

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

HENRIQUE ALMEIDA LIMA

ENSINO DE MATRIZES COM ENFOQUE GEOMÉTRICO

São Luís - MA
2016

HENRIQUE ALMEIDA LIMA

ENSINO DE MATRIZES COM ENFOQUE GEOMÉTRICO

Dissertação apresentada à Coordenação Acadêmica do Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Maranhão oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito para obtenção do Título de **Mestre em Matemática**.
Orientador: Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva.

SÃO LUÍS - MA
2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Ata de Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

No dia 15 de janeiro de 2016, às 15h30min, no auditório 02 do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da UFMA, reuniram-se os membros da banca examinadora composta pelo (as) professores (as): Dr. JOÃO DE DEUS MENDES DA SILVA (Orientador), Dra. DEA NUNES FERNANDES e Dra. VALDIANE SALES ARAÚJO, designados pela Coordenação do Programa de Pós-Graduação PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, a fim de argüirem o mestrando, com o título: “**ENSINO DE MATRIZES COM ENFOQUE GEOMETRICO**”. Aberta sessão pelo presidente da mesma, coube ao candidato, na forma regimental, expor o tema de sua dissertação, dentro do tempo regulamentar, sendo em seguida questionado pelos membros da banca examinadora, tendo dado as explicações que foram necessárias. Sendo o resultado final: “ APROVADO ”.

Recomendações da Banca:

Recomendar curso, introdução e considerações finais

Banca Examinadora:

João de Deus Mendes da Silva
Prof. Dr. JOÃO DE DEUS MENDES DA SILVA (Orientador)

Dea Nunes Fernandes
Prof. Dra. DEA NUNES FERNANDES

Valdiane Sales Araujo
Prof. Dra. VALDIANE SALES ARAÚJO

Candidato:

Henrique Almeida Lima
Henrique Almeida Lima.

São Luís, 15 de janeiro de 2016.

Lima, Henrique Almeida

Ensino de matrizes com enfoque geométrico / Henrique Almeida Lima. – São Luís, 2016.

58f.

Orientador: Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Programa de Pós-Graduação PROFMAT (Mestrado profissional em matemática em rede nacional), 2016.

1. Ensino. 2. Matriz. 3. Transformações geométricas. I. Título.

CDU 514.1:37

Ao meu pai Emídio de Lima (in memoriam), que me conduziu nos primeiros passos de minha vida estudantil e no seio do lar tive contato com o saber matemático de forma simples usando nas tarefas domésticas! Neste momento de conquista, não poderia deixar de dedicar a ele, pois se hoje estou aqui, devo muitas coisas a ele e por seus ensinamentos e valores.

Agradecimentos

A todas as pessoas que me incentivam para seguir na rota do estudo.

A todos os meus colegas, professores e coordenadores do PROFMAT.

A minha querida família que apesar da distância que nos separa, sempre está perto de mim.

Ao meu orientador Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva.

E ao Todo poderoso que a todo momento está comigo.

Resumo

O objetivo deste trabalho é propor uma visão diferenciada à prática de ensino de matrizes, usando de forma clara e simples para o bom entendimento dos alunos do Ensino Médio no processo de aprendizagem de aplicações de matrizes através das transformações geométricas. O aluno poderá perceber que os aspectos geométricos das matrizes estão presentes nas tecnologias usadas em nossos dias, como por exemplo a Computação Gráfica.

Palavras-chave: Ensino, Matriz, Transformações Geométricas.

Abstract

The objective of this paper is to propose a different view to the practice of teaching arrays, using a clear and simple way for good understanding of high school students in the learning process of matrix applications through geometric transformations. Students may notice that the geometric aspects of the matrices are present in the technologies used today, such as Computer Graphics.

Keywords: Education, Matrix, Geometric Transformations.

Lista de Figuras

3.1	Plano cartesiano	7
3.2	Quadrantes do plano cartesiano	8
3.3	Segmentos orientados	8
3.4	Segmentos equipolentes	9
3.5	Vetor \overrightarrow{AB}	10
3.6	Representação de \overrightarrow{AB}	11
3.7	Representação das coordenadas do vetor \vec{v}	12
3.8	Vetores paralelos	12
3.9	Vetor oposto	13
3.10	Vetor unitário	13
3.11	Vetores ortogonais	13
3.12	Adição de vetores	14
3.13	Adição de vetores	14
3.14	Multiplicação de vetores por escalares	15
3.15	Multiplicação de vetores por escalares	16
3.16	Propriedade comutativa	17
3.17	Propriedade associativa	17
3.18	Vetores no plano	20
3.19	Coordenadas da base canônica no plano OXY	21
3.20	Combinação linear de vetores	21
3.21	Produto interno	22
3.22	Mudança de coordenada	25
3.23	Vetor \overrightarrow{OP} num sistema de eixos ortogonais.	25
3.24	Ângulo α , entre os vetores e_1 e f_1	26
3.25	Rotação de e_1 e e_2 pelo ângulo α para obter f_1 e f_2	27
3.26	Translação do ponto A	28

3.27	Translação da reta	29
3.28	Translação de polígono	30
3.29	Translação	30
3.30	$P' = T(P)$ em $O'X'Y'$ e P em OXY , tem coordenadas iguais	32
3.31	Rotação	33
3.32	Triângulo OPQ	33
3.33	Triângulo $OP'Q'$	34
3.34	A rotação de centro O e ângulo α leva P em P'	35
3.35	Exemplo de rotação em torno da origem	37
3.36	Imagem refletida por um eixo de simetria	38
3.37	Imagem refletida com uma perpendicular ao eixo	38
3.38	Simetria central	39
3.39	Reflexão em relação a origem	39
3.40	Reflexão em relação a uma reta que passa na origem	40
3.41	A reflexão em torno de r leva OX em OX_1 e OY em OY_1	43
3.42	Exemplo de reflexão	45
3.43	Rotação em torno de um ponto qualquer	45
3.44	Exemplo de rotação em torno de um ponto qualquer	48
3.45	Reflexão em torno da reta $y = ax + b$	49
3.46	Exemplo de reflexão do ponto P em torno da reta r	51

Sumário

Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
1.1 Organização do Trabalho	3
2 Um Olhar para os Livros Didáticos	5
3 A Sequência Didática	7
3.1 Sistema de Coordenadas Cartesianas	7
3.2 Segmentos Orientados	8
3.3 Vetores	9
3.4 Notações para vetores	10
3.5 Casos particulares de vetores	12
3.6 Operações com vetores	14
3.7 Propriedades das operações com vetores	16
3.8 Combinação linear de vetores	20
3.9 Produto interno	22
3.10 Transformações geométricas	24
3.11 Composição de transformações geométricas	45
4 Considerações Finais	52
Referências Bibliográficas	54

Capítulo 1

Introdução

O avanço da tecnologia em nosso tempo tem propiciado conforto e melhoria de vida às pessoas. O uso cada vez mais de aparelhos sofisticados que ajudam nas tarefas do dia a dia e no lazer tais como computadores, celulares (smartphones), televisores (smart tv), GPS etc. comprovam essa realidade. A escola de hoje é vista como fator social sob influência da modernidade, reelaborando e empregando conhecimentos socialmente produzidos.

O Ensino de Matemática direciona o aluno a compreender o mundo a sua volta, estimulando-lhe sua curiosidade, criatividade, seu espírito crítico e, desenvolvendo sua capacidade de raciocínio lógico diante da resolução de problemas. Cabe à escola, aproximar o ensino da matemática ao cotidiano do aluno.

Com base nos avanços provenientes da tecnologia, próprios da pós-modernidade, e observando que atualmente o ensino do componente curricular Matemática contribuiu pouco para a formação do educando. A partir da realidade exposta acreditamos ser necessário buscar os objetivos expressos no Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio - PCNEM.

Este propôs o redesenho curricular, em desenvolvimento nas escolas por meio do Programa Ensino Médio Inovador - ProEMI, que tem por objetivo apoiar e fortalecer o desenvolvimento de propostas curriculares inovadoras nas escolas de Ensino Médio, buscando garantir a formação integral com a inserção de atividades que tornem o currículo mais dinâmico, atendendo às expectativas dos estudantes e às demandas da sociedade contemporânea.

Com as mudanças propostas ao Ensino Médio no que concerne ao componente curricular Matemática, acredita-se que esse ensino inovador se instale na escola e se adeque aos tempos modernos. Seguindo essa vertente, propomos um novo desafio: lecionar um tópico curricular sobre transformações geométricas com enfoque na translação, rotação e reflexão, através de matrizes.

No presente trabalho abordaremos algumas relações entre matrizes e suas características geométricas, atribuindo as matrizes um enfoque geométrico que possibilite ao aluno perceber a importância prática no seu dia a dia, no uso das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TICs). Em sala de aula, muitas vezes, o professor se depara com algumas indagações dos alunos do tipo: “Como vou usar esse assunto na minha vida?”, ou então, “para que isso serve no meu dia a dia”?

Ao observar esses questionamentos, percebemos que o estudo de matrizes não é um conteúdo que tem grandes dificuldades para o aluno, porém, muitas vezes as técnicas operatórias de adição e multiplicação são comentadas de forma superficial e o material didático, em sua maioria, não aborda exemplos e textos mais dinâmicos.

As transformações geométricas são indicadas como tema das últimas séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio pelos PCNs, porém, poucos livros didáticos abordam sobre o assunto. Durante nossa pesquisa, deparamo-nos com o livro de Matemática do Ensino Médio (DANTE, 2014) que retrata de forma superficial uma abordagem sobre matrizes usando transformações geométricas.

Transformações estas que são aplicadas em novas tecnologias como a Computação Gráfica, contribuindo para melhor compreensão no uso de matrizes com aplicação geométrica. Com isso, a escola deve propiciar ambiente adequado para o desenvolvimento de novos meios de aprendizado, usando *softwares* de Geometria Dinâmica, como por exemplo, o Geogebra, no intuito da visualização e manipulação geométrica e algébrica das transformações geométricas.

O aluno ao perceber essa utilização tecnológica no ensino-aprendizado de matrizes se sentirá mais motivado a explorar meios, com os quais aprenda a lidar com novas tecnologias.

De acordo com D'AMBRÓSIO (1996, p. 80),

“Estamos entrando na era do que se costuma chamar a “sociedade do conhecimento”. A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto, sobretudo, ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de se atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro”. (D’AMBRÓSIO, 1996, p. 80).

Com isso percebemos que não é mais possível continuar utilizando métodos convencionais de estudo, e sim que devemos utilizar as novas tecnologias de informação e comunicação para ter êxito com o processo de aprendizado dos alunos.

Leite *et al* (2000) também evidencia o papel da escola e do professor como tendo o grande desafio de trabalhar em busca da formação de cidadãos aptos com a utilização da tecnologia no seu cotidiano de forma crítica e criativa.

1.1 Organização do Trabalho

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos. No capítulo introdutório, apresentamos as razões e as motivações que nos levaram a desenvolver este trabalho com base na proposta do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio - PCNEM, através de um Ensino Médio Inovador.

No segundo capítulo, apresentamos análise de alguns livros didáticos, dando fundamental importância para um bom desempenho no processo de ensino e aprendizagem, devido a falta de materiais didáticos que possam ajudar na pesquisa e ampliação de conhecimento do educando. Constatamos também que a maioria dos livros didáticos analisados desenvolvem apenas os aspectos algébricos das matrizes e poucos livros abordam o enfoque geométrico dado as matrizes.

Uma proposta de sequência didática é apresentada no terceiro capítulo, observamos, primeiramente, o sistema de coordenadas cartesianas, em seguida, definimos vetores, bem como sua notação, operações e propriedades. Abordamos as combinações lineares de vetores e o produto interno de forma algébrica e geométrica. Na sequência do capítulo terceiro, desenvolvemos as transformações geométricas com as mudanças de coordenadas, translação, rotação e reflexão.

Por fim, no quarto capítulo, destinado às considerações finais, apresentamos uma síntese da proposta apresentada e algumas considerações finais, que pretendem servir de embasamento didático para futuros trabalhos.

Um Olhar para os Livros Didáticos

O livro didático exerce papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que a realidade das escolas em nosso país é de extrema carência no que se referem aos recursos didáticos. O professor não dispõe, no seu cotidiano escolar, de diversidade de materiais para trabalhar em suas aulas. O que, geralmente, se apresenta ao docente é uma realidade com total ausência de outros livros, além do livro didático, ausência de material impresso (a escola não dispõe de máquinas de xérox), laboratórios de informática etc. Além disso, os livros didáticos, em sua maioria, não abordam o conteúdo *aplicações geométricas das matrizes*. Ou seja, o aluno não tem acesso à literatura do referido conteúdo. Dificultando assim o aprendizado, o conhecimento acerca das matrizes em suas aplicações geométricas.

