



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Uma Introdução à Curvas Planas

Anderson de Azevedo Gomes

Goiânia

2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a): Anderson de Azevedo Gomes	
E-mail: eiei@gomes@bol.com.br	
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Professor da Rede Estadual de Ensino de Goiás. Professor da Rede Municipal de Ensino de Anápolis-GO
Agência de fomento:	Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior Sigla: CAPES
País: Brasil	UF: GO CNPJ: 00.889.834/0001-08
Título:	Uma Introdução à Curvas Planas
Palavras-chave:	Vetores, Cônicas, Curvas e Referencial de Frenet.
Título em outra língua:	An Introduction to Curves Planas
Palavras-chave em outra língua:	Vectors, Conic, Curves and Frenet Formulas.
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico.
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	06/11/2015.
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT – profissional.
Orientador (a):	Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo.
E-mail:	m3melo@ufg.br
Co-orientador(a):*	
E-mail:	

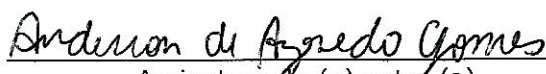
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento **SIM** **NÃO¹**

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 15 / 12 / 2015

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Anderson de Azevedo Gomes

Uma Introdução à Curvas Planas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo

Goiânia

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Gomes, Anderson de Azevedo
Uma Introdução à curvas planas [manuscrito] / Anderson de Azevedo
Gomes. - 2015.
79 f.

Orientador: Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Catalão, Programa de Pós-Graduação
em Matemática (PROFMAT - profissional), Goiânia, 2015.

Inclui fotografias, gráfico, lista de figuras.

1. Vetores, Cônicas, Curvas e Referencial de Frenet. I. Melo, Maurílio
Márcio , orient. II. Título.

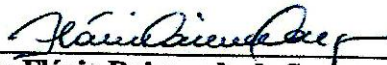
Anderson de Azevedo Gomes

Uma Introdução à Curvas Planas


Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 06 de novembro de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Maurilio Márcio Melo
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro IFG-GOIÂNIA



Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Anderson de Azevedo Gomes graduou-se em Matemática pela UniEvangélica Campus Anápolis no ano de 2003. Enquanto cursava a graduação em matemática, atuou em sala de aula durante o período de estágio. Concluiu a Pós-Graduação Lato Sensu pela Universidade Estadual de Goiás(UEG) que teve início em 2004 e finalizou em 2005. Tornou-se Professor da Rede Estadual de Ensino de Goiás em 2004 e Professor da Rede Municipal de Ensino de Anápolis em 2004.

Dedico esse trabalho a meus pais, Djalma Gomes da Silva e Maria Carmilândia de Azevedo que contribuíram e apoiaram sempre na minha jornada profissional. À minha esposa Dione Silva e ao meu filho Gabriel Silva Gomes que sempre me apoiaram e me confortaram nos momentos de angústia.

Aos meus amigos acadêmicos, principalmente ao meu amigo Vitail Rocha, que estiveram presentes nos momentos difíceis e alegres do curso. E a todos que torceram por mim e contribuíram para a conclusão de mais uma etapa na minha formação acadêmica.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por nos dar o dom da vida, a sabedoria e a inteligência. À Deus só agradeço, pois, Ele sabe do que preciso e do que sou capaz de administrar.

Agradeço aos meus pais por me ajudarem a todo momento. Eles contribuíram muito com conselhos valiosos. Me mostraram que através da minha honestidade, trabalho e dedicação podemos conseguir dias melhores. Disseram que, a partir do estudo, construímos um mundo mais justo, onde o homem pode desfrutar o bem-estar pela educação.

Obrigado por sempre estarem ao meu lado, tomando minhas dificuldades como sendo suas e sempre me apoiando para poder vencê-las e acima de tudo me mostrando que o nosso objetivo maior é seguir e fazer a vontade de Deus. Tudo o que consegui até aqui devo primeiramente à Deus, depois a vocês. Agradeço, também, a todos os familiares de uma forma geral, pelo apoio recebido de vocês.

Agradeço a todos os mestres, doutores e pós-doutores que de alguma forma tiveram contribuições importantes tanto na vida acadêmica e profissional quanto na vida social.

Resumo

Começo com o conceito de Plano e como pode ser representado um Vetor no Plano. Mostro a identidade de vetores e as propriedades básicas da soma de vetores com exemplos e continuo com as propriedades do Produto Escalar e como encontrar o Ângulo entre os vetores. Depois, encontramos a projeção de vetores e a distância entre um ponto e uma reta.

No próximo capítulo, faço uma revisão sobre as Seções Cônicas. Começo falando da Elipse, depois da Hipérbole e finalizo falando da Parábola e suas utilidades.

Em sequência, mostro as Equações Paramétricas de uma curva. Chego a uma fórmula de como encontrar um Vetor Tangente e como encontrar o Comprimento de um Arco. Mostro a utilidade das Fórmulas de Frenet e faço o Teorema Fundamental das Curvas Planas e suas utilidades.

Finalizo mostrando como fazer alguns gráficos no *GeoGebra* e da Importância da Matemática na Formação Básica com um pouco de História dos Softwares de Geometria Dinâmica. Meu objetivo é mostrar a beleza da matemática e atrair pessoas para essa área.

Palavras-chave

Vetores, Cônicas, Curvas e Referencial de Frenet.

Abstract

Beginning with the concept plan and how it can be represented in a Vector Plan. Show the identity of vectors and the basic properties of the vector sum with examples and continue with the properties of the Scalar product and how to find the Angle Between Vectors. After we find the projection vectors and the distance between a point and a Straight.

In the next chapter, I review on Conic Sections. Tract of Ellipse, after Hyperbole and analyze talking about the parable and its utilities.

In sequence, show the Parametric equations of a curve. Come to a formula of how to find a tangent vector and how to find the length of an arc. Show the usefulness of the Frenet formulas and do the Fundamental Theorem of Plane Curves and their utilities.

To end tract Importance of Mathematics in Primary Education with a little history of Dynamic Geometry Software and Software Geogebra, showing how to make some charts in GeoGebra. My goal is to show the beauty of mathematics and attract people to the area.

Keywords

Vectors, Conic, Curves and Frenet Formulas.

Lista de Figuras

1	Ponto em um Plano	17
2	Distância Entre Dois Pontos	17
3	Representação de um Vetor	18
4	Comprimento de uma Seta	19
5	Representação de uma Força	19
6	Semelhança de Vetores	20
7	Representação Gráfica de um Vetor	21
8	O Oposto de um Vetor	22
9	A Soma de Vetores	22
10	Vetor na Base Canônica em \mathbb{R}^2	24
11	Ângulo entre Vetores	25
12	Vetor Deslocamento	26
13	Vetor Deslocamento Total	27
14	Velocidade Escalar de um Avião	28
15	Força Resultante	29
16	Projeção de Vetores	29
17	O Ângulo Entre Vetores	30
18	Perpendicularidade	31
19	Distância de um Ponto P_0 à uma Reta	32
20	Elipse	33
21	Fonte Luminosa	35
22	Hipérbole	37
23	Parábola	39
24	Raízes de uma Equação.	40
25	O Ponto da Parábola está Acima do Ponto da Reta.	42
26	Inclinação da Reta FQ	43
27	Retas Perpendiculares quando $aa' = -1$	44
28	Reta Normal à Parábola	47
29	Traços da Circunferência	49
30	Limaçon de Pascal	50
31	Cissóide de Diocles	50
32	Traços Semelhantes	51
33	Espiral Logarítmica	55

34	Parábola e Círculo Osculador	59
35	Gráfico da Parábola	65
36	Gráfico da Elipse	66
37	Ciclóide	67
38	Hipociclóide	68
39	Astróide	68
40	Cardióide	69
41	Figura Semelhante a uma Borboleta	69

Sumário

1	Introdução	14
2	O Plano	16
2.1	Vetores no Plano	18
2.2	Operações com Vetores	20
2.3	Produto Escalar e Ângulo entre Vetores	23
2.4	Aplicações	26
2.4.1	Vetor Deslocamento	26
2.4.2	Vetor Resultante	28
2.5	Projeção de Vetores	29
2.6	Equação da Reta	31
3	Seções Cônicas	33
3.1	Elipse	33
3.2	Hipérbole	36
3.3	Parábola	38
4	Equações Paramétricas de uma Curva	48
4.1	Exemplos	49
4.2	Mudança de Parâmetro e Comprimento de Arco	52
4.2.1	Exemplos	52
4.3	Teoria Local das Curvas Planas e Fórmulas de Frenet.	55
4.4	Exemplo	58
4.5	Demonstração do Teorema Fundamental das Curvas Planas.	60
4.6	Movimentos Planos	62
5	Utilizando o Geogebra	64
6	A Importância da Matemática na Formação Básica	70
6.1	Um Pouco da História dos Softwares de Geometria Dinâmica	73
6.1.1	O GeoGebra	74
6.1.2	Considerações Finais.	76

1 Introdução

Na minha experiência, como professor de Matemática, percebi que não basta oferecer conhecimento, é preciso ofertar uma educação que atenda às necessidades de formação do aluno como ser social crítico e apto a agir no ambiente social em que este está inserido, ou seja, de acordo com a sua realidade. Percebe-se a necessidade de uma participação mais efetiva da família na educação escolar. No entanto, se torna necessário despertar o desejo de mudança de postura pessoal e sociocultural, implantar novos padrões sócio-políticos, oportunizar o diálogo tão necessário ao exercício da democracia e buscar o resgate de valores familiares, morais e cristãos, bem como um investimento maior em políticas públicas para a Educação visando a melhoria contínua da estrutura de ensino.

Aliada a essas importantes necessidades está o envolvimento do professor, principalmente quanto às metodologias de ensino utilizadas, que precisam ser reavaliadas e os resultados repensados. O principal objetivo da educação é o de levar o aluno com certo nível inicial a atingir um determinado nível final. Se conseguir fazer com que o aluno passe de um nível para outro, então registramos um processo de aprendizagem. Cabe aos educadores proporcionar situações de interação, tais que, despertem no educando motivação para interação com o objeto do conhecimento, com seus colegas e com os próprios professores. Os recursos computacionais, bem como as novas ferramentas de trabalho como é o caso dos softwares, podem ser utilizados na sala de aula como uma forma de tornar o trabalho em sala mais dinâmico e que possibilitem ao aluno se apropriar de uma forma mais efetiva dos conteúdos trabalhados. Porque, mesmo que a aprendizagem ocorra na intimidade do sujeito, o processo de construção do conhecimento dá-se na diversidade e na qualidade das suas interações.

Por isso, a ação educativa da escola deve propiciar ao aluno oportunidades para que esse seja induzido a um esforço intencional, visando resultados esperados e compreendidos. A contextualização não pode ser entendida como forma de banalizar os conteúdos, mas como recurso pedagógico. Entendendo que se trata, portanto, de uma ponte entre a teoria e a prática, entre o conceito e a vivência.

O conceito básico de motivação de acordo com o fator psicológico pode ser considerado um conjunto de fatores, ou um processo, ou seja, uma decisão que parte de uma determinada pessoa em busca de um objetivo a ser definido, e ver o mesmo como um desafio a ser direcionado. O professor ao incentivar os alunos, joga com emoção dando exemplos do que já ocorreu em sua vida, ou que pode ocorrer na vida destes alunos usando uma linguagem do senso comum que possa cativá-los. Que o professor possa estar atento ao seu real papel, de que deve cumprir na importância do relacionamento com os alunos para determinar a motivação, incentivando-os em tarefas positivas, desafiando-os mesmo que seja difícil.

Há dois tipos de motivação que o professor pode trabalhar: a intrínseca ou a extrínseca. A motivação intrínseca refere-se à escolha e realização de determinada atitude por sua própria causa, ou por interesse e satisfação. Já motivação extrínseca é definida para trabalhar, ou seja, em busca de recompensas materiais na sociedade. A relação de professor e aluno deve-se interagir cada vez mais, na confiança da relevância de promover em sala de aula, uma relação segura que possam envolver os pais e professores, conhecendo assim os sucessos e os fracassos (reprovações) com aprendizagem, que ocorrem na vida estudantil de cada aluno.

Em busca da motivação, ela se dá na organização da escola e principalmente da sala de aula, com alguns objetivos:

- promover oportunidades para que sejam reconhecidas pela aprendizagem;
- proporcionar liberdade para os alunos fazerem escolhas;
- promover ampla interação social e desenvolvimentos de habilidades sociais;
- aumentar a atração intrínseca.

A inteligência exerce grande parte na influência da motivação do aprender, e os mecanismos psicológicos da motivação do aluno se compõem por fatores como crenças de auto eficácia, onde o nível de motivação de uma pessoa é determinado em função dos julgamentos que têm um incentivo de agir e indicar uma direção às suas ações antecipadas na mente podendo ser realizadas e obter grandes resultados.

No entanto, a motivação é essencial na vida de cada indivíduo para que ele possa ter grandes sucessos tanto na vida acadêmica, como na vida profissional (social), buscando a alto-estima a cada dia, mesmo com as dificuldades que se encontra no mundo de hoje.

Este trabalho tem como característica maior ampliar o conhecimento, abrindo assim novas perspectivas de trabalho, concretizando com isso a nossa contribuição para o desenvolvimento da nossa sociedade. Para tal, foi apoiado em referenciais teóricos que contribuísem para seu desenvolvimento reiterando que a análise, a pesquisa e o estudo formam o principal meio de desenvolvimento e aprofundamento do tema.

As funções são utilizadas em nosso dia a dia, por exemplo, em cálculos rotineiros como juros, produtividade de uma empresa, etc. Podem ser expressas graficamente, o que facilita a visualização do cálculo. Por esse motivo, desenvolvo esse trabalho com a utilização do software Geogebra, com o intuito de proporcionar ao aluno a compreensão de alguns conceitos referentes às funções de uma variável real.

O presente trabalho tem por objetivo central a elaboração de uma proposta metodológica que utiliza o software Geogebra como recurso pedagógico para o ensino e aprendizagem de funções de uma variável real, bem como o estudo de alguns conceitos de Geometria Analítica. O trabalho está fundamentado nas novas tecnologias educacionais, tecnologias da informação e comunicação, na educação matemática que vêm pra ficar, com um sucesso incondicional.

Por fim, são apresentadas as considerações finais sobre a proposta pedagógica desse trabalho.

2 O Plano

Nesta seção serão apresentadas o conceito de plano, vetores, propriedades e aplicações. Para maiores detalhes indicamos [2], [6], [7] e [8].

Considere o plano definido pelo par de retas perpendiculares x e y . Seja P um ponto qualquer do plano. Pelo ponto P podemos passar uma única reta paralela à reta x que é x' e uma única paralela à reta y que é y' . A interseção destas retas paralelas é o ponto P . Os números a e b são chamados, respectivamente, por **abscissa** e **ordenada**

do ponto P que constituem as coordenadas de P . Para indicar que o ponto P tem abscissa a e ordenada b usamos a notação $P(a, b)$, conforme Figura 1.

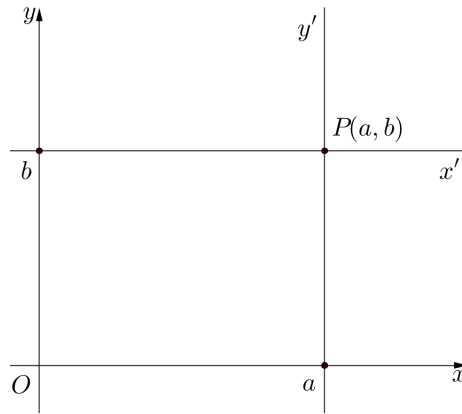


Figura 1: Ponto em um Plano

Pela construção, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais (a, b) . Para calcularmos a distância entre dois pontos $P(a, b)$ e $Q(c, d)$, usamos o Teorema de Pitágoras e encontramos que $d(P, Q) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$, conforme a Figura 2.

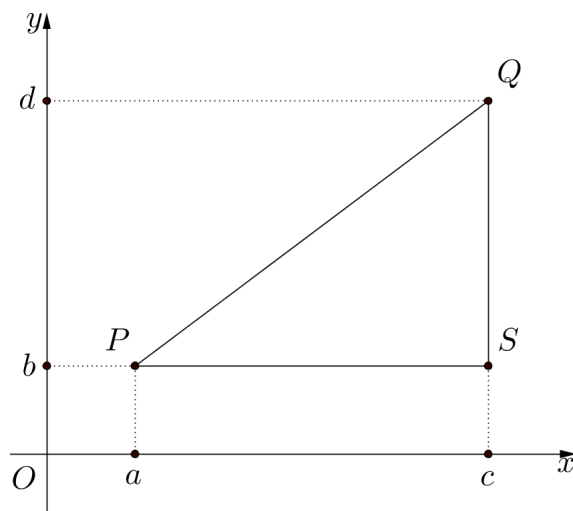


Figura 2: Distância Entre Dois Pontos

2.1 Vetores no Plano

Quanto ao ponto $P(a, b) \neq (0, 0)$, podemos fazer corresponder a este ponto uma seta com origem em $(0, 0)$ e a outra extremidade em P . Um par ordenado pode ser representado graficamente por um ponto ou por uma seta. Quando utilizamos seta, podemos associar a este par ordenado direção, sentido e módulo. O módulo é o comprimento da seta e a direção e o sentido são a direção e o sentido da seta que o representa, conforme Figura 3.

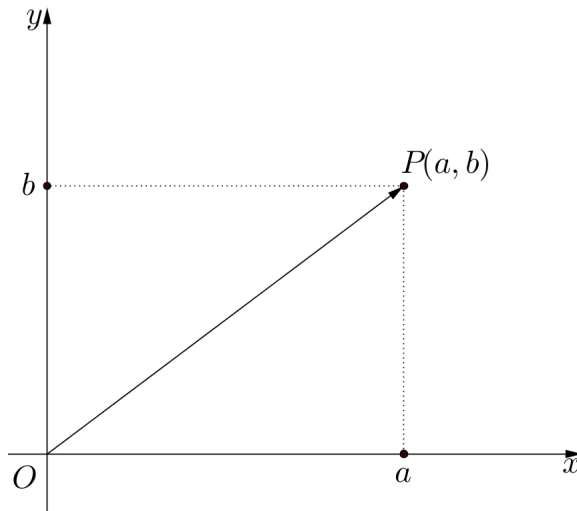


Figura 3: Representação de um Vetor

Geralmente, um objeto em que se pode associar os conceitos de direção, sentido e módulo é chamado um vetor. Assim, um par ordenado é um vetor. Um vetor no plano é um par ordenado de números reais (a, b) . Os números a e b são chamados de componentes do vetor (a, b) . Por exemplo, $v = (6, 8)$ é um vetor. A direção deste vetor é a direção da seta, ou seja, é a direção da reta definida pelos pontos $O(0, 0)$ e $P(6, 8)$. O sentido de v é o de O para P e o módulo de v é o comprimento da seta \overrightarrow{OP} , ou seja, é $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, conforme Figura 4.

