8: Semelhança de triângulos *AA.*

2° caso: Critério LLL (Lado, Lado, Lado).

Se dois triângulos possuem Lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes. (Figura 1.9).

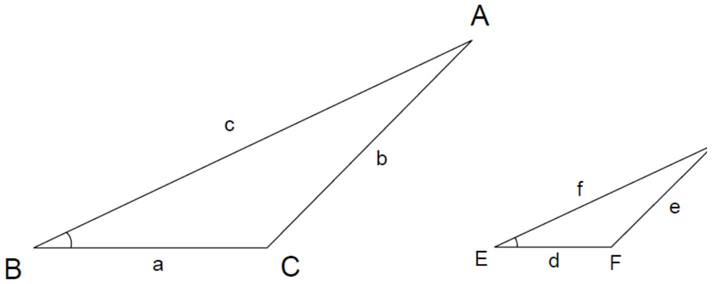


$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Figura 1.9: Semelhança de triângulos *LLL.*

3° caso: Critério LAL (Lado, Ângulo, Lado).

Se dois triângulos possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais, então eles são semelhantes. (Figura 1.10).



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \cong \hat{E} \\ \dfrac{c}{f} = \dfrac{a}{d}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Figura 1.10: Semelhança de triângulos *LAL.*

<u>Teorema Fundamental da Semelhança</u>

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro. (Figura 1.11).

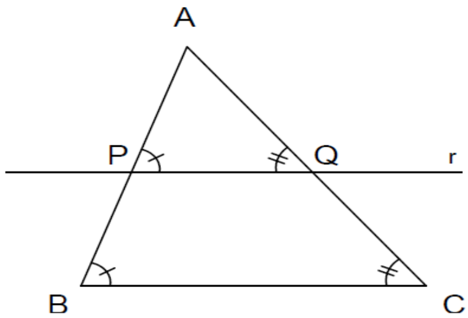


Figura 1.11: Teorema Fundamental da Semelhança.

Aplicação: Utilizaremos o conceito de semelhança de triângulos para determinar o comprimento da altura de um paralelogramo.

Seja $ABCD$ um paralelogramo de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e lados $\overline{AB} = 10\,cm$, $\overline{AD} = 24\,cm$. Sejam, ainda, E e F respectivamente os pés das perpendiculares baixadas desde A aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. Sabendo que $\overline{AF} = 20\,cm$, calcule o comprimento de $\overline{AE}$.

Solução: Consideremos o paralelogramo $ABCD$ conforme a figura 1.12.

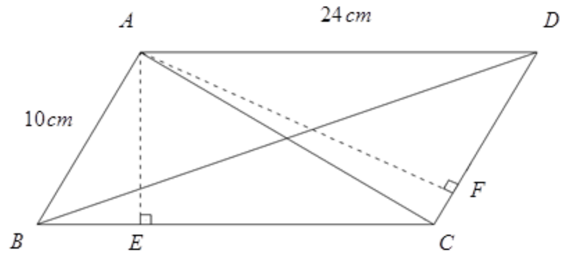


Figura 1.12: Paralelogramo *ABCD.*

Analisando ângulos $A\hat{B}E$ e $A\hat{D}F$, podemos concluir que eles são iguais por serem alternos internos, consequentemente os triângulos retângulos ΔABE e ΔADF são semelhantes pelo caso Ângulo Ângulo, dessa forma os lados correspondentes são proporcionais, assim temos que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}},$$

e assim, substituindo os valores fornecidos pelo problema, obtemos

$$\overline{AE} = \frac{25}{3} cm.$$

Concluímos então, que o comprimento $\overline{AE}$ mede $\frac{25}{3}$ centímetros.

1.4 Tales de Mileto e o Teorema de Tales

Para muitos estudiosos Tales é considerado o Pai da Filosofia Ocidental, nascido em Mileto por volta de 624 a.C. Tales teve grande destaque na filosofia, devido as suas frases e pensamentos, porém os estudos que tiveram maior importância estão relacionados à geometria, em sua passagem pelo Egito despertou grande admiração ao calcular a altura de uma pirâmide baseando-se nas sombras.

> *"Pesquisas recentes indicam que não há nenhuma evidencia que sustente a historia muitas vezes repetida de que Tales previu um eclipse solar ocorrido em 585 a.C".(Eves, 2011:96)*

<u>O Enunciado do Teorema de Tales</u>

Se duas retas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão dos segmentos correspondentes da outra.

Ou seja, sendo r, s, t e z retas paralelas, a e b transversais. (Figura 1.13).

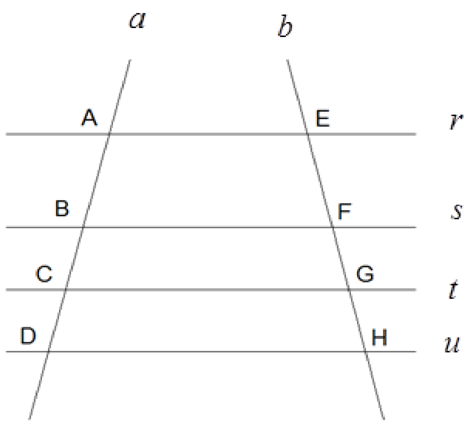


Figura 1.13: Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais.

Temos,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Observemos que mesmo sendo utilizadas outras razões, o resultado final não será alterado.

<u>Demonstração</u>:

Para demonstrarmos o Teorema de Tales, utilizaremos o conceito de área de triângulos.

Assim, seja ΔABC um triângulo qualquer (figura 1.14), M e N pontos tais que $M \in \overline{AB}$ e $N \in \overline{AC}$, com $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{BC}$, então $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$.

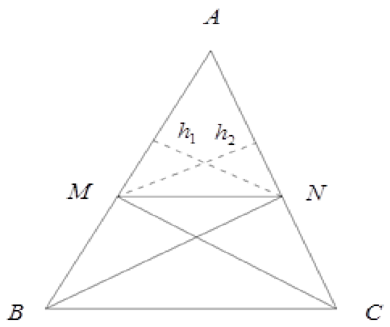


Figura 1.14: Demonstração do Teorema de Tales.

Como MN é paralelo a BC, temos que ΔBCM e ΔBCN possuem mesma área, já que a base e altura relativa a essa base são iguais.

Seja h_1 altura relativa ao lado AM do triângulo ΔAMN, consequentemente será altura relativa ao lado AB do triângulo ΔABN, da mesma forma, sendo h_2 altura relativa ao lado AN do triângulo ΔAMN também será altura relativa ao lado AC do triângulo ΔACM.

Notemos que os triângulos ΔABN e ΔACM possuem mesma área, veja:

$$\text{Área}(\Delta ABN) = \text{Área}(\Delta ABC) - \text{Área}(\Delta BCN)$$

$$\text{Área}(\Delta ACM) = \text{Área}(\Delta ABC) - \text{Área}(\Delta BCM)$$

Subtraindo as igualdades temos:

$$\text{Área}(\Delta ABN) = \text{Área}(\Delta ACM)$$

Como os dois triângulos possuem mesma altura, podemos concluir que a razão entre as áreas é igual a razão entre as bases, daí

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{Área(\Delta AMN)}{Área(\Delta ABN)}$$

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{Área(\Delta AMN)}{Área(\Delta ACM)}$$

e portanto,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$$

O que prova o teorema. ■

Aplicação: Utilizaremos o Teorema de Tales para obter a distância entre duas retas paralelas, de acordo com a figura 1.15.

As retas r, s e t são paralelas, com s entre r e t. As transversais u e v determinam, sobre r, s, t, pontos A, B, C e A', B', C', respectivamente, tais que $\overline{AB} = x+2$, $\overline{BC} = 2y$, $\overline{A'B'} = y$ e $\overline{B'C'} = (x-10)/2$. Sabendo que $x+y=18$, calcule $\overline{AB}$.

Solução:

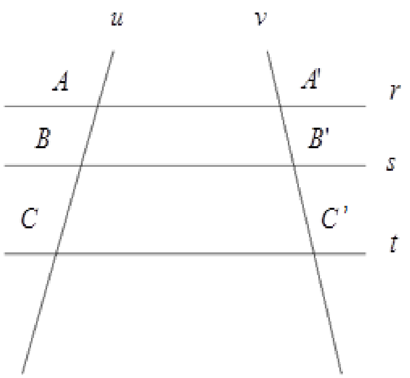


Figura 1.15: Aplicação do Teorema de Tales.

Aplicando o teorema de Tales temos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Substituindo os valores, chegaremos à seguinte igualdade:

$$\frac{x+2}{2y} = \frac{y}{(x-10)/2}$$

$$4y^2 = x^2 - 8x - 20 \qquad (1)$$

De $x+y=18$, temos

$$y = 18 - x \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) temos;

$$4(18-x)^2 = x^2 - 8x - 20$$

ou

$$3x^2 - 136x + 1316 = 0.$$

Resolvendo essa equação do 2° grau, encontramos os seguintes valores: $x = 14$ ou $x = 94/3$; caso $x = 94/3$, teríamos $y = -40/3$, dessa forma o segmento $\overline{A'B'}$ seria negativo, logo o valor de x é 14.

Portanto a medida do segmento $\overline{AB}$ é 16 unidades.

1.5 O Teorema de Pitágoras

Segundo Lima (2006), Pitágoras teria nascido na Ilha de Samos, na região da Ásia, próximo de Mileto, aproximadamente em 569 a.C. Não se pode deixar de citar Tales de Mileto, nascido 50 anos antes do nascimento de Pitágoras, pois o seu conhecimento também teve grande importância para o desenvolvimento da matemática.

