UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Semelhanças e Diferenças entre os Principais Sólidos Geométricos

Gilmar Teodozio Silva

Instituto de Matemática

Maceió, Março de 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GILMAR TEODOZIO SILVA

SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENTRE OS PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

MACEIÓ, AL
2016

GILMAR TEODOZIO SILVA

SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENTRE OS PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação Apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcio H. Batista da Silva

MACEIÓ, AL

2016

Catalogação na fonte

Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

S586s Silva, Gilmar Teodozio.
Semelhanças e diferenças entre os principais sólidos geométricos / Gilmar Teodozio Silva. – 2016.
92 f. : il.

Orientador: Marcio Henrique Batista da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 91.
Anexos: f. 92.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Geometria espacial – Ensino e aprendizagem. 3. Geometria sólida - Apresentação. I. Título.

CDU: 514.113

Folha de Aprovação

GILMAR TEODOZIO SILVA

SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENTRE OS PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 31 de março de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (Orientador)

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

José Ivan da S. Santos

Prof. Dr. José Ivan da Silva Santos

Dedico este trabalho a todos os companheiros que lecionam a disciplina de matemática no ensino médio, em especial aqueles que têm como meta principal sempre o melhor casamento entre o binômio ensino – aprendizagem, aos alunos do ensino médio que são o alvo final deste trabalho e pelos quais sempre buscamos progredir e, com todo respeito e apreço, a todos discentes e docentes que fizeram parte da minha turma PROFMAT UFAL 2013, que muito contribuíram para cada aluno desta turma enriquecerem seus conhecimentos matemáticos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde física e mental para desenvolver meu intelecto e conseguir chegar até aqui.

Aos meus pais Expedito José Teodozio (em memória) e Maria Madalena da Silva que contribuíram sempre para que eu me tornasse um bom cidadão na sociedade, no caso de minha mãe, ensinando as primeiras operações matemáticas, que me lembro como hoje.

A minha amada esposa Carolina Acácia de Souza Boia Teodozio e meu querido filho Geraldo Arthur Teodozio Boia que sempre me incentivaram e acreditaram no meu potencial, compreendo as minhas ausências para os estudos.

A todos os meus professores, mestres e doutores que contribuíram para minha formação desde o início dos meus estudos, e em especial aos meus professores do PROFMAT, que sem sombra de dúvidas trouxeram um enorme acréscimo de conhecimentos matemáticos para a minha atividade profissional e, mais especialmente meu orientador Marcio Batista.

A todos os meus colegas do PROFMAT, que caminharam juntos comigo nessa forte construção de amizade, companheirismo e uma enorme troca mútua e incansável de conhecimentos, sempre com muito incentivo e apoio para que todos superassem suas dificuldades e chegassem até a conclusão do curso.

A todos os meus alunos que estiveram em algum momento assistindo minhas aulas, principalmente aqueles que realmente estudam e procuram tirar suas dúvidas, são esses que nos estimulam sempre a procurarmos evoluir nossos conhecimentos e tornar nossas aulas cada vez produtivas, dentro do possível, em especial a turma na qual apliquei esse projeto, a turma do curso técnico de Eletrotécnica do IFAL campus Maceió – AL.

E finalmente a todos entes familiares, amigos e colegas de trabalho, que, na caminhada da minha vida, contribuíram direta e indiretamente para que alcançasse os meus objetivos. Muito obrigado a todos.

PORTAS

Se você abre a porta, você pode ou não entrar em uma nova sala.
Você pode não entrar e ficar observando a vida.
Mas se você vence a dúvida, o medo, e entra, dá um grande passo:
Nesta sala vive-se.
Mas também tem um preço...
São inúmeras outras portas que você descobre.
Às vezes, quebra-se a cara; às vezes, curte-se mil e uma.
O grande segredo é saber quando e qual a porta deve ser aberta.
A vida não é rigorosa, ela propicia erros e acertos
Quando com eles se aprende.
Não existe a segurança de acerto eterno.
A vida é generosa.
A cada sala que se vive, descobrem-se tantas outras portas. E a vida enriquece quem se arrisca a abrir novas portas.
Ela privilegia quem descobre seus segredos e generosamente oferece afortunadas portas.
Mas a vida também pode ser dura e severa. Se você não ultrapassa a porta, terá sempre a mesma porta pela frente e a repetição perante a criação, e a monotonia monocromática perante a multiplicidade das cores, e a estagnação da vida.
Para a vida, as portas não são obstáculos, mas diferentes passagens...

Içami Tiba

RESUMO

Tendo em vista as dificuldades apresentadas por grande parte dos alunos em relação a visualização dos elementos dos sólidos geométricos e consequentemente a compreensão deste conteúdo matemático e também as dificuldades dos colegas professores em disponibilizar essa visualização e conseguir concluir este conteúdo em tempo hábil, com eficiência e de maneira satisfatória a cumprir com a ementa deste conteúdo do ensino médio e, buscando atender bem o binômio ensino – aprendizagem, propomos neste trabalho uma boa alternativa de construir o conhecimento sobre sólidos geométricos, abordando os sólidos: Prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera, conjuntamente, para que o aluno possa ter parâmetros comparativos. Para tal, usaremos uma tabela, onde seu preenchimento, fará, em um primeiro momento professor e/ou alunos se utilizam de recursos materiais e/ou ferramentas computacionais para construir cada sólido, e de posse destas construções poderem, em um segundo momento, visualizar melhor os elementos que fazem parte destes sólidos, e em um terceiro momento, desenvolverem para cada sólido as fórmulas que fornecem diagonais, áreas das bases, áreas laterais, áreas totais e por fim os volumes. Como sabemos que, no desenvolvimento destas fórmulas, é necessário conhecimentos prévios, oferecemos assim, com essa proposta, a oportunidade de: revisar conteúdos como: Teorema de Pitágoras, áreas de figuras planas, semelhança de triângulos, entre outros, além de abordar também temas novos como: o princípio de Cavaliere, utilizar variantes do teorema de Pappus e ainda apresentar uma noção de limites.

Palavras-chave: visualização. Parâmetros comparativos. Ferramentas de visualização. Construção. Ensino – aprendizagem. Deduções.

ABSTRACT

Having in mind the difficulties presented by a vast amount of students in visualizing the elements of geometric solids and consequently the comprehension since mathematical content and also teachers' difficulties in make available that visualization and conclude this content just in time, efficiently and in a satisfactory way to comply with the high school program and, searching to attend well the teaching-learning binomial, this work proposes an alternative at knowledge construction about geometric solids, approaching them: prisms, cylinders, cone and sphere, together to give students comparative parameters. For this purpose, a table is useful, which fulfilling will make, firstly, teacher and/or student use material resources and/or computational tools to construct each solid, in possession of these constructions, in a second moment, they are able to visualize better the elements of the solids, and in a third moment, they can develop for each solid, formulas that provide diagonals, areas for the bases, side areas, full areas and, finally, volumes. As we know, it is necessary previous knowledge in these formulas development, so we offer, with this purpose, the opportunity of review contents, as: Pythagorean theorem, flat surfaces areas, similar triangles, among others. In addition to that, it approaches new matters such as: Cavalieri's principle, variations from Pappus theorem and even it presents a notion of limits.

Keywords: Visualization, comparative parameters, visualization tools, construction, teaching-knowing, deduction.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FOTOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Percebemos que, no processo de aprendizagem, a grande dificuldade encontrada por boa parte dos alunos está principalmente na visualização dos elementos que compõem as figuras espaciais e por consequência a dificuldade em compreender as deduções das fórmulas que usamos para calcular diagonais, alturas, geratrizes, apótemas, áreas e volumes dos sólidos estudados nesse conteúdo.

Com respeito ao ensino, são notórias várias dificuldades na apresentação da Geometria Espacial de modo que o alunado compreenda e visualize os objetos espaciais de forma satisfatória. Nessa proposta, os alunos não se limitam apenas aos desenhos destas figuras tridimensionais no plano, trazidas pelos esboços dos professores no quadro ou através de livros. Os alunos serão conduzidos a seguir um passo-a-passo, tendo a oportunidade de, a partir das planificações da cada sólido, construírem os próprios e de posse deles, poderem visualizar e identificar nos mesmos seus: vértices, arestas, faces, diagonais, alturas, apótemas, geratrizes, ângulos retos, semelhanças de triângulos, entre outros detalhes que os qualificarão a não só poderem desenhar cada sólido com suas características específicas como também compreender os esboços destes com mais capacidade; além de construírem nesse processo os meios visuais que juntamente com conhecimentos necessários previamente estudados irão ajudá-los a entenderem as demonstrações das fórmulas.

Quanto ao ensino, vemos também as dificuldades que alguns professores têm, em apresentar este conteúdo de maneira a oferecer aos alunos melhores condições de visualização espacial, muitas vezes, os alunos ficam tentando abstrair as observações necessárias, apenas nos esboços dessas figuras tridimensionais trazidas num plano, através dos desenhos do professores nos quadros ou, através dos livros, nesses mesmos desenhos, com um pouco mais de ilustrações, mas que, ainda assim, para os alunos, não contempla as condições para que possam perceber com mais clareza, por exemplo, elementos como: ângulos retos, triângulos retângulos, semelhança de triângulos, entre outros detalhes de grande importância para a compreensão das deduções das fórmulas que serão construídas, razão pela qual provoca em grande parte dos alunos, forte desestímulo e assim um enorme entrave para o desenvolvimento da compreensão do assunto.

O objetivo é propor uma metodologia que possibilite uma melhoria do ensino-aprendizagem, oferecendo um roteiro progressivo de construção do conhecimento de Geometria Espacial. Podendo ser usado por professores como metodologia de ensino ou por alunos, como um processo de aprendizagem, onde todos os sólidos são estudados ao mesmo tempo, com o auxílio de uma tabela (ANEXO I), oferecendo possibilidades de comparação entre eles, podendo então observar com mais clareza as semelhanças e as diferenças, que contribuem grandemente para a compreensão das definições de cada sólido, para a construção deles e principalmente para a dedução das fórmulas que usaremos para os cálculos dos elementos, áreas e volumes, através de ótimas sugestões de ferramentas materiais e digitais que favorecem bastante a visualização das figuras e seus elementos e portanto ajudando enormemente o desenvolvimento gradativo dos temas propostos bem como a absorção dos conteúdos e em paralelo a isso poder revisar de maneira prática outros assuntos trabalhados anteriormente, apresentar novos estudos relacionados ao assunto, introduzir noções de conteúdos que normalmente são abordados em nível superior, e ainda sugerir atividades contextualizadas e que podem levar a interdisciplinaridade.

O estudo aqui proposto contempla alguns dos momentos dos métodos didáticos de **Commenius**, considerado “O criador da Didática moderna”, sendo eles:

- Qualquer coisa que se ensine deverá ser ensinada em sua aplicação, no seu uso definido;
- Ensinar as coisas em seu devido tempo;
- Deve ensinar-se de maneira direta e clara;
- Não abandonar nenhum assunto até sua perfeita compreensão;
- Ensinar primeiro os princípios gerais;
- Tudo o que se deve saber deve ser ensinado;
- Dar a devida importância às semelhanças e diferenças que existem entre as coisas;
- Ensinar a verdadeira natureza das coisas, partindo de suas causas.

Quadro 1 – Commenius

João Amós Commenius, nasceu em 28 de março de 1592, na Morávia, região pertencente à antiga Boêmia, hoje República Tcheca. Filósofo e Teólogo, começou a lecionar em 1614. Em sua primeira grande obra, Didática Magna, concluída em 1632, estão reunidas muitas ideias que contribuíram para reformas educacionais em diversos países da Europa. Faleceu aos 78 anos, em Amsterdã, na Holanda.

Fonte: (Nova Escola. 2003. p.66)

E também conforme a didática, os meios e os recursos, sejam eles materiais ou de tecnologia de informação, utilizados para ensinar, auxiliam, e muito, o professor e o aluno no processo ensino-aprendizagem. Refere-se aos diversos tipos de componentes do ambiente de aprendizagem que dão origem à estimulação para o indivíduo. O professor antes de planejar o ensino deve ter claro os objetivos, pois são eles que vão possibilitar análise dos procedimentos, conteúdos e todas possibilidades humanas e materiais.

Esses meios despertam o interesse e provocam a discussão e debates desencadeando perguntas e gerando ideias. Os recursos didáticos são elementos indispensáveis para desempenhar um bom ensino.

Além disso, para exaltar a importância das semelhanças e diferenças para o ensino-aprendizagem, podemos também levar em consideração o início da construção do conhecimento sobre geometria, bebendo numa fonte antiga muito importante para a Matemática, o livro “**Os Elementos” de Euclides**, onde observamos claramente o evoluir da compreensão a partir de várias comparações que surgiram com as experimentações reais e observações, como as que se seguem:

“Os cones e cilindros semelhantes estão entre si em uma razão tripla da dos diâmetros nas bases”

“Dois números médios em proporção caem entre dois números sólidos semelhantes; e o sólido tem para o sólido semelhante uma razão tripla da que o lado homólogo para o lado homólogo”

“Caso um número médio em proporção caia entre dois números, os números serão planos semelhantes”

“Caso dois números médios em proporção caiam entre dois números, os números serão sólidos semelhantes”

“Caso uma linha reta seja cortada em desiguais, os quadrados sobre as desiguais são maiores do que duas vezes o retângulo contido pelas desiguais”

“Sobre a reta dada, descrever um sólido paralelepípedo semelhante posto, ao sólido paralelepípedo dado”

“Os sólidos paralelepípedos semelhantes estão entre si na tripla razão dos lados homólogos”

“Caso duas pirâmides estejam sob a mesma altura, tendo triângulos como base, e seja dividida cada uma delas tanto em duas pirâmides, iguais entre si e semelhantes à toda à toda quanto em dois primas iguais, como a base de uma pirâmide estará para a base da outra da outra pirâmide, assim todos os prismas em uma pirâmide para todos os prismas, iguais em quantidade, na outra pirâmide”

“As pirâmides semelhantes e que têm triângulos como bases estão em uma razão tripla da dos lados homólogos”

“Todo Prisma, tendo um triângulo como base, é dividido em três pirâmides iguais entre si, tendo triângulos como base”

Estas são apenas algumas comparações encontradas para a construção do conhecimento sobre matemática e especificamente para a geometria.

Baseados na experiência dos antigos, partimos da premissa que, a comparação é de grande importância para compreendermos conceitos e desenvolvermo-nos com mais desenvoltura na geometria.

Podemos também citar que este roteiro de estudo dos sólidos está de acordo com a nova Base Nacional Curricular Comum (BNCC), conforme trechos que transcrevemos abaixo:

> A Matemática assume um papel fundamental para o pleno acesso dos sujeitos à cidadania. Em uma sociedade cada vez mais baseada no desenvolvimento tecnológico, os conhecimentos matemáticos tornam-se imprescindíveis para as diversas ações humanas, das mais simples às mais complexas, tais como ... e percepção do espaço que nos cerca, dentre outras (BNCC, p. 116).

Percebe-se que oferece a oportunidade do aluno ter essa percepção espacial.

> O conhecimento matemático é fruto da busca, pelo ser humano, de respostas a problemas que a sociedade lhe apresenta em suas práticas sociais. A Matemática não é, e não pode ser vista pela escola, como um aglomerado de conceitos antigos e definitivos a serem transmitidos ao estudante. Ao contrário, no processo escolar, é sempre fundamental que ele seja provocado à construir e a atribuir significado aos conhecimentos matemáticos (BNCC, p. 116).

O alunado não se limita apenas aos aglomerados de conceitos; pelo contrário, é convidado a participar da construção dos sólidos e das demonstrações das fórmulas, dando, assim, significado aos conhecimentos e a inserção deles nas práticas sociais.

> Dessa forma, a Matemática pode ser vista como uma fonte de modelos para os fenômenos que nos cercam. Esses modelos compreendem não somente os conceitos, mas as relações entre eles, procedimentos e representações de diversas ordens (BNCC, p. 116).

> Os objetos matemáticos não podem ser compreendidos isoladamente, eles estão fortemente relacionados uns aos outros. Superar a perspectiva de limitar esses objetos em blocos isolados e estanques tem sido um dos principais desafios a serem vencidos com relação às práticas escolares de trabalho com a Matemática (BNCC, p. 116).

Os alunos, não só estudam os conceitos de cada sólido como também as relações entre eles através das comparações de semelhanças e diferenças, bem como, se utilizando de uma das atividades propostas, percebem que estes sólidos podem servir de modelos para representar diversos fenômenos que nos cercam, como: moléculas, construções humanas e animais, entre outros. Possibilitando contextualizações e diversas discursões interdisciplinares.

> É preciso valorizar todo o conhecimento que o/a estudante traz de suas práticas sociais cotidianas. Não podemos imaginar que ele/a chega à escola com a cabeça vazia; ao contrário, todo/a estudante carrega consigo uma diversidade de conhecimentos matemáticos que podem e devem servir de ponto de partida para novas aprendizagens. É muito importante, em sala de aula, provocar o estudante para que ele explique esses conhecimentos, os quais devem ser, permanentemente, associados aos conhecimentos escolares trabalhados (BNCC, p. 116).

Também valorizamos os conhecimentos que os alunos possuem, através das atividades propostas, esses alunos podem se utilizarem de seus conhecimentos, não só sobre o tema em si como também sobre o uso dos recursos materiais, dos tecnológicos, das contextualizações e interdisciplinaridade. Usam primeiramente em seus respectivos grupos e depois trazem para serem debatidos em sala.

> Para que o/a estudante tenha sucesso em Matemática, é preciso que ele/a atribua sentido para os conceitos aprendidos na escola. Esse processo demanda, muitas vezes, o recurso à contextualização dos problemas apresentados a ele/a. Entretanto, a contextualização de um problema não se resume a, por exemplo, colocar "frutas" no seu enunciado (que é apenas um exercício de aplicação de conhecimentos previamente aprendidos), mas, sim, criar uma situação que envolva contextos diversos (sociais e científicos) em que o/a estudante não veja de imediato a sua solução. É preciso que a situação apresentada demande que o/a estudante elabore hipóteses de resolução, teste a validade dessas hipóteses, modifique-as, se for o caso, e assim por diante. Trata-se, portanto, de desenvolver um tipo de raciocínio próprio da atividade matemática, permitindo compreender como os conceitos se relacionam entre si (BNCC, p. 117).

A ideia do trabalho é fazer com que os alunos usem os seus raciocínios próprios e com os conhecimentos que já possuem interajam com os colegas contextualizando com outros conhecimentos científicos e sociais e construam o conhecimento sobre o assunto em pauta, dando sentido aos conceitos estudados.

> Por isso, é importante considerarmos que, antes de o/a estudante ser apresentado/a à representação de um objeto matemático, é preciso que ele/a elabore a compreensão desse objeto. Além disso, no caso da Matemática, um mesmo objeto

> pode ser representado de diferentes maneiras e uma mesma representação pode ser associada a diferentes objetos (BNCC, p. 117).

Os alunos através dessa proposta começam a elaborar a compreensão dos objetos a partir de suas planificações e construindo-os percebem as diferentes maneiras de representa-los e que essas maneiras podem ser associadas a diferentes contextos e interdisciplinaridade.

> O refinamento das representações dos objetos matemáticos é elaborado pouco a pouco pelo/a estudante. É importante iniciar o processo de aprendizagem em Matemática provocando o/a estudante a fazer matemática para que, posteriormente, ele/a possa se apropriar de registros de representação simbólicos (BNCC, p. 117).

> Assim, a aprendizagem em Matemática demanda a exploração de três momentos distintos e ordenados. No primeiro, o estudante deve **fazer Matemática**. Após, ele deve desenvolver **registros de representação pessoais** para, finalmente, apropriar-se dos **registros formais** (BNCC, p. 117).