Inversamente, uma seta no plano que pode ser imaginada como uma força de intensidade igual a 6 unidades, aplicada ao ponto O , pode ser caracterizada por um par ordenado. No caso da seta F da Figura 5, o par ordenado é $(6 \cdot \cos 30^\circ, 6 \cdot \sin 30^\circ) = (3\sqrt{3}, 3)$.

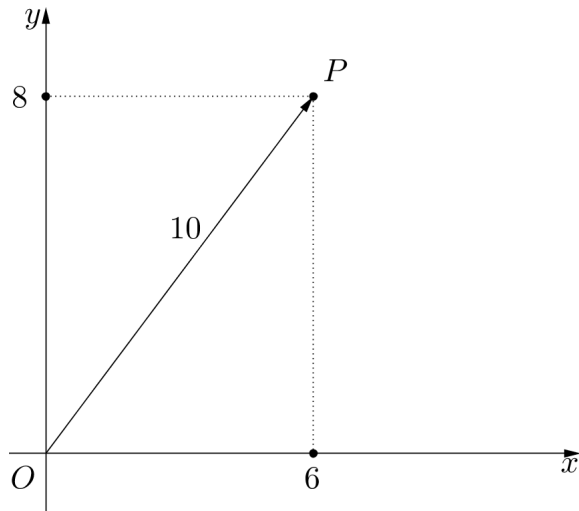


Figura 4: Comprimento de uma Seta

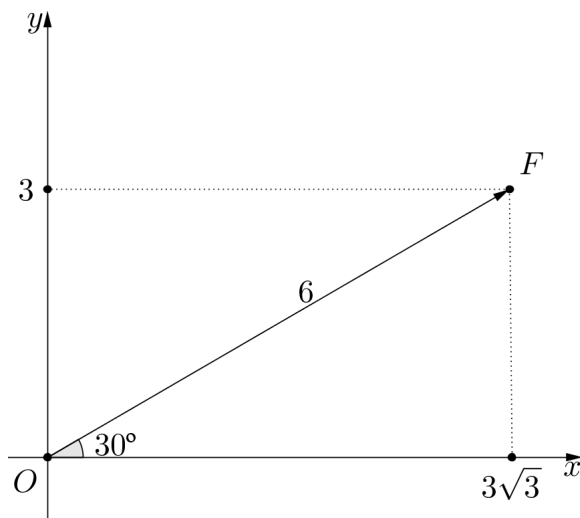


Figura 5: Representação de uma Força

Podemos representar um vetor que não parte necessariamente da origem. Observando na Figura 6, se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o vetor $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. A seta que representa o vetor \overrightarrow{AB} , partindo da origem, e a seta com origem em A e extremidade em B têm o mesmo módulo, direção e sentido.

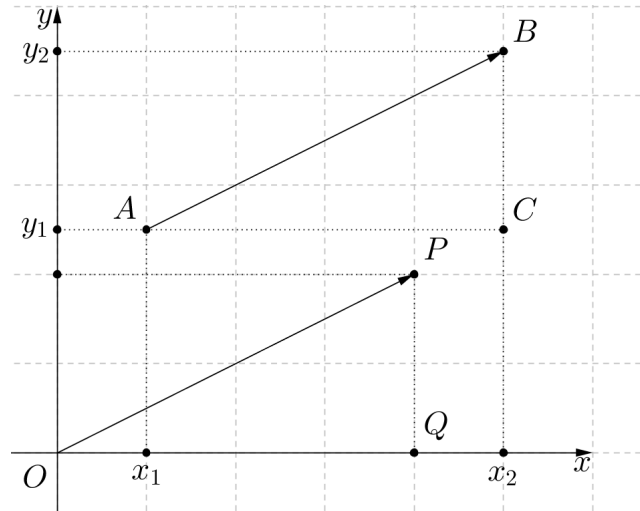


Figura 6: Semelhança de Vetores

2.2 Operações com Vetores

Sejam $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ e $k \in \mathbb{R}$. Definimos:

- A operação que a cada par de vetores u e v faz corresponder o vetor $u + v$, chama-se *adição de vetores*. Assim, $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.
- A lei de composição que ao par k e u , onde $k \in \mathbb{R}$ e u um vetor, faz corresponder o vetor ku é chamada *multiplicação de um número por um vetor*. Logo, $ku = (ku_1, ku_2)$.

Quaisquer que sejam os vetores u, v e w , tem-se as propriedades da adição:

- $(A_1) u + v = v + u$ (Lei comutativa);
- $(A_2) (u + v) + w = u + (v + w)$ (Lei associativa);
- $(A_3) u + 0 = u$ (Existência de identidade aditiva);
- $(A_4) u + (-u) = 0$ (Existência do oposto).

Quaisquer que sejam os vetores u e v e os escalares r e s , tem-se as propriedades da multiplicação:

- $(M_1) (rs)u = r(su)$ (Lei associativa);
- $(M_2) (r + s)u = ru + su$ (Lei distributiva);
- $(M_3) r(u + v) = ru + rv$ (Lei distributiva);
- $(M_4) 1u = u$ (Existência de identidade para a multiplicação por escalar).

Demonstramos a seguir a propriedade M_3 .

Se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, então

$$\begin{aligned} r(u + v) &= r[(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] = r(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= (ru_1 + rv_1, ru_2 + rv_2) = (ru_1, ru_2) + (rv_1, rv_2) \\ &= r(u_1, u_2) + r(v_1, v_2) = ru + rv \end{aligned}$$

De modo análogo demonstram-se as demais propriedades.

Segundo [8], o movimento de uma partícula no plano é outra situação que ilustra a representação gráfica de um vetor por uma seta que não parte da origem. Representamos o vetor posição P da partícula por uma seta que parte da origem e o vetor velocidade v , por uma seta tangente à trajetória da partícula e com ponto inicial no lugar onde se encontra naquele instante. Para representar graficamente um vetor usa-se uma seta. O lugar onde esta seta é colocada depende do problema que está sendo considerado, conforme a Figura 7.

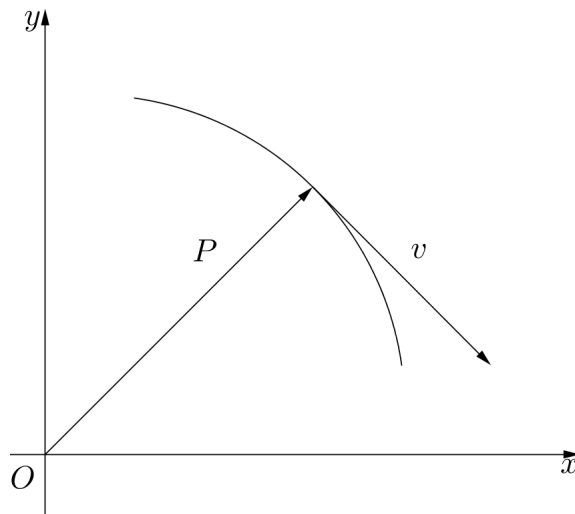


Figura 7: Representação Gráfica de um Vetor

O vetor $(-1)u$ é indicado por $-u$ e chamado *o oposto* de u . Indicamos $u + (-v)$ por $u - v$. Na Figura 8, está indicado um vetor u e seu oposto $-u$.

O vetor ku tem a mesma direção de u , são representados por setas paralelas. Se $k > 0$, ku e u possuem o mesmo sentido. Se $k < 0$, ku e u possuem os sentidos con-

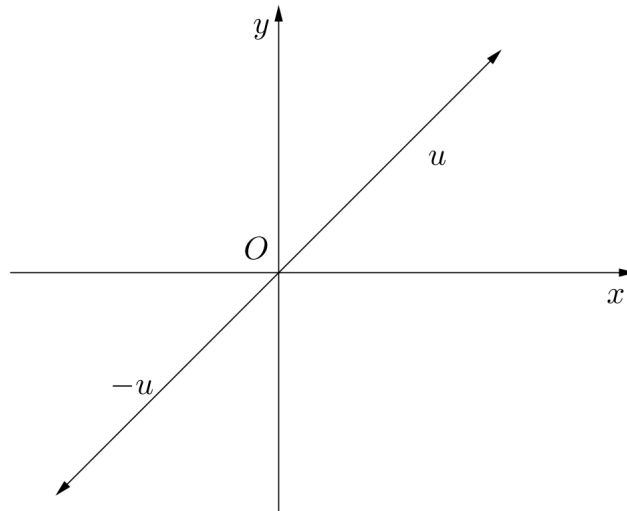


Figura 8: O Oposto de um Vetor

trários. Os módulos de u e ku estão relacionados por $\|ku\| = |k| \cdot \|u\|$, onde a barra simples indica o módulo de números reais e a barra dupla indica a norma do vetor.

Observemos que o vetor $u + v$, está indicado na Figura 9. A seta que representa uma das diagonais do paralelogramo é a soma entre u e v .

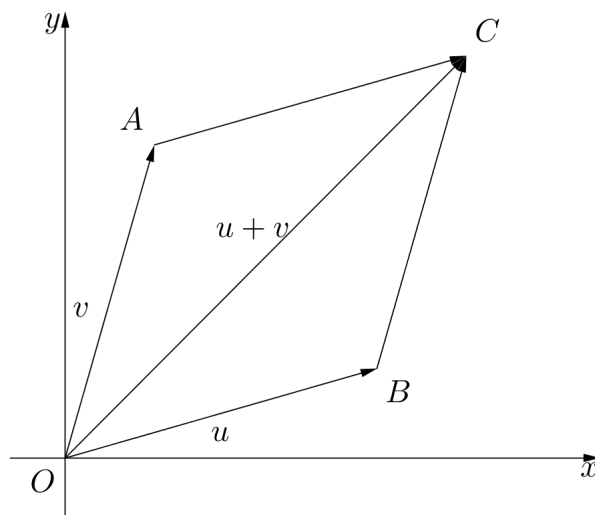


Figura 9: A Soma de Vetores

Proposição 2.1 Sejam u e v vetores e k um número real. Então

a) $ku = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $u = 0$;

Demonstração. Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $k \in \mathbb{R}$. Por definição:

$$\begin{aligned}ku &= (ku_1, ku_2) = (0, 0) \\ku_1 &= 0 \Rightarrow k = 0 \text{ ou } u_1 = 0 \\ku_2 &= 0 \Rightarrow k = 0 \text{ ou } u_2 = 0. \text{ Assim,} \\k &= 0 \text{ ou } u = (0, 0)\end{aligned}$$

b) $\|u\| \geq 0$ e $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

Demonstração. Tomando $u = (u_1, u_2)$, temos:

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \geq 0 \\ \|u\| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 0 \\ u_1 = u_2 = 0 &\Leftrightarrow u = 0\end{aligned}$$

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Está demonstração será feita após introduzirmos o conceito de produto escalar.

2.3 Produto Escalar e Ângulo entre Vetores

Definição 2.3 O produto escalar dos vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ é o número real $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$.

Dois vetores são *ortogonais* se $|u + v| = |u - v|$.

Demonstração. Como $|u + v| = |u - v|$, então:

$$\begin{aligned}|u + v|^2 &= |u - v|^2 \\ (u + v)(u + v) &= (u - v)(u - v) \\ |u|^2 + |v|^2 + 2uv &= |u|^2 + |v|^2 - 2uv \\ 4uv &= 0 \Leftrightarrow uv = 0\end{aligned}$$

Vemos que dois vetores são ortogonais se seu produto escalar for zero. Dois vetores em \mathbb{R}^2 têm papel especial. Sejam $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$. Esses vetores i e j são chamados de *base canônica*. Eles têm comprimento 1 e direção e sentido dos eixos x e y positivos. Assim, qualquer vetor em \mathbb{R}^2 pode ser expresso em termos de i e j .

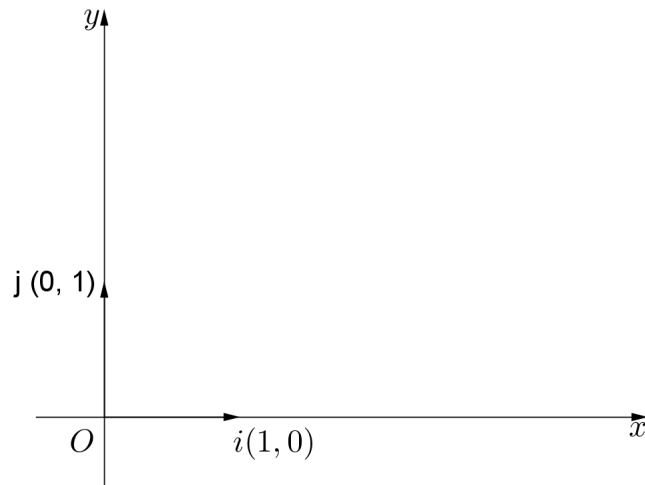


Figura 10: Vetor na Base Canônica em \mathbb{R}^2

Qualquer vetor, $w = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$ se escreve $w = x(1, 0) + y(0, 1) = xi + yj$.

Propriedades do produto escalar

Se u, v e w são vetores em \mathbb{R}^2 e k é um escalar, então:

- (1) $u \cdot u = \|u\|^2$;
- (2) $u \cdot v = v \cdot u$;
- (3) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$;
- (4) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v) = u \cdot (kv)$;
- (5) $0 \cdot u = 0$.

Essas propriedades são facilmente demonstradas usando a propriedade do produto escalar. Para a verificação dos detalhes, indicamos [2]. O teorema a seguir é, talvez, o fato mais importante sobre o produto escalar de dois vetores.

Teorema 2.3. Se α for o ângulo entre dois vetores não nulos u e v , então

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha.$$

Demonstração. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OAB da Figura 11, temos

$$\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 - 2\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cos\theta. (*)$$

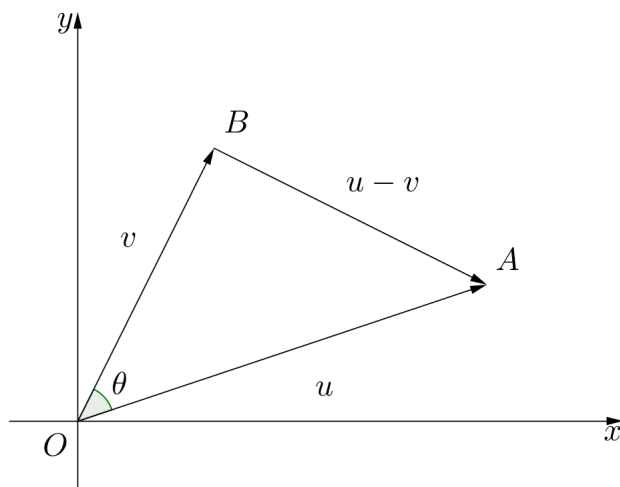


Figura 11: Ângulo entre Vetores

Mas $\|\vec{OA}\| = \|u\|$, $\|\vec{OB}\| = \|v\|$ e $\|\vec{AB}\| = \|u - v\|$, de forma que a equação (*) se torna

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \cos\theta.$$

Usando a propriedade de que $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2$, temos

$$\begin{aligned} -2u \cdot v &= -2\|u\| \cdot \|v\| \cos\theta. \text{ Então,} \\ u \cdot v &= \|u\| \cdot \|v\| \cos\theta. \end{aligned}$$

Isolando $\cos\theta$, temos:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Sabe-se que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, então:

$$\begin{aligned} |\cos\theta| &\leq 1 \\ \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|} &\leq 1 \\ |u \cdot v| &\leq \|u\| \cdot \|v\|. \end{aligned}$$

Que é conhecida como **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**

Será provada a proposição 2.1.c.

Demonstração. Usando a propriedade do produto escalar, temos:

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= (u + v)(u + v) \\
&= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v \\
&= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $u \cdot v \leq \|u\| \cdot \|v\|$, de modo que:

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \\
\|u + v\|^2 &\leq (\|u\| + \|v\|)^2 \\
\|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\|
\end{aligned}$$

2.4 Aplicações

2.4.1 Vetor Deslocamento

Quando uma partícula move-se de um ponto $A(x_1, y_1)$ para um ponto $B(x_2, y_2)$, o vetor $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ é chamado *vetor deslocamento* da partícula. A Figura 12 indica a trajetória de uma partícula do ponto A ao B . O vetor deslocamento da partícula está indicado pela seta de A para B .