Pitágoras aos 16 anos foi para Mileto, onde estudou com Tales, considerado até então o maior sábio da época, no entanto Tales percebeu que não havia mais nada a ensinar ao aluno, pelo contrário, passou a estudar as descobertas geométricas e matemáticas realizadas por Pitágoras.

Pitágoras viajou bastante, passando por Síria, Arábia, Caldeia, Pérsia, Índia e Egito onde ficou por mais de 20 anos, por fim Pitágoras foi para Crotone, no sul da Itália, onde fundou sua escola na qual ensinou aritmética, geometria, música, astronomia, religião e moral. A escola Pitagórica era considerada uma escola comunitária, pois todo o conhecimento e todas as descobertas eram compartilhadas com todos. Pelo fato dos alunos formados em sua escola ocuparem altos cargos na política local, os ignorantes e os revoltados incendiaram a escola e Pitágoras foi exilado para Metaponto, uma zona da Itália ao norte da Lucânia.

Pitágoras morreu na Lucânia, na Itália, com aproximadamente oitenta anos.

1.5.1 O Enunciado do Teorema de Pitágoras e uma Demonstração Clássica

Enunciado do Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

Entre o século 5 a.C. e o século 20 d.C. surgiram várias demonstrações do Teorema de Pitágoras, estima se que existem mais de 370 demonstrações além de várias aplicações. Neste trabalho apresentaremos a demonstração clássica.

<u>Demonstração</u>:

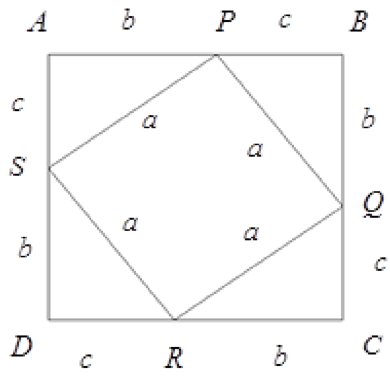


Figura 1.16: Demonstração do Teorema de Pitágoras.

Seja $ABCD$ o quadrado da figura 1.16 cujo lado é $b+c$ e sejam os pontos P, Q, R, e S de modo que $\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=\overline{DS}=b$ e $\overline{BP}=\overline{CQ}=\overline{DR}=\overline{AS}=c$. Dessa forma, os triângulos retângulos ΔAPS, ΔPBQ, ΔQCR e ΔRDS são congruentes pelo caso LAL (lado, ângulo, lado). Retirando esses triângulos do quadrado de lado $b+c$, restará apenas um quadrado de lado a. Trocando as posições dos triângulos temos o retângulo apresentado na figura 1.17:

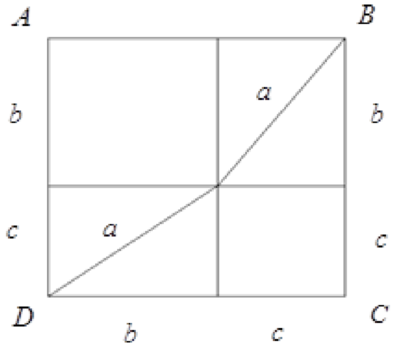


Figura 1.17: Demonstração do Teorema de Pitágoras.

Retirando do quadrado de lado $b+c$ os quatro triângulos iguais, restará um quadrado de lado b e um quadrado de lado c. Dessa forma a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c.

Portanto, dado um triângulo retângulo qualquer, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Onde, a é a hipotenusa e b e c são os catetos. ∎

1.5.2 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

Sejam a, b e c reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$, será que a, b e c são lados de um triângulo retângulo?

Para respondermos essa pergunta, faremos uma análise de três casos, sendo considerado um triângulo ΔABC com $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

1° caso: $\hat{A} = 90°$

Nesse caso não temos o que provar, pois a, b e c sendo lados de um triângulo e o ângulo A é igual a 90° temos que ΔABC é um triângulo retângulo.

2° caso: $\hat{A} < 90°$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $b \leq c$. Seja $\overline{CD} = h$ altura do triângulo ΔABC, conforme figura 1.18.

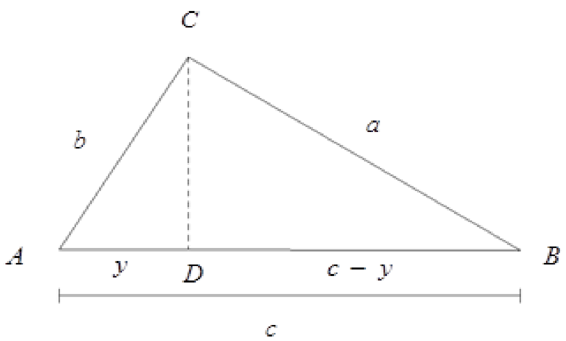


Figura 1.18: Demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras.

Dessa forma o Triângulo ΔACD é retângulo em D, assim temos:

$$b^2 = h^2 + y^2,$$

obtendo assim

$$h^2 = b^2 - y^2$$

Da mesma forma o triângulo ΔBCD é retângulo em D, assim temos:

$$a^2 = h^2 + (c - y)^2 \ ,$$

desenvolvendo $(c - y)^2$, temos a seguinte igualdade

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cy + y^2,$$

substituindo $h^2 = y^2 - b^2$, temos

$$a^2 = b^2 - y^2 + c^2 - 2cy + y^2$$

Obtendo finalmente,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cy$$

Portanto podemos concluir que $a^2 < b^2 + c^2$. ■

3° caso: $\hat{A} > 90°$

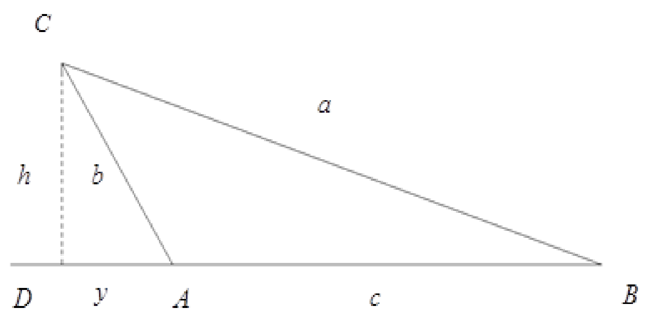


Figura 1.19: Demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras.

De maneira análoga ao 2° caso, observando o triângulo ΔADC da figura 1.19, reto em D, temos:

$$b^2 = h^2 + y^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - y^2$$

Agora, partindo do triângulo ΔCDB, reto em D, temos:

$$a^2 = h^2 + (c + y)^2,$$

ou seja

$$a^2 = h^2 + c^2 + 2cy + y^2,$$

substituindo $h^2 = b^2 - y^2$, temos:

$$a^2 = b^2 - y^2 + c^2 + 2cy + y^2$$

logo,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cy$$

Dessa forma concluímos que $a^2 > b^2 + c^2$. ■

Assim, demonstramos que em um triângulo ΔABC qualquer, de lados a, b e c,

Se $\hat{A} = 90°$ então $a^2 = b^2 + c^2$.

Se $\hat{A} < 90°$ então $a^2 < b^2 + c^2$.

Se $\hat{A} > 90°$ então $a^2 > b^2 + c^2$.

Portanto, sendo a, b e c reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$, então a, b e c são lados de um triângulo retângulo.

1.6 Uma Aplicação do Teorema de Pitágoras na Construção Civil

O avanço tecnológico e o surgimento de programas computacionais, bem como a evolução das calculadoras fez com que o cálculo no papel perdesse espaço nos dias de hoje, no campo da engenharia civil existem vários softwares que fazem todos os cálculos necessários para uma determinada edificação. No entanto um bom profissional deve estar preparado para diversas situações, pois nem sempre terá uma máquina que faz todo o trabalho ao seu lado.

Uma aplicação bem simples do Teorema de Pitágoras está relacionada ao cálculo da altura da cumeeira de uma residência considerando a inclinação desejada para o telhado.

Consideremos o problema de determinar a largura de uma água do telhado de uma residência com inclinação de 30%, cujas medidas estão indicadas na figura 1.20.

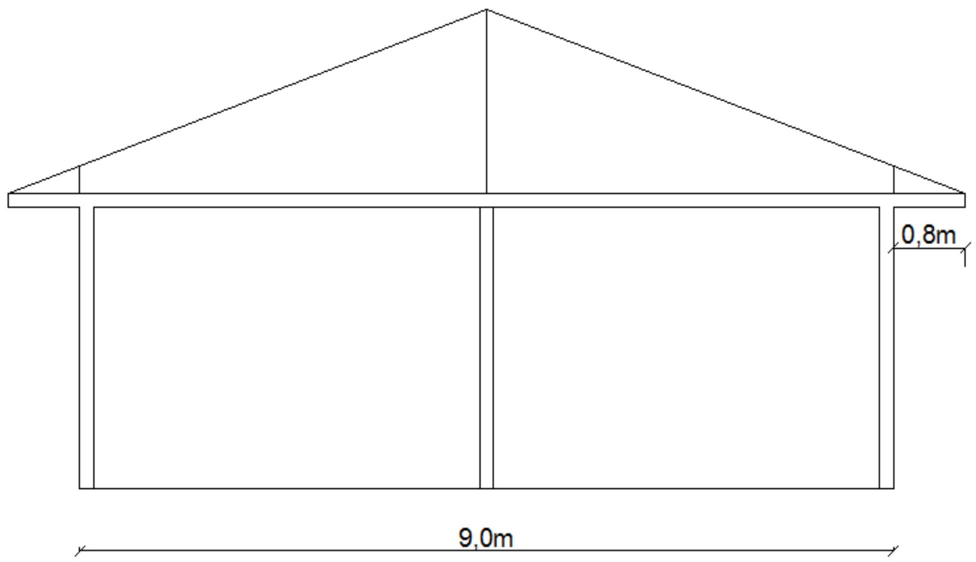


Figura 1.20: Aplicação do Teorema de Pitágoras na construção civil.