A partir desse fato, realizamos análise de alguns livros didáticos a fim de examinar, neles, como o estudo de matrizes vem sendo trabalhado em sala de aula e também verificar suas possíveis aplicações geométricas.

O primeiro livro analisado *Novo Olhar-Matemática* (SOUZA, 2013), do segundo ano do Ensino Médio, editora FTD, adotado pelo Plano Nacional do Livro Didático - PNLD, para compor o triênio 2015, 2016, 2017, aborda em sua terceira unidade o conteúdo em questão. Essa unidade é dividida em dois capítulos: Matrizes e Determinantes, no primeiro; Sistemas Lineares, no segundo. A unidade é introduzida por um texto sobre *pixel* (imagem digital) e no final do capítulo, o autor apresenta outro texto com uma visão mais profunda sobre esse mesmo assunto, porém, sem nenhum estudo matemático. Souza (2013) destaca a importância das matrizes na computação gráfica. As operações das ma-

trizes são citadas de forma algébrica. No entanto, utiliza apenas um exercício resolvido sobre transformações geométricas, usando rotação.

O segundo livro analisado *Matemática Ensino Médio* (SMOLE; DINIZ, 2010), do segundo ano do Ensino Médio, editora Saraiva, 6^a edição, tem na sua quarta parte, na unidade treze o assunto de matrizes. As matrizes tem suas propriedades e operações apresentadas de forma algébrica. A referida unidade aproxima as matrizes da Computação Gráfica e relata sua importância nos bancos de dados, porém apresenta um único texto no final da unidade sobre aplicação geométrica da matrizes mencionando translação, rotação e reflexão sem nenhum cálculo detalhado.

O terceiro livro analisado *Matemática Ensino Médio* (DANTE, 2014), do segundo ano do Ensino Médio, editora Ática, foi o que mais apresentou aplicações geométricas das matrizes, abordando de maneira simples *rotação, reflexão, escala e translação*. O capítulo que se refere as matrizes tem no seu final uma unidade sobre aplicações de matrizes, destinando nove páginas para apresentar de forma simplificada as transformações geométricas das matrizes.

Capítulo 3

A Sequência Didática

3.1 Sistema de Coordenadas Cartesianas

Em sua obra *Géométrie* (1637), o matemático René Descartes formalizou o conceito de sistema de coordenadas. Temos como principal objetivo de um sistema de coordenadas a determinação de um ponto através de um conjunto de dados apresentados.

Ao fixarmos no plano cartesiano dois eixos reais Ox e Oy perpendiculares entre si no ponto O , podemos determinar um ponto no plano. Esse sistema de eixos é conhecido como **sistema cartesiano ortogonal** de coordenadas, onde o eixo Ox e Oy são respectivamente o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas. O ponto O é a origem do sistema.

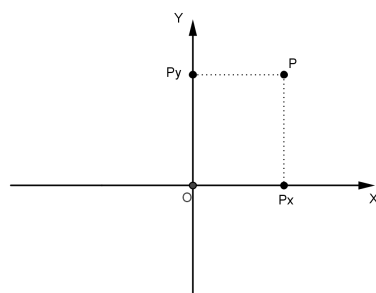


Figura 3.1: Plano cartesiano

Destarte, podemos associar a cada ponto P do plano um par ordenado de números reais. Assim a intersecção destas retas com os eixos determinam as coordenadas (x, y) do ponto P ; denotamos por $P = (x, y)$. Os eixos coordenados separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas quadrantes.

No primeiro quadrante temos: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

No segundo quadrante temos: $x \leq 0$ e $y \geq 0$.

No terceiro quadrante temos: $x \leq 0$ e $y \leq 0$

No quarto quadrante temos: $x \geq 0$ e $y \leq 0$

Esses quadrantes devem ser enumerados conforme a figura a seguir:

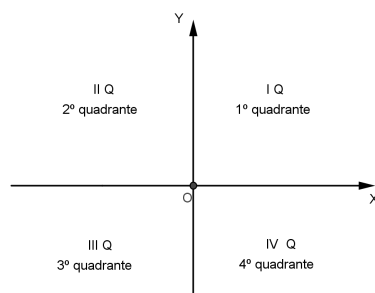


Figura 3.2: Quadrantes do plano cartesiano

Nota

1. $O = (0, 0)$ origem do sistema cartesiano.
2. $Px = (x, 0)$ projeção ortogonal de P sobre o eixo das abscissas
3. $Py = (0, y)$ projeção ortogonal de P sobre o eixo das ordenadas

3.2 Segmentos Orientados

Segmento orientado é um segmento de reta que liga dois pontos do plano ou do espaço tridimensional, um ponto inicial (origem) e um ponto final (extremidade).

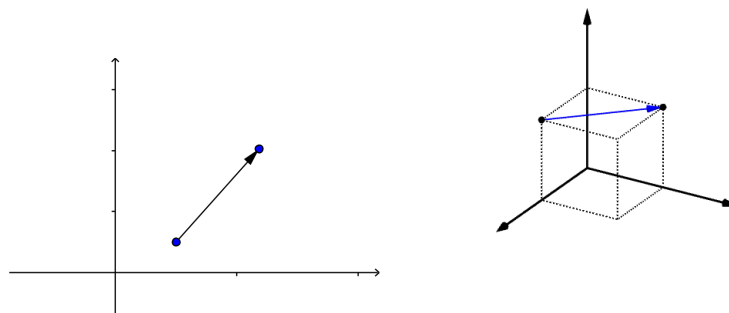


Figura 3.3: Segmentos orientados

Podemos definir uma relação de equivalência entre dois segmentos orientados.

Diremos que dois segmentos orientados se relacionam se eles tem a mesma direção (está contido nas retas paralelas), o mesmo sentido (apontar para o mesmo lado), e a mesma norma (mesmo comprimento).

Considerando os segmentos orientados \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} e \overrightarrow{EF} , temos as seguintes propriedades:

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (reflexiva)
2. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (simétrica)
3. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ (transitiva)

Ao compararmos dois segmentos orientados, não nulos, chamamos de **equipolentes** se tiverem a mesma direção, mesmo sentido e mesma norma.

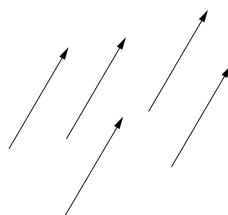


Figura 3.4: Segmentos equipolentes

Observamos que as relações reflexiva, simétrica e transitiva são relações de equivalência, podemos dizer que as equipolências são relações de equivalência.

Esta relação de equivalência divide (ou particiona) o conjunto dos segmentos orientados em subconjuntos que são chamados **classes de equivalência** ou **classes de equipolência**.

3.3 Vetores

Certas grandezas são determinadas apenas por um número real, acompanhado de uma unidade adequada. Essas grandezas são chamadas de **escalares**. Por exemplo: *Comprimento, área, volume, massa*.

Já, outras grandezas precisam mais do que seu módulo, ou seja, do número com sua unidade correspondente, para ficarem completamente definidas.

Essas grandezas são chamadas de **vetoriais**, que se caracterizam pelo seu módulo (ou comprimento ou intensidade), sua direção e seu sentido. Por exemplo: *Força*, *velocidade*, *aceleração*.

Um vetor é um segmento de reta orientado que vai da origem até uma extremidade final, ou seja, é um representante da classe dos segmentos orientados equipolentes de um segmento orientado qualquer. Por exemplo: a soma do ponto A com o vetor v é o ponto B

$$A + \vec{v} = B$$

ou

$$\vec{v} = B - A$$

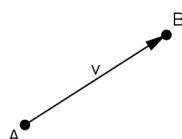


Figura 3.5: Vetor \overrightarrow{AB}

onde A é a origem e B é a extremidade do vetor.

3.4 Notações para vetores

Existem várias formas de representar vetores. Podemos escrever vetores de \mathbb{R}^n usando a notação $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dizemos que esta é a forma de ênupla.

Em álgebra linear, os vetores são escritos como matriz linha, que é uma matriz $1 \times n$, isto é, uma matriz que consiste de uma única linha de n elementos.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Ou podemos representar o vetor como uma matriz coluna $m \times 1$, consistente de uma única coluna de m elementos.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

No nosso estudo decidimos usar o vetor coluna composto de dois elementos,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que representa as coordenadas (x, y) de um ponto no plano cartesiano XOY . Pois entendemos que é suficiente para melhor compreensão do aluno acerca dos conteúdos exigidos no ensino médio.

Ao considerarmos dois vetores, podemos dizer que são equipolentes, quando satisfazem às seguintes propriedades:

1. tem o mesmo comprimento;
2. são paralelos ou colineares;
3. tem o mesmo sentido.

Sendo A e B pontos no plano. O vetor $v = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB . Cada segmento equipolente a AB é um representante do vetor \overrightarrow{AB} .

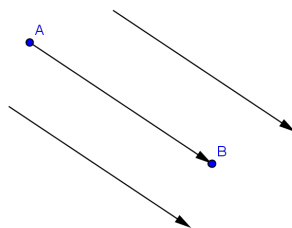


Figura 3.6: Representação de \overrightarrow{AB}

No plano os vetores são operados conforme suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Definimos assim: Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, os números $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Ou escrevemos dessa forma: $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

Teremos um exemplo a seguir:

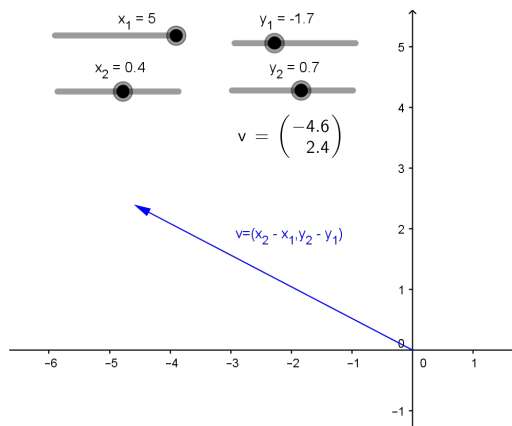


Figura 3.7: Representação das coordenadas do vetor \vec{v}

3.5 Casos particulares de vetores

1. Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são *paralelos*, se tiverem a mesma direção e são indicados por $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

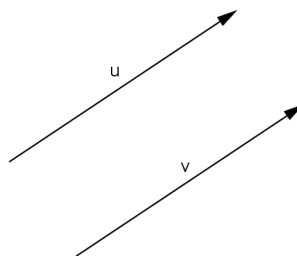


Figura 3.8: Vetores paralelos

2. Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são *iguais*, se tiverem o módulo, a direção e o sentido iguais, indica-se por $\vec{u} = \vec{v}$.

3. O vetor *zero* (ou vetor nulo), representado por qualquer ponto do plano (ou do espaço), indica-se por $\vec{0}$ ou \overrightarrow{AA} (a origem coincide com a extremidade).
4. A cada vetor não-nulo \vec{v} corresponde um vetor *oposto* $-\vec{v}$, de mesmo módulo e mesma direção de \vec{v} , porém, de sentido contrário.

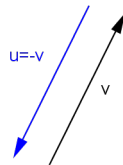


Figura 3.9: Vetor oposto

5. Um vetor \vec{u} é *unitário* se $|\vec{u}| = 1$. A cada vetor \vec{v} , $\vec{v} \neq \vec{0}$, podemos associar dois vetores unitários de mesma direção de \vec{v} : \vec{u} e $-\vec{u}$. Na figura 3.10, temos $|\vec{v}| = 4$ e

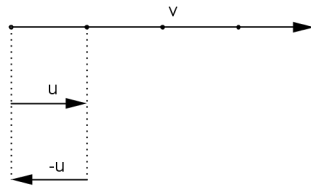


Figura 3.10: Vetor unitário

$|\vec{u}| = |-\vec{u}| = 1$. O vetor \vec{u} que tem o mesmo sentido de \vec{v} é chamado de *versor* de \vec{v} , então $\text{vers}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{4}$

6. Dois vetores \vec{u} e \vec{v} (figura 3.11) são ortogonais, e indica-se por $\vec{u} \perp \vec{v}$, se algum representante de \vec{u} formar ângulo reto com algum representante de \vec{v} .

