UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Noções de Matemática Básica aplicada à Matemática Financeira

Aldo Agustinho Alves

Instituto de Matemática

Maceió, Abril de 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ALDO AGUSTINHO ALVES

NOÇÕES DE MATEMÁTICA BÁSICA APLICADA À MATEMÁTICA FINANCEIRA

Maceió
2016

ALDO AGUSTINHO ALVES

NOÇÕES DE MATEMÁTICA BÁSICA APLICADA À MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Fernando Pereira Micena*

Maceió
2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

A474n Alves, Aldo Agustinho .
Noções de matemática básica aplicada à matemática financeira / Aldo Agustinho Alves. – 2016.
76 f. : il.

Orientador: Fernando Pereira Micena.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 91-92.
Anexos: f. 93-95.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática financeira – Estudo e ensino. I. Título.

CDU: 51:37

Folha de Aprovação

ALDO AGUSTINHO ALVES

NOÇÕES DE MATEMÁTICA BÁSICA APLICADA À MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 01 de abril de 2016.

Banca Examinadora:

Gregório Manoel da Silva Neto

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL (Presidente)

Vânio Fragoso de Melo

Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo - UFAL

Carlos Argolo Pereira Alves

Prof. Dr. Carlos Argolo Pereira Alves - IFAL

Ao meu orientador, professor Dr. Fernando Pereira Micena, aos meus familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade e pela saúde que me concedeu para hoje está terminando este curso. Os meus sinceros agradecimentos a minha esposa Maria do Socorro que sempre me incentivou bastante durante todo o mestrado e as minhas filhas Cinthya Vanessa e Harla e minha neta Maria Eduarda “Madu” que me trouxeram sempre bastante força de vontade nos momentos difíceis do curso.

Agradeço ao Prof. Dr. Fernando Pereira Micena pela orientação neste trabalho. Os meus sinceros agradeço aos professores Prof. Dr. Vanio Fragoso de Melo e Prof. Dr. Carlos Argolo Pereira Alves membros da banca examinadora deste trabalho, e a todos os professores do PROFMAT.

Agradeço a meus amigos André Carlos, Marcel Cerqueira, Evison Rosalino, e também a meu amigo de longa caminhada Valdir Soares, entre outros, Messias, Adeilton e a todos que de alguma forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho.

"Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim"

—CHICO XAVIER

RESUMO

O objetivo deste trabalho é subsidiar uma abordagem da matemática básica aplicada a matemática financeira com situações vivenciada pelos alunos, provocando neles seu lado crítico e assim contribuindo na sua educação financeira. Neste, encontra-se um breve relato da história e teorias de assuntos pertinente a matemática financeira como: razão, proporção, porcentagem, progressões, logaritmo e exponencial. As aplicações nele contida são situações financeiras do cotidiano de qualquer cidadão, como juros, desconto, plano de pagamento, empréstimos, inflação e investimento.

Palavras-chave: 1.Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática Financeira - Estudo e ensino.

ABSTRACT

The goal of this work is to support a basic mathematical approach applied financial mathematics with situations experienced by the students, tauting them their critical side and thus contributing to their financial education. This is a brief account of the history and theories of relevant issues to financial mathematics as: reason, proportion, percentage, progressions, logarithm and exponential. The applications contained therein are financial situations of everyday life for all citizens, as interest, discount, payment plan, loans, inflation, investment.

Keywords: 1.Mathematics - Study and teaching. 2.Financial Mathematics - Study and teaching.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Como educador sabemos que é difícil, em um trabalho escolar, desenvolver a matemática de forma rica para todos os educandos. O educador precisa estar sempre se apropriando de novos conhecimentos, logo é com esse olhar que pensamos nesse trabalho, como uma proposta de trabalhar em sala a importância da Matemática Financeira no ensino básico. A escolha do tema foi devido à importância da Educação Financeira na formação dos alunos como cidadão crítico e consciente. Pensar o ensino e a aprendizagem da educação do tema, pressupõe antes de tudo compreender a importância de lidar com o dinheiro na aplicabilidade da Matemática.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma metodologia para o desenvolvimento de uma ação pedagógica com aplicabilidade em questões com as quais a população tem lidado, esta é uma das questões centrais do Ensino de Matemática Financeira. É um assunto que, eminentemente, remete à contextualização. Decidir entre comprar à vista ou a prazo faz parte da vida do brasileiro. Identificar se as taxas de juros anunciadas coincidem com as realmente utilizadas no cálculo de um financiamento, se as prestações estão corretas, entender como funciona a incidência de juros sobre o saldo devedor, são situações reais, importantes e necessárias para a construção de um pleno exercício da cidadania. É preciso, urgentemente, que essas decisões sejam orientadas e façam parte da formação matemática do cidadão brasileiro.