Para resolvermos esse problema, primeiramente devemos ter um conhecimento sobre inclinação de um telhado, que pode variar dependendo do tipo de telha. Mas afinal, o que quer dizer inclinação de 30%? Sabemos que,

$$30\% = \frac{30}{100}$$

Utilizando o centímetro como unidade de medida, devemos ter a cada 100 cm na horizontal, uma altura de 30 cm, como indicado na figura 1.21.

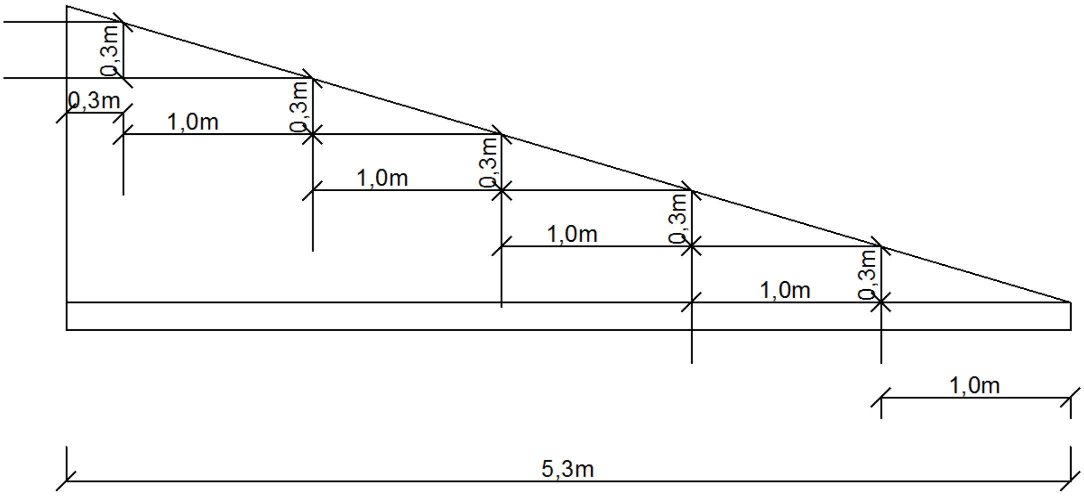


Figura 1.21: Inclinação de um telhado.

Para determinarmos a altura da cumeeira devemos dividir a largura da casa ao meio, ou seja, $\frac{9m}{2} = 4{,}5m$, somando a largura do beiral que é $0{,}8m$, temos: $4{,}5m + 0{,}8m = 5{,}3m$. Como para cada 1 metro na horizontal, devemos ter 0,3m de altura, calculamos $5 \times 0{,}3m = 1{,}5m$. No entanto resta saber a altura para $0{,}3m$ na horizontal, cálculo que podemos fazer utilizando uma regra de três simples,

$$Horizontal \qquad altura$$

$$1m - - - - - - - - - - 0{,}3m$$

$$0{,}3m - - - - - - - - - - Xm$$

$$X = 0{,}09m$$

Logo, a altura da cumeeira do telhado será $1{,}59m$.

Observando os cálculos, podemos concluir que, o cálculo da altura da cumeeira de uma edificação, é o produto entre a distância na horizontal (m) e a inclinação (%), ou seja,

$$5{,}3m \times 0{,}3 = 1{,}59m$$

Como o problema inicial é calcular a largura de uma água do telhado, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, observando o triângulo retângulo cujos catetos medem 5,3m e 1,59m, sendo a hipotenusa a largura de uma água do telhado, como ilustrado na figura 1.22.

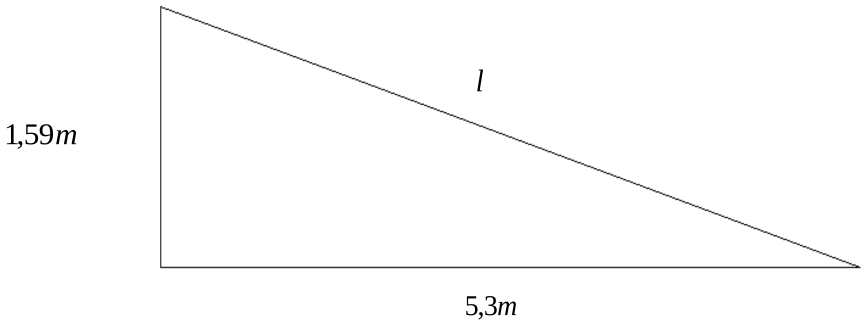


Figura 1.22: Triângulo representando uma água do telhado.

$$l^2 = 5{,}3^2 + 1{,}59^2$$

donde

$$l^2 = 30{,}6181$$

assim,

$$l \approx 5{,}54m$$

Obtemos finalmente que a largura de uma água do telhado mede 5,54 metros. ■

No capítulo 2 utilizaremos os conceitos estudados sobre triângulos, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras para desenvolver as relações métricas, bem como as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

CAPÍTULO 2

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Nesse capítulo faremos, inicialmente, uma pequena introdução histórica da Trigonometria sendo apresentado na sequência um estudo sobre as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo.

2.1 Um Pouco de História: A Origem da Trigonometria

A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos *tri* = três, *gonos* = ângulos e *metron* = medir, dessa forma trigonometria significa "medida dos triângulos".

Segundo Boyer (1974:116), "a trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação".

Não se sabe ao certo quando e onde a trigonometria teve sua origem, mas o seu estudo tem uma grande ligação com a astronomia, sendo que algumas informações sobre esse estudo foram transmitidas aos gregos pelos astrônomos babilônicos por volta dos séculos *IV* e *V* a.C.

Segundo EVES (2004:.259) "Os hindus, como os gregos, consideravam a trigonometria como uma ferramenta para sua astronomia".

Um dos estudos que merece destaque é o estudo do astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático Hiparco de Nicéia, sendo que atualmente é considerado "o pai da trigonometria", pelo fato de criar uma tabela trigonométrica chamada tábua de cordas contendo os valores de seus arcos para cada ângulo. Também foi capaz de elaborar cálculos com os quais pode prever eclipses do sol e da lua, com uma pequena margem de erro, além de dividir a circunferência em 360°.

A trigonometria desde a antiguidade se faz presente no cotidiano do homem principalmente pela necessidade de descobrir distâncias de um ponto a outro de uma maneira indireta, fazendo o uso apenas de cálculos matemáticos, como por exemplo: a largura de um rio, a distância do sol e da lua, distância Terra-Lua e o raio da Terra.

Atualmente o estudo da trigonometria não se aplica apenas em triângulos, o seu estudo está relacionado a vários campos da matemática como, por exemplo, a geometria, cálculo e a análise, além de outras áreas como é o caso da Física, da Astronomia, Mecânica, Topografia, Música, Eletricidade, Engenharia Civil, entre outros campos que exigem o conhecimento da trigonometria.

2.2 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Na figura 2.1 temos o triângulo retângulo ΔABC, retângulo em A, e seja $\overline{AD}$ um segmento perpendicular ao lado $\overline{BC}$.

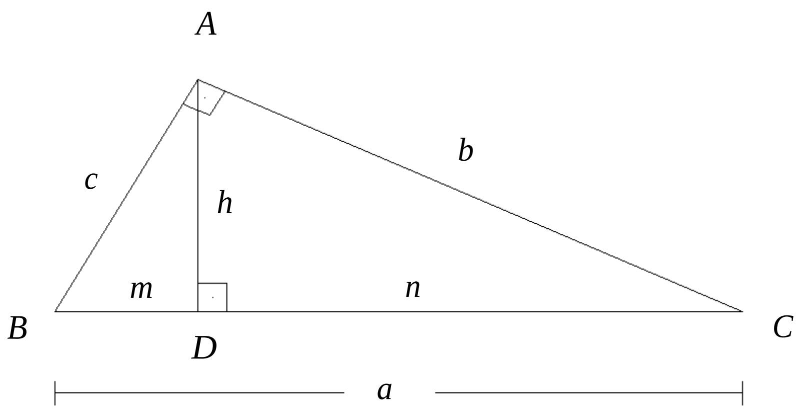


Figura 2.1: Dedução das relações métricas no triângulo retângulo.

Desmembrando os triângulos da figura 2.1, temos dois triângulos como apresentado na figura 2.2.

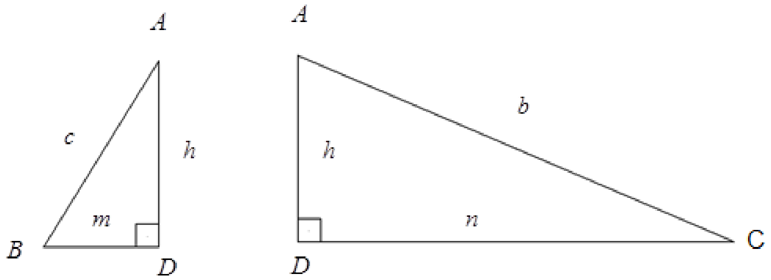


Figura 2.2: Dedução das relações métricas no triângulo retângulo.