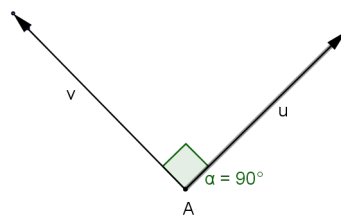


Figura 3.11: Vetores ortogonais

3.6 Operações com vetores

1. Adição de vetores

Consideremos os vetores \vec{u} e \vec{v} cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ queremos encontrar. Tomemos um ponto A qualquer (figura 3.12) como origem, e tracemos um representante do vetor \vec{u} pelo segmento orientado AB . Pela extremidade B traçamos o segmento orientado BC representante do vetor \vec{v} e da origem A até a extremidade C , temos uma representação do vetor soma de \vec{u} e \vec{v} , isto é, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ ou $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

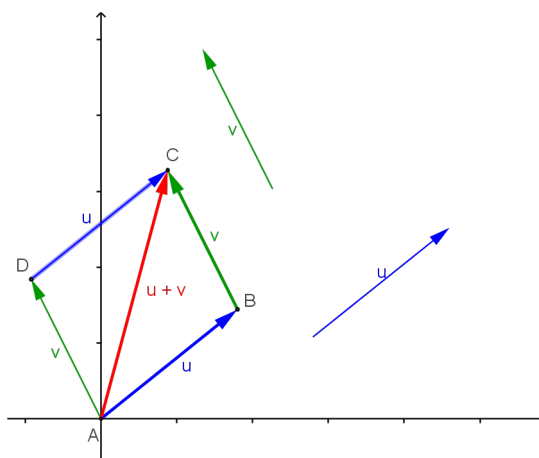


Figura 3.12: Adição de vetores

Podemos também realizar a adição de vetores através da representação por meio de coordenadas (figura 3.13) em relação a um sistema de eixos ortogonais.

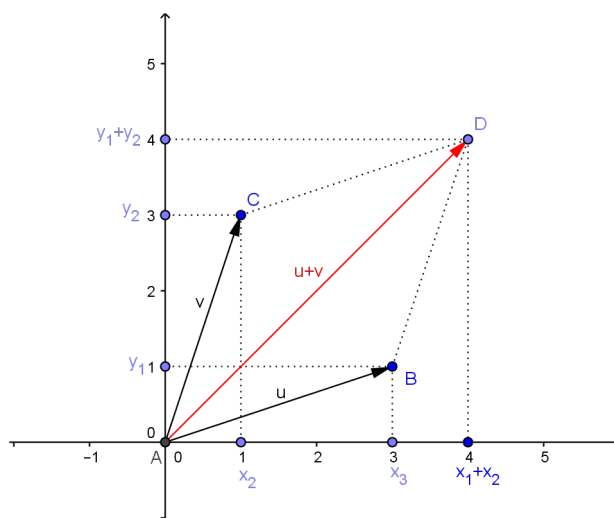


Figura 3.13: Adição de vetores

Assim, temos: $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ vetores do plano expressos em termos de coordenadas em relação ao eixo ortogonais OXY , então: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$.

2. Multiplicação de vetores por escalares

Chama-se *produto do número real α pelo vetor \vec{v}* , o vetor $\alpha\vec{v}$, sendo que α é um número real e $\alpha \neq 0$ e um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$.

- (a) módulo: $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, isto é, o comprimento de $\alpha\vec{v}$ é igual ao comprimento de \vec{v} multiplicado por $|\alpha|$;
- (b) direção: $\alpha\vec{v}$ é paralelo a \vec{v} ;
- (c) sentido: $\alpha\vec{v}$ e \vec{v} tem o mesmo sentido se $\alpha > 0$, e contrário se $\alpha < 0$. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

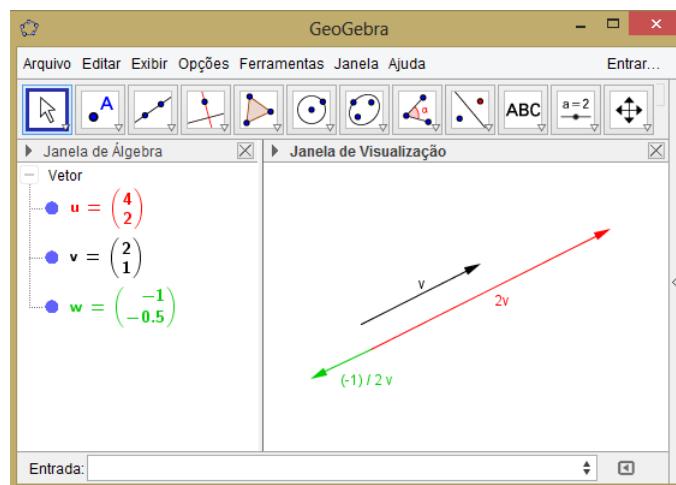


Figura 3.14: Multiplicação de vetores por escalares

Podemos usar coordenadas na multiplicação de vetores por escalar, assim temos que as coordenadas do vetor $\alpha\vec{v}$ são obtidas das coordenadas de \vec{v} multiplicando pelo número alpha(chamado aqui de escalar).

Sendo assim, temos que $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha\vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$

A figura 3.15 nos mostra um exemplo disso:

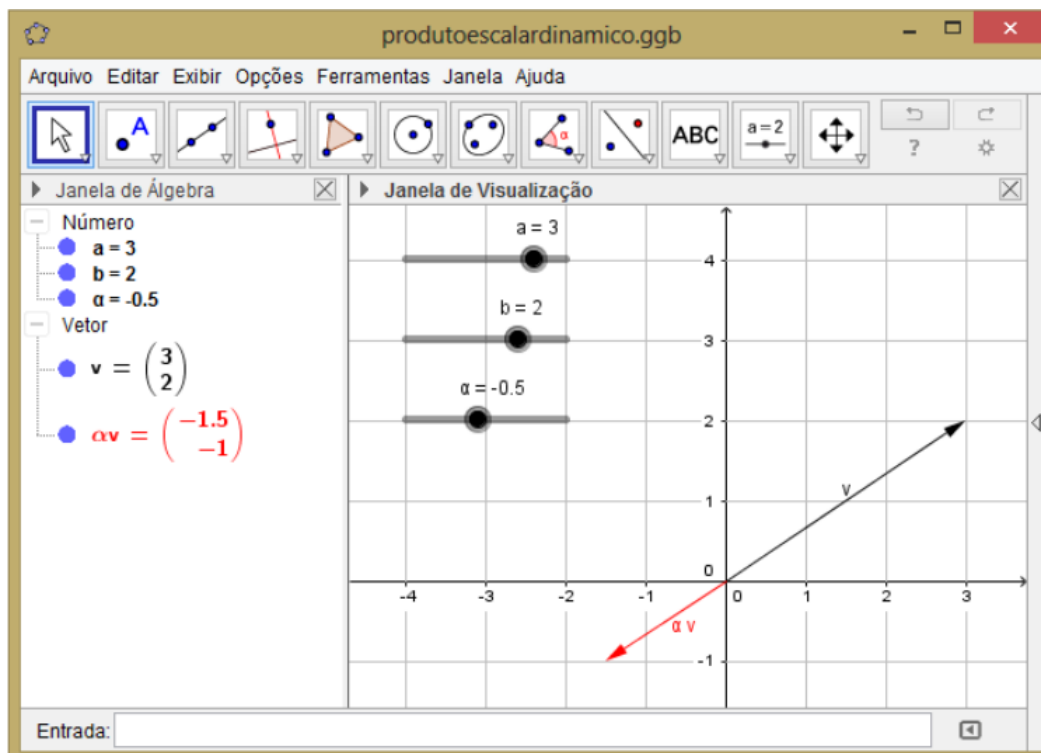


Figura 3.15: Multiplicação de vetores por escalares

3.7 Propriedades das operações com vetores

Agora usaremos as propriedades das operações com vetores na forma matricial.

- Propriedades da soma de vetores

Considere os vetores $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ quaisquer e α e β números reais, temos então:

1. Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \vec{v} + \vec{u}$$

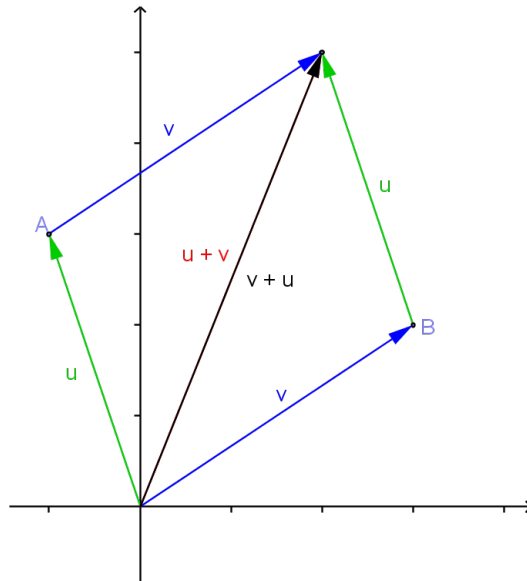


Figura 3.16: Propriedade comutativa

2. Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 \\ (y_1 + y_2) + y_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) \\ y_1 + (y_2 + y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \right) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})
 \end{aligned}$$

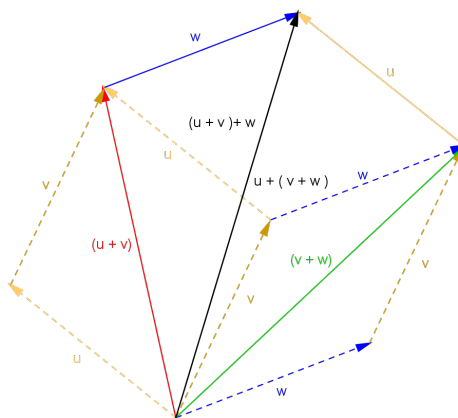


Figura 3.17: Propriedade associativa

3. Existe o elemento neutro aditivo

Seja $\vec{0} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ este elemento e $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + a \\ y_1 + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + x_1 \\ b + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

então, temos:

$$x_1 = x_1 + a \Rightarrow a = 0$$

$$y_1 = y_1 + b \Rightarrow b = 0$$

portanto, $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. Existe o elemento inverso aditivo

Seja $\vec{r} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ este elemento e $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, tal que $\vec{u} + \vec{r} = \vec{r} + \vec{u} = \vec{0}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + a \\ y_1 + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + x_1 \\ b + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então, temos:

$$x_1 + a = 0 \Rightarrow a = -x_1$$

$$y_1 + b = 0 \Rightarrow b = -y_1$$

portanto, $\vec{r} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix}$.

Assim $\vec{r} = (-1)\vec{u} \Rightarrow \vec{r} = -\vec{u}$

5. Existência de inversos aditivos

Para cada vetor \vec{u} existe um único vetor $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

$$\text{Sendo } -\vec{u} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} \text{ temos, } \vec{u} + (-\vec{u}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1 \\ y_1 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

• Propriedades da multiplicação de vetores por escalares

Considerando $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e α e β números reais, temos as propriedades a seguir:

1. Associativa: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

$$\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha \left(\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta y_1 \end{bmatrix} = \alpha\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = (\alpha\beta)\vec{u}$$

2. Distributiva: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ e $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \alpha \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1 + x_2) \\ \alpha(y_1 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha y_1 + \alpha y_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha y_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\vec{u} &= (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta)x_1 \\ (\alpha + \beta)y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \alpha y_1 + \beta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \beta y_1 \end{bmatrix} = \\ &= \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \end{aligned}$$

3. Existência de elemento neutro multiplicativo: o número $1 \in \mathbb{R}$ é tal que $1\vec{u} = \vec{u}$.

$$1 \cdot \vec{u} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \vec{u}$$

3.8 Combinação linear de vetores

Sejam dois vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 não-paralelos, representados com origem no ponto O , e r_1 e r_2 retas contendo estes representantes, temos:

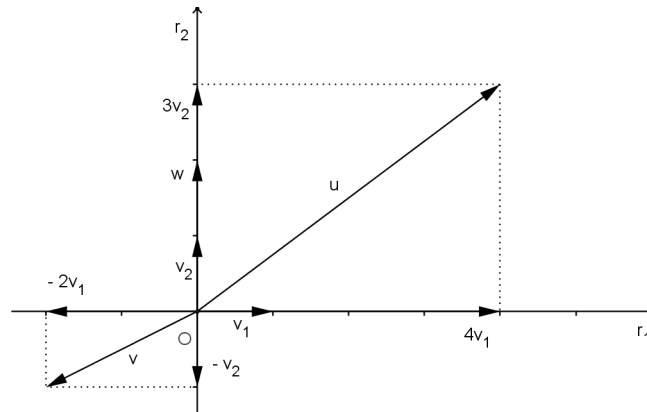


Figura 3.18: Vetores no plano

Através da figura acima, os vetores \vec{u}, \vec{w} e \vec{v} são expressos em função de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , e temos que:

$$\vec{u} = 4\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$$

$$\vec{w} = 0\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

$$\vec{v} = -2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

A figura nos mostra que, dados dois vetores quaisquer \vec{v}_1 e \vec{v}_2 não-paralelos, para cada vetor \vec{v} representado no mesmo plano de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \quad (3.1)$$

Quando o vetor \vec{v} é expresso como em (3.1), diz-se que \vec{v} é *combinação linear* de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , o conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é chamado *base* no plano.