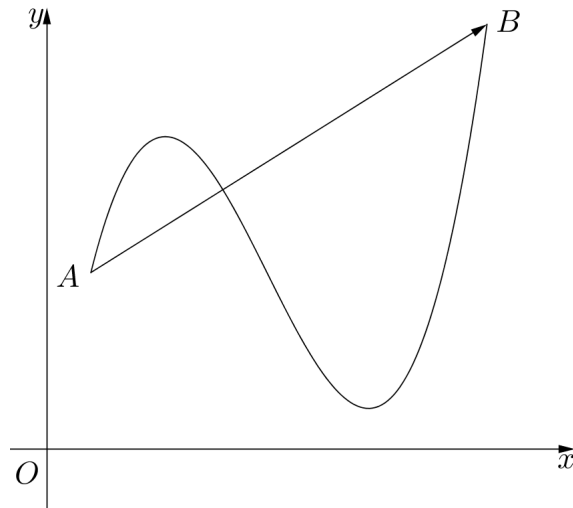


Figura 12: Vetor Deslocamento

Se uma partícula move-se do ponto $A(x_1, y_1)$ para o ponto $B(x_2, y_2)$ e depois para $C(x_3, y_3)$, então, o vetor deslocamento total da partícula é $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ que

é a soma dos deslocamentos parciais como está representado na Figura 13. Se A, B e C são três pontos quaisquer do plano, então $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

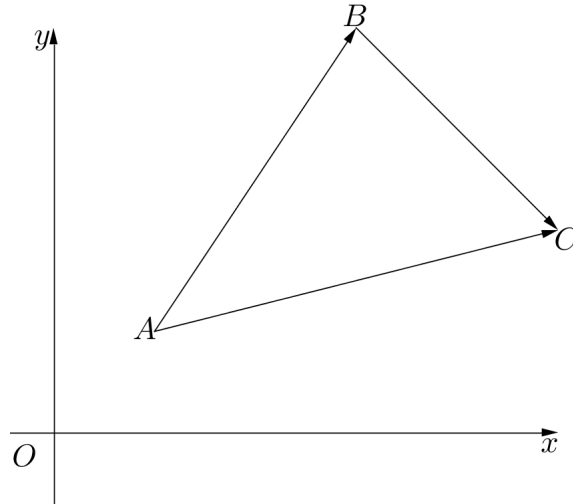


Figura 13: Vetor Deslocamento Total

Uma aplicação do assunto foi tirada de [6] com algumas adaptações.

Exemplo. Um avião pode voar a uma velocidade escalar no ar de 500km/h . Se o vento soprar para o Leste a 80km/h , que orientação o avião deverá seguir, para que seu curso seja de 30° ? Qual será a velocidade escalar do avião, se ele seguir esse trajeto?

Solução. Observe à Figura 14, que mostra as representações posicionais dos vetores u e v , bem como de $u - v$. O vetor u representa a velocidade do avião em relação ao solo, considerando-se um curso de 30° . O ângulo de direção de u é de 60° . O vetor v indica a velocidade do vento. Como v tem um módulo de 80 e um ângulo de direção de 0° , $v = (80, 0)$. O vetor $u - v$ representa a velocidade do avião em relação ao ar. Assim, $\|u - v\| = 500$. Seja θ o ângulo de direção $u - v$

Utilizando a lei dos senos a esse triângulo, obtemos

$$\frac{\text{sen}(\phi)}{80} = \frac{\text{sen}(60^\circ)}{500}$$

$$\text{sen}(\phi) = 0,138564$$

$$\phi = 7,966^\circ$$

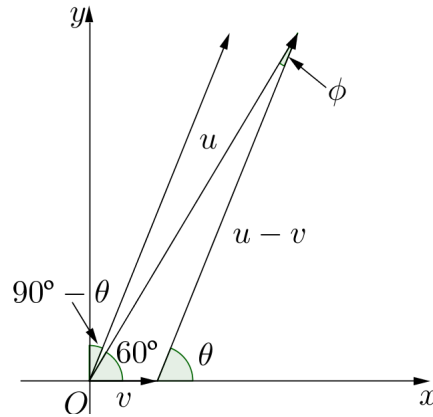


Figura 14: Velocidade Escalar de um Avião

Então,

$$\theta = 67,966^\circ.$$

Aplicando a lei dos senos novamente, temos

$$\frac{\|u\|}{\text{sen}(180^\circ - \theta)} = \frac{500}{\text{sen}60^\circ}$$

$$\|u\| = 535,1814.$$

A bússola do avião deveria indicar um rumo de $90^\circ - \theta$, ou seja, $22,034^\circ$. E se o avião seguir esse curso, sua velocidade escalar de solo será de, aproximadamente, 535km/h .

2.4.2 Vetor Resultante

Na Figura 15 estão representadas duas forças F_1 e F_2 , respectivamente, de $6N$ e $4N$, atuando em um ponto de uma barra. A resultante de F_1 e F_2 é a força $F = F_1 + F_2$. Para calcular F , escolhamos um sistema de coordenadas e decompos F_1 e F_2 . As componentes de F_1 são $x_1 = 3\sqrt{3}$ e $y_1 = 3$ e as de F_2 são $x_2 = -2$ e $y_2 = 2\sqrt{3}$. Assim, $F = (3\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} + 3)$. Calculando o módulo de F , encontramos $\|F\| = 2\sqrt{13}$. A tangente do ângulo que F faz com o eixo x é $\frac{24 + 13\sqrt{3}}{23}$.

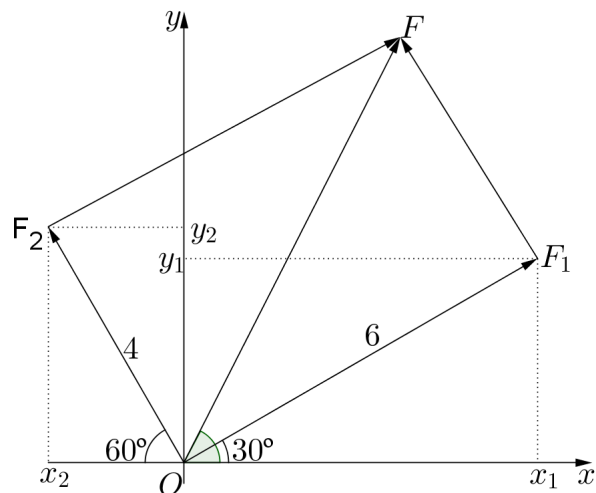


Figura 15: Força Resultante

2.5 Projeção de Vetores

Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ vetores não nulos e P a projeção ortogonal do ponto (u_1, u_2) sobre a reta definida por $(0, 0)$ e (v_1, v_2) , conforme na Figura 16.

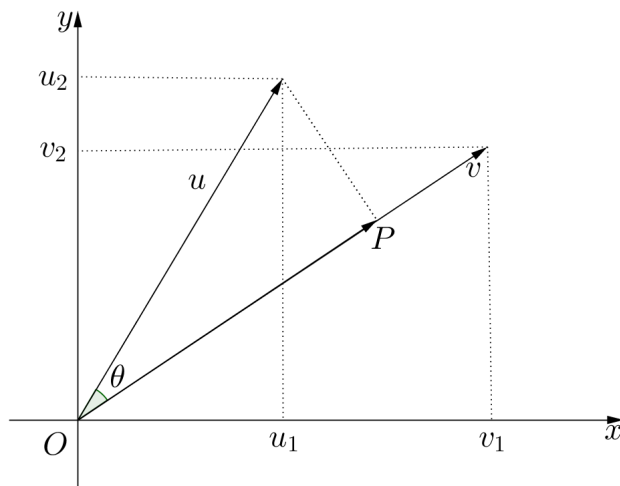


Figura 16: Projeção de Vetores

Seja θ o ângulo entre os vetores u e v , como $\|\overrightarrow{OP}\| = \|u\|\cos\theta$, temos

$$\overrightarrow{OP} = \|u\| \cos \theta \frac{v}{\|v\|}$$

ou

$$\overrightarrow{OP} = \|u\| \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \frac{v}{\|v\|} = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v.$$

Observe que se $\theta \geq 90^\circ$, a fórmula continua válida. Este vetor é chamado de Projeção de u sobre v e é indicado por P_v^u . Ao projetar $u = (2, 3)$ sobre $v = (3, -1)$, temos

$$P_v^u = \frac{(2, 3) \cdot (3, -1)}{(3, -1) \cdot (3, -1)} (3, -1) = \left(\frac{3}{10}\right) (3, -1).$$

Exemplo.

- a) Verifique que o triângulo cujos vértices são $A(1, 1)$, $B = (3, 4)$ e $C = (4, -1)$ é retângulo em A .
- b) Calcule a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC .
- c) Determine o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A .

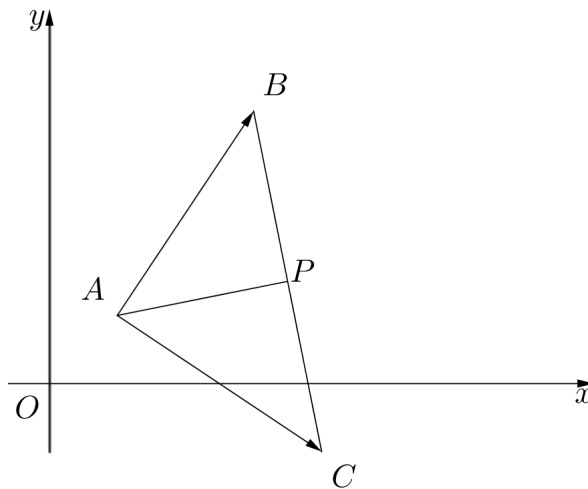


Figura 17: O Ângulo Entre Vetores

Solução.

- a) Basta verificar que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Considerando $\overrightarrow{AB} = u$ e $\overrightarrow{AC} = w$, $u = (2, 3)$ e $w = (3, -2)$, então $u \cdot w = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0$.
- b) Vamos calcular P_v^u e, depois, o seu módulo. Sendo $\overrightarrow{BA} = (-2, -3)$ e $\overrightarrow{BC} = (1, -5)$, $P_v^u = \frac{(-2, -3) \cdot (1, -5)}{(1, -5) \cdot (1, -5)} \cdot (1, -5) = \frac{1}{2} \cdot (1, -5)$. Então, a projeção de u em v é

$$\|P_v^u\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26}.$$

c) Seja $P(x, y)$ o pé da altura ao vértice A . Então,
 $\overrightarrow{BP} = P_v^u$ ou $(x - 3, y - 4) = \frac{1}{2} \cdot (1, -5)$. Donde $P = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$

2.6 Equação da Reta

Como em [2], os vetores são um instrumento valioso em Geometria Analítica. Vamos ilustrar alguns problemas ligados à linha reta. A equação geral da reta tem a forma

$$ax + by + c = 0.$$

Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto fixado na reta e $P = (x, y)$ seu ponto genérico. Então,

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Subtraindo esta equação da anterior, obtemos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Em termos de vetores, seja $v = (a, b)$. Como $P - P_0 = (x - x_0, y - y_0)$, a última equação pode ser escrita na forma

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0 \text{ ou } (P - P_0) \cdot v = 0.$$

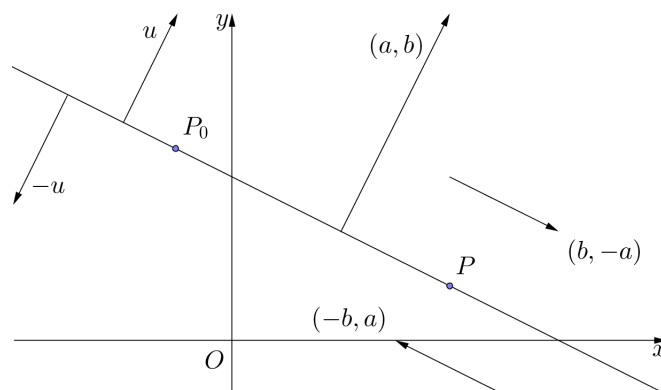


Figura 18: Perpendicularidade

Geometricamente, esta equação traduz a condição de que os vetores $P - P_0$ e v são ortogonais. Veja na Figura 18.

Assim, toda reta na forma da equação geral é perpendicular ao vetor (a, b) . O vetor unitário nessa direção, $u = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b)$ é o vetor normal unitário à reta. Os vetores $(b, -a)$ e $(-b, a)$ são normais ao vetor (a, b) . Portanto, toda reta na forma da equação geral é paralela aos vetores $(b, -a)$ e $(-b, a)$

Como aplicação da noção de projeção ortogonal, vamos calcular a distância d de uma reta de equação $ax_1 + by_1 + c = 0$ à um ponto P_0 que não pertence à reta.

Designando por P um ponto arbitrário da reta, é fácil ver que a distância procurada é o valor absoluto da projeção do vetor $\overrightarrow{PP_0}$ na direção do vetor unitário,

$$u = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (a, b).$$

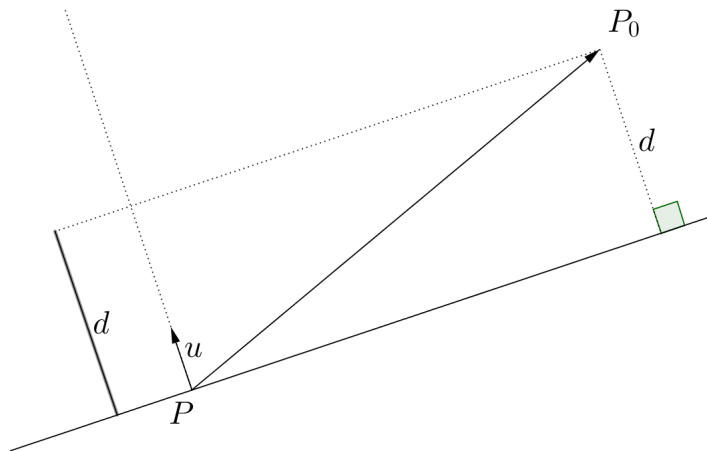


Figura 19: Distância de um Ponto P_0 à uma Reta

Portanto,

$$d = |(\overrightarrow{PP_0}) \cdot u| = |(x_0 - x, y_0 - y) \cdot \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}| = \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Como $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, obtemos

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

3 Seções Cônicas

As seções cônicas têm esse nome por terem sido inicialmente definidas como interseções de um plano com um cone. Faremos um estudo das curvas elipse, parábola e hipérbole. Para maiores detalhes indicamos [2], [6] e [8].

3.1 Elipse

Definimos a elipse como o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_- e F é constante. Uma elipse pode ser desenhada com o auxílio de uma linha com as pontas emendadas passando por dois pontos fixados em F_- e F e um lápis mantendo a linha esticada e movendo-se o lápis no papel.

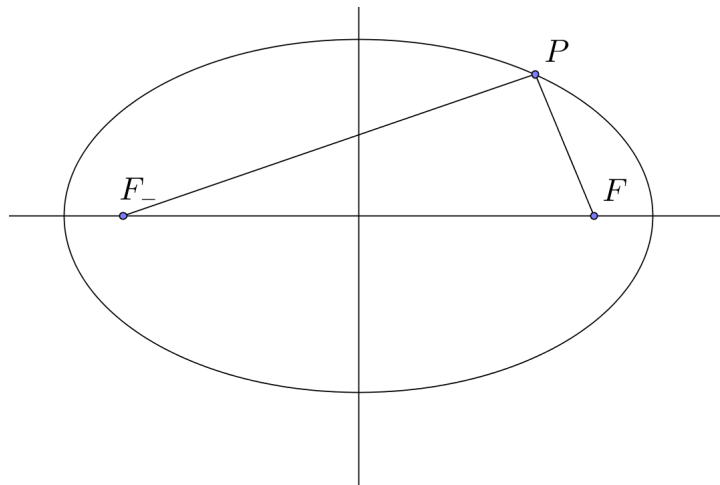


Figura 20: Elipse

Os pontos F_- e F são os *focos* da elipse e o ponto médio do segmento F_-F é o seu *centro*. Para escrever a equação cartesiana dessa curva, é mais fácil escolher o sistema de eixos com origem em seu centro e eixo Ox coincidente com OF . Sejam $-c$ e c , com $c > 0$, as abscissas de F_- e F , respectivamente, e seja $2a$ a constante $PF_- + PF$, onde $P = (x, y)$ é um ponto da elipse. Pondo $d_- = PF_-$ e $d = PF$ e, percebendo que $d_- = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$ e $d = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$, a equação da elipse assume a forma

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Para eliminar os radicais, eleva-se ao quadrado, simplifica-se, eleva-se ao quadrado novamente, substitui $\sqrt{a^2-c^2}$ por b e dividindo os membros por a^2b^2 , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A recíproca também é verdadeira, pois, a soma das distâncias não pode ser negativa e, supondo que, $2a^2 - \frac{(d_-)^2 + (d^2)}{2} = -dd_-$ no final teríamos que $a < c$, que é um absurdo. A equação acima é a equação canônica da elipse.

Note que a elipse, com centro na origem, é simétrica em relação aos eixos Ox e Oy . Caso troquemos x por $-x$ ou y por $-y$ a equação não se altera. Os pontos $A = (\pm a, 0)$ e $B = (0, \pm b)$ são os *vértices* e os segmentos $A-A$ e $B-B$ são os *eixos* da elipse. A *excentricidade* da elipse é definida por $e = \frac{c}{a}$, que é uma circunferência se $e = 0$, um segmento se $e = 1$ e, quando está entre 0 e 1, temos uma elipse que é mais achatada quando for mais próximo de 1.

Vamos mostrar que a reta tangente à uma elipse dada pela sua equação canônica em um dos seus pontos $P_0 = (x_0, y_0)$, tem equação

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Derivando implicitamente a equação da elipse e isolando y' , temos:

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Então, o declive da reta tangente no ponto P_0 é $m_t = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$; portanto, a equação dessa reta é

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

que simplificando e dividindo essa equação por a^2b^2 , encontramos o desejado.