Nesse roteiro de ensino-aprendizagem, os alunos são levados a explorarem esses três momentos, **fazer Matemática**, construindo os sólidos a partir de suas planificações, **registros de representações pessoais,** através das visualizações, desenhos dos sólidos no plano, identificações de seus elementos, observação de semelhanças e diferenças e conceitos que são registrados simultaneamente, **registros formais**, através das atividades de contextualização e interdisciplinaridade, das observações das particularidades de cada sólido e das demonstrações das fórmulas de cada um.

Ainda de acordo com a BNCC, no que tange A Área de Matemática no Ensino Fundamental:

> É importante destacar, inicialmente, a necessária aproximação entre os conhecimentos matemáticos e o universo da cultura, das contextualizações e da instrumentação crítica, como princípios que são o ponto de partida para a prática pedagógica. O ensino de Matemática visa a uma compreensão abrangente do mundo e das práticas sociais, qualificando a inserção no mundo do trabalho, que precisa ser sustentada pela capacidade de argumentação, segurança para lidar com problemas e desafios de origens diversas. Por isso, é fundamental que o ensino seja contextualizado e interdisciplinar, mas que, ao mesmo tempo, se persiga o desenvolvimento da capacidade de abstrair, de perceber o que pode ser generalizado para outros contextos, de usar a imaginação (BNCC, p/. 118).

> No processo de contextualizar, abstrair e voltar a contextualizar, outras capacidades são essenciais, como: questionar, imaginar, visualizar, decidir, representar e criar. Nessa perspectiva, alguns dos objetivos de aprendizagem formulados começam por: "resolver e elaborar problemas envolvendo...". Nessa enunciação está implícito que o conceito em foco deve ser trabalhado por meio da resolução de problemas, ao mesmo tempo em que, a partir de problemas conhecidos, deve-se imaginar e questionar o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida. Nesse sentido, indicamos a elaboração de problemas pelos/as próprios/as estudantes, e não apenas a proposição de enunciados típicos que, muitas vezes, apenas simulam alguma aprendizagem (BNCC, p. 118).

Através das atividades propostas nesse roteiro de estudos dos sólidos geométricos, através dos debates sobre o tema, tenta-se estimular os alunos a serem criativos, usarem a imaginação, tomarem decisões, visualizarem e desenvolverem a capacidade de argumentação sobre o conteúdo e sobre a aproximação dos conhecimentos matemáticos em pauta com abrangentes contextos e interdisciplinaridade.

> Um currículo, na área da Matemática, dialogando com todas as áreas, precisa garantir o direito à compreensão das ideias abrangentes que articulam conhecimentos específicos; ao desenvolvimento do pensamento analítico e à interpretação de problemas, criação de suas próprias estratégias de resolução e produção de situações desafiadoras. Essas capacidades habilitam os/as estudantes a buscarem respostas a situações familiares e não familiares pelo emprego de estratégias típicas do raciocínio matemático e fundamentais para a tomada de decisões conscientes, de maneira cada vez mais qualificada (BNCC, p. 119).

Esse projeto de ensino-aprendizagem oferece também a oportunidade para que professores de diferentes disciplinas possam dialogar entre si para planejarem uma forma de abordarem os vários ângulos de visão sobre o assunto e levarem essa discursão para que os alunos possam desenvolver o pensamento analítico, o raciocínio matemático, a interpretação e terem a capacidade de tomar decisões conscientes a partir da criação de suas próprias estratégias de resolução e produção de situações desafiadoras.

> A Matemática é uma ciência composta por múltiplos conceitos que se relacionam, se complementam e que, muitas vezes, são interdependentes. Além disso, o corpo de conhecimentos matemáticos (que se consolida por ampliações sucessivas ao longo da Educação Básica) está fortemente apoiado em suas aplicações, tanto aquelas do cotidiano fora da sala de aula quanto as que se originam pelo próprio desafio do conhecimento, que está sempre em movimento, necessitando ser completado, explicado, verificado (BNCC, p. 119).

A ideia disponibiliza não só, a possibilidade de revisar conteúdos da educação básica como também apresentar novos conceitos e relações com o cotidiano que são originados pelo próprio desafio da compreensão do tema em estudo.

> As ideias matemáticas foram produzidas e se desenvolveram durante milhares de anos fincadas em diversas culturas, têm suas histórias associadas às necessidades de cada tempo social, estando em constante desenvolvimento. Dessa forma, a Matemática contemporânea se constitui a partir de elos com outras áreas de conhecimento e com os desafios do desenvolvimento da sociedade. As tecnologias digitais são exemplo disso, pois, ao mesmo tempo que exigem novas descobertas matemáticas para seu avanço, facilitam a expansão de ideias e dão acesso a novas formas de aplicação dos conhecimentos, o que possibilita a continuidade da exploração e invenção matemática (BNCC, p. 119).

Na ATIVIDADE 1 do nosso trabalho, que será comentada posteriormente, os alunos interagem ativamente com essas tecnologias da informação e na ATIVIDADE 4, que também será comentada mas a frente, propõe-se uma pesquisa sobre a existência dos sólidos nas diversas atividades humanas, na qual é fácil surgir a contextualização histórica e cultural do desenvolvimento da Matemática e da possibilidade da continuidade da exploração e invenção com novas descobertas, contextualizações que podem ser amplamente debatidas na sala de aula e até mesmo juntamente com professores de outras cadeiras.

> É no planejamento da ação pedagógica que as conexões e a riqueza de possibilidades do currículo podem ser explicitadas, contribuindo para que todos se beneficiem do acesso ao raciocínio matemático e aprendam a aplicá-lo de maneira criativa e eficiente. Na Base Nacional Comum Curricular, a Matemática propõe objetivos básicos de aprendizagem, mas tem, sobretudo, o papel de encorajar os professores a propiciarem que seus alunos se motivem e desenvolvam a autoconfiança, mediante sua participação ativa em experiências desafiadoras e atraentes (BNCC, p. 119).

No planejamento do roteiro de nosso trabalho queremos contribuir para motivar professores e alunos a desenvolverem o projeto com participação ativa de todos, estimulando o raciocínio matemático de maneira criativa e eficiente com a interação entre eles.

Também podemos transcrever trechos da BNCC na parte de nosso maior interesse que é o ENSINO MÉDIO, onde essa proposta de estudo deve ser aplicada, e novamente observamos pontos que corroboram a ideia do projeto, como se vê abaixo:

> O Ensino Médio caracteriza-se como a última etapa da Educação Básica. Não é uma etapa isolada e independente das anteriores, mas, sim, uma etapa complementar, que deve oferecer condições ao estudante para ampliar e consolidar as aprendizagens do Ensino Fundamental e desenvolver novas capacidades de interpretar e refletir sobre diferentes contextos. Para isso, no âmbito da escola, é necessário rever e redimensionar o currículo, de modo que a matemática ao ser apresentada ao estudante evidencie sua relevância social e cultural e seu papel no desenvolvimento histórico da ciência.
>
> Assim, no processo de elaboração do currículo de Matemática do Ensino Médio, deve-se levar em conta a importância da contextualização, pois os conceitos e procedimentos matemáticos precisam ter significado para o/a estudante, dado que um estudo sem referenciais, sem um vínculo forte com a realidade concreta, dificulta os processos de ensino e aprendizagem. O cotidiano pode ser considerado uma fonte rica de contextos, para ensinar e aprender Matemática. Assumir essa posição não significa que os contextos de outras ciências e os da própria Matemática não precisem ser utilizados. Pelo contrário, eles também são necessários, pois conceitos matemáticos são instrumentos para a construção de novos conceitos, além de ferramentas para a compreensão e a explicação de fenômenos sociais e da natureza.
>
> Nesse sentido, a valorização da contextualização nesse processo exige também considerar a necessidade de o/a estudante desenvolver competência relativa à abstração, tendo em vista que ele/a deverá estabelecer ou apreender relações que são válidas em diferentes contextos. Portanto, para o processo de ensino de um conceito matemático, é interessante considerar a importância do ciclo: contextualizar, descontextualizar e novamente contextualizar e, depois, reiniciar esse movimento.
>
> Desse modo, além de favorecer a predisposição do/a estudante, no sentido de utilizar os conhecimentos matemáticos como recurso para compreender a realidade e nela intervir, os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos, principalmente aqueles que valorizam o trabalho coletivo, também podem propiciar o desenvolvimento de atitudes que elevam a autoestima do/a estudante com relação à própria capacidade de aprender e construir conhecimentos, de respeitar o trabalho dos/as colegas e de investigar em busca de soluções para as situações propostas. Outro aspecto que deveria ser considerado é a valorização do uso da linguagem matemática, para que o/a estudante possa expressar-se com clareza, precisão e concisão, considerando ser ela um meio para a compreensão da realidade. Assim, a Matemática, no currículo da escola, deveria constituir, juntamente com a área de Linguagens, sobretudo a Língua Materna, um recurso imprescindível para a construção e a expressão de argumentos convincentes e para o enfrentamento de situações-problema.
>
> A Matemática do Ensino Médio deve priorizar conceitos e procedimentos que possibilitem o estabelecimento de conexões tanto entre diversas ideias matemáticas, como com outras áreas do conhecimento, atentando para suas aplicações sociais (BNCC, p. 139).

Este parágrafo da BNCC abaixo, refere-se ao Ensino médio, mais uma vez, reforça claramente tudo o que já se foi comentado anteriormente sobre a concordância do projeto com a BNCC.

> [...] Já a exploração das grandezas geométricas pode se constituir um ótimo estímulo para o/a estudante compreender demonstrações mais elaboradas (por exemplo, que conduzam a fórmulas para o cálculo de áreas e de volumes de figuras geométricas), promovendo a ampliação e a consolidação de conceitos aprendidos anteriormente (BNCC, p. 140).

O roteiro de aprendizagem proposto, possibilita ao estudante esse estímulo a compreensão das demonstrações matemáticas, se valendo da ampliação dos conhecimentos sobre o tema, consolidando conceitos aprendidos anteriormente e trazendo conteúdos inéditos para o Ensino Médio.

> O trabalho com a Matemática no Ensino Médio pode ser enriquecido por meio de propostas pautadas no uso de recursos tecnológicos como instrumentos que visem auxiliar na aprendizagem e na realização de projetos, sem anular o esforço da atividade compreensiva. Há diversos softwares disponíveis na Internet que se aplicam ao estudo das construções geométricas (BNCC, p. 141).

Essa proposta de estudo dos sólidos começa exatamente propondo o uso desses recursos tecnológicos para auxiliar na construção dos sólidos geométricos a partir de suas planificações, propõe também, utilizar, além desses recursos tecnológicos, recursos materiais que contribuem para melhorar visualização e identificação dos elementos que constituem cada sólido, suas semelhanças, diferenças e características próprias, colaborando então, para a compreensão dos conceitos e demonstrações das fórmulas de cada um.

> Mais ainda, a escola precisa propor situações em que o/a estudante perceba a necessidade e a importância de estabelecer relações entre conteúdos, de elaborar e de comprovar hipóteses, de fazer generalizações e de lidar com a ideia de incerteza, características do pensamento científico. É fundamental também que, ao final dessa etapa de escolarização, o/a estudante tenha construído um repertório diversificado e abrangente de representações matemáticas (BNCC, p. 141).

Conduzimos o aluno a perceber relações de semelhanças e diferenças entre os conceitos dos próprios sólidos e relações com o cotidiano, levamos também o alunado a elaborar, através de visualizações e identificações nos sólidos construídos e recursos tecnológicos, conceitos e demonstrações que podem comprovar e fazer generalizações.

> Em síntese, essas considerações, conquanto possam ser adaptadas pelo/a professor/a, ... destacam a importância – a indispensabilidade – de preparar os/as estudantes para o exercício da cidadania, ao mesmo tempo, valorizando o desenvolvimento dos conhecimentos indispensáveis para a continuidade do processo educacional. Além disso, tais orientações, se colocadas em prática, têm potencial para viabilizar aos estudantes uma visão da Matemática não apenas como uma ferramenta útil para resolver problemas de sua vida cotidiana, mas, também, como uma ciência logicamente estruturada, cuja compreensão pode proporcionar prazer (BNCC, p. 141).

Queremos com esse processo de ensino e de aprendizagem, fazer com o estudante possa aprender de maneira estimulante e prazerosa.

Podemos ainda, apresentarmos aqui, os objetivos gerais para a Matemática no Ensino Médio requeridos pela BNCC, novamente mostrando a concordância com nossa proposta de ensino-aprendizagem que expomos nesse trabalho:

OBJETIVOS GERAIS DA ÁREA DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

- Aplicar conhecimentos matemáticos em situações diversas, na compreensão das demais ciências, de modo a consolidar uma formação científica geral.

- Expressar-se oral, escrita e graficamente, valorizando a precisão da linguagem, na comunicação de ideias e na argumentação matemática.

- Compreender a Matemática como ciência, com sua linguagem própria e estrutura lógico-dedutiva.

- Estabelecer relações entre conceitos matemáticos de um mesmo campo e entre os diferentes eixos (Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções), bem como entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

- Desenvolver a autoestima e a perseverança na busca de soluções, trabalhando coletivamente, respeitando o modo de pensar dos/as colegas e aprendendo com eles/as.

- Analisar criticamente os usos da Matemática em diferentes práticas sociais e fenômenos naturais, para atuar e intervir na sociedade.

- Recorrer às tecnologias digitais para descrever e representar matematicamente situações e fenômenos da realidade, em especial aqueles relacionados ao mundo do trabalho.

Finalizando, podemos mostrar o que a BNCC aponta para a abordagem específica do conteúdo do nosso projeto:

1º ANO/EM

GEOMETRIA

Utilizar a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras (Exemplo: diagonais de prismas e da altura de pirâmides) para resolver e elaborar problemas.

Construir vistas ortogonais de uma figura espacial, representando-a em perspectiva a partir de suas vistas ortogonais.

2º ANO/EM

GEOMETRIA

Reconhecer características e elementos de poliedros (exemplo: faces, arestas, vértices, diagonais), incluindo poliedros regulares, prismas e pirâmides oblíquos.

Compreender o princípio de Cavalieri e utilizá-lo para estabelecer as fórmulas para o cálculo da medida do volume de figuras geométricas espaciais.

Resolver e elaborar problemas de cálculo da medida de volume de cilindros, prismas, pirâmides e cones retos.

Apresenta um método de aprendizagem que estimula os alunos a alcançarem esses objetivos de forma construtiva, com utilização de recursos tecnológicos e materiais, possibilitando a interação entre os alunos e os professores, com espaço aberto a debates amplos, interdisciplinar e contextualizados, onde os estudantes podem contribuir com suas ideias em qualquer momento do roteiro de construção dos conhecimentos, baseados nos aprendizados que já possuem individualmente e juntos atingirem uma ampla compreensão do assunto, bem como, perceberem a utilização desses conhecimentos numa gama de outros campos de estudos humanos.

2 OBJETIVOS DO PROJETO

Neste projeto, queremos apresentar uma metodologia própria para o ensino-aprendizagem dos sólidos geométricos: Prismas, Pirâmides, Cilindros, Cones e Esferas.

Essa metodologia pode ser utilizada por professores em sala de aula, estudos individuais, em grupo, em clubes de matemáticas ou ainda através de outros meios que se possam criar.

Pretendemos com esse processo de aprendizagem, fazer com que os alunos em suas etapas possam conquistar gradativamente os seguintes conhecimentos:

I) A PLANIFICAÇÃO DE CADA SÓLIDO
Nesta etapa pode-se usar softwares como: POLY E GEOGEBRA para obter estas planificações.

II) A CONSTRUÇÃO DE CADA SÓLIDO A PARTIR DE SUAS PLANIFICAÇÕES
Os materiais a serem usados ficam a critério do professor e/ou dos alunos. Sugerimos a construção de sólidos vazados pois estes serão úteis para a dedução das fórmulas.

III) COMPREENDER A NOÇÃO DE LIMITES.

IV) O ESBOÇO DOS SÓLIDOS NO PLANO
Aprimorando assim sua capacidade de visualização tridimensional e sua capacidade de desenhar figuras espaciais no plano.

V) CONHECER E IDENTIFICAR TODOS OS ELEMENTOS QUE FAZEM PARTE DE CADA SÓLIDO ALÉM DAS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS EXISTENTES ENTRE ELES
Como elementos, nos referimos aqui aos: vértices, arestas, faces, diagonais, bases, raios, alturas, geratrizes, apótemas e outros que se possam discutir no encaminhar dos estudos, como também, o aluno possa reconhecer cada sólido e suas semelhanças e diferenças.

VI) COMPREENDER TODAS AS DEMONSTRAÇÕES DAS FÓRMULAS USADAS PARA OS CÁLCULOS DOS DEVIDOS ELEMENTOS, DAS ÁREAS E DOS VOLUMES EM CADA SÓLIDO
Nesta etapa, precisaremos, além de conteúdos previamente estudados no ensino fundamental e médio, também precisaremos introduzir noções de temas do ensino superior, alguns com adaptações necessárias a compreensão para o ensino médio.

VII) PERCEBER A EXISTÊNCIA E AS APLICAÇÕES DESDES SÓLIDOS NA NATUREZA E NAS CONSTRUÇÕES HUMANAS
Aqui os alunos têm a grande oportunidade de se depararem com contextualizações e interdisciplinaridades que agigantam e abrilhantam os

estudos através de uma pesquisa em que pode ser individual ou em grupo sobre o tema.

Podemos perceber que as ideias desse projeto se encaminha numa linha construtivista, onde oferece um norte a ser seguido no processo de ensino-aprendizagem e na interação do aluno com a realidade.

Inspirado nas ideias do suíço **Jean Piaget** (1896- 1980), o método procura instigar a curiosidade, já que o aluno é levado a encontrar as respostas a partir de seus próprios conhecimentos e de sua interação com a realidade e com os colegas.

O construtivismo propõe que o aluno participe ativamente do próprio aprendizado, mediante a experimentação, a pesquisa em grupo, o estimulo a dúvida e o desenvolvimento do raciocínio, entre outros procedimentos. A partir de sua ação, vai estabelecendo as propriedades dos objetos e construindo as características do mundo.

Noções como proporção, quantidade, causalidade, volume e outras, surgem da própria interação da criança com o meio em que vive. Vão sendo formados esquemas que lhe permitem agir sobre a realidade de um modo muito mais complexo do que podia fazer com seus reflexos iniciais, e sua conduta vai enriquecendo-se constantemente. Assim, constrói um mundo de objetos e de pessoas onde começa a ser capaz de fazer antecipações sobre o que irá acontecer.

O método enfatiza a importância do erro não como um tropeço, mas como um trampolim na rota da aprendizagem. A teoria condena a rigidez nos procedimentos de ensino, as avaliações padronizadas e a utilização de material didático demasiadamente estranho ao universo pessoal do aluno.

As disciplinas estão voltadas para a reflexão e alto-avaliação, portanto a escola não é considerada rígida.

Existem várias escolas utilizando este método. Mais do que uma linha pedagógica, o construtivismo é uma teoria psicológica que busca explicar como se modificam as estratégias de conhecimento do indivíduo no decorrer de sua vida.

Quadro 2 - Piaget

Jean Piaget (1896 – 1980)

Um dos mais importantes pesquisadores de educação e pedagogia, Jean Piaget nasceu na cidade de Neuchâtel (Suíça) em 9/08/1896 e morreu em 17/9/1980. Especializou-se em psicologia evolutiva e também no estudo de epistemologia genética. Seus estudos sobre pedagogia revolucionaram a educação, pois derrubou várias visões e teorias tradicionais relacionadas à aprendizagem.

Fonte: Disponível em: < http://www.coladaweb.com/pedagogia/jean-piaget>. Acesso: 20 de maio de 2015.