Dessa forma podemos observar que os triângulos ΔABC, ΔABD e ΔACD são semelhantes, veja:

No triângulo ΔABC temos:

$$90° + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180°$$

No triângulo ΔACD temos:

$$90° + D\hat{A}C + A\hat{C}D = 180°$$

Como os ângulos $A\hat{C}B$ e $A\hat{C}D$ são congruentes, subtraindo as duas equações temos:

$$A\hat{B}C - D\hat{A}C = 0 \text{, logo}$$

$$A\hat{B}C = D\hat{A}C$$

Consequentemente $B\hat{A}D = A\hat{C}D$. Logo, os triângulos ΔABC, ΔABD e ΔACD são semelhantes. Dessa forma, podemos obter as seguintes relações:

Da semelhança entre ΔABC e ΔABD, segue que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am$$

Da semelhança entre ΔABC e ΔACD, segue que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{h}{c} \Rightarrow bc = ah$$

Da semelhança entre ΔABD e ΔACD, temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \Rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = mn$$

Somando membro a membro as relações $c^2 = am$ e $b^2 = an$ temos:

$$b^2 + c^2 = am + an,$$

como $am + an = a(m+n)$ e $m+n=a$, podemos concluir que $b^2 + c^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras).

Aplicação

Na figura 2.3, ΔMNP é um triângulo retângulo em N, $\overline{NQ}$ é a altura relativa à hipotenusa, $\overline{MQ} = 16$ e $\dfrac{MN}{NP} = \dfrac{4}{3}$. Qual o comprimento do segmento $\overline{QP}$?

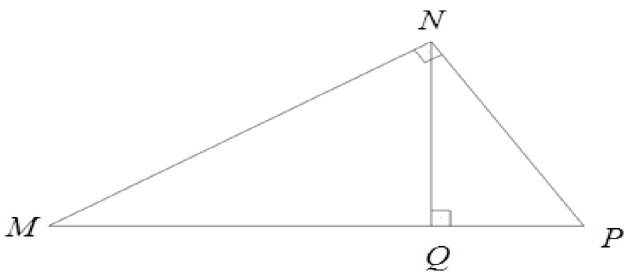


Figura 2.3: Aplicação das relações métricas no triângulo *MNP.*

Solução:

Aplicando as relações métricas $b^2 = an$ e $c^2 = am$ no triângulo acima, onde $b = \overline{MN}$, $c = \overline{NP}$, $n = 16cm$ e $m = \overline{QP}$, temos:

$$(\overline{MN})^2 = a \cdot 16 \qquad (1)$$

$$(\overline{NP})^2 = a \cdot \overline{QP} \qquad (2)$$

Dividindo membro a membro a igualdade (1) pela igualdade (2) obtemos: $\left(\dfrac{\overline{MN}}{\overline{NP}}\right)^2 = \dfrac{16}{\overline{QP}}$, substituindo $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \dfrac{4}{3}$ na igualdade temos:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{\overline{QP}} \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{9} = \frac{16}{\overline{QP}} \quad \Rightarrow \quad \overline{QP} = 9$$

Portanto o comprimento do segmento $\overline{QP}$ é 9 centímetros. ∎

2.3 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Seja o triângulo retângulo ΔABC, apresentado na figura 2.4.

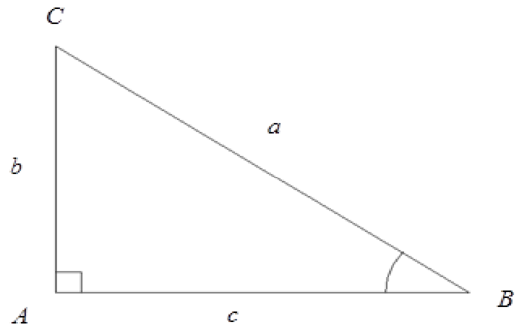


Figura 2.4: Elementos de um triângulo retângulo fixando um ângulo agudo.

Fixando o ângulo agudo $\hat{B}$, teremos os seguintes elementos:

$\overline{AC} = b$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$.

$\overline{AB} = c$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$.

$\overline{BC} = a$ é a hipotenusa do triângulo ΔABC.

A razão entre os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é chamado seno do ângulo $\hat{B}$. Podendo ser representado da seguinte forma:

$$sen\,\hat{B} = \frac{cateto\,oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}.$$

A razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é chamado cosseno do ângulo $\hat{B}$.

$$\cos\hat{B} = \frac{cateto\,adjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}.$$

A razão entre os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ é chamado tangente do ângulo $\hat{B}$.

$$tg\,\hat{B} = \frac{cateto\,oposto}{cateto\,adjacente} = \frac{b}{c}.$$

Observando a figura 2.5 podemos concluir que as razões trigonométricas são originadas da semelhança de triângulos retângulos.

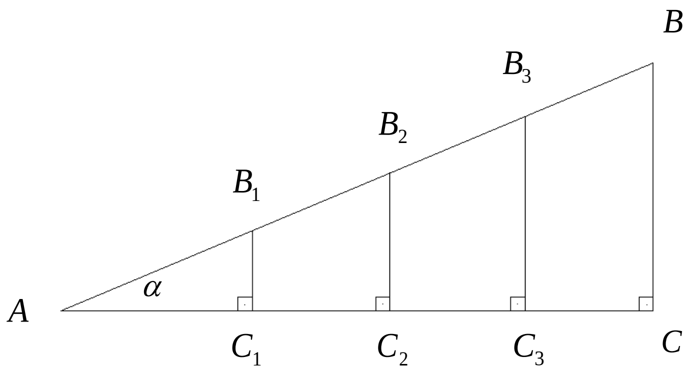


Figura 2.5: Triângulos retângulos semelhantes.

Ou seja, $sen\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$ dependem apenas do ângulo agudo α e não dos comprimentos envolvidos.·

$$sen\alpha = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

2.4 Seno, Cosseno e Tangente dos Ângulos 30°, 45° e 60°

Os ângulos 30°, 45° e 60° aparecem com muita frequência no estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, por isso são chamados de ângulos notáveis.

Para calcular o valor do seno, cosseno e tangente de 30° e 60°, vamos considerar o triângulo equilátero ΔABC de lado l da figura 2.6.

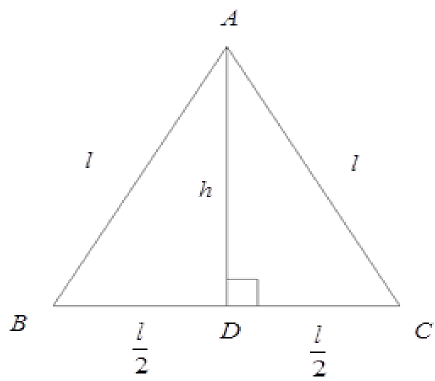


Figura 2.6: Triângulo equilátero *ABC.*

Para encontrarmos a altura h do triângulo ΔABC, aplicaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo ΔACD.

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3l^2}{4} = h^2$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Como, por definição, a altura de um triângulo equilátero é também, bissetriz e mediana, temos:

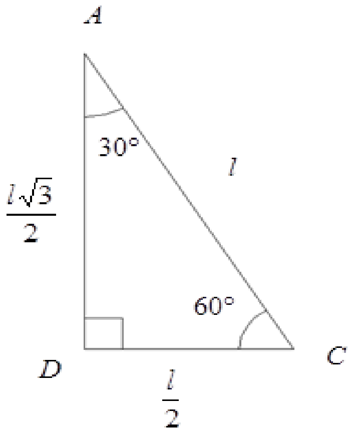


Figura 2.7: Dedução de seno, cosseno e tangente de 30° e 60°.

Daí,

$$sen\ 30° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg 30° = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ ajacente} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\,60° = \frac{cateto\,oposto}{hipotenusa} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{cateto\,adjacente}{hipotenusa} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$tg\,60° = \frac{cateto\,oposto}{cateto\,ajacente} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$$

Para calcularmos o seno, cosseno e tangente de 45°, vamos considerar o quadrado $ABCD$ de lado l, apresentado na figura 2.8.

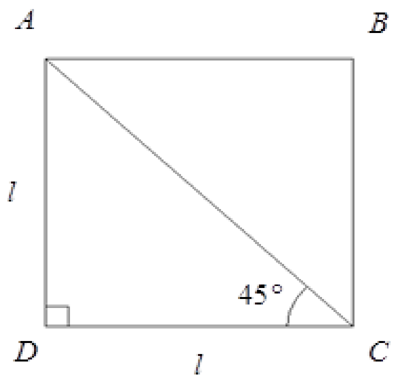


Figura 2.8: Quadrado *ABCD.*

O segmento $\overline{AC}$ é a diagonal do quadrado, assim o triângulo ΔACD é retângulo e isósceles com ângulos agudos iguais a 45°.