A preocupação com a Matemática Financeira não é nova, apesar de seu estudo ter-se intensificado recentemente, principalmente, desde a recomendação de sua inclusão nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN'S). Sua inclusão no currículo da Educação Básica e dos Cursos de Licenciatura contribui para a formação de um cidadão que, em muitos casos, não consegue identificar as armadilhas embutidas nas ofertas duvidosas. Isso justifica a necessidade da exploração de situações do cotidiano nas aulas de Matemática Financeira.

O cidadão comum atualmente vem se defrontando, constantemente, com ofertas das mais diversas formas, como por exemplo, a venda de produtos a taxa zero de juros. Algumas dessas ofertas escondem armadilhas que levam o desatento cidadão a prejuízos financeiros, tais como pagamento a longo prazo igual ao pagamento à vista, sem juros. Estaríamos preparando o futuro cidadão adequadamente para enfrentar os desafios financeiros que ocorrem no seu cotidiano? Como ensinar nossos alunos a decidir qual a melhor maneira de efetuar o pagamento: à vista ou a prazo?

Podemos dizer que as respostas a essas perguntas estão condicionadas a vários fatores contido neste trabalho que está organizado do seguinte modo:

No primeiro capítulo, que está fundamentado na referência [IHD06], abordamos fundamentos de razão, proporção e porcentagem com alguns exemplos.

No segundo capítulo, fundamentado nas referências [LCW99b] e [MWZ01], tratamos de progressões aritméticas e geométricas

No terceiro capítulo, fundamentado nas referências [LCW99a] e [Lim10], apresentamos logaritmos e exponenciais contruíndos a partir de suas propriedades.

No quarto capítulo, fundamentado nas referências [HP07], [MWZ01], [Mao08] e [RSA15], são introduzidos os conceitos de matemática financeira de modo natural, como aplicações de progressões aritméticas e geométricas, logaritmos e exponencias.

No quinto capítulo, fundamentado nos capítulos anteriores e na referência [Bra99], propomos algumas atividades e roteiros para algumas delas.

Ao final, são apresentados as conclusões e considerações, onde percebemos que a introdução ao estudo da Matemática Financeira passou a ter fundamental importância tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio, para desenvolver no aluno a habilidade de analisar criticamente as situações financeiras que se apresentam no seu dia a dia.

2. FUNDAMENTOS DE RAZÃO, PROPORÇÃO E PORCENTAGEM

2.1. Contexto Histórico

Relatos históricos datam que o surgimento dos cálculos percentuais aconteceu por volta do século I a.E.C., na cidade de Roma. Nesse período, o imperador romano decretou inúmeros impostos a serem cobrados de acordo com a mercadoria negociada. Um dos impostos criados pelos chefes romanos era denominado centésimo rerum venalium, e obrigava o comerciante a pagar um centésimo pela venda das mercadorias no mercado. Naquela época, o comércio de escravos era intenso e sobre as vendas era cobrado um imposto de 1/25 (um vinte e cinco avos). Os cálculos eram feitos sem a utilização do símbolo de porcentagem, eram realizados de forma simples, com a utilização de frações centésimais. Por exemplo, na cobrança de um imposto no valor de 6/100 da comercialização, eles cobravam seis centésimos do preço do produto, isto é, dividiam o produto em cem partes iguais e pegavam seis partes, basicamente, o que é feito hoje sem a utilização de calculadoras.

Disponível em http://www.brasilescola.com/matematica/historia-das-porcentagens.htm. Acesso em 10 de Nov. de 2015.

Para não delongarmos demais, apenas observarmos, que a técnica de "falsa posição", conhecida em várias culturas antigas, é uma aplicação da proporcionalidade. Voltaremos, no entanto, a nossa atenção para dois aspectos da matemática grega em relação à teoria de razões e proporções. O primeiro aspecto da matemática grega que queremos comentar é o de que não se acha nela o conceito de "função", que foi desenvolvido somente a partir do século XVIII. Na ausência do referido conceito, usava-se, primordialmente, a proporcionalidade para a elaboração de equações. Isto é um aspecto da matemática - especialmente da matemática aplicada - que perduraria na Idade Média e no Renascimento. O segundo aspecto da matemática grega que queremos comentar é o fato de que a noção de razão está presente no próprio conceito grego de número (arithmós), pois isso é concebido como uma coleção de unidades. Isso tem várias consequências. Visto, por exemplo, que a unidade não tem partes, ela não pode ser partida e, assim, o conceito de fração não faz sentido. Dessa maneira, na matemática teórica, as razões fizeram o papel de frações e, na matemática prática, o conceito de razão foi concretizado pelos sistemas de mensuração, pois nesse contexto não há, aparentemente, problema com a existência de submúltiplos, nem a escolha de unidades menores.

