LUCIANA DE PAULA CHAVES GOMES HASTENREITER

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA ELEMENTAR DA SUSTENTABILIDADE

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

VIÇOSA
MINAS GERAIS – BRASIL
2015

LUCIANA DE PAULA CHAVES GOMES HASTENREITER

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA ELEMENTAR DA SUSTENTABILIDADE

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 09 de novembro de 2015

Mehran Sabeti

Magno Branco Alves

Kennedy Martins Pedroso
(Orientador)

Dedico este trabalho aos meus filhos, Nuno e Lisi, por trazerem luz e alegria à minha vida.

Agradecimentos

Certamente, eu cometeria a indelicadeza de me esquecer de algum nome, caso eu citasse todos os que me ajudaram direta ou indiretamente nesse longo caminho, que agora se encerra, para abrir fronteiras para os próximos passos.

Agradeço, então, ao nosso Mestre Maior, Deus, porque sem ele nada disso seria possível: nem o apoio dos amigos e familiares, tampouco a conclusão deste Mestrado.

Deus, obrigada por ter me feito capaz, por ter me dado a calma, a concentração e o equilíbrio necessários para desenvolver esta dissertação e, mais ainda, por cada pessoa que me ajudou nessa empreitada, que abracei com garra, coragem e fé, mas que, sem elas a meu lado, provavelmente, não chegaria até aqui.

A cada um dos meus familiares, amigos, colegas de trabalho, professores e todos que estiveram, de alguma maneira, envolvidos nesta jornada, a minha mais profunda gratidão. Tenham a certeza de que vocês foram e serão sempre muito importantes no meu caminhar. Que Deus os abençoe!

Por fim, agradeço à Capes pelo apoio financeiro, imprescindível para a realização e conclusão deste trabalho.

“Sonho que se sonha só é só um sonho. Sonho que se sonha junto é realidade!” (Raul Seixas)

Sumário

Resumo

HASTENREITER, Luciana de Paula Chaves Gomes, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2015. **Introdução à Matemática Elementar da Sustentabilidade.** Orientador: Kennedy Martins Pedroso.

Tese de mestrado em Matemática, pela UFV, que analisa a disciplina do ponto de vista social associando-a a sustentabilidade e seus conceitos. Avalia-se as maiores preocupações em sustentabilidade - água, ecoturismo, lixo, energia, biodiversidade, transporte, alimentos - numa tentativa de propor conceitos matemáticos e exercícios complementares que as exemplifiquem apontando possíveis soluções para problemas diários. Busca-se aqui propor a formação de uma nova disciplina que associe Matemática e Sustentabilidade num formato intrínseca e atuante.

Abstract

HASTENREITER, Luciana de Paula Chaves Gomes, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, november ,2015. **Introduction to Elementary Mathematics of sustainability**. Adviser: Kennedy Martins Pedroso.

Master's thesis in Mathematics, from the university of Viçosa, that analyses de subject from a social point of view that associates sustainability and its concepts. This project also evaluates the worries in sustainability - water, ecoturism, waste, energy, biodiversity, transportation, food- in an attempt to propose mathematical concepts and complementary exercises that exemplify them, pointing plausible solutions for daily problems. We seek here to propose the formation of a new subject that associates Mathematics and sutainability in an intrinsic and active form.

INTRODUÇÃO

O papel do educador nos dias de hoje é muito diferente do que víamos a quarenta ou cinquenta anos atrás. O professor que antes era um mestre, pessoa de alto saber a ser contemplada, hoje é participante da construção de uma sociedade nova que exige muito em seus efeitos.

Quando falamos em nível universitário a situação é ainda mais séria porque são nas universidades que são formados os novos profissionais que contribuirão, efetivamente, para a construção de um mundo novo.

Visto tudo isto, surgiu a necessidade do professor universitário, mestre em Matemática, introduzir-se neste ambiente de mudanças não só transmitindo conhecimentos matemáticos, mas dando ao aluno a oportunidade de pensar a Matemática de outro modo, do ponto de vista social. Como posso cooperar, a partir da Matemática, para as mudanças sociais transformadoras dos novos tempos?

Para responder a esta pergunta o texto a seguir propõe realizar uma discussão de como a disciplina pode cooperar quando o assunto é sustentabilidade, ou seja, como posso fazer com que a Matemática contribua para a compreensão de dados voltados para o tema, como discuti-los e quais as soluções apontadas para as perguntas que envolvem o universo sustentável na atualidade.

O que antes poderia ser visto como vazio, cheio de cálculos e planilhas apenas, agora poderá oferecer recursos de estudo de alguns temas de forma incisiva na sociedade.

Para isto o texto será dividido em partes especificas. A princípio discutiremos as implicações sociais da sustentabilidade e como tratar tudo isto de outro modo, do modo consciente. Já em capítulo posterior analisaremos os seguintes conceitos de sustentabilidade: agua, ecoturismo, lixo, energia, biodiversidade, transporte, alimentos. Em todos estes casos será apresentada uma abordagem teórica, acompanhada de um conceito matemático e uma atividade que exemplifique a discussão. Num momento seguinte será proposta a criação de uma nova disciplina, em nível superior, que trate do assunto sustentabilidade associado, diretamente, a Matemática, seus conceitos e exercícios.

Acredita-se que partindo desse pressuposto será possível colocar para o leitor deste texto a necessidade de associar a Matemática ao dia a dia de uma forma contemporânea, sem tabus e sem mitos. Não há disciplina que não acrescente e não há um problema de ordem social que se resolva sozinho. A associação dos dois é um caminho para resolver, inteligentemente, os problemas sociais abordados hoje e disseminados mundialmente.

Capítulo 1

A Sustentabilidade e suas implicações sociais: como tratar deste assunto de maneira consciente?

Muito se tem ouvido falar em sustentabilidade nas muitas formas de tornar a sociedade mais consciente de seu papel. Sabe-se que o desperdício tem sido o carro-chefe de inúmeras discussões filosóficas, sociais, intrínsecas e extrínsecas ao ser humano.

Segundo pesquisas realizadas e condensadas pode-se chegar ao consenso de que sustentabilidade tenha origem no termo “desenvolvimento sustentável”, definido como aquele que atenda às necessidades das gerações presentes sem comprometer a capacidade das gerações futuras de suprirem suas próprias necessidades ou indigências.

Muito se têm discutido sobre isso, principalmente nos últimos vinte anos, em razão das dificuldades que os grandes centros vem encontrando em manter a Biosfera equilibrada pautando-se em boas dimensões políticas, valorizando o crescimento social e econômico sem prejudicar o meio ambiente.

Diante da evidência da fragilidade humana no quadro atual de degradação e riscos provocados por estilos de vida e de produção incompatíveis com a permanência dos recursos naturais, a sustentabilidade passou a ser o principal desafio para o desenvolvimento social na compreensão e racionalização do que vem a ser, de fato, um ambiente sustentável. Este é um desafio de caráter político e técnico que deve ter como principal mecanismo de conduta o respeito a integridade do ambiente, o consumo sustentável, o respeito à diversidade humana pressupondo uma relação de equilíbrio entre homem, consumo e natureza. A sustentabilidade, portanto, diz respeito às escolhas sobre as formas de produção, consumo, habitação, comunicação, alimentação, transporte e também nos relacionamentos entre as pessoas e delas com o ambiente, considerando os valores éticos, solidários e democráticos.

O termo “desenvolvimento sustentável” surgiu a partir de estudos da Organização das Nações Unidas sobre as mudanças climáticas, como uma resposta para a humanidade perante a crise social e ambiental pela qual o mundo passava a partir da segunda metade do século XX. De lá para cá muito se tem discutido e avaliado já que o Brasil de hoje passa por intensa crise de abastecimento de água com dificuldades na geração de energia e problemas bastante complexos a serem solucionados quando o assunto é abastecimento de agua. Há relatos de estudos de 1984 que já afirmavam que a crise poderia ser uma realidade caso governantes políticos não tomassem providencias. E aí estão todos passando pela tormenta da falta de agua e da crise de abastecimento.

Leila Ferreira [11] afirma

> O padrão de produção e consumo que caracteriza o atual estilo de desenvolvimento tende a consolidar-se no espaço das cidades e estas se tornam cada vez mais o foco principal na definição de estratégias e políticas de desenvolvimento.

Sendo assim, é importante dizer, que as cidades, a economia, a política os cidadãos, precisam adaptar-se à nova realidade pressupondo que economia e sustentabilidade são palavras de ordem nos dias atuais. Sem elas é impossível fazer com que a sociedade se encontre e trabalhe para o bem comum.

É preciso viver o tempo da sustentabilidade urbana, ecológica, ambiental, social, política e econômica.

Barbosa [3], afirma em palavras bastante interessantes sobre sustentabilidade:

> O desenvolvimento sustentável não deve ser apresentado como um slogan político. As condições ambientais já estão bastante prejudicadas pelo padrão de desenvolvimento e consumo atual, deste modo, o desenvolvimento sustentável pode ser uma resposta aos anseios da sociedade. A sustentabilidade consiste em encontrar meios de produção, distribuição e consumo dos recursos existentes de forma

> mais coesiva, economicamente eficaz e ecologicamente viável. Um dos desafios da sustentabilidade ambiental urbana é a conscientização de que esta é um processo a ser percorrido e não algo definitivo a ser alcançado. A busca por uma conceituação urbana sustentável traz consigo uma série de proposições e estratégias que buscam atuar em níveis tanto locais quanto globais. Priorizar o desenvolvimento social e humano com capacidade de suporte ambiental, gerando cidades produtoras com atividades que podem ser acessadas por todos é uma forma de valorização do espaço incorporando os elementos naturais e sociais.

É preciso compreender, avaliar, sintetizar, para poder expressar e colocar as questões da sustentabilidade com comprometimento no intuito de trazer modificações reais à sociedade.

Todos os que se encontram na condição de profissionais da educação, tem ainda um compromisso maior com esta questão: o compromisso de mostrar ao aluno que ele pode fazer a diferença a partir de seus conceitos e suas posições quanto à prática da sustentabilidade.

A dissertação em foco tenta fazer justamente isso: mostrar como o educador pode trabalhar os conceitos de sustentabilidade pautados em seu conteúdo, no caso, a Matemática. É possível sim criar conceitos, expor medidas, propor exercícios que se baseiem em fatos do cotidiano demonstrando a importância de uma consciência sustentável sem ferir os preceitos matemáticos e suas vertentes.

ARAÚJO e BIZZO [2] esclarecem:

> A inserção do discurso sobre sustentabilidade, no contexto educacional, relaciona-se simultaneamente com regras de formação de conduta ético-indivíduo-social e com os interesses do desenvolvimento sustentável. Em sala de aula é possível inserir o discurso sobre a sustentabilidade mediante a compreensão da dimensão ambiental como elaboração de conhecimento por meio da inter-relação ambiente e questões ambientais, como conhecimento a ser adquirido; a sustentabilidade, como nova referência ética a ser desenvolvida pelo ser humano; e, a interdisciplinaridade, como meio favorável à aquisição do conhecimento e ao desenvolvimento dos valores éticos. Portanto, no contexto de sala de aula, não se pode inserir a problemática ambiental exclusivamente como derivação do aproveitamento dos recursos naturais, redução da poluição etc., mas, também, das transformações sociais que historicamente vêm sendo construídas e da conduta social que o momento exige.

A matemática como qualquer outro conteúdo, pode propor caminhos e apontar soluções para os problemas voltados para sustentabilidade de forma inteligente e concisa através da elaboração de estudos, de desenvolvimento de questões e análise de dados. Basta compreender que o professor de Matemática também educa para a cidadania e para a vida.