Para encontrar a diagonal do quadrado $ABCD$, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ΔACD.

$$AC^2 = l^2 + l^2$$

$$AC^2 = 2l^2$$

$$AC = l\sqrt{2}$$

Assim, temos o triângulo retângulo apresentado na figura 2.9:

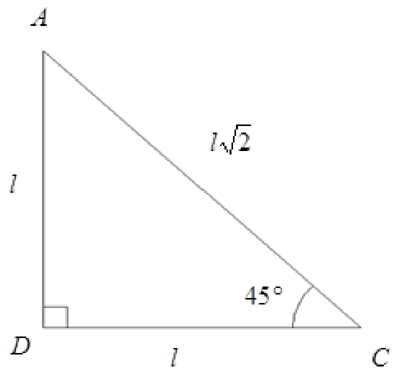


Figura 2.9: Dedução de seno, cosseno e tangente de 45°.

Logo, temos:

$$sen\ 45° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45° = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ ajacente} = \frac{l}{l} = 1$$

Conhecidos esses valores, podemos construir a tabela 2.1:

Tabela 2.1: Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2.5 Aplicação

Iezzi (1977: 149) Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30 m, passa a ver o edifício sob um ângulo de 45°. Qual é a altura do prédio?

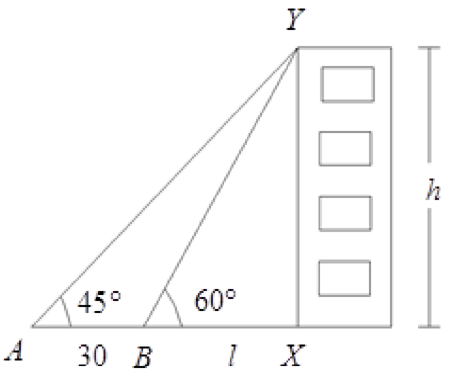


Figura 2.10: Aplicação das razões trigonométricas.

Solução:

No triângulo ΔBXY, temos:

$$tg\,60° = \frac{h}{l} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

No triângulo ΔAXY, temos:

$$tg\,45° = \frac{h}{l+30} \quad \Rightarrow \quad h = l + 30,$$

então

$$h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 30 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

Resposta: A altura do prédio será $\dfrac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\,m$.

No primeiro ano do ensino médio é feito um estudo da Trigonometria apenas no triângulo retângulo, sendo realizado o estudo das funções trigonométricas no segundo ano. No entanto, citaremos as funções trigonométricas inversas arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente, pois alguns exemplos encontrados neste trabalho exigem o cálculo de um dos ângulos agudos do triângulo retângulo.

Arco-seno

$$y = arcsen(x) \Leftrightarrow x = sen(y)$$

Arco-cosseno

$$y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$$

Arco-tangente

$$y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$$

Existe uma infinidade de aplicações em nosso cotidiano sobre o tema abordado. No capítulo seguinte, mostraremos algumas aplicações do estudo de triângulo retângulo na construção civil.

CAPÍTULO 3

EXEMPLOS NA CONSTRUÇÃO CIVIL

No ramo da construção civil, apesar da maioria dos cálculos matemáticos estarem no projeto, é muito importante o mestre de obra e o pedreiro terem conhecimentos básicos de matemática, que permitam a leitura e entendimento do projeto, para que dessa forma a obra seja executada com qualidade e sem desperdícios de materiais. Nesse capítulo mostraremos alguns exemplos da necessidade de tal conhecimento na construção civil.

3.1 Tesouras dos Telhados

Tesoura é uma estrutura treliçada no formato triangular, podendo ser de madeira ou perfis metálicos, tendo como função servir de apoio para o telhado. A seguir veremos os principais elementos de uma tesoura de madeira:

- Frechal – Viga de madeira colocada sobre as paredes, cuja função é distribuir as cargas do telhado.
- Linha – Viga de madeira colocada sobre os frechais que vai de apoio a apoio.
- Perna – Peça que vai de um ponto de apoio da tesoura até o cume, esse elemento será responsável pela sustentação da terça.
- Pendural e tirante – São vigas de madeira que ligam linha e perna, geralmente são colocados na vertical, dependendo do tipo da tesoura.
- Estribo – São ferragens cuja função é unir as peças da tesoura.
- Asna e escoras – São peças oblíquas em relação à linha interligando linha e perna.

Por se tratar de um trabalho cujo foco é o estudo da trigonometria no triângulo retângulo, o estudo de tesouras de coberturas não será aprofundado e nos limitaremos a apresentar um exemplo envolvendo o cálculo da altura do pendural de uma tesoura.

A figura 3.1 apresenta os elementos de uma tesoura de madeira.

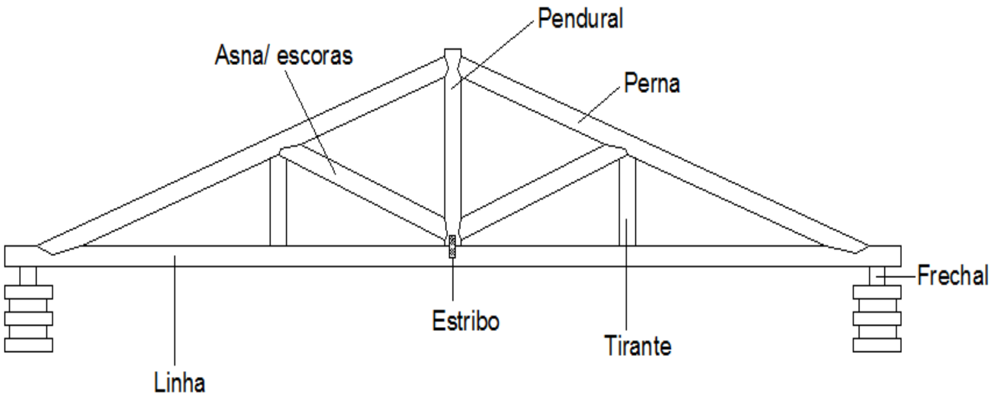


Figura 3.1: Elementos de uma tesoura de telhado.

Podemos associar a altura do pendural com a razão trigonométrica tangente. De fato, suponhamos que o ângulo formado entre a linha e perna seja 16,7° e o comprimento da linha seja 9 metros, logo devemos ter 4,5 metros como indica a figura 3.2.

Fig. 3.2

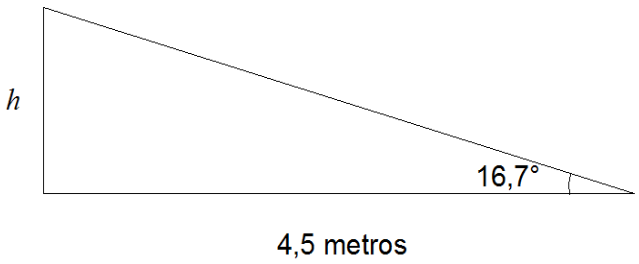


Figura 3.2: Triângulo representando a tesoura de um telhado.

Daí temos;

$$\tan 16{,}7° = \frac{h}{4{,}5}$$

ou

$$h = 4{,}5 \times \tan 16{,}7°$$

Obtendo,

$$h = 1{,}35\, metros.$$

Portanto a altura do pendural, nesse caso, será de 1,35 metros.

3.2 Mão Francesa

Mão francesa é uma estrutura com formato triangular, cuja função é servir de apoio a bases ou vigas. Essa estrutura é muito utilizada na construção de beiral de laje de edificações seja de pequeno ou grande porte. Sendo indispensável o conhecimento de triângulo retângulo.

No entanto, muitos trabalhadores no ramo da construção civil padronizam algumas medidas, nesse caso constroem triângulos de madeira com medidas 60cm, 80cm e 100cm sem ao menos entender o porquê de tais medidas, mas afirmam que o triângulo formado possui um ângulo de 90°. O fato do construtor ter um conhecimento teórico, o tornará um profissional melhor e mais qualificado.

Após a construção desses triângulos retângulos, será fixado um triângulo em cada extremidade da parede, sendo nivelados com o auxílio de uma mangueira de nível, em seguida esticamos uma linha de uma extremidade a outra e na sequência, fixamos os outros triângulos como na figura 3.3.

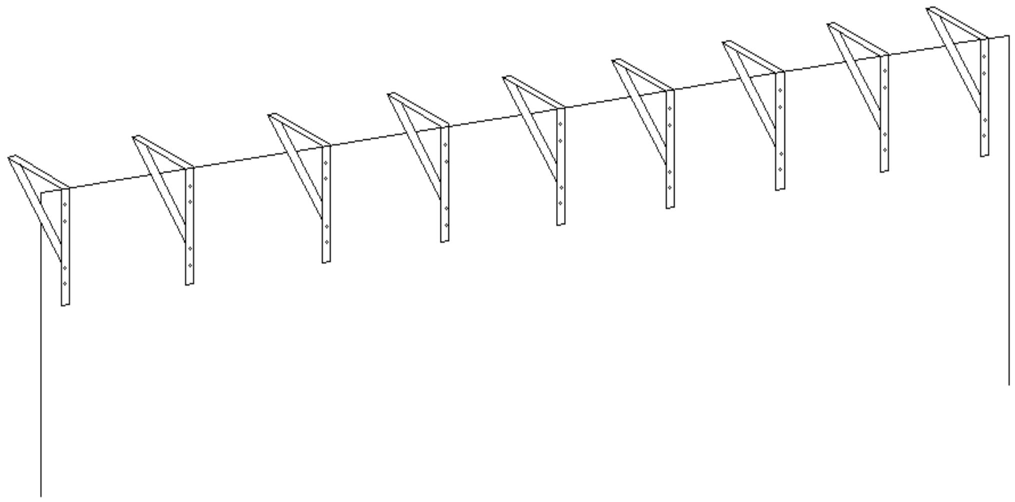


Figura 3.3: Representação de mão francesa na construção de beiral de laje.

