

FRANCISCO CARLOS JACOB

UMA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA PARA FIGURAS PLANAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS – BRASIL
2015**

A Deus e às minhas amadas esposa e filha,
que me apoiaram em todos os momentos.

Agradeço a Deus, que me deu sabedoria para vencer mais uma etapa de minha vida, e a meu orientador Kennedy Pedroso, pelas orientações precisas em todos os momentos solicitados, pela dedicação e carinho que me foram dispensados.

Sumário

Resumo	V
Abstract	VI
1 Um pouco de história	3
2 Área de figuras planas elementares	7
2.1 Área do quadrado e do retângulo	7
2.2 Área do paralelogramo e do triângulo	11
2.3 Definição geral de área	14
3 O Método de Exaustão de Eudoxo-Arquimedes	18
4 Área de Lebesgue	23
4.1 Conceitos Preliminares	23
4.2 Figuras discretas	25
4.3 Figuras planas abertas	27
4.4 Área exterior	34
4.5 Área interior	37
4.6 Figuras mensuráveis	38
4.7 Experimento: cálculo da área de figuras planas não elementares	39
4.8 Conclusão	44

RESUMO

JACOB, Francisco Carlos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2015. **Uma Construção do conceito de Área para Figuras Planas.** Orientador: Kennedy Martins Pedroso.

A presente dissertação tem o objetivo de oferecer ao estudante uma visão global do conceito da área de figuras planas. No desenvolvimento, procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de definições e propriedades. Procuramos também, sempre que possível, expor os conceitos logo após as figuras, pois, com elas, o leitor poderá ter uma melhor compressão dos mesmos. Sempre que possível, apresentamos as demonstrações das fórmulas de cálculos de áreas das figuras planas elementares, pois estas demonstrações ajudam na compreensão da generalização do conceito de área. No final, temos um experimento prático usando triângulos e quadrados na aplicação do Princípio da Exaustão. Aconselhamos o leitor a buscar experimentos usando outras figuras planas, pois a prática constante aprimora o aprendizado, aguça a crítica e amplia a visão. Finalmente, como há sempre certa distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaria de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, pelos quais agradeço.

ABSTRACT

JACOB, Francisco Carlos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, November, 2015. **An Area Concept to Construction Figures Planas**. Advisor: Kennedy Martins Pedroso.

The present dissertation has the aim of offering students the global view of the concept of the area of flat figures. Throughout the development, we tried to follow a logical order in the presentation of definitions and properties. We also tried whenever possible to expose the concepts right after the figures, since with them, the reader will also have a better understanding. Whenever possible, we presented the demonstrations of the formulas for the calculation of the areas of elementary flat figures, for these demonstrations help the understanding of the generalization of the concept of area. At the end, we present a practical experiment using triangles and squares in the application of the Exhaustion Principle.

Introdução

A imensa diversidade na forma que uma figura plana pode assumir deveria ser suficiente para nos incentivar a aprender mais sobre o conceito da medida de sua área. No entanto, do ensino fundamental e médio, extrai-se mais fórmulas para figuras planas elementares do que uma metodologia de como a área dessas figuras pode ser utilizada para obter respostas para um grupo muito mais amplo e numeroso de formas planas.

Neste trabalho, propomos uma “transição suave” entre a área de retângulos e triângulos e os métodos que nos levam à medida da área de uma figura plana disforme, apresentando um caminho repleto de possibilidades para orientar e motivar melhor o ensino de geometria, tanto em aulas práticas quanto em aulas teóricas.

Para tal, vamos introduzir a medida da área de figuras planas de forma sistematizada, começando pelas figuras mais simples, mostrando como o Método de Exaustão, proposto por Eudoxo de Cnido (408 a 355 a.C.) e desenvolvido mais amplamente por Arquimedes de Siracusa (287 a 212 a.C.), utiliza-se da área de algumas figuras planas elementares para a obtenção da área de outras figuras planas.

Como um complemento de grande importância, apresentaremos noções elementares da Teoria de Medida, proposta por Lebesgue no início do século XX, mais precisamente em 1904, com uma linguagem e exposição que, em sua maior parte, beneficiam o entendimento de professores do ensino médio, dando oportunidade para que criem seu próprio material de aulas sobre um texto rigorosamente construído.

O Capítulo 1 traz uma breve história sobre o cálculo da áreas de figuras planas em seus primórdios gregos indicando as contribuições importantes dos matemáticos Eudoxo e Arquimedes. A teoria mais regularmente utilizada no cálculo da medida de figuras, que no nosso caso será a área, é atribuída a Henri Lebesgue e ao seu trabalho, também nesse primeiro capítulo, faremos algumas observações e referências.

O Capítulo 2 dá uma introdução ao cálculo da área de figuras planas elementares. O elemento de área unitária é definido: qualquer quadrado cujo lado meça

uma unidade de comprimento terá área igual a uma unidade. Em seguida são calculadas as áreas de um quadrado qualquer, retângulos, paralelogramos, triângulos e polígonos. Toda abordagem é construtiva. A última seção do capítulo trata da definição geral de área com idéias que servirão de base para o conceito de área construído pela teoria de Lebesgue.

O Capítulo 3 apresenta o Método de Exaustão proposto por Eudoxo e aprimorado por Arquimedes. Atentamos para a construção original proposta nos *Elementos de Euclides*, um clássico da literatura mundial. Esse capítulo ilustra a definição geral de área dada no capítulo anterior e indica a necessidade de uma teoria organizada para o cálculo da área de figuras mais complexas tal como é apresentada no capítulo seguinte.

O Capítulo 4 inicia a construção do conceito de área se valendo da área de quadrados. As primeiras figuras tratadas são aquelas obtidas como união (disjunta) de quadrados; essas figuras serão chamadas de *discretas*. O próximo passo é trabalhar o conceito de área para figuras planas que sempre possam conter figuras discretas, nesse ponto introduzimos o importante conceito de *figura plana aberta*. Na sequência, as figuras planas abertas serão apresentadas como os blocos de construção para a *área exterior de Lebesgue*, conceito que norteará todas as construções do capítulo. Finalizando o nosso trabalho, o capítulo também mostra um experimento prático para o cálculo da área de uma figura plana disforme usando figuras elementares, um “princípio de exaustão” associado a rudimentos da teoria de medida de Lebesgue que exemplifica a idéia de todo o texto.

Capítulo 1

Um pouco de história

As contribuições da geometria grega para o desenvolvimento do cálculo estão gravadas, sobretudo, nos trabalhos de Eudoxo de Cnido (408 a 355 a.C.) e Arquimedes (287 a 212 a.C.) envolvendo o Método de Exaustão. Entretanto, é impossível nos remetermos diretamente aos trabalhos desses dois matemáticos da antiguidade sem compreendermos o próprio desenvolvimento da Geometria e da Matemática grega anterior a estes, incluindo as contribuições dos egípcios e babilônios.

Segundo Eves [1], a geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.C a 1600 a.C deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto trapezoidal. Considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva (regras corretas para $\pi = 3$).

Preleciona ainda Eves [1] que 26 dos 110 problemas dos papiros de Moscou e Rhind são geométricos. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos. Assume-se que a área de um círculo é igual à de um quadrado de lado igual a $8/9$ do diâmetro e que o volume de um cilindro reto é o produto da área da base pelo comprimento da altura. Investigações recentes parecem mostrar que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer é o semi-produto da base pela altura. Alguns problemas parecem envolver cotangente do ângulo diedro entre a base e a face da pirâmide, e outros mostram algum conhecimento da teoria das proporções. Contrariando histórias muito repetidas e aparentemente infundadas, não se encontrou nenhuma evidência documental de que os egípcios tinham ciência, mesmo que num caso

particular, do teorema de Pitágoras.

Os últimos séculos do segundo milênio a.C. testemunharam muitas mudanças econômicas e políticas. Algumas civilizações desapareceram, o poder do Egito e da Babilônia declinou, e outros povos, especialmente os hebreus, os assírios, os fenícios e os gregos, passaram ao primeiro plano. O aparecimento dessa nova civilização se deu nas cidades comerciais espalhadas ao longo das costas da Ásia Menor e, mais tarde, na parte continental da Grécia, na Sicília e no litoral da Itália. A visão de racionalismo crescente, o homem começou a indagar como e por quê.

Nessa atmosfera, a Grécia antiga desponta como principal polo científico do mundo e marca o início da Matemática grega e do nascimento de uma legião de matemáticos e filósofos que vão influenciar profundamente o conhecimento matemático e científico, veja [2] e [6].

Começemos por Pitágoras.

Pitágoras	
Pré-socráticos	
	Nome completo Ο Πυθαγόρας
	Escola/Tradição: Pitagóricos, Naturalismo, Escola Itálica
	Data de nascimento: ca. 571 a. C. - 570 a. C.
	Local: Samos
	Data de falecimento ca. 500 a. C. - 490 a. C.
	Principais interesses: Metafísica, Música, Matemática, Ética, Política, Astronomia
	Trabalhos notáveis Teorema de Pitágoras, Proporção áurea, Musica Universalis
	Influências Filolau, Alcmeón, Parmênides, Platão, Euclides, Empédocles, Hipaso, Kepler

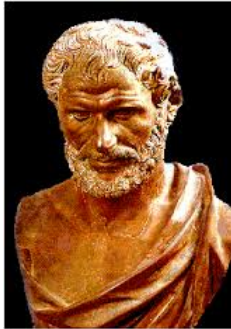
Fonte: www.wikipédia.org

Admite-se geralmente que os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da Teoria dos Números e, ao mesmo tempo, do lançamento das bases do futuro misticismo numérico, foram dados por Pitágoras e seus seguidores movidos pela filosofia da fraternidade. É atribuído a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecido pelo seu nome - que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos.

Pitágoras acreditava que os números inteiros eram a matéria essencial para a construção do universo. Portanto, a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ provocou alguma consternação nos meios pitagóricos. Tão grande foi o “escândalo lógico” que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo.

Por volta de 370 a.C., o problema foi resolvido por Eudoxo, um brilhante

discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, através de uma nova definição de proporção.



Eudoxo (em grego: Εὐδόξος; Cnido, entre 408 e 355 a.C.¹) foi um astrônomo, matemático e filósofo grego.

Viajou ao Egito, de onde teria trazido o cálculo mais exato do ano solar que introduziu na Grécia. O valor que atribuía era de 365 dias e 1/4, valor adotado pelo calendário juliano.

Viveu quase sempre em sua cidade natal, onde fundou uma escola e um observatório. Definiu, também, o período de oito anos, chamado *octeteris* e que tinha papel importante no calendário grego.

Inventou diversos instrumentos, entre os quais a "aranhá", que era um quadrante solar e que foi assim chamado devido às linhas entrecruzadas que o compõem.

Fonte: mercaba.org

Eudoxo apresentou a sua teoria das proporções como modo de ultrapassar a “crise” surgida na Matemática grega no momento da descoberta dos incomensuráveis, que deitava por terra a teoria das proporções dos pitagóricos.

O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos Elementos de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada em 1872 pelo alemão Richard Dedekind (1831 a 1916).

Com Arquimedes (século II a.C), a Matemática da antiguidade alcançou sua maior projeção, uma vez que sua riqueza de pensamentos em várias áreas do conhecimento o tornou o mais célebre dos matemáticos gregos e o mais estudado a partir do século XIV da era cristã.

Arquimedes de Siracusa

Uma pintura de Domenico Fetti (1620) que retrata Arquimedes de Siracusa. Ele está sentado à uma mesa, com a cabeça inclinada e a mão no queixo, em um estado de profunda reflexão. Sobre a mesa há um globo terrestre, um compasso, um martelo e outros instrumentos matemáticos e de engenharia. A iluminação é dramática, destacando o rosto e as mãos do homem.

Conhecido(a) por	Alavanca, Hidrostática, Parafuso de Arquimedes, infinitesimais
Nascimento	ca. 287 a.C. Siracusa, Sicília, Magna Grécia
Morte	ca. 212 a.C. (75 anos) Siracusa, Sicília, Magna Grécia
Ocupação	Inventor, físico, matemático, filósofo e engenheiro.
Principais interesses	Astronomia, Matemática, Engenharia, Física

Fonte: www.wikipedia.org

Arquimedes aplicou o Método de Exaustão para provar os inúmeros resultados relativos a comprimentos, áreas e volumes de diversas figuras geométricas e também ao cálculo de centros de gravidade; alguns destes resultados já eram conhecidos mas outros eram inteiramente novos.

Em relação ao estudo do cálculo, sobretudo o integral, Arquimedes foi sem dúvida determinante para a alavancada dos estudos mais avançados nesse campo até alcançar um formato mais próximo do atual proposto por Newton e Leibniz, no século XVII.