Fonte: Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática. Vol. 11, nº23 - páginas 1-6.

2.2. Razão

Definição 2.2.1. Razão - *Sejam a e b grandezas, com $b \neq 0$, tal que o quociente $\dfrac{a}{b}$ representa uma relação de a por b que chamamos razão.*

Exemplo 2.2.1. *A velocidade média em geral é uma grandeza obtida pela razão entre uma distância percorrida e um tempo gasto neste percurso.*
Velocidade média = distância percorrida / tempo gasto no percurso
Suponhamos que um carro percorreu 150 km *em* 2 *horas. A velocidade média do carro nesse percurso será calculada a partir da razão:*

$$V_m = \frac{150}{2} = 75\ km/h$$

O que significa que, em 1 hora o carro percorreu 75 km.

Exemplo 2.2.2. *Escala é a comparação entre o comprimento observado no desenho (mapa, por exemplo) e o comprimento real correspondente, ambos na mesma unidade de medida.*
Escala = comprimento do desenho / comprimento real
Em um mapa, um comprimento de 5 m *está representado por* $2,5\ cm$. *Qual a escala usada para fazer esse mapa?*
$5\ m = 500\ cm$
Escala = $\dfrac{2,5}{500} = \dfrac{1}{200}$ *ou ainda escala* 1 : 200, *como é mais comum nos desenhos e mapas. Isto significa que cada* 1 cm *medido no desenho é igual a* 200 cm *no tamanho real.*

2.3. Proporção

Definição 2.3.1. - *Dadas as sequências* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *e* $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, *dizer que os números* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *são proporcionais aos números* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *equivale a afirmar que existe um número* k *(o fator de proporcionalidade) tal que* $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$, $y_3 = kx_3$, $\cdots$, $y_n = kx_n$.

Propriedade 2.3.1. *seja* $x \mapsto y$ *uma proporcionalidade. Se* $x_1 \mapsto y_1, x_2 \mapsto y_2, \dots, x_n \mapsto y_n$ então $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \mapsto y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$.

Com efeito, tendo-se $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$, $y_3 = kx_3$, $\cdots$, $y_n = kx_n$, *segue-se que* $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n = k(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$.

Noutras palavras, se

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \cdots = \frac{y_n}{x_n}$$

então

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \cdots = \frac{y_n}{x_n}.$$

Exemplo 2.3.1. *Um turista brasileiro sente-se mal durante uma viagem à Nova Iorque. Ao ser examinado em um hospital local a enfermeira lhe diz que sua temperatura no momento era* 101, *mas que ele deveria ficar tranquilo, pois já havia baixado* 5. *Após o susto, o turista percebeu que sua temperatura havia sido medida em uma escala Fahrenheit. Sabendo que* $0C = 32F$ *e* $100C = 212F$ *qual era a sua temperatura anteriormente e qual sua temperatura atual em graus centrígados?*
Anterior: $101 + 5 = 106F$

$$\frac{x - 0}{100 - 0} = \frac{106 - 32}{212 - 32} \Rightarrow \frac{x}{100} = \frac{74}{180} = 41,1C$$

Atual: $101F$

$$\frac{x-0}{100-0}=\frac{101-32}{212-32}\Rightarrow\frac{x}{100}=\frac{69}{180}=38,3C.$$

Exemplo 2.3.2. *Quando se trata de transporte ferroviário de passageiros, a Ásia e a Europa detêm as malhas ferroviárias mais avançadas e com os veículos mais velozes, sendo o Japão o pioneiro na implementação do trem-bala com o Shinkansen Série Zero, ativado em* 1964*. Considerado um símbolo do renascimento do Japão no Pós-Guerra, o modelo permaneceu operando por* 40 *anos sem ter registrado nenhum acidente, e desde então essa tecnologia vem conquistando seu espaço e hoje é um dos meios de transportes mais sofisticados e orgulho para diversos países mundo a fora.*

Disponível em http://www.transportabrasil.com.br.Acesso em:31out.2015.