Propõe-se, a partir de agora, a análise e desenvolvimento de alguns pontos voltados para a sustentabilidade vistos pelo ângulo da Matemática.

Serão apresentados seus conceitos básicos e atividades diversificadas. É proposta aqui realizar a avaliação destes pontos propondo, ao fim desta dissertação, a criação de uma disciplina que auxilie o professor de Matemática, ou demais educadores, em suas funções com foco principal na sustentabilidade.

Capítulo 2

Analisando conceitos inerentes à sustentabilidade.

2.1.1 – Água

Muito se tem dito e se tem analisado sobre a água e seu valor para a sociedade enquanto um conjunto que precisa de um bem para sobrevida e para manutenção.

Pode-se afirmar que sem água não podemos nada, não construímos coisa alguma e não somos capazes de nos mantermos vivos executando nossas funções diárias e equilibrando nossa saúde.

Inúmeras são as fontes literárias que discutem, nos dias de hoje, o valor da água e sua fragilidade frente ao mundo em que estamos inseridos, que até então não se preocupava e não se importava em utilizar o recurso de forma sustentável e equilibrada.

FERREIRA e CUNHA [10] já diziam:

> A água, um recurso indispensável para a sobrevivência de todas as espécies, exerce uma influência decisiva na qualidade de vida das populações. Contudo, o modo como são utilizados e gerenciados os recursos hídricos tem levado a um nível de degradação ambiental e a um risco de escassez de água que comprometem a qualidade de vida das gerações futuras.

Cabe lembrar que o desperdício no Brasil é muito grande. Quando cito aqui o desperdício, não coloco apenas o desperdício doméstico, mas o desperdício nas indústrias e na agricultura. Há ainda o que se dizer sobre a inércia política que torna toda esta situação mais crítica e mais complexa.

REBOUÇAS [18] garante:

> Mas se persistir a inércia dos políticos e administradores, ou a tradicional ideia de que a única solução aos problemas de escassez local e ocasional de água é o aumento da sua oferta, mediante a construção de obras extraordinárias, a crise da água no Brasil poderá alcançar proporções sem precedentes nos próximos anos. Entretanto, o uso inteligente da gota d’água disponível significa obter cada vez mais

> produtividade com cada vez menos água e lutar contra a pobreza, pela vida, pela saúde e pela comida para todos.

Ao vislumbrar esta situação verifico que, enquanto educador em Matemática, devo trabalhar conceitos básicos que garantam o desenvolvimento de alguns exercícios que façam com que o aluno pense e repense a questão da água e da sustentabilidade a partir de pontos e requisitos matemáticos.

Segue abaixo o conceito a ser trabalhado a partir desta iniciação sobre água e sustentabilidade.

2.1.2 – Conceito

Proporcionalidade

Para a matemática, a química e a física, a proporcionalidade é a mais comum e simples relação entre grandezas (tudo aquilo que pode ser contado e medido). Amplamente difundida entre a população leiga, a proporcionalidade é muito útil e de fácil resolução através da "regra de três". Basicamente a proporcionalidade se relaciona com duas operações aritméticas simples: a multiplicação e a divisão. Quando a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas é direta, a razão (divisão) entre os correspondentes valores das duas grandezas relacionadas é uma constante, e a esta constante dá-se o nome de constante de proporcionalidade.

A proporcionalidade, em regra, é uma relação binária que pode ocorrer numa dupla de funções reais de mesmo domínio. Uma função é proporcional a outra se e somente se existe(m) alguma(s) constante(s) real(is) – denominada(s) constante(s) de proporcionalidade – que iguale(m) cada razão entre as valorações. Então, dados um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ e duas funções $f, g: X \longrightarrow \mathbb{R}$, temos que f é proporcional a g se, e só se, existe alguma constante real k tal que, para todo x ao longo de X, $\frac{f(x)}{g(x)} = k$. Isto é

$$f \propto g \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in X, \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Sendo verdadeira a proporcionalidade, existirão exatamente um ou dois valores possíveis para k.

$$\forall x \in X, k \in \left\{\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{g(x)}{f(x)}\right\}$$

E mantêm a propriedade de serem inversas multiplicativas uma da outra.

Algumas propriedades da proporcionalidade serão enunciadas e provadas abaixo.

Relações de equivalência

A relação de proporcionalidade é reflexiva, comutativa (ou “simétrica”) e transitiva, portanto, é uma relação de equivalência.

Reflexiva

Toda função é proporcional a si mesma.

$$f \propto f$$

Provada a partir da definição

$$\forall x \in X, \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Este é o único caso em que existe uma só constante real de proporcionalidade.

Comutativa (ou Simétrica)

Não existe uma ordem exata dos objetos, pois seja qual for a sua colocação a proporcionalidade não se altera.

$$f \propto g \Leftrightarrow g \propto f$$

Isso porque compartilham do mesmo conjunto de constantes de proporcionalidade:

$$\forall x \in X, k \in \left\{\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{g(x)}{f(x)}\right\} = \left\{\frac{g(x)}{f(x)}, \frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$

Transitiva

A proporcionalidade é transitiva:

$$f \propto g \land g \propto h \Leftrightarrow f \propto h$$

Portanto, a expressão acima pode ser simplificada em :

$$f \propto g \propto h$$

Prova-se a partir da definição:

$$\forall x \in X, f(x) = \alpha . g(x)$$

$$\forall x \in X, g(x) = \beta . h(x)$$

$$\therefore \forall x \in X, f(x) = \alpha . \beta . h(x)$$

O produto entre constantes é constante.

A principal fonte utilizada nesta seção foi [14]

2.1.3 – Atividade

(ENEM 2013 – Questão 147 – Caderno cinza):

Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota tem volume de 0,2mL. Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

Além de chamar a atenção para o desperdício de água causado por uma torneira pingando, a questão é resolvida de forma bem simples, através de sucessivas Regras de três.

Solução:

De meia-noite às seis horas da manhã temos, 6 horas.

Transformando horas em segundos:

Horas	Segundos
1	3600
6	x

$$\Longrightarrow 1.x = 6.3600 \Longrightarrow x = 21600s$$

Número de gotas que pingaram:

Segundos	Gotas
3	1
21600	y

$$\Longrightarrow 3.y = 1.21600 \Longrightarrow y = 7200\ gotas$$

Volume de água:

Gotas	Volume (mL)
1	$0,2$
7200	V

$$\Longrightarrow 1.V = 0,2.7200 \Longrightarrow V = 1440mL$$

Como $1L$ tem $1000mL$, então o volume, em litros é:

$$V = \frac{1440}{1000} = 1,440 \Longrightarrow V \simeq 1,4\ litros.$$

2.2.1 – Ecoturismo

O Ecoturismo, segundo a EMBRATUR [9], é um segmento de uma atividade turística que utiliza, de maneira sustentável, o patrimônio cultural e natural para formar opiniões e formar uma consciência ambiental por meio da interpretação do meio ambiente.

Este é um segmento que se caracteriza pela exploração de ambientes naturais, mas não se esquece de proteger áreas ditas “de preservação” para que a natureza esteja sempre equilibrada e harmônica. Afinal de contas todos dependem do bem estar das reservas naturais para manter vivas as suas necessidades reais de consumo ambiental. CAMPOS [5] garante que, porém, é preciso ainda avaliar o seguinte:

> Contudo, apesar do ecoturismo ser uma ferramenta a favor do desenvolvimento sustentável, algumas comunidades não têm obtido os benefícios esperados, pois o objetivo colocado em prática tem sido o lucro imediato e não o desenvolvimento através dos princípios defendidos pelo ecoturismo. Esse problema ocorre não apenas com empresários, mas também com governos de países que veem no ecoturismo uma solução para os problemas de desenvolvimento, ou seja, usam-no para suprir a falta de empregos e conseguir capital para infraestrutura. Dessa forma, se faz necessário elaborar novas estratégias de gestão, para separar o ecoturismo do turismo de massa, pois esta é a visão que alguns países têm sobre o mesmo, não observando a participação da comunidade local nesses planos.

Na atualidade o turismo é uma das atividades econômicas mais importantes, onde se destaca o segmento do ecoturismo. Este, por sua vez, torna-se uma atividade que tem direta relação com o desenvolvimento sustentável, haja vista que ele tem interdependência com os setores econômicos, sociais, ambientais e culturais, objetivando a preservação dos recursos naturais e culturais, com vista a garantir a sustentabilidade da comunidade local onde é desenvolvido.

Ao analisar estes pontos seguem abaixo os conceitos a serem avaliados dentro de uma perspectiva matemática e a atividade proposta para tal.

2.2.2 – Conceito

A Função Exponencial

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $a^x . a^y = a^{x+y}$

2) $a^1 = a$

3) $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$

É interessante observar que se uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) acima, isto é, $f(x+y) = f(x).f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f(x_0).f(x - x_0) = 0.f(x - x_0) = 0,$$ logo f será identicamente nula.

Mais ainda: se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Se uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem as propriedades 1) e 2) então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

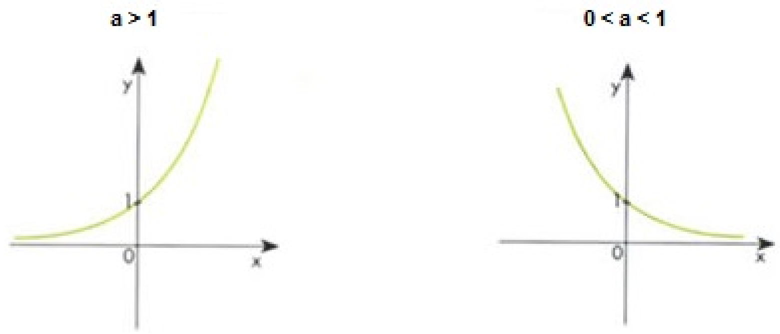
$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot \cdots \cdot f(1) = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a = a^n$$

Usando a propriedade 1), resulta daí, que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Portanto $f(r) = a^r$ é a única função $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A propriedade 3) diz que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

As figuras exibem os gráficos de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$



Fonte: www.brasilescola.com/matematica/funcao-exponencial<acesso em 02/02/2015>

A Função Logarítmica

A inversa da função exponencial de base a é a função

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado o logaritmo de x na base a. Por definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Segue-se imediatamente da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ que

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

para x e y positivos quaisquer. Com efeito, se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$ então

$$a^u = x \text{ e } a^v = y, \text{ logo}$$

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v} \text{ ,}$$

Ou seja

$$\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Essa propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século 17, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo.

O uso generalizado das calculadoras, cada vez mais desenvolvidas, fez com que essa utilidade inicial dos logaritmos perdesse o sentido.

Entretanto, a função logaritmo continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações.

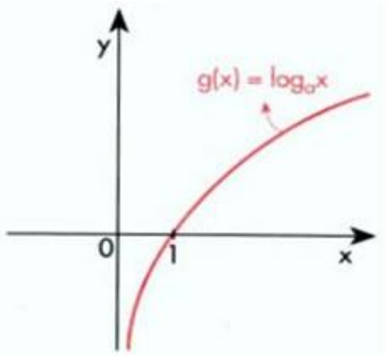
Essa importância é permanente: jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial (portanto equivalente a ela), a função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado.

A função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$. É importante ressaltar que somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \mapsto a^x$ somente assume valores positivos.

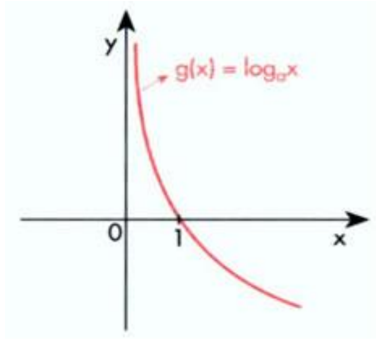
As funções logarítmicas mais utilizadas são aquelas de base $a > 1$, especialmente as de base 10 (logaritmos decimais), base 2 (logaritmos binários) e base e (logaritmos naturais, às vezes impropriamente chamados neperianos).