Henri Léon Lebesgue (Beauvais, 28 de junho de 1875 — Paris, 26 de julho de 1941) foi um matemático francês. Estudou de 1894 a 1897 na Escola Normal Superior de Paris e foi professor no Lycée Henri-Poincaré de Nancy. Lá ele descobriu a integral que leva seu nome (*Sur une généralisation de l'intégrale définie*, Comptes Rendus 1901). Após o doutorado em 1902 (*Intégrale, Longueur, Aire*, Annali di Mathematica), foi professor em Rennes. Em 1906 obteve uma cátedra em mecânica em Poitiers. Em reconhecimento de seu trabalho ministrou neste meio tempo cursos no Collège de France, dos quais resultaram os livros *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904) e *Leçons sur les séries trigonométriques* (1906). Em 1910 foi professor assistente na Sorbonne, onde obteve a cátedra em 1918. A partir de 1921 foi professor no Collège de France.

Henri Lebesgue $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2|x|}$

Cálculo integral



Nacionalidade	Francês
Nascimento	28 de junho de 1875
Local	Beauvais
Morte	26 de julho de 1941 (66 anos)
Local	Paris
Atividade	
Campo(s)	Cálculo integral
Alma mater	Escola Normal Superior de Paris
Tese	1902: <i>Intégrale, longueur, aire</i>
Orientador(es)	Émile Borel
Orientado(s)	Paul Montel, Zygmunt Janiszewski, Georges de Rham
Conhecido(a) por	Integral de Lebesgue, medida de Lebesgue, ponto de Lebesgue
Prêmio(s)	Prêmio Poncelet (1914)

Fonte: www.wikipedia.org

Lebesgue generalizou o conceito de integral, introduzindo assim o conceito de medida. Levam seu nome a medida de Lebesgue e a integral de Lebesgue. A medida de Lebesgue generaliza as medidas anteriormente usadas, como por exemplo a medida de Jordan, e tornou-se logo em seguida, juntamente com a integral de Lebesgue, uma ferramenta padrão da Análise Real. A importância das idéias de Lebesgue residem no fato de que sua teoria da integração (integral de Lebesgue) possui uma série de características práticas que faltam à integral de Riemann.

Capítulo 2

Área de figuras planas elementares

Nesse capítulo iremos tratar de medir a porção do plano ocupada por uma figura plana F . Para isso, compararemos F com uma unidade de área. O resultado dessa comparação será um número que irá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área. Aqui daremos um significado preciso a esta idéia e estabeleceremos as fórmulas para a área das figuras geométricas mais conhecidas. Principais referências bibliográficas utilizadas: [3] e [4].

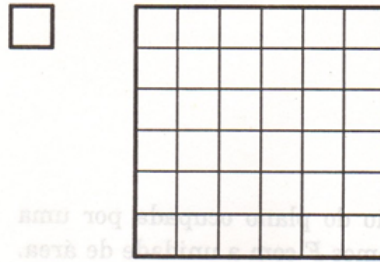
2.1 Área do quadrado e do retângulo

O quadrado é o quadrilátero que possui os 4 lados iguais e os 4 ângulos retos. Concionaremos como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Vamos chamá-lo o quadrado unitário.

Qualquer quadrado cujo lado meça uma unidade de comprimento terá, por definição, área igual a uma unidade.

Por meio de paralelas aos seus lados, podemos decompor um quadrado Q , cujo lado tem como medida o número inteiro positivo n , em n^2 quadrados justapostos, cada um deles de lado unitário e portanto com área 1. Assim o quadrado Q terá área n^2 .

De modo análogo, se o lado de um quadrado Q tem por medida $1/n$, onde n é inteiro positivo, então podemos decompor o quadrado unitário, mediante paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q . Estes n^2 quadrados congruentes a Q compõem um quadrado de área 1. Segue-se que a área de Q deve satisfazer à condição $n^2 \times [\text{área de } Q] = 1$ e, portanto, $[\text{área de } Q] = 1/n^2$.



Quadrado de lado 6, decomposto em $6^2 = 36$ quadrados unitários

Portanto, se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional m/n positivo, então podemos decompor cada lado de Q em m segmentos, cada um dos quais de comprimento $1/n$. Traçando paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de Q em m^2 quadrados, cada um dos quais com lado $1/n$. Assim, a área de cada um desses quadrados menores é $1/n^2$. Segue-se que a área de Q deve ser

$$m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

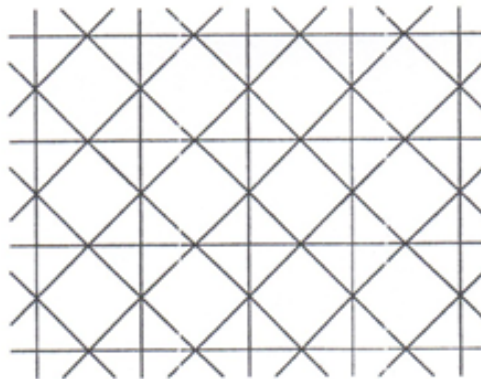
ou seja,

$$[\text{área de } Q] = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Podemos então concluir que a área de um quadrado Q cujo lado tem para medida um número racional $a = m/n$ é dada pela expressão:

$$[\text{área de } Q] = a^2.$$

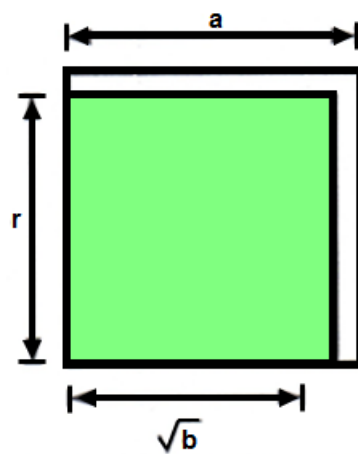
Mas existem quadrados cujos lados são incomensuráveis com o segmento unitário. Seja Q um desses: o lado de Q tem como medida o número irracional a . Mostraremos agora que, ainda neste caso, deve-se ter $[\text{área de } Q] = a^2$.



há dois tipos de quadrados: uns com lados inclinados, outros com lados horizontais e verticais. seja qual for a unidade de comprimento escolhida, pelo menos os quadrados de um tipo têm lado irracional.

Vamos raciocinar de modo indireto. Dado qualquer número $b < a^2$, mostraremos que deve ser $b < [\text{área de } Q]$. Em seguida, provaremos que $a^2 < c$ implica em $[\text{área de } Q] < c$. Isto mostrará que a área de Q não pode ser um número b menor nem um número c maior do que a^2 . Portanto, concluiremos que a $[\text{área de } Q] = a^2$. Vamos demonstrar a primeira parte desta afirmação. A segunda parte é inteiramente análoga e por isso será omitida.

Seja, pois, b um número tal que $b < a^2$. Tomamos um número racional r , inferior a a , porém, tão próximo de a que se tenha $b < r^2 < a^2$ (basta tomar r , uma aproximação por falta de a , com erro inferior a $a - \sqrt{b}$. Então $\sqrt{b} < r < a$ e portanto $b < r^2 < a^2$).



O quadrado lado r está contido no quadrado Q , de lado a . Logo $r^2 < \text{área de } Q$.
Como $\sqrt{b} < r$, temos $b < r^2 < \text{área de } Q$.

No interior de Q , tomamos um quadrado Q' de lado r . Sendo r racional, a área deste quadrado é r^2 . Como Q' está contido no interior de Q , devemos ter $[\text{área de } Q'] < [\text{área de } Q]$, ou seja $r^2 < [\text{área de } Q]$. Mas sabemos que $b < r^2$. Conclusão: $b < [\text{área de } Q]$. Assim, todo número real b , inferior a a^2 , é também menor do que a área de Q . Da mesma maneira se prova que todo número real c , maior do que a^2 , é maior do que a área de Q . Logo, a área de Q não pode ser menor nem maior do que a^2 .

Concluimos, desta maneira, que a área de um quadrado Q , cujo lado mede a , deve ser expressa pela fórmula

$$[\text{área de } Q] = a^2.$$

Na fórmula acima, a é um número real positivo qualquer: inteiro, fracionário ou irracional.

Consideremos agora a área do retângulo. O retângulo é o quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.

Se os lados de um retângulo R têm para medidas os números inteiros m e n , então, mediante paralelas aos lados, podemos decompor R em mn quadrados unitários, de modo que se deve ter $[\text{área de } R] = mn$.

Mais geralmente, se os lados do retângulo R têm como medidas dois números racionais a e b , podemos escrever estes números como duas frações $a = p/q$ e $b = r/q$, com o mesmo denominador q . Dividimos cada lado de R em segmentos de comprimento $1/q$. O lado que mede a ficará decomposto em p segmentos justapostos, cada um deles medindo $1/q$. O lado que mede b ficará subdividido em r segmentos iguais, de comprimento $1/q$. Traçando paralelas aos lados a partir dos pontos de subdivisão, o retângulo R ficará subdividido em $p \cdot r$ quadrados, cada um deles de lado $1/q$. A área de cada um desses quadrinhos é $(1/q)^2 = 1/q^2$. Logo a área de R deverá ser igual a

$$(pr) \cdot \frac{1}{q^2} = \frac{pr}{q^2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q}$$

ou seja, $[\text{área de } R] = ab$.

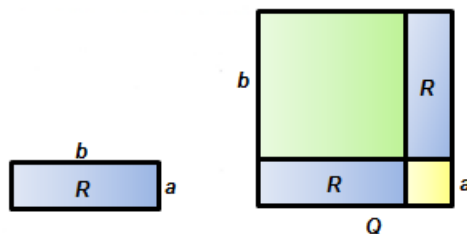
Vemos assim que, quando os lados de um retângulo R têm por medidas os números racionais a e b , a área de R é expressa pela fórmula:

$$[\text{área de } R] = ab.$$

Diz-se, então, que a área do retângulo é o produto da base pela altura.

Isto foi mostrado acima apenas quando a e b são números racionais, mas é uma fórmula geral, válida mesmo que os números a e b sejam irracionais (ou um deles é racional e o outro irracional).

Vamos provar isso, usando um artifício simples e elegante, fazendo recair a área do retângulo na área do quadrado. Procedendo assim, ficamos inclusive dispensados de considerar separadamente o caso em que a base e a altura têm medidas racionais.



O quadrado Q contém dois retângulos iguais a R mais um quadrado de lado a e outro de lado b .

Dado o retângulo R , de base b e altura a , construiremos o quadrado Q , de lado $a + b$, o qual contém 2 cópias de R e mais dois quadrados, um de lado a e outro de lado b . Como sabemos,

$$[\text{área de } Q] = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Por outro lado, como os quadrados menores têm áreas iguais a a^2 e b^2 respectivamente, temos

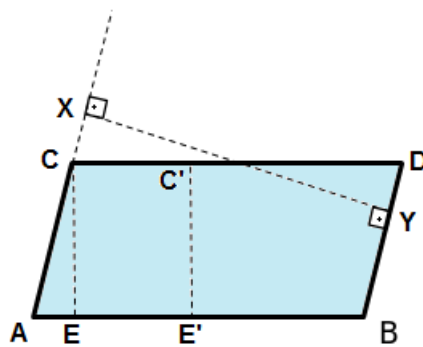
$$[\text{área de } Q] = a^2 + b^2 + 2 \times [\text{área de } R].$$

Segue-se que $[\text{área de } R] = ab$.

2.2 Área do paralelogramo e do triângulo

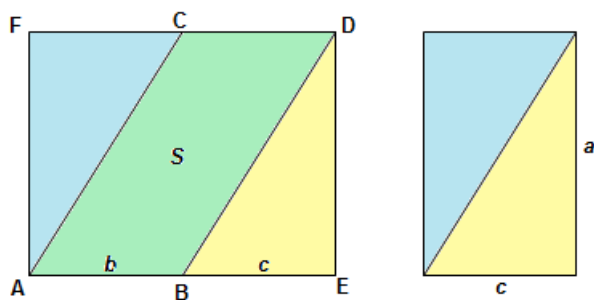
Da área do retângulo, passa-se facilmente para a área do paralelogramo. Um paralelogramo é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

Quando se toma um lado do paralelogramo como base, chama-se altura do paralelogramo a um segmento perpendicular que liga a base ao lado oposto (ou ao seu prolongamento).



No paralelogramo $ABDC$, baixamos uma perpendicular do ponto C à base AB . O segmento CE é uma altura do paralelogramo. Se tomássemos outra perpendicular $C'E'$, ligando CD a AB , teríamos outra altura. Evidentemente, como AB e CD são paralelos, $\overline{CE} = \overline{C'E'}$, ou seja, todas as alturas relativas à base AB têm o mesmo comprimento. Poderíamos ter considerado o lado BD como base. Então XY , perpendicular a AC e BD , seria uma altura, relativa à base BD . É claro que \overline{XY} não precisa ter o mesmo comprimento das alturas relativas à base AB .

Seja $ABDC$ um paralelogramo cuja área S queremos calcular. Suponhamos que a sua base AB tem comprimento b e sua altura DE tem comprimento a .



O retângulo AEDF, cuja área vale $ba + ca$ é formado pelo paralelogramo, cuja área S se deseja calcular, mais dois triângulos que, colocados juntos à direita, formam um retângulo de base c e altura a .

O paralelogramo $ABDC$ está contido num retângulo de base $b + c$ e altura a . Como vimos, a área desse retângulo é $(b + c) \cdot a = ba + ca$. Por outro lado, o retângulo é formado pelo paralelogramo dado mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ca . Portanto $ba + ca = S + ca$, de onde concluímos que $S = ba$.