Provamos a seguir que a reta normal à elipse num de seus pontos $P = (x, y)$ é a bissetriz do ângulo $F-PF$. Sejam m_+ , m_t e m_- os declives da reta FP , da reta normal QP e da reta $F-P$, respectivamente. Sejam γ e δ os ângulos de FP e QP com o eixo Ox , respectivamente, de sorte que:

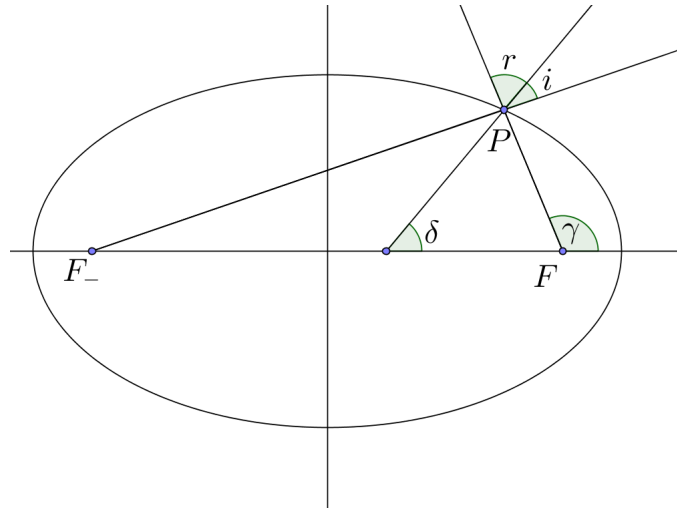


Figura 21: Fonte Luminosa

$$m_+ = \operatorname{tg}\gamma \text{ e } m_t = \operatorname{tg}\delta.$$

Pela trigonometria,

$$\operatorname{tg}(\gamma - \delta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\delta}{1 + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}.$$

Como $r = \gamma - \delta$, logo

$$\operatorname{tg}(r) = \frac{m_+ - m_t}{1 + m_+m_t}.$$

De maneira análoga,

$$\operatorname{tg}(i) = \frac{m_t - m_-}{1 + m_tm_-}$$

Devemos provar que $i = r$, ou seja, $\operatorname{tg}(i) = \operatorname{tg}(r)$, ou ainda,

$$(m_+ + m_-)(m_t^2 - 1) + 2(1 - m_-m_+)m_t = 0$$

Observando a Figura 23, nota-se que:

$$m_+ = \frac{y}{x - c} \text{ e } m_- = \frac{y}{x + c}.$$

Como foi visto anteriormente, para encontrar uma reta tangente $m_t = -\frac{b^2x}{a^2y}$. Assim, para encontrar uma reta normal $m_n = \frac{a^2y}{b^2x}$. Substituindo na equação anterior lembrando que $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e que $c^2 = a^2 - b^2$, o numerador que aí aparece, exceto pelo fator $2xy$, assume a forma

$$a^2b^2(b^2 - a^2 + c^2) = 0.$$

De onde vemos que a reta normal à elipse num de seus pontos é a bissetriz do ângulo formado pelos pontos F_1PF_2 . O significado físico importante é que, se uma fonte luminosa pontual estiver situada num dos focos, os raios de luz que saírem daí irão no outro foco após refletirem uma vez no espelho bem como se uma fonte sonora sair de um foco irá se refletir e se direcionar ao outro foco.

3.2 Hipérbole

Definimos a hipérbole como sendo o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante. Como na elipse, F_1 e F_2 são os *focos* da hipérbole. Nestas condições, encontramos que

$$|PF_1 - PF_2| = 2a.$$

Depois de eliminarmos os radicais, podemos escrevê-la como segue

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como $c > a$, então, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e dividindo ambos os membros por a^2b^2 , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Que é equivalente à primeira equação e, portanto, é uma equação da hipérbole. Quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo y , sua equação é:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

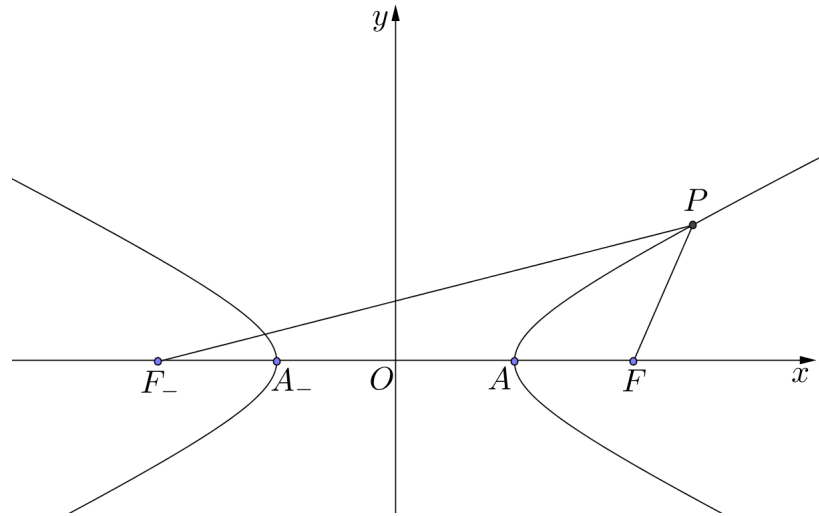


Figura 22: Hipérbole

onde $2b$ é a distância entre os vértices e $c^2 - b^2 = a^2$. Mesmo quando os focos não estão sobre os eixos ou não são simétricos à origem, sua equação também é do 2º grau. Um bom exemplo é encontrarmos as condições sobre a , b e m para que a reta $y = mx$ intercepte a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto da interseção da reta com a hipérbole. Assim, devemos ter

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \text{ e } y_0 = mx_0,$$

que resolvida em x_0 nos dá

$$x_0 = \pm \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}.$$

Para que a reta intercepte a hipérbole, é necessário e suficiente que $\frac{-b}{a} < m < \frac{b}{a}$, supondo a e b positivos. Isolando y_0 , temos que

$$y_0 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2}.$$

De onde se obtém

$$\frac{y_0}{x_0} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{x_0^2 - a^2}}{x_0} \rightarrow \pm \frac{b}{a} \text{ com } |x_0| \rightarrow \infty.$$

As retas $y = \pm \frac{bx}{a}$ são chamadas *assíntotas* da hipérbole. Isto mostra que os pontos da hipérbole tendem para às assíntotas à medida que se afasta da origem. Esta interpretação sugere um procedimento cômodo para se esboçar uma hipérbole traçando primeiro as assíntotas e, logo depois, os ramos da hipérbole tendendo às assíntotas. De forma análoga ocorre se tivermos $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

3.3 Parábola

Definimos a parábola como o lugar geométrico dos pontos P do plano que são equidistantes de uma reta fixa e de um ponto fixo. A reta é chamada a *diretriz* e o ponto fixo é o *foco* da parábola. Se a diretriz for a reta $y = -p$ e o foco $F = (0, p)$, então, $P = (x, y)$ é um ponto da parábola se, e somente se, $d_{PF}^2 = d_{PA}^2$, onde $A = (x, -p)$, isto é,

$$(y - p)^2 + x^2 = (y + p)^2,$$

que equivale a $x^2 = 4py$, que é a forma canônica da equação da parábola.

Provamos a seguir que toda equação do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, representa uma parábola. Saindo desta $y = a(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{c}{a})$ obtemos $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a})$. Isto sugere a translação do eixo dado por $X = x + \frac{b}{2a}$ e $Y = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Colocando $p = \frac{1}{4a}$, a equação da parábola assume a forma canônica $X^2 = 4pY$.

Como é dito em [7], a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

Exemplo 1: O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = (0, \frac{1}{4})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4}$. O valor $\frac{1}{4}$ é encontrado quando resolvemos $(y - p)^2 + x^2 = (y + p)^2$ e encontramos que $p = \frac{1}{4}$.

Exemplo 2: Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = (0, \frac{1}{4a})$. A fim de se convencer deste fato, basta verificar que, para

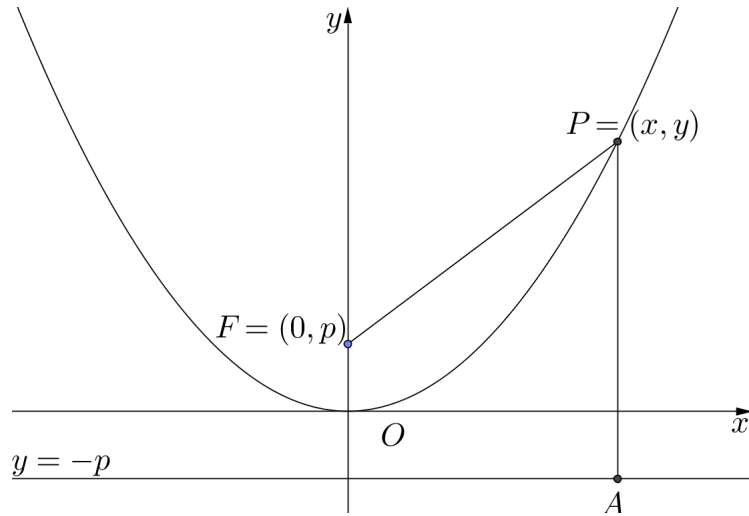


Figura 23: Parábola

todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade $x^2 + (ax^2 - \frac{1}{4a})^2 = (ax^2 + \frac{1}{4a})^2$, onde o primeiro membro é o quadrado da distância do ponto genérico $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao foco $F = (0, \frac{1}{4a})$ e o segundo membro é o quadrado da distância do mesmo ponto P à reta $y = -\frac{1}{4a}$. Conforme seja $a > 0$ ou $a < 0$, a parábola $y = ax^2$ tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo.

Exemplo 3: Para todo $a \neq 0$ e todo $m \in \mathbb{R}$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = (m, \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. Para se chegar a esta conclusão, tem-se duas opções. Ou se verifica que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade $(x-m)^2 + [a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}]^2 = [a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}]^2$ ou então observa-se simplesmente que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \rightarrow (x+m, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$.

Exemplo 4: Se $a, m, k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$. Essa afirmação resulta imediatamente do **Exemplo 3**, levando-se em conta que o gráfico de $g(x) = a(x-m)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \rightarrow (x, y+k)$, que leva o eixo Ox na reta $y = k$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$.

Assim, notamos que o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$ e cujo foco é o ponto $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$. Esta parábola tem sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$. O ponto do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ mais próximo da diretriz é aquele de abscissa $x = -\frac{b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$. Quando $x = -\frac{b}{2a}$, o ponto $(x, f(x))$ é o vértice da parábola que constitui o gráfico de $f(x)$.

Uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valores iguais se, e somente se, os pontos x e x' são simétricos em relação à reta $x = -\frac{b}{2a}$. Isso significa que a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ é um eixo de simetria do gráfico de f . O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é um elemento de grande importância para entender o comportamento desta função. As abscissas α e β que intersectam o eixo Ox são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. O ponto médio do segmento $[\alpha, \beta]$ é a abscissa do vértice da parábola. Se o gráfico está inteiramente acima ou abaixo do eixo horizontal Ox , a equação não possui raízes. Se o gráfico apenas tangencia o eixo Ox , a equação tem uma raiz (única) dupla. Se $\alpha < x < \beta$ então $f(x)$ tem sinal contrário ao sinal de a e o mesmo sinal se $x < \alpha$ ou $x > \beta$.

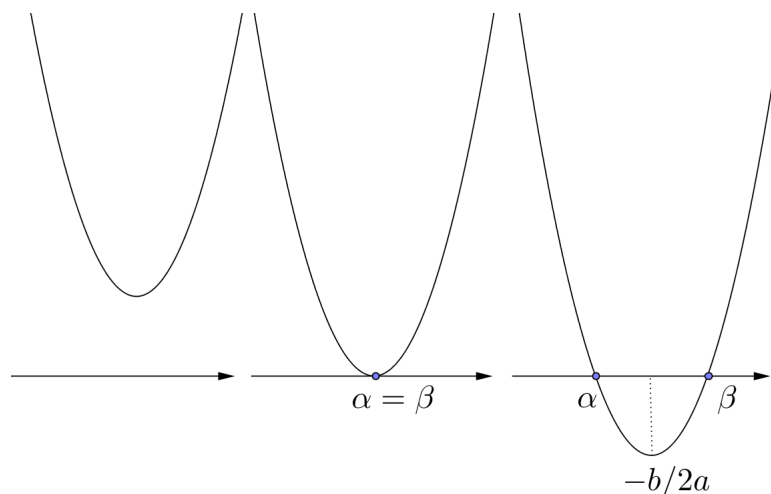


Figura 24: Raízes de uma Equação.

A parábola que é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ transforma-se na parábola de função $h(x) = ax^2$ mediante uma translação horizontal seguida de uma translação vertical. Isto significa que essas duas parábolas são congruentes. Bem como, $g(x) = -ax^2 + bx + c$ é congruente ao gráfico de $\Psi(x) = -ax^2$. A reflexão em torno do eixo horizontal leva o gráfico de $\Psi(x) = -ax^2$ no gráfico de $h(x) = ax^2$.

Ao girar uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada *parabolóide de revolução*. Esta superfície possui utilizações importantes. Uma delas é uma lenda segundo a qual o extraordinário matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa em torno do ano 250 a.C., destruiu a frota que sitiava aquela cidade incendiando os navios com os raios de sol refletidos em espelhos parabólicos. Mesmo que seja teoricamente possível, há sérias dúvidas históricas sobre a capacidade tecnológica da época para refletir tais espelhos. Dessa lenda resta hoje um interessante acendedor solar de cigarros e outros artefatos que provocam ignição fazendo convergir os raios de sol para o foco de uma superfície parabólica polida. A lanterna ou os faróis de carro atuam inversamente concentrando na direção paralela ao eixo dos raios de luz que emanam do foco.

Vamos analisar o fundamento matemático desses aparelhos. Começando com o princípio pelo qual o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão quando um raio incide sobre uma superfície refletora. O ângulo entre uma reta e uma curva que se interceptam em um ponto é o ângulo entre essa reta e a tangente à curva traçada pelo ponto de interseção.

A tangente a uma parábola é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto e tal que todos os demais pontos da parábola estão do mesmo lado da reta. A tangente a uma parábola tem sua posição determinada pelo teorema seguinte.

Teorema. Se a parábola é o gráfico da equação $f(x) = ax^2 + bx + c$, sua tangente no ponto $P = (x_0, y_0)$, onde $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a $2ax_0 + b$.

Demonstração. Para provar isto, mostremos que todos os pontos dessa parábola que têm abscissa diferente de x_0 estão fora da reta mencionada e no mesmo semi-plano determinado por ela. Assim, admita que $a > 0$. Mostremos que, para todo $x \neq x_0$, o ponto (x, y) da parábola, com $y = ax^2 + bx + c$ está acima do ponto

$(x, y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0))$, de mesma abscissa x situada sobre a reta. Queremos provar que

$$x \neq x_0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0).$$

Para isto, basta notar que

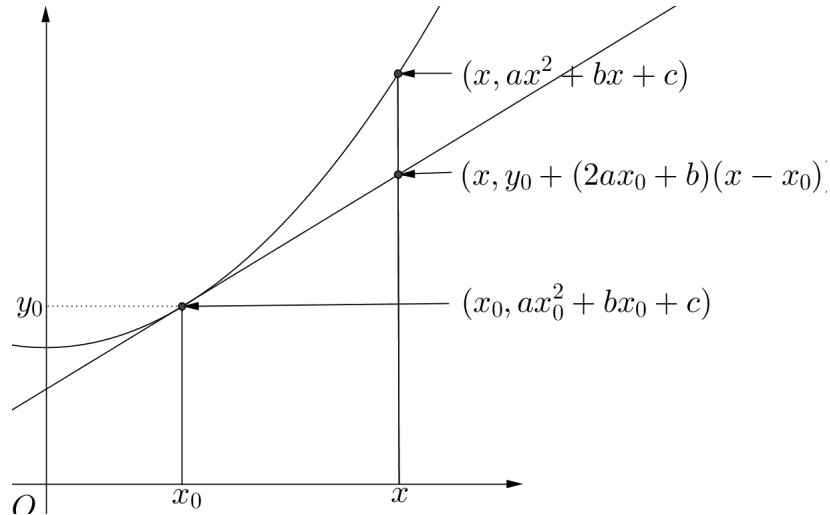


Figura 25: O Ponto da Parábola está Acima do Ponto da Reta.

$$x \neq x_0 \Rightarrow ax^2 + bx + c - [ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)] = a(x - x_0)^2 > 0.$$

Isto mostra que a reta de inclinação $2ax_0 + b$ que passa pelo ponto (x_0, y_0) , com $y_0 = f(x_0)$, tem este único ponto em comum com a parábola que é o gráfico de f e que todos os pontos da parábola estão acima dessa reta. Assim, esta reta é tangente à parábola neste ponto. Procedimentos análogos para o caso $a < 0$.

Sabendo que todas as retas paralelas ao eixo de uma parábola têm apenas um ponto em comum com essa parábola, mas nenhuma delas é tangente porque há pontos da parábola em ambos semiplanos por ela determinados. Sabendo que a parábola, gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem no ponto $P = (x, y)$ uma tangente cuja inclinação é $2ax + b$, calculemos agora a inclinação da reta FQ que une o foco F ao ponto Q , pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d .

Tomamos P como um ponto da parábola que não é o vértice, $x \neq -\frac{b}{2a}$. Se P fosse o vértice, a reta FQ seria vertical e a tangente no ponto P teria inclinação zero, ou

seja, seria horizontal. A inclinação da reta FQ é dada por uma fração cujo numerador é a diferença entre as ordenadas de Q e F e cujo denominador é a diferença entre as abscissas desses pontos. Como foi demonstrado que $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ e que $Q = (x, k - \frac{1}{4a})$, onde $m = -\frac{b}{2a}$ e k = ordenada do vértice da parábola. Logo a inclinação de FQ é igual a

$$\frac{k - \frac{1}{4a} - (k + \frac{1}{4a})}{x - m} = -\frac{1}{2a(x - m)} = -\frac{1}{2a(x + \frac{b}{2a})} = -\frac{1}{2ax + b}.$$

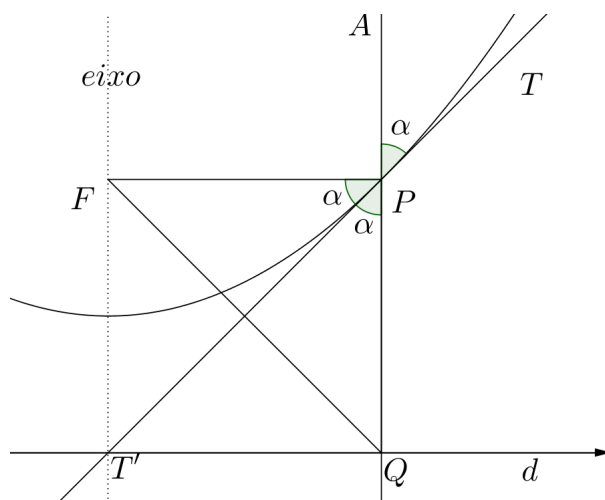


Figura 26: Inclinação da Reta FQ

Significa que o segmento de reta FQ é perpendicular à reta TT' , tangente à parábola no ponto P , conforme o lema que diz que as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, com $a \neq 0$ e $a' \neq 0$, são perpendiculares se, e somente se, $aa' = -1$. A demonstração é feita baseada em que, se as retas $y = ax$ e $y = a'x$ são paralelas às retas dadas, aquelas são perpendiculares se, e somente se, estas também forem. Suponhamos que estas retas sejam perpendiculares. Se $x = 1$, vemos que o ponto $(1, a)$ pertence a uma das retas e o ponto $(1, a')$ pertence à outra. Logo, o triângulo cujos vértices são os pontos $(0, 0)$, $(1, a)$ e $(1, a')$ é retângulo. Assim, a altura baixada do vértice do ângulo reto é a média geométrica dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa. O comprimento da altura é 1. Além disso, pela Figura 27, a' é negativo e o outro é positivo. Os referidos segmentos medem a e a' . Assim, $1 = -aa'$. Reciprocamente,

se $a' = -\frac{1}{a}$, considere a reta $y = bx$, perpendicular à reta $y = ax$ a partir da origem. Pelo que vimos, $b = -\frac{1}{a}$, então $b = a'$, assim $y = a'x$ coincide com $y = bx$ portanto é perpendicular a $y = ax$. Essa demonstração pode ser feita pelas razões trigonométricas.