China - O trem CRH380, em suas diferentes versões, é capaz de atingir velocidades de até $450\ km/h$ *em suas quatro rotas que passam por cidades como Pequim, Xangai, Nanjing e Guangzhou.*
Alemanha - A linha InterCity Express (ICE3) corre entre Franfkurt e Colônia, no Vale do Reno, e entre Munique e Nuremberg, na Bavária, com nove linhas que atingem velocidades de até $320\ km/h$*. O trem CRH380, deslocando-se a uma velocidade média de* $410km/h$*, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, o trem ICE3, deslocado-se a uma velocidade média de* $300km/h$*?*

Solução. *Sendo* $V_m=\dfrac{\Delta S}{\Delta T}$

- *para o trem CRH380, temos* $410=\dfrac{\Delta S_1}{3}$,
- *para o trem ICE3, temos* $300=\dfrac{\Delta S_2}{\Delta T}$,
- *sendo* $\Delta S_1=\Delta S_2$,
- *então* $300\cdot\Delta T=410\cdot 3\rightarrow\Delta T=\dfrac{1230}{300}$.
- *Isto é,* $\Delta T=4,1h$ *ou* $\Delta T=4h6min$.

2.4. Porcentagem

Observe nas lojas os encartes e nos meios de comunicação (jornal, rádio, internet, e.t.c) a quantidade de vezes que a representação % (por cento) está presente. Trata-se de uma linguagem amplamente difundida.

Definição 2.4.1. *Porcentagem- Indica a porcentagem que* a *tem de* b *e representamos por* $x\%$ *(x por cento). Deste modo,* $a=b\cdot x$ *indica que a medida percentual de* a *por* b *é de* $x\%$.

Historicamente, a expressão por cento aparece nas principais obras de aritmética de autores italianos do século XV. O símbolo % surgiu como uma abreviatura da palavra cento utilizada nas operações mercantis.

Exemplo 2.4.1. *Para indicar um índice de 10 por cento, escrevemos* 10% *e isto significa que em cada* 100 *unidades de algo, tomaremos* 10 *unidades. O cálculo de* 10% *de* 90*, por exemplo, pode ser obtido como o produto de* 10% *por* 90*, isto é:* $10\%.90 = \frac{10}{100} \cdot 90 = 900/100 = 9$*. Situações mais elementares, como a citada anteriormente, podem ser resolvidas "de cabeça" (cálculo mental). Imagine que os* 90 *citados são na verdade o valor da conta de um jantar em família; sobre esse valor vamos acrescentar a taxa de serviço de garçom que é de* 10% *sobre o consumo total. Sendo assim, basta dividir por* 10 *o valor da conta, resultando em* 9*, ou melhor, em* $9,00$ *reais e somar este resultado ao total consumido:* $R\$9,00 + R\$90,00 = R\$99,00$.

Em geral, para indicar um índice de M por cento, escrevemos $M\%$ e para calcular $M\%$ de um número N, realizamos o produto: Produto $= M\%.N = (\frac{M}{100}) \cdot N$.

Exemplo 2.4.2. *Um Smartphone é vendido em, no máximo, três prestações mensais e iguais, totalizando o valor de R\$ 1050,00. Caso seja adquirido à vista, a loja o vende por R\$ 924,00. Como calcular o desconto em percentual sobre o Smartphone na compra à vista?*

Solução. *Quando dividimos* $\frac{924,00}{1050,00}$ *encontramos o valor* $0,88$ *ou* $\frac{88}{100} = 88\%$*, isto é, o preço à vista tem* 12% *de desconto.*

Exemplo 2.4.3. *O preço de um produto sofreu um reajuste de* 12%*, aumentando para* $R\$\ 94,08$*. Qual era o preço desse produto antes do reajuste?*

Solução. *Sendo* p *o preço antes do reajuste, temos:*

- $p + 12\% \cdot p = 94,08$
- $p + \frac{12}{100} \cdot p = 94,08$
- $p + 0,12 \cdot p = 94,08$
- $1,12 \cdot p = 94,08$
- $p = \frac{94,08}{1,12} = 84$

Portanto, o preço do produto, antes do reajuste, era $R\$\ 84,00$.

2.4.1 Variação percentual ou taxa de crescimento

Definição 2.4.2. *Consideremos uma grandeza que assuma um valor* V_0 *na data* 0 *e o valor* V_t *numa data futura* t. *Chamamos de variação percentual dessa gradeza entre as datas* 0 *e* t, *e indicamos por* j *o número dado por:*

$$j = \frac{V_t - V_0}{V_0}, \tag{2.1}$$

isto é, variação percentual ou taxa de crescimento é a razão entre o aumento da grandeza e seu valor inicial.