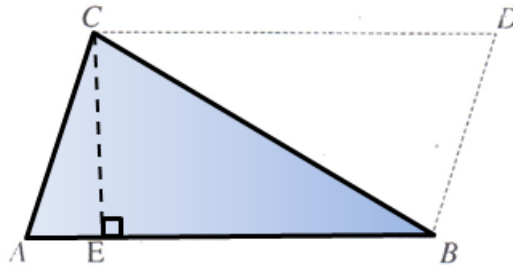
Assim, a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

Em particular, vemos que o produto do comprimento de qualquer base de um paralelogramo pelo comprimento da altura correspondente é constante (não depende da base escolhida).

Vemos também que, dadas as retas paralelas r , s e o segmento AB sobre r , todos os paralelogramos $ABDC$, com C e D sobre a reta s , têm a mesma área.

Da área do paralelogramo, passa-se imediatamente para a área do triângulo, pois todo triângulo é a metade de um paralelogramo.

Mais precisamente, dado um triângulo ABC , cuja área desejamos calcular, traçamos, pelos vértices C e B , respectivamente, paralelas aos lados AB e AC . Estas retas se encontram no ponto D e fornecem um paralelogramo $ABDC$. Tomemos a altura CE deste paralelogramo. Se $\overline{AB} = b$ e $\overline{CE} = a$, sabemos que a [área de $ABDC$] = ba . Sendo assim, os triângulos ABC e BCD são congruentes (têm um lado comum compreendido entre dois ângulos iguais), logo têm a mesma área.



Os triângulos ABC e BCD são congruentes (pois têm um lado comum, compreendido entre dois ângulos iguais), logo têm a mesma área.

Portanto, $[\text{área de } ABDC] = 2 \times [\text{área de } ABC]$ e por conseguinte:

$$[\text{área de } ABC] = \frac{1}{2}ba.$$

Isto se exprime dizendo que a área de um triângulo é a metade do produto de uma base pela altura correspondente.

Num triângulo, temos três escolhas para a base b e, portanto, três escolhas para a altura a . Seja qual for a escolha, o produto ba será o mesmo, pois, em cada caso ele fornece o dobro da área do triângulo.

Sejam r e s retas paralelas e b um número real positivo. Segue-se da fórmula acima que todos os triângulos ABC com vértice A sobre r , base BC sobre s e $\overline{BC} = b$, têm a mesma área.

Para um polígono qualquer, o processo de calcular sua área (espaço que a figura ocupa no plano) consiste em subdividi-lo em triângulos, paralelogramos ou quaisquer outras figuras cujas áreas sabemos calcular. A área do polígono procurada será a soma das áreas das figuras em que o decomposemos.

Por exemplo, considere a malha quadriculada onde cada quadrado tem lados medindo uma unidade de comprimento (e portanto área unitária) e seja o hexágono $ABCDEF$ para o qual queremos calcular sua área.

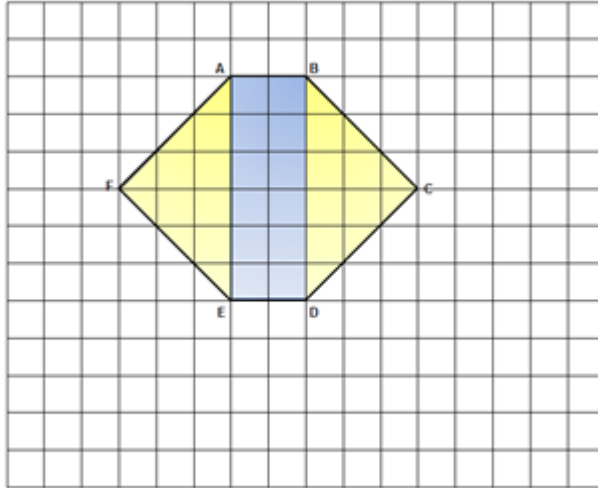


Fig.3.8

Seja S o valor a ser calculado. Assim,

$$\begin{aligned} S &= [\text{área de } ABDE] + [\text{área de } AFE] + [\text{área de } BCD] \\ &= 2 \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 6}{2} = 12 + 9 + 9 = 30. \end{aligned}$$

Poderíamos também ter calculado S por meio das áreas dos quadrados unitários e triângulos de bases e alturas iguais a 1. Veja que o hexágono $ABCDEF$ contém 24 quadrados unitários e 12 triângulos de base e altura com medidas iguais a 1. Assim,

$$S = 12 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} + 24 \cdot 1 = 6 + 24 = 30.$$

2.3 Definição geral de área

Nos parágrafos anteriores, mostramos que se pode associar a cada polígono P um número real não-negativo, chamado a *área de P* , com as seguintes propriedades:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais;
2. Se P é um quadrado com lado unitário, então $[\text{área de } P] = 1$;
3. Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos, P_1, \dots, P_n , tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i .

Segue-se da terceira propriedade acima que se o polígono P está contido no polígono Q então a área de P é menor do que a área de Q .

Perceba que as fórmulas para as áreas do quadrado, do retângulo, do triângulo e do paralelogramo, que obtivemos acima foram todas deduzidas a partir destas três propriedades.

Vamos dar agora uma definição para a área de uma figura plana F .

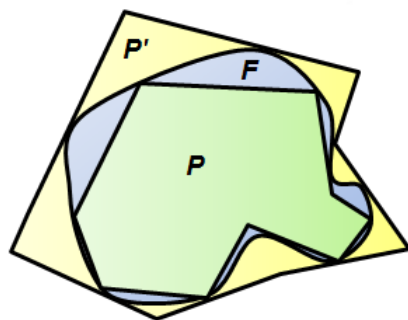
A área de uma figura plana F deve ser um número real não negativo, que indicaremos por $a(F)$. Ele será bem determinado se conhecermos seus valores aproximados, por falta ou por excesso.

Os valores de $a(F)$ aproximados por falta são, por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F . Os valores de $a(F)$ aproximados por excesso são as áreas dos polígonos P' que contém F . Assim, quaisquer que sejam os polígonos P (contidos em F) e P' (contendo F), o número real $a(F)$ satisfaz

$$a(P) \leq a(F) \leq a(P').$$

Para simplificar, em vez de usarmos polígonos quaisquer, vamos usar os polígonos retangulares, para os quais é mais fácil calcular a área.

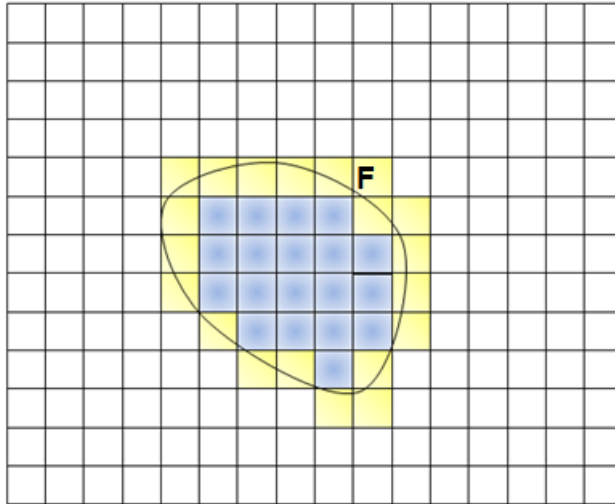
Um polígono retangular é a reunião de vários retângulos justapostos (isto é, dois desses retângulos têm em comum no máximo um lado). A área de um polígono retangular é a soma das áreas dos retângulos que o compõem.



Uma figura plana F (azul), contida num polígono P' (amarelo) e contendo um polígono P (verde). A área de P é uma aproximação por falta e a área de P' é uma aproximação por excesso, para a área de F .

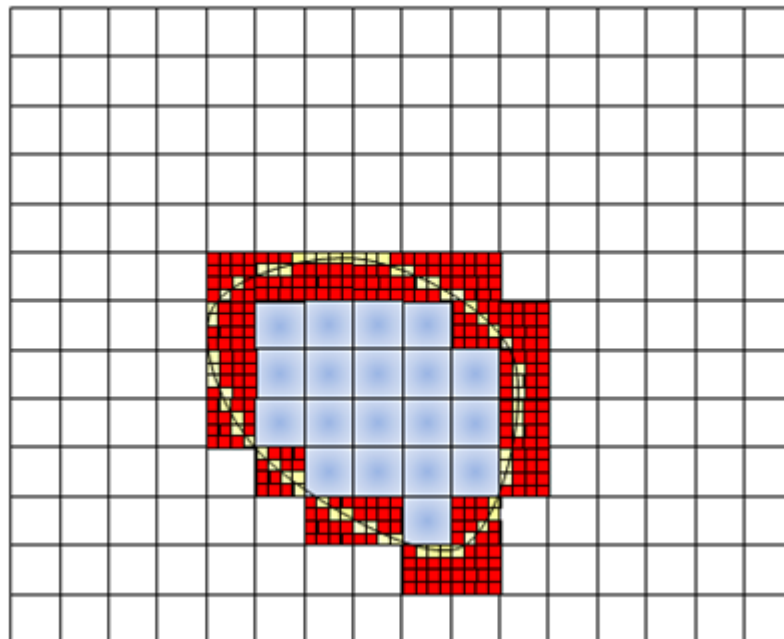
Podemos também colocar a figura plana F em um papel quadriculado onde todos os quadrados são unitários (área igual a um). Assim, o valor de $a(F)$ aproximado por falta será a soma das áreas de todos os quadrados unitários contidos em F e o valor de $a(F)$ aproximado por excesso será a soma das áreas de todos os quadrados unitários que contém F .

Vejamos. Seja F uma figura plana em um papel quadriculado com quadrados unitários.



Na malha quadriculada da figura acima, F contém 19 quadrados unitários e está contida em 39 quadrados unitários. Assim, podemos dizer que o valor de $a(F)$ por falta é 19 e por excesso é 39 e portanto $19 \leq a(F) \leq 39$.

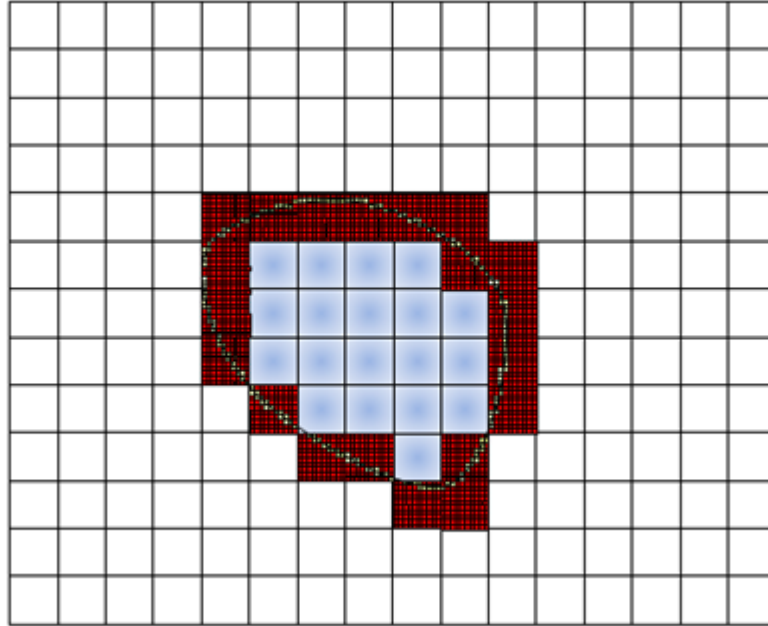
Vamos agora, através de paralelas aos lados, subdividir cada quadrado unitário amarelo da figura anterior em 16 quadrados congruentes.



Da área externa temos que subtrair 146 quadrados de área $1/16$ e na área interna somar 112 quadrados de área $1/16$. Assim, vamos aumentar a aproximação por falta de $a(F)$ e diminuir a aproximação por excesso de $a(F)$. Portanto

$$19 + \frac{112}{16} < a(F) < 39 - \frac{146}{16} \Leftrightarrow 26 < a(F) < 29,875.$$

Procedendo da mesma forma que a anterior, vamos agora, através de paralelas aos lados, dividir cada quadrado unitário amarelo em 100 quadrados congruentes.



Da área externa temos que subtrair 1010 quadrados de área $1/100$ e na área interna somar 791 quadrados de área $1/100$. Assim, vamos aumentar a aproximação por falta de $a(F)$ e diminuir a aproximação por excesso de $a(F)$. Portanto

$$19 + \frac{791}{100} < a(F) < 39 - \frac{1010}{100} \Leftrightarrow 26,9 < a(F) < 28,9.$$

Procedendo desta forma vamos cada vez mais aumentar a aproximação por falta e diminuir a aproximação por excesso até obtermos o valor de $a(F)$.

No próximo capítulo daremos uma demonstração para o cálculo da área do círculo utilizando o Método de Exaustão de Eudoxo.

Capítulo 3

O Método de Exaustão de Eudoxo-Arquimedes

O Método de Exaustão é também conhecido por princípio de Eudoxo-Arquimedes por ter na sua base a teoria das proporções apresentada por Eudoxo de Cnido (408 a 355 a.C.) e por Arquimedes de Siracusa (287 a 212 a.C.) ter sido o matemático que maior visibilidade lhe deu. Tal estudo girava em torno da quadratura do círculo.