Os números a_1 e a_2 da igualdade (3.1) são chamados *componentes* ou *coordenadas* de \vec{v} na base B e o vetor \vec{v} pode ser representado por $\vec{v}_B = (a_1, a_2)$.

As bases mais utilizadas são as *ortonormais*. Assim, sendo uma base $\{e_1, e_2\}$ *ortonormal* se seus vetores forem $e_1 \perp e_2$ (ortogonais) e $|e_1| = |e_2| = 1$ (unitários). Então, temos:

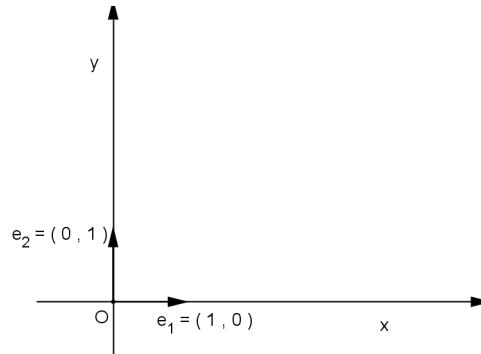


Figura 3.19: Coordenadas da base canônica no plano OXY

Associando um versor a cada eixo, ou seja: o versor e_1 no eixo dos x e o versor e_2 no eixo dos y , conforme figura anterior, temos o par ordenado de versores (e_1, e_2) constitui o que chamamos de BASE do plano \mathbb{R}^2 , ou seja, base do plano cartesiano OXY . Assim no sistema OXY temos que a base $C = \{e_1, e_2\}$ chamada canônica, com $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ e cujas componentes do vetor \vec{v} nessa base são x e y , sendo a primeira chamada *abscissa* de \vec{v} e a segunda *ordenada* de \vec{v} .

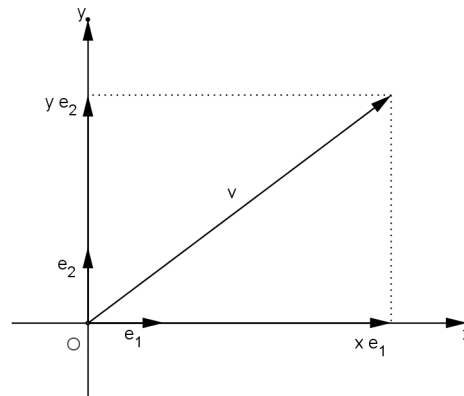


Figura 3.20: Combinação linear de vetores

Assim, existe uma só dupla de números x e y , tal que

$$\vec{v} = xe_1 + ye_2$$

podemos representar o vetor \vec{v} , por

$$\vec{v} = (x, y)$$

3.9 Produto interno

1. Norma de um vetor

Considerando um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, sua norma (comprimento) é designada por $\|\vec{v}\|$ que é o módulo do segmento AB

$$\|\vec{v}\| = |AB| = d(A, B)$$

Se o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, sendo O a origem do sistema cartesiano ortogonal OXY do plano e $P = (x, y)$, temos:

$$\|\vec{v}\| = |OP| = d(O, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. Produto interno (produto escalar)

Observando a figura a seguir, temos:

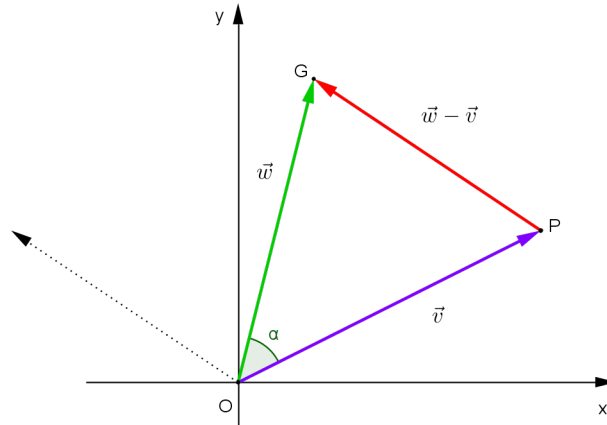


Figura 3.21: Produto interno

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OG}$ vetores não-nulos, então $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP}$, o que implica $\overrightarrow{PG} = \vec{w} - \vec{v}$. Sendo $\alpha \angle(\vec{v}, \vec{w})$ e aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo $\triangle OPG$, temos:

$$\|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha$$

$$(\vec{w} - \vec{v})(\vec{w} - \vec{v}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha$$

$$\vec{w}\vec{w} - 2\vec{w}\vec{v} + \vec{v}\vec{v} = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha$$

$$\|\vec{w}\|^2 - 2\vec{w}\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha$$

$$-2\vec{w}\vec{v} = -2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha$$

$$\vec{w}\vec{v} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha$$

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha$$

Considerando agora as coordenadas do ponto $P = (a, b)$ e ponto $G = (\alpha, \beta)$, temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{PG} &= \vec{w} - \vec{v} \\ \overrightarrow{PG} &= (\alpha, \beta) - (a, b) \\ \overrightarrow{PG} &= (\alpha - a, \beta - b)\end{aligned}$$

E novamente pela Lei dos Cossenos no triângulo $\triangle OPG$, temos:

$$\|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha$$

Como $\vec{w} - \vec{v} = (\alpha - a, \beta - b)$, obtemos

$$\|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = (\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2$$

$$\|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = \alpha^2 - 2\alpha a + a^2 + \beta^2 - 2\beta b + b^2$$

$$\|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = (a^2 + b^2) + (\alpha^2 + \beta^2) - 2(\alpha a + \beta b)$$

Daí:

$$2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{w} - \vec{v}\|^2$$

$$2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha = (a^2 + b^2) + (\alpha^2 + \beta^2) - (a^2 + b^2) - (\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha a + \beta b)$$

$$2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha = 2(\alpha a + \beta b)$$

$$\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha = \alpha a + \beta b$$

Portanto,

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha = \alpha a + \beta b$$

Propriedades do produto interno

Sejam \vec{v} , \vec{u} e \vec{w} vetores arbitrários do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

(a) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$

(b) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

(c) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

(d) $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(e) $\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(f) $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$

(g) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

3.10 Transformações geométricas

A geometria é o ramo da matemática que estuda não somente as formas e tamanhos das figuras, mas também como manipular e transformar estas figuras.

A matemática, possui regras especiais que transformam pontos do plano(ou do espaço) em novos pontos do plano(ou do espaço) que são chamados **transformações**.

Trataremos funções como transformações no plano, sendo que tais funções provocam alterações em figuras ou regiões.

Define-se transformações geométricas como “Uma **transformação** T no plano Π é uma função $T : \Pi \mapsto \Pi$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano, chamado sua **imagem** por T ” (LIMA, 2011, p.137)

Assim temos que transformação geométrica é uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de modo que, a partir de uma figura geométrica original se forma outra figura geometricamente igual ou semelhante à primeira.

As transformações geométricas envolvem operações com vetores e matrizes, do tipo soma e multiplicação, além de conhecimento básicos de álgebra e geometria.

Em muitas aplicações da computação gráfica, há a necessidade de alterar e manipular o conteúdo de uma cena. Animações, por exemplo, são produzidas pelo movimento da câmera ou dos objetos presentes na cena. Mudanças em orientação, tamanho e formato estão ligadas às transformações geométricas.

No nosso dia a dia temos vários exemplos de transformações geométricas isométrica que aplicada a uma figura geométrica, mantém as distâncias entre pontos. Ou seja, os segmentos da figura transformada são geometricamente iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido.

As transformações geométricas básicas são *translação*, *reflexão*, *rotação* e *escalamento*. São estas as transformações geométricas que abordaremos a seguir.

1. Mudança de coordenadas

Para mudar a coordenada inicial (x, y) de um ponto ou objeto no sistema de eixos ortogonais OXY para outra coordenada final (x', y') de eixos ortogonais $O'X'Y'$ no plano, é necessário ter formulas para realizar essa mudança. Teremos:

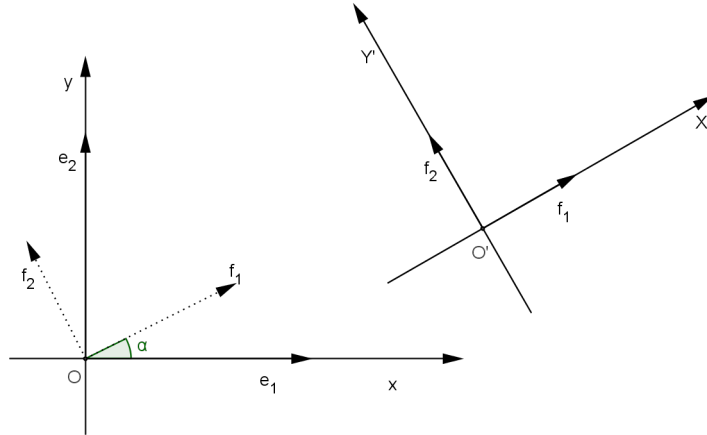


Figura 3.22: Mudança de coordenada

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano, sendo $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, vetores unitários dos eixos OX e OY respectivamente. Sendo $P = (x, y)$ é equivalente a afirmar que: $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$. Observamos que $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1$ e $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$, teremos:

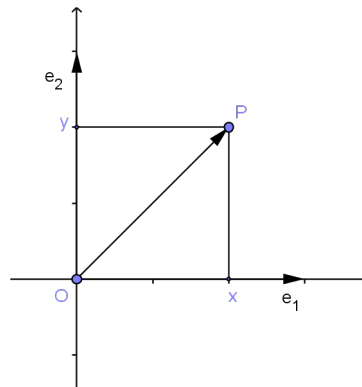


Figura 3.23: Vetor \overrightarrow{OP} num sistema de eixos ortogonais.

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OP}, e_1 \rangle &= \langle xe_1 + ye_2, e_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{OP}, e_1 \rangle &= \langle xe_1, e_1 \rangle + \langle ye_2, e_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{OP}, e_1 \rangle &= x\langle e_1, e_1 \rangle + y\langle e_2, e_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{OP}, e_1 \rangle &= x \cdot 1 + y \cdot 0 \\ \langle \overrightarrow{OP}, e_1 \rangle &= x \end{aligned}$$

e

$$\langle \overrightarrow{OP}, e_2 \rangle = \langle xe_1 + ye_2, e_2 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{OP}, e_2 \rangle = \langle xe_1, e_2 \rangle + \langle ye_2, e_2 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{OP}, e_2 \rangle = x\langle e_1, e_2 \rangle + y\langle e_2, e_2 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{OP}, e_2 \rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1$$

$$\langle \overrightarrow{OP}, e_2 \rangle = y$$

Então as coordenadas de um ponto P num sistema de eixos ortogonais OXY são os produtos internos do vetor \overrightarrow{OP} pelos vetores unitários dos eixos:

$$x = \langle \overrightarrow{OP}, e_1 \rangle \text{ e } y = \langle \overrightarrow{OP}, e_2 \rangle$$

Sendo um outro sistema de eixos ortogonais no plano $O'X'Y'$ e vetores unitários de $O'X'$ e $O'Y'$ que são f_1 e f_2 respectivamente. Sejam ainda (a, b) as coordenadas do ponto O' no sistema OXY e α o ângulo de giro do eixo OX no sentido anti-horário (positivo) para coincidir com $O'X'$. Temos que α é o ângulo de e_1 para f_1 . Assim, encontrando f_1 :

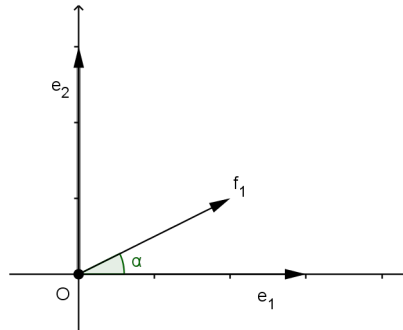


Figura 3.24: Ângulo α , entre os vetores e_1 e f_1

Temos então:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{y}{f_1} & \cos \alpha &= \frac{x}{f_1} \\ y &= f_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha & x &= f_1 \cdot \cos \alpha \\ y &= 1 \cdot \operatorname{sen} \alpha & x &= 1 \cdot \cos \alpha \\ y &= \operatorname{sen} \alpha & x &= \cos \alpha \end{aligned}$$