Exemplo 2.4.4. *O preço de um produto sofreu um reajuste de* 12%, *aumentando para* $R\$ \, 94,08$. *Qual era o preço desse produto antes do reajuste?*

Solução. *Sendo* V_0 *o preço antes e* V_t *o preço depois do reajuste, temos:*

- $j = 12\% = \dfrac{12}{100} = 0,12$ e $V_t = 94,08$
- $0,12 = \dfrac{94,08 - V_0}{V_0}$
- $0,12 \cdot V_0 = 94,08 - V_0$
- $0,12 \cdot V_0 + V_0 = 94,08$
- $1,12 \cdot V_0 = 94,08$
- $V_0 = \dfrac{94,08}{1,12} = 84$

Portanto, o preço do produto, antes do reajuste, era $R\$ \, 84,00$.

3. FUNDAMENTOS DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

3.1. Contexto Histórico

As progressões foram estudadas desde povos muito antigos como os babilônios. Inicialmente, procurou-se estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo, onde os egípcios de 5000 anos atrás tiveram que observar os períodos em que ocorria a enchente do rio, pois para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos, os egípcios precisavam saber quando haveria inundação. Havia, portanto, necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento.

Eles observaram que o rio subia logo depois que estrela Sirius se levantava a leste, um pouco antes do sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês. Os egípcios dividiram os doze meses em três estações de quatro meses: período de semear, período de crescimento e período da colheta.

3.2. Progressão Aritmética (P.A)

Definição 3.2.1. *Progressão Aritmética-PA - Uma progressão aritmética é uma sequência de números* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ *na qual é constante a diferença entre cada termo* a_n *e o seu antecessor* a_{n-1}. *Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e será representada por r. Assim, uma progressão aritmética de razão r é uma sequência* (a_n) *na qual* $a_n - a_{n-1} = r$, *para todo n inteiro e positivo.*

Exemplo 3.2.1. *O preço de um certo carro novo é* $R\$\ 39.000,00$. *No final do primeiro ano de uso ele vale* $R\$\ 36.600,00$ *e no final do segundo ano de uso ele vale* $R\$\ 34.200,00$.*Como saber o preço desse carro com 8 anos de uso? São comuns, na vida real, gradezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais. Note que o valor do carro, decresce de* $R\$\ 2.400,00$ *em* $R\$\ 2.400,00$ *para cada ano de uso. Este valor é chamado de razão desta sequência e tal sequência é chamada de Progressão Aritmética (PA).*

Classificação 3.2.1. *As progressões aritméticas (PA) podem ser classificadas em:*

I. Crescentes - são as PA'S em que cada termo é maior que o anterior. É imediato que isso ocorre somente se $r > 0$, *pois:*

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow r > 0.$$

Por exemplo: $(11, 18, 25, \cdots)$ *(PA crescente,* $r = 7$*)(cada termo é igual ao anterior mais* 7*).*

II. *Constantes - são as PA'S em que cada termo é igual ao anterior. Isso só ocorre quando $r = 0$, pois:*

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

Por exemplo: $(-1, -1, -1, \cdots)$ *(PA constante, $r = 0$)(todos os termos iguais).*

III. *Decrescente - são as PA'S em que cada termo é menor que o anterior. Isso ocorre somente se $r < 0$, pois:*

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \Leftrightarrow r < 0.$$

Por exemplo: $(12, 3, -6, \cdots)$ *(PA decrescente, $r = -9$)(cada termo é igual ao anterir menos 9).*

Teorema 3.2.1. *Se a_n é uma progressão aritmética de razão r, então $a_n = a_1 + (n-1)r$, para todo n inteiro e positivo.*

Demonstração. Pela definição de progressão aritmética, temos

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= r \\ a_3 - a_2 &= r \\ a_4 - a_3 &= r \\ &\cdots \\ a_n - a_{n-1} &= r \end{aligned}$$

Somando essas $n-1$ igualdades, obtemos $a_n - a_1 = (n-1)r$, isto é, $a_n = a_1 + (n-1)r$. Esta expressão representa o termo geral da progressão aritmética. □

Exemplo 3.2.2. *Em cada região especificada pela Agência Nacional de Telecomunicação (Anatel), as frequêcias das emissoras de rádio FM devem variar de $87,9MHz$ a $107,9MHz$, e a diferença entre duas frequências consecutivas deve ser $0,2MHz$. Qual o número máximo de emissoras FM que podem funcionar em uma mesma região determinada pela Anatel?*