O método de Eudoxo consistia em inscrever polígonos regulares em uma figura curvilínea, e ir dobrando o número de lados até que a diferença entre a área da figura e a do polígono inscrito se tornasse menor do que qualquer quantidade dada.

Arquimedes propôs um refinamento desse método, comprimindo a figura entre duas outras cujas áreas mudam e tendem para a da figura inicial, uma crescendo e outra decrescendo.

Um exemplo interessante desse método é a área do círculo, que era envolvida por polígonos inscritos e circunscritos, de modo que, aumentando-se o número de lados, suas áreas se aproximam da área da circunferência, ou seja, a diferença entre as áreas dos dois polígonos deve ser tornada menor do que qualquer quantidade positiva dada quando o número de lados aumenta. Por essa razão afirma-se que Arquimedes usava um método indireto para a medida da área de figuras curvilíneas.

Analisaremos, em seguida, o modo como Arquimedes calculava a área de um círculo na primeira proposição de um de seus livros mais antigos: *Medida do Círculo*.

Essa proposição é uma maneira de determinar a área do círculo encontrando uma figura retilínea, um triângulo, no caso, cuja área seja igual à área do círculo.

Esse resultado foi, sem dúvida, um dos mais famosos em sua época, e o proced-

imento é análogo ao empregado na Proposição XII - 2 dos *Elementos de Euclides*, atribuídos a Eudoxo.

A demonstração usa um princípio fundamental conhecido como Lema de Euclides, enunciado na Proposição 1 do Livro X dos Elementos de Euclides.

Proposição X - 1 (Lema de Euclides) *Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta.*

Em outras palavras, dadas duas grandezas A e B (vamos supor que $A > B$), se subtraímos uma terceira grandeza C_1 de A , sendo C_1 maior que a metade de A , obteremos R_1 . Continuando o processo, se subtraímos uma outra grandeza C_2 de R_1 , sendo C_2 maior que a metade de R_1 , obteremos R_2 . Procedendo assim, para n suficientemente grande, obteremos uma grandeza R_n menor que a grandeza B dada inicialmente. A proposição garante, então, que podemos tornar a diferença R_n menor do que qualquer grandeza dada. A figura 1 representa esse processo, considerando segmentos de retas como grandezas para uma situação em que o resultado é atingido em duas etapas. Veja [6].

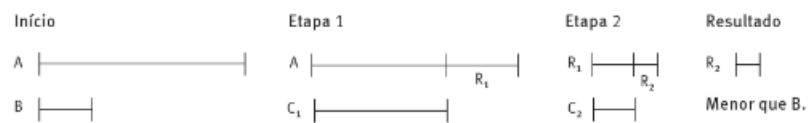


FIG 1

Veremos como esse lema é usado para demonstrar a área do círculo.

Proposição 1 (Arquimedes) dos elementos de Euclides *A área de um círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo.*



FIG 2

Demonstração. A idéia principal da demonstração é aproximar a área do círculo pelas áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos, cujos lados são sucessivamente duplicados. Cada polígono é uma união de triângulos, logo, a

área do polígono é igual à área de um triângulo cuja altura é o apótema e cuja base é o perímetro. Assim, se o apótema é o raio do círculo e se o perímetro do polígono é o perímetro da circunferência, temos o teorema.

Sejam C e T as áreas do círculo e do triângulo e I_n e C_n polígonos de n lados, respectivamente inscritos e circunscritos na circunferência, como na figura 3.

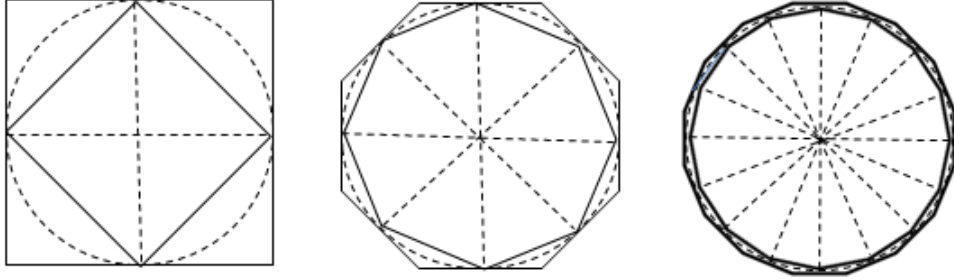


FIG 3

Vamos supor $C > T$ e $C < T$ e obter contradições, o que mostra que $C = T$. Supomos inicialmente $C > T$. Nesse caso, podemos obter uma quantidade $d = C - T > 0$. Sabemos, ainda, que I_n tem a mesma área do triângulo retângulo no qual os lados que formam o ângulo reto são iguais, respectivamente, ao apótema e ao perímetro do polígono regular de n lados inscrito no círculo (área = perímetro \times apótema). Como os apótemas e os perímetros dos polígonos inscritos são sucessivamente menores que o raio e a circunferência do círculo, isto é, menores do que os lados correspondentes do triângulo de área T , é possível concluir que [área de I_n] $< T$ para todo n . Logo, [área de I_n] $< T < C$.

Como [área de I_n] $< C$, existe uma quantidade $k_n = C - [\text{área de } I_n]$. Veremos adiante, usando o Lema de Euclides, que quando aumentamos o número de lados do polígono essa quantidade pode ser tornada menor do que qualquer quantidade dada. Logo, para n suficientemente grande, é possível obter $k_n < d$. Mas a [área de I_n] $< T < C$, logo, $d = C - T < C - [\text{área de } I_n] = k_n$, o que leva a uma contradição.

Resta mostrar que as condições da **Proposição X - 1** de euclides são satisfeitas. Em outras palavras, para concluir que k_n pode ser tornada menor que qualquer quantidade dada, temos de mostrar que, ao duplicar o número de lados do polígono, estamos retirando dessa quantidade mais que a sua metade.

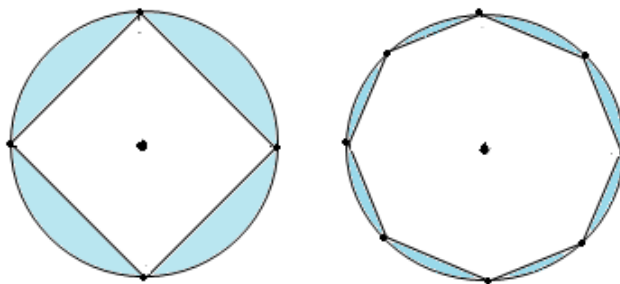


FIG 4

Isso significa mostrar que o excesso entre a área da circunferência e do polígono de $2n$ lados é menor do que a metade do excesso entre a área da circunferência e do polígono de n lados, ou seja, $k_{2n} < \frac{k_n}{2}$. Mas quando um arco de círculo é subdividido, o excesso é diminuído de um fator maior que 2. Isso é demonstrado por Euclides na **Proposição XII - 2**, do modo como se segue:

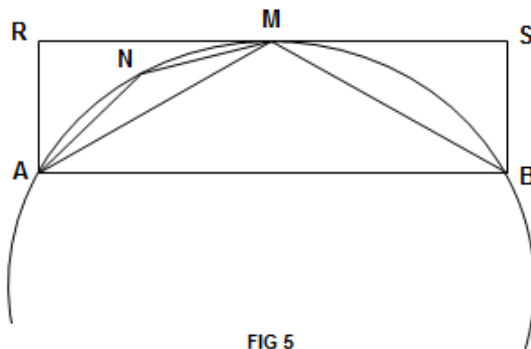


FIG 5

Seja M o ponto médio do arco de circunferência AMB (figura acima) e seja o triângulo AMB formado por dois lados do polígono inscrito na circunferência. Se RS é o lado do polígono circunscrito, a área do triângulo AMB é metade da área do retângulo $ARSB$, logo, é maior do que a metade da área do segmento circular AMB , uma vez que o retângulo é formado por um pedaço do lado do polígono circunscrito á circunferência. Sendo assim, subtraindo do segmento circular AMB o triângulo AMB , retiramos uma figura com área maior do que a metade da área do segmento circular.

Repetindo o procedimento, por exemplo, para um triângulo ANM , formado por dois lados de um polígono inscrito com o dobro do número de lados do polígono precedente, podemos sempre retirar da área que resta uma quantidade maior do que a metade da área do segmento circular original. Sendo assim, a diferença k_n entre a área do círculo e a do polígono pode ser tornada menor do que qualquer quantidade dada. Isso mostra que quando dobramos o número de lados do polígono o excesso entre a área do círculo e a do polígono é diminuído por um fator maior que 2.

Voltando à demonstração da Proposição 1 de Arquimedes, isso implica que podemos tomar $k_n < d$ no argumento anterior. Para finalizar a demonstração, supomos agora que $C < T$ e vamos encontrar novamente uma contradição. Se $C < T$, temos $d = T - C > 0$. O argumento é análogo, usando polígonos circunscritos, o que demonstra a proposição ■

Na obra de Arquimedes, um processo infinito análogo a esse é utilizado para estabelecer limites para a razão entre a circunferência e o raio do círculo, ou seja, para a quantidade que chamamos hoje de π .

Capítulo 4

Área de Lebesgue

Acreditamos que o conteúdo desse capítulo possa ser entendido por qualquer professor que tenha realizado um curso introdutório de Análise Real tal como apresentado em [7] e normalmente oferecido aos alunos do PROFMAT em pelo menos duas das disciplinas introdutórias do curso, *MA 11 – Números e Funções Reais* e *MA 22 – Fundamentos de Cálculo*.

4.1 Conceitos Preliminares

O símbolo \mathbb{R} será utilizado para representar o conjunto dos números reais.

Lema 1. *Considere os números reais x e y . Se, para todo $\varepsilon > 0$, temos $|x - y| < \varepsilon$, então $x = y$.*

Demonstração. Se fosse $x \neq y$, teríamos $|x - y| > 0$ e, ao escolhermos $\varepsilon = |x - y|$, chegaríamos a uma contradição ■

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Suponha que A possui um *limitante superior*, ou seja, um número $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$ para qualquer $x \in A$. Por exemplo, $a = 1/3$ é um limitante superior para

$$A = \{0.3, 0.33, 0.333, \dots\}.$$

Note que qualquer número maior que $1/3$ também é um limitante superior para A . Uma boa pergunta a se fazer é: *existe um limitante superior para A que seja menor que $1/3$?* A resposta é não. De fato, suponha que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \leq c < \frac{1}{3}$$

para qualquer $x \in A$. Essa última afirmação implica em

$$\begin{aligned} 0.9 &< 3c < 1 \\ 0.99 &< 3c < 1 \\ 0.999 &< 3c < 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

o que nos leva a concluir que $1 - 3c < 10^{-m}$, para qualquer $m = 1, 2, 3, \dots$, e assim, dado $\varepsilon > 0$, tome $m > \log(1/\varepsilon)$ e, pelo Lema 1, obtemos $c = 1/3$, uma contradição. No exemplo acima, $\sup(A) \notin A$ mas todos os elementos de A e o próprio $\sup(A)$ são números racionais.

Suponha que $A \subset \mathbb{R}$ tem um limitante superior. Então A tem uma infinidade de limitantes superiores e ao menor entre esses limitantes superiores damos o nome de *supremo de A* , denotado por $\sup(A)$. A existência de $\sup(A) \in \mathbb{R}$ é garantida pelo *Axioma do Supremo* para qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}$ que possua limitante superior. Concluimos que o intervalo $J = (-\infty, \sup(A)]$ é o intervalo desse tipo que “melhor se ajusta” ao conjunto A no sentido de que $A \subset J$ e para qualquer outro intervalo $I = (-\infty, a]$ tal que $A \subset I$ temos $J \subset I$. Uma outra maneira de confirmar esse ajuste é: dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x > \sup(A) - \varepsilon$.

Analogamente, dado um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ que possui limitante inferior, ou seja, um número $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq x$ para qualquer $x \in B$, existe $\inf(B)$, o *ínfimo de B* , o maior entre seus limitantes inferiores. Segue da definição de ínfimo a seguinte propriedade: dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in B$ tal que $x < \inf(A) + \varepsilon$.

Por exemplo, o ínfimo do conjunto $B = \{x \text{ racional positivo} : x^2 > 2\}$, limitado inferiormente por $b = 1$, é o número irracional $\sqrt{2}$. Esse exemplo deixa claro que, se consideramos apenas números racionais, a existência de um ínfimo entre os números racionais não pode ser assegurada, mostrando que, a priori, $\inf(B)$ é um número real, não necessariamente racional. O resultado a seguir mostra, em particular, que o supremo pode aumentar seu valor quando adicionamos elementos ao conjunto.