Sendo f_1 uma combinação linear de x e y , temos:

$$f_1 = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

$$f_1 = \cos \alpha e_1 + \operatorname{sen} \alpha e_2$$

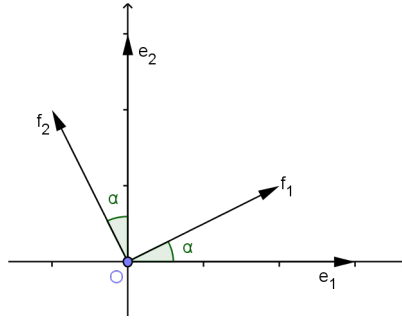


Figura 3.25: Rotação de e_1 e e_2 pelo ângulo α para obter f_1 e f_2

Temos então:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{x}{f_2} & \cos \alpha &= \frac{y}{f_2} \\ x &= f_2 \cdot (-\operatorname{sen} \alpha) & y &= f_2 \cdot \cos \alpha \\ x &= 1 \cdot (-\operatorname{sen} \alpha) & y &= 1 \cdot \cos \alpha \\ x &= -\operatorname{sen} \alpha & y &= \cos \alpha \end{aligned}$$

Sendo f_2 uma combinação linear de x e y , temos:

$$f_2 = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

$$f_2 = -\operatorname{sen} \alpha e_1 + \cos \alpha e_2$$

Temos que $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = (x - a)e_1 + (y - b)e_2$. Segue-se que:

$$x' = \langle \overrightarrow{O'P}, f_1 \rangle = \langle (x - a)e_1 + (y - b)e_2, \cos \alpha e_1 + \operatorname{sen} \alpha e_2 \rangle, \text{ ou seja,}$$

$$x' = \langle (x - a)e_1, \cos \alpha e_1 + \operatorname{sen} \alpha e_2 \rangle + \langle (y - b)e_2, \cos \alpha e_1 + \operatorname{sen} \alpha e_2 \rangle$$

$$x' = (x - a)\langle e_1, \cos \alpha e_1 + \operatorname{sen} \alpha e_2 \rangle + (y - b)\langle e_2, \cos \alpha e_1 + \operatorname{sen} \alpha e_2 \rangle$$

$$x' = \langle (x - a)(\cos \alpha e_1 + \operatorname{sen} \alpha e_2, e_1) \rangle + \langle (y - b)(\cos \alpha e_1 + \operatorname{sen} \alpha e_2, e_2) \rangle$$

$$x' = (x - a)(\cos \alpha \langle e_1, e_1 \rangle + \operatorname{sen} \alpha \langle e_2, e_1 \rangle) + (y - b)(\cos \alpha \langle e_1, e_2 \rangle + \operatorname{sen} \alpha \langle e_2, e_2 \rangle)$$

$$x' = (x - a)\cos \alpha + (y - b)\operatorname{sen} \alpha$$

e

$$y' = \langle \overrightarrow{O'P}, f_2 \rangle = \langle (x - a)e_1 + (y - b)e_2, -\operatorname{sen} \alpha e_1 + \cos \alpha e_2 \rangle, \text{ ou seja,}$$

$$y' = \langle (x - a)e_1, -\operatorname{sen} \alpha e_1 + \cos \alpha e_2 \rangle + \langle (y - b)e_2, -\operatorname{sen} \alpha e_1 + \cos \alpha e_2 \rangle$$

$$y' = (x - a)\langle e_1, -\operatorname{sen} \alpha e_1 + \cos \alpha e_2 \rangle + (y - b)\langle e_2, -\operatorname{sen} \alpha e_1 + \cos \alpha e_2 \rangle$$

$$y' = \langle (x - a)(-\operatorname{sen} \alpha e_1 + \cos \alpha e_2, e_1) \rangle + \langle (y - b)(-\operatorname{sen} \alpha e_1 + \cos \alpha e_2, e_2) \rangle$$

$$y' = -(x - a)(-\operatorname{sen} \alpha \langle e_1, e_1 \rangle + \cos \alpha \langle e_2, e_1 \rangle) + (y - b)(-\operatorname{sen} \alpha \langle e_1, e_2 \rangle + \cos \alpha \langle e_2, e_2 \rangle)$$

$$y' = -(x - a)\operatorname{sen} \alpha + (y - b)\cos \alpha$$

Portanto, as fórmulas de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \operatorname{sen} \alpha \\ y' = -(x - a) \operatorname{sen} \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases}$$

Podemos escrever o sistema acima de forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

2. Translação

O leitor ao se deparar com a ideia de translação vem logo a noção de deslocar um objeto ou um ponto de um lugar para outro. Para que esse deslocamento ocorra é necessário um transportador desses dados, assim temos na figura do vetor a tarefa de tal mudança de objeto ou ponto. Vejamos algumas translações:

(a) translação de um ponto

Consideramos um ponto $A(1, 2)$ que é transladado(transportado) pelo vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2, 0)$ para o ponto B , conforme figura abaixo.

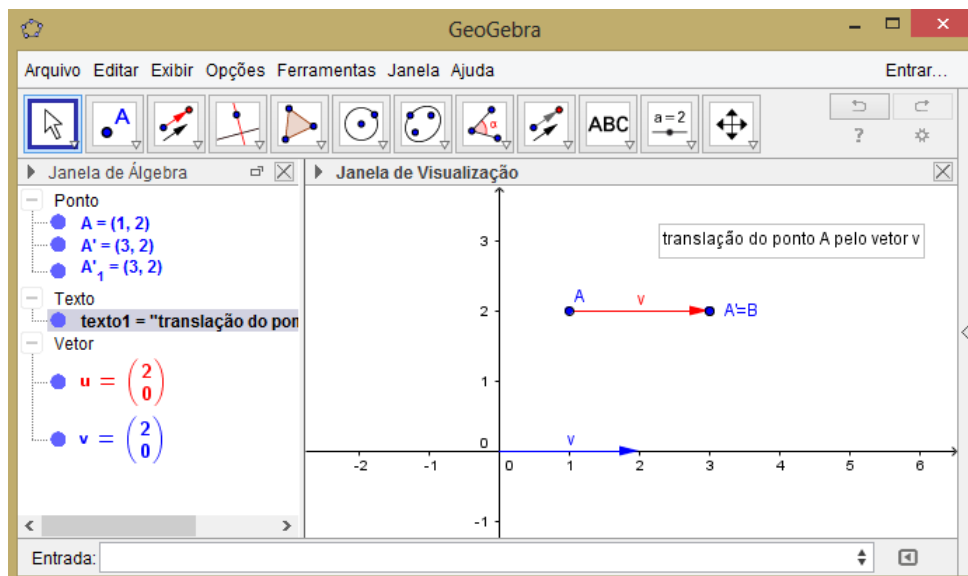


Figura 3.26: Translação do ponto A

Observamos pela figura 3.26 que o ponto A foi transladado pelo vetor \vec{v} até o ponto B de coordenadas $(3, 2)$. Dessa forma, pode-se concluir que as coor-

denadas de $B = T_{A,\vec{v}}$. Sendo assim a translação de A pelo vetor \vec{v} pode ser calculada pela relação $T_{A,\vec{v}} = A + \vec{v}$.

(b) **translação de uma reta.**

Considere uma reta r que contém os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (-1, 5)$. Para transladar a reta r através do vetor $\vec{v} = (3, -1)$, devemos primeiramente transladar os pontos A e B .

$$A' = A + \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } B' = B + \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

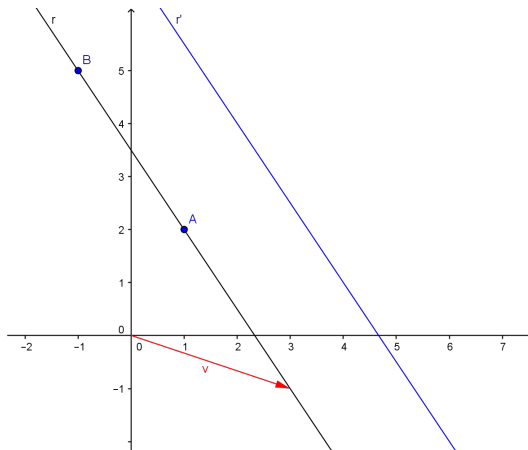


Figura 3.27: Translação da reta

Adquirindo os novos pontos da reta r' , translação de r , podemos traçar r' (figura 3.27) contendo A' e B' .

(c) **translação de um polígono**

Considere o polígono ABC de vértices $A = (-2, 1)$, $B = (1, 3)$ e $C = (1, 2)$. A translação de ABC segundo o vetor $\vec{v} = (4, 1)$ é o polígono $A'B'C'$, representado na figura 3.28.

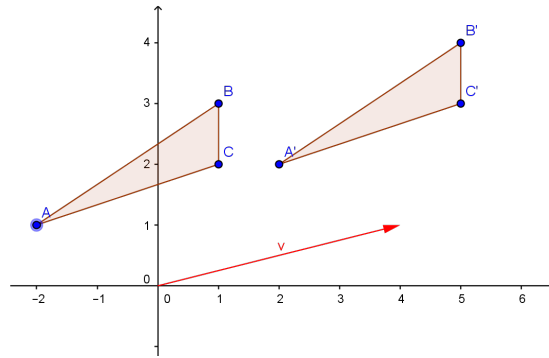


Figura 3.28: Translação de polígono

Assim como no exemplo anterior, cada vértice do polígono será transladado separadamente: $A' = A + (4, 1)$, $B' = B + (4, 1)$ e $C' = C + (4, 1)$. As coordenadas dos vértices do polígono encontrado após a translação são:

$$A' = (2, 2), B' = (5, 4) \text{ e } C' = (5, 3).$$

Percebemos que uma translação é uma operação que desloca pontos em uma determinada direção. Sendo definida através da equação:

$$P' = P + T \tag{3.2}$$

tal que, para o caso 2D

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

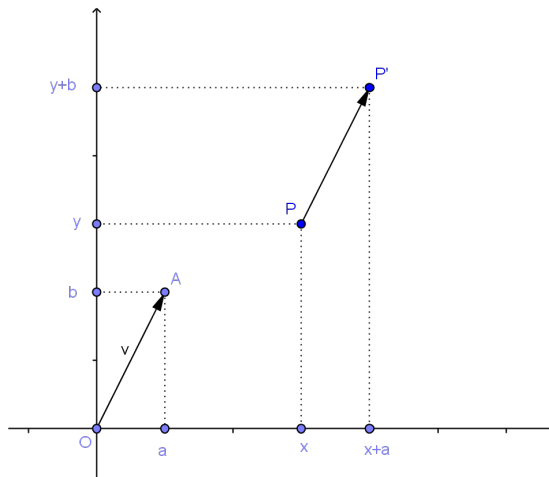


Figura 3.29: Translação

onde x, y são pontos originais; x', y' são os pontos deslocados; e a, b correspondem ao deslocamento nas direções x e y , respectivamente.

Pelas coordenadas do ponto P , podemos determinar as coordenadas do ponto P' através do sistema

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad (3.3)$$

O sistema (3.3) pode ser escrito como soma de matrizes. Assim, as coordenadas do ponto $P' = (x', y')$ são dadas pela equação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

O sistema (3.3) é equivalente a equação (3.4).

Nota

Numa translação:

- qualquer segmento de reta é transformado num segmento de reta paralelo e com o **mesmo comprimento**;
- qualquer ângulo é transformado num **ângulo congruente**

Considerando as translações como as isomerias mais simples, podemos mostrar de outra forma como obter as equações da transformação geométrica.

Se num dado sistema de eixos ortogonais, sendo o vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ e de ponto $P(x, y)$, temos $T(P) = (x + \alpha, y + \beta)$.

Seja $O' = (a, b)$ e $O' = T(O)$ no sistema OXY e α ângulo de OX para $O'X'$.

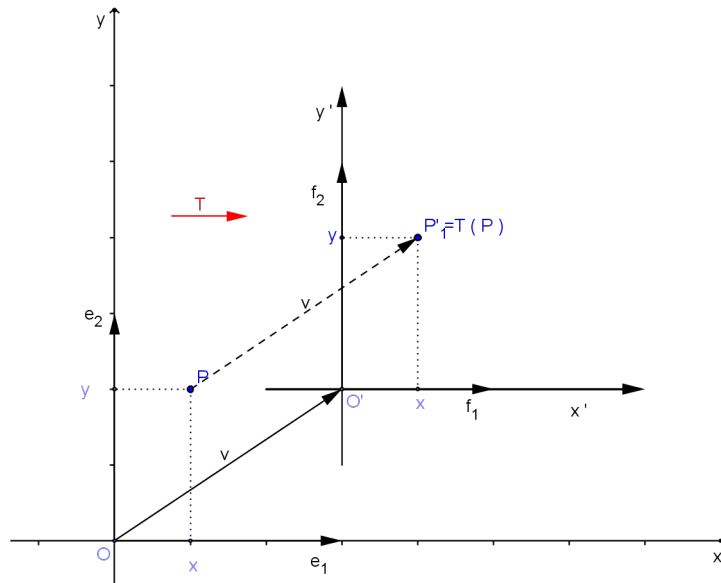


Figura 3.30: $P' = T(P)$ em $O'X'Y'$ e P em OXY , tem coordenadas iguais

Considerando que as coordenadas (x_1, y_1) do ponto $P_1 = T(P)$ no sistema OXY são dadas por

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + a \\ y_1 = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases}$$

No caso da translação que é uma rotação de ângulo $\alpha = 0$ seguida de uma translação, temos:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + a \\ y_1 = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x \cdot 1 - y \cdot 0 + a \\ y_1 = x \cdot 0 + y \cdot 1 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x + a \\ y_1 = y + b \end{cases}$$

3. Rotação

Ao introduzir comentários sobre rotação, percebemos que essa transformação geométrica realiza movimentos giratórios de sentido (horário ou anti-horário) no plano por um ângulo que determinará o giro de um objeto em torno de um ponto fixo.