Finalmente colocamos tábuas em cima desses triângulos que servirão de apoio para os trilhos da laje conforme figura 3.4.

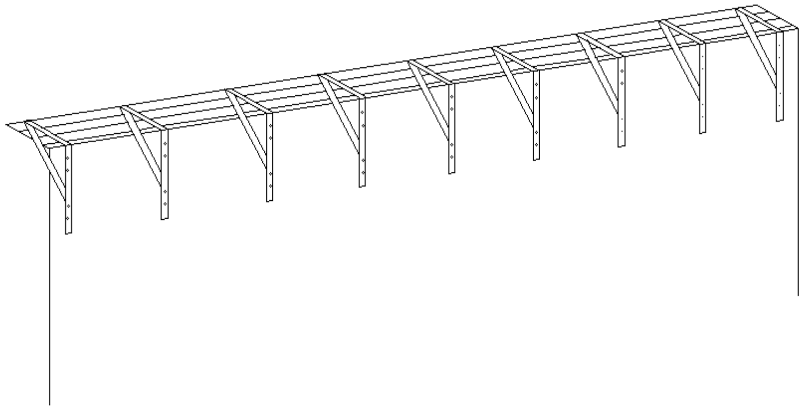


Figura 3.4: Representação de mão francesa na construção de beiral de laje.

3.3 Cálculos de Medidas Inacessíveis

Na construção Civil, muitas vezes é necessário que o engenheiro da obra conheça determinadas medidas que não estão disponíveis, pois se trata de medidas consideradas inacessíveis, como por exemplo: a largura de um rio ou até mesmo a altura de um prédio. Contudo, com o auxílio de um aparelho chamado teodolito e o conhecimento das razões trigonométricas, é possível calcular essas dimensões.

Teodolito é um aparelho muito utilizado em cálculos topográficos, fornecendo valores de ângulos verticais e horizontais (Figura 3.5). A seguir veremos um exemplo que mostra como podemos calcular a altura de um edifício com o uso desse aparelho.

Figura 3.5: Teodolito.

Fonte: ZILKHA (2009)

Suponhamos que o teodolito seja fixado a uma distância de 25 metros do edifício em questão, e com o auxílio do teodolito seja medido um ângulo de 56° até o topo do edifício, conforme figura 3.6.

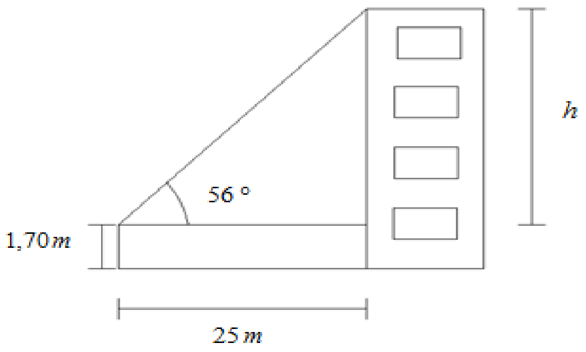


Figura 3.6: Cálculo de distância inacessível utilizando o teodolito.

Como podemos observar na figura 3.6, após calcularmos o valor de h devemos somar a altura do teodolito que, neste caso mede 1,70 metros. Para efetuar esse cálculo, utilizaremos os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, dessa forma temos:

$$\tan 56° = \frac{cateto\,oposto}{cateto\,adjacente},$$

assim

$$\tan 56° = \frac{h}{25}$$

$$h = 37{,}06\,metros\ .$$

Contudo, essa não é a altura do edifício, pois devemos somar a altura do teodolito, ou seja:

$$37{,}06 + 1{,}70 = 38{,}76$$

Logo, a altura do edifício é 38,76 metros.

3.4 Construção de Escadas Residenciais

Existem vários modelos de escadas residenciais, contudo faremos um estudo seguindo o modelo linha reta, pois esse tipo de escada forma com o piso, um triângulo retângulo.

O degrau de uma escada é composto pela base ou piso (largura) e o espelho (altura). Embora sua construção pareça simples, alguns cuidados devem ser tomados como, por exemplo a quantidade de degraus, a altura e a largura de cada degrau, o comprimento da escada, a altura do pé direito, etc. A largura e a altura do degrau de uma escada deve ser confortável, para esse cálculo utilizamos a Fórmula de Blondel.

$$63cm < 2E + P < 65cm \text{ (Fórmula de Blondel)}$$

Onde $E =$ Espelho e $P =$ Piso.

Vejamos a seguir uma situação relacionada à construção de uma escada:

Para construir uma escada de uma residência cujo pé direito é 3,06 metros e considerando degraus de 0,18 metros de altura, podemos efetuar os seguintes cálculos:

- Largura do degrau

Utilizando a Fórmula de Blondel temos:

$$63cm < 2 \times 18 + P < 65cm$$

$$27cm < P < 29cm$$

Logo, podemos concluir que a largura do degrau (piso) será de 28 centímetros.

- Quantidade de degraus

Para calcularmos a quantidade de degraus, basta dividirmos a altura do pé direito pela altura do degrau.

$$\frac{3{,}06}{0{,}18} = 17m$$

Portanto, a escada deverá ter 17 degraus.

- Afastamento horizontal total

O afastamento horizontal total será dado pelo produto entre a largura do degrau e o número de degraus.

$$0{,}28 \times 17 = 4{,}76m$$

Dessa forma, o afastamento horizontal total será de 4,76 metros.

- Ângulo formado entre a escada e o piso da residência

Vamos observar a figura 3.7

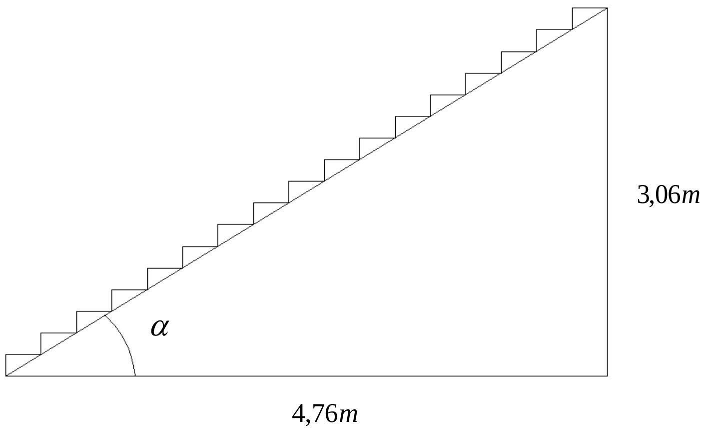


Figura 3.7: Triângulo representando uma escada residencial.

Sabemos que $\tan\alpha = \dfrac{cateto\,oposto}{cateto\,adjacente}$, daí

$$\tan\alpha = \frac{3{,}06}{4{,}76} = 0{,}6428\,.$$

Para encontrarmos o valor de α, utilizaremos uma calculadora que possua a função inversa da tangente (arco tangente), assim temos:

$$\alpha = \arctan 0{,}6428$$

$$\alpha = 32{,}73°$$

Portanto o ângulo formado entre a escada e o piso é $32{,}73°$.

3.5 Inclinação das Rampas de Acesso

Nem sempre as rampas de acesso são construídas de maneira correta, dificultando dessa forma a acessibilidade.

De acordo com a Norma brasileira (ABNT NBR 9050) existem alguns padrões a serem seguidos, como por exemplo, a inclinação da rampa. A tabela 3.1 mostra tais exigências para a inclinação:

Tabela 3.1: Dimensionamento das rampas.

Desníveis máximos de cada segmento de rampa h (m)	Inclinação admissível em cada segmento de rampa i (%)	Número máximo de segmentos de rampa
1,5	5,00 (1:20)	Sem limite
1,0	5,00 (1:20) < i < 6,25 (1:16)	Sem limite
0,8	6,25 (1:16) < i ≤ 8,33 (1:12)	15

A inclinação de uma rampa de acesso também pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$i = \frac{h \times 100}{c}$$

Onde,

$i = inclinação$

$h = altura$

$c = comprimento$

A seguir iremos verificar se a rampa de acesso de uma escola (figura 3.8) atende os requisitos exigidos pela Norma (ABNT NBR 9050) com relação a sua inclinação.

Figura 3.8: Rampa de acesso de uma escola.

As medidas extraídas dessa rampa estão indicadas na figura 3.9.

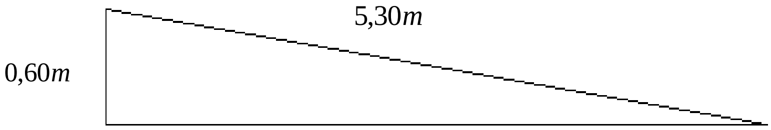


Figura 3.9: Triângulo representando uma rampa de acesso.

Como podemos observar, precisamos encontrar o comprimento horizontal da rampa, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(5{,}30)^2 = c^2 + (0{,}6)^2,$$

ou seja,

$$c \approx 5{,}26m$$

Logo, o comprimento da rampa é 5,26 metros. Agora, iremos verificar a inclinação da rampa utilizando a fórmula fornecida pela Norma ABNT NBR 9050.

$$i = \frac{h \times 100}{c}$$

Substituindo os valores, temos:

$$i = \frac{0{,}6 \times 100}{5{,}26},$$

assim

$$i = 11{,}40\%$$

Como a inclinação máxima permitida pela Norma é 8,33%, concluímos que essa rampa não atende os requisitos exigidos pela Norma (ABNT NBR 9050). Para atender tais requisitos, deveríamos ter:

$$\frac{h \times 100}{c} \leq 8{,}33,$$

substituindo $h = 0{,}60m$

$$\frac{0{,}6 \times 100}{8{,}33} \leq c$$

daí

$$c \geq 7{,}20m$$

Portanto, para uma altura de 0,60 metros devemos ter, no mínimo, um comprimento de 7,20 metros.