Lema 2. *Se A e B possuem limitante superior e $A \subset B \subset \mathbb{R}$, então $\sup(A) \leq \sup(B)$.*

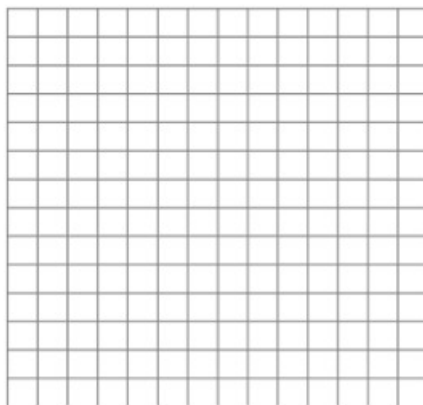
Demonstração. Basta notar que $\sup(B)$ é um limitante superior para A ■

Um resultado análogo ao Lema 2 afirma que se A e B são subconjuntos de \mathbb{R} , possuem limitante inferior e $A \subset B$, então $\inf(B) \leq \inf(A)$.

Convencionamos: $\sup(\emptyset) = -\infty$, $\inf(\emptyset) = +\infty$ e $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Um conjunto que possui limitantes inferiores e limitantes superiores é conhecido como *limitado*. É útil observar que se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado finito, então $\sup(A)$ é o maior elemento de A e $\inf(A)$ é o menor elemento de A .

4.2 Figuras discretas

Vamos admitir que qualquer figura plana está contida em um papel quadriculado.

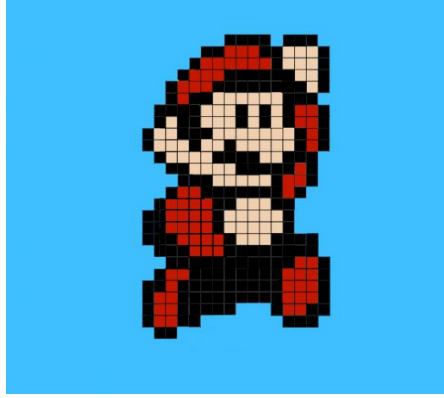


Admitiremos também que cada quadradinho tem a mesma área $\alpha = 2^{-2k}$, onde k é um número inteiro escolhido arbitrariamente, ou seja, podemos aumentar ou diminuir a área de cada quadradinho da forma que nos for mais conveniente multiplicando ou dividindo por dois o comprimento dos lados de cada quadradinho. Daqui para frente, vamos chamar cada quadradinho do papel quadriculado de *elemento de área α* .

Seja \mathcal{Q}_α o conjunto de todas as figuras planas formadas por uniões (finitas ou infinitas) de elementos de área α . Sendo assim, dado $X \in \mathcal{Q}_\alpha$, existe n inteiro positivo tal que

$$X = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n,$$

onde Q_j é um elemento de área α , para cada $j = 1, \dots, n$, (caso contrário, X é uma figura formada por infinitos elementos de área α). As figuras em \mathcal{Q}_α serão chamadas de *figuras discretas*. A figura abaixo, por exemplo, tem $n = 334$ elementos de área $\alpha = 1 \text{ mm}^2$.



A cada $X \in \mathcal{Q}_\alpha$, podemos associar o número positivo $\lambda_1(X)$ definido por

$$\lambda_1(X) = \begin{cases} n\alpha, & \text{se } X = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n, \\ +\infty, & \text{se } X \text{ é formada por infinitos elementos de área } \alpha. \end{cases}$$

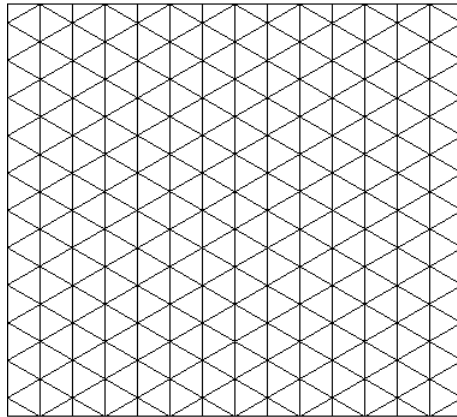
A função $\lambda_1 : \mathcal{Q}_\alpha \rightarrow (0, +\infty]$ assim obtida é a *área de Lebesgue* das figuras discretas.

É importante observar que:

1. A área de Lebesgue de figuras discretas nada mais é que a área com a qual já estamos habituados, levando em consideração que os elementos de área α que compõem a figura possuem, no máximo, vértices e/ou arestas em comum;
2. A união de figuras discretas em \mathcal{Q}_α é uma figura discreta em \mathcal{Q}_α . Reciprocamente, qualquer figura discreta em \mathcal{Q}_α , formada por dois ou mais elementos de área α , pode ser decomposta em uma união de duas figuras discretas em \mathcal{Q}_α ;
3. Se $X, Y \in \mathcal{Q}_\alpha$ e $X \subset Y$, então $\lambda_1(X) \leq \lambda_1(Y)$. Isso significa que λ_1 é “crescente” e damos o nome de *monotonicidade* a essa característica da área de Lebesgue das figuras discretas;
4. Se $X, Y \in \mathcal{Q}_\alpha$ e $X \cap Y$ é uma aresta, um vértice ou vazia, então $\lambda_1(X \cup Y) = \lambda_1(X) + \lambda_1(Y)$. Essa propriedade chama-se *aditividade*;
5. Em geral, vale a *subaditividade*, ou seja, $\lambda_1(X \cup Y) \leq \lambda_1(X) + \lambda_1(Y)$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{Q}_\alpha$;
6. Sendo $\sqrt{\alpha} = 2^{-k}$ e fixando $X \in \mathcal{Q}_\alpha$, temos que, dado β distinto de α , com $\sqrt{\beta} = 2^{-\ell}$, $\ell > k$ inteiro, o valor de $\lambda_1(X)$ é o mesmo para X visto como figura discreta em \mathcal{Q}_α ou em \mathcal{Q}_β . Quando $\beta < \alpha$, dizemos que \mathcal{Q}_β tem uma

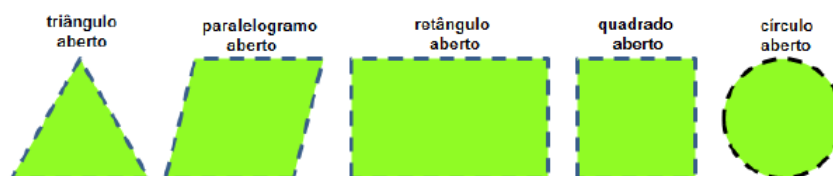
resolução maior que a de \mathcal{Q}_α , k e ℓ são as *ordens* das resoluções de \mathcal{Q}_α e \mathcal{Q}_β respectivamente. Resumindo, a área de uma figura discreta não varia com o aumento da resolução utilizada;

7. É sempre possível aumentar a resolução de uma figura discreta devido à escolha que fizemos para a forma do número que representa a área de cada quadradinho. Quando a ordem da resolução aumenta de k para $k + 1$, o número de elementos de área $\alpha = 2^{-2k}$ aumenta de n para $4n$ elementos de área $\beta = \alpha/4$;
8. Poderíamos usar um papel triangulado na construção de figuras discretas. Nesse caso, os elementos de área seriam triângulos equiláteros e consideraríamos o conjunto de todas as figuras discretas formadas por uniões (finitas ou infinitas) de triângulos do papel triangulado.



4.3 Figuras planas abertas

Vamos chamar de *quadrado aberto* a figura plana obtida quando retiramos os lados do quadrado. Analogamente, podemos definir as outras figuras planas abertas elementares.



Em geral, dizemos que uma figura plana G é *aberta* quando cada um de seus pontos, digamos $x \in G$, é o centro de algum círculo aberto propriamente contido em G . Pontos com tal propriedade serão chamados de *pontos interiores* e o conjunto de todos os pontos interiores de G será chamado de *interior de G* .



A união de duas figuras planas abertas é aberta porque qualquer ponto da união é ponto interior de pelo menos uma das figuras. A afirmação a seguir cuida do caso da interseção.

Lema 3. *A interseção de duas figuras planas abertas é uma figura plana aberta.*

Demonstração. Sejam G_1 e G_2 duas figuras planas abertas e $x \in G_1 \cap G_2$. Então existem círculos abertos, digamos C_1 e C_2 , ambos centrados em x , tais que $C_1 \subset G_1$ e $C_2 \subset G_2$. Basta observar agora que o menor dos dois círculos está contido em $G_1 \cap G_2$ ■

Caso uma figura plana S não seja aberta, existem pontos $x \in S$ tais que, para qualquer círculo aberto C centrado em x , $C \cap S$ e $C \cap S^c$ são não vazios, onde S^c indica o conjunto complementar de S em relação ao plano. Pontos assim definidos serão chamados de *pontos de fronteira* e o conjunto de todos os pontos de fronteira de G será chamado de *fronteira de G* .



Sendo assim, uma figura plana aberta G é aquela em que seus pontos de fronteira não pertencem a G (todos os seus pontos são interiores). Obviamente, um ponto não pode ser interior e de fronteira ao mesmo tempo. O conjunto vazio e o próprio plano são exemplos de conjuntos abertos porque ambos têm fronteira vazia (o conjunto vazio também não tem pontos interiores, mas não vamos prolongar essa argumentação). Segue diretamente da definição de ponto de fronteira o seguinte resultado.

Lema 4. *As figuras planas S e S^c têm a mesma fronteira.*

Uma figura plana S que contém sua própria fronteira é chamada de *figura plana fechada*. Figuras discretas são exemplos de figuras planas fechadas. A união de uma figura plana qualquer S com todos os seus pontos de fronteira é

denotada por \overline{S} e recebe o nome de *fecho* de S . Da definição que acabamos de apresentar e do Lema 4 concluímos o

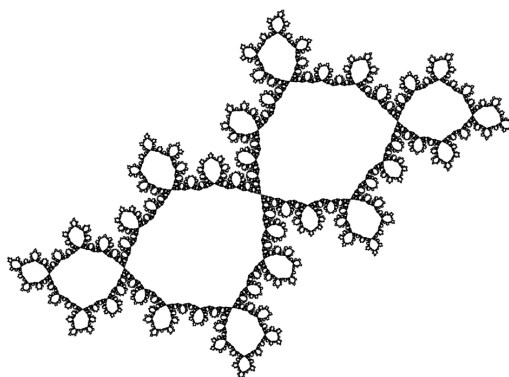
Lema 5. *Se S é uma figura plana fechada, então S^c é uma figura plana aberta.*

Figuras planas que consistem apenas de pontos de fronteira (por exemplo, apenas as arestas de um quadrado) são exemplos de figuras planas fechadas cujo interior é vazio. Dada uma figura plana S qualquer, vamos denotar o conjunto de todos os seus pontos interiores por $\text{int}(S)$ e o conjunto de todos os seus pontos de fronteira por $\text{fr}(S)$. Não é difícil verificar que $\text{int}(S)$ é, necessariamente, uma figura plana aberta e que $\text{fr}(S)$ é fechada.

Pode ocorrer o caso em que um conjunto não aberto possui apenas alguns dos seus pontos de fronteira;



significando que existem figuras planas que não são nem abertas e nem fechadas. Além disso, apesar da aparência simples das figuras acima, figuras planas em geral podem ter formatos bem diversificados em relação às figuras planas elementares, como mostra a seguinte figura plana chamada de *Conjunto de Julia*, um exemplo bem conhecido que apresenta um padrão de formação em qualquer fragmento de sua fronteira (motivo pelo qual é chamado de *fractal*).



Um outro exemplo bem distinto dos anteriores é o conjunto P de pares de números racionais (r, s) pertencentes ao quadrado fechado $[0, 1] \times [0, 1]$. Levando em consideração que qualquer número real pode ser aproximado por números

racionais, não é difícil verificar que P não possui pontos interiores e todos os pontos de $[0, 1] \times [0, 1]$ são pontos da fronteira de P .

Considere agora o conjunto \mathcal{Q} de todas as figuras discretas que possuem resoluções arbitrárias:

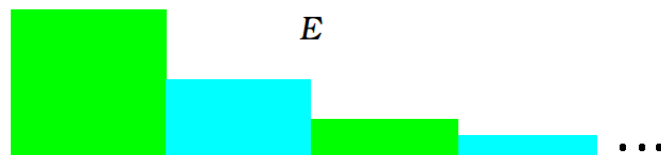
$$\mathcal{Q} = \bigcup \mathcal{Q}_\alpha,$$

ou seja, \mathcal{Q} é o conjunto das figuras discretas formadas por elementos de área α com qualquer um dos valores possíveis para $\alpha = 2^{-2k}$, k inteiro. Vamos estender a área de Lebesgue para o conjunto $\mathcal{Q} \cup \mathcal{A}$, onde \mathcal{A} é o conjunto de todas as figuras planas abertas, definindo para isso uma função

$$\lambda_2 : \mathcal{Q} \cup \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$$

que coincide com λ_1 em \mathcal{Q} , isto é, $\lambda_2(W) = \lambda_1(W)$ para qualquer $W \in \mathcal{Q}$.