As figuras mostram os gráficos de $\log_a x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Função crescente



Função decrescente



Fonte: www.brasilescola.com/matematica/funcao-logarítmica<acesso em 04/02/2015

A principal fonte utilizada nesta seção foi [13]

2.2.3 – Atividade

(UFSM – 2012):

O ecoturismo é um exemplo de atividade que concilia desenvolvimento econômico e conservação dos ecossistemas. Por ser uma atividade dominada por pequenas e micro empresas, vem gerando rápido aumento de emprego e renda, o que aumenta a qualidade de vida das pessoas que vivem nas regiões onde ele é realizado. O crescimento ordenado dessa atividade no Brasil e seus reconhecidos benefícios para a conservação da natureza dependem de investimentos no aprimoramento da capacidade técnica e empreendedora dos agentes públicos, privados e das comunidades das regiões onde essa atividade se desenvolve.

Segundo a Organização Mundial do Turismo (OMT), o Ecoturismo cresce a uma taxa de 5% ao ano. No Brasil, em 2011, o Ecoturismo foi responsável pela movimentação de 6,775 bilhões de dólares. Supondo que o percentual de crescimento incida sobre a movimentação do ano anterior, pode-se expressar o valor movimentado V (em bilhões de dólares), em função do tempo t (em anos), por $V = 6{,}775(1{,}05)^{t-1}$ com $t = 1$ correspondendo a 2011, $t = 2$, a 2012 e assim por diante. Em que ano o valor movimentado será igual a 13,5 bilhões de dólares?

Dados: $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 1{,}05 = 0{,}02$

Solução:

Na função exponencial dada, temos que encontrar o tempo para que o valor movimentado pelo Ecoturismo seja igual a 13,5 bilhões de dólares. Para isso, vamos substituir V por este valor. Assim:

$$13{,}5 = 6{,}775(1{,}05)^{t-1} \Longrightarrow (1{,}05)^{t-1} = \frac{13{,}5}{6{,}775} \Longrightarrow (1{,}05)^{t-1} = 2$$

Para obtermos o t, teremos que aplicar logaritmo nos dois membros da equação exponencial resultante. Assim:

$$\log(1{,}05)^{t-1} = \log 2$$

Utilizando uma das propriedades dos logaritmos $(\log a^n = n.\log a)$, vem:

$\log 2 = (t-1)\log 1{,}05$.

Veja que o $\log 2$ é igual a $0{,}3$ e que o $\log 1{,}05$ vale $0{,}02$. Logo:

$$(0{,}3) = (t-1)0{,}02$$

Resolvendo, temos:

$$t-1 = \frac{0{,}3}{0{,}02} \Rightarrow t-1 = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{100}} \Rightarrow t-1 = \frac{3}{10}\cdot\frac{100}{2} \Rightarrow t-1 = 15 \Rightarrow t = 16$$

Veja que o tempo $t = 1$, corresponde a 2011, $t = 2$, a 2012 e assim por diante. Este percentual de crescimento, expresso pela função exponencial dada, incide sobre a movimentação do ano anterior, ou seja, no $t = 1$, este valor será em relação a 2010. Logo, o valor de 13,5 bilhões de dólares será movimentado em 2010 +16 = 2026.

2.3.1- Lixo

O lixo sempre foi um problema social e sempre esteve em pauta nas discussões sobre sustentabilidade. Além de lidar com resíduos domésticos a população precisa ainda conviver com lixos de outras ordens como o hospitalar e o industrial.

Ainda, a única maneira de se lidar com o lixo de forma sustentável é a partir da reciclagem. A reciclagem exerce função importantíssima na natureza diminuindo a poluição e tornando o meio ambiente um local mais agradável para se viver.

No processo de reciclagem, que além de preservar o meio ambiente também gera renda, os materiais mais reciclados são o vidro, o alumínio, o papel e o plástico. Esta reciclagem ajuda a diminuir significativamente a poluição da água, do ar e do solo. Muitas empresas estão reciclando materiais como uma maneira de diminuir os custos de produção de seus produtos.

Porém, para que o processo de reciclagem dê certo é preciso campanha de educação ambiental que gere consciência na população e reestruture o pensamento de muitos.

ALENCAR [1] coloca:

> No âmbito educacional a reciclagem gera oportunidades de mobilização e participação comunitárias, desenvolvendo nos cidadãos a consciência ambiental e uma atitude de responsabilidade em relação ao lixo por eles gerado. As atividades de reciclagem, quer sejam industriais ou artesanais, bem como as centrais de triagem ou usinas de compostagem podem ter fortes vínculos com a formação e educação ambientais de crianças, jovens e adultos. Essas instalações, além de serem unidades de tratamento do lixo, podem funcionar como grandes laboratórios de Ciências, oportunizando a aprendizagem de conceitos científicos, habilidades e valores relacionados à reciclagem do lixo urbano.

Sendo assim, analisaremos os conceitos matemáticos a serem trabalhados e atividade proposta logo abaixo.

2.3.2 – Conceito

Funções Polinomiais vs Polinômios

Diz-se que $p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *função polinomial* quando existem números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \qquad (*)$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

A soma e o produto de funções polinomiais são ainda funções polinomiais. Um exemplo interessante de produto é

$$(x-\alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1}) = x^n - \alpha^n.$$

Dizemos então que $x^n - \alpha^n$ é divisível por $x - \alpha$.

Seja p a função polinomial apresentada em $(*)$. Para quaisquer x, α reais, temos

$$p(x) - p(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha).$$

Como cada parcela do segundo membro é divisível por $x - \alpha$, podemos escrever, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha) q(x),$$

onde q é uma função polinomial.

Se p tem grau n, q tem grau $n-1$. Em particular, se α é uma raiz de p, isto é, $p(\alpha)=0$, então $p(x)=(x-\alpha)q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A recíproca é óbvia.

Portanto, α é uma raiz de p se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x-\alpha$. Mais geralmente $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ são raízes de p se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$p(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)q(x),$$

onde q é uma função polinomial de grau $n-k$ se p tem grau n.

Daí resulta que uma função polinomial de grau n não pode ter mais do que n raízes. Uma função polinomial p chama-se identicamente nula quando se tem $p(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, p tem uma infinidade de raízes (Todo número real é raiz de p). Então nenhum número natural n é grau de p, a fim de não contradizer o resultado acima. Isto significa que na expressão

$$p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

todos os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são iguais a zero. Concluímos então que a única função polinomial identicamente nula é do tipo

$$0x^n+0x^{n-1}+\cdots+0x+0.$$

Se nos ativermos à letra da definição, a função polinomial identicamente nula não tem grau, pois nenhum dos seus coeficientes é $\neq 0$.

Dadas as funções polinomiais p e q, completando com zeros (se necessário) os coeficientes que faltam, podemos escrevê-las sob as formas

$$p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$
$$q(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0,$$

sem que isto signifique que ambas têm grau n, pois não estamos dizendo que $a_n \neq 0$ nem que $b_n \neq 0$. Suponhamos que $p(x)=q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, que p e q sejam funções iguais. Então a diferença $d=p-q$ é a função identicamente nula, pois $d(x)=p(x)-q(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$d(x)=(a_n-b_n)x^n+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0).$$

Pelo que acabamos de ver sobre funções polinomiais identicamente nulas, segue-se que $a_n-b_n=0, \dots, a_1-b_1=0, a_0-b_0=0$, ou seja:

$$a_n=b_n, \dots, a_1=b_1, a_0=b_0.$$

Portanto as funções polinomiais p, q assumem o mesmo valor $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, têm os mesmos coeficientes.

Como no caso das funções quadráticas, existe uma diferença sutil entre o conceito de função polinomial e o conceito de polinômio, que apresentaremos agora.

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo (chamado uma indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdots X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada dos seus coeficientes. Ao escrevê-lo da maneira acima, estamos deixando explícita a intenção de somar e multiplicar polinômios como se fossem funções polinomiais, usando a regra $X^i \cdot X^j = X^{i+j}$. Por definição, os polinômios

$$p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$
$$q(X) = b_n X^n + \cdots + b_1 X + b_0$$

são iguais (ou idênticos) quando $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$. A cada polinômio $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ faz-se corresponder a função polinomial $\bar{p}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\bar{p}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta correspondência (polinômio) $\longmapsto$ (função polinomial) é sobrejetiva, pela própria definição destas funções. A discussão que fizemos acima sobre os coeficientes de funções polinomiais iguais significa que a polinômios distintos correspondem funções polinomiais distintas. Logo, trata-se de uma correspondência biunívoca.

Por esse motivo, não há necessidade de fazer distinção entre o polinômio p e a função polinomial $\bar{p}$. Ambos serão representados pelo mesmo símbolo p e serão chamados indiferentemente de polinômio ou de função polinomial. Além disso, diremos "a função $p(x)$" sempre que não houver perigo de confundi-la com número real que é o valor por ela assumido num certo ponto x.

Determinando um polinômio a partir de seus valores

Um polinômio de grau n é dado quando se conhecem seus $n+1$ coeficientes. Segundo a boa prática matemática, para determinar $n+1$ números é necessário (e muitas vezes suficiente) ter $n+1$ informações. No nosso caso, vale o seguinte resultado:

Dados $n+1$ números reais distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0, y_1, \dots, y_n$, existe um, e somente um, polinômio p, de grau $\leq n$, tal que

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n.$$

A parte "somente um" decorre imediatamente do que foi visto na seção anterior pois se p e q são polinômios de grau $\leq n$ que assumem os mesmos valores em $n+1$ pontos distintos então a diferença $p - q$ é um polinômio de grau com $n+1$ raízes, logo $p - q = 0$ e $p = q$.

A existência de um polinômio p de grau $\leq n$ que assume valores pré-fixados em $n+1$ pontos distintos dados, pode ser provada de duas maneiras diferentes. A primeira delas consiste em resolver o sistema de $n+1$ equações nas $n+1$ incógnitas do $a_1, \dots, a_n$ abaixo indicado:

$$\begin{gathered} a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n. \end{gathered}$$

Este sistema, no qual as quantidades conhecidas são as potências sucessivas de $x_0, x_1, \dots, x_n$, tem sempre solução única quando estes $n+1$ números são dois a dois diferentes. [Seu determinante é o determinante de Vandermonde, igual a $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$, o qual é $\neq 0$].

Outra maneira de provar que existe sempre um polinômio de grau $\leq n$ que assume nos $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ os valores arbitrados $y_o, y_1, \cdots, y_n$ consiste em exibir explicitamente esse polinômio, usando a chamada *fórmula de interpolação de Lagrange.*

Apresentamos a seguir os polinômios que resolvem o problema, destacando em especial os casos mais simples, $n = 1$ e $n = 2$.

$\boldsymbol{n = 1}$:

$$\mathrm{p(x)} = \mathrm{y}_0 \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1} + \mathrm{y}_1 \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}{\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0}.$$

$\mathbf{n = 2}$:

$$\mathrm{p(x)} = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\cdot$$

Caso geral:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)\cdot$$

Esta é a fórmula de interpolação de Lagrange. Vê-se imediatamente que o polinômio $p(x)$ aí definido cumpre as condições $p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$. Esse polinômio tem grau $\leq n$ mas seu grau pode perfeitamente ser qualquer número inteiro entre 0 e n.