No capítulo seguinte vamos relatar uma atividade prática realizada com os alunos do primeiro ano do ensino médio da Escola Estadual João Ponce de Arruda.

CAPÍTULO 4

ATIVIDADE PRÁTICA NA ESCOLA

Neste capítulo apresentaremos uma atividade prática envolvendo semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras. Podendo ser utilizada também como uma sugestão de atividade para professores que utilizam a prática para enriquecer a aprendizagem dos alunos.

4.1 A Escola

As atividades foram realizadas na Escola Estadual João Ponce de Arruda, sendo uma escola de bairro que atende cerca de 980 alunos entre o Ensino Fundamental I, o Ensino Médio e o EJA (Educação de Jovens e Adultos), nos períodos matutino, vespertino e noturno.

A escola possui um espaço físico muito bom, incluindo uma área aberta bastante grande e adequada ao desenvolvimento da atividade que precisava, inclusive, de um local que não seja cimentado. Assim, as atividades com o primeiro ano foram realizadas na escola.

4.2 Descrição das Atividades Práticas

No primeiro momento foi proposto aos alunos do primeiro ano do ensino médio, uma pesquisa extraclasse sobre o Teorema de Pitágoras, essa pesquisa foi realizada em grupos compostos por cinco alunos, de modo que entendam a importância da pesquisa e do trabalho em grupo. Em seguida, foi questionado aos alunos sobre algumas situações, como por exemplo:

- Será que vocês conseguem construir um retângulo? E um triângulo retângulo?

- Um pedreiro, mesmo não tendo conhecimento de triângulos retângulos, consegue construir um?

- Como são feitos os alinhamentos para esquadrejar uma construção residencial?

Foram propostas atividades práticas que permitiram verificar as respostas dos alunos. As atividades foram realizadas no período contrário, sendo relacionados apenas dois grupos por dia, buscando um melhor aproveitamento, lembrando que a data e o horário foram marcados de acordo com a disponibilidade de cada grupo, cada grupo ficou encarregado de levar alguns materiais, tais como bloco para anotações, caneta, calculadora e trena.

4.2 Primeira Atividade

O objetivo dessa atividade foi calcular altura de um poste de energia utilizando os métodos da antiguidade, fazendo o uso do conceito de semelhança de triângulos. Para isto foram utilizadas estacas, trena, nível de mão, calculadora, bloco de anotações e caneta, que foram fornecidos pelo professor (figura 4.1).

Figura 4.1: Materiais utilizados na primeira atividade prática.

4.2.1 Desenvolvimento da Atividade

Iniciamos essa atividade com uma reunião na qual falamos sobre os métodos utilizados na antiguidade para calcular alturas, foi comentado sobre Tales de Mileto e como ele determinava alturas de pirâmides utilizando a sombra. Foi relembrada também, a ideia de semelhança de triângulos.

Em seguida foi iniciada a parte prática da atividade, foi medida a estaca, recebida e registrada no bloco de anotações. Dando continuidade, um integrante do grupo fixou a estaca na vertical, com o auxílio de um nível de mão, em seguida foram efetuadas as medições das sombras da estaca e do poste e registrada (figura 4.2). Cada grupo fez o cálculo com o auxílio da calculadora, relacionando o conceito de semelhança de triângulos, utilizando a igualdade entre duas razões, chegando dessa forma, na altura do poste (figura 4.3).

Figura 4.2: Primeira atividade prática.

Figura 4.3: Primeira atividade prática.

Um dos grupos obteve as seguintes medidas: comprimento da estaca 1 metro, comprimento da sombra da estaca 0,60 metros e o comprimento da sombra do poste 3,40 metros, chamando a altura do poste de x, efetuaram o seguinte cálculo:

$$\frac{x}{1} = \frac{3{,}40}{0{,}60},$$

logo

$$x \approx 5{,}66$$

Portanto a altura do poste de iluminação é de aproximadamente 5,66 metros.

4.2.2 Resultado

Nessa atividade prática, alguns alunos tiveram dificuldade de ler o comprimento encontrado na trena, sendo necessária uma explicação do uso da trena, mostrando nela o metro, centímetro e milímetro.

Os resultados variaram de um grupo para o outro, contudo foi possível perceber que os resultados estavam próximos, sendo esclarecido para cada grupo que isso era normal, pois esse cálculo fornece uma altura aproximada. Esse momento foi aproveitado para ressaltar a importância de no momento da medição, colocar valores mais precisos possíveis, pois isso poderá provocar um pequeno erro no resultado final.

4.3 Segunda Atividade

Utilizando os conhecimentos adquiridos pelos alunos até o momento sobre triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras, foi proposto a cada grupo a construção de um esquadro de madeira, caso tenham dificuldade em encontrar medidas que formam um triângulo retângulo, foram sugeridas as medidas 60 cm, 80 cm e 100 cm.

No segundo momento foi proposto a cada grupo a construção de um retângulo com dois metros de largura por três metros de comprimento, utilizando linhas e estacas, além do esquadro construído por cada grupo. O objetivo foi fazer com que cada grupo utilizasse o ângulo reto do esquadro para a construção do retângulo, fazendo a marcação com as estacas e, em seguida, esticando a linhas.

4.3.1 Materiais utilizados

Para a construção do esquadro, foram utilizadas ripas com largura de cinco centímetros, trena, parafuso com porca e chave de meia polegada, conforme figura 4.4. Previamente as ripas foram medidas, cortadas e furadas, evitando dessa forma algum tipo de acidente. Também foi utilizada linha de pedreiro, estacas e uma marreta para fixá-las no chão. Lembrando que para fixar às estacas no chão a marreta foi manuseada pelo professor, no entanto as marcações foram feitas apenas pelos alunos.

Figura 4.4: Materiais utilizados na segunda atividade.

4.3.2 Desenvolvimento da atividade

Antes de iniciarmos essa atividade, nos reunimos e fizemos uma breve discussão sobre alinhamentos, soma dos ângulos internos de um retângulo, os lados de um triângulo retângulo e a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Foi comentado também sobre as medidas de um triângulo retângulo, dando como exemplo o triângulo de lados 3, 4 e 5 e o triângulo de lados 6, 8 e 10.

Em seguida foi pedido para cada grupo construir um esquadro com as madeiras que ali se encontravam então cada grupo, com o auxílio de uma trena, começou a medir, de maneira que separassem as medidas 60 cm, 80 cm e 100 cm, para fixar as madeiras foram utilizados parafusos com porcas, nesse momento alguns alunos desprezaram as pontas de cada madeira (figura 4.5), o que poderia resultar em um erro no momento do alinhamento, porém, imediatamente foi retificado esse erro (figura 4.6) e explicado o porquê não poderia ser feito daquela forma.

Figura 4.5: Esquadro de madeira construído pelos alunos.

Figura 4.6: Esquadro de madeira construído pelos alunos.

Feito o esquadro, pedi para cada grupo construir um retângulo de lados 3 metros de comprimento por 2 metros de largura. Inicialmente fixaram duas estacas, com distância aproximada de 3,5 metros, e esticaram uma linha, depois fixaram outra estaca, próximo a uma das estacas fixadas inicialmente, e esticaram outra linha e, antes de fixar a outra estaca, utilizaram o esquadro para formar um ângulo de 90° entre as linhas, formando um L. Utilizando a trena, mediram três metros e fixaram outra estaca, em seguida esticaram a linha e utilizaram o esquadro novamente para obter um ângulo de 90°, novamente com o auxílio da trena mediram dois metros e fixaram outra estaca, fazendo o mesmo processo que fizeram anteriormente para obter um ângulo de 90°, finalizando o retângulo. Nas figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 segue as imagens da construção do retângulo.

Figura 4.7: Segunda atividade prática.

Figura 4.8: Segunda atividade prática.

Figura 4.9: Segunda atividade prática.

Figura 4.10: Segunda atividade prática.

4.3.3 Resultados

Em alguns momentos os alunos necessitaram do auxílio do professor, desde a construção do esquadro na qual tiveram problemas com medidas até o alinhamento e esquadrejamento do retângulo.

Após finalizarem o retângulo, os alunos foram questionados sobre qual seria o processo para a construção de um triângulo retângulo, tendo como referência o retângulo que fizeram? A resposta não foi imediata, porém, após alguns minutos, responderam "traçando a diagonal", sendo relembrado que, para o cálculo do comprimento da diagonal, poderia ser utilizado o teorema de Pitágoras.

Alguns alunos comentaram sobre a dificuldade e os futuros problemas encontrados em construções por erros iniciais de medidas.