Consideramos a rotação de um ponto $P = (x, y)$ em torno da origem $(0, 0)$, por um ângulo de medida α em graus, sendo $\alpha > 0$ de sentido anti-horário.

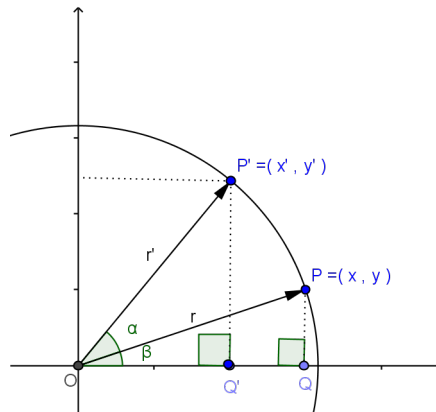


Figura 3.31: Rotação

Ao observar a figura 3.31 notamos que o ponto P se deslocou numa rotação em sentido anti-horário até o P' , isto é, a rotação R de centro O e ângulo α transformou o ponto $P = (x, y)$ no ponto $R(P) = (x', y')$, sendo que $R(P) = P'$.

Analisando o triângulo OPQ :

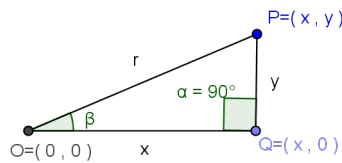


Figura 3.32: Triângulo OPQ

Temos então:

$$(1) \operatorname{sen}\beta = \frac{y}{r} \implies y = r\operatorname{sen}\beta$$

$$(2) \operatorname{cos}\beta = \frac{x}{r} \implies x = r\operatorname{cos}\beta$$

P se transforma num ponto P' , através da rotação pelo ângulo α . Analisando agora o triângulo $OP'Q'$, temos:

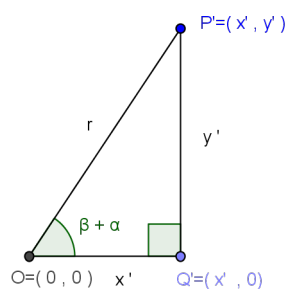


Figura 3.33: Triângulo $OP'Q'$

Temos então:

$$(3) \operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \frac{y'}{r} \implies y' = r \operatorname{sen}(\beta + \alpha)$$

$$(4) \operatorname{cos}(\beta + \alpha) = \frac{x'}{r} \implies x' = r \operatorname{cos}(\beta + \alpha)$$

Recordando a **adição e subtração de arcos**:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \operatorname{sen}\beta \operatorname{cos}\alpha + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cos}\beta & (i) \\ \operatorname{cos}(\beta + \alpha) = \operatorname{cos}\beta \operatorname{cos}\alpha - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha & (ii) \end{cases}$$

Substituindo (i) em (3), temos:

$$(5) y' = r(\operatorname{sen}\beta \operatorname{cos}\alpha + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cos}\beta)$$

Substituindo (1) e (2) em (5), temos:

$$y' = r \left(\frac{y}{r} \operatorname{cos}\alpha + \frac{x}{r} \operatorname{sen}\alpha \right)$$

$$6) y' = x \operatorname{sen}\alpha + y \operatorname{cos}\alpha$$

Da mesma forma fazemos para x' :

Substituindo (ii) em (4), temos:

$$x' = r \operatorname{cos}(\beta + \alpha)$$

$$(7) x' = r(\operatorname{cos}\beta \operatorname{cos}\alpha - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha)$$

Substituindo (1) e (2) em relação a (7), temos:

$$x' = r \left(\frac{x}{r} \operatorname{cos}\alpha - \frac{y}{r} \operatorname{sen}\alpha \right)$$

$$(8) x' = x \operatorname{cos}\alpha - y \operatorname{sen}\alpha$$

Então pela equação (6) e (8), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha \\ y' = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Podemos escrever o sistema acima de forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sabendo que:

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Podemos apresentar de outro modo as equações que determinam uma rotação na origem. Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano, sendo $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, vetores unitários dos eixos OX e OY respectivamente.

A rotação de centro O e ângulo α transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P' = (x', y')$. Vejamos a seguir:

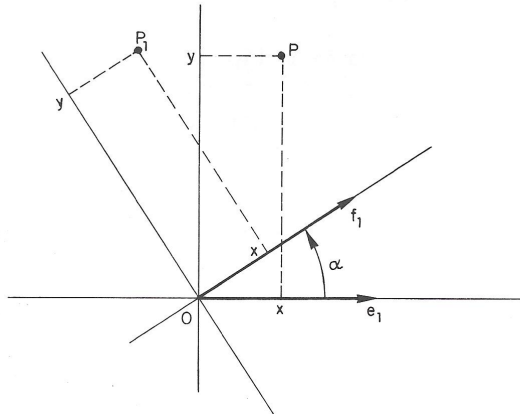


Figura 3.34: A rotação de centro O e ângulo α leva P em P'

Fonte: Lima(2011, p.145).

Sendo $P = (x, y)$ é equivalente a afirmar que: $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$. A isometria T transforma o sistema de eixos ortogonais OXY noutro sistema de eixos ortogonais OX_1Y_1 . Sendo que pela transformação T , um ponto P do plano é transformado num outro ponto $P_1 = T(P)$ e as coordenadas no sistema OX_1Y_1 são as mesmas coordenadas de P no sistema OXY .

Assim no novo sistema de eixos ortogonais OX_1Y_1 com vetores unitários f_1 e f_2 , tem no ponto P_1 as mesmas coordenadas (x, y) de P no sistema OXY . Então, temos:

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_1 \rangle$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = \langle xf_1, e_1 \rangle + \langle yf_2, e_1 \rangle$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x\langle f_1, e_1 \rangle + y\langle f_2, e_1 \rangle$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x\|f_1\|\|e_1\|\cos(f_1, e_1) + y\|f_2\|\|e_1\|\cos(f_2, e_1)$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha + y \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha + 90^\circ)$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos(\alpha + 90^\circ)$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x\cos\alpha - y\text{sen}\alpha$$

e

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_2 \rangle$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = \langle xf_1, e_2 \rangle + \langle yf_2, e_2 \rangle$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x\langle f_1, e_2 \rangle + y\langle f_2, e_2 \rangle$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x\|f_1\|\|e_2\|\cos(f_1, e_2) + y\|f_2\|\|e_2\|\cos(f_2, e_2)$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + y \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x \cdot \text{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x\text{sen}\alpha + y\cos\alpha$$

Portanto $P_1 = (x_1, y_1)$ e as coordenadas de P_1 é dada pelo sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha - y \text{sen} \alpha \\ y_1 = x \text{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Exemplo 1. Dados os vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (3, 2)$ de um triângulo, determine os novos vértices B e C , após sofrer uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do ponto A .

Solução: Para obter as novas coordenadas dos vértices B e C por uma rotação de 90° em torno da origem, sendo essa, uma rotação no sentido anti-horário. Vamos usar a equação matricial de rotação, para B e C , assim encontraremos B' e C' .

Sendo $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, encontrar $B' = ?$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\text{sen} 90^\circ \\ \text{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Assim, $B' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Sendo $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, encontrar $C' = ?$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\text{sen} 90^\circ \\ \text{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Assim, $C' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Desta forma, as novas coordenadas dos vértices B e C são respectivamente $B' = (0, 3)$ e $C' = (-2, 3)$. A figura 3.35 ilustra esses dados.

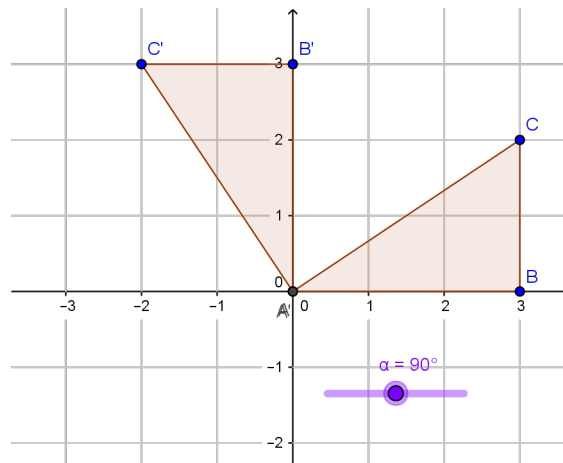


Figura 3.35: Exemplo de rotação em torno da origem

4. Reflexão

Observando a figura abaixo:

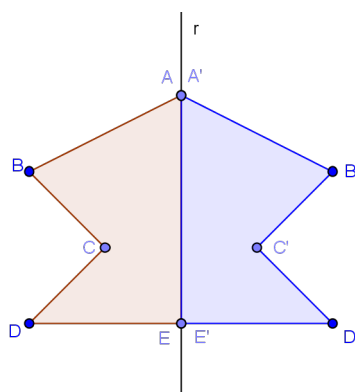


Figura 3.36: Imagem refletida por um eixo de simetria

Podemos construir uma imagem refletida tendo uma figura e seu eixo, é possível dobrar a folha de papel em que ela está desenhada sobre o eixo de simetria do desenho e copiá-la no lado oposto.

Outro modo é traçar uma reta perpendicular ao eixo, passando pelos pontos da imagem original, e marcar, no lado oposto, sua posição mantendo a mesma distância do segmento.

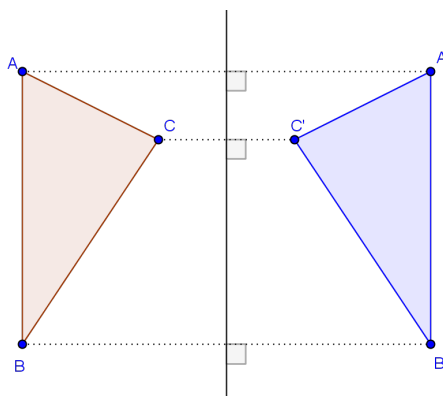


Figura 3.37: Imagem refletida com uma perpendicular ao eixo

Agora estudaremos *Reflexão* (também designada por simetria axial ou simetria ortogonal).

Observamos que a reflexão corresponde a uma imagem invertida da imagem original, em relação a um eixo, que é semelhante à aplicação de um espelho. Numa **reflexão**, cada ponto da figura original e o correspondente da figura refletida estão sobre uma mesma reta perpendicular ao eixo de reflexão e a mesma distância desse eixo.

Temos geometricamente dois tipos de reflexão: a reflexão em torno de um ponto e a reflexão em torno de uma reta.

(a) **reflexão em relação a um ponto.** Também conhecida como *simetria central*.

Definição. Seja O um ponto fixo. A imagem de um ponto P diferente de O pela simetria de centro O é o ponto P' , tal que O é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Se $P = O$, a imagem de P é ele mesmo.

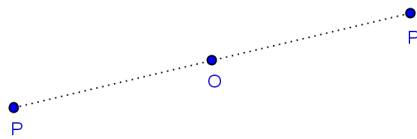


Figura 3.38: Simetria central

Caso Particular. Uma *rotação* de 180° em torno do ponto O do plano, é uma reflexão em relação a origem, pois leva cada ponto $P = (x, y)$ para a sua imagem no ponto $P' = (-x, -y)$. Observamos que, seja qual for o ponto P do plano, a origem O é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Podemos dizer que $P' = (-x, -y)$ é o *simétrico* do ponto $P = (x, y)$ em relação ao ponto O .

A rotação de 180° em torno de O coincide com a *simetria central* de centro O .