SUA TEORIA

Assimilação

É o processo cognitivo de colocar (classificar) novos eventos em esquemas existentes. É a incorporação de elementos do meio externo (objeto, acontecimento, ...) a um esquema ou estrutura do sujeito.

Em outras palavras, é o processo pelo qual o indivíduo cognitivamente capta o ambiente e o organiza possibilitando, assim, a ampliação de seus esquemas. Na assimilação o indivíduo usa as estruturas que já possui.

Acomodação

É a modificação de um esquema ou de uma estrutura em função das particularidades do objeto a ser assimilado.

A acomodação pode ser de duas formas, visto que se podem ter duas alternativas:

Criar um novo esquema no qual se possa encaixar o novo estímulo ou modificar um já existente de modo que o estímulo possa ser incluído nele.

Após ter havido a acomodação, o aluno tenta novamente encaixar o estímulo no esquema e aí ocorre a assimilação.

Por isso, a acomodação não é determinada pelo objeto e sim pela atividade do sujeito sobre este, para tentar assimilá-lo.

O balanço entre assimilação e acomodação é chamado de adaptação.

Equilibração

É o processo da passagem de uma situação de menor equilíbrio para uma de maior equilíbrio. Uma fonte de desequilíbrio ocorre quando se espera que uma situação ocorra de determinada maneira, e esta não acontece.

“O principal objetivo da Educação é criar indivíduos capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que as outras gerações fizeram”

Jean Piaget

“As estruturas operatórias da inteligência não são inatas”

Jean Piaget

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para que se possa colocar este projeto de estudo dos sólidos em prática, se faz necessário que se procure saber do alunado ao qual será aplicada a metodologia, se possuem pré-requisitos básicos importantes para o avanço dos conhecimentos do assunto. Caso não possuam os requisitos, deve-se apresentá-los os conceitos básicos que citaremos na sequência e caso já tenham estudado, terão com o andar do projeto a oportunidade de revisá-los, além disso, também serão necessários alguns conteúdos novos que também servirão de pré-requisito para as demonstrações que iremos fazer no desenvolver dos estudos.

Não nos atemos aqui a fazer nenhuma demonstração sobre estes pré-requisitos, até porque queremos apenas relembrar os assuntos que seguem:

3.1 **Semelhança de triângulos**

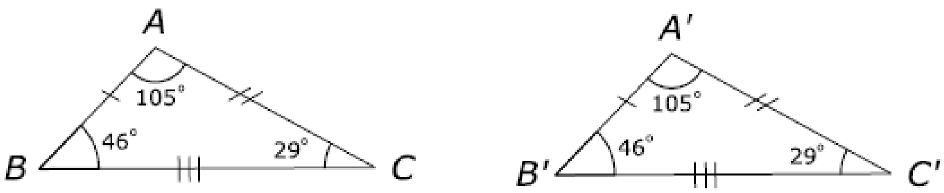
3.1.1 Congruência de triângulos

A ideia de congruência entre segmentos, ângulos e triângulos formou-se intuitivamente, levando-se em conta que dois segmentos, dois ângulos congruentes e dois triângulos congruentes podem ser superpostos por meio de um deslocamento conveniente.

O conceito abstrato de congruência entre triângulo é definido da seguinte maneira:

Dois triângulos são denominados congruentes se ordenadamente são congruentes os três lados e os três ângulos. **Exemplo:** os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

Figura 1 – Congruência de Triângulos



$$\text{Indicamos: } \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A'B'C' \text{ se } \begin{cases} AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \\ BC \equiv B'C' \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

Observação:
Em dois triângulos congruentes, são congruentes entre si:
a) os lados opostos a ângulos congruentes;
b) os ângulos opostos a lados congruentes;

3.1.2 Casos de congruência

A definição de congruência de triângulos fornecem cinco condições que devem ser satisfeitas para que os dois triângulos sejam congruentes. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes e estas condições são denominadas casos ou critérios de congruência.

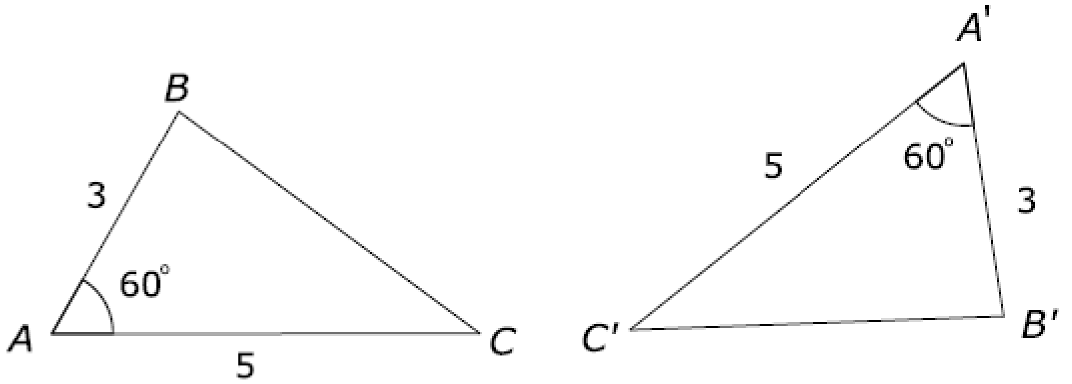
1º CASO (LAL)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esses dois lados, então eles são congruentes.

Este caso é normalmente dado como postulado e indica que se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre estes dois lados, então o lado restante e os dois ângulos também são ordenadamente congruentes.

EXEMPLO: Os triângulos ABC e A'B'C' da figura são congruentes pelo caso LAL.

Figura 2 – Congruência de Triângulos caso LAL



Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{c} AB \equiv A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC \equiv A'C' \end{array}\right. \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC \equiv B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array}\right.$$

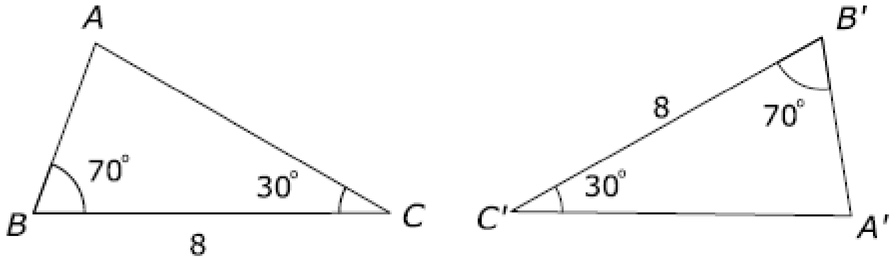
Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

2º CASO (ALA)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos, então eles são congruentes.

EXEMPLO: Os triângulos ABC e A'B'C' da figura são congruentes pelo caso ALA.

Figura 3 – Congruência de triângulos – caso ALA



Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{c}\hat{B} = \hat{B}\text{'} \\ BC \equiv B\text{'}C\text{'} \\ \hat{C} = \hat{C}\text{'}\end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A\text{'}B\text{'}C\text{'} \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c}AB \equiv A\text{'}B\text{'} \\ \hat{A} = \hat{A}\text{'} \\ AC \equiv A\text{'}C\text{'}\end{array}\right.$$

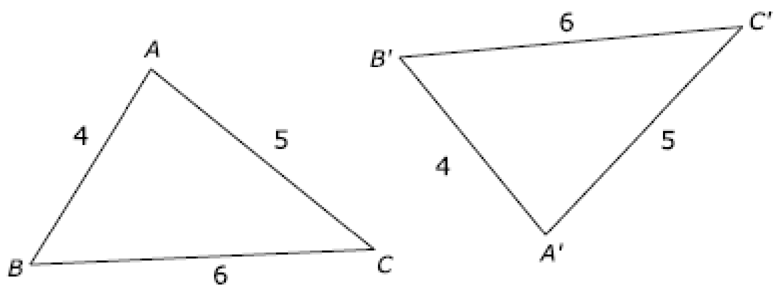
Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

3º CASO (LLL)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.

EXEMPLO: Os triângulos ABC e A'B'C' da figura são congruentes pelo caso LLL.

Figura 4 – Congruência de triângulos – caso LLL



Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{c}AB \equiv A\text{'}B\text{'} \\ AC \equiv A\text{'}C\text{'} \\ BC \equiv B\text{'}C\text{'}\end{array}\right. \underset{\text{LLL}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A\text{'}B\text{'}C\text{'} \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\hat{A} = \hat{A}\text{'} \\ \hat{B} = \hat{B}\text{'} \\ \hat{C} = \hat{C}\text{'}\end{array}\right.$$

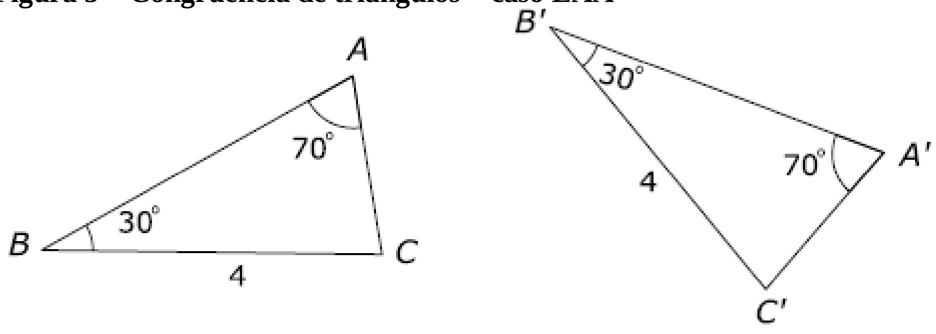
Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

4º CASO (LAA)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.

EXEMPLO: Os triângulos ABC e A'B'C' da figura são congruentes pelo caso LAA.

Figura 5 – Congruência de triângulos – caso LAA



Esquema de aplicação.

$$\left\{\begin{array}{c} BC \equiv B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array}\right. \underset{\text{LAAo}}{\Longrightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \underset{\text{Definição}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c} \hat{C} = \hat{C}' \\ AB \equiv A'B' \\ AC \equiv A'C' \end{array}\right.$$

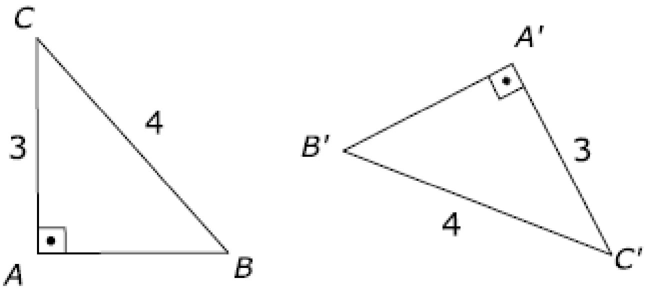
Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

5º CASO (CASO ESPECIAL)

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e uma hipotenusa, então eles são congruentes.

EXEMPLO: Os triângulos ABC e A'B'C' da figura são congruentes pelo caso especial.

Figura 6 – Congruência de triângulos – caso especial



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

Aplicação nos problemas

Se, ao resolver um problema, sabe-se que os elementos de dois triângulos verificam as condições de um dos casos de congruência:
1º) Pode-se afirmar que os triângulos são congruentes.

2º) Conclui-se daí que os outros elementos desses triângulos, que não se conhecem, são dois a dois congruentes.

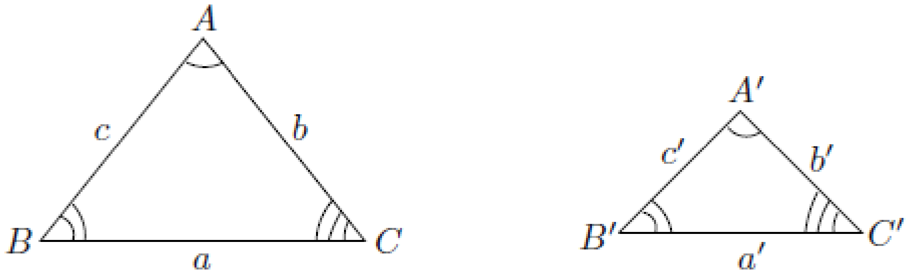
3.1.3 Semelhança de triângulos

DEFINIÇÃO

Dois triângulos são semelhantes se os três ângulos são ordenadamente congruentes e se os lados homólogos são proporcionais.

A figura mostra dois triângulos ABC e A'B'C' semelhantes. Lados homólogos são lados opostos a ângulos ordenadamente congruentes.

Figura 7 – Semelhança de triângulos



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

Os triângulos ABC e A'B'C' da figura são semelhantes.

$\hat{A} \equiv \widehat{A'}$ temos que os lados a e a' são homólogos

$\hat{B} \equiv \widehat{B'}$ temos que os lados b e b' são homólogos

$\hat{C} \equiv \widehat{C'}$ temos que os lados c e c' são homólogos

Vértices homólogos são os vértices de ângulos ordenadamente congruentes. Razão de semelhança é a razão de dois lados homólogos quaisquer.

Temos que ΔABC *é semelhante* $\Delta A'B'C'$ se $\hat{A} = \widehat{A'}$, $\hat{B} = \widehat{B'}$, $\hat{C} = \widehat{C'}$ e também $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, k é a razão de semelhança.

3.1.4 Casos de semelhança entre triângulos

1º CASO: AA

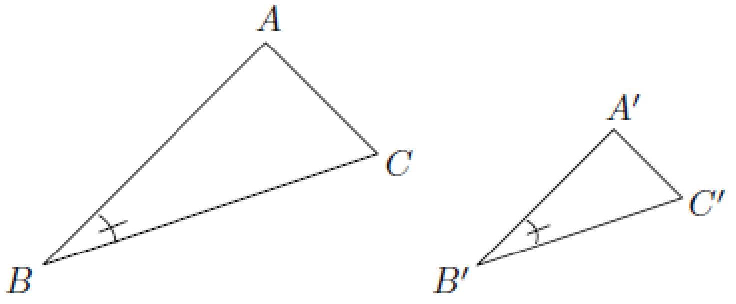
Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

2º CASO: LAL~

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Sejam os triângulos ABC e A’B’C’.

Figura 8 – Semelhança de triângulos – caso LAL



Então:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widehat{B} & = & \widehat{B'} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} & = & \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \end{array}\right. \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'\,.$$

Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

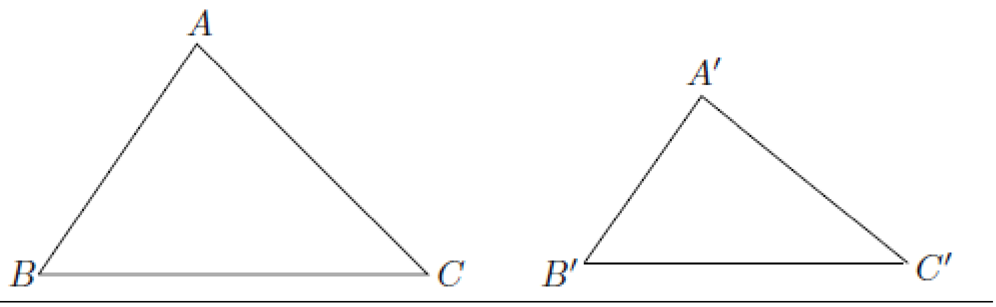
3º CASO: LLL~

Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então são semelhantes.

Sejam os triângulos ABC e A’B’C’ tal que:

Figura 9 – Semelhança de triângulos – caso LLL

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

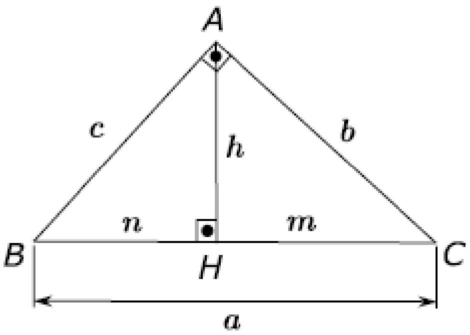
3.2 Relações métricas no triângulo retângulo

Aqui relembramos as equações que relacionam as medidas da hipotenusa, catetos, projeções dos catetos sobre a hipotenusa e altura relativa à hipotenusa.

3.2.1 Elementos

Considere a figura:

Figura 10 – Elementos do triângulo retângulo



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

$\overline{BC}$ = a é a hipotenusa, lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo.

$\overline{AB}$ = c e $\overline{AC}$ = b são os catetos.

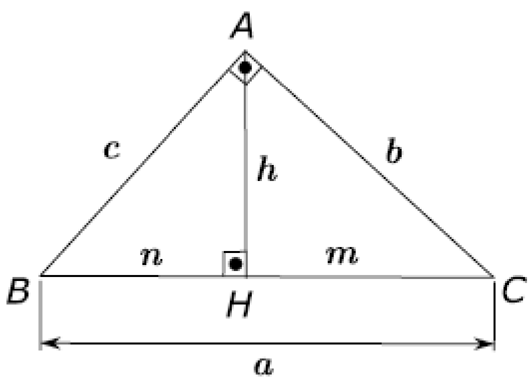
$\overline{AH}$ = h é a altura relativa a hipotenusa.

$\overline{BH}$ = n e $\overline{CH}$ = m são, respectivamente, as projeções dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$.

3.2.2 Relações

No triângulo retângulo ABC da figura, sendo:

Figura 11 – Relações métricas no triângulo retângulo



$$\overline{BC} = a, \quad \overline{AC} = b,$$
$$\overline{AB} = c, \quad \overline{AH} = h,$$
$$\overline{BH} = n, \quad \text{e} \quad \overline{CH} = m$$

Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

Então, valem as seguintes relações:

1) m + n = a

2) $b^2 = a \cdot m$

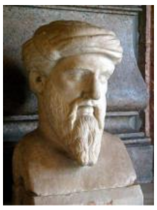
3) $b \cdot c = a \cdot h$

4) $c^2 = a \cdot n$

5) $b^2 + c^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras)

6) $h^2 = m \cdot n$

Quadro 3 – Pitágoras de Samus



Nome completo	Ὁ Πυθαγόρας

Pitágoras de Samos (571 a.c. – 570 a.c, 500 a.c. – 490 a.c.) foi um filósofo e matemático grego.

Pitágoras foi o fundador de uma escola de pensamento grega denominada em sua homenagem de **pitagórica**. Teve como sua principal mestra, a filósofa e matemática **Temstocléia.**

Fonte: Disponível em: < https://pt.wikipedia.org>. Acesso em: 18/05/2015

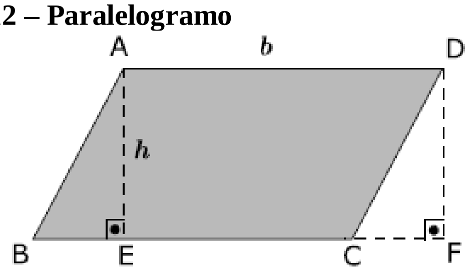
3.3 Áreas de superfícies planas

Superfície de um polígono é a reunião do polígono com o seu interior.

Área de uma superfície é um número real positivo associado a essa superfície. A área expressa a medida de uma superfície numa certa unidade.

3.3.1 Área do paralelogramo

Figura 12 – Paralelogramo



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

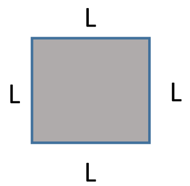
Paralelogramos são quadriláteros com lados opostos paralelos.

Todo paralelogramo tem área equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo.

A = b.h

3.3.2 Área do quadrado

Figura 13 – Quadrado



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

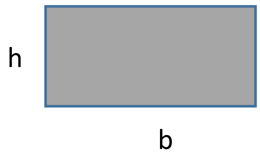
Lembrando que o quadrado é o paralelogramo que possui todos os lados e ângulos com mesma medida.