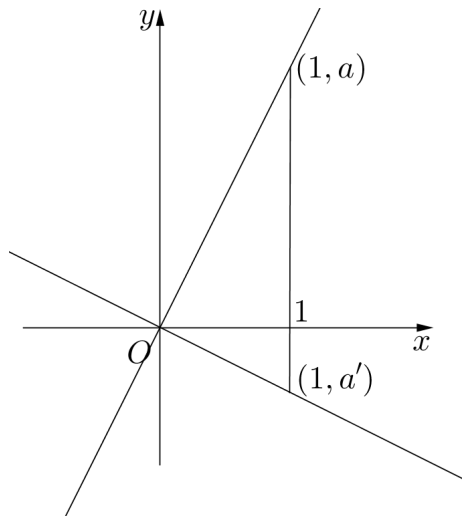


Figura 27: Retas Perpendiculares quando $aa' = -1$

Podemos enunciar a propriedade geométrica da parábola na qual se baseiam as aplicações da curva parabólica. A tangente à parábola num ponto P faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco F a esse ponto.

Com efeito, observando a Figura 26, se Q é o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz, a definição da parábola nos diz que $\overline{FP} = \overline{PQ}$, logo o triângulo FPQ é isósceles. Acaba-se de ver que FQ é perpendicular à tangente, ou seja, a tangente é altura desse triângulo isósceles, logo é também bissetriz. Assim, os ângulos $F\hat{P}T'$ e $T'\hat{P}Q$ são iguais. Logo, $A\hat{P}T = F\hat{P}T' = \alpha$. Se a antena parabólica estiver voltada para a posição do satélite, a grande distância faz com que os sinais emitidos por este sigam trajetórias praticamente paralelas ao eixo da superfície da antena. Logo, eles se refletem na superfície e convergem para o foco.

A seguir vamos fazer a caracterização da função quadrática como uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua que transforma progressão aritmética em progressão aritmética de 2ª ordem como está em [7]. Para isto, considerando $f(x) = x^2$, observe que esta

função transforma a progressão aritmética (P.A.) com os números $1, 2, 3, 4, \dots, n, n + 1, \dots$ na sequência $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, (n + 1)^2, \dots$ que não é uma P.A. Mas, se analisarmos a diferença entre dois termos consecutivos desta última sequência, encontramos $3, 5, 7, \dots, 2n + 1, \dots$ que é uma P.A.. Não é coincidência. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática arbitrária e $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ é uma P.A. qualquer, então a sequência $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ goza da propriedade de que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, d_2 = y_3 - y_2, d_3 = y_4 - y_3, \dots$ formam uma P.A.. Mais precisamente, se $x_{i+1} - x_i = r$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots$ então $d_{i+1} - d_i = 2ar^2$.

Demonstração. Como $f(x) = ax^2 + bx + c$, então

$$\begin{aligned}d_{i+1} &= y_{i+2} - y_{i+1} = a(x_{i+2}^2 - x_{i+1}^2) + b(x_{i+2} - x_{i+1}) \\d_i &= y_{i+1} - y_i = a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + b(x_{i+1} - x_i)\end{aligned}$$

Fazendo $d_{i+1} - d_i$, temos

$$\begin{aligned}d_{i+1} - d_i &= a((x_{i+1} + r)^2 - 2x_{i+1}^2 + (x_{i+1} - r)^2) + b(x_{i+1} + r - 2x_{i+1} + x_{i+1} - r) = \\&= a(2x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}^2 + 2r^2) = 2ar^2\end{aligned}$$

No caso do movimento uniformemente acelerado, se considerarmos a queda livre de um corpo, sujeito apenas à ação da gravidade, pode-se verificar que, marcando a posição do corpo em intervalos iguais e sucessivos de tempo, as distâncias percorridas em cada intervalo de um segundo vão crescendo, e formam uma P.A. de razão g , onde $g = 9,8m/s^2$ é a aceleração da gravidade. O teorema de caracterização garante então que a altura $f(t)$ do corpo em queda livre depois de t segundos do início da queda é uma função quadrática: $f(t) = A - \frac{1}{2}gt^2$, onde A é a altura do ponto onde teve início a queda.

Vamos mostrar que, reciprocamente, toda função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que transforma P.A. em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Lembrando que uma P.A. é a restrição de uma função afim aos números naturais: se $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ é uma P.A. de razão r então a igualdade $x_n = x_1 + (n - 1)r$, tomando $n = a, r = x$ e $x_1 - r = b$, pode ser escrita como $x_n = ax + b$, quando restrita aos números naturais, fornece os termos $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n), \dots$ da P.A. De modo análogo, se $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ é uma P.A. de segunda ordem, existem números reais a, b e c tais que $y_n = an^2 + bn + c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $y_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a restrição

de f aos números naturais fornece os termos da P.A. de segunda ordem dada. As diferenças sucessivas $y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_{n+1} - y_n, \dots$ formam uma P.A. ordinária, cujo primeiro termo é $d = y_2 - y_1$ e cuja razão chamamos de r ; portanto seu n -ésimo termo é $y_{n+1} - y_n = d + (n - 1)r$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Temos, então:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + \dots + (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + y_1 \\ y_{n+1} &= [d + (n - 1)r] + [d + (n - 2)r] + \dots + [d + r] + d + y_1 \\ y_{n+1} &= nd + \frac{n(n - 1)}{2}r + y_1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esta igualdade é igualmente verdadeira quando $n = 0$, o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} y_n &= (n - 1)d + \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}r + y_1 \\ y_n &= \frac{r}{2}n^2 + \left(d - \frac{3r}{2}\right)n + r - d + y_1 \\ y_n &= an^2 + bn + c, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, com $a = \frac{r}{2}, b = d - \frac{3r}{2}, c = r - d + y_1$.

Teorema (Caracterização das Funções Quadráticas)

A fim de que a função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessária e suficiente que toda P.A. não constante $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ seja transformada por f numa progressão de segunda ordem não degenerada $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), \dots$

Demonstração. Substituindo $f(x)$ por $g(x) = f(x) - f(0)$, vemos que g tem as mesmas propriedades de f e mais a propriedade adicional de que $g(0) = 0$. Considerando a P.A. $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, vemos que os valores $g(1), g(2), \dots, g(n), \dots$ formam uma P.A. de segunda ordem não-degenerada. Logo, existem constantes $a \neq 0$ e b tais que $g(n) = an^2 + bn$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, fixemos arbitrariamente um número $p \in \mathbb{N}$ e considere a P.A. $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \dots, \frac{n}{p}, \dots$. De modo análogo, concluímos que existe $a' \neq 0$ e b' tais que $g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$an^2 + bn = g(n) = g\left(\frac{np}{p}\right) = a'(np)^2 + b'(np) = (a'p^2)n^2 + (b'p)n.$$

Portanto, as funções quadráticas $ax^2 + bx$ e $(a'p^2)x^2 + (b'p)x$ coincidem para todo $x = n \in \mathbb{N}$. Isto obriga a igualdade entre os termos que multiplicam x . Assim, para qualquer números naturais n e p vale:

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n = \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).$$

Vemos então que as funções contínuas $g(x)$ e $ax^2 + bx$ são tais que $g(r) = ar^2 + br$ para todo número racional positivo $r = \frac{n}{p}$. Segue-se que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo número real positivo x . Da mesma forma, considerando a P.A. $-1, -2, -3, \dots$ concluiríamos que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo $x \leq 0$. Pondo $f(0) = c$, temos $f(x) = g(x) + c$, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

É bom lembrarmos que a parábola pode ser considerada como a posição limite de uma elipse com um dos seus focos no infinito. Outro fato importante é que a reta normal à parábola num de seus pontos $P = (x, y)$ é a bissetriz do ângulo FPQ , onde F é o foco da parábola e PQ é uma reta paralela ao eixo Ox .

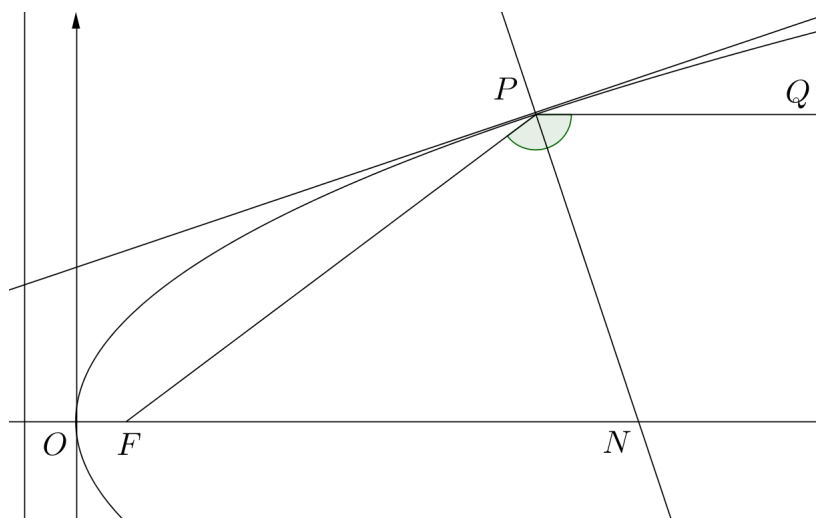


Figura 28: Reta Normal à Parábola

Nas quádricas, a equação geral do segundo grau em duas variáveis x e y têm a forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (I),$$

onde a, b, \dots, f são coeficientes numéricos.

O conjunto dos pontos (x, y) solução da equação anterior pode ser uma elipse, ou uma hipérbole, ou uma parábola, ou duas retas, ou uma reta, ou um ponto ou o conjunto vazio. Como $x = X \cos \Theta - Y \sin \Theta$ e $y = Y \cos \Theta + X \sin \Theta$, substituindo em (I), temos uma expressão $AX^2 + 2BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$. Como $B = 0$, substituindo em $2B = (c - a) \sin 2\Theta + 2b \cos 2\Theta$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= (c - a) \sin 2\Theta + 2b \cos 2\Theta; \\ 2b \cos 2\Theta &= (a - c) \sin 2\Theta; \\ \operatorname{ctg} 2\Theta &= \frac{a - c}{2b}; \end{aligned}$$

que tomar Θ tal que $\operatorname{ctg} 2\Theta = \frac{a - c}{2b}$. Observando o discriminante $\Delta = ac - b^2$ da equação geral do segundo grau $AX^2 + 2BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$, vemos que, se $\Delta > 0$ temos uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio se $\Delta < 0$ temos uma hipérbole ou duas retas e se $\Delta = 0$ representa uma parábola, duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

A equação

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 + 34\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 11 = 0$$

é uma elipse, pois, $\Delta > 0$. Para retirar o termo xy , segue-se que a rotação é dada pelas fórmulas $x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$ que nos levam a equação $4(X + 2)^2 + 9(Y - 1)^2 = 36$. Tomando $x' = X + 2$ e $y' = Y - 1$, obtemos a equação canônica da elipse:

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

4 Equações Paramétricas de uma Curva

Há várias curvas importantes que ficam melhor representadas na forma paramétrica. Como é dito em [4], em geral, as equações paramétricas são úteis porque, em diversas situações, elas simplificam os cálculos. São muito usadas na Física, para descrever o movimento de uma partícula.

O objetivo dessa unidade é calcular o comprimento de um arco e introduzir as Fórmulas de Frenet.

Definição 4 Uma *curva parametrizada diferenciável* do plano é uma aplicação diferenciável α de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é o *parâmetro* da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é chamado *traço* da curva.

Observemos que uma curva é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que para cada t associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis de classe C^k .

Uma aplicação α é diferenciável em um ponto x_0 do seu domínio se

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}$$

existe e é denominado por $\alpha'(t_0)$ e é chamado de derivada de α em x_0 . Pode-se dizer que α é derivável se α é derivável em todo seu domínio.

4.1 Exemplos

a) A aplicação α , que para cada $t \in \mathbb{R}$ associa $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, é uma curva paramétrica diferenciável, cujo traço é uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1. Observe a Figura 29.

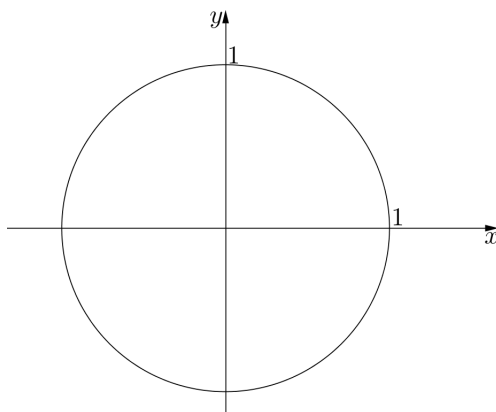


Figura 29: Traços da Circunferência

b) A curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (\cos t(2\cos t - 1), \sin t(2\cos t - 1))$, $t \in \mathbb{R}$, tem o traço da Figura 30.

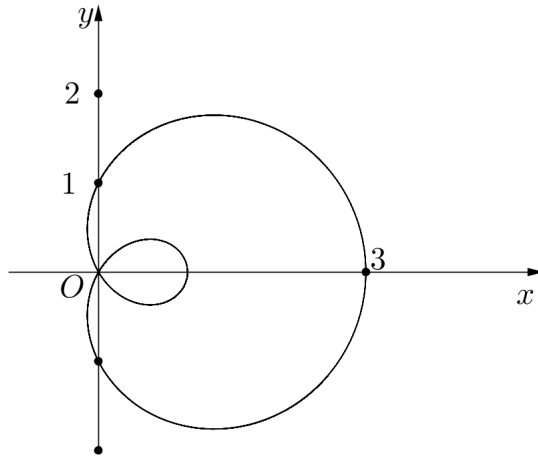


Figura 30: Limaçon de Pascal

c) A curva parametrizada diferenciável que para cada $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ associa $\alpha(t) = (2\sin^2(t), 2\sin^2(t)\tan(t))$ tem o traço da Figura 31.

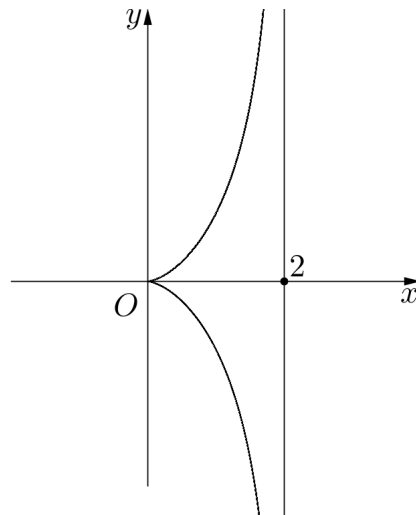


Figura 31: Cissóide de Diocles

d) Duas curvas parametrizadas diferenciáveis podem ter o mesmo traço. Se

$$\alpha(t) = (t, 2t), t \in \mathbb{R}$$

e

$$\beta(r) = (3r + 1, 6r + 2), r \in \mathbb{R}$$

têm o mesmo traço, conforme Figura 32.

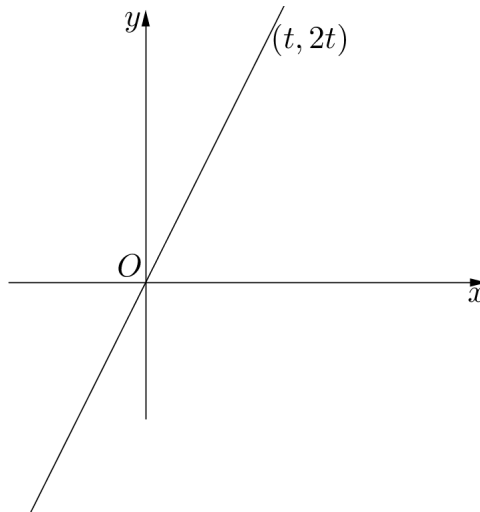


Figura 32: Traços Semelhantes

Exemplo. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva paramétrica diferenciável que para cada $t \in \mathbb{R}$, associa

$$\alpha(t) = (\cos t(2\cos t - 1), \sin t(2\cos t - 1)).$$

O vetor tangente a α em t é igual a

$$\alpha'(t) = (\sin t - 2\sin(2t), 2\cos(2t) - \cos t).$$

Definição 4.1b. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita regular se $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. A reta tangente a α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$, isto é, a reta dada pela função

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0), r \in \mathbb{R}.$$

4.2 Mudança de Parâmetro e Comprimento de Arco

Dada uma curva regular α , podemos obter várias curvas regulares que têm o mesmo traço que α da seguinte forma.

Definição 4.2a. *Sejam I e J intervalos abertos de \mathbb{R} , $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável de classe C^k , cuja derivada de primeira ordem é não nula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então a função composta*

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço que α , $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(t)$ chamada reparametrização de α por h . A função h é dita mudança de parâmetro.

4.2.1 Exemplos

a) Considere a curva regular $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$ é constante. Seja $h(s) = \frac{s}{a}$, $s \in \mathbb{R}$. A reparametrização de α por h é a curva

$$\beta(s) = \alpha \circ h(s) = \left(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} \right).$$

b) A curva $\beta(r) = (-2r + 1, -4r + 2)$, $r \in \mathbb{R}$ é uma reparametrização de $\alpha(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Basta considerar a mudança de parâmetro $h(r) = -2r + 1$, $r \in \mathbb{R}$.

Uma mudança de parâmetro h é uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente e, portanto, é bijetora. Se β é uma reparametrização de α por h , então α é uma reparametrização de β por (h^{-1}) .