Por exemplo, se pusermos $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ e $x_4 = 3$ e procurarmos o polinômio de grau ≤ 4 que assume nesses pontos os valores $-7, 1, 5, 11$ e 25, respectivamente, obteremos

$$\mathrm{p(x)} = x^3 - 2x^2 + 5x + 1,$$

que tem grau 3. E se, dados $n + 1$ pontos distintos, procurarmos o polinômio de grau $\leq n$ que se anula em todos esses pontos, a fórmula de Lagrange nos dará o polinômio identicamente nulo, o qual, segundo nossa definição não tem grau.

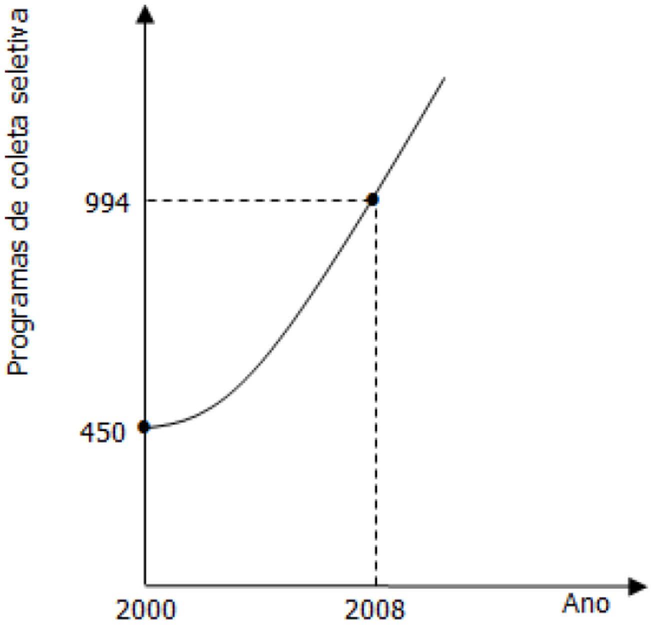
A principal fonte utilizada nesta seção foi [13]

2.3.3 – Atividade

(UFSM – 2012):

O lixo ainda é um dos principais desafios dos governos na área de gestão sustentável. Na última década, o Brasil deu um salto importante no avanço para a gestão correta dos resíduos sólidos.

O gráfico mostra dados do Ministério do Meio Ambiente sobre o número de programas de coleta seletiva, em 2000 e 2008.



Supõe-se que o número de programas de coleta seletiva é expresso por $f(x) = ax^3 - x^2 + 12x + b$, $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$, em que x é o tempo em anos, $x = 0$ corresponde a 2000, $x = 1$ corresponde a 2001 e assim por diante. De acordo com esse modelo, determine o número de programas de coleta seletiva em 2012.

Solução:

Para responder a pergunta, devemos completar a função $f(x) = ax^3 - x^2 + 12x + b$, isto é, encontrar a e b. Pelo gráfico, encontramos o valor do b, pois o termo independente da função polinomial representa o valor onde a curva intercepta o eixo y. Assim, $b = 450$.

Veja que x = 0 corresponde a 2000. Portanto, x = 8 corresponde ao ano de 2008. Para encontrar a, devemos substituir o ponto (8, 994) na função: $a \cdot 8^3 - 8^2 + 12 \cdot 8 + 450 = 994 \Rightarrow 512a - 64 + 96 + 450 = 994 \Rightarrow 512a + 482 = 994 \Rightarrow 512a = 512 \Rightarrow a = 1.$

Para encontrar o número de programas de coleta seletiva em 2012, fazemos x = 12 e substituímos na função $f(x) = x^3 - x^2 + 12x + 450$. Assim:

$$f(12) = 12^3 - 12^2 + 12 \cdot 12 + 450 \Rightarrow f(12) = 1728 - 144 + 144 + 450 = 2178$$

2.4.1- Energia

Atualmente o Brasil passa por uma de suas maiores crises energéticas em âmbito nacional. A todo tempo há aumento nas tarifas de energia que chegam a assustar o consumidor doméstico que tem que lidar com a escassez de água e agora com uma possível tormenta de apagões. Justo agora em que a população havia conseguido condições de vida melhores, maiores e melhores possibilidades na aquisição de produtos elétricos e eletrônicos, sente-se acuada para utilizar os equipamentos adquiridos com esforço e trabalho.

Mais uma vez o governo nos mostra sua incapacidade de governar de maneira sólida e de verificar as necessidades do povo podendo atendê-las, o que é seu real papel.

A solução para o problema então seria o desenvolvimento de fontes de energia limpa e sustentável. Para garantir a sustentabilidade há que se promover uma abordagem interdisciplinar que atinja tanto os meios social, cultural, ecológico, ambiental, econômico, político, entre outros. A sustentabilidade busca o equilíbrio e adequação entre estes critérios. O importante seria fazer com que todos, de forma planejada, se desenvolvam de forma linear e continua sem grandes perdas em alguns dos critérios.

O investimento em novas fontes de energia, seja eólica ou solar, talvez fosse a ponta de um iceberg, de uma solução para os conflitos de abastecimento de energia no Brasil.

LUCON e GOLDEMBERG [16] explicam:

> A crise financeira, no fundo, é mais um reflexo das crises de sustentabilidade que a história nos apresenta. Houve no passado outras crises, também vinculadas à excessiva exploração de recursos, especulação, inflação e escassez. As consequências imediatas foram perdas de vidas, guerras, desaceleração econômica e desemprego. Algumas sociedades desapareceram, como foi o caso da Ilha da Páscoa. Outras nunca mais se recuperaram, como foi o caso do Império Romano. Muitas sobreviveram e algumas cresceram e evoluíram, investindo em inovação e eficiência. Os períodos de pós-guerra nos mostram quais foram os bons exemplos. O Brasil é um país com abundância de recursos naturais, mas deve escolher seu caminho antes que perca suas vantagens comparativas.

2.4.2 – Conceito

Geometria Analítica

A Geometria analítica está fundamentada na ideia de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais. Assim, as linhas no plano (reta, circunferência, elipse, etc.) são descritas por meio de equações. Com isso, é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas, como também interpretar de forma geométrica algumas situações algébricas.

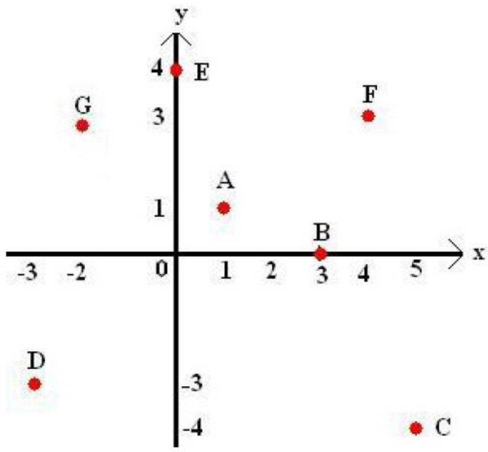
Essa integração entre Álgebra e Geometria foi responsável por grandes progressos na Matemática e nas outras ciências em geral.

Sistema cartesiano ortogonal

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais, isto é, a cada ponto do plano corresponde um único par ordenado (x, y), e a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto do plano. Essa relação biunívoca não é única, depende do sistema de eixos ortogonais adotado.

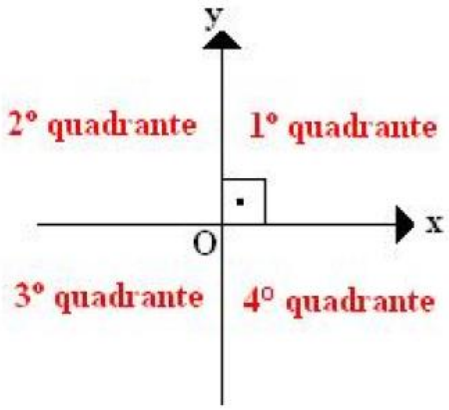
Para estabelecer uma dessas correspondências biunívocas são usados dois eixos ortogonais (eixo x e eixo y) que formam o sistema cartesiano ortogonal. A intersecção dos eixos x e y é o ponto O, chamado origem do sistema.

No sistema cartesiano ortogonal abaixo cada par ordenado está associado a um ponto.



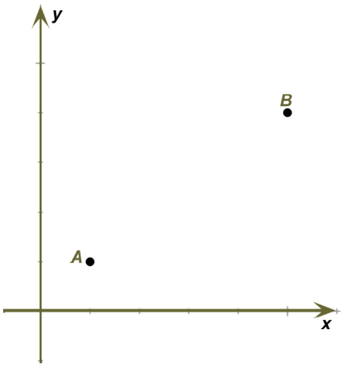
Considerando o ponto F(4, 3), dizemos que o número 4 é a coordenada x ou a **abscissa do ponto F**, e o número 3 é a coordenada y ou a **ordenada do ponto F.**

Cada uma das partes em que o plano fica dividido pelos eixos x e y recebe o nome de quadrante. Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti-horário, como mostra a figura:



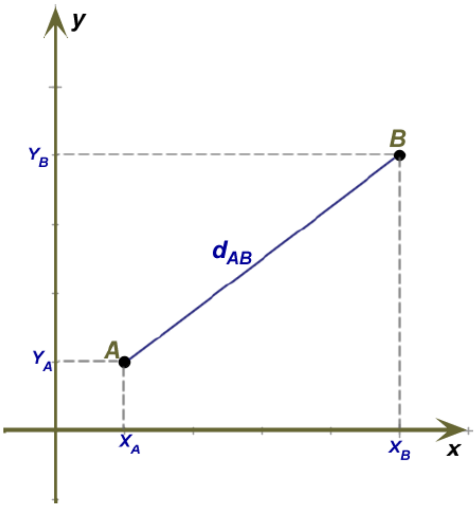
Distância entre dois pontos

Vamos representar dois pontos quaisquer no plano cartesiano.

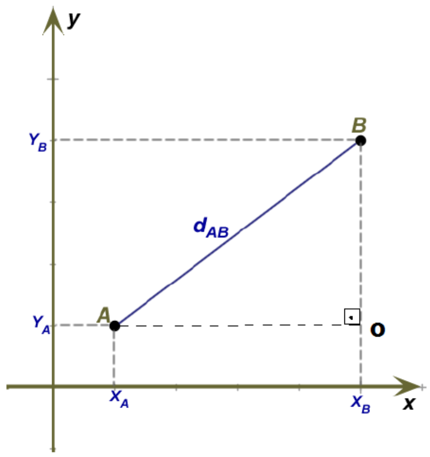


Portanto, teremos que a distância entre os pontos A e B será a medida do segmento que tem os dois pontos como extremidade. Por se tratar de dois pontos quaisquer, representaremos as coordenadas desses pontos de maneira genérica.

No plano, a distância entre dois pontos A e B é frequentemente obtida utilizando o Teorema de Pitágoras.



Sabe-se que os eixos coordenados do plano cartesiano são ortogonais, portanto, podemos construir um triângulo retângulo utilizando os pontos A e B, como mostra a figura a seguir.



Note que o segmento AB é a hipotenusa do triângulo AOB, e a medida de AB corresponde à distância entre esses dois pontos. Por se tratar de um triângulo retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras, no qual teremos:

$$(d_{AB})^2 = (AO)^2 + (BO)^2$$

Entretanto temos: $AO = x_B - x_A$ e $BO = y_B - y_A$

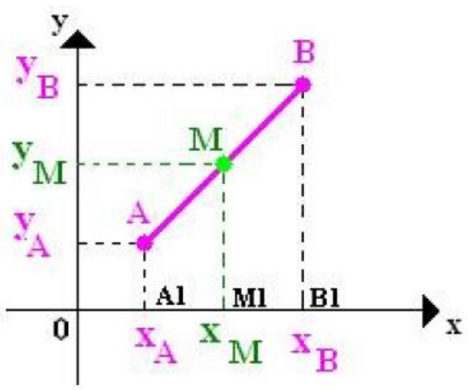
Portanto, a expressão fica da seguinte forma:

$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ e por fim

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Ponto médio de um segmento

O ponto médio é o ponto de equilíbrio de um segmento de reta.