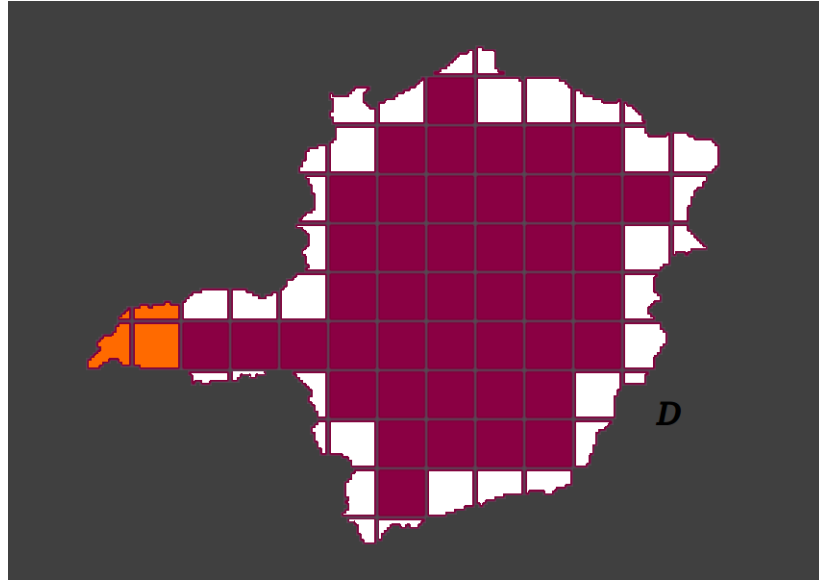
Uma figura plana é chamada de *limitada* se existe um retângulo $R \in \mathcal{Q}$ que a contenha propriamente. Se $Y \in \mathcal{Q} \cup \mathcal{A}$ for uma figura não limitada pode ocorrer o caso de ser sua área de Lebesgue finita ou infinita o que, simbolicamente, representamos por $\lambda_2(Y) < \infty$ ou $\lambda_2(Y) = \infty$ respectivamente. Em particular, o plano é um aberto com área de Lebesgue infinita. Foi visto que $\emptyset \in \mathcal{A}$ e vamos convencionar que $\lambda_2(\emptyset) = 0$. Outro exemplo é a figura $E \in \mathcal{Q} \cup \mathcal{A}$ abaixo, começando da esquerda para a direita com um quadrado de área igual a 1, é uma “escada infinita” onde cada retângulo (degrau) tem base igual a 1 e altura igual à metade da altura do degrau imediatamente anterior. Não é difícil verificar que a área de Lebesgue de E é finita (igual a 2) apesar de E não ser limitada.



Supondo então que $Y \in \mathcal{Q} \cup \mathcal{A}$ é uma figura limitada, fazemos

$$\lambda_2(Y) = \sup\{\lambda_1(X) : X \subset Y, X \in \mathcal{Q}\}.$$

Dessa forma, a área de Lebesgue de uma figura plana aberta é aproximada, por falta, pela área de figuras discretas.



O mapa D acima é uma figura discreta onde a resolução maior foi utilizada nas proximidades da fronteira do mapa real M (veja região destacada na cor laranja na figura abaixo). Note que M é uma figura plana aberta porque seu interior é não vazio e a divisa (fronteira) de uma unidade da federação é uma linha imaginária que não pertence a território algum. O uso do supremo na definição determina que $\lambda_2(M)$ é um valor exato, maior e aproximadamente igual a $\lambda_1(D)$.



O resultado a seguir afirma que aumentar a resolução implica em melhorar a aproximação para o cálculo da área de Lebesgue de uma figura plana aberta limitada.

Proposição 1. *Para quaisquer $G \in \mathcal{A}$ e $\beta < \alpha$, G limitada e β suficientemente pequeno, temos*

$$\sup\{\lambda_1(X) : X \subset G, X \in \mathcal{Q}_\alpha\} < \sup\{\lambda_1(X) : X \subset G, X \in \mathcal{Q}_\beta\} \leq \lambda_2(G).$$

Demonstração. Sejam $A = \{\lambda_1(X) : X \subset G, X \in \mathcal{Q}_\alpha\}$ e $B = \{\lambda_1(X) : X \subset G, X \in \mathcal{Q}_\beta\}$. Note que A e B são conjuntos finitos porque G é limitada. Uma vez que \mathcal{Q}_α e \mathcal{Q}_β são subconjuntos de \mathcal{Q} , obtemos que A e B são subconjuntos de $\{\lambda_1(X) : X \subset G, X \in \mathcal{Q}\}$. Logo, pelo Lema 2, concluímos que $\sup(A)$ e $\sup(B)$ não superam o valor de $\lambda_2(G)$. Vamos mostrar agora que $\sup(A) < \sup(B)$. Caso não exista $X \in \mathcal{Q}_\alpha$ tal que $X \subset G$, então $A = \emptyset$, implicando em $\sup(A) = -\infty$ e o resultado segue ao escolhermos β suficientemente pequeno a ponto de existir $X \in \mathcal{Q}_\beta$ tal que $X \subset G$. Caso contrário, seja W a maior figura discreta de \mathcal{Q}_α contida em G . Podemos escrever

$$G = (G \cap W^c) \cup W.$$

Pelo Lema 5, W^c é aberta e, pelo Lema 3, $G \cap W^c$ também é aberta. Logo, para β suficientemente pequeno, existe um elemento de área β , digamos Q , contido em $G \cap W^c$. Considere $Y = W \cup Q$ como uma figura discreta em \mathcal{Q}_β . Sendo assim, $\sup(B) \geq \lambda_1(Y) = \lambda_1(W) + \beta > \lambda_1(W) = \sup(A)$ ■

Observe que:

1. O fato de G ser uma figura plana aberta é extremamente importante porque possibilita a existência de pelo menos um elemento de área α suficientemente pequeno, digamos $Q \in \mathcal{Q}$, tal que $Q \subset G$. Sendo assim, a área de Lebesgue de figuras em $\mathcal{Q} \cup \mathcal{A}$ é sempre positiva ou infinita;
2. Dado $G \in \mathcal{A}$ limitada, $\lambda_1(R)$ é um limitante superior para $\{\lambda_1(X) : X \subset G, X \in \mathcal{Q}\}$, onde R é um retângulo em \mathcal{Q} contendo G , garantindo assim que $\lambda(G)$ tem um valor finito;
3. Não é difícil verificar que $\lambda_2(W) = \lambda_1(W)$ para qualquer $W \in \mathcal{Q}$. De fato, uma vez que $W \subset W$ e $W \in \mathcal{Q}$, temos $\lambda_1(W) \leq \lambda_2(W)$ por causa da definição de λ_2 . Por outro lado, diante da monotonicidade de λ_1 , verificamos que $\lambda_1(W)$ é limitante superior para $\{\lambda_1(X) : X \subset W, X \in \mathcal{Q}\}$, de onde concluímos $\lambda_1(W) \geq \lambda_2(W)$;
4. Sejam U e V duas figuras planas abertas não vazias e $W \subset U \cup V$ uma figura discreta. Vamos admitir sem demonstração que existem $D, E \in \mathcal{Q}$ tais que $D \subset U$, $E \subset V$ e $W = D \cup E$. Esse fato, de enunciado simples e demonstração além do alcance da teoria que nos propomos a apresentar, é uma consequência do *Lema do Número de Lebesgue* que garante a existência de α suficientemente pequeno (o número de Lebesgue) de forma que cada

elemento de área α que constitui W esteja propriamente contido em um dos abertos U ou V ;

5. A função $\lambda_2 : \mathcal{Q} \cup \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ também é conhecida como *área de Peano-Jordan*.

A próxima proposição mostra como λ_2 se comporta diante de inclusões e uniões. Como já foi observado, o caso das figuras discretas é bastante simples e nos concentraremos apenas nas figuras planas abertas. Para demonstrá-la, precisamos do seguinte resultado sobre o supremo da soma de dois conjuntos.

Lema 6. *Suponha que $A, B \subset \mathbb{R}$ possuem limitantes superiores e considere o conjunto*

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R} : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Então $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. Caso $A, B \subset \mathbb{R}$ possuam limitantes inferiores, teremos $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Demonstração. De $x \leq \sup(A)$ e $y \leq \sup(B)$, para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, concluímos que $x + y \leq \sup(A) + \sup(B)$ para qualquer $x + y \in A + B$. Logo, $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

De $x + y \leq \sup(A + B)$ para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, obtemos que, dado $y \in B$, $\sup(A + B) - y$ é um limitante superior para A , e assim $\sup(A) \leq \sup(A + B) - y$ para qualquer $y \in B$. Consequentemente, $y \leq \sup(A + B) - \sup(A)$ para todo $y \in B$, de onde concluímos que $\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A)$. A demonstração para o caso do ínfimo é análoga ■

Proposição 2. *Sejam U e V duas figuras planas abertas limitadas.*

- a) *(Monotonicidade) Se $U \subset V$, então $\lambda_2(U) \leq \lambda_2(V)$;*
- b) *(Subaditividade) Em geral, $\lambda_2(U \cup V) \leq \lambda_2(U) + \lambda_2(V)$;*
- c) *(Aditividade) Se $U \cap V = \emptyset$, então $\lambda_2(U \cup V) = \lambda_2(U) + \lambda_2(V)$.*

Demonstração.

a) Basta observar que $\lambda_1(X) \leq \lambda_2(V)$ para qualquer $X \in \mathcal{Q}$ tal que $X \subset U$;

b) Se U ou V é vazio, o resultado segue valendo a igualdade. Seja $W \in \mathcal{Q}$ tal que $W \subset U \cup V$ onde U e V são não vazios. Então existem $D, E \in \mathcal{Q}$ tais que $D \subset U$, $E \subset V$ e $W = D \cup E$. Da definição de λ_2 e da subaditividade de λ_1 , concluímos que $\lambda_2(U) + \lambda_2(V) \geq \lambda_1(D) + \lambda_1(E) \geq \lambda_1(D \cup E)$, ou seja, $\lambda_2(U) + \lambda_2(V)$ é um limitante superior para $\{\lambda_1(W) : W \subset U \cup V, W \in \mathcal{Q}\}$;

c) Seja $W \in \mathcal{Q}$ como no item b acima onde $D, E \in \mathcal{Q}$ tais que $D \subset U$, $E \subset V$. Como consequência de $U \cap V = \emptyset$, temos também $D \cap E = \emptyset$. Logo,

pela aditividade de λ_1 , temos

$$\lambda_1(D) + \lambda_1(E) = \lambda_1(D \cup E),$$

e assim $\lambda_2(U \cup V) = \sup(S)$, onde $S = \{\lambda_1(D) + \lambda_1(E) : D \subset U, E \subset V \text{ e } D, E \in \mathcal{Q}\}$, o que implica, pelo Lema 6, em $\lambda_2(U) + \lambda_2(V) = \sup(S) = \lambda_2(U \cup V)$ ■

4.4 Área exterior

Seja X uma figura plana qualquer. Definimos a *área exterior de Lebesgue* de X por

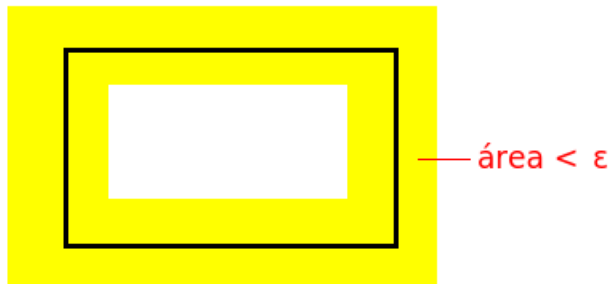
$$\lambda^*(X) = \inf\{\lambda_2(G) : G \supset X, G \in \mathcal{A}\}.$$

Trata-se de uma função $\lambda^* : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$, onde \mathcal{F} é o conjunto de todas as figuras planas. Sendo assim, a área exterior de Lebesgue de uma figura plana qualquer X é aproximada, por excesso, pela área de uma figura plana aberta G que “cobre” X . Diremos então que G *cobre* X quando $X \subset G$ (equivalente a $G \supset X$). Note que o ínfimo do conjunto $\{\lambda_2(G) : G \supset X, G \in \mathcal{A}\}$ sempre existe porque $\lambda_2(G)$ é um número real não negativo para qualquer $G \in \mathcal{A}$ ou $\lambda_2(G) = +\infty$. Vamos simbolizar com $\Gamma(X)$ a família de todas as figuras planas abertas que cobrem a figura plana X .

O resultado a seguir é uma consequência imediata do Lema 1 e uma ferramenta útil para encontrar figuras planas com área exterior de Lebesgue nula.

Lema 7. *Seja $X \in \mathcal{F}$. Se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $G_\varepsilon \in \Gamma(X)$ tal que $\lambda_2(G_\varepsilon) < \varepsilon$, então $\lambda^*(X) = 0$.*

Por exemplo, a figura plana aberta amarela (veja figura abaixo) pode ter área arbitrariamente pequena, menor que ε , ainda contendo as arestas pretas. Figuras abertas semelhantes à figura amarela podem ser feitas envolvendo qualquer outra figura plana elementar (triângulo, paralelogramo, quadrado, retângulo e círculo).



Aplicando o Lema 7, concluímos que a figura formada apenas pelas arestas de uma figura plana elementar tem área exterior de Lebesgue nula.