A área da superfície de um quadrado é o produto entre as medidas dos seus lados, isto é,

$$A = L^2$$

3.3.3 Área do retângulo

Figura 14 – Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

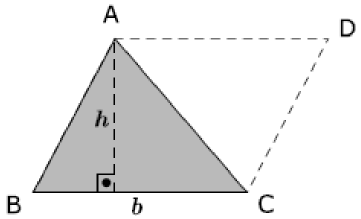
Retângulo é o paralelogramo com todos ângulos internos iguais.

A área de um retângulo é o produto de suas dimensões.

$$A = b.h$$

3.3.4 Área do triângulo

Figura 15 – Triângulo



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

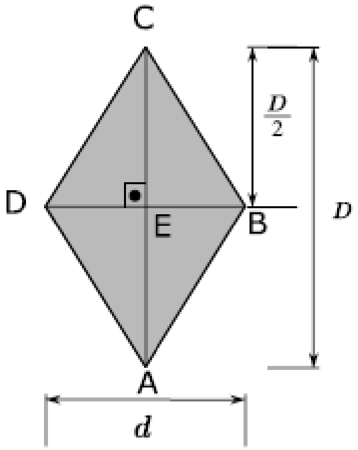
Triângulos são polígonos com três lados.

A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

3.3.5 Área do losango

Figura 16 – Losango



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

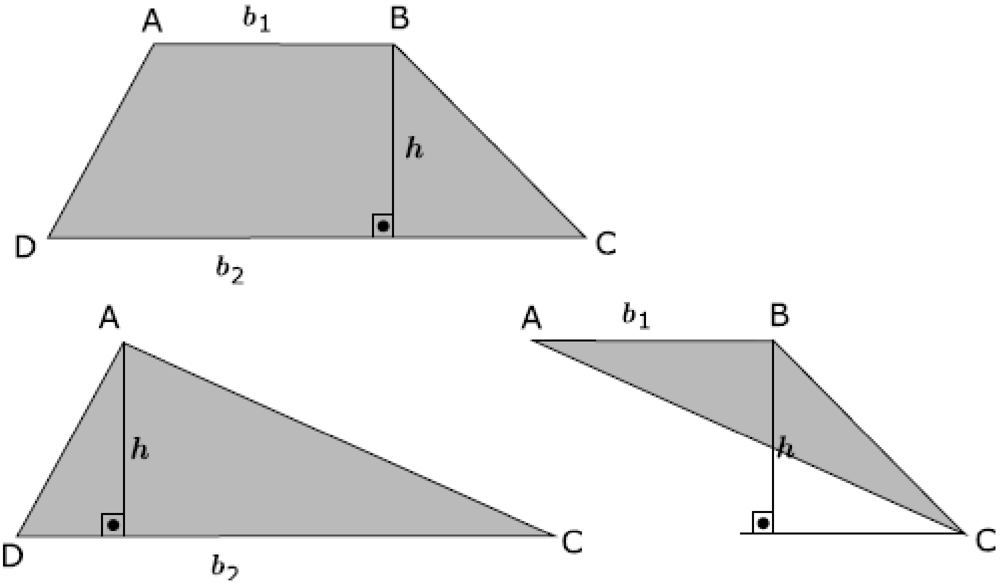
Losango é o quadrilátero com todos os lados iguais.

A área de um losango é igual á metade do produto das diagonais.

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

3.3.6 Área do trapézio

Figura 17 – Trapézio



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

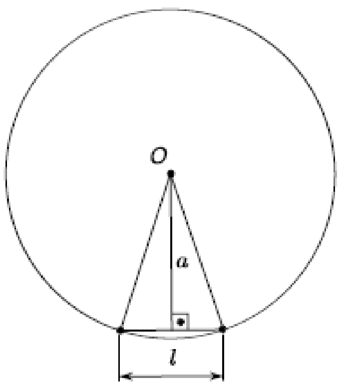
Trapézio é o quadrilátero que possui dois lados paralelos.

A área de um trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases.

$$A_{Trapézio} = \frac{b_2 \cdot h}{2} + \frac{b_1 \cdot h}{2} \Rightarrow A_{Trapézio} = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$$

3.3.7 Área de um polígono regular

Figura 18 – Polígono regular inscrito



Considere em um polígono regular: :

$n \rightarrow$ número de lados,
$a \rightarrow$ medida do apótema
$l \rightarrow$ medida do lado e
$p \rightarrow$ semiperímetro.

Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

Polígono Regular é todo polígono que possuem todos os lados com mesma medida e todos são inscritíveis numa circunferência.

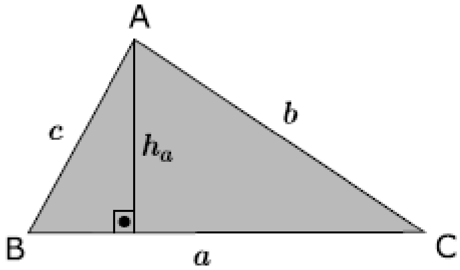
A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

$$A_{Polígono} = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}$$

$$A_{Polígono} = \frac{2pa}{2} \Rightarrow A_{Polígono} = pa$$

3.3.8 Área de um triângulo em função dos lados

Figura 19 – Triângulo



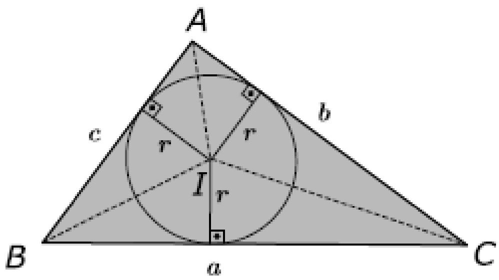
Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ABC e $p = \frac{a+b+c}{2}$.

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b(p-c)}$$

3.3.9 Área de um triângulo em função dos lados e do raio da circunferência inscrita

Figura 20 – Triângulo circunscrito

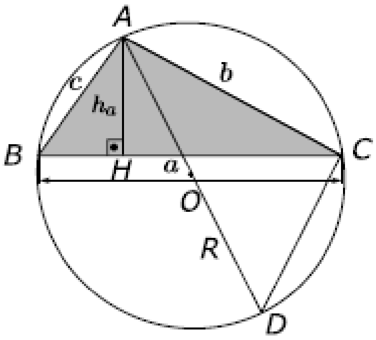


Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

$$A = p \cdot r$$

3.3.10 Área de um triângulo em função dos lados e do raio do círculo circunscrito

Figura 21 – Triângulo inscrito



Fonte: PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

$$A = \frac{abc}{4R}$$

3.3.11 Área do círculo

A área de um círculo é o produto do número π pelo quadrado ao raio.

$$A = \pi \cdot R^2$$

3.4 Comprimento da circunferência (perímetro do círculo)

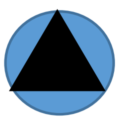
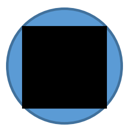
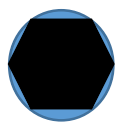
Corresponde à distância percorrida sobre a circunferência ao se completar uma volta em torno do círculo.

$$C = 2\pi R$$

3.5 Polígonos regulares inscritos

Podemos resumir aqui, como revisão, relações que devem ser demonstradas anteriormente quando for dado este conteúdo, na tabela que segue:

Tabela 1 – Polígonos Regulares Inscritos

POLÍGONO	TRIÂNGULO EQUILÁTERO	QUADRADO	HEXÁGONO
FIGURA			
APÓTEMA	$a_3 = \frac{r}{2}$	$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$	$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$
LADO	$L_3 = r\sqrt{3}$	$L_4 = r\sqrt{2}$	$L_6 = r$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

3.6 Princípio de Cavalieri

Suponhamos dois sólidos S_1 e S_2 apoiados em um plano α. Consideremos também o plano β, paralelo a α, que, ao seccionar S_1, também secciona S_2, determinando duas regiões planas de $A_1 = A_2$.

Nessas condições, podemos afirmar que, **se para todo plano β temos $A_1 = A_2$, então: volume S_1 = volume S_2**

Quadro 4 – História

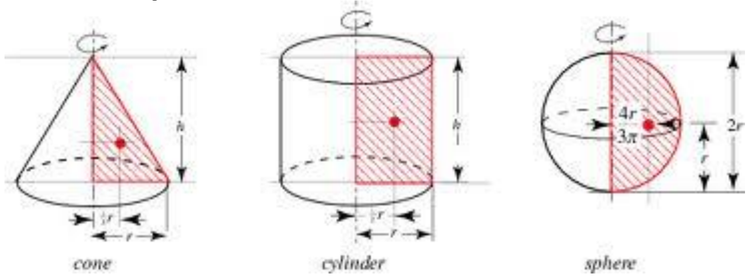
História: Apesar do princípio levar o nome de **Cavalieri**, ele já era conhecido dos gregos antigos, tendo sido utilizado por **Arquimedes**, que relatou que ele já tinha sido empregado ainda antes por **Eudoxo** e **Demócrito** quando calcularam o volume de um **cone**.

Fonte: Disponível em: < https://pt.wikipedia.org>. Acesso em: 18/05/2015

3.7 1º teorema de Pappus-Guldinus

No século IV d.C., Pappus, um matemático grego de Alexandria, desenvolveu duas fórmulas que fornecem meios relativamente simples de calcular áreas e volumes, respectivamente, de superfícies e volumes de revolução. Estas fórmulas são atalhos para cálculos que, de outra forma, seriam extensos.

Figura 22 – Revolução do cone, do cilindro e da esfera



Fonte: Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfffEAF/teorema-pappus>. Acesso em: 04 julho 2015

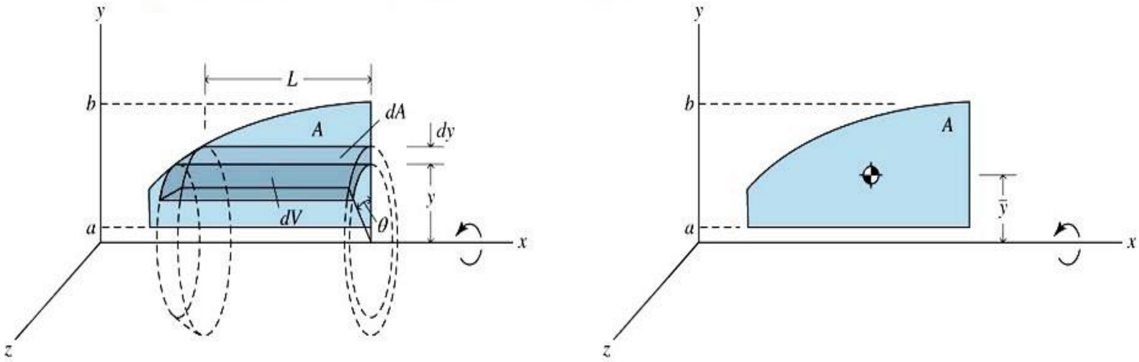
Se um arco $\boldsymbol{C}$ de uma curva suave localizada em um plano, for girado em um ângulo θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ em torno de um eixo localizado em um plano, e que não intercepta o arco $\boldsymbol{C}$, a área da superfície gerada pelo arco $\boldsymbol{C}$ à medida que ele gira o ângulo θ é igual ao comprimento de $\boldsymbol{C}$ vezes o comprimento da trajetória percorrida pelo centroide de $\boldsymbol{C}$ durante a rotação θ.

Se o comprimento do arco é $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{\rho}$ é a distância do eixo de rotação ao centroide do arco, a área da superfície $\boldsymbol{S}$ gerada pelo arco à medida que ele gira em um ângulo θ é:

$$S = L.\rho.\theta$$

3.8 2º teorema de Pappus-Guldinus

Figura 23 – Revolução de figuras planas



Fonte: Disponível em:< http://www.ufjf.br/lrm/files/2009/04/aula19_mec_02_09.pdf>. Acesso em: 23 julho 2016

Se uma área ***A*** localizada em um plano for girada em um ângulo θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) em torno de um eixo localizado em um plano que não intercepta a área ***A***, o volume gerado pela área ***A***, à medida em que ele gira o ângulo θ, é igual à área ***A***vezes o comprimento da trajetória percorrida pelo centróide de ***A*** durante a rotação θ.

Se $\boldsymbol{\rho}$ é a distância do eixo de rotação ao centróide da área plana, o volume ***V*** gerado pela área, à medida em que ele gira em um ângulo θ é:

$$V = A\rho\theta$$

Esse segundo teorema servirá como base para uma variante que usaremos para deduções dos volumes do cilindro, cone e esfera.

Quadro 5 – Pappus

Pappus ou **Papo de Alexandria** (em grego Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς, transl. *Páppos hò Alexandreýs*) foi um egípcio helenizado, nascido em **Alexandria**, **Egito** e um dos mais importantes **matemáticos** helenísticos da antiguidade, conhecido por seu trabalho *Coleção* (*Synagoga*, c. 340). Entretanto, muito pouco se conhece sobre sua vida, mas os escritos gravados sugerem que foi professor.

Fonte: Disponível em: < https://pt.wikipedia.org>. Acesso em: 11 agosto 2015

Quadro 6 – Paul Gudin

Paul Guldin

Nome original **Habakkuk Guldin** (12 de junho de 1577 – 3 de novembro de 1643) foi um **matemático** e **astrônomo jesuíta suíço.**

Foi professor de matemática em **Graz** e **Viena**.

Formulou o **teorema de Guldinus**, determinando a superfície e o volume de um **sólido de revolução**. É conhecido por seu trabalho colaborativo com **Johannes Kepler**.

Fonte: Disponível em: < https://pt.wikipedia.org>. Acesso em: 11 agosto 2015

OBSERVAÇÃO: Na verdade para utilizarmos esses teoremas, faremos adaptações para o ensino médio que denominaremos de “variantes” do teorema de PAPPUS.

4 A TABELA

O processo de ensino-aprendizagem aqui proposto segue um roteiro de etapas das quais a maioria delas correspondem as linhas de uma tabela comparativa entre os sólidos geométricos (ANEXO I) que é preenchida pelos alunos no decorrer das pesquisas, construções, observações, comparações, atividades, trabalhos e análises das demonstrações de fórmulas para cálculos nos respectivos sólidos.

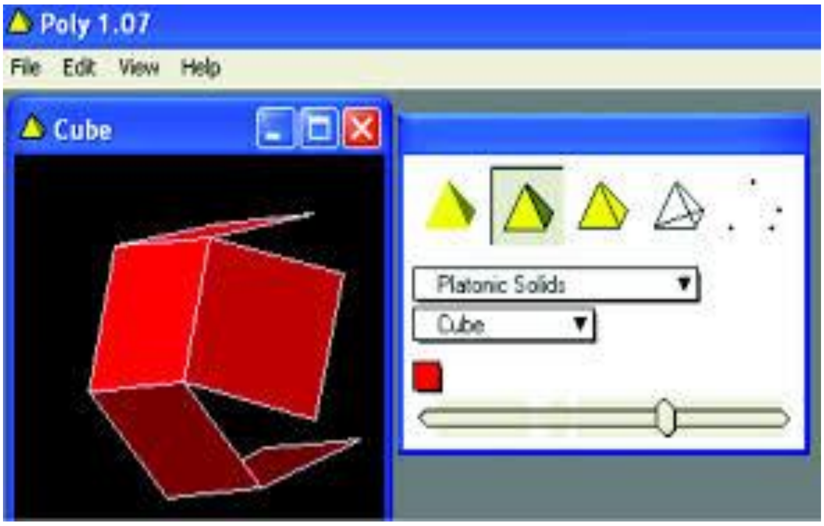
Na construção da tabela, objetivamos incluir nela, a maior abrangência possível sobre os conteúdos que envolvem os sólidos geométricos. Apresentamos nas colunas os sólidos em sequência previamente interessante para o caminhar dos estudos: Prisma, Pirâmide, Cilindro, Cone e esfera, subdividindo cada tipo de sólido em seus casos particulares e curiosidades que possam apresentar. Nas linhas da tabela, temos as etapas do nosso trabalho que objetivam observar, construir ou deduzir informações e particularidades de cada sólido. Na primeira etapa, propomos a primeira atividade, em grupos os alunos irão se utilizar de recursos tecnológicos para obter as planificação dos sólidos, sugerimos os softwares POLY e GEOGEBRA, no POLY se pode ver com muita facilidade a planificação de alguns destes sólidos o que é bom para os alunos e professores que possuem mais dificuldades de trabalhar com computadores, podendo assim serem inseridos num processo de visualização tridimensional e, portanto, melhorar a possibilidade de conseguirem a planificação de sólidos mais complexos. O GEOGEBRA também pode ser usado, porém, requer um pouco mais de habilidade, podendo ser um obstáculo para alguns; porém, a ideia é que possam se familiarizar com a ferramenta. Ainda na primeira etapa, é proposta a segunda atividade, onde os alunos de posse das planificações dos sólidos, são convidados a construí-los, ficando a critério do professor considerar ou não essa atividade como avaliativa, os alunos têm liberdade de escolha de quais matérias vão usar. Na segunda etapa, vem o esboço do sólido, onde o aluno tendo visto a planificação e construído o sólido, irá agora desenhá-lo no plano individualmente como uma terceira atividade, uma tarefa que se torna complicada para alguns alunos e especificamente para alguns sólidos, mas que com a visualização e o manuseio prévio, a situação melhora consideravelmente, antes de iniciar a terceira etapa, propomos também uma quarta atividade na qual os alunos retornam aos seus grupos para pesquisarem a presença desses sólidos nos variados contextos e interdisciplinaridade . Na terceira etapa são observados os elementos principais de cada sólido, tanto no esboço como nos sólidos construídos que facilitam a visualização. Na quarta etapa, observamos e deduzimos as fórmulas para cálculo dos elementos específicos de cada sólido (Exemplos: diagonais, geratrizes, etc), se houver. Na quinta etapa a área da base, onde podemos revisar as áreas das figuras planas, polígonos regulares inscritos, bem como introduzir a ideia de limite. Na sexta etapa estudamos as áreas laterais de cada sólido com suas particularidades, deduzindo cada fórmula para os cálculos dessas áreas laterais, percebemos o surgimento de outra figura plana diferente das estudas na etapa anterior para o cálculo das áreas da base, como o setor circular no cones e surgi também o cálculo de uma área muito interessante que é a superfície esférica, nesse momento é que podemos trabalhar a primeira variante do teorema de Pappus para deduzir a área da superfície lateral cilíndrica, cônica e esférica. Na sétima etapa, estudamos a área total, aqui fica mais fácil pois, são simples somas do que já foi estudado na área da base e na área lateral e, por fim, estudamos na oitava - última etapa -, os volumes de cada sólido, onde podemos trabalhar o princípio de Cavaliere e a segunda variante do teorema de Pappus para deduzirmos também as fórmulas dos volumes do cilindro, cone e esfera.

4.1 Preenchendo a primeira linha da tabela

O preenchimento da tabela se inicia com uma primeira atividade, onde os alunos formam grupos para obter as planificações de cada sólido; sugerimos para isso o uso dos softwares POLY e GEOGEBRA, nos quais os alunos podem facilmente conseguir visualizar essas planificações. Não queremos que simplesmente obtenham as planificações prontas, mas que realmente possam perceber nessas ferramentas a conversão dos sólidos tridimensionais em suas respectivas planificações, o professor deve antecipadamente procurar conhecer melhor esses programas para ajudá-los em eventuais dúvidas e, se possível, ter à sua disposição um laboratório de informática; caso não disponha, os alunos podem fazer em seus computadores pessoais sem grandes problemas.

No POLY essa planificação é obtida; movendo tranquilamente uma barra de rolagem, o que torna a tarefa bastante simples para alunos e professores que não são familiarizados com tecnologias da informação. Movendo-se esta barra, ver-se como uma animação todo o processo de transição do sólido a sua planificação, além disso pode-se também girar o sólido virtualmente facilitando a visualização dele em vários ângulos.