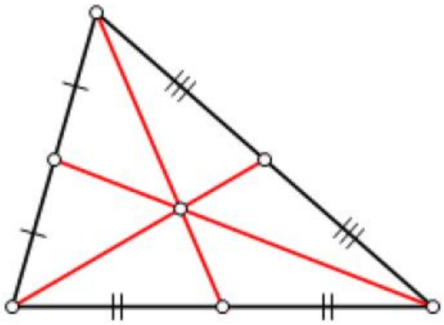


Considerando M o ponto médio do segmento AB, temos a seguinte expressão matemática capaz de determinar a coordenada do ponto médio de qualquer segmento no plano cartesiano:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Mediana

Chamamos mediana de um triângulo o segmento cujas extremidades são um dos vértices desse triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Um triângulo possui três medianas.



O ponto de encontro das três medianas de um triângulo é chamado baricentro do triângulo.

Condição de alinhamento de três pontos

A geometria analítica utiliza meios algébricos para compreender e estudar as propriedades das figuras e entes geométricos. Utilizando equações e expressões é possível descrever o comportamento e as características de formas geométricas planas e espaciais. Vamos utilizar os conceitos dessa geometria a fim de determinar a condição para que três pontos distintos do plano estejam alinhados.

Considere A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) e C (x_3, y_3) como sendo três pontos quaisquer e distintos do plano cartesiano. Esses pontos estão alinhados se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

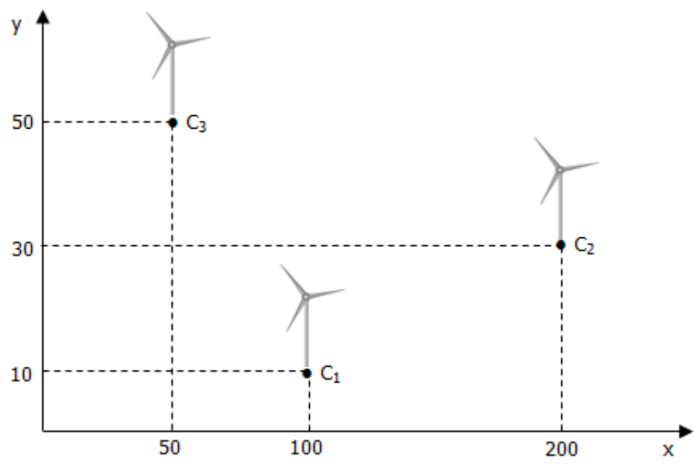
Ou seja, três pontos do plano estão alinhados se o determinante de suas coordenadas for igual a zero.

A principal fonte utilizada nesta seção foi [8]

2.4.3 – Atividade

(UFSM – 2012)

O uso de fontes de energias limpas e renováveis, como a energia eólica, geotérmica e hidráulica, é uma das ações relacionadas com a sustentabilidade que visa a diminuir o consumo de combustíveis fósseis, além de preservar os recursos minerais e diminuir a poluição do ar. Em uma estação de energia eólica, os cataventos C_1, C_2 e C_3 estão dispostos conforme o gráfico a seguir.



Para que um catavento de coordenadas (x, y) esteja alinhado com o catavento C_1 e com o ponto médio do segmento C_2C_3, é necessário e suficiente que

A) $2x + 15y = 850$.

B) $5y - x + 50 = 0$.

C) $55y - 26x + 2050 = 0.$

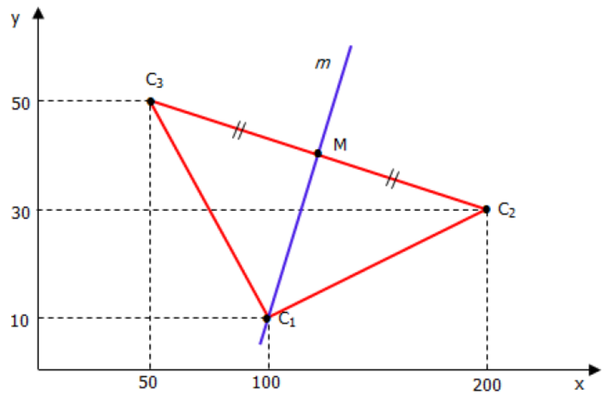
D) $4x + 5y = 450.$

E) $5y - 6x + 550 = 0.$

Solução:

Letra E.

Dado o triângulo com vértices em C_1, C_2 e C_3 devemos encontrar a equação da reta mediana m em relação ao lado C_2C_3, conforme figura abaixo:

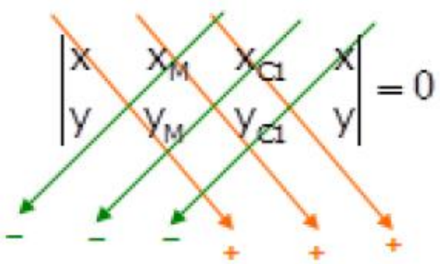


Vamos encontrar o ponto médio do lado C_2C_3, que é obtido pelas médias aritméticas de suas componentes, ou seja:

$$x_M = \frac{X_{C_2} + X_{C_3}}{2} = \frac{200 + 50}{2} = 125$$

$$y_M = \frac{Y_{C_2} + Y_{C_3}}{2} = \frac{30 + 50}{2} = 40$$

Temos os pontos M(125, 40) e C_1(100, 10) que pertencem a mediana m. Assim:



$$\begin{vmatrix} x & 125 & 100 & x \\ y & 40 & 10 & y \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 40x + 1250 + 100y - 125y - 4000 - 10x = 0$$

$$\Longrightarrow 30x - 25y - 2750 = 0 \Longrightarrow 6x - 5y - 550 = 0.$$

2.5.1 – Biodiversidade

Pesquisas indicam que "Bio" significa "vida" e diversidade significa "variedade". A biodiversidade, nada mais é, do que compreender, globalmente, diversidades de ordem genética, orgânica e ecológica.

Quando o assunto é biodiversidade é importante dizer que o agir de maneira sustentável é o melhor remédio. Isso leva o ser humano a se relacionar melhor com os valores sociais, econômicos, científicos e recreativos no qual estão envolvidos e inseridos.

Os habitats precisam ser respeitados assim como doenças em espécies em seu local de vivência e reprodução devem ser evitadas. Tudo o que envolve a agricultura, ou seja, o manuseio do solo ou a utilização de híbridos deve ser tratado com cuidado e utilizado com a máxima cautela.

VIANA e PINHEIRO [19] declaram sobre a biodiversidade e sustentabilidade:

> Os fragmentos florestais não são auto-sustentáveis. A degradação destes é resultado da complexa interação entre fatores inerentes ao processo de fragmentação, como redução da área, maior exposição ao efeito de borda e isolamento, e a constante pressão antrópica. Estes fatores se manifestam e se combinam de diversas formas, gerando diferentes formas de degradação. Como consequência cria-se um mosaico de eco-unidades único para cada fragmento florestal. Entretanto os resultados apontam para a necessidade de se manejar estes fragmentos e as paisagens em que estão inseridos, tanto quanto para sensibilizar a população local: os trabalhadores rurais e os proprietários para a importância da cobertura florestal. A eficácia desta intervenção depende da identificação dos fatores de degradação e de alternativas sustentáveis para minimizar o processo de degradação e recuperar a estrutura dos fragmentos florestais conservando assim a sua biodiversidade. A importância relativa dos fragmentos florestais na composição da cobertura florestal das paisagens intensamente cultivadas e a biodiversidade residente nestes permite defini-los como elementos chave para a recuperação qualitativa destas paisagens visando a sustentabilidade e a melhoria da qualidade de vida.

Segue abaixo, o conceito e a atividade a ser desenvolvida neste tópico.

2.5.2 – Conceito

Estatística

A Estatística é uma ferramenta muito importante dentro do monitoramento ambiental, uma vez que é necessário delinear experimentos que não sejam tendenciosos, quantificar e qualificar eventos ambientais e atribuir racionalidade, lógica e nível de confiabilidade nas informações ambientais.

A Estatística é uma área do conhecimento que utiliza teorias probabilísticas para explicação de eventos, estudos e experimentos. Tem por objetivo obter, organizar e analisar dados, determinar as correlações que apresentem, tirando delas suas consequências para descrição e explicação do que se passou, previsão e organização do futuro. Estatística é a ciência que estuda os dados. Dentro dela, existem duas subdivisões:

- Estatística descritiva (que estuda métodos e ferramentas de coleta de dados e modelos matemáticos para descrevê-los e interpretá-los).
- Estatística inferencial (sistemas e técnicas utilizadas para tomar decisões baseadas nos dados).

A Estatística é um ramo da matemática aplicada. Na teoria estatística, a aleatoriedade e a incerteza são modeladas pela teoria da probabilidade. Algumas práticas estatísticas incluem, por exemplo, o planejamento, a sumarização e a interpretação de observações. Porque o objetivo da estatística é a produção da "melhor" informação possível a partir dos dados disponíveis, alguns autores sugerem que a estatística é um ramo da teoria da decisão.

População e amostra

Em uma pesquisa, é importante que se conheça, inicialmente, o conjunto de pessoas (ou objetos) que têm em comum a característica que está sendo investigada. Esse conjunto é chamado *universo estatístico* ou *população.* A uma pequena parcela da população (parte ou subconjunto) damos o nome de *amostra.*

Chamando de U o universo estatístico e de A uma amostra, temos:

$$A \subset U$$

Variável

É, convencionalmente, o conjunto de resultados possíveis de um fenômeno.

- Variável qualitativa: quando seus valores são expressos por atributos: tipo de vegetação, tipo de solo, etc.
- Variável quantitativa: quando os dados são de caráter nitidamente quantitativo, e o conjunto dos resultados possui uma estrutura numérica, trata-se portanto da estatística de variável e se divide em:
  - Variável discreta ou descontínua: quando se trata de contagem (números inteiros).
  - Variável contínua: resulta normalmente de uma mensuração, e a escala numérica de seus possíveis valores corresponde ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, ou seja, podem assumir, teoricamente, qualquer valor entre dois limites.

Tabelas de frequência

A organização dos dados em tabelas possibilita uma leitura rápida e resumida dos resultados obtidos em uma pesquisa.

Para cada variável estudada, contamos o número de vezes que cada um de seus valores (realizações) ocorre. O número obtido é chamado *frequência absoluta* e pode ser indicado por Fa.

Em geral, quando os resultados de uma pesquisa são divulgados em jornais e revistas, os valores correspondentes às frequências absolutas são acompanhados do número total de valores obtidos, a fim de tornar a análise dos dados mais significativa.

Definimos para cada “valor assumido” por uma variável, a frequência relativa (indicaremos por Fr) como a razão entre a frequência absoluta (Fa) e o número total de dados (n), isto é:

$$Fr = \frac{Fa}{n}$$

Observe que, para cada “valor” assumido pela variável, $0 \leq Fa \leq n$.

Desse modo, temos que $0 \leq Fr \leq 1$. Por esse motivo, é comum expressar a frequência relativa em porcentagem.

Representações gráficas

Os vários tipos de representação gráfica constituem um importante recurso para resumo, análise e interpretação de um conjunto de dados.

Os gráficos estão presentes em diversos veículos de comunicação (jornais, revistas, internet), sendo associados aos mais variados assuntos do nosso dia a dia.