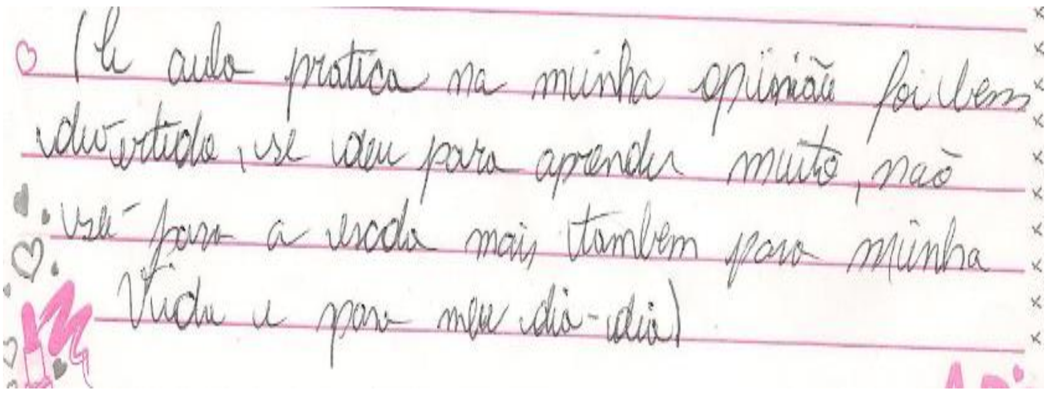
Figura 4.11: Segunda atividade prática.

Figura 4.12: Segunda atividade prática.

4.4 Comentários dos alunos

Anexamos três registros de alunos em relação às atividades desenvolvidas.

Aluno 1



(A aula pratica na minha opinião foi bem divertida, se deu para aprender muito, não só para a escola mais também para minha Vida e para meu dia-dia)

Aluno 2

Neste trabalho aprendi muitas coisas interessantes, apesar que no começo achei um pouco complicado, mas depois com as explicações do professor e várias tentativas em fazer o triângulo retângulo consegui entender.

É interessante obter as medidas certas e importante prestar atenção para que o calculo seja o correto.

Nas medidas do poste e da estaca de madeira dá para se tirar uma base de onde fica o ângulo de 90º graus e as demais medidas dadas, com essa aula adquirimos conhecimento, e quando cair na prova ou alguma outra atividade fica mais fácil de resolver.

É importante lembrar também que pedreiros utilizam esses métodos no dia-a-dia para fazerem seu trabalho, e não precisa ter muito estudo para se calcular essas medidas, eles usam na prática e fazem muito bem.

No começo da aula pareceu complicado e deu pra confundir, mas depois de prestar muita atenção e fazer os cálculos corretamente ficou fácil, acho que a aula prática é importante pois se aprende mais

Aluno 3

O assunto era sobre o Triângulo retângulo e sua impotância. Primeiramente medimos com uma trena, a sombra de um Poste(x) que era de 3 40m, depois a sombra de uma madeira de 1m que era de 66cm sua sombra. Colocamos o poste(x) igual a sua sombra e a madeira igual a sua sombra multiplicamos cruzado e obtemos o valor de x = 5.66.

Logo depois o professor explicou e ensinou a nós como fazer um esquadro (Triângulo retângulo) com a medida de 1m, 80 cm e 60cm. E depois ele pediu para fazermos um retângulo usando uma trena, uma linha, estacas, uma marreta e o esquadro (Triângulo retângulo). Enrolamos a linha a uma estaca primeiramente, depois com uma certa distância colocamos 2 estacas e enrolamos a linha que ficou com um formato de Triângulo retângulo, depois usamos o esquadro para determinar o ângulo certo que a outra estaca deveria estar, e medimos com a trena, e fizemos isso até virar um retângulo com a medida de 3m de comprimento e 2m de altura.

4.5 Atividade Realizada em Sala de Aula

Para fixar melhor o conceito de semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras, foram propostos os seguintes exercícios:

1-) Um topógrafo precisa saber a altura aproximada de um prédio, porém, naquele momento não possui nenhum aparelho para calcular tal medida. Como ele possuía uma trena, observou que a sombra do prédio, media 6,5 metros. Em seguida viu que um poste de 2 metros fazia uma sombra de 40 cm.

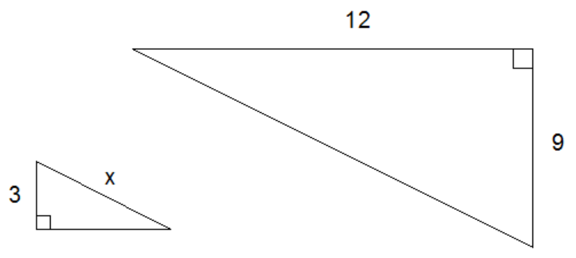
Utilizando o conceito de semelhança de triângulos ele encontrou a altura do prédio. Qual a altura do prédio citado acima?

2-) A prefeitura de uma cidade deseja cercar um canteiro cuja forma é um triângulo retângulo com medidas perpendiculares de 6 e 8 metros.

a) Quantos metros de arame serão necessários para cercar esse canteiro, considerando que a cerca de arame terá cinco fios?

b) Qual será o gasto para cercar esse canteiro sabendo que o metro do arame custa R$ 3,75?

3-) Sabendo que os triângulos abaixo são semelhantes, determine o valor de x.



Esses exercícios foram resolvidos em grupo na sala de aula. Os alunos não tiveram muitas dificuldades na resolução desses exercícios, sempre citavam alguns momentos da aula prática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos profissionais na área da engenharia civil fazem cálculos e executam trabalhos que, na maioria das vezes, não entendem o processo para chegar naquele resultado, como por exemplo: as tesouras de telhados, construção de escadas residenciais, esquadrejamentos e até mesmo a inclinação das rampas de acesso. Contudo, mesmo com a ausência de tal conhecimento esses profissionais conseguem concluir o trabalho de uma maneira eficaz, em contrapartida, ainda vemos muitos erros em obras que poderiam ser evitados devido à falta de conhecimentos matemáticos.

O conhecimento da trigonometria, por menor que seja, contribui de uma maneira significativa no processo de edificações residenciais. Dessa maneira, agregamos ao estudo da trigonometria, com foco no triângulo retângulo, alguns exemplos na construção civil.

Através desse trabalho podemos perceber o quanto o estudo teórico é importante, porém, para uma aprendizagem mais significativa, se faz necessário conciliar a teoria com a prática. Em algumas situações, os alunos demonstravam o conhecimento teórico, mas tinham certa dificuldade para aplicar em alguma situação do dia a dia.

Para determinados conteúdos não é nada fácil introduzir a prática como fonte de conhecimento, porém o estudo da trigonometria pode ser abordado em diversas atividades práticas, incluindo situações do dia a dia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARANTES, Priscila. **As Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo e as Rampas de Acesso.** Universidade Federal de São Carlos – UFSCAR. São Carlos – SP, 2013.

BOYER,Carl Benjamin, **História da Matemática**, Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

DANTE, Luiz R. **Matemática Contexto e Aplicações**, 1° edição, Volume 1, Editora Ática, 2011 – São Paulo.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática** - Trad. Hygino H.Domingues, Editorada UNICAMP, 2004.

GOMES, Francisco. **Levantamento Topográfico.** Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Campinas – SP, 2014.

Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R. **Matemática Volume Único**, Atual Editora, 2004 – São Paulo.

JÚNIOR, J. S. Bacelar. **Uso do GeoGebra no Ensino da Trigonometria.** Universidade Federal do Ceará – UFC. Fortaleza – CE, 2013.

LEÔNCIO, José M. **Reflexões Sobre o Ensino da Trigonometria Utilizando um Teodolito Caseiro.** Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. Ilhéus – BA, 2013.

Lima, E.; Carvalho, P.; Wagner, E.; Morgado, A. **Temas e Problemas Elementares**, 2ª edição, SBM, 2006 – Rio de Janeiro.

Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, MEC – Brasília, 2006.

NETO, Antônio C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**, Volume 2, SBM.
Oliveira, Antônio M.; Silva, Agostinho. **Biblioteca da matemática moderna**, 4ª edição, 1971, Lisa.

SOUSA, M. A. Moraes. **Experimentos de Trigonometria em Sala de Aula.** Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA. Santarém – PA, 2014

SOUZA, Joamir, **Novo Olhar Matemática**, Volume 1 Ensino Médio, Editora FTD, São Paulo, 2009, Coleção Novo Olhar.

STRASBURG, E. Bobsin. **Atividades de Trigonometria para o Ensino Fundamental com o Uso do Software GeoGebra.** Universidade Federal do Rio Grande – FURG. Rio Grande – RS, 2014.

AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE 30º, 45º E 60º. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php>. Acesso em 16 de novembro de 2015.
BIOGRAFIA DE PITÁGORAS. Disponível em: <http://www.e-biografias.net/pitagoras/>. Acesso em: 20 de outubro de 2015.

MOL, Rogério. **Introdução a História da Matemática.** Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG. Belo Horizonte – MG, 2013. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf>. Acesso em 02 de novembro de 2015.

NORMA BRASILEIRA ABNT NBR 9050:2004 - Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Disponível em: <http://www.pessoacomdeficiencia.gov.br/app/sites/default/files/arquivos/%5Bfield_generico_imagens-filefield-description%5D_24.pdf>. Acesso em: 03 de fevereiro de 2016.

O INÍCIO DA TRIGONOMETRIA. Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/trigonometria.html>. Acesso em 27 de outubro de 2015.

ONDE ESTÁ A MATEMÁTICA NA ENGENHARIA CIVIL? Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27230>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2016.

PITÁGORAS–BIOGRAFIA. Disponível em: <http://www.suapesquisa.com/pesquisa/pitagoras.htm>. Acesso em 20 de outubro de 2015.

UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA. Disponível em: <http://www.esaas.com/grupos/matematica/estagios/Paginas/HiparcoDeNiceia.htm>. Acesso em 27 de outubro de 2015.