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e fixemos t_0 e t_1 do intervalo I . Subdividindo o intervalo $[t_0, t_1]$ pelos pontos $t_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = t_1$ e ligando relativamente os pontos $\alpha(a_0), \alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)$, obtemos uma linha poligonal chamada poligonal inscrita à curva entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$ que tem um comprimento determinado. Como α é uma curva regular, pode-se verificar que existe o limite superior do conjunto dos comprimentos dessas linhas poligonais e é igual $\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$ que é chamado *comprimento de*

arco da curva α de t_0 a t_1 .

A aplicação $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$ é denominada *função comprimento de arco* da curva α a partir de t_0 .

Definição 4.2b Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento do arco, se para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$ o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$, isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0$$

Proposição 4.2c Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se, $\forall t \in I, |\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. Suponhamos que α está parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t_0 \in I$. Considere a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $t \in I$ associa $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$. Se $t \leq t_0$, então, por hipótese,

$$\begin{aligned} s(t) &= - \int_t^{t_0} |\alpha'(t)| dt \\ &= -(t_0 - t) = t - t_0 \end{aligned}$$

Portanto, para todo $t \in I, s(t) = t - t_0$, donde $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, concluímos que $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$.

(\Leftarrow) Como $|\alpha'(t)| = 1 \Rightarrow s(t) = t + C$. Como $s(0) = -t_0 \Rightarrow s(t) = t - t_0$

A aplicação

$$\alpha(t) = \left(a \cos \frac{t}{a}, a \sin \frac{t}{a} \right), t \in \mathbb{R},$$

onde $a \neq 0$, é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, já que

$$|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 4.2d Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definido no intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento do arco.

Demonstração α é uma curva regular, portanto

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0,$$

isto é, s é uma função estritamente crescente. Segue-se que existe a função inversa de s , $h : J \rightarrow I$. Como $\forall t \in I$, $h(s(t)) = t$, temos que $\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$, portanto

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Concluimos que $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, $s \in J$, é uma reparametrização de α e $|\frac{d\beta}{ds}| = |\frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds}| = |\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}| = 1$. Portanto, pela proposição anterior, β está parametrizada pelo comprimento de arco.

A aplicação β da proposição acima é dita uma reparametrização de α pelo comprimento de arco. Observamos que esta reparametrização não é única, pois depende da função comprimento de arco, que por sua vez depende de t_0 fixado.

Vamos obter uma reparametrização pelo comprimento de arco das seguintes curvas regulares.

Exemplo.

a) Considere $\alpha(t) = (a.t + c, b.t + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Seja $s(t)$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$, isto é,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

A função inversa de s é dada por $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $s \in \mathbb{R}$. Portanto, $\beta = \alpha \circ h$, que a cada s associa

$$\beta(s) = (a \cdot \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b \cdot \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d),$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento do arco.

b) Considere a curva $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, chamada *espiral logarítmica*.

Verificamos que $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}e^t$ e, portanto, a função comprimento de arco de α , a partir de $t_0 = 0$ é

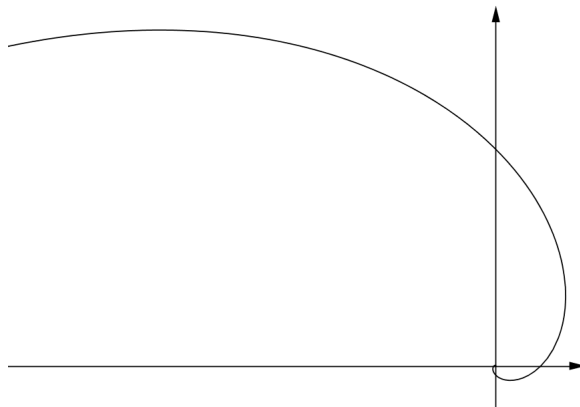


Figura 33: Espiral Logarítmica

$$s(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}.$$

A função inversa é dada por

$$h(s) = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right).$$

Portanto, $\beta(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\cos\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\sin\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)\right)$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

4.3 Teoria Local das Curvas Planas e Fórmulas de Frenet.

Considere $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, parametrizada pelo comprimento de arco s . Para cada $s \in I$, $\alpha'(s)$ é um vetor unitário. Seja $n(s)$ um vetor ortogonal a $t(s)$, tal que a base ortonormal de \mathbb{R}^2 formada por $t(s)$ e $n(s)$ têm a mesma orientação que a base canônica, isto é,

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

O conjunto de vetores $t(s)$ e $n(s)$ é dito *Referencial de Frenet* da curva α em s .

Os vetores de \mathbb{R}^2 , $t'(s)$ e $n'(s)$, podem ser escritos como combinação linear de $t(s)$ e $n(s)$. Como $t(s)$ é unitário, $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$ e $t'(s)$ é proporcional a $n(s)$. Logo,

$$t'(s) = k(s)n(s),$$

onde $k(s)$ é chamado *curvatura* de α em s . Considerando a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, segue-se da definição que

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle \Rightarrow k(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

Segue-se que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e $n'(s)$ é proporcional a $t(s)$. Como

$$\langle n'(s), t(s) \rangle = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s),$$

concluimos que

$$n'(s) = -k(s)t(s).$$

A função $|k(s)| = |\alpha''(s)|$ indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. Fixando $s_0 \in I$ e considerando os vetores tangentes $\alpha'(s_0)$ e $\alpha'(s_0 + h)$, onde $s_0 + h \in I$. Seja $\Phi(h)$ o ângulo formado por $\alpha'(s_0)$ e $\alpha'(s_0 + h)$, tal que,

$$\cos\Phi(h) = \langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0 + h) \rangle.$$

Então, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(h)}{h}$ indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. Como para todo h

$$|\alpha'(s_0 + h) - \alpha'(s_0)| = 2\operatorname{sen}\frac{\Phi(h)}{2},$$

concluimos que

$$|k(s_0)| = |\alpha''(s_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(h)}{h}.$$

Exemplo. Seja $\alpha(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é uma reta. Então, a curvatura é identicamente nula. De fato, seja $\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0)$, onde a e b são constantes e $a^2 + b^2 = 1$. Como $t(s) = \alpha'(s)$ é constante, segue-se que $t'(s) = 0$ e, portanto, $k(s) = 0$, $\forall s \in I$.

Toda curva regular admite uma tal reparametrização, entretanto, gostaríamos de poder realizar o estudo das curvas, sem ter que necessariamente mudar a parametrização. Vamos considerar o Referencial de Frenet e a curvatura de uma curva regular com qualquer parâmetro.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de parâmetro qualquer $r \in I$. Considere $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α por comprimento de arco s , isto é, $\beta(s(r)) = \alpha(r)$. Se $t(s)$ e $n(s)$ são o Referencial de Frenet de $\beta(s)$ e $k(s)$ a curvatura, então dizemos que $t(r) = t(s(r)), n(r) = n(s(r))$ é o Referencial de Frenet de α e $k(r) = k(s(r))$ é a curvatura.

Proposição 4.3 *Seja $\alpha(r) = (x(r), y(r)), r \in I$ uma curva regular. Então:*

$$t(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

$$n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

e

$$k(r) = \frac{(-x''y' + x'y'')}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Seja $\beta(s)$ uma reparametrização de α por comprimento de arco. Derivando $\beta(s(r)) = \alpha(r)$, temos:

$$(I) \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dr} = \alpha'(r);$$

$$(II) \frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \left(\frac{d^2s}{dr^2}\right) = \alpha''(r);$$

$$(III) \frac{ds}{dr} = |\alpha'(r)|;$$

$$(IV) \frac{d^2s}{dr^2} = \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r)|}.$$

Considerando que $\alpha(r) = (x(r), y(r))$, segue-se de (I) e (III) que

$$t(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Pela definição de vetor normal temos:

$$n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Como $k(s(r)) = \langle \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(r)), n(r) \rangle$ concluímos usando (I), (II), (III) e (IV) que

$$k(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4.4 Exemplo

Considere a espiral logarítmica

$$\alpha(r) = (e^r \cos r, e^r \sin r), r \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\alpha'(r) = e^r (\cos r - \sin r, \sin r + \cos r),$$

$$\alpha''(r) = e^r (-2\sin r, 2\cos r).$$

. Portanto,

$$k(r) = \frac{1}{\sqrt{2}e^r}.$$

Vemos a interpretação geométrica do sinal da curvatura. Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco. O vetor tangente $t(s) = \alpha'(s)$ é unitário e, portanto, $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$. Fixemos $s_0 \in I$ e suponhamos que $k(s_0) \neq 0$. Observamos que a reta tangente a α em s_0 é dada por

$$T(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0),$$

divide o plano em dois semiplanos.

Considerando a expansão de $\alpha(s)$ em séries de Taylor, em torno de s_0 , temos

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\alpha''(s_0) + R(s),$$

onde $R(s)$ é uma função vetorial, tal que $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R(s)}{(s - s_0)^2} = 0$. Portanto,

$$\alpha(s) - T(s) = \frac{(s - s_0)^2}{2}\alpha''(s_0) + R(s).$$

Como $\alpha(s) - T(s)$ é um vetor no sentido do semiplano que contém $\alpha(s)$, segue da última relação que para todo s , suficientemente próximo de s_0 , $\alpha''(s_0)$ tem o sentido do semiplano que contém os pontos $\alpha(s)$.

Como $k(s_0) = \langle \alpha''(s_0), n(s_0) \rangle$, concluímos que se $k(s_0) > 0$, então $n(s_0)$ tem o mesmo sentido de $\alpha''(s_0)$ e se $k(s_0) < 0$, então, $\alpha''(s_0)$ e $n(s_0)$ têm sentidos opostos.

Se $\alpha(s)$ é uma curva regular de curvatura $k(s) \neq 0$, a quantidade $\rho(s) = \frac{1}{|k(s)|}$ é denominada *raio de curvatura* de α em s . O círculo de raio $\rho(s)$ e centro

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s)$$

é denominado *círculo osculador* e $c(s)$ é dito *centro de curvatura*. A medida que varia o parâmetro, o centro de curvatura descreve uma curva β a evoluta de α , cujas retas tangentes são ortogonais à curva α .

Exemplo. Considere a parábola $y = x^2$. De acordo com o que acabamos de ver, temos

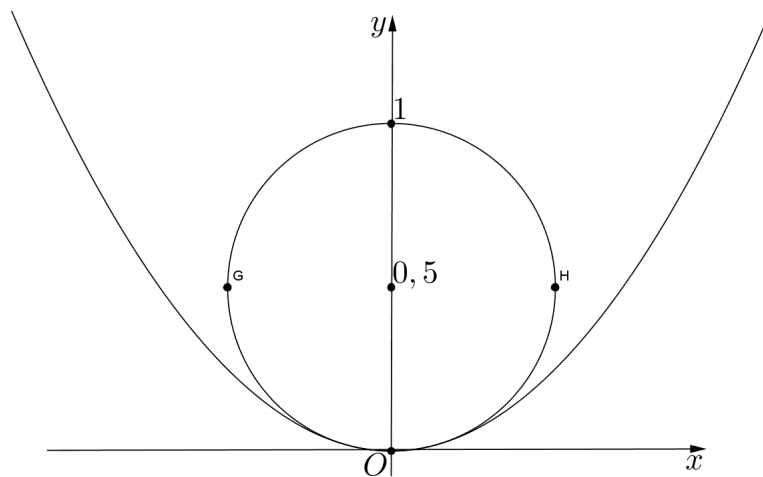


Figura 34: Parábola e Círculo Osculador

$$k = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4x^2)^3}}$$

Vemos que a curvatura é 2 e o raio da curvatura é $\frac{1}{2}$ para $x = 0$. A curvatura tende a zero e o raio da curvatura tende ao infinito com $x \rightarrow \pm\infty$. A circunferência osculatriz na origem tem equação

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \text{ ou } 4x^2 + (2y - 1)^2 - 1 = 0.$$

Tendo-se em conta que

$$(1, y'(x)) = (1, 2x)$$

é um vetor tangente a curva, basta dividi-lo por seu módulo para se ter o vetor tangente unitário \vec{T} :

$$\vec{T} = \frac{(1, 2x)}{\sqrt{1 + 4x^2}}.$$

Como a curva tem uma concavidade sempre voltada para cima e \vec{T} aponta para a direita, o vetor unitário \vec{N} pode ser obtido de \vec{T} por rotação anti-horária de 90° . Se (a, b) é um vetor qualquer, $(-b, a)$ é o que dele se obtém por rotação anti-horária, logo

$$\vec{N} = \frac{(-2x, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2}},$$

de forma que a curvatura é dado por

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k \cdot \vec{N} = \frac{(-4x, 2)}{(1 + 4x^2)^2}.$$

O ângulo entre duas curvas regulares que se interceptam é definido como sendo o ângulo entre os vetores tangentes às curvas no ponto de interseção.

Uma *involuta* de uma curva regular β é uma curva que é ortogonal às retas tangentes de β . Portanto, se β é a *evoluta* de α , então, α é a involuta de β .

4.5 Demonstração do Teorema Fundamental das Curvas Planas.

a) Considere $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s)ds$ onde $s_0 \in I$ é fixo. Fixemos um ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ de \mathbb{R}^2 e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ por

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds, \quad y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \operatorname{sen}(\theta(s) + \lambda) ds.$$

Vamos verificar que a curva $\alpha(s)$, assim definida, está parametrizada pelo comprimento do arco s e sua curvatura é $k(s)$. De fato, o Referencial de Frenet é:

$$t(s) = \alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \operatorname{sen}(\theta(s) + \lambda)), \quad n(s) = (-\operatorname{sen}(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)),$$

e, portanto, temos que $|\alpha'(s)| = 1$ e a curvatura de $\alpha(s)$ é dada por

$$\langle t'(s), n(s) \rangle = \theta'(s) = k(s).$$

b) Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $k(s)$. Segue-se das equações de Frenet que

$$(x'', y'') = k(-y', x'),$$

isto é, $x(s)$ e $y(s)$ satisfazem as equações

$$x'' = -ky' \quad \text{e} \quad y'' = kx'.$$

Segue-se do teorema da unicidade de solução do sistema de equações diferenciais que fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$ a curva α é única.

c) Sejam α e β duas curvas que têm a mesma curvatura. Fixado s_0 , existe uma rotação L e uma translação T de \mathbb{R}^2 tal que a curva $\bar{\alpha} = L \circ T \circ \beta$ satisfaz $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ e $\bar{\alpha}'(s_0) = \alpha'(s_0)$. Segue-se do item b que $\bar{\alpha} \equiv \alpha$. Portanto, $\alpha = L \circ T \circ \beta$.

Demonstração. a) Considere $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s) ds$, onde $s_0 \in I$ é fixo. Fixemos um ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ de \mathbb{R}^2 e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ por

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds, \\ y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^s \operatorname{sen}(\theta(s) + \lambda) ds. \end{aligned}$$

Vamos verificar que a curva α assim definida está parametrizada pelo comprimento de arco s e sua curvatura é $k(s)$. De fato, o Referencial de Frenet é

$$t(s) = \alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)),$$

$$n(s) = (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)),$$

e, portanto, temos que $|\alpha'(s)| = 1$ e a curvatura de α é dada por

$$\langle t'(s), n(s) \rangle = \theta'(s) = k(s)$$

b) Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $k(s)$. Segue-se das equações de Frenet que

$$(x'', y'') = k(-y, x),$$

isto é, $x(s)$ e $y(s)$ satisfazem as equações

$$x'' = -ky', \quad y'' = kx'$$

Portanto, segue-se do teorema de unicidade de solução do sistema de equações diferenciais que fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$ a curva α é única.

c) Sejam α e β duas curvas que têm a mesma curvatura. Fixado s_0 , existe uma rotação L e uma translação T de \mathbb{R}^2 tal que a curva $\bar{\alpha} = L \circ T \circ \alpha$ satisfaz $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ e $\bar{\alpha}'(s_0) = \alpha'(s_0)$. Segue-se do item b que $\bar{\alpha} \equiv \alpha$. Portanto, $\alpha = L \circ T \circ \alpha$

4.6 Movimentos Planos

As ideias desenvolvidas nas seções anteriores são aplicadas ao estudo de movimentos no plano. Encarando o ponto P em função de s , vamos admitir que todas as funções consideradas sejam deriváveis até a segunda ordem. A velocidade vetorial \vec{V} da partícula é definida, por analogia com a velocidade escalar, como sendo a derivada do vetor posição em relação ao tempo. Desta definição segue-se que \vec{V} é um vetor tangente à trajetória, com sentido coincidente com o sentido do movimento; além disso,

$$\vec{V} = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \vec{T},$$

onde

$$\vec{T} = \frac{dP}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$$

é um vetor unitário e tangente à trajetória no ponto considerado. Deste fato e de que $\vec{V} = v\vec{T}$ segue-se que o módulo da velocidade vetorial é igual ao módulo da velocidade escalar $v = \frac{ds}{dt}$. A aceleração vetorial \vec{A} é definida como sendo a derivada da velocidade vetorial \vec{V} em relação ao tempo:

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2}.$$

Mas

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{T}}{ds} = kv\vec{N} = \frac{v}{R}\vec{N}.$$

onde k é a curvatura e R o raio de curvatura da curva no ponto P . Substituindo esta expressão na expressão anterior, obtemos

$$\vec{A} = a\vec{T} + v^2k\vec{N} = a\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}.$$

O primeiro termo que aí aparece, $\vec{A}_T = a\vec{T}$, é a componente tangencial da aceleração; seu módulo é igual ao módulo da aceleração escalar:

$$|a\vec{T}| = |a| = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right|.$$

A outra componente da aceleração, $A_N = v^2k\vec{N}$, é a chamada aceleração normal ou centrípeta. Ela é dirigida para o lado côncavo da trajetória, isto é, de maneira a indicar o modo como \vec{T} gira com o crescer de s .