Sua importância está ligada sobretudo à facilidade e rapidez na absorção das informações por parte do leitor. Além disso, o recurso gráfico possibilita aos veículos de comunicação a elaboração de diversas ilustrações, que tornam a leitura mais atraente.

Medidas de centralidade

Média aritmética

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a relação dos valores assumidos por uma determinada variável x. Definimos média aritmética – indica-se por $\bar{x}$ – como a razão entre a soma de todos esses valores e o número total de valores:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Usando o símbolo de somatório para representar o numerador dessa expressão, escrevemos:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Média aritmética ponderada

Consideremos uma relação de valores formada pelos elementos $x_1, x_2, \dots, x_k$, com frequências absolutas respectivamente iguais a $n_1, n_2, \dots, n_k$.

A média aritmética ponderada desses valores é:

$$\bar{x} = \frac{x_1 . n_1 + x_2 . n_2 + \cdots + x_k . n_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

Mediana

Sejam $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ os n valores ordenados assumidos por uma variável X, em um conjunto de observações.

Define-se a mediana (indicaremos por Me) por meio da relação:

$$Me = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & se\ n\ for\ ímpar \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & se\ n\ for\ par \end{cases}$$

A definição garante que a mediana seja um valor central que divide o conjunto de dados em duas partes com o mesmo número de elementos. Em uma parte, todos os elementos são menores que (ou iguais) a mediana; na outra parte, todos os elementos são maiores que (ou iguais) a mediana.

Moda

A moda de uma relação de valores (indica-se Mo) é o valor que ocorre mais vezes na relação, isto é, aquele que possui maior frequência absoluta.

Medidas de dispersão (ou variabilidade)

Variância

Seja $x_1, x_2, \dots, x_n$ a relação dos valores assumidos por uma variável X e $\bar{x}$ a média aritmética desses valores.

Chamamos variância de X – indicamos por Var(X) ou σ^2 – ao número real não negativo:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Observe que cada termo do numerador da expressão acima corresponde ao quadrado da diferença entre um valor da relação e o valor médio, isto é, cada termo expressa o desvio quadrático de um certo valor com relação ao valor médio.

A variância (σ^2) pode ser interpretada, portanto, como a média aritmética dos desvios quadráticos de um conjunto de valores. Desse modo, a variância é uma medida de variabilidade ou dispersão de um conjunto de valores.

Desvio padrão

Seja $x_1, x_2, \dots, x_n$ a relação dos valores assumidos por uma variável X. Chamamos desvio padrão de X – indicamos por DP(X) ou σ – a raiz quadrada da variância de X:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

As principais fontes utilizadas nesta seção foram [12] e [13]

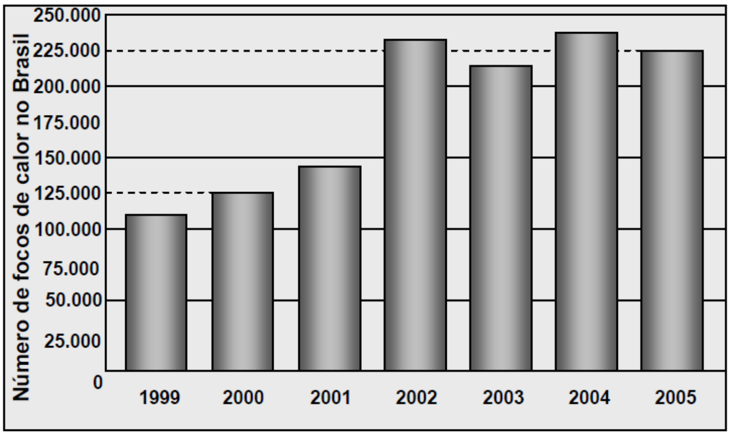
2.5.3 – Atividade

(UFSC – 2007)

Leia o texto com atenção e analise o gráfico.

[...] *O real papel da floresta amazônica no clima global ainda está sendo investigado pela ciência, mas estudos feitos nos últimos 10 anos revelam que as interações naturais da floresta com a atmosfera são importantes para toda a América do Sul, com reflexos em outras partes do mundo* [...]

ARTAXO, Paulo. A Amazônia e as mudanças globais. *Ciência Hoje*. Rio de Janeiro: v. 38, n. 224, p. 20, mar. 2006. (adaptado)



INPE. *Ciência Hoje*. Rio de Janeiro: v. 38, n. 224, p. 23, mar. 2006. (adaptado)

Determine o percentual de aumento do número de focos de calor resultante de queimadas na Amazônia, de 2000 a 2005.

Solução: $\frac{100000}{125000} = 0{,}8 = 80\%$

2.6.1 – TRANSPORTE

A forma como os brasileiros transitam é motivo de discussão e análise por parte de estudiosos do gênero. Percebe-se uma intenção muito grande em dirigir sozinho para os lugares desejados sem compartilhar com outro, que está indo na mesma direção, do mesmo meio de transporte.

Muito se fala em gases poluentes que evadem o meio ambiente e no caos em que vivem os motoristas das grandes metrópoles deste país. Quando o assunto é sustentabilidade nos transportes verifica-se uma grande intenção dos autores em tentar diminuir a emissão de gases, em fazer valer o uso dos transportes públicos e ainda, no reuso de bicicletas e outros transportes não poluentes.

Porém, para que isto tenha efeito significativo se faz necessária, por parte das autoridades, ações mais eficazes para que o transporte público tenha qualidade para o usuário e para que as condições das vias também sejam melhoradas.

A mudança na forma de se locomover depende de uma nova postura e educação a ser implantada. Vale lembrar o que nos diz VLEK [20]

> Padrões de mudança de comportamento ativados por meio de medidas políticas “duras” e “suaves” normalmente não se limitam a escolha do tipo de transporte, velocidade de deslocamento e/ou localização de estacionamento per se. Mudanças de comportamento relacionadas a mobilidade e transporte podem também envolver modificação nas atividades diárias, nos padrões de gastos e na natureza e intensidade das interações sociais. Nesses e em outros domínios comportamentais é que se pode encontrar razões várias para a aceitação ou rejeição de políticas inovadoras em transporte voltadas para o fortalecimento da sustentabilidade do sistema.

E é nesta visão e neste sentido que será desenvolvida atividade matemática sobre o tema.

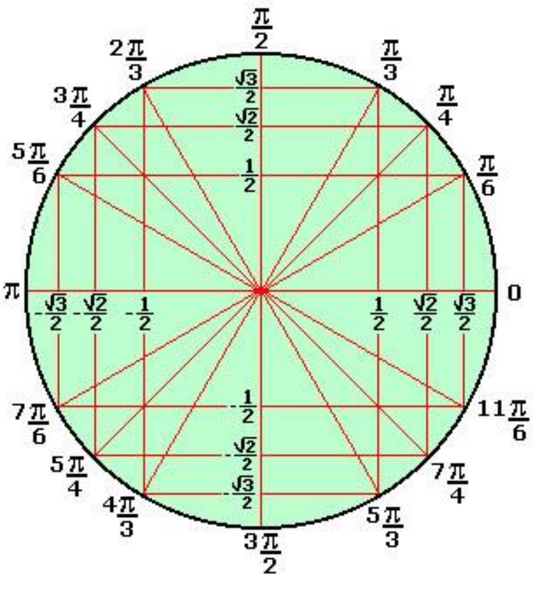
2.6.2 – Conceito

Trigonometria

De origem grega, a palavra trigonometria (trigonon: triângulo e metron: medida) é um ramo da Matemática responsável pelo estudo da relação existente entre os ângulos e os lados de um triângulo, que são as figuras básicas em qualquer estudo de Geometria. Nos triângulos retângulos (possuem um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90º), as relações constituem os chamados ângulos notáveis, 30º, 45º e 60º, que possuem valores constantes representados pelas relações seno, cosseno e tangente. Nos triângulos que não possuem ângulo reto, as condições são adaptadas na busca pela relação entre os ângulos e os lados.

Os primeiros estudos estão relacionados aos povos egípcios e babilônicos, sendo posteriormente desenvolvidos pelos gregos e indianos. Esses povos conseguiram criar, através da prática, situações de medição de distâncias consideradas inacessíveis. Hiparco de Niceia (190 a.C – 125 a.C) foi um astrônomo grego que introduziu a Trigonometria como ciência, por meio de estudos ele implantou as relações existentes entre os elementos do triângulo. O Teorema de Pitágoras possui papel importante no desenvolvimento dos estudos trigonométricos, pois é através dele que desenvolvemos fórmulas teóricas comumente usadas nos cálculos relacionados a situações práticas cotidianas.

Devemos ressaltar que a Trigonometria objetivou a elaboração dos estudos das funções trigonométricas, relacionadas aos ângulos e aos fenômenos periódicos. A partir do século XV, a modernidade dos cálculos criou novas situações teóricas e práticas relacionadas aos estudos dos ângulos e das medidas. Com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, pelos cientistas Isaac Newton e Leibniz, a Trigonometria ganhou moldes definitivos no cenário da Matemática, sendo constantemente empregada em outras ciências, como Medicina, Engenharia, Física (ondulatória, óptica), Química, Geografia, Astronomia, Biologia, Cartografia, Navegação entre outras.



Fonte: www.brasilescola.com/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico <acesso em 16/01/2015>

Funções trigonométricas

As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia a dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise.

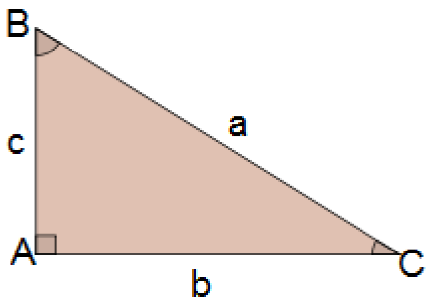
Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Como se sabe, desde o ensino fundamental, num triângulo retângulo de hipotenusa a e ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, opostos respectivamente aos catetos b e c, têm-se as definições:

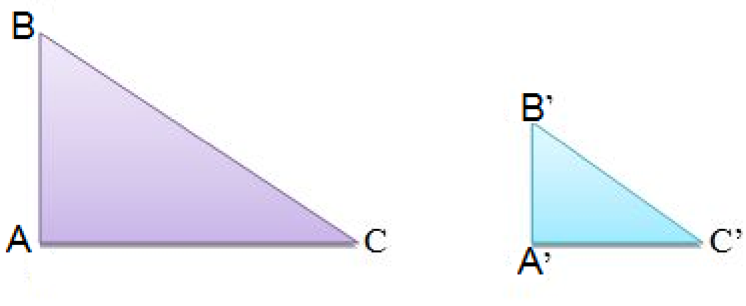
$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} = (cateto\ adjacente) \div (hipotenusa)$$

$$\sin\hat{B} = \frac{b}{a} = (cateto\ oposto) \div (hipotenusa)$$

$$e, analogamente, \cos\hat{C} = \frac{b}{a}, \sin\hat{C} = \frac{c}{a}.$$



Estas relações definem o seno e o cosseno de um ângulo agudo qualquer, pois todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo. É fundamental observar que $\cos\hat{B}$ e $\sin\hat{B}$ dependem apenas do ângulo $\hat{B}$ mas não do tamanho do triângulo retângulo do qual $\hat{B}$ é um dos ângulos agudos. Com efeito, dois quaisquer triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo igual a $\hat{B}$ são semelhantes.



Se esses triângulos são ABC e A'B'C', com $\widehat{B'} = \hat{B}$, então a semelhança nos dá:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$$

e

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$$

logo

$$\sin \widehat{B'} = \sin \hat{B} \;\; e \;\; \cos \widehat{B'} = \cos \hat{B}.$$

Portanto o seno e o cosseno pertencem ao ângulo e não ao eventual triângulo que o contêm.