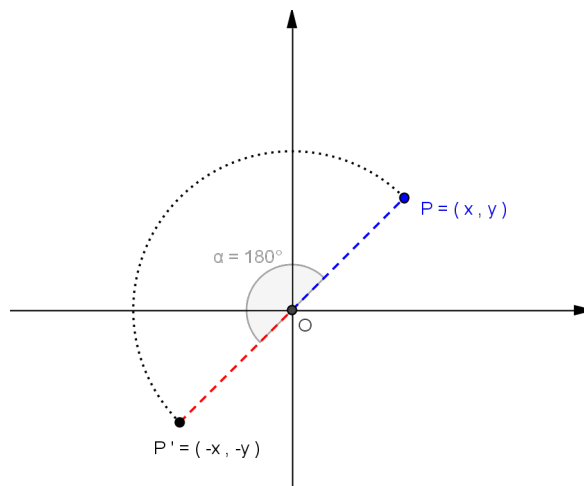


Figura 3.39: Reflexão em relação a origem

(b) **reflexão em relação a uma reta**

Analisemos a transformação geométrica denominada reflexão de um ponto P qualquer no plano relacionado com uma reta r que passa pela origem.

Conforme a figura a seguir temos uma reta r que forma um ângulo α com o eixo Ox e de equação $x \operatorname{sen} \alpha - y \operatorname{cos} \alpha = 0$. Considerando um ponto P qualquer de coordenadas (x, y) , é transformado, pela reflexão da reta r , no ponto P' de coordenadas (x', y') .

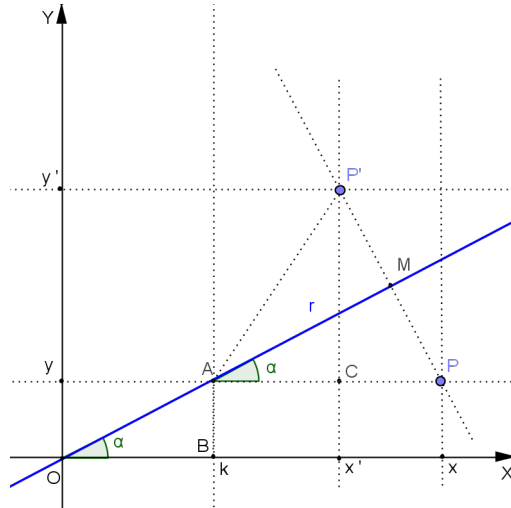


Figura 3.40: Reflexão em relação a uma reta que passa na origem

Fonte: MELO (2010, p.28).

Pela figura temos que:

- M é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$
- r é a mediatriz de $\overline{PP'}$
- $\overline{AP'} = \overline{AP}$. Sendo o $\triangle APP'$ isósceles.

Sendo o ângulo $\angle BOA = \alpha$, temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$ e o ângulo $\angle PAP' = 2\alpha$.

Considerando o triângulo retângulo $\triangle ACP'$, retângulo em C e o ângulo $\angle CAP' = 2\alpha$. Temos:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\overline{P'C}}{\overline{AP'}} \Rightarrow \overline{P'C} = \overline{AP'} \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\operatorname{cos} 2\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP'}} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AP'} \operatorname{cos} 2\alpha$$

Obs: $x' = \overline{OB} + \overline{AC}$

$$y' = \overline{AB} + \overline{P'C}$$

Supondo que o ponto $B = (k, 0)$, segue-se que:

$$x' = k + \overline{AP'} \operatorname{cos} 2\alpha$$

$$x' = k + \overline{AP} \operatorname{cos} 2\alpha$$

$$x' = k + (x - k) \operatorname{cos} 2\alpha$$

$$x' = k + x \cos 2\alpha - k \cos 2\alpha$$

$$x' = x \cos 2\alpha + k - k \cos 2\alpha$$

$$x' = x \cos 2\alpha + k(1 - \cos 2\alpha)$$

$$x' = x \cos 2\alpha + y \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$x' = x \cos 2\alpha + y \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} 2 \sin^2 \alpha$$

$$x' = x \cos 2\alpha + y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$x' = x \cos 2\alpha + y 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$x' = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha$$

e

$$y' = y + \overline{P'C}$$

$$y' = y + \overline{AP'} \sin 2\alpha$$

$$y' = y + (x - k) \sin 2\alpha$$

$$y' = y + x \sin 2\alpha - k \sin 2\alpha$$

$$y' = x \sin 2\alpha + y - k \sin 2\alpha$$

$$y' = x \sin 2\alpha + y - y \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \sin 2\alpha$$

$$y' = x \sin 2\alpha + y - y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$y' = x \sin 2\alpha + y - y \cos \alpha 2 \cos \alpha$$

$$y' = x \sin 2\alpha + y - y 2 \cos^2 \alpha$$

$$y' = x \sin 2\alpha + y(1 - 2 \cos^2 \alpha)$$

$$y' = x \sin 2\alpha + y(-\cos 2\alpha)$$

$$y' = x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha$$

Assim o ponto $P' = (x', y')$ é representado pelo sistema abaixo:

$$\begin{cases} x' = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ y' = x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha \end{cases}$$

Podemos escrever o sistema acima de forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sabendo que:

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Podemos de outro modo, apresentar como se chegar às equações que determinam uma reflexão de reta na origem.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano, sendo $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, vetores unitários dos eixos OX e OY respectivamente. De acordo com LIMA (2001, p.151),

“... A expressão $T(P) = (x, -y)$ quando $P = (x, y)$ mostra também que a reflexão T inverte a orientação do plano, pois deixa o eixo OX fixo e inverte a orientação de OY . Em termos dos vetores unitários dos eixos, T transforma e_1 em si mesmo e e_2 em $-e_2$?”

... A reflexão T , em torno da reta r , que passa pela origem e faz um ângulo α com o eixo OX , transforma este eixo noutro, OX_1 , obtido de OX por rotação de ângulo 2α e transforma OY no eixo OY_1 , tal que o ângulo de OY para OY_1 é $180^\circ + \alpha$? (LIMA, 2001, p. 151).

Sendo e_1, e_2, f_1 e f_2 respectivamente os vetores unitários dos eixos OX, OY, OX_1 e OY_1 , temos

$$f_1 = \cos 2\alpha \cdot e_1 + \sin 2\alpha \cdot e_2$$

e

$$f_2 = \sin 2\alpha \cdot e_1 - \cos 2\alpha \cdot e_2$$

Sendo a reflexão T , uma isometria, transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ tal que $P_1 = x f_1 + y f_2$, conforme pode ser visto na figura 3.41.

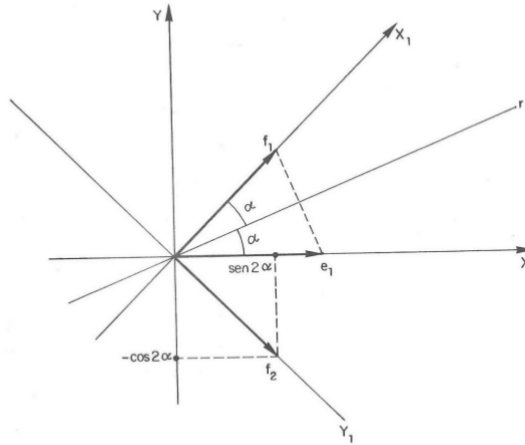


Figura 3.41: A reflexão em torno de r leva OX em OX_1 e OY em OY_1

Fonte: Lima(2011, p.152).

Temos que $P = (x, y)$ é equivalente a afirmar que: $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$. Assim, temos:

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_1 \rangle$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = \langle xf_1, e_1 \rangle + \langle yf_2, e_1 \rangle$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x\langle f_1, e_1 \rangle + y\langle f_2, e_1 \rangle$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x\|f_1\|\|e_1\|\cos(f_1, e_1) + y\|f_2\|\|e_1\|\cos(f_2, e_1)$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 2\alpha + y \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^\circ - 2\alpha)$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \cos(90^\circ - 2\alpha)$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha$$

e

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_2 \rangle$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = \langle xf_1, e_2 \rangle + \langle yf_2, e_2 \rangle$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x\langle f_1, e_2 \rangle + y\langle f_2, e_2 \rangle$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x\|f_1\|\|e_2\|\cos(f_1, e_2) + y\|f_2\|\|e_2\|\cos(f_2, e_2)$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(270^\circ - 2\alpha) + y \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(180^\circ + 2\alpha)$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha$$

Portanto $P_1 = (x_1, y_1)$ e as coordenadas de P_1 é dada pelo sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ y_1 = x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha \end{cases}$$

Exemplo 1. *Dados os vértices $A = (-1, 3), B = (2, 3), C = (2, 5)$ e $D = (1, 5)$ de um polígono, determine a reflexão desse polígono em relação a reta r na origem que faz um ângulo $\alpha = 45^\circ$ com o eixo OX .*

Solução: Para obter as novas coordenadas dos vértices A, B, C e D de um polígono através da reflexão em torno da reta r . Vamos usar a equação matricial de reflexão, para A, B, C e D , assim encontraremos A', B', C' e D' . Então, como a equação matricial para transformar um ponto é

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Então para transformar os pontos do polígono, teremos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2 \cdot 45^\circ) & \operatorname{sen}(2 \cdot 45^\circ) \\ \operatorname{sen}(2 \cdot 45^\circ) & -\cos(2 \cdot 45^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \operatorname{sen} 90^\circ \\ \operatorname{sen} 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

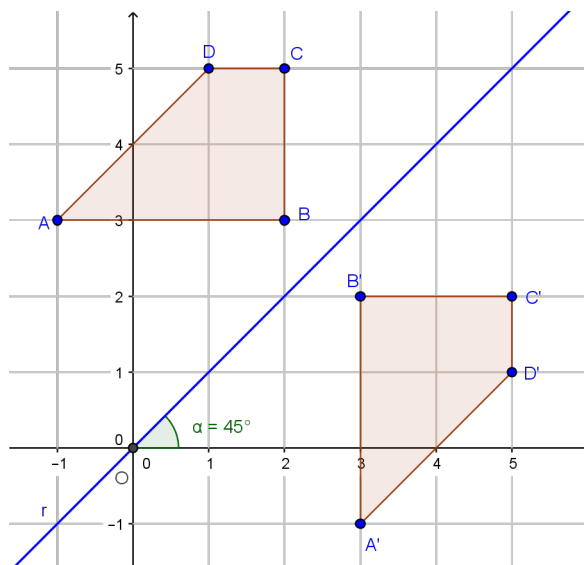


Figura 3.42: Exemplo de reflexão

3.11 Composição de transformações geométricas

1. Rotação em torno de um ponto qualquer

A rotação em torno de um ponto arbitrário, se dá tomando uma rotação em torno da origem O e ângulo α , seguida de uma translação. Observamos a figura a seguir:

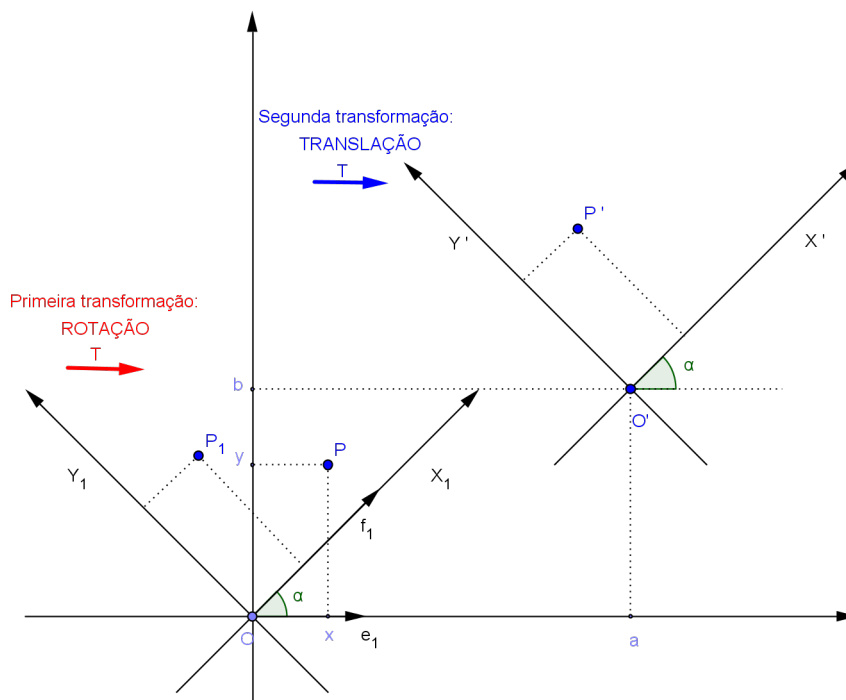


Figura 3.43: Rotação em torno de um ponto qualquer

Pela figura apresentada temos:

- O ponto $O = (0, 0)$ origem do sistema de eixos ortogonais OXY .
- A rotação de centro O e ângulo α transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$.

Sejam (a, b) as coordenadas de $O' = T(O)$ no sistema OXY e α o ângulo de OX para $O'X'$. Assim, $\overrightarrow{O'P} = (x - a)f_1 + (y - b)f_2$.