Figura 24 – Plataforma Poly



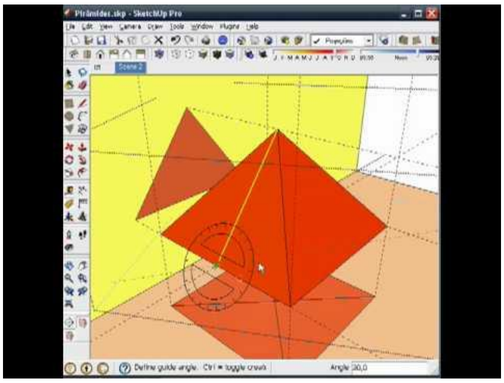
Fonte: Disponível em: <http://poly-pro.softonic.com.br/>. Acesso em: 20 de agosto de 2015.

Esse software pode ser baixado facilmente pelos alunos e professores, através do link abaixo:

http://www.peda.com/download/

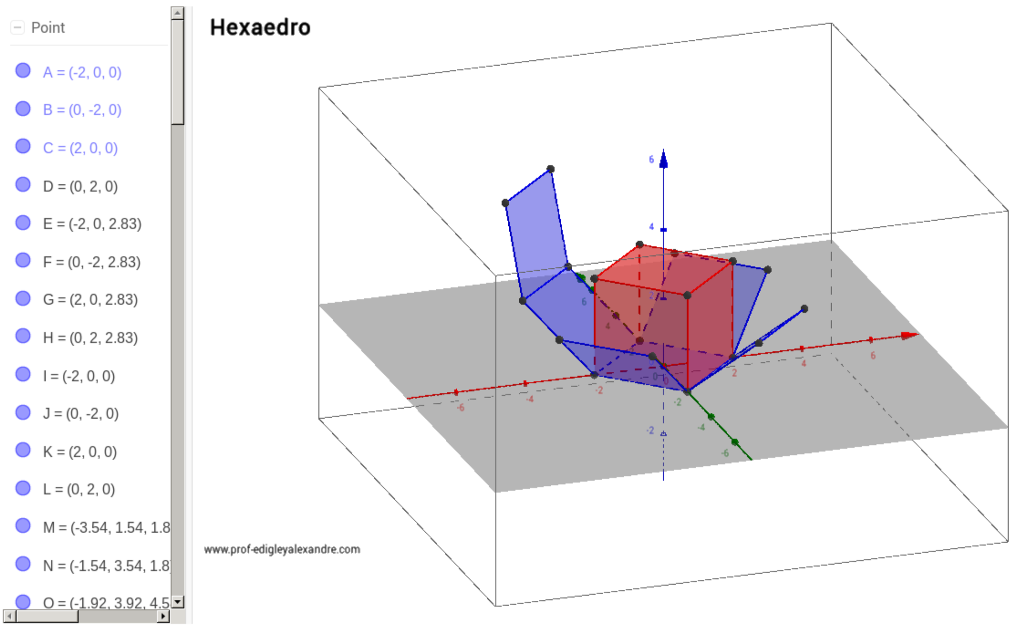
Porém, dependendo da versão pode não ter a planificação de todos os sólidos, devido a isso, o GEOGEBRA pode ser um outro software complementar para obter as planificações dos demais sólidos, no entanto, nele, o aluno, se utilizando de suas ferramentas, deve, primeiramente, construir virtualmente cada sólido para depois obter sua planificação; esse programa oferece um pouco mais de habilidade operacional, mas nada que não possa ser superado, entretanto, por ser mais sofisticado pode-se ver os sólidos vasados, girá-los, criar uma animação e mostrar com bastante detalhes ângulos retos, triângulos retângulos, semelhanças de triângulos, diagonais, entre outros elementos que poderão ajudar no caminhar dos estudos de cada sólido.

Figura 25 – Plataformas Geogebra



Fonte: Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=_fDuC6JD2KA>. Acesso em: 20 de agosto de 2015.

Figura 26 – Plataformas Geogebra – Planificação do Cubo



Fonte: Disponível em: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/trabalhos.html>. Acesso em: 20 de agosto de 2015.

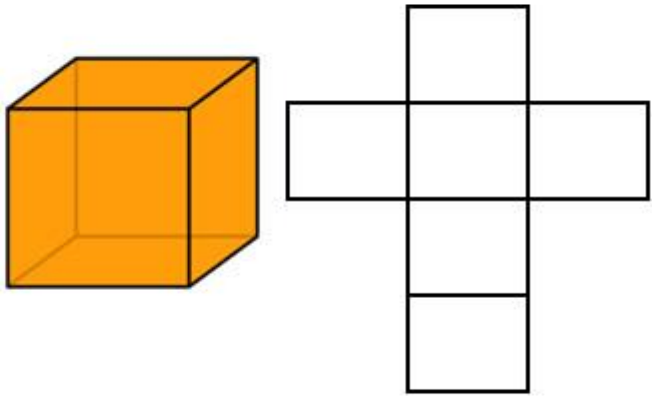
Esse software pode ser baixado através do link abaixo:

http://www.baixaki.com.br/download/geogebra.htm

Depois dos alunos conseguirem as planificações de cada sólido, os alunos irão transferir estas planificações para o papel, podendo colocar esses desenhos das planificações na tabela. Deverão obter planificações como as que seguem:

4.1.1 Planificação do cubo

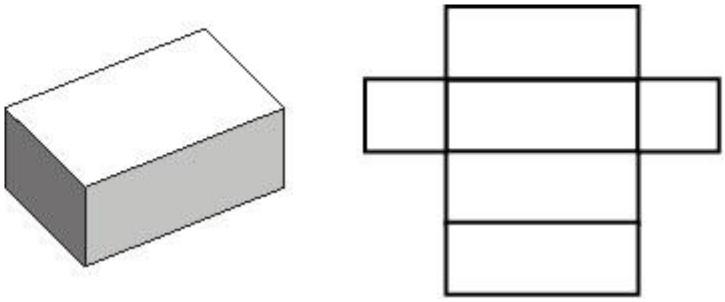
Figura 27 – Planificação do Cubo



Fonte: Disponível em: <http://escolakids.uol.com.br/planificacao-de-solidos-geometricos.htm>. Acesso em: 26 de agosto de 2015.

4.1.2 Planificação do paralelepípedo

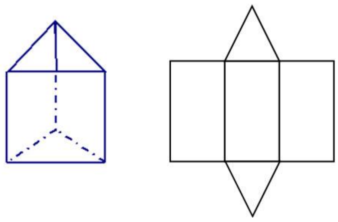
Figura 28 – Planificação do Paralelepípedo



Fonte: Disponível em: <http://escolakids.uol.com.br/planificacao-de-solidos-geometricos.htm>. Acesso em: 26 de agosto de 2015.

4.1.3 Planificação de um prisma de base triangular

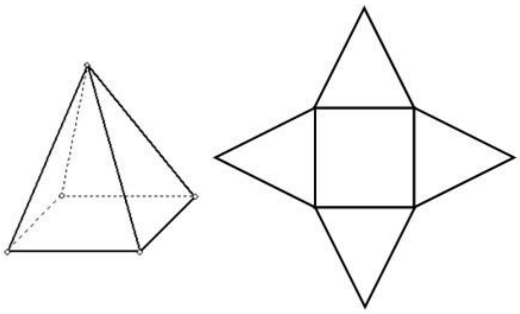
Figura 29 – Planificação de um Prisma de Base Triangular



Fonte: Disponível em: <http://escolakids.uol.com.br/planificacao-de-solidos-geometricos.htm>. Acesso em: 26 de agosto de 2015.

4.1.4 Planificação de uma pirâmide de base quadrada

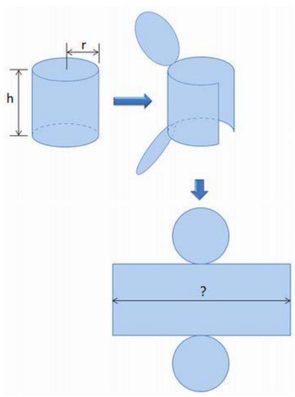
Figura 30 – Planificação de uma Pirâmide de Base Quadrada



Fonte: Disponível em: <http://escolakids.uol.com.br/planificacao-de-solidos-geometricos.htm>. Acesso em: 26 de agosto de 2015.

4.1.5 Planificação de um cilindro circular reto

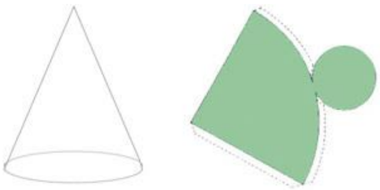
Figura 31 – Planificação do Cilindro Circular Reto



Fonte: Disponível em: <http://kaubysantos.blogspot.com.br/2011/11/dados-da-aula-o-que-o-aluno-podera.html>. Acesso em: 03 de Setembro de 2015.

4.1.6 Planificação de um cone circular reto

Figura 32 – Planificação do Cone Circular Reto



Fonte: Disponível em: <http://escolakids.uol.com.br/planificacao-de-solidos-geometricos.htm>. Acesso em: 03 de Setembro de 2015.

4.1.7 Esfera

Figura 33 – Esfera

Fonte: Disponível em: <http://pt.slideshare.net/gomesnelma/slidos-e-suas-planificaes>. Acesso em: 03 de Setembro de 2015.

A esfera não tem planificação.

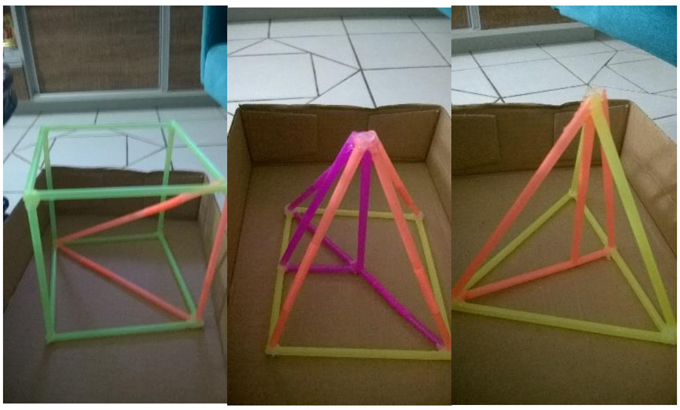
Chega-se, então, o momento da segunda atividade, na qual os alunos farão a construção real de cada sólido, fica em aberto o material que usarão para construir esses sólidos; pode-se solicitar deles que, essas construção, apresentem os elementos constituintes de cada sólido: diagonais, diâmetros, triângulos, trapézios, etc.

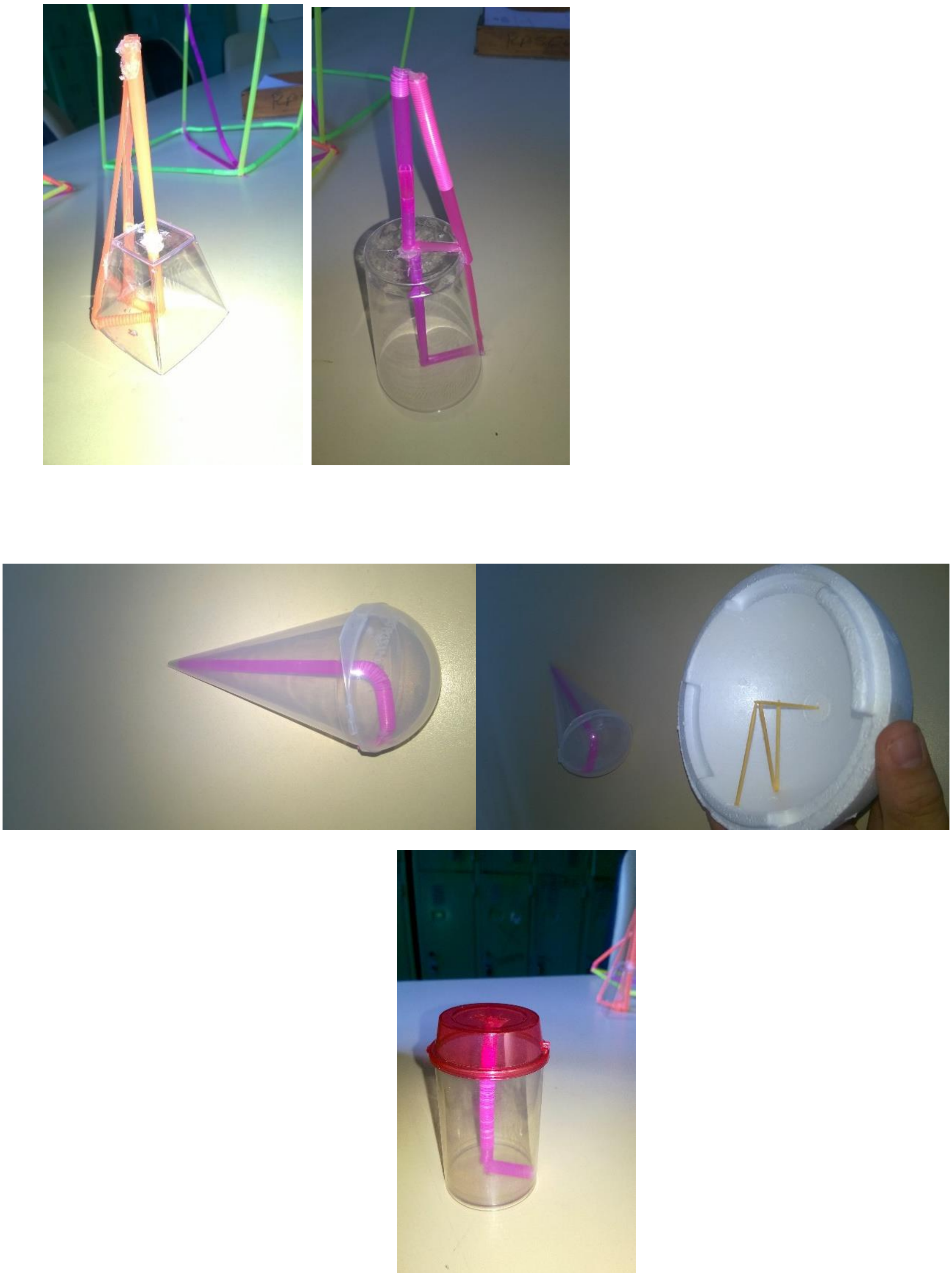
Fotos 1 – Alunos e Suas Construções

Fonte: Tiradas pelo autor, 2015.

4.1.8 Sólidos Vazados

Fotos 2 – Sólidos Vazados





Fonte: Fotos tiradas pelo autor – Sólidos construídos pelos alunos. 2015.

A partir destas construções é que se torna muito interessante o estudo de todos os sólidos, conjuntamente, pois, assim o aluno pode nitidamente perceber as semelhanças e diferenças entre os sólidos e assim ter parâmetros para distingui-los e classificá-los de acordo com suas características próprias.

De acordo com o livro “A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO” vol. 2 dos autores: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, com base nessas construções podemos mostrar aos alunos as semelhanças e diferenças que existem entre os sólidos: pirâmides, cones, prismas e cilindros. Mostrar que a construção das pirâmides e cones partem do mesmo princípio e dos prismas e cilindros também. Além disso como aposto aqui podemos comentar que as pirâmides são casos particulares dos cones, pois, em um cone a base pode ser formada por qualquer região delimitada por uma curva fechada e simples (que não corta a si mesma), o mesmo acontecendo entre prismas e cilindros, e dizer que os cones de bases curvas mais importante que focaremos são os cones circulares, nos quais as bases são círculos, e os cilindros também. Como também podemos trazer a noção de limites, sugerindo que os cones e cilindros circulares podem ser obtidos de pirâmides e prismas regulares, respectivamente, com o número de lados da base arbitrariamente grande.

Essas construções também são base para as posteriores identificações dos elementos que constituem cada sólido, bem como, para demonstrações das fórmulas.

4.2. Preenchendo a segunda linha da tabela

Agora de posse das planificações e das construções dos sólidos, vem a terceira atividade a qual consiste em desenhar cada sólido no plano, de maneira a identificar cada parte dele; se esse projeto for aplicado em curso técnico, pode-se, nesse momento, criar uma interdisciplinaridade com o professor de Desenho Técnico, este profissional pode ajudar com técnicas interessantes que irão contribuir para concluir o processo.

Nessa atividade, os alunos irão perceber que o esboço é diferente da planificação; nesse momento, eles têm que desenhar uma figura tridimensional no plano, concomitantemente, apresentamos as dificuldades dos professores e editoras de livros em representarem as figuras espaciais no plano e principalmente em oferecer, com esses desenhos, a possibilidade de visualizarem ângulos retos que formam triângulos retângulos, diagonais, trapézios, semelhanças de triângulos, entre outras; e, com isso, ressaltamos a importância do uso de ferramentas de visualização, sejam elas advindas de recursos tecnológicos ou de construções reais convenientes. Podemos mostrar para eles livros antigos e novos, para compararem e perceberem as diferenças existentes nas ilustrações desses livros, não só em geometria como também em outros assuntos, mostrando que a evolução dessas ilustrações ocorreram devido aos avanços dos recursos computacionais que proporcionaram o advento de novos softwares e aplicativos tão favorecedores ao processo do ensino-aprendizagem.

Essa atividade de esboçar as figuras espaciais no plano é a maior dificuldade encontrada por grande parte dos alunos nas turmas que lecionamos e, mesmo quando o aluno procura estudar por livros, ele também se depara com estas figuras espaciais esboçadas no plano, logo, o problema de visualização continua; este é também o fator mais preponderante na dificuldade dos professores de matemática em conseguir ensinar de maneira que se estimule o aluno a compreender bem o conteúdo de Geometria Espacial.

Porém, seguindo o caminho traçado até aqui, mesmo que o aluno não tenha uma boa habilidade em desenho ou uma boa concepção visual das figuras tridimensionais, o esboço vai se tornar uma mera representação pois ele já teve antecipadamente a oportunidade de ver a planificação, construir os sólidos e manuseá-los, inclusive podendo até usá-los para observação durante o desenho, o que ajuda consideravelmente pois, ele pode visualizar nos sólidos, construídos por eles mesmo, todos os elementos que ele deseja desenhar, essa familiarização com os sólidos também irá ajudar bastante nas deduções que precisaremos fazer mais à frente.

Passados esses processos de obtenção das planificações, das construções e dos esboços, podemos sugerir uma quarta atividade que consiste em uma pesquisa, na qual os alunos deverão buscar através de consultas em livros ou sites a presença destes sólidos na natureza ou até mesmo nas construções humanas, comentar as curiosidades, transcorrer sobre cada situação, bem como tirar suas conclusões diante dos casos. Nessa atividade surge naturalmente a interdisciplinaridade com a História, a engenharia, a arquitetura, quando se observa desde as construções antigas até as mais modernas; com a Biologia e a Geologia, quando se observa algumas espécies vegetais e algumas formações rochosas e também em construções animais como por exemplo as colmeias das abelhas; com a Química, nas estruturas moleculares, como a constituição tetraédrica do metano, tetracloreto de carbono e outros, entre tantos temas mais que podem surgir, como as embalagens que usamos, móveis, etc.

4.3 Preenchendo a terceira linha da tabela

Nesta linha da tabela, usando os sólidos construídos pelos alunos, o professor pode apresentar com muito mais facilidade e detalhes os elementos principais de cada sólido, podendo ainda pedir para que eles possam identificar estes elementos também nos esboços que eles fizeram dos sólidos no plano e também nas suas respectivas planificações, se necessário. Isso irá fazer com que eles possam treinar a visualização de figuras espaciais esboçadas no plano, como melhorar a capacidade de desenhá-las.