Essa força origina-se do próprio peso do veículo, às custas do atrito das rodas com o solo. A força peso aparece decomposta na força centrípeta e numa outra componente \vec{f} . Esta força \vec{f} cria uma distribuição desigual de pressões das rodas contra o solo. A situação ideal é aquela em que essas pressões são iguais, o que acontece quando \vec{f} é perpendicular à base de sustentação do veículo. Para se conseguir isso é necessário que a estrada tenha uma certa inclinação lateral. Como a força centrípeta tem módulo $m\frac{v^2}{R}$, devemos ter

$$\frac{mv^2/R}{mg} = \text{tg}(\alpha),$$

donde segue-se que

$$tg(\alpha) = \frac{v^2}{Rg}.$$

Nota-se que o ângulo α de inclinação não depende da massa do veículo. Para uma velocidade $v = 108km/h = 30m/s$, a inclinação ideal de uma curva de raio $R = 300m$ é, admitindo $g = 9,8m/s^2$,

$$\alpha \cong arctg \frac{900}{300 \cdot 9,8} \cong arctg 0,306 \cong 17^\circ.$$

Isaac Newton, em seu Principia Mathematica, de 1687, mostrou as três leis de Kepler a partir de duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei Universal da Gravitação. Para isso, usou o cálculo vetorial e o cálculo diferencial para chegar a conclusão que a equação do movimento de um planeta em torno do sol tem equação polar $\rho = \frac{eh}{1 + e \cdot \cos\theta}$, num sistema de coordenadas polares com o Sol no pólo. Como a órbita de um planeta é uma curva limitada. A cônica descrita por um planeta é uma curva limitada, a cônica descrita por um planeta só pode ser uma elipse, provando, assim, a primeira Lei de Kepler.

Podemos encontrar uma equação polar aproximada para a órbita elíptica da Terra ao redor de Sol (em um foco) sabendo que a excentricidade é cerca de 0,017 e o comprimento do eixo focal(2a) é cerca de $2,99 \cdot 10^8 Km$ e, com essa equação polar, obter as distâncias da Terra ao Sol no perifélio e no afélio sabendo que $\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cdot \cos\theta}$.

5 Utilizando o Geogebra

Aqui utilizamos o software Geogebra para construção de alguns gráficos. Clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre a janela de visualização. Uma ajuda está em [9]. Você pode colocar ou retirar os eixos ou as malhas. Para formar uma parábola, clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção *Controle deslizante* e, depois, clique em qualquer ponto da janela de visualização e tecle *Enter*. Aparece o ponto *a* e, depois, faça o mesmo para aparecer os pontos *b* e *c*.

No campo *Entrada* insira a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e tecla *Enter*. Agora, você tem os significados importantes de a , b e c . Para isso, clique na bolinha do controle deslizante de a e altere seu valor. Veja o que acontece com o gráfico. Faça o mesmo para os controles deslizantes de b e c .

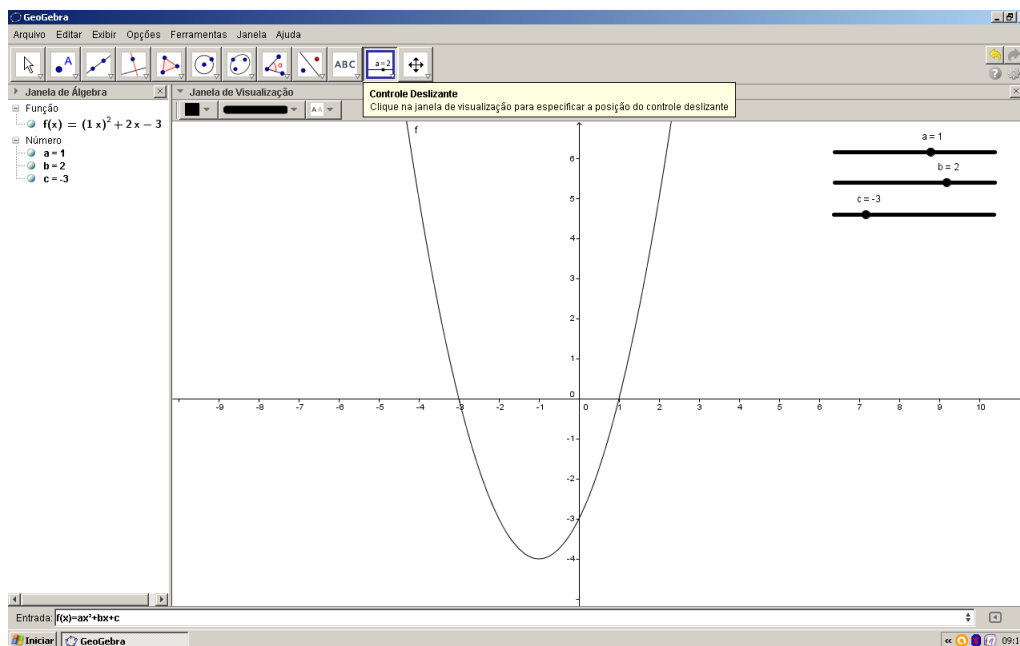


Figura 35: Gráfico da Parábola

Nota-se que a é responsável pela concavidade e abertura da parábola, b indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente da parábola e c onde a parábola intersecta o eixo y . Para limpar a tela, clique sobre o *Arquivo* e, depois, clique sobre *Nova janela* ou *Novo* se quiser salvar a figura que foi feita.

Para construir o gráfico de uma elipse, clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre a janela de visualização e insira os parâmetros a , b , c e d como foi mostrado. No campo *Entrada*, insira $\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1$ e tecla *Enter*.

Nota-se que a e b alteram o formato da elipse e que quando $a = b$ temos uma circunferência. A medida que a se aproxima de zero, a elipse se aproxima de um segmento de reta. Quando está próximo de 1, a forma da elipse se aproxima de uma circunferência. O mesmo ocorre com b . Percebe-se que c e d alteram o centro (a posição) da elipse.

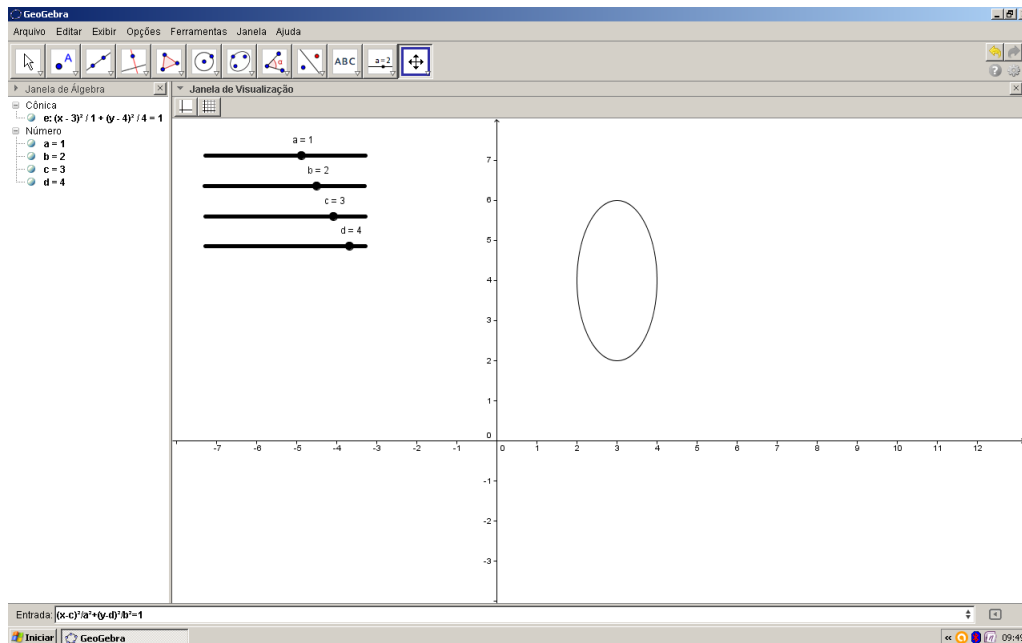


Figura 36: Gráfico da Elipse

Um bom exercício é formar as hipérbolas e perceber o que ocorre com as variações das letras. A forma de fazer é bem semelhante ao da elipse $(\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1)$. A diferença é que devemos usar o sinal de subtração e não o de adição entre as frações e tirar as conclusões.

Podemos escrever equações paramétricas de uma curva. Para fazer isso, escreva *Curva* no campo *Entrada* e tecla *Enter*. Aparecerá, *Expressão* duas vezes, *Variável*, *Valor inicial* e *Valor final*. No primeiro espaço escreva $t - \sin(t)$, no segundo espaço escreva $1 - \cos(t)$, no terceiro espaço escreva a variável t , no quarto espaço escreva 0, no quinto espaço escreva 2π e clique "Entrar". O conjunto de pontos representa a trajetória de um ponto pertencente a um círculo de raio 1 posto a girar, sem deslizar, ao longo de uma reta situada num plano horizontal: por esta razão esta curva é chamada de *ciclóide*. Para melhorar a visualização, clique na opção *Círculo dado centro e Um de seus Pontos* e clique sobre os pontos (0, 1) (centro) e (0, 0). Nota-se por onde passa esse ponto inicial (0, 0) até esse círculo completar uma volta.

Escrevendo *Curva* no campo *Entrada* e teclando *Enter* podemos formar a *hipociclóide*. Na 1ª *Expressão* escreva $7\cos(t) + \cos(7t)$ e na 2ª escreva $7\sin(t) - \sin(7t)$

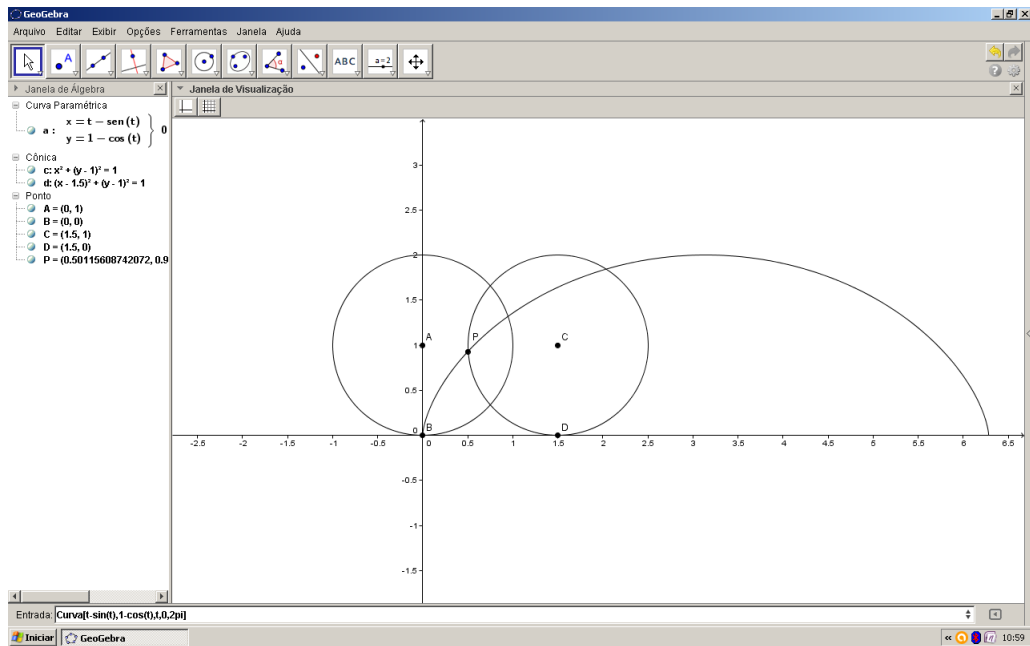


Figura 37: Ciclóide

com a *Variável* t tendo *Valor inicial* 0 e *Valor final* 2π e clique *Enter*. Aparecerá a *hipociclóide*. Podemos ampliar ou reduzir essa figura clicando sobre *Manter Janela de Visualização* para termos uma visão melhor.

Outra figura que podemos fazer é a *astróide*. Podemos fazer o mesmo processo da *hipociclóide*, mudando a 1ª *Expressão* para $3\cos(t) + \cos(3t)$ e na 2ª para $3\sin(t) + \sin(3t)$ e clicando *Enter*.

Um bom exercício é escrever *Curva* e, repetindo o mesmo processo, dessa vez escrevendo na 1ª *Expressão* $(\cos(t))^3$ e na 2ª $(\sin(t))^3$ e teclar *Enter*. Que figura é esta? Houve alguma mudança? Há alguma semelhança? Faça.

Podemos fazer curvas polares. Escreva $r(x) = 1 - \sin(x)$ e clique *Enter*. Logo após, escreva curva. Na 1ª *Expressão* escreva $r(t)\cos(t)$, na 2ª *Expressão* escreva $r(t)\sin(t)$ com a variável t de 0 a 2π e dê *Enter*. A figura que aparece é conhecida como *cardióide*.

Faça outros gráficos como esse trocando $\cos(x)$ por $\sin(x)$. Altere o valor 1 para $1/2$ ou 2 e veja a diferença. Para finalizar, podemos fazer outra curva polar escrevendo

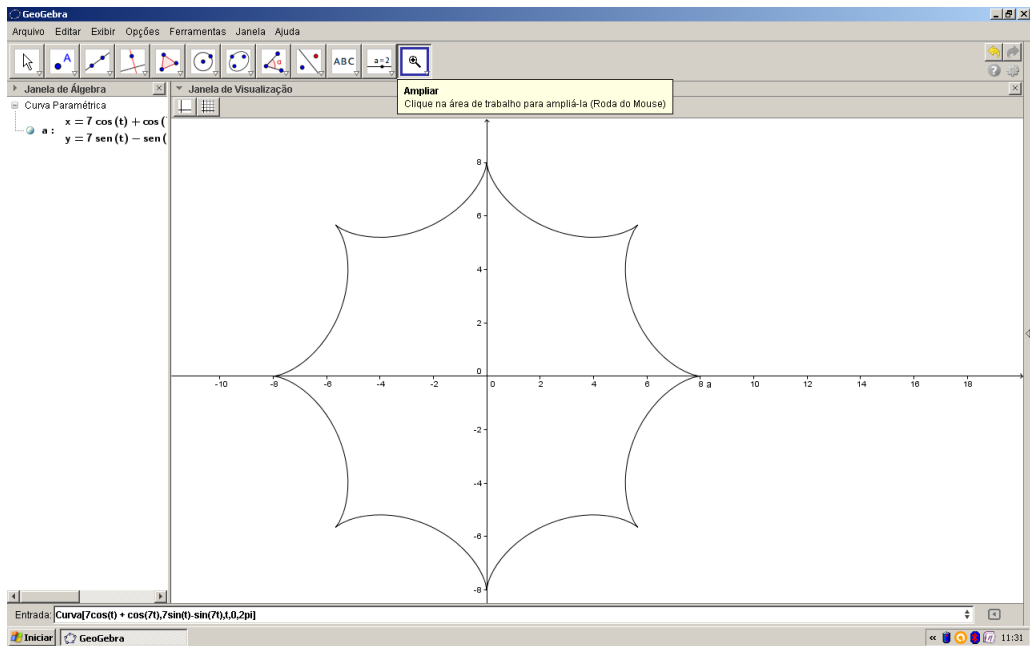


Figura 38: Hipociclóide

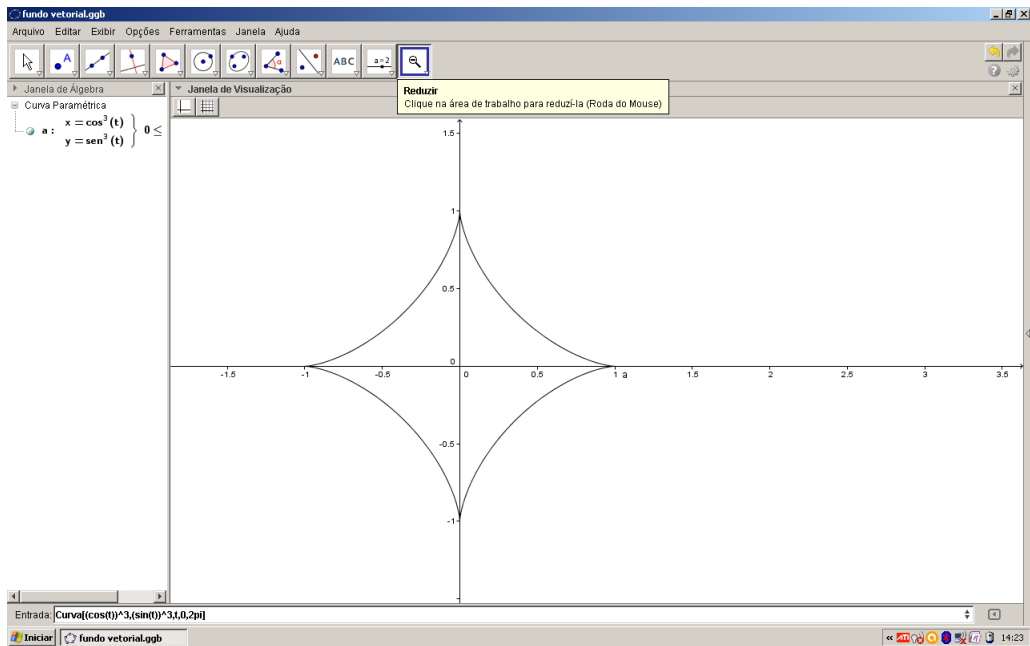


Figura 39: Astróide

no campo *Entrada* $r(x) = e^{\cos x} - 2\cos(4x) + \sin(x/12)^5$ usando a *Curva* que já foi utilizada no item anterior e veja que aparece uma imagem semelhante a uma borboleta.