A Proposição 3 a seguir fornece propriedades muito importantes para a área exterior de Lebesgue que a tornam legítima para o cálculo da área de figuras planas. Antes de prová-la, precisamos do seguinte lema.

Lema 8. *Suponha que $A \subset \mathbb{R}$ tem limitantes inferiores. Se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$, possivelmente dependente de ε , tal que $x < c + \varepsilon$ para um certo $c \in \mathbb{R}$, então $\inf(A) \leq c$.*

Demonstração. Admita que $\inf(A) > c$ e faça $\varepsilon = \inf(A) - c$. Existiria então $x \in A$ tal que $x < c + \inf(A) - c = \inf(A)$, um absurdo ■

Proposição 3. *Sejam X e Y em \mathcal{F} limitadas.*

- a) (*Monotonicidade*) *Se $X \subset Y$, então $\lambda^*(X) \leq \lambda^*(Y)$;*
- b) (*Subaditividade*) *Em geral, $\lambda^*(X \cup Y) \leq \lambda^*(X) + \lambda^*(Y)$;*
- c) (*Aditividade Restrita*) *Se existem $U \in \Gamma(X)$ e $V \in \Gamma(Y)$ tais que $U \cap V = \emptyset$, então $\lambda^*(X \cup Y) = \lambda^*(X) + \lambda^*(Y)$.*

Demonstração.

a) Se $G \supset Y$ e $Y \supset X$, então $G \supset X$, isto é, sob a hipótese $X \subset Y$, toda figura plana aberta que cobre Y também cobrirá X . Logo, $\{\lambda_2(G) : G \in \Gamma(Y)\} \subset \{\lambda_2(G) : G \in \Gamma(X)\}$, o que implica em $\lambda^*(Y) = \inf\{\lambda_2(G) : G \in \Gamma(Y)\} \geq \inf\{\lambda_2(G) : G \in \Gamma(X)\} = \lambda^*(X)$;

b) Dado $\varepsilon > 0$, existem $U \in \Gamma(X)$ e $V \in \Gamma(Y)$, possivelmente dependentes de ε , tais que

$$\lambda_2(U) < \lambda^*(X) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2(V) < \lambda^*(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, pela Proposição 2, item b, obtemos $\lambda_2(U \cup V) \leq \lambda_2(U) + \lambda_2(V) < \lambda^*(X) + \lambda^*(Y) + \varepsilon$, para qualquer $\varepsilon > 0$. Concluimos que $\lambda^*(X \cup Y) \leq \lambda^*(X) + \lambda^*(Y)$ observando que $U \cup V \in \Gamma(X \cup Y)$ e usando o Lema 8;

c) Considere os seguintes conjuntos de figuras planas abertas:

$$\mathcal{M} = \Gamma(X \cup Y) \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{U \cup V : U \in \Gamma(X), V \in \Gamma(Y) \text{ e } U \cap V = \emptyset\}.$$

Como consequência imediata da hipótese, temos $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Além disso, dado $G \in \mathcal{M}$, existe $H = U \cup V \in \mathcal{N}$ tal que $H \subset G$. A definição de ínfimo implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $G \in \mathcal{M}$ tal que $\lambda_2(G) \leq \lambda^*(X \cup Y) + \varepsilon$. Sendo assim, pela Proposição 2, itens a e c, temos

$$\lambda_2(U) + \lambda_2(V) = \lambda_2(H) \leq \lambda_2(G) < \lambda^*(X \cup Y) + \varepsilon,$$

de onde concluímos que $\lambda^*(X) + \lambda^*(Y) < \lambda^*(X \cup Y) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Pelo

item b acima,

$$\lambda^*(X) + \lambda^*(Y) - \lambda^*(X \cup Y) \geq 0$$

e assim, pelo Lema 1, $\lambda^*(X) + \lambda^*(Y) = \lambda^*(X \cup Y)$ ■

No item c da Proposição 3, não é suficiente supor apenas $X \cap Y = \emptyset$ para obtermos $\lambda^*(X \cup Y) = \lambda^*(X) + \lambda^*(Y)$ como ocorreu com a aditividade de λ_1 e λ_2 (por isso a propriedade foi chamada de “aditividade restrita”). Exemplos de conjuntos $X, Y \in \mathcal{F}$ tais que $X \cap Y = \emptyset$ para os quais não vale a aditividade da área exterior de Lebesgue requerem argumentos teóricos além daqueles que nos propomos a apresentar aqui. Informamos apenas que, obviamente e para começar, devemos deixar de satisfazer a hipótese adicional (restrição “*existem* $U \in \Gamma(X)$ e $V \in \Gamma(Y)$ tais que $U \cap V = \emptyset$ ”). Ocorre, por exemplo, com o conjunto P de pares de números racionais (r, s) pertencentes ao quadrado fechado $[0, 1] \times [0, 1]$ e o seu complementar em relação ao quadrado fechado, ou seja, $I = P^c \cap [0, 1] \times [0, 1]$: P e I são disjuntos, isto é, $P \cap I = \emptyset$, mas não existem abertos disjuntos contendo P e I .

Corolário 1. *Figuras planas elementares (triângulo, paralelogramo, quadrado, retângulo e círculo) fechadas não têm a sua área exterior de Lebesgue alterada quando delas retiramos as arestas. Em particular, dada $X \in \mathcal{Q}$ limitada, temos $\lambda^*(X) = \lambda^*(\text{int}(X))$.*

Demonstração. Note que qualquer figura plana elementar fechada S é a união da figura plana elementar aberta correspondente $\text{int}(S)$ com sua fronteira $\text{fr}(S)$, isto é, $S = \text{int}(S) \cup \text{fr}(S)$. Pela subaditividade de λ^* e pelo Lema 7 temos

$$\lambda^*(S) \leq \lambda^*(\text{int}(S)) + \lambda^*(\text{fr}(S)) = \lambda^*(\text{int}(S)).$$

Da monotonicidade de λ^* concluímos que $\lambda^*(\text{int}(S)) \leq \lambda^*(S)$. No caso $X \in \mathcal{Q}$, basta substituir os quadradinhos fechados que contêm a fronteira por quadradinhos abertos e aplicar a subaditividade restrita de λ^* ■

O próximo resultado desse capítulo, mostra que a medida exterior de Lebesgue estende a medida de Lebesgue de $\mathcal{Q} \cup \mathcal{A}$ para \mathcal{F} . Na prática, isso significa que aquilo que já sabíamos calcular usando λ_2 não precisa ser recalculado ao usarmos λ^* .

Lema 9. *Para qualquer figura plana aberta W , temos $\lambda_2(W) = \lambda^*(W)$.*

Demonstração. Uma vez que W é aberta, temos $W \in \Gamma(W)$ e, pela definição de λ^* , concluímos que $\lambda^*(W) \leq \lambda_2(W)$, ou seja, $\lambda_2(W) - \lambda^*(W) \geq 0$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $G \in \Gamma(W)$ tal que $\lambda_2(G) < \lambda^*(W) + \varepsilon$. Da

monotonicidade de λ_2 obtemos

$$\lambda_2(W) \leq \lambda_2(G) < \lambda^*(W) + \varepsilon,$$

ou seja, $\lambda_2(W) - \lambda^*(W) < \varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$, implicando em $\lambda^*(W) = \lambda_2(W)$ pelo Lema 1 ■

Lema 10. *Se Q é um elemento de área α , então $\lambda_1(Q) = \lambda^*(Q)$.*

Demonstração. Dado $G \in \Gamma(Q)$, temos $\lambda_1(Q) \leq \lambda_2(G)$ pela definição de λ_2 . Logo, $\lambda_1(Q)$ é um limitante inferior para $\{\lambda_2(G) : G \in \Gamma(Q)\}$ e assim, pela definição de λ^* , concluímos que $\lambda_1(Q) \leq \lambda^*(Q)$. Por outro lado, $\lambda^*(Q) = \lambda^*(\text{int}(Q))$ como consequência do Corolário 1. Do Lema 9, da definição de λ_2 e da monotonicidade de λ_1 concluímos que $\lambda^*(\text{int}(Q)) = \lambda_2(\text{int}(Q)) \leq \lambda_2(Q)$ ■

Proposição 4. *Para qualquer $Y \in \mathcal{Q} \cup \mathcal{A}$, temos $\lambda^*(Y) = \lambda_2(Y)$.*

Demonstração. Se $Y \in \mathcal{A}$, então a proposição se resume ao Lema 9. Suponhamos então $Y \in \mathcal{Q}$. Sendo assim, pela definição de λ_2 , $\lambda_1(Y) \leq \lambda_2(G)$ para qualquer $G \in \Gamma(Y)$. Logo, $\lambda_1(Y)$ é um limitante inferior para $\{\lambda_2(G) : G \in \Gamma(Y)\}$ e assim, pela definição de λ^* , concluímos que $\lambda_1(Y) \leq \lambda^*(Y)$. Por outro lado, da subaditividade de λ^* , do Lema 10 e da aditividade de λ_1 , obtemos

$$\lambda^*(Y) \leq \sum_{j=1}^n \lambda^*(Q_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_1(Q_j) = \lambda_1\left(\bigcup_{j=1}^n Q_j\right) = \lambda_1(Y),$$

onde $Y = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$, $Q_j \in \mathcal{Q}_\alpha$, para cada $j = 1, \dots, n$, α suficientemente pequeno de forma a fazer com que todos os quadradinhos que constituem Y tenham a mesma área α ■

Segue da última parte da demonstração acima o

Corolário 2. $\lambda_1(X) = \lambda^*(X)$ para qualquer $X \in \mathcal{Q}$.

4.5 Área interior

Uma figura plana K é chamada de compacta quando for fechada e limitada. Vamos denotar por \mathcal{K} o conjunto de todas as figuras planas compactas. As figuras planas elementares fechadas são exemplos de figuras compactas. O conjunto vazio é um conjunto compacto. Se \mathcal{P} é o subconjunto de \mathcal{Q} das figuras planas formadas por uniões finitas de quadrados do papel quadriculado, então $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$, ou seja, qualquer elemento de \mathcal{P} é uma figura plana compacta.

A *área interior de Lebesgue* de uma figura plana qualquer X é definida por

$$\lambda_*(X) = \sup\{\lambda^*(K) : K \subset X, K \in \mathcal{K}\}.$$

A próxima proposição mostra a relação mais geral entre a área interior e a área exterior de uma figura plana.

Proposição 5. *Para qualquer $X \in \mathcal{F}$, $\lambda_*(X) \leq \lambda^*(X)$.*

Demonstração. Seja $K \subset X$ compacto. Então, da monotonicidade de λ^* , obtemos $\lambda^*(K) \leq \lambda^*(X)$. Logo, $\lambda^*(X)$ é um limitante superior para $\{\lambda^*(K) : K \subset X, K \in \mathcal{K}\}$ ■

Os próximos dois resultados, fornecem exemplos de figuras planas para as quais vale a igualdade na Proposição 5.

Proposição 6. *Se $G \in \mathcal{A}$, então $\lambda_*(G) = \lambda^*(G)$.*

Demonstração. Sabendo que todo $W \in \mathcal{Q}$ é compacto e que $\lambda_1(W) = \lambda^*(W)$, concluímos que

$$\{\lambda_1(W) : W \subset G, W \in \mathcal{Q}\} \subset \{\lambda^*(K) : K \subset G, K \in \mathcal{K}\}.$$

Logo, pelo Lema 2, $\lambda_2(G) \leq \lambda_*(G)$ e, pela Proposição 4, concluímos que $\lambda^*(G) \leq \lambda_*(G)$ e obtemos a igualdade pela Proposição 5 ■

Proposição 7. *Se $W \in \mathcal{K}$, então $\lambda_*(W) = \lambda^*(W)$.*

Demonstração. Basta observar que $\lambda^*(W) \in \{\lambda^*(K) : K \subset W, K \in \mathcal{K}\}$ ■

4.6 Figuras mensuráveis

Uma figura plana X é chamada de mensurável quando $\lambda^*(X) = \lambda_*(X)$. Esse valor comum é denotado por $\lambda(X)$ e a função

$$\lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$$

é a *área de Lebesgue*. O conjunto de todas as figuras planas mensuráveis é denotado por \mathcal{M} . A próxima proposição afirma que nem toda figura plana é Lebesgue mensurável.

Proposição 8. *A inclusão $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ é própria.*

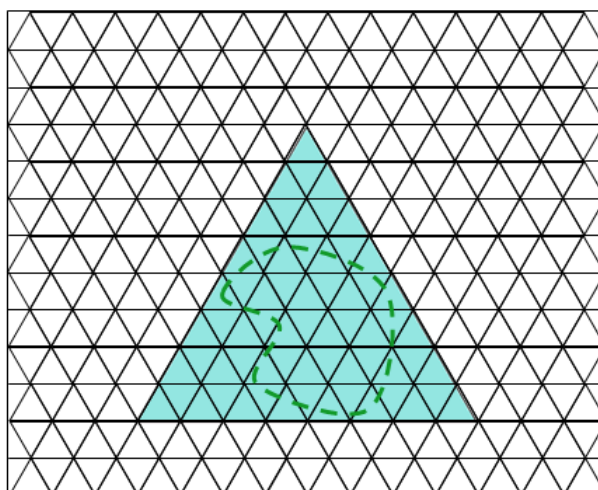
A demonstração da Proposição 8 requer o famoso *Axioma da Escolha*, que é uma peça singular nos modelos lógicos dos fundamentos da Teoria dos Conjuntos

e está além dos nossos propósitos aqui. O leitor interessado poderá consultar qualquer livro de *Teoria da Medida*, por exemplo [5].