Nos referimos aqui, como elementos principais: os vértices, as arestas, as faces (bases e faces laterais), os lados, as diagonais, os apótemas, as geratrizes, os raios, os diâmetros, as alturas, entre outros.

O objetivo dessa linha da tabela não é fazer deduções de fórmulas de cálculos de nenhum destes elementos dos sólidos, mas, pura e simplesmente, a observação desses elementos que fazem parte de cada um deles para que os alunos possam reconhecê-los e identificá-los nos respectivos sólidos.

Quando comparam os sólidos, os alunos percebem que alguns elementos estão presentes em alguns deles e não estão em outros, percebem também que alguns desses elementos citados são específicos de determinado sólido, como por exemplo, as diagonais nos prismas.

Quando observam as semelhanças e diferenças, notam ainda que os prismas se assemelham pela base com as pirâmides e se diferenciam porque o prisma apresenta outra base idêntica, interligadas pelas faces laterais, como se transladasse um polígono no espaço para obtê-lo, traz-se aí a noção de translação, contextualizando com a Física, enquanto que na pirâmide a outra base é substituída por um ponto como se os pontos periféricos do polígono convergissem no espaço para este ponto; deste modo, a analogia da mesma situação entre o cilindro e o cone.

Neste momento, pode-se também trazer a ideia de limite, sugerindo que o prisma ou a pirâmide possa ter uma base poligonal regular tendendo a possuir infinitos lados, o que acontecerá com o prisma ou com a pirâmide? Facilmente, compreenderão que a base tenderá para um círculo fazendo com que o prisma tenda para um cilindro e, do mesmo modo, a pirâmide tenda para um cone.

Essa mesma linha de raciocínio será usada com bastante propriedade e aplicação mais adiante quando iremos deduzir a área da base do cilindro e do cone que é exatamente a do círculo, usando também uma fórmula que utilizamos para o cálculo da área de polígonos regulares, tema este previamente abordado com os alunos e oportunamente revisado nesse novo contexto.

Em síntese, os alunos percebem que a esfera se diferencia dos sólidos supracitados por possuir sua superfície limitante totalmente curva e que portanto, não possui vértices e nem arestas, apenas podemos apontar como elementos para ela: o raio, o diâmetro e sua superfície.

4.4 Preenchendo a quarta linha da tabela

A partir desta linha da tabela começamos as deduções das fórmulas para os devidos cálculos com o objetivo de encontrar as diagonais nos prismas, especialmente no cubo e no paralelepípedo, as relações entre os elementos das pirâmides, as relações entre os elementos dos cones, explorando ao máximo as deduções em cada caso e oportunizando os alunos a mais deduções que eles possam apresentar como dúvidas.

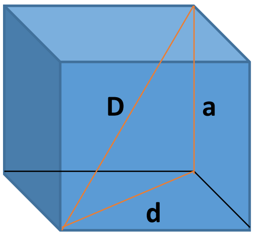
Novamente aqui, os alunos vão sentir a importância de ter passado por todo o processo de construção e esboço dos sólidos, mas, nesse momento, se torna mais produtiva uma visualização com os sólidos vazados onde se possa destacar os respectivos elementos de cada sólido, isso pode ser feito, construindo os sólidos com canudos ou palitos, por exemplo, formando as arestas e diagonais para os prismas, para as pirâmides e tronco de pirâmides, os canudos ou palitos representam, além das arestas, os apótemas, as diagonais das bases e a alturas, para o cone e tronco de cone, podemos utilizar um copo transparente como base para projetar a ideia do cone usando os canudos ou palitos para destacar raios, alturas e geratrizes. Além desse meio, pode-se usar também o GEOGEBRA, para a construção desses sólidos, destacando nessas construções os elementos supracitados, o uso desse meio irá depender dos recursos como: computadores, projetor ou lousa eletrônica, os quais deverão ser disponibilizados pela escola, na falta desses recursos, o primeiro se torna mais viável.

Seguiremos com as deduções na sequência abaixo.

4.4.1 Diagonal do cubo

Chamando-se a medida das arestas do cubo de **a**, a medida da diagonal de qualquer uma das face de **d** e a medida da diagonal do cubo de **D**, conforme a figura:

Figura 34 – Cubo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

OBSERVAÇÃO: A figura aqui serve apenas de ilustração, pois, na nossa proposta de estudo, tem-se as ferramentas necessárias como:

4.4.2 Sólido vazado

Foto 3 – Cubo vazado

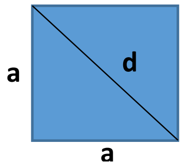
Fonte: Foto tirada pelo autor – sólido construído pelos alunos, 2015.

Ou o uso do GEOGEBRA, para que os alunos percebam que o triângulo formado pelos lados **a**, **d** e **D** é um triângulo retângulo com hipotenusa em **D**, e que portanto, pode-se usar o **teorema de Pitágoras** para se estabelecer a relação:

$$D^2 = d^2 + a^2 \quad (I)$$

Como **d** é a diagonal de um quadrado de lado **a**, assunto anteriormente estudado, sendo revisado aqui, temos:

Figura 35 – Quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Novamente, podemos usar o **teorema de Pitágoras** e dizer que:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

Substituindo em I, temos:

$$D^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

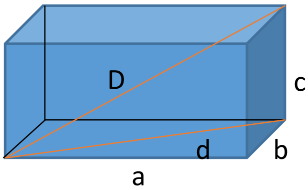
E que, por fim:

$$\boxed{D = a\sqrt{3}}$$

4.4.3 Diagonal do paralelepípedo reto retângulo

Chamando-se de **a**, **b** e **c**, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo reto retângulo, conforme a figura abaixo:

Figura 36 – Paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Chamando-se também de **d** a medida da diagonal da base retangular e de **D** a medida da diagonal do paralelepípedo reto retângulo, com o auxílio da visualização dos sólidos vazados construídos ou do GEOGEBRA, de forma semelhante, pode-se novamente usar o teorema de Pitágoras por duas vezes:

No retângulo da base:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

No triângulo retângulo de lados c, d e D com hipotenusa em D

$$D^2 = d^2 + c^2 \quad (I)$$

Como $d^2 = a^2 + b^2$, substituindo em (I) temos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Por fim:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

4.4.4 Relações na pirâmide reta de base quadrada

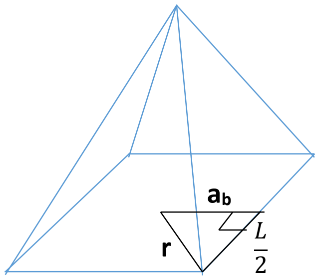
Chamando-se de **L** o lado da base, de $\mathbf{a_b}$ o apótema da base, de **r** o raio da circunferência circunscrita à base, de $\mathbf{a_L}$ a aresta lateral, de $\mathbf{a_p}$ o apótema da pirâmide e de **h** a altura da pirâmide, com o auxílio das visualizações feitas no sólido vazado

Foto 4 – Pirâmides de Base Quadrada Vazada

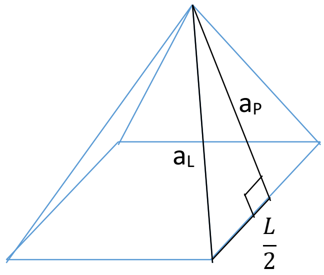
Fonte: Foto tirada pelo autor – sólido construído pelos alunos, 2015.

Ou através do GEOGEBRA, os alunos conseguem perceber os triângulos retângulos em evidência e relações seguintes:

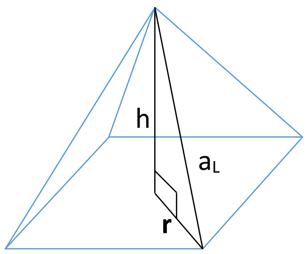
Figuras 37 – Pirâmides de Base Quadrada – Relações



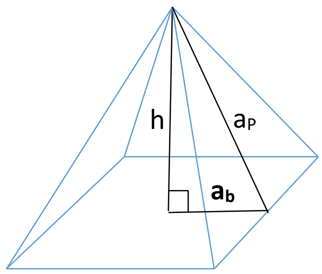
$$r^2 = {a_b}^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$



$${a_L}^2 = {a_p}^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$



$${a_L}^2 = h^2 + r^2$$



$${a_P}^2 = h^2 + {a_b}^2$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

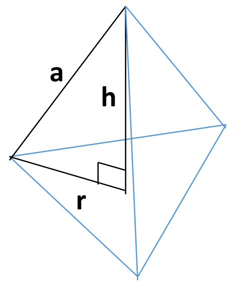
4.4.5 Altura do tetraedro regular

Chamando-se de **a** a aresta do tetraedro regular, de **r** o raio da circunferência circunscrita a base e de **h** a altura do tetraedro regular, conforme a figura ilustrativa abaixo:

Foto 5 – Tetraedro Vazado

Fonte: Foto tirada pelo autor – sólido construído pelos alunos. 2015.

Figura 38 – Tetraedro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

De posse deste sólido construído vazado ou usando o GEOGEBRA o aluno pode perceber a existência do triângulo retângulo destacado e assim aplicar o teorema de Pitágoras, obtendo que:

$$a^2 = r^2 + h^2$$

Portanto:

$$h^2 = a^2 - r^2 \text{ (I)}$$

Mas, sabendo que as faces de um tetraedro regular são triângulos equiláteros e que a relação entre o lado **a** desse triângulo e o raio **r** da circunferência circunscrita a ele, como foi estudado previamente, é dada por:

$$a = r\sqrt{3}$$

Temos que:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Substituindo em (I), temos:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

Daí:

$$h = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

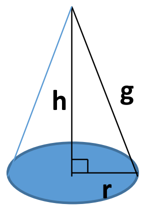
Por fim:

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

4.4.6 Relações no cone circular reto

Chamando-se de **r**, **h e g**, respectivamente, o raio da base, a altura e a geratriz do cone circular reto, conforme figura ilustrativa abaixo:

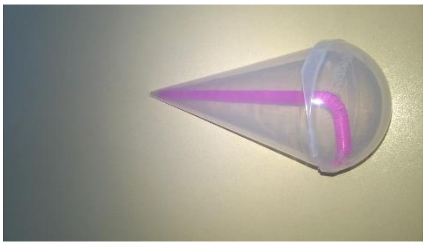
Figura 39 – Cone Circular Reto



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Podendo também observar o sólido vazado:

Foto 6 – Cone Vazado



Fonte: Foto tirada pelo autor – sólido construído pelos alunos. 2015.

Ou usar o GEOGEBRA, o aluno perceberá o sólido em evidência e aplicando novamente o teorema de Pitágoras, obter a seguinte relação:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

4.5 Preenchendo a quinta linha da tabela

Nessa linha da tabela, o objetivo é compreender as áreas das bases de cada sólido, aqui os alunos têm uma boa oportunidade de revisar as áreas das figuras planas, assunto previamente estudado, portanto, não terão grandes dificuldades de absorve o que se pretende aqui, até mesmo não terão problemas para visualizar, pois, as observações são feitas no plano.

Podemos destacar aqui a semelhança que existe entre a área da base dos prismas e das pirâmides, pois, tanto um sólido quanto o outro possuem bases formadas por polígonos, o mesmo acontecendo entre os cilindros e o cones circulares, nos quais a base é um círculo. Portanto, podemos analisar as áreas das bases dos sólidos seguindo a sequência abaixo:

4.5.1 Área da base de um prisma ou de uma pirâmide

Fica bastante claro para os alunos que, a área da base de um prisma ou de uma pirâmide depende especificamente do polígono que forma a base, e que consequentemente essa área corresponde a área deste polígono. Portanto, aqui, professor e alunos podem relembrar as áreas dos polígono, incluindo também os polígonos regulares.

Podemos construir uma tabela de revisão, dos principais polígonos, no seguinte modelo:

Tabela 2 – Áreas de Figuras Planas

BASE	ÁREA DA BASE
TRIÂNGULO QUALQUER	$A_b = \frac{b \cdot h}{2}$
TRIÂGULO EQUILÁTERO	$A_b = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$
QUADRADO	$A_b = L^2$
RETÂNGULO	$A_b = b \cdot h$
PARALELOGRAMO	$A_b = b \cdot h$
LOSANGO	$A_b = \frac{D \cdot d}{2}$
TRAPÉZIO	$A_b = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

HEXÁGONO	$A_b = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$
POLÍGONO REGULAR QUALQUER	$A_b = p \cdot a$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Não nos atemos aqui a nenhuma demonstração destas fórmulas por subentendermos que já tenham sido demonstradas antecipadamente ao assunto de sólidos, cabe ao professor ou ao aluno que vão trabalhar essa proposta verificar isso.

4.5.2 Área da base de um prisma ou pirâmide de bases regulares

Para o caso destes sólidos, usando a fórmula da área de um polígono regular apresentada no quadro acima:

$$A_b = p \cdot a$$

Onde **p** é o semiperímetro da base e **a** o apótema da base. Chamando-se de **L** o lado da base regular e de **n** o número de lados desta base, podemos dizer que:

$$p = \frac{n \cdot L}{2}$$

Daí, podemos construir uma fórmula para a área da base destes sólidos como a que segue:

$$A_b = \frac{n \cdot L \cdot a}{2}$$

4.5.3 Área da base de um cilindro ou cone circulares

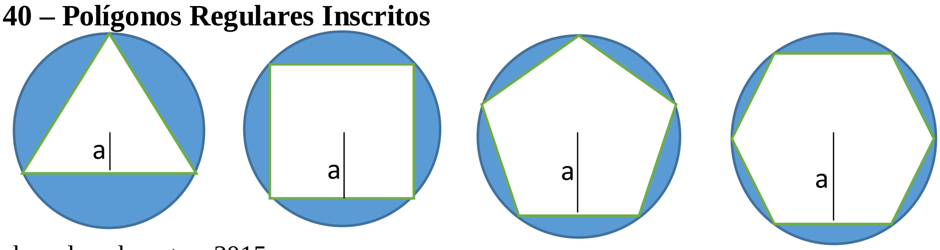
Os alunos facilmente perceberão a semelhança nas base do cilindro circular e do cone circular pois, os dois têm como base um círculo. Nesse momento, podemos demonstrar a área d círculo, trazendo a noção de LIMITES, partindo da fórmula da área de polígonos regulares:

$$A = p \,.\, a \quad \text{(I)}$$

Onde: **a** é o apótema e **p** é o semiperímetro do polígono regular.

Imaginando um polígono regular inscrito em uma circunferência e fazendo o número de lados desse polígono tender a infinito, conforme as figuras abaixo:

Figura 40 – Polígonos Regulares Inscritos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Os alunos não terão dificuldade de perceber que **a** tenderá a **r** (raio da circunferência) e **p** tenderá a metade do comprimento da circunferência C que corresponde a:

$$C = 2\pi r$$

Substituindo na equação I, temos que a área da base de um cilindro ou cone é dada por:

$$A_b = \pi r \cdot r$$

Por fim:

$$A_b = \pi r^2$$

Também será fácil para os alunos perceberem que a base da esfera é um ponto e que um ponto por definição não tem área. Portanto, não existe a área da base da esfera.

4.6 Preenchendo a sexta linha da tabela

Aqui nesta linha da tabela estudaremos a área lateral de cada sólido e as deduções que se fizerem necessárias. Para as demonstrações das áreas laterais dos prismas e pirâmides este estudo se torna simples pois, nos prismas essa área lateral corresponde a soma das áreas de retângulos para prismas retos ou soma das áreas de paralelogramos para prismas oblíquos e nas pirâmides corresponde a soma de áreas de triângulos, a quantidade de retângulos ou paralelogramos no prisma e de triângulos na pirâmide equivale a quantidade de lados que possui a base, portanto, para compreender a área lateral destes sólidos basta saber as áreas desses polígonos. Porém, para demonstrarmos a área lateral do cilindro, do cone e da esfera não podemos se valer destes recursos, para estas demonstrações, usaremos outros recursos que apresentaremos adiante, para o cilindro, é comumente usada a sua planificação, também a usaremos, mas na intenção de termos como base para utilizarmos uma variante do teorema de Pappus, que será usada para demonstrarmos além da área lateral do cilindro, a área lateral do cone e da esfera.

Seguiremos as demonstrações das fórmulas para cálculos das áreas laterais dos sólidos na sequência seguinte:

4.6.1 Área lateral de prismas oblíquos

Para estes tipos de prismas, a área lateral é encontrada calculando a área de todos os paralelogramos que formam as faces laterais e somando todas elas.

4.6.2 Área lateral de prismas retos de bases quaisquer

Para estes tipos de prisma, a área lateral corresponde a soma das áreas de todos os retângulos que formam as faces laterais.

4.6.3 Área lateral de prismas retos de bases regular

Nestes tipos de prismas, como a base é regular, os retângulos que formam as faces laterais serão todos iguais, chamando-se de **L** o lado da base e de **H** a altura do prisma, a área de cada retângulo será **L.H** e, chamando-se de **n** o número de lados da base regular, podemos construir a seguinte fórmula para o cálculo da área lateral desse tipo de prisma:

$$A_L = n \cdot L \cdot H$$

4.6.4 Área lateral do cubo

Neste sólido, a área lateral é formada por quatro quadrados iguais, se chamarmos de **a** a aresta do cubo, a área de cada quadrado será $\mathbf{a^2}$ e, portanto, podemos concluir que a área lateral do cubo é dada por:

$$A_L = 4a^2$$

4.6.5 Área lateral do paralelepípedo reto retângulo

Chamando-se de **a**, **b** e **c**, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo reto retângulo, através das observações dos sólidos construídos, os alunos poderão perceber que a área lateral desse sólido é formada por quatro retângulos tais que as faces opostas possuem áreas iguais, portanto, teremos dois retângulos com áreas iguais a **a.c** e dois retângulos com áreas **b.c**, concluindo que a área lateral do paralelepípedo reto retângulo é dada por:

$$A_L = 2(a.c + b.c)$$

Consideramos aqui, o paralelepípedo reto retângulo apoiado na base maior, mais essa mesma análise pode ser feita se mudarmos a base, encontraremos as equações:

$$A_L = 2(a.b + b.c) \text{ ou } A_L = 2(a.b + a.c)$$

4.6.6 Área lateral de uma pirâmide oblíqua

A área lateral destes sólidos é encontrada somando as áreas de todos os triângulos que formam as faces laterais.

4.6.7 Área lateral de uma pirâmide reta de base qualquer

Da mesma forma, a área lateral destes tipos de sólidos, corresponde a soma das áreas de todos os triângulos que formam as faces laterais.

4.6.8 Área lateral de uma pirâmide reta de base regular

A área lateral deste sólido é formada por triângulos de mesma área, chamando-se de **L** o lado da base e de $\mathbf{a_p}$ o apótema da pirâmide, a área de cada triângulo será $\frac{L \cdot a_p}{2}$ e, portanto, se chamarmos de **n** o número de lados da base regular, podemos estabelecer a seguinte fórmula para calcular a área lateral da pirâmide reta de base regular:

$$A_L = \frac{n \cdot L \cdot a_p}{2}$$

4.6.9 Área lateral do tetraedro regular

Para o tetraedro regular, a área lateral é formada por três triângulos equiláteros, se chamarmos de **a** a aresta do tetraedro regular, de acordo com a área de triângulo equilátero conforme já foi estudado, a área de cada triângulo equilátero é $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ e, portanto a área lateral do tetraedro regular pode ser dada por:

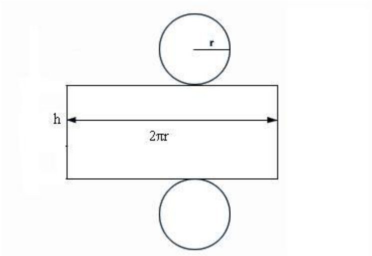
$$A_L = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

A partir daqui para demonstrarmos a área lateral dos demais sólidos, usaremos uma variante do teorema de Pappus, mas, iniciaremos pelo cilindro usando sua planificação para depois mostrarmos a eficácia da variante que iremos aplicar.