Assim, a semelhança de triângulos é a base de sustentação da Trigonometria. Se organizarmos uma tabela com os valores de $\cos \hat{B}$ para todos os ângulos agudos $\hat{B}$, a relação $c = a.\cos \hat{B}$ e o Teorema de Pitágoras

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

nos permitirão determinar os catetos b, c de um triângulo retângulo, uma vez conhecida a hipotenusa a e um dos ângulos agudos. Mais geralmente, num triângulo ABC qualquer, a altura h, baixada do vértice C sobre o lado AB, tem a expressão $h = \overline{BC}.\sin \hat{B}$. Esta simples fórmula exibe a eficiência da Trigonometria como instrumento de cálculo na Geometria, permitindo relacionar ângulos com comprimentos de segmentos.

O Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

aplicado ao triângulo retângulo ABC, com AB = c, AC = b e BC = a, nos mostra imediatamente que

$$\left(\cos \hat{B}\right)^2 + \left(\sin \hat{B}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

A relação fundamental $\cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = 1$ mostra que, a rigor, basta construir uma tabela de senos para ter a de cossenos, ou vice-versa.

É evidente, a partir da definição, que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra “cosseno” (seno do complemento).

É claro que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números compreendidos entre 0 e 1.

A relação fundamental

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

sugere que, para todo ângulo α, os números $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ são as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

A principal fonte utilizada nesta seção foi [13]

2.6.3 – Atividade

(UFSM – 2012)

Em muitas cidades, os poluentes emitidos em excesso pelos veículos causam graves problemas a toda a população. Durante o inverno, a poluição demora mais para se dissipar na atmosfera, favorecendo o surgimento de doenças respiratórias. Suponha que a função

$$N(x) = 180 - 54 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x-1)\right)$$

represente o número de pessoas com doenças respiratórias registrado em um Centro de Saúde, com x = 1 correspondendo ao mês de janeiro, x = 2, ao mês de fevereiro e assim por diante. Determine a soma do número de pessoas com doenças respiratórias registrado nos meses de janeiro, março, maio e julho.

Solução:

Temos que encontrar N(1), referente ao número de pessoas com doenças respiratórias registrado em janeiro, N(3), referente ao mês de março, N(5), ao mês de maio e N(7), ao mês de julho.

$$N(1) = 180 - 54 \cos\left(\frac{\pi}{6}(1-1)\right) = 180 - 54 \cos 0 = 180 - 54.1 = 126$$

$$N(3) = 180 - 54\cos\left(\frac{\pi}{6}(3-1)\right) = 180 - 54\cos\frac{\pi}{3} = 180 - 54.\frac{1}{2} = 153$$

$$N(5) = 180 - 54\cos\left(\frac{\pi}{6}(5-1)\right) = 180 - 54\cos\frac{2\pi}{3} = 180 - 54\left(-\frac{1}{2}\right) = 207$$

$$N(7) = 180 - 54\cos\left(\frac{\pi}{6}(7-1)\right) = 180 - 54\cos\pi = 180 - 54.(-1) = 234$$

Somando, temos: 126 + 153 + 207 + 234 = 720

2.7.1 – Alimentos

A questão que envolve os alimentos e sua utilização é bastante polêmica. Verifica-se que o Brasil é um país rico, que oferece muito quando este é o assunto, mas sabemos que o desperdício ainda é um problema de extrema gravidade.

Alimentar-se é uma necessidade, porém é inadmissível que, nos dias de hoje, ainda vejamos alimentos sendo jogados fora. Há como minimizar este problema se soubermos reaproveitar sobras, cascas, entre outros, na tentativa de tornar tudo isto menos contundente.

Existem muitas explicações para as causas do desperdício no Brasil. Muitos pesquisadores já coletaram dados, já fizeram suas pesquisas chegando a conclusão que o desperdício alimentar vai desde a plantação, desde a fabricação nas grandes industrias até o consumidor final. Muitas das vezes a tecnologia que deveria ajudar na produção de alimentos motiva o desperdício de alguns deles e o descarte daquilo que é considerado “lixo”.

PORTILHO, CASTANEDA e CASTRO [17] afirmam:

> Acreditamos que as reflexões sobre a alimentação como campo político devem incluir investigações relacionadas a questões como a politização do consumo alimentar como tendência nas sociedades contemporâneas, as especificidades desse fenômeno no contexto brasileiro, os limites e possibilidades desse tipo de ativismo, a capacidade de o consumo político alterar agendas e pautar políticas públicas e empresariais, a conjugação (ou não) do consumo político com a participação via formas institucionalizadas e

coletivas e as opções metodológicas capazes de captar os processos de politização do consumo alimentar.

2.7.2 – Conceito

Progressões Aritméticas

Grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais são comuns na vida real.

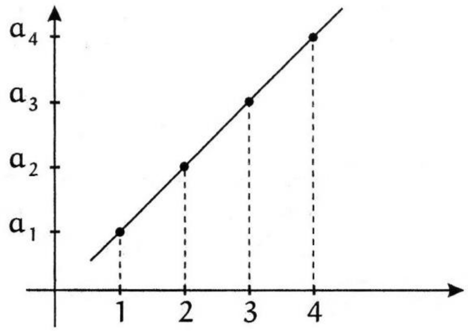
Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo.

Portanto, uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é representada pela letra r.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois, ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos; $a_{12} = a_7 + 5r$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = a_{17} - 13r$, pois retrocedemos 13 termos ao passar de a_{17} para a_4 e, de modo geral, $a_n = a_1 + (n-1)r$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n - 1$ termos.

Como em uma progressão aritmética $a_n = a_0 + nr$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é, simplesmente, a restrição aos naturais da função afim $a(x) = a(0) + rx$. Portanto, pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.

Em outras palavras, (an) é uma progressão aritmética se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$ etc... estão em linha reta.



Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

A soma dos termos de uma progressão aritmética situados no intervalo fechado de a_p até a_q é calculada pela seguinte fórmula:

$$S_{(p,q)} = \frac{(q - p + 1).\left(a_p + a_q\right)}{2}$$

Em particular, para somar os n primeiros termos, pode-se utilizar a seguinte simplificação da fórmula anterior:

$$S_n = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2}$$

Demonstração:

Considerando a PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$, a soma S_n de todos os termos dessa progressão pode ser escrita assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Todos os pares entre parênteses têm o mesmo valor por serem simétricos em relação aos extremos da PA.

$$(a_2 + a_{n-1}) = (a_1 + r + a_n - r) = (a_1 + a_n)$$

$$(a_3 + a_{n-2}) = (a_1 + 2r + a_n - 2r) = (a_1 + a_n)$$

e assim por diante

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$$

Então, como há n pares de termos:

$$2S_n = (a_1 + a_n).n$$

Logo

$$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$$

Progressões Geométricas

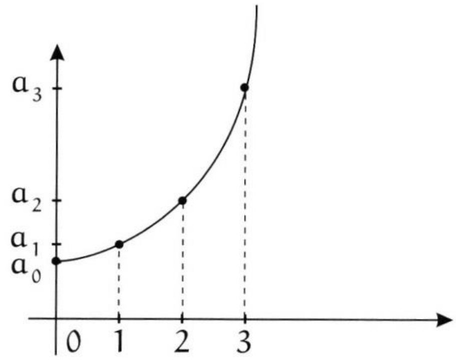
Uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q. A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de $1 + i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo, basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante.

Por exemplo, $a_{13} = a_5.q^8$, pois avançamos 8 termos ao passar de a_5 para a_{13}; $a_{12} = a_7.q^5$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = \frac{a_{17}}{q^{13}}$, pois ao passar de a_{17} para a_4, retrocedemos 13 termos; de modo geral, $a_n = a_1.q^{n-1}$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos n – 1 termos.

Em muitos casos, é mais natural numerar os termos a partir de zero; nesse caso, $a_n = a_0.q^n$, pois avançamos n termos ao passar de a_0 para a_n.

Como em uma progressão geométrica $a_n = a_0.q^n$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é, simplesmente, a restrição aos naturais da função exponencial $a(x) = a(0).q^x$. Portanto, pensando em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.



Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

A soma dos termos de uma P.G., a partir do primeiro, é definida por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 . q^{i-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}.$$

Caso $q \neq 1$, a soma pode ser descrita pela seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 .(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 .(1 - q^n)}{1 - q}$$

Demonstração:

Essa fórmula pode ser explicada dessa maneira:

$$S_n = a_1 + a_1 . q + \cdots + a_1 . q^{n-1} \qquad (*)$$

Multiplica-se ambos os membros pela razão q

$$q . S_n = a_1 . q + a_1 . q^2 + \cdots + a_1 . q^n \qquad (**)$$

Subtrai-se $(*)$ de $(**)$, cancelando-se os termos repetidos:

$$q . S_n - S_n = a_1 . q^n - a_1$$

o que é equivalente (através da fatoração do fator comum) a

$$(q - 1) S_n = a_1 (q^n - 1)$$

Divide-se ambos os termos por $(q-1) \neq 0$, e o resultado segue.

$\blacksquare$

Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica

A soma dos infinitos termos de uma P.G. é chamada de série geométrica e está bem definida quando $|q| < 1$. Sua soma é:

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 . q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

As principais fontes utilizadas nesta seção foram [8], [12] e [13]

2.7.3 – Atividade

(UFG):

A teoria criada por Tomas Robert Malthus (1766-1834), economista e demógrafo inglês, e que ganhou o nome de “Malthusianismo" foi a primeira teoria populacional a relacionar o crescimento da população com a fome, afirmando a tendência do crescimento populacional em progressão geométrica, e do crescimento da oferta de alimentos em progressão aritmética.

a) Explique o significado matemático dos termos progressão geométrica e progressão aritmética.

b) Calcule os cinco primeiros termos de uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 10 e razão 10. Faça o mesmo para uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 10 e razão 10.

c) O que aconteceria à humanidade, segundo a lei de Malthus?

Solução:

a) Progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado razão da progressão.

Progressão geométrica é uma sequência de números não-nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo, chamado razão da progressão.

b) PA (10, 20, 30, 40, 50, ...)

PG (10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, ...)

c) Malthus acreditava que o crescimento demográfico iria ultrapassar a capacidade produtiva da terra gerando fome e miséria.

Capítulo 3

Propondo a criação de nova disciplina para curso superior: Introdução à Matemática Elementar da Sustentabilidade.

Após ter explanado, intensamente, acerca da sustentabilidade e sobre as maneiras como a matemática pode agir para criar um ambiente mais sustentável, proponho no capítulo que segue a criação de uma disciplina a nível de curso superior em que a aplicação do estudo feito seja efetivada.

No primeiro ponto analisado verificou-se o quanto a questão água tem sido discutida, não somente no Brasil – país em crise de abastecimento - como em todo o mundo. Precisamos criar maneiras de fazer com que a água potável, própria para uso seja usada com maior disciplina e menos descaso pela população.

Sendo assim, após discussão teórica foi exposto conceito em que a regra de três possa ser utilizada para cálculo de torneiras pingando. Esta é uma maneira de mostrar que o uso da matemática aqui pode ser muito válida para estudiosos e para pessoas comuns em suas discussões sobre o assunto.

No caso do ecoturismo pudemos verificar que se for efetivado e utilizado de forma inadequada pode trazer mais prejuízos do que crescimento da economia de um ambiente. Pudemos provar que através das propriedades da função exponencial e da função logarítmica há como calcular a movimentação financeira de uma atividade comercial que não agride o meio ambiente, neste caso, o ecoturismo.