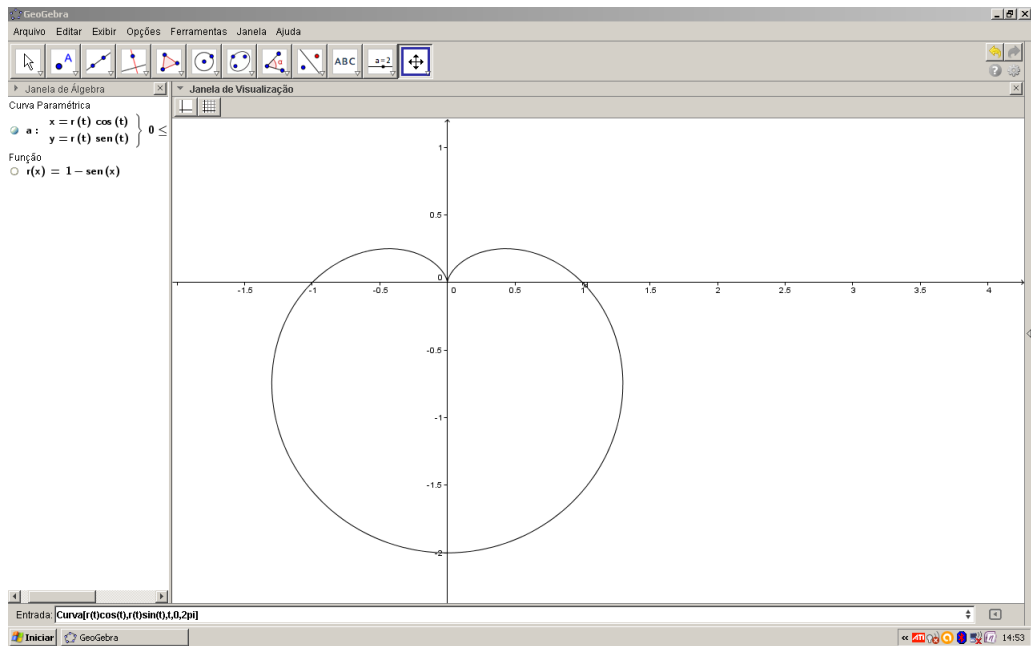


Figura 40: Cardióide

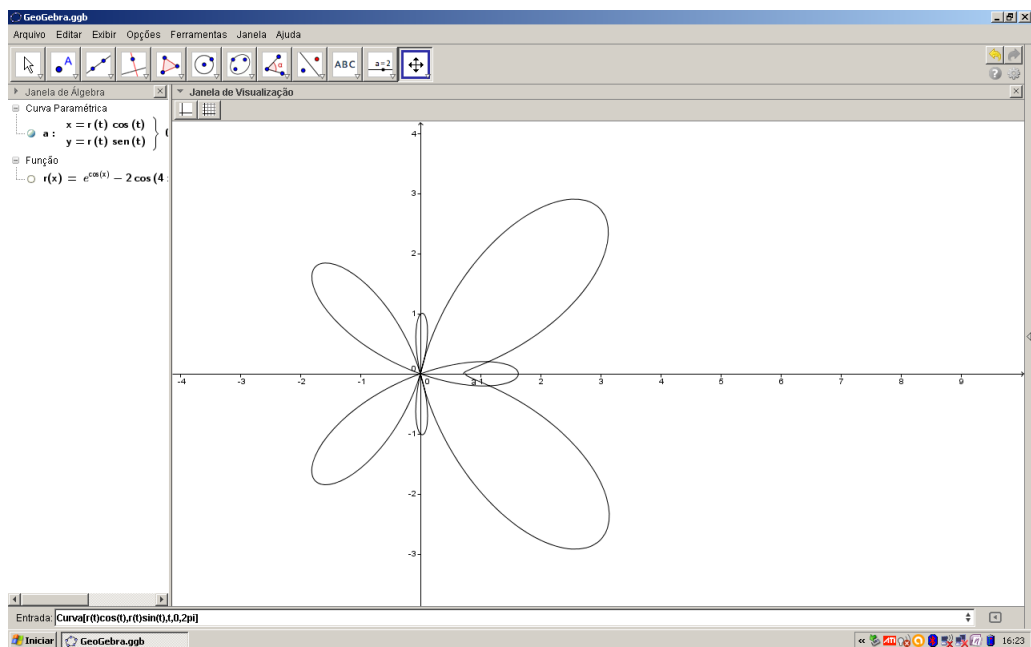


Figura 41: Figura Semelhante a uma Borboleta

6 A Importância da Matemática na Formação Básica

Quando tratamos da questão da importância da matemática na formação básica, é preciso começar pela construção do termo cidadão e suas origens, pois, como professores freqüentemente trabalhamos com a formação integral do cidadão, e este assunto se relaciona diretamente com a forma como a educação é pensada e pelas mudanças pelas quais esta passa.

O termo *cidadão* remonta à Antiguidade Clássica e a uma forma de organização social específica, que se difundiu no Mediterrâneo a partir do século *IX* a.C.: as Cidades-Estados. Os *cidadãos* eram os membros da comunidade que detinham o privilégio de participar integralmente de todo o ciclo da vida cotidiana da Cidade-Estado, ou seja, das decisões políticas, da elaboração das regras, das festividades, dos rituais religiosos, da vida pública, etc. Eram os únicos considerados indivíduos plenos e livres, com direitos e garantias sobre sua pessoa e seus bens.

Na Europa Medieval, os cidadãos eram os habitantes que defendiam as cidades, que viviam em um processo de formação. Posteriormente à Revolução Francesa, a noção de liberdade passou a caracterizar o cidadão, sendo que, após este período, o denominado cidadão é aquele que se tornava sujeito com direitos e obrigações definidos em uma constituição, não mais sendo submetido ao poder discricionário.

Visto que os seres humanos se diferem dos outros animais devido a uma série de práticas, uma delas é a longa duração da infância, processo que levou séculos para se consolidar, visto que até mesmo a forma como as crianças são vistas atualmente é fruto da evolução e da percepção deste período tão distinto da vida humana. Segundo [3], quando trata da função do ensino, sabe-se que embora o homem nasça em estado de imaturidade, possui disposição para aprender. O desenvolvimento humano não pode ser concebido sem a existência de uma sociedade onde se pode deduzir que nascemos com uma série de disposições inatas que serão desenvolvidas ou não de acordo com o meio físico e social em que a pessoa está inserida.

Quando olhamos para o contexto da educação nas diversas sociedades, percebemos que nas sociedades primitivas a educação ficava por conta dos adultos, sendo que estes

eram responsáveis por transmitir a cultura da sociedade aos jovens que, quando se tornavam adultos ficavam tão parecidos quanto possível aos seus tutores (educadores). A grande verdade é que a educação tinha um papel de manter a ordem social vigente, tomando cuidado para se manter a organização social a mais estática possível. As mudanças decorrem exclusivamente em função da evolução e isso mais tarde vai ser refletido na educação.

Ao longo dos séculos, a cultura e o conhecimento foi patrimônio de poucos. As primeiras escolas eram freqüentadas exclusivamente por aqueles que eram destinados a ocupar determinadas funções sociais, a escola tinha como função preservar os valores e garantir objetivamente que cada indivíduo se limitasse a ocupar o lugar que lhe cabia na sociedade. Neste período se acreditava que uma educação mais séria e igualitária seria um fator que iria desestabilizar a organização social. Somente no século *XVIII*, com o Iluminismo, se passa a pensar na igualdade entre os homens e, como conseqüência, um ensino ao alcance de todos. No entanto, esses ideais não correspondiam às necessidades da sociedade naquele momento histórico e somente no fim do século *XVIII* houve um clamor popular a favor da implementação de um ensino institucionalizado para todos os membros da sociedade.

Início do século *XIX*, começa a implantação do ensino obrigatório, em meio a muita polêmica, pois, muitas pessoas usavam o argumento de que, quando se proporciona conhecimentos a sujeitos da classe baixa, a tendência provável é que esses almejem mudar o lugar que lhes toca na sociedade, acarretando conflitos e alterações na ordem social vigente.

Com o advento e os avanços do processo de industrialização, a jornada de trabalho, a necessidade cada vez maior de mão de obra, fez com que crianças e jovens se tornem um problema, pois necessitavam de um lugar para ficar enquanto seus pais estavam no trabalho. Deste modo os donos dos meios de produção, a elite da sociedade preocupados em não conseguir controlar estes grupos de crianças e adolescentes ociosos, deixados a própria sorte sem alguém para supervisioná-los, perceberam que a escola, contrariando o que se imaginava anteriormente, poderia ser utilizada de forma institucional para garantir e manter a ordem social vigente, de forma que se instalou o ensino obrigatório.

No fim do século *XIX*, teve início o movimento de reforma da escola. Onde se pressupunha que a escola deveria atender às necessidades das crianças e se preocupasse em transmitir ou conduzir os jovens ao mundo do conhecimento científico e tecnológico, habilitando a sociedade para as novas linhas de trabalho. Na verdade, a reforma constituía um movimento de ajuste social. Surgem, logo adiante, outro movimento de evolução educacional, a educação libertadora, que se opunha a ação passiva dos alunos que ficavam restritos à condição de ouvintes dentro da escola, esta corrente afirmava que a função da escola é formar indivíduos livres... a educação deve libertar o homem.

Podemos deduzir que a educação está contaminada de sentidos, valores, conceitos e finalidades que lhe servem de norte desde os seus primórdios. O real sentido da educação está configurado nas diferentes correntes filosóficas que interpretam a educação na sociedade, nos seus diferentes momentos de avanços e evolução.

A matemática é vista como uma matéria difícil. Esse pensamento se deve na maioria das vezes à postura adotada pelo professor, pois muitos deles assumem uma postura tradicional, onde existe um formalismo excessivo no qual costumam exigir dos alunos o conhecimento de fórmulas e conceitos, no entanto não torna possível ao aluno uma visão da matemática como uma parte essencial na formação do cidadão. Não dão à matemática um significado enquanto saber, fica um saber desvinculado do cotidiano.

Atualmente, ao visualizarmos a aprendizagem no ambiente escolar, deve-se admitir que o aluno compreenda o assunto a partir de exemplos ligados ao seu cotidiano para que, em seguida, ele seja capaz de resolver problemas cada vez mais complexos. A aprendizagem que atribui sentido ao conceito comporta que os alunos tomem decisões com mais segurança e autonomia em diversas situações.

Denomina-se aprendizagem significativa este intuito de propiciar aos alunos condições para os conhecimentos conceituais, procedimentais e atitudinais, favorecendo o desenvolvimento de competências e habilidades, valores e princípios éticos para atuarem na sociedade de forma crítica e construtiva.

Quando olhamos para os quatro pilares para a educação propostos pela ONU (Organização das Nações Unidas) para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco): aprender a conhecer; aprender a fazer; aprender a viver com os outros e aprender a ser. Estes parâmetros estão em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais dos dife-

rentes níveis de ensino, publicados em 1998, 1999 e 2002, e outros documentos oficiais referentes à Educação no Brasil têm enfatizado a necessidade de focar o ensino e a aprendizagem no desenvolvimento de competências e habilidades por parte do aluno, em lugar de centrá-lo no conteúdo conceitual.

O ensino de Matemática nem sempre é uma tarefa fácil. A falta de conhecimentos básicos em leitura e interpretação de textos, e dificuldades com os conceitos e concepções básicas da matemática, são fatores que prejudicam a aprendizagem do estudante. Diariamente nos deparamos com situações em que alunos enfrentam dificuldades e não conseguem solucionar problemas simples.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),
"A busca de informações em fontes variadas é um procedimento importante para o ensino e aprendizagem de Ciências. Além de permitir ao aluno obter informações para a elaboração de suas ideias e atitudes, contribui para o desenvolvimento de autonomia com relação à obtenção do conhecimento."

Outro fator de grande relevância é que a matemática quando ensinada de uma forma que propicie ao aluno relacionar o conteúdo visto em sala de aula às atividades cotidianas de sua vida faz com que eles vejam que a matemática não é só um conteúdo abstrato. A matemática é capaz de propiciar ao aluno uma melhor interpretação e análise do mundo que o cerca, pois, a matemática está presente no estudo de outras matérias, como a análise e interpretação de gráficos.

6.1 Um Pouco da História dos Softwares de Geometria Dinâmica

A disseminação dos softwares baseados em ambientes de geometria dinâmica aconteceu no final dos anos 80, mas com o passar dos anos processos de aperfeiçoamentos vêm acontecendo. Segundo [11], os softwares de geometria dinâmica possuem um recurso, que possibilita a transformação contínua em tempo real, gerada pelo *arrastar*, sendo esta sua principal característica. Ao observar o recurso arrastar, se percebe que

este possibilita abertura de uma nova gama de aplicações e investigações educacionais, o que implica a descoberta e redescoberta de conceitos e propriedades relativos à Geometria. Em [11], afirma-se que o arrastar abre novas possibilidades para o ensino e aprendizagem de Geometria, baseado na exploração, permitindo que seus conceitos sejam mais atrativos e acessíveis, uma vez que ao arrastar um objeto na tela podem-se observar os casos da figura possíveis para um mesmo conjunto de figuras com a mesma propriedade, favorecendo o levantamento de conjecturas e hipóteses.

Entende-se então, que atividades empreendidas com esses softwares diferem na possibilidade da movimentação e/ou alteração das características dos objetos, permitindo a simulação de diferentes casos com a mesma figura, possibilitando o aluno a formular suas próprias conjecturas e tentar verificá-las. Deste modo o aluno investiga o que acontece em sua construção, levantando hipóteses: a construção permanece com as mesmas características? O fato de movimentá-la influencia em sua característica original?

6.1.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um software classificado com um software de Matemática Dinâmica. Foi desenvolvido por Markus Horenwarter e Judith Preiner, com início do projeto em 2001 na University of Salzburg. Tem continuado o desenvolvimento na Florida Atlantic University e originado para ser empregado principalmente no ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas básicas, podendo ser usado também em nível superior, neste trabalho faz-se uso de sua versão 4.2 criada em 12 de dezembro de 2012. Sendo aplicativo multiplataforma ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS disponível para download no link <http://www.geogebra.org/cms/>.

O GeoGebra reúne ferramentas tradicionais da geometria, como as mais avançadas da álgebra e do cálculo. Fornece duas vistas diferentes de um mesmo objeto matemático que podem ser visualizado na janela gráfica e na janela de álgebra. A janela de visualização é o local onde os objetos são construídos, podendo editar a cor, espessura das linhas, medir ângulos, distâncias, etc. Na janela de álgebra é possível visualizar a representação algébrica de todo objeto construído na janela visualização, e essa representação é a mais notável característica do programa. Todas essas características indicam que o GeoGebra é mais do que um software de Geometria Dinâmica,

e se destaca no campo de softwares educacionais aliando ainda à condição de software livre e multiplataforma. A versão 4.2 possui a vista CAS, associado com o sistema de computação algébrica, que permite operar simbolicamente, incluindo literais, composta de linhas que permitem que uma célula ou área de entrada, na linha de topo, e o resultado mostrado na parte inferior, a sua funcionalidade é semelhante à barra de entrada. Existe ainda uma folha de cálculo, que permite inserir não apenas números, mas também todo tipo de objetos matemáticos, suportado pelo GeoGebra (coordenadas de pontos, funções e comandos) e sendo possível o GeoGebra, assim como acontece na janela de CAS, mostra imediatamente na janela de visualização inserido numa célula.

O GeoGebra disponibiliza uma barra de entrada, que consiste em ser um ambiente reservado para escrever coordenadas, equações, comandos e funções que ao clicar *Enter* é possível ver sua representação geométrica na janela gráfica (Manual GeoGebra v. 3.2)

Entretanto, é possível construir objetos como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que suas propriedades e relações sejam preservadas. Possibilita introduzir equações de coordenadas, visualizar um lugar geométrico ao se traçar a trajetória de um ponto escolhido, facilitando a observação do comportamento das funções seno, cosseno e tangente ponto a ponto, habilitar coordenadas cartesianas e polares as que facilitam as construções. Em suma oferece uma variedade de comandos, incluindo o cálculo de derivadas e integrais.

O GeoGebra é um programa intuitivo e autoexplicativo podendo ser usado por usuários com conhecimentos avançados em informática e por iniciantes, sendo que o conhecimento matemático é o ponto fundamental de sua utilização. Levando em consideração que atividades investigativas instigam o aluno a questionamentos do tipo *o que acontece se*, o GeoGebra possui características que propiciam a criação de cenários para esse tipo de atividade, possibilitando ao aluno verificar propriedades de uma figura em processo muito rápido, levando assim o aluno a um processo de criação e exploração [10].

Em geral, o software Geogebra pode auxiliar no estudo de diversos conteúdos matemáticos, diante de sua potencialidade, destaca-se abaixo alguns dos conteúdos e conceitos que podem ser explorados por meio de seus recursos: Plano cartesiano, funções polinomiais, funções trigonométricas, círculo trigonométrico, geometria analítica, pro-

babilidade e estatística, seções cônicas, cônicas, integral e derivada, etc.

6.1.2 Considerações Finais.

Este trabalho foi feito para mostrar a utilidade da matemática na compreensão de conceitos que envolvem produção e interpretação de gráficos. Serve para mostrar a origem de certas equações e nos auxilia na hora de fazer gráficos de uma forma diferente (paramétrica ou polar). O uso do Software *GeoGebra* é um dos instrumentos para auxiliar na construção de gráficos e, no entanto, vale ressaltar, que existem outros instrumentos que não foram utilizados.

Referências

- [1] ÁVILA, G., *Cálculo 1, Funções de uma Variável*, 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1994. pp 27..
- [2] ÁVILA, G., *Cálculo 2, Funções de uma Variável*, 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995. pp 172.
- [3] DELVAL , J, *Crescer e Pensar*, POA: Artmed, 1998.
- [4] FLEMMING,D.V., GONÇALVES,M.B., *Cálculo A. Funções, Limite, Derivação, Integração.*, 5 ed. Santa Catarina: PEARSON , 1992 . pp 220.
- [5] KETI T., *Introdução a Geometria Diferencial*, 1 ed. Brasília: UnB, 1988. pp 30.
- [6] LEITHOLD, L., *O Cálculo com Geometria Analítica 2*, 3 ed. São Paulo: HARBRA, 1994. pp 789 e 821.
- [7] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER E. E MORGADO, A. C., *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*, 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1997. pp 125.
- [8] REIS, G. L. E SILVA, V.V., *Geometria Analítica*, 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. pp 19.
- [9] UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS. INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA *Revista da Olimpíada n° 5*, Goiânia: IME/UFG, 2004-v. pp 54-66.

- [10] SAVIANI, D, *Escola e Democracia*, SP: Cortez, 1987. pp 821
- [11] ZULATTO, R.B.A., *Softwares de geometria dinâmica sob a perspectiva de professores de Matemática*, In : Encontro Brasileiro de estudantes Pós-Graduação em educação matemática, 6., 2002, Campinas. Anais, Campinas, 2002a.