4.6.10 Área lateral do cilindro circular reto

Para demonstrar a área da superfície lateral de um cilindro circular reto normalmente se usa a sua planificação pois, na sua planificação a área lateral corresponde a um retângulo cuja base corresponde ao comprimento da circunferência da base do cilindro e a altura corresponde à altura do cilindro, conforme a figura:

Figura 41 – Planificação do Cilindro Circular Reto



Fonte: Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/cilindro-2.htm>. Acesso em: 05 de outubro de 2015.

Daí, portanto, a área lateral do cilindro circular reto é a área desse retângulo:

$$A_L = 2\pi rh$$

Agora iremos usar uma variante do “1º Teorema de Pappus” para justificar a fórmula da área lateral do cilindro circular reto, do cone circular reto e da superfície esférica. No caso do cone circular reto também se pode usar sua planificação que é um setor circular, mas no caso da esfera como não existe a planificação a situação se complica e por este meio mostraremos um caminho mais viável para os alunos de Ensino Médio compreenderem. Na realidade a finalidade aqui é aplicar um recurso que não seja necessário usar integrais pois, como essa proposta é para o Ensino Médio, não podemos utilizá-las. Começaremos enunciando o teorema que usaremos:

4.6.11 1ª variante do teorema de Pappus

Área da superfície gerada pelo giro de um segmento de reta em torno de um eixo – A área da superfície gerada por um segmento de reta, quando efetua uma volta completa em torno de um eixo situado no seu plano e não o atravessando é igual ao produto de sua projeção ortogonal sobre o eixo pelo comprimento da circunferência cujo raio é a parte da mediatriz do segmento gerador, compreendida entre este e o eixo.

Veja as figuras abaixo:

Figuras 42 – Rotação de Segmentos em Torno de um Eixo

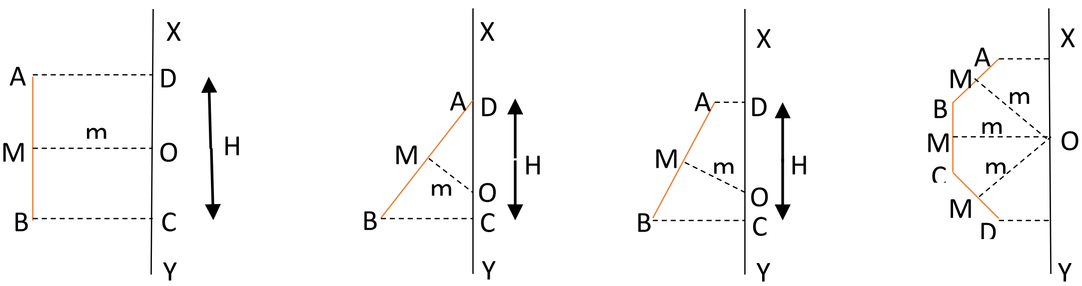


figura I figura II figura III figura IV

Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Consideraremos os segmentos de reta AB nas figuras I,II e III e AB,BC e CD da figura IV girando uma volta completa em torno do eixo de XY. De acordo com teorema enunciado acima e chamando a área lateral gerada pelos segmentos de A_L, podemos dizer que:

$$A_L = 2\pi \cdot OM \cdot H = 2\pi \cdot m \cdot H$$

4.6.12 Área lateral do cilindro circular reto

É fácil perceber que a área lateral do cilindro circular reto se dá pelo giro da figura I, onde notamos que o **m** do teorema corresponde ao raio r da base e que H do teorema corresponde à altura H do cilindro, daí temos:

$$A_L = 2\pi \cdot r \cdot H$$

Conforme já tínhamos deduzido a partir da planificação.

4.6.13 Área lateral do cone circular reto

Também é fácil notar que a área lateral do cone circular reto é gerada na figura II, onde H realmente corresponde à altura do cone, BC corresponde a ao raio r da base e AB corresponde a geratriz g do cone, podemos encontrar m usando a semelhança de triângulos existente entre os triângulos ABC e AMO, encontrando a seguinte proporção:

$$\frac{MO}{BC} = \frac{AM}{CD} \quad \therefore \quad \frac{m}{r} = \frac{\frac{g}{2}}{H}$$

O que nos leva a:

$$m = \frac{rg}{2H}$$

Daí, pelo teorema

$$A_L = 2\pi \cdot m \cdot H = 2\pi \cdot \frac{rg}{2h} \cdot H$$

Concluímos que:

$$A_L = \pi r g$$

Nota-se também que pela figura III, encontramos a área lateral do tronco de cone, mas não a utilizaremos aqui.

4.6.14 Área da superfície esférica

Na figura IV, conforme o teorema estudado, a área gerada seria dada pela soma das áreas geradas por todos os segmentos consecutivos, de acordo com a equação abaixo:

$$A = 2\pi \cdot m \cdot H_1 + 2\pi \cdot m \cdot H_2 + 2\pi \cdot m \cdot H_3 + \cdots + 2\pi \cdot m \cdot H_n$$

$$A = 2\pi \cdot m \cdot (H_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_n)$$

Onde: H_n (n = 1,2,3, ...) são as projeções dos segmentos de reta sobre o eixo XY, para n segmentos de reta que se tenha girando em torno de XY.

Se chamarmos de H, a projeção de todos os segmentos, temos:

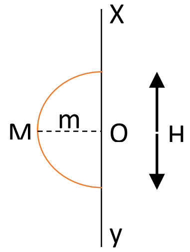
$$H = H_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_n$$

Daí:

$$A = 2\pi \cdot m \cdot H$$

Como os alunos já tiveram uma noção de limites, podemos imaginar a quantidade de segmentos de reta consecutivos com mesmo m, tendendo a infinito até tocar o eixo XY, obteremos assim, a figura abaixo:

Figura 43 – Rotação da Semicircunferência em Torno de um Eixo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Percebemos que obteremos uma semicircunferência e que o giro dela em torno do eixo XY gera a superfície esférica e notamos que m tenderá ao raio r da esfera e H corresponderá ao diâmetro da esfera que é o dobro do raio, portanto, pelo teorema, teremos:

$$A_L = 2\pi \cdot OM \cdot H = 2\pi \cdot m \cdot H = 2\pi \cdot r.2r$$

Onde concluímos que a área da superfície esférica é dada por:

$$A_L = 4\pi r^2$$

4.7 Preenchendo a sétima linha da tabela

Esta linha da tabela é preenchida pela área total de cada sólido. Com certeza os alunos não terão dificuldades para preenchê-la pois, para deduzirem as fórmulas da área total de cada sólido, perceberão que são simples somas entre as áreas de bases e a área lateral.

Novamente, exploraremos as semelhanças e diferenças existentes entre os sólidos. Prismas e pirâmides se assemelham pela base porém, se diferenciam porque o prisma possui duas bases e a pirâmide apenas uma. Acontecendo o mesmo entre o cilindro e o cone. Mas também podemos notar a semelhança entre prismas e cilindros por possuírem duas bases e pirâmides e cones por possuírem apenas uma.

Para demonstrarmos as fórmulas da área total de cada sólido, seguiremos a sequência abaixo:

4.7.1 Área total de um prisma qualquer

Chamando-se de $\mathbf{A_b}$ a área da base, de $\mathbf{A_L}$ a área lateral e de $\mathbf{A_T}$ a área total, como sabemos previamente que o prisma possui duas base de mesma área, podemos facilmente perceber que a área total deste sólido pode ser dada por:

$$A_T = 2A_b + \ A_L$$

Lembrando que a área da base do prisma dependo do polígono que forma a base.

4.7.2 Área total de um prisma reto de base regular

Para estes tipos de sólidos, como já deduzimos anteriormente a área da base, que pode ser dada por:

$$A_b = \frac{n \cdot L.a}{2}$$

Onde: **L** é a medida do lado da base, **n** o número de lados da base e **a** o apótema da base. Como também já construímos a fórmula da área lateral destes prismas:

$$A_L = n \cdot L \cdot H$$

Onde **H** é a altura do prisma. Como sabemos que são duas bases de mesma área, Podemos construir uma fórmula para o cálculo da área total destes sólidos assim:

$$A_T = 2 \cdot \frac{n \cdot L.a}{2} + n \cdot L \cdot H$$

Portanto:

$$A_T = n \cdot L \cdot (a + H)$$

4.7.3 Área total do cubo

No caso do cubo, chamando a aresta de **a**, como as seis faces são quadrados de áreas iguais $\mathbf{a^2}$, podemos dizer que a área total do cubo é dada por:

$$A_T = 6a^2$$

4.7.4 Área total do paralelepípedo reto retângulo

Como o paralelepípedo reto retângulo apresenta seis faces retangulares duas a duas de mesma área, se chamarmos de **a**, **b** e **c** as dimensões do paralelepípedo, teremos dois retângulos com área **a.b**, dois retângulos com área **a.c** e dois com área **b.c**, então podemos perceber que a área total deste sólido pode ser dada por:

$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

4.7.5 Área total de uma pirâmide qualquer

No caso deste sólido, como possui uma só base, novamente, chamando-se de $\mathbf{A_b}$ a área da base e de $\mathbf{A_L}$ a área lateral, podemos dizer que a área total $\mathbf{A_T}$ deste sólido é dada por:

$$A_T = A_b + A_L$$

Lembramos também que a área da base deste sólido assim como nos prismas, depende do polígono que forma a base.

4.7.6 Área total de uma pirâmide reta de base regular

Nestes sólidos a base se assemelha a base do prisma de base regular, a diferença é que uma única, como vimos dada por:

$$A_b = \frac{n \cdot L.a}{2}$$

A fórmula da área lateral destes sólidos também já construímos e é dada por:

$$A_L = \frac{n \cdot L \cdot a_p}{2}$$

Daí, como temos uma só base, podemos construir a seguinte fórmula para calcular a área total deste sólido:

$$A_T = \frac{n \cdot L.a}{2} + \frac{n \cdot L \cdot a_p}{2}$$

Portanto:

$$A_T = \frac{n \cdot L}{2} \cdot (a + a_p)$$

Onde:

L é a medida do lado da base;

n é o número de lados da base;

a é o apótema da base;

a_p é o apótema da pirâmide.

4.7.7 Área total do tetraedro regular

Observando as construções realizadas por eles, os alunos notarão que estes sólidos possuem quatro faces formadas por triângulos equiláteros de mesma área, se chamarmos de **a** a aresta deste sólido, como a área de cada face é a área de um triângulo equilátero dada por;

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Então a área total do tetraedro regular pode ser construída como segue:

$$A_T = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto:

$$A_T = a^2\sqrt{3}$$

4.7.8 Área total do cilíndro circular reto

Nesse caso do cilindro circular reto, como também já estudamos, sua base é um círculo cuja área é dada por:

$$A_b = \pi r^2$$

E no caso desse sólido são duas bases. Sua área lateral também encontramos e é dada por:

$$A_L = 2\pi r H$$

Podemos então construir a área total deste sólido através da expressão:

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r H$$

Portanto:

$$A_T = 2\pi r(r + H)$$

4.7.9 Área total do cone circular reto

No caso do cone circular reto, temos uma única base circular dada por:

$$A_b = \pi r^2$$

E uma área lateral, já desenvolvida, dada por:

$$A_L = \pi r g$$

Daí, a área total deste sólido é a soma destas áreas:

$$A_T = \pi r^2 + \pi r g$$

Portanto:

$$A_T = \pi r(r + g)$$

4.7.10 Área da superfície esférica (área total da esfera)

Como a esfera não possui área da base, somente área lateral, fica fácil para o aluno perceber que sua área total é a própria área lateral:

$$A_T = A_L = 4\pi r^2$$

4.8 Preenchendo a oitava e última linha da tabela

Nesta oitava e última linha da tabela, fecharemos nosso trabalho demonstrando o volume que cada sólido ocupa no espaço, para construirmos estas demonstrações aqui, usaremos além do princípio de Cavaliere uma variante do segundo teorema de Pappus, pois, como a proposta é para o Ensino Médio, não podemos usar integrais, por estes meios poderemos fazer as deduções com recursos acessíveis aos alunos.

Também para as demonstrações das fórmulas dos volumes dos sólidos, nos valeremos, das semelhanças e diferenças existentes entre os sólidos para inferirmos algumas demonstrações, por isso iremos começar as deduções usando a variante do segundo teorema de

Pappus para cone circular reto, cilindre circular reto e esfera, para levarmos a ideia para os casos particulares que são os prismas e pirâmides.

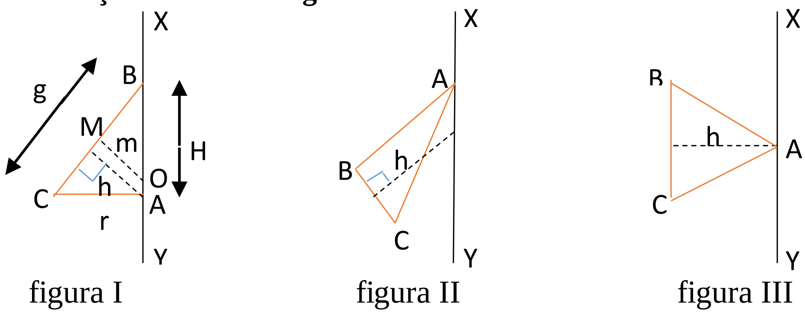
Para começarmos as demonstrações dos volumes dos sólidos, primeiramente iremos mostrar o enunciado da variante do segundo teorema de Pappus, como segue abaixo:

4.8.1 2ª variante do teorema de Pappus

Volume gerado por um triângulo – O volume gerado por um triângulo que gira em torno de um eixo situado no seu plano, sem o atravessar e passando por um de seus vértices é igual ao produto da área gerada pelo lado oposto ao vértice sobre o eixo por um terço da altura correspondente a esse lado.

Considerando as rotações abaixo:

Figura 44 – Rotação de um Triângulo em Torno de um Eixo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

De acordo com o teorema acima enunciado:

$$\text{Volume gerado pelo triângulo qualquer (ABC)} = \frac{1}{3}(\text{área gerada por } BC) \cdot h$$

Lembramos que a área gerada por BC é encontrada usando a variante do primeiro teorema de Pappus já estudada anteriormente.

4.8.2 Volume do cone circular reto

É fácil para os alunos perceberem que para deduzirmos o volume do cone circular reto, devemos usar a figura I, onde, pelo teorema agora estudado, notamos que:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (2\pi m H) \cdot h \qquad \text{(I)}$$

Sendo V o volume do cone circular reto.

Como já foi anteriormente estudado no desenvolvimento da área lateral deste mesmo sólido, podemos encontrar **m** usando a semelhança entre os triângulos ABC e BMO, encontrando a proporção:

$$\frac{m}{r} = \frac{\frac{g}{2}}{H}$$

Daí:

$$m = \frac{rg}{2H} \qquad \text{(II)}$$

Para encontrarmos **h**, podemos usar as relações métricas no triângulo retângulo, pois, nota-se que **h** é a altura relativa a hipotenusa **g** do triângulo retângulo ABC com catetos **r** e **H**, como sabemos no que foi estudado sobre as relações métricas no triângulo retângulo que: "o produto da hipotenusa pela sua altura relativa é igual ao produto dos catetos", temos que:

$$g \cdot h = r \cdot H$$

Daí:

$$h = \frac{r \cdot H}{g} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo II e III em I, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(2\pi \cdot \frac{rg}{2H} \cdot H\right) \cdot \frac{rH}{g}$$

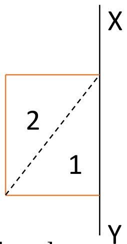
Portanto, o volume do cone circular reto é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

4.8.3 Volume do cilindro circular reto

Para demonstrarmos o volume do cilindro circular reto, também usaremos a variante do segundo teorema de Pappus, considerando a rotação de um retângulo em torno do eixo XY, conforme a figura abaixo:

Figura 45 – Rotação de um Retângulo em Torno de um Eixo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Como o nosso teorema não aborda o giro de um retângulo, temos que dividi-lo em dois triângulos, que na figura enumeramos em 1 e 2, o volume gerado pelo triângulo 1 já foi calculado quando demonstramos o volume do cone circular reto e encontramos:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

Então, para encontrarmos o volume do cilindro circular reto, basta encontrarmos o volume gerado pelo triângulo 2 e somarmos ao volume gerado pelo triângulo 1 já encontrado.

Para acharmos o volume gerado pelo triângulo 2, podemos usar novamente a variante do segundo teorema de Pappus, no qual percebemos que **m** e **h** corresponde ao raio **r** da base do cilindro e a projeção da figura sobre XY é **H**, com isso podemos dizer que o volume gerado pelo triângulo 2 é dado por:

$$V_2 = \frac{1}{3}(2\pi \cdot r \cdot H) \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^2 H$$

De posse dos volumes gerados pelos triângulos 1 e 2, o volume do cilindro circular reto é a soma dos volumes V_1 e V_2, chamando de V esse volume, temos que:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{2}{3}\pi r^2 H$$

Portanto:

$$V = \pi r^2 H$$

OBSERVAÇÃO 1: Fica fácil para os alunos perceberem que o volume do cilindro circular reto corresponde ao produto da área da base $\mathbf{A_b}$ pela altura **H**:

$$V = A_b \cdot H$$

OBSERVAÇÃO 2: Também é facilmente notável que o cone circular reto é a terça parte do volume do cilindro circular reto:

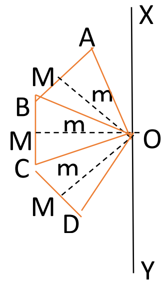
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H$$

OBSERVAÇÃO 3: Como já sabemos que os prismas são casos particulares dos cilindros e as pirâmides são casos particulares dos cones, podemos agora com o que foi descoberto construir tranquilamente as fórmulas do volume dos prismas e pirâmides.

4.8.4 Volume da esfera

Para desenvolvermos o volume da esfera, continuaremos usando a variante do segundo teorema de Pappus, começaremos imaginando os giros da figura abaixo, formada por triângulos semelhantes consecutivos com mesmas mediatrizes **m** e com um dos vértices em O, em torno do eixo XY:

Figura 46 – Rotação de Triângulos Adjacentes em Torno de um Eixo



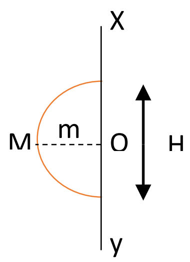
Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Como pelo teorema estudado, temos que o volume gerado por um triângulo é dado por:

Volume gerado pelo triângulo qualquer (ABC) $=\frac{1}{3}(\text{área gerada por } BC)\cdot h$

Aqui, novamente, podemos lembrar a noção de limites, pois, se fizermos a quantidade destes triângulos tender a infinito, obteremos um semicírculo, girando em torno de XY, que gerará a esfera, conforme a figura abaixo:

Figura 47 – Rotação de um Semicírculo em Torno de um Eixo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2015.

Onde m corresponderá a h e tenderá ao raio da esfera r, e a área gerada, como já foi estudado para área lateral da própria esfera, é dada por:

$$A = 4\pi r^2$$

Daí, o volume da esfera pode ser encontrado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r$$

Portanto:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

4.8.5 Volume de um prisma reto

Para deduzirmos o volume dos prismas reto, usaremos observações já estudadas, por ser um caso particular do cilindro, seu volume pode ser dado por:

$$V = A_b \cdot H$$

Como sabemos a área da base, depende do polígono que forma a base.

4.8.6 Volume de uma pirâmide reta

Como sabemos também que as pirâmides são casos particulares dos cones, podemos também deduzir que o volume deste sólido é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H$$

4.8.7 Volume de sólidos oblíquos

Para calcularmos os volumes dos sólidos oblíquos, podemos utilizar o famoso princípio de Cavaliere que já enunciamos no capítulo 3 que fala da fundamentação teórica do nosso trabalho.