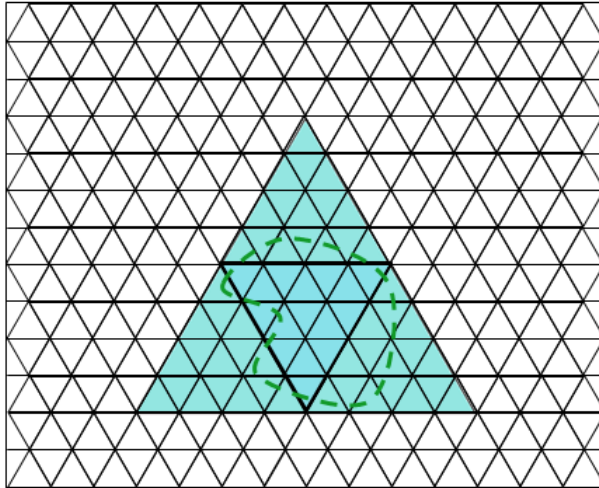
4.7 Experimento: cálculo da área de figuras planas não elementares

Nesse experimento usamos todos os conceitos anteriormente mencionados, associados ao Método de Exaustão e à área de Lebesgue. Vamos encontrar a área de uma figura não elementar usando as figuras elementares triângulos e quadrados. Para tal vamos usar uma figura não elementar aberta e calcular sua área por dentro e por fora com as figuras elementares mencionadas.

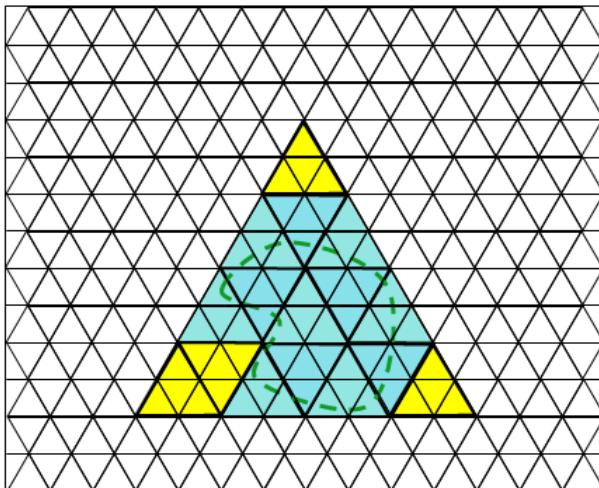
Vamos inserir a figura elementar no interior de um triângulo e de um quadrado e depois dividiremos os mesmos em 4, 16, 64, 256 e 1024 partes, retirando as áreas exteriores e somando as áreas interiores.



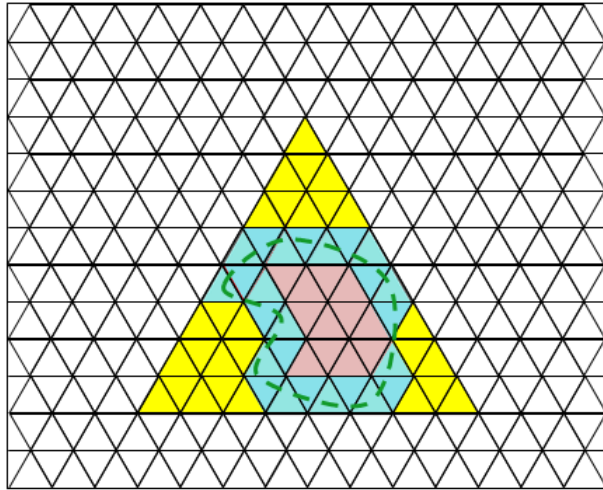
	INTERIOR	EXTERIOR
TRIÂNGULOS	0	1
ÁREA	0	1



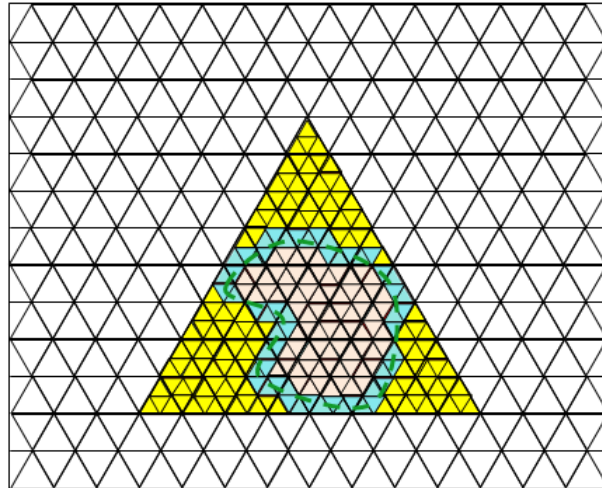
	INTERIOR	EXTERIOR
TRIÂNGULOS	0	4
ÁREA	0	$1 - 0 = 1$



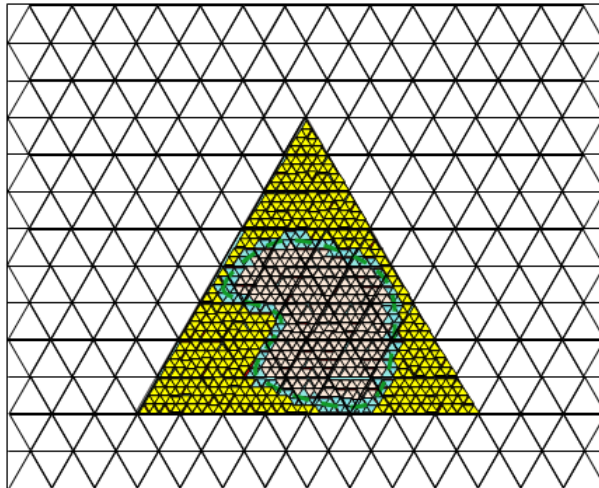
	INTERIOR	EXTERIOR
TRIÂNGULOS	0	16
ÁREA	0	$1 - 4/16 = 12/16$



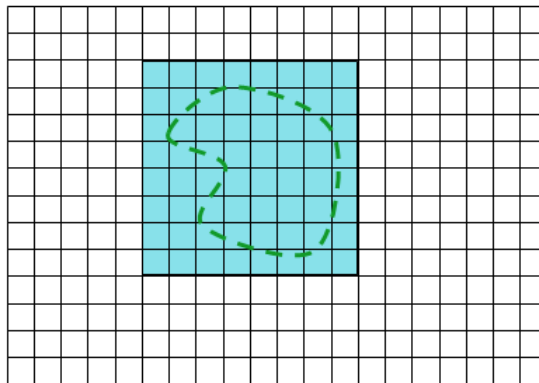
	INTERIOR	EXTERIOR
TRIÂNGULOS	12	52
ÁREA	$0 + 12/64 = 12/64$	$1 - 27/64 = 37/64$



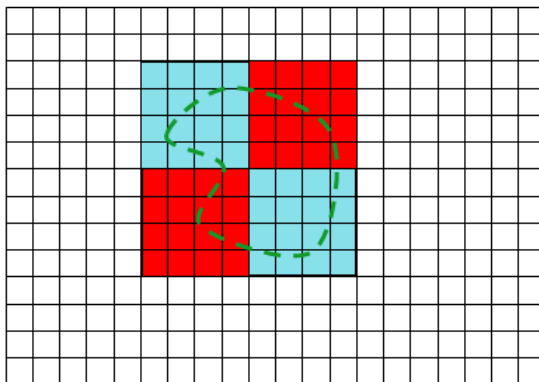
	INTERIOR	EXTERIOR
TRIÂNGULOS	77	179
ÁREA	$0 + 77/256 = 77/256$	$1 - 124/256 = 132/256$



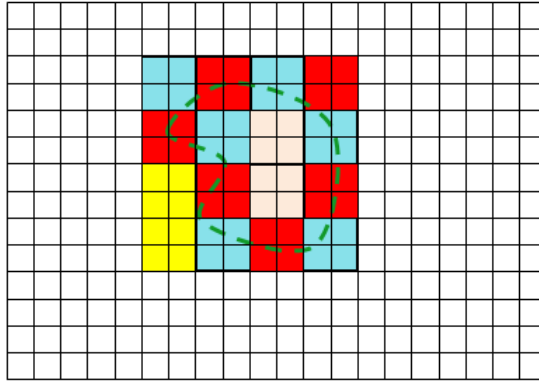
	INTERIOR	EXTERIOR
TRIÂNGULOS	337	687
ÁREA	$0 + 337/1024 = 337/1024$	$1 - 540/1024 = 484/1024$



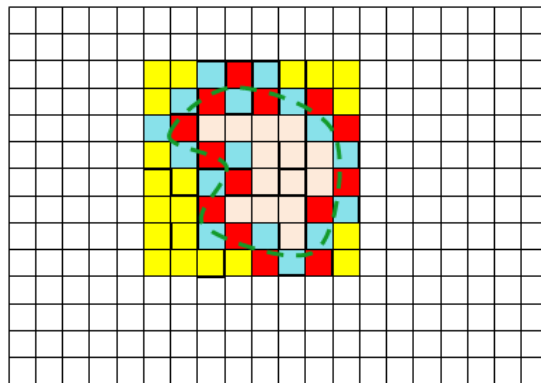
	INTERIOR	EXTERIOR
QUADRADOS	0	1
ÁREA	0	1



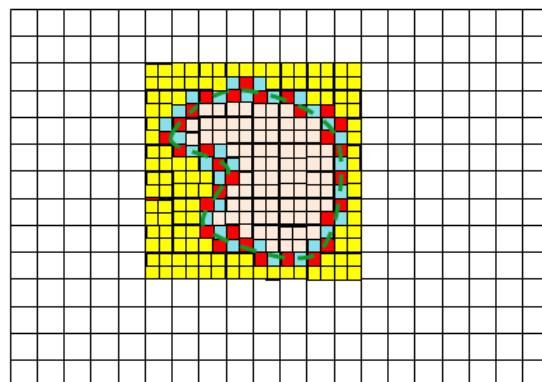
	INTERIOR	EXTERIOR
QUADRADOS	0	4
ÁREA	0	$1 - 0 = 1$



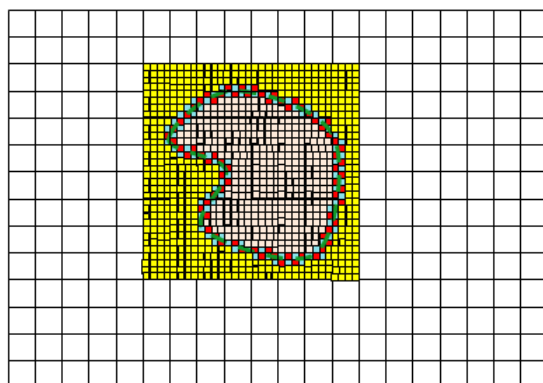
	INTERIOR	EXTERIOR
QUADRADOS	2	14
ÁREA	$0 + 2/16 = 2/16$	$1 - 2/16 = 14/16$



	INTERIOR	EXTERIOR
QUADRADOS	14	50
ÁREA	$0 + 14/64 = 14/64$	$1 - 20/64 = 44/64$



	INTERIOR	EXTERIOR
QUADRADOS	81	175
ÁREA	$0 + 81/256 = 81/256$	$1 - 114/256 = 142/256$



	INTERIOR	EXTERIOR
QUADRADOS	363	661
ÁREA	$0 + 363/1024 = 363/1024$	$1 - 506/1024 = 518/1024$

	TRIÂNGULOS	QUADRADOS
DIVISÃO EM PARTES	ÁREA	
1	$0 < A < 1$	$0 < A < 1$
4	$0 < A < 1$	$0 < A < 1$
16	$0 < A < 0,75$	$0,13 < A < 0,9$
64	$0,19 < A < 0,56$	$0,22 < A < 0,69$
256	$0,30 < A < 0,52$	$0,32 < A < 0,57$
1024	$0,33 < A < 0,47$	$0,35 < A < 0,50$

4.8 Conclusão

Concluimos que é possível calcular a área de uma figura não elementar utilizando figuras elementares através do Método de Exaustão associado à área de Lebesgue. Conjecturamos que tanto faz usarmos triângulos ou quadrados pois o valor da área se modifica com uma diferença muito insignificante. Portanto é possível aplicarmos esse método no ensino fundamental, ensino médio e também como uma introdução para um curso de medida no ensino superior.

Referências Bibliográficas

- [1] EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- [2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [3] LIMA, Elon L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1997.
- [4] BARBOSA, João L. M. **Geometria euclidiana plana**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [5] FERNANDEZ, P. J. **Medida e integração**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996.
- [6] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar.
- [7] LIMA, Elon L. **Análise Real**, Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.