O problema do lixo também é algo gravíssimo para esta geração e para as gerações futuras. Quando o lixo não é descartado adequadamente o planeta pode sofrer consequências desastrosas. Sendo assim a função polinomial nos permite analisar e calcular dados, por exemplo, o número de programas de coleta seletiva em que foram utilizados em 2012 e nos permite realizar cálculos para os anos futuros.

Quando o assunto é energia voltamos, novamente, a pensar nas águas e nas energias limpas que podem ser utilizadas pelas próximas gerações. A questão envolvida aqui se relaciona à localização e distância (geometria analítica) entre cataventos numa estação de energia eólica, que é uma fonte de energia limpa e sustentável.

A biodiversidade também esteve em discussão no capítulo anterior. Houve como propor o tratamento das florestas conscientemente e a manutenção da vida. As queimadas na Amazônia foram estudadas e monitoradas através de dados estatísticos.

Os problemas relacionados aos transportes são de ordem urbana, organização social e leva a reflexão sobre meios de transporte que utilizem combustível mais limpo. Assim uma função trigonométrica estabelece a relação entre o número de pessoas com doenças respiratórias registrado num certo período.

No caso dos alimentos é preciso saber se estão sendo produzidos em quantidade adequada e como o homem tem tratado a terra, já que precisa do que vem dela para sobreviver. Nas questões de matemática verificou-se que a população cresce em Progressão Geométrica e as fontes de alimento em Progressão Aritmética, portanto o crescimento populacional ultrapassa a capacidade produtiva da terra, o que gera fome e miséria.

Visto o exposto até então se propõe a criação de disciplina no curso de Licenciatura em Matemática com o nome de "Introdução à Matemática Elementar da Sustentabilidade" para fazer com que os alunos deste curso superior tenham a capacidade de avaliar as maneiras pelas quais a disciplina pode ajudá-los em suas funções. É importante ao graduando e pós-graduando o interesse em colocar, em números reais, as formas pelas quais a matemática pode auxiliá-los.

A seguir segue uma proposta de plano de curso para a disciplina.

PLANO DE CURSO
DISCIPLINA: Introdução à Matemática Elementar da Sustentabilidade CARGA HORÁRIA: 45 horas-aula PÚBLICO ALVO: Alunos de Licenciatura em Matemática PERÍODO: 2º semestre letivo
1- Objetivos: - Relacionar a matemática ao estudo do meio ambiente. - Mensurar, através da coleta de dados, prejuízos e projetar soluções. - Formar uma consciência ecológica dentro de indicadores reais.
2- Metodologia de Ensino: Apresentação teórica sobre conceitos inerentes à sustentabilidade seguidos de conceitos e exemplos matemáticos que associem ambos os assuntos para melhor compreensão das questões envolvidas. Tudo será feito através de discussões com o professor por meio de uma leitura crítica e a utilização de softwares de computação algébrica e numérica, como o Geogebra, o Maple e o Calc, por exemplo, para melhor visualização dos exemplos.
3- Ementa 1) Água e Proporcionalidade 2) Ecoturismo e Funções Exponencial e Logarítmica 3) Lixo e Função Polinomial 4) Energia e Geometria Analítica 5) Biodiversidade e Estatística 6) Transporte e Trigonometria 7) Alimentos e Progressões Aritméticas e Geométricas.
4- Conteúdo Programático: 1- Água 1.1- Desperdício de água 1.2- Proporcionalidade 1.2.1- Definição 1.2.2-Relações de equivalência 1.3- Atividade 2- Ecoturismo 2.1- Atividade sustentável

2.2- Função Exponencial

2.2.1- Definição

2.3- Função Logarítmica

2.3.1- Definição

2.4- Atividade

3- Lixo

3.1- Problema social e reciclagem

3.2- Funções Polinomiais vs Polinômios

3.2.1- Determinando um polinômio a partir de seus valores

3.2.2- Caso geral (Interpolação de Lagrange)

3.3- Atividade

4- Energia

4.1- Fontes de energia sustentáveis

4.2- Geometria analítica

4.2.1- Sistema cartesiano ortogonal

4.2.2- Distância entre dois pontos

4.2.3- Mediana

4.2.4- Condição de alinhamento de três pontos

4.3- Atividade

5- Biodiversidade

5.1- Preservação

5.2- Estatística

5.2.1-População e amostra

5.2.2- Variável

5.2.3- Tabelas de frequência

5.2.4- Representações gráficas

5.2.5- Medidas de centralidade

5.2.6- Medidas de dispersão

5.3- Atividade

6- Transporte

6.1- Poluição atmosférica

6.2- Trigonometria

6.2.1- Funções trigonométricas

6.3- Atividade

7- Alimentos

7.1- Desperdício e reaproveitamento de sobras

7.2- Progressão Aritmética

7.2.1- Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A.

7.3- Progressão Geométrica

7.3.1- Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G.

7.3.2- Soma dos infinitos termos de uma P.G.

7.4- Atividade

Considerações Finais

Ao finalizar este texto muito há o que se dizer e pensar acerca deste estudo. É possível constar a importância da Matemática em todos os âmbitos sociais, sem exceção alguma.

Ao abordar o tema sustentabilidade associado a Matemática com o intuito de realizar cooptações que contribuam para o meio houve como constatar que a disciplina exerce função primordial para calcular e avaliar situações práticas do cotidiano. Iniciei os trabalhos dando uma visão teórica sobre sustentabilidade, o que deu solidez a tudo o que foi dito em seguida.

Houve como verificar que quando parto de um pressuposto teórico, avanço para uma discussão social, exponho um conceito e provo que a partir do exercício tudo passa a ter uma solução mais plausível e concreta. O leitor não se perde no vazio e nem se desinteressa pela pesquisa realizada porque tudo, exatamente tudo o que foi dito, tem fundamento.

Os problemas que giram em torno dos pontos propostos - água, ecoturismo, lixo, energia, biodiversidade, transporte, alimentos – são pertinentes, diários e sólidos. Para criar um mundo mais sustentável é preciso avaliar estes pontos, com cuidado, propondo soluções e comprovações concretas e plausíveis a partir da Matemática.

A criação de nova disciplina, neste caso, era ainda foco maior para que alunos graduandos possam ter o conhecimento da aplicação do conteúdo no dia a dia.

A análise de dados, a previsão de situações futuras partindo da Matemática, constituem em cooperação e colaboração para mudanças que evitem catástrofes, que permitam, por exemplo, que o homem possa se planejar quando o assunto é escassez de agua. O que a sociedade poderia fazer nesta situação? Foi por falta de planejamento e de cálculos que muitos estados brasileiros encontram-se em condições de racionamento nos dias de hoje.

É possível afirmar que sem um cálculo preciso, que sem a utilização da disciplina, na maioria das situações, aí é que tudo fica vazio, sem contexto ou sem aplicação.

Este é um texto a ser considerado, avaliado e estudado com atenção porque visa à melhoria da compreensão da Matemática, do ponto de vista da sustentabilidade, como disciplina auxiliadora da formação do cidadão.

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, ,Mariléa Muniz Mendes. **RECICLAGEM DE LIXO NUMA ESCOLA PÚBLICA DO MUNICÍPIO DE SALVADOR**. Revista Virtual, v . 1 , n . 2, p. 9 6 –1 13 , ju l – de z 20 0 5. Disponível em http://www.gepexsul.unisul.br/extensao/2012/amb3.pdf. Acesso em 04/03/2015

[2] ARAÚJO, Maria Inês Oliveiran; BIZZO, Nélio. **DISCURSO DA SUSTENTABILIDADE, EDUCAÇÃO A M B I E N TAL E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE BIOLOGIA.** ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 2005. NÚMERO EXTRA. VII CONGRESO. Disponível em http://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2005nEXTRA/edlc_a2005nEXTRAp262dissus.pdf. Acesso em 03/02/2015

[3] BARBOSA, Gisele Silva. **O DESAFIO DO DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL**. Revista Visões 4ª Edição, Nº4, Volume 1 - Jan/Jun 2008. Disponível em file:///C:/Users/Windows%207/Downloads/4ed_O_Desafio_Do_Desenvolvimento_Sustentavel_Gisele.pdf. Acesso em 02/02/2015)

[4] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais* - Matemática. Brasília, 1998

[5] CAMPOS, Ângelo Mariano Nunes. **O ecoturismo como alternativa de desenvolvimento sustentável.** Caderno Virtual de Turismo - Vol. 5, N° 1 (2005). Disponível em: file:///C:/Users/Windows%207/Downloads/75-280-1-PB.pdf. Acesso em 04/03/2015

[6] CASTRUCCI, Benedicto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni. *A Conquista da Matemática*. Edição Renovada. São Paulo: FTD, 2009.

[7] CONSUMO SUSTENTÁVEL: Manual de educação. Brasília: Consumers International/ MMA/ MEC/ IDEC, 2005. 160p.

[8] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto & aplicações.* Vols. 1, 2 e 3. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013

[9] EMBRATUR/IBAMA. Diretrizes para uma política nacional de ecoturismo. Brasília, 1994

[10] FERREIRA, Aldo; CUNHA, Cinara. **Sustentabilidade ambiental da água consumida no Município do Rio de Janeiro, Brasil**. Rev Panam Salud Publica/Pan Am J Public Health 18(2), 2005. Disponivel em http://www.scielosp.org/pdf/rpsp/v18n2/27140.pdf. Acesso em 04/03/2015

[11] FERREIRA, Leila da Costa. **A questão ambiental: sustentabilidade e políticas públicas no Brasil**. São Paulo: Boitempo Editorial, 1998.

[12] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. *Matemática e Realidade*. 6ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

[13] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A matemática do ensino médio. Vols. 1, 2 e 3. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] LIMA, Elon Lages. Temas e problemas. 1 ed. SBM, 2001. 193p

[15] LORENZATO, Sérgio. *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006a.

[16] LUCON, Oswaldo; GOLDEMBERG, José. **Crise Financeira, Energia e Sustentabilidade no Brasil.** Estudos avançados 23 (65), 2009. Disponivel em: file:///C:/Users/Windows%207/Downloads/10442-13274-1-PB.pdf. Acesso em 01/02/2015

[17] PORTILHO, Fatima; CASTANEDA, Marcelo; CASTRO, Ines Rugani Ribeiro de. **A alimentação no contexto contemporâneo: consumo, ação política e sustentabilidade.** Cien. Saúde Coletiva, 2011 - SciELO Public Health. Disponível em http://www.scielosp.org/pdf/csc/v16n1/v16n1a14.pdf. Acesso em 08/04/2015

[18] REBOUÇAS, Aldo da C. **AGUA NO BRASIL: ABUNDANCIA, DESPERDÍCIO E ESCASSEZ.** BAHIA ANÁLISE & DADOS Salvador, v. 13, n. ESPECIAL, p. 341-345, 2003. Disponível em http://labs.icb.ufmg.br/benthos/index_arquivos/pdfs_pagina/Minicurso/pag_341.pdf. Acesso em 04/03/2015

[19] VIANA, Virgilio; PINHEIRO, Leandro. **Conservação da biodiversidade em fragmentos florestais**. SÉRIE TÉCNICA IPEF v. 12, n. 32, p. 25-42, dez. 1998. Disponível em: http://www.avesmarinhas.com.br/8%20-%20Conserva%C3%A7%C3%A3o%20da%20biodiversidade%20em%20fragmentos.PDF. Acesso em 28/02/2015

[20] VLEK, Charles. **Globalização, dilemas dos comuns e qualidade de vida sustentável: do que precisamos, o que podemos fazer, o que podemos conseguir?** Estudos de Psicologia 2003, 8(2), 221-234. Disponivel em http://www.scielo.br/pdf/epsic/v8n2/19038.pdf. Acesso em 30/01/2015

.