Como o princípio de Cavaliere afirma que, para dois sólidos, inseridos entre dois planos paralelos, que apresentam as mesmas áreas de secções apresentadas por um terceiro plano paralelo aos dois planos e entre eles, seus volumes são iguais, podemos, com esse princípio deduzir o volume de outros sólidos, inclusive dos sólidos oblíquos, a partir do volume de sólidos já conhecidos. Basta que o sólido que pretendemos calcular o volume possua todas as secções com mesmas áreas das secções do sólido que podemos calcular seu volume através das fórmulas estudadas.

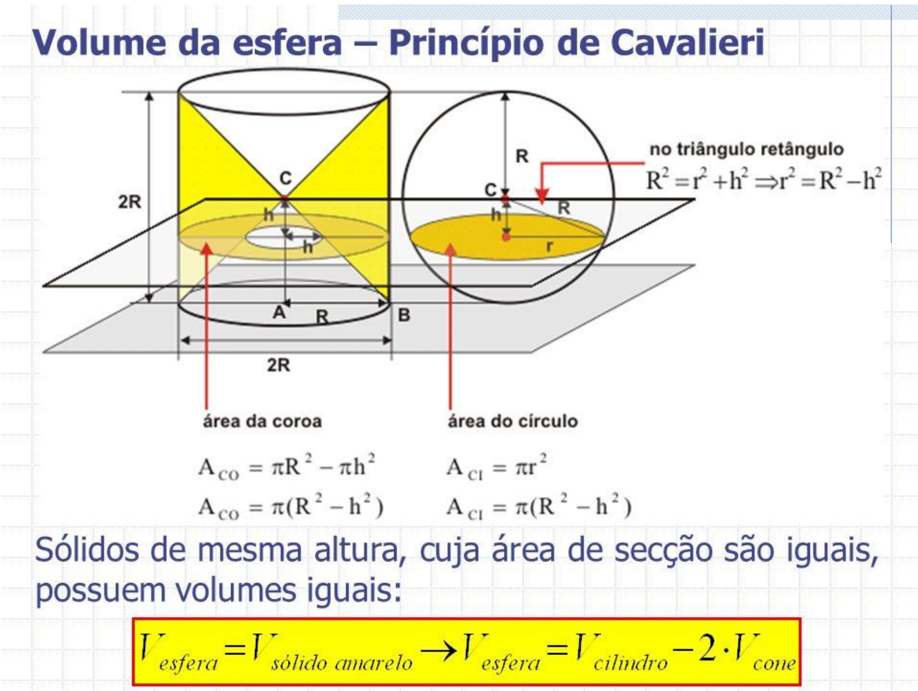
Podemos ilustrar muito bem esse fato, através de objetos, como na figura que segue:

Figura 48 – Moedas Formando um Sólido

Fonte: Disponível em:< http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009/12/o-principio-de-cavalieri.html>. Acesso em: 25 de outubro de 2015.

Através do princípio de Cavaliere, também podemos calcular o volume da esfera, fazendo a relação abaixo:

Figura 49 – Princípio de Cavaliere



Fonte: Disponível em:< http://slideplayer.com.br/slide/364967/>. Acesso em: 11 de novembro de 2015.

Como mostrado na figura a área das secções da esfera são iguais as áreas das secções do sólido amarelo conhecido como anticlépsidra, como os sólidos possuem a mesma altura, podemos dizer pelo princípio de Cavaliere, que esses sólidos possuem o mesmo volume. Percebe-se também que o volume da anticlépsidra é a diferença entre o volume do cilindro com raio da base R e altura 2R e o dobro do volume do cone de raio da base R e altura R, daí:

$$V_{esfera} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$$

Portanto:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

5 ATIVIDADES APLICADAS

Buscamos no projeto propor atividades que fizessem com que os alunos interagissem da melhor forma possível com o conteúdo em questão, proporcionando que eles construíssem o conhecimento sobre o assunto de forma progressiva com oportunidades de fazer comparações, de melhorar consideravelmente sua visualização espacial, de aumentar sua capacidade de desenhar figuras tridimensionais, de pesquisar suas aplicações nos mais diversos contextos e interdisciplinaridade, além de estimular o trabalho em equipe com trocas mútuas de habilidades e conhecimentos.

A seguir temos a lista das atividades aplicadas nesse projeto:

1) OBTER AS PLANIFICAÇÕES DOS SÓLIDOS A PARTIR DOS SOFTWARES POLY E GEOGEBRA.

2) CONSTRUIR OS SÓLIDOS COM LIVRE ESCOLHA PARA OS MATERIAIS A SEREM USADOS.

3) DESENHAR EM PESPECTIVA OS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.

4) PESQUISAR A PRESENÇA DESTES SÓLIDOS NOS MAIS VARIADOS CONTEXTOS.

Para os professores que quiserem se utilizar deste projeto, apresentamos aqui, uma proposta de roteiro a ser seguida conforme foi realizada para a elaboração, porém, o professor pode fazer suas adaptações conforme ache necessárias. Segue a proposta de roteiro:

I) Em uma aula anterior ao início da aplicação do trabalho, deve-se solicitar que os alunos formem grupos com a quantidade de alunos que o professor achar conveniente, pedir que eles tragam próxima aula, na qual se iniciará o trabalho, as planificações de cada sólido e os materiais para a construção dos mesmos, sugerir o uso dos softwares POLY e GEOGEBRA mostrando onde eles podem baixa-los.

II) Na aula inicial de aplicação, estando os alunos de posse das planificações dos sólidos e dos materiais para a construção dos mesmos, pede-se para que os grupos construam seus sólidos baseados nas suas planificações, solicita-se a construção dos principais sólidos, que podem ser: um prisma reto de base regular, um cubo, um paralelepípedo, uma pirâmide reta de base regular, um tetraedro, um cilindro circular reto, um cone circular reto e a esfera. Sugerir que construam os sólidos vazados se possível, pois será útil na continuidade do projeto.

III) Construídos os sólidos, solicita-se dos alunos para que eles desenhem individualmente cada sólido, o professor deve acompanhar se todos realizam essa atividade pois, é uma forma de treinar a percepção espacial e a habilidade de cada um, eles também podem transferir um esboço desses desenhos para a tabela comparativa.

IV) Com os sólidos construídos e desenhos feitos, pode-se começar as definições de cada sólidos, a identificação de seus respectivos elementos e abordar as semelhanças e diferenças entre eles.

V) Com o que foi visto antes, os alunos ficam preparados para começar as demonstrações de fórmulas, o professor pode iniciar demonstrando no quadro as relações entre os elementos de cada sólido, sugerindo que os alunos possam acompanhar essas demonstrações, observando essas relações nos sólidos construídos por eles.

VI) Posterior as demonstrações das relações dos elementos, o professor pode começar as demonstrações das áreas das bases, aproveitando para revisar as áreas das figuras planas, depois as áreas laterais e as áreas totais de cada sólido. Propõe-se seguir a sequência de demonstrações feita neste trabalho.

VII) Fechando as demonstrações, o professor vai para os volumes dos sólidos, usando sempre que possível a sequência e os argumentos aqui expostos. Lembrando também que os alunos podem sempre acompanhar todas as demonstrações observando os sólidos que eles construíram.

VIII) Encerrando o processo, o professor passa para os alunos uma pesquisa na qual eles devem encontrar a existência desses sólidos nos mais variados contextos e fazerem um trabalho escrito, individual, que deve ser avaliado posteriormente e, finalmente, propor uma aula para um debate no qual cada grupo apresenta suas descobertas e discutem entre si os detalhes encontrados por cada um, o professor deve mediar e intervir com alguns apontamentos que achar interessante.

Seguindo esse roteiro, o professor leva em torno de duas aulas para os alunos trazerem as planificações, construírem e desenharem os sólidos, depois aproximadamente mais duas aulas para definir, identificar os elementos e demonstrar as relações entre, posteriormente mais duas aulas para demonstrações das áreas das bases, laterais e totais, na sequência mais uma aula para demonstrar os volumes e por fim mais uma aula para o debate. Portanto, o professor se utiliza de no mínimo oito aulas para concluir o conteúdo do projeto, claro que ainda vai necessitar de mais aulas para resolver exercícios e avaliar os alunos, onde ele deve analisar de quanto tempo precisará a mais. É interessante propor uma lista de exercícios que aborde questões envolvendo as fazes do roteiro de aprendizagem aqui proposto, desde as planificações até as demonstrações.

6 RESULTADOS

Tivemos a felicidade de presenciar a satisfação dos alunos quanto ao desenvolvimento do trabalho, vimos a contento que realmente os grupos se empenharam para a realização da ATIVIDADE 1 que era a obtenção das planificações dos sólidos, conseguindo sem dificuldades operarem muito bem com os softwares POLY e GEOGEBRA, pois, no caso a turma a qual foi aplicado esse trabalho era do curso de ELETROTÉCNICA do IFAL CAMPUS-MACEIÓ, curso no qual os alunos já possuem um bom conhecimento na área de informática, mas, não impede de que esse projeto não seja aplicado em outras turmas, pois, esses softwares são de fácil operacionalidade, pelo menos para esse objetivo.

Percebemos que durante essa atividade, os alunos estavam bastante estimulados para a próxima atividade, obtendo as planificações e já pensando como fariam para construírem os sólidos a partir dessas planificações.

Houve também alunos que observaram a existências de outros softwares e aplicativos que também podem ser usados para a mesma finalidade, alguns destes aplicativos podem ser facilmente baixados em smartphones, i-phones, tabletes, etc. Notaram que a lista de softwares e aplicativos com essa finalidade é grande e vão dos mais simples aos mais complexos.

Para a ATIVIDADE 2 que era a construção dos sólidos, ficou em aberto o material que usariam para a confecção deles, porém, foi proposto que se pudessem, construíssem os sólidos, colocando em evidência os elementos de cada um deles, minha preocupação era com a possibilidade de conseguirem recursos para as confecções, pois, o trabalho foi aplicado com alunos da rede pública, e nós sabemos das dificuldades financeiras de muitos. O objetivo das construções foi alcançado com êxito, porém, não ficou a contento a evidenciação dos elementos de cada sólido, mas para uma primeira aplicação do trabalho o resultado foi satisfatório, serve de experiência para melhorias em uma nova aplicação em anos posteriores. Para compensar a falta da evidência destes elementos, eu mesmo construí os sólidos vazados com meus recursos próprios, através de canudinhos e cola, o que foi de suma importância para as posteriores demonstrações das fórmulas.

A ATIVIDADE 3 que era fazer o desenho de cada sólido, era uma atividade individual pois, cada um fazia seus desenhos na construção de suas tabelas isoladamente mas, os grupos foram mantidos no sentido de que eles se ajudassem mutuamente pois, sabemos que alguns possuem mais habilidade do que outros. No caso dos alunos no qual foi aplicado esse projeto, existiu um fator que favoreceu bastante, que é o fato desses alunos já terem visto a disciplina de Desenho Técnico no curso, mas, mesmo assim ainda sabemos da dificuldades de visualização de alguns alunos para figuras espaciais e a consequente transferência para o desenho no papel. Mas, mesmo com a dificuldade de alguns o objetivo da atividade foi alcançado com eficiência.

Para a ATIVIDADE 4, antes de inicia-la, fizemos um breve debate sobre onde podíamos ver em nossa vida, os tais sólidos estudados e construídos por eles, isso em todos os contextos que pudessem imaginar. O debate foi bastante produtivo, pois, oportunizamos a todos, colocarem suas observações e as lembranças desses sólidos em variados momentos de suas existências. Claro, surgiram muitos comentários, desde aqueles que mais se esperam como as pirâmides do Egito por exemplo até outros não muito comuns como objetos íntimos. Depois desse debate, é que foi sugerido que pesquisassem através dos diversos meios e contextos, a presença dessas figuras espaciais estudadas, mantendo os grupos formados desde a primeira atividade.

O resultado satisfatório das atividades aplicadas foi de grande valia para os resultados da compreensão das definições de cada sólido, identificação dos elementos de cada um deles, bem como das demonstrações das fórmulas que transcorreram posteriormente para a confecção da tabela. Isso foi percebido, com os resultados obtidos, nas provas aplicadas sobre o conteúdo estudado neste projeto.

Com o projeto, também tivemos a oportunidade de participar de um projeto com os alunos monitores do Instituto Federal de Alagoas (IFAL) campus Maceió. Levando a proposta deste trabalho para que eles também pudessem se utilizar dos métodos de demonstrações para geometria espacial aqui apresentados, nas aulas de monitoria no intuito, tanto para eles conhecessem novos conceitos como para que tivessem mais recursos para conseguirem transmitir esse conteúdo para os demais alunos do instituto que os procuram na monitoria.

Esse projeto também foi muito proveitoso pois, com ele estimulamos nossos monitores a desenvolverem ferramentas, tanto físicas como virtuais que, ajudaram e vão continuar ajudando no aprendizado de novos monitores como de todos os alunos do campus que procuram por essas aulas de monitoria, um dos alunos, por ser filho de ferreiro, conseguiu até produzir três pirâmides que ao se encaixarem formam um cubo que pode ser usado para demonstrar visualmente que o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma, além de desenvolverem demonstrações virtuais no computador através das tecnologias da informação, utilizando o GEOGEBRA como ferramenta principal.

Fotos 7 – Três Pirâmides que Encaixadas Formam um Prisma

Fonte: Foto tirada pelo autor – Sólidos construídos pelos alunos monitores do Instituto Federal de Alagoas Campus Maceió (IFAL – Maceió). 2015.

O projeto com os monitores serviu também de motivação para que esses alunos monitores se sentissem estimulados a apresenta-lo no MATFEST 2015.

Fotos 8 – Apresentação do Projeto Pelo Monitores do IFAL no MATFEST 2015

Fonte: Fotos tiradas pelo autor. 2015.

A apresentação do projeto por parte de nossos monitores num evento como o MATFEST pôde mostrar que o projeto pode ser tranquilamente desenvolvido em qualquer escola de ensino médio, tanto por parte dos professores como por parte de alunos monitores, levando a ideia das demonstrações de geometria espacial para o conhecimento de outros professores e alunos fora do ambiente do nosso instituto (IFAL – campus Maceió).

Com a apresentação professores e alunos, que compareceram para assistir, puderam ver que a proposta de ensino desse trabalho é possivelmente aplicável em qualquer instituição de ensino médio, o que nos deixou contentes em poder compartilhar nossos avanços com outras escolas e principalmente em saber que os que compareceram saíram satisfeitos com a ideia.

7 CONCLUSÃO

Com base no bom andamento do projeto e na satisfação dos resultados, tanto por parte da maioria dos alunos da turma como do aplicador do trabalho, não só no que tange a construção dos sólidos e das fórmulas mas, principalmente, a construção do conhecimento de forma coletiva, interativa, estimulante e com espaço amplo para o debate sobre vários pontos do conteúdo onde, os alunos se tornam protagonistas do aprendizado e o professor apenas um colaborador no processo, acreditamos que a proposta de ensino-aprendizagem configurada para o tema é realmente um ótimo caminho a ser seguido para compreensão dessa parte da geometria espacial.

Claro que toda ideia nova sempre se depara com alguns probleminhas que surgem naturalmente, na aplicação dessa proposta não foi diferente, surgiram algumas dificuldades que tivemos que superar como: os softwares, eles tiveram que utilizar em seus grupos com recursos próprios devido à dificuldade de disponibilizar o laboratório de informática para a turma, a construção dos sólidos vazados não saíram a contento por falta de estabelecer detalhes para a construção, detalhes esses que colocarei com mais propriedades em uma próxima aplicação, em outro ano letivo, entre outros pequeninos erros simples que foram contornados tranquilamente.

Mas, mesmo com alguns descuidos de quando se aplica inicialmente um projeto, podemos concluir que os objetivos esperados foram alcançados de maneira muito produtiva, foi muito bom ver os alunos empenhados em todas as etapas do trabalho em seus respectivos grupos, o ar de alegria deles na conclusão dessas etapas e principalmente ver com satisfação que eles puderam visualizar bem os elementos dos sólidos e acompanharem bem a construção deles, a partir das planificações e acompanharem tranquilamente as demonstrações das fórmulas a partir dos sólidos construídos, em especial os vazados.

Não podemos esquecer também de citar o contentamento de poder usar a proposta do trabalho para realizar um projeto com nossos alunos monitores do nosso instituto (IFAL – campus Maceió) onde puderam interagir contribuindo com mais ideias e construções que colaboraram para desenvolver não só o conhecimento deles próprios como continuará servindo para a melhoria da aprendizagem dos alunos do instituto que os procuram para as aulas de monitoria. Ainda mais, nos alegrou o entusiasmo desses monitores em participarem do MATFEST com o projeto, apresentando as ideias do projeto para professores e alunos de outras instituições de ensino, pudendo então, dividir as propostas do projeto com mais escolas e, com muita propriedade, mostrar que o projeto pode ser facilmente aplicável.

No computo final de todo o processo do trabalho, recomendamos com convicção a aplicação desse projeto para que todos os professores e alunos possam interagir no encaminhar da construção dos conhecimentos sobre os sólidos geométricos propostos nesse estudo, pois, vimos que é um roteiro bastante estimulante e oferece a possibilidade de todos contribuírem para o desenvolvimento das ideias e chegarem juntos, através das comparações não só entre sólidos mas também entre os trabalhos produzidos por todos, a um resultado final que, mesmo que não seja uma representação da perfeição, é um resultado obtido pelo esforço conjunto e que contribui grandemente para construção do entendimento do assunto com absoluta certeza.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Celso. **A avaliação da aprendizagem escolar.** 2. ed. Petrópolis-RJ: Editora VOZES, 2002.

ARRANHA, Maria Lúcia. **Filosofia da educação.** 2ª ed., editora MODERNA Ltda – São Paulo – 1996.

ARRUDA, R; et al. **Teorema de Pappus**. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfffEAF/teorema-pappus>. Acesso em: 23 maio 2015.

BASE nacional comum curricular. 2015.

CARVALHO, E. **Licenciatura em Matemática**: biografia de Commenius. Salvador: FTCead. [2008].

EUCLIDES. **Os elementos**. Fundação editora da UNESP – São Paulo – 2009.

HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em sala de aula**. SBM – Rio de Janeiro, 2013.

LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SOLGRAF Publicação Ltda, de 1999. v. 2, p. 251-299.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 2 , p.1 – 270.

PESCO, Dirce Uesu; Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. **Geometria básica**. v.1, n. 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

SERRÃO, Alberto Nunes. **Exercícios e problemas de geometria no espaço**. 3ª ed. AO LIVRO TÉCNICO S.A. – Rio de janeiro, 1968.

ANEXO I

TABELA COMPARATIVA

SÓLIDOS	PRISMA					PIRÂMIDES				CILINDRO		CONE		ESFERA
CLASSIFICAÇÃO	PRISMA OBLÍQUO	PRISMA RETO	PRISMA DE BASE REGULAR	CUBO	PARALELEPÍPEDO	PIRÂMIDE OBLÍQUA	PIRÂMIDE RETA	PIRÂMIDE DE BASE REGULAR	TETRAEDRO	CILINDRO CIRCULAR OBLÍQUO	CILINDRO CIRCULAR RETO	CONE CIRCULAR OBLÍQUO	CONE CIRCULAR RETO	
PLANIFICAÇÃO														
ESBOÇO														
ELEMENTOS PRINCIPAIS														
FÓRMULAS DOS ELEMENTOS														
ÁREA DA BASE														
ÁREA LATERAL														
ÁREA TOTAL														
VOLUME														