Encontrando as coordenadas de P_1 pela rotação de OXY para OX_1Y_1 , temos:

$$x_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_1 \rangle = \langle (x - a)f_1 + (y - b)f_2, e_1 \rangle$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_1 \rangle = \langle (x - a)f_1, e_1 \rangle + \langle (y - b)f_2, e_1 \rangle$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_1 \rangle = (x - a)\langle f_1, e_1 \rangle + (y - b)\langle f_2, e_1 \rangle$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_1 \rangle = (x - a)\|f_1\|\|e_1\|\cos(f_1, e_1) + (y - b)\|f_2\|\|e_1\|\cos(f_2, e_1)$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_1 \rangle = (x - a) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha + (y - b) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha + 90^\circ)$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_1 \rangle = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\cos(\alpha + 90^\circ)$$

$$x_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_1 \rangle = (x - a)\cos\alpha - (y - b)\text{sen}\alpha$$

e

$$y_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_2 \rangle = \langle (x - a)f_1 + (y - b)f_2, e_2 \rangle$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_2 \rangle = \langle (x - a)f_1, e_2 \rangle + \langle (y - b)f_2, e_2 \rangle$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_2 \rangle = (x - a)\langle f_1, e_2 \rangle + (y - b)\langle f_2, e_2 \rangle$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_2 \rangle = (x - a)\|f_1\|\|e_2\|\cos(f_1, e_2) + (y - b)\|f_2\|\|e_2\|\cos(f_2, e_2)$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_2 \rangle = (x - a) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + (y - b) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{O'P}, e_2 \rangle = (x - a)\text{sen}\alpha + (y - b)\cos\alpha$$

Assim encontramos o sistema de rotação de $\overrightarrow{O_1P}$ pelo ângulo α , obtemos o vetor $\overrightarrow{O_1P_1} = (x_1, y_1)$.

$$\begin{cases} x_1 = (x - a)\cos\alpha - (y - b)\text{sen}\alpha \\ y_1 = (x - a)\text{sen}\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{cases}$$

E depois tomando sua extremidade

$$P' = O' + \overrightarrow{O_1P_1} = (x_1 + a, y_1 + b)$$

Portanto pela translação final, temos:

$$\begin{cases} x_1 = (x - a) \cos \alpha - (y - b) \operatorname{sen} \alpha + a \\ y_1 = (x - a) \operatorname{sen} \alpha + (y - b) \cos \alpha + b \end{cases}$$

A equação matricial é:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Exemplo 1. Dados os vértices $A = (2, 2)$, $B = (3, 2)$ e $C = (3, 3)$ de um triângulo, determine os novos vértices B e C , após sofrer uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do ponto A .

Solução: Para obter as novas coordenadas dos vértices B e C por uma rotação de 90° em torno do ponto A , sendo essa, uma rotação no sentido anti-horário. Como a rotação é em torno do ponto A , as novas coordenadas de A não muda, assim teremos $A = A'$, então vamos usar a equação matricial de rotação, para B e C , assim encontraremos B' e C' .

Encontrando a nova coordenada de $B = (3, 2)$, $B' = ?$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ \\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 - 2 \\ 2 - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 2 \\ 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então } B' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Encontrando a nova coordenada de $C = (3, 3), C' = ?$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\text{sen} 90^\circ \\ \text{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 - 2 \\ 3 - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2 \\ 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então } C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Assim, pela figura a seguir temos:

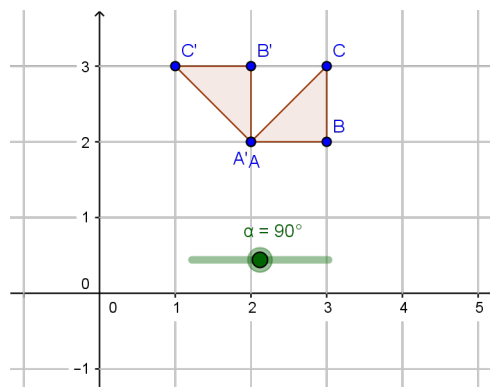


Figura 3.44: Exemplo de rotação em torno de um ponto qualquer

2. Reflexão em relação a uma reta $y = ax + b$

Observe a figura abaixo:

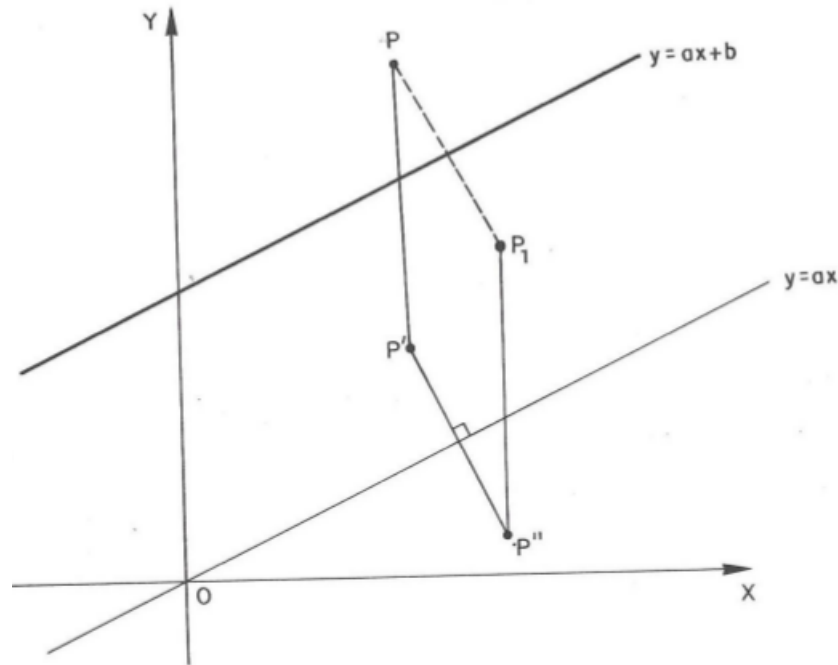


Figura 3.45: Reflexão em torno da reta $y = ax + b$

Fonte: Lima(2011, p.153).

Pela figura 3.45, temos uma reta r de equação $x \operatorname{sen} \alpha - y \operatorname{cos} \alpha + b = 0$, com inclinação $a = \operatorname{tg} \alpha$ e corta o eixo OY no ponto de ordenada b . Também, temos a reta r' , paralela a r , de equação $x \operatorname{sen} \alpha - y \operatorname{cos} \alpha = 0$, passa pela origem e faz com o eixo OX o mesmo ângulo α . Para obtermos a imagem do ponto $P = (x, y)$ pela reflexão T em relação à reta r , seguiremos os seguintes passos:

- (a) passo: Aplicamos em P a translação vertical pelo vetor $-\vec{v} = (0, -b)$, para obter o ponto $P' = (x, y - b)$.
- (b) passo: Aplicamos a reflexão em P' em relação à reta r' , para obter o ponto $P'' = (x'', y'')$, assim teremos a equação

$$\begin{cases} x'' = x \cos 2\alpha + (y - b) \operatorname{sen} 2\alpha \\ y'' = x \operatorname{sen} 2\alpha - (y - b) \cos 2\alpha \end{cases}$$

- (c) passo: Por último, aplicamos a translação vertical em P'' , pelo vetor $\vec{v} = (0, b)$, encontrando o ponto $P_1 = T(P) = (x_1, y_1)$, onde:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos 2\alpha + (y - b)\text{sen}2\alpha \\ y_1 = x\text{sen}2\alpha - (y - b) \cos 2\alpha + b \end{cases}$$

A equação matricial é:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \text{sen} 2\alpha \\ \text{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Exemplo 1. Dado o ponto $P = (1, 5)$, obter a imagem desse ponto, através da reflexão em torno da reta r que passa pelo ponto $C = (0, 3)$. Sendo r paralela a reta r' que passa pela origem e tem ângulo $\alpha = 45^\circ$ com o eixo OX .

Solução: Para obter a nova coordenada do ponto P por uma reflexão em torno da reta r , podemos usar as etapas apresentadas acima ou podemos aplicar diretamente a equação matricial para esse exemplo.

$$\text{Dados: } \begin{cases} P = (x, y); x = 1, y = 5 \\ C = (0, 3); b = 3 \\ \alpha = 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \text{sen} 2\alpha \\ \text{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2 \cdot 45^\circ) & \text{sen}(2 \cdot 45^\circ) \\ \text{sen}(2 \cdot 45^\circ) & -\cos(2 \cdot 45^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 - 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \text{sen} 90^\circ \\ \text{sen} 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

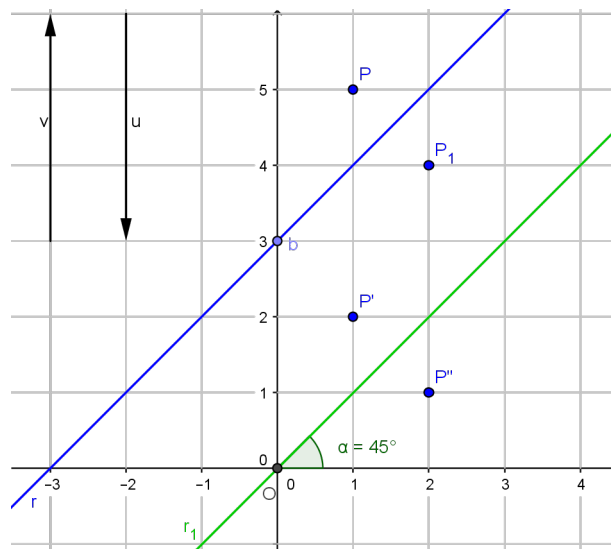


Figura 3.46: Exemplo de reflexão do ponto P em torno da reta r

Capítulo 4

Considerações Finais

Para realização desse trabalho encontramos diversas dificuldades. Inicialmente os relacionados ao tema, especialmente encontrar materiais que retratasse o que imaginávamos ser suficiente para o entendimento e motivação para alunos ainda no ensino médio.

Ao iniciarmos o trabalho decidimos abordar os conteúdos matemáticos não apenas como são abordados nos livros didáticos, amplamente conhecidos e utilizados, mas fazendo uso de uma abordagem que privilegiasse o uso de tecnologia da informação, por acreditar que essas tecnologias, cada vez mais presentes no cotidiano dos alunos, têm com grande influencia na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Após várias pesquisas e revisões bibliográficas deste trabalho, chegamos a uma consonância com a proposta do Ensino Médio Inovador, que é propiciar ao aluno uma aprendizagem significativa, isto é, os conteúdos próximos de sua realidade.

Em síntese, o objetivo do trabalho foi ampliar o horizonte do estudo de matrizes no ensino médio fazendo uso das transformações lineares, particularmente as geométricas, e especial atenção ao teorema que estabelece o isomorfismo entre as transformações lineares e as matrizes, permitindo tratar as transformações lineares como matrizes. Essa abordagem prioriza a aprendizagem significativa, aproximando os conteúdos da realidade dos alunos permitindo aos mesmos, o contato com aplicações de matrizes ainda no ensino médio mudando o foco do ensino que hoje é feito basicamente por operações com matrizes, o que consiste em realização de contas, simplesmente.

Acreditamos que o trabalho desenvolvido pode servir como sequência didática

para ensinar matrizes no ensino médio privilegiando as aplicações. Ressaltamos ainda o caráter interdisciplinar que essa abordagem propicia entre as matrizes e a geometria o que certamente serve como um fator motivacional aos alunos.

Referências Bibliográficas

- [1] BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- [2] GEOGEBRA, Manual Oficial da Versão 5.0 disponível em <<http://www.geogebra.org/help/documentBR.pdf>> acesso em 5 de maio 2014.
- [3] KENSKI, Vani Moreira. Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância. 5ed. Campinas, SP, Papirus, 2008.
- [4] LEITE, et al. Revista Tecnologia Educacional Ano XXVII nº 148, 2000. PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais). Ciências da natureza Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação básica, 2006. (Orientações Curriculares para o Ensino Médio; Volume 2).
- [5] DANTE, L. R. Projeto múltiplo: matemática: ensino médio. São Paulo: Ática, 2014.
- [6] SOUZA, J. R. de. Novo olhar matemática: 2. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.
- [7] LIMA, Elon Lages. Coordenadas no Plano: 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA,2011.
- [8] STORMOWSKI, Vandoir. Estudando as matrizes a partir de transformações geométricas: Dissertação de mestrado :UFRGS,2018.
- [9] MELO, Helena.2010. Isometrias no Plano:Uma abordagem segundo a geometria analítica.Ed.Influir. ISBN:978-989-97107-0-2.
- [10] SMOLE, Kátia Stocco & DINIZ, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio: 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.