Solução. *Como a diferença entre as frequências de duas emissoras consecutivas deve ser $0,2MHz$, temos que todas as frequências de determinada região formam uma P.A de razão $r = 0,2$, com $a_1 = 87,9$ e $a_n 107,9$. Para saber o número máximo de emissoras, basta determinar o número de elementos dessa P.A, ou seja, determinar n tal que $a_n = 107,9$. Sendo $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos $107,9 = 87,9 + (n-1) \cdot 0,2 \to 20 = (n-1) \cdot 0,2 \to 100 - n - 1$. isto é, $n = 101$. Portanto, 101 emissoras de rádio FM.*

Quando o grande matemático Carl F. Gauss (1777-1855) tinha sete anos de idade, seu professor lhe pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 até 100. O professor, esperando que o trabalho durasse pelo menos uma hora, ficou supreso quando, em poucos minutos, o pequeno Gauss anunciou que o valor da soma era 5050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o cálculo tão rapidamente. Gauss explicou-lhe que somara primeiramente $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98 \cdots$ Assim obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era $50 \times 101 = 5050$

Baseado nessa mesma idéia, podemos calcular a soma dos termos de uma progressão aritmética (PA) qualquer.

Teorema 3.2.2. *A soma dos* **n** *primeiros termos da progressão aritmética* $(a_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ *é igual a*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

e

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1).$$

Obeserve que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$.

Logo, $2S_n = (a_1 + a_n)n$ ou

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \tag{3.1}$$

□

Exemplo 3.2.3. *A razão de uma P.A. é igual a* 12% *do primeiro termo. Sabendo que o* 11 *termo vale* 33*, determine o valor da soma dos* 20 *primeiros termos dessa P.A.*

Solução.

- *Temos* $r = 12\% a_1 = 0,12 a_1$,
- $a_{11} = 33 \Rightarrow a_1 + (11-1) \cdot 0,12 a_1 = 33 \Rightarrow a_1 = 15.$
- *Portanto,* $r = 0,12 \cdot 15 = 1,8$ e $a_{20} = 15 + (20-1) \cdot 1,8 = 49,2.$
- *Assim,* $S_{20} = \dfrac{(15 + 49,2) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 642.$

Exemplo 3.2.4. *Senhor Paulo resolveu dar a seu filho Chiquinho uma mesada de R\$* $300,00$ *por mês. Chiquinho, que é muito esperto, disse a seu pai que, em vez da mesada de R\$* $300,00$*, gostaria de receber um pouquinho a cada dia: R\$* $1,00$ *no primeiro dia de cada mês e, a cada dia, R\$* $1,00$ *a mais que no dia anterior até o final de cada mês. Senhor Paulo concordou, mas* *ao final do primeiro mês, logo percebeu que havia saído no prejuízo. Calcule quanto, em um mês com 30 dias, Chiquinho receberá a mais do que receberia com a mesada de* $R\$\ 300,00$.

Solução. *Como Chiquinho recebe* $R\$\ 1,00$ *no primeiro dia e um* $R\$\ 1,00$ *a mais que no dia anterior, é fácil ver que os valores diários formam uma P.A. crescente de razão igual* 1. *O montante em 30 dias é a soma dessa P.A. Portanto,*

- $a_1 = 1$
- $a_{30} = 1 + 29 \cdot 1 = 30$
- $S_{30} = \dfrac{(a_1 + a_{30})n}{2} = \dfrac{(1+30) \cdot 30}{2}$
- $S_{30} = \dfrac{31 \cdot 30}{2} = 31 \cdot 15 = 465.$

Logo, Chiquinho receberá a mais $R\$\ 165,00$.

3.3. Progressão Geométrica (P.G)

Definição 3.3.1. *Progressão Geométrica PG - Uma progressão geométrica é uma sequência de números* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ *na qual é constante o quociente da divisão de cada termo a partir do segundo pelo seu antecessor. Esse quociente constante é representado por* q *chamado de razão da progressão. Logo, para avançar do primeiro termo para o segundo, multiplicamos por* q *este termo, ou seja,* $a_2 = a_1 q$ *e do segundo termo para o terceiro de novo multiplicamos por q este termo e temos* $a_3 = a_2 q$. *Assim, uma progressão geométrica de razão q é uma sequência* (a_n) *na qual* $a_n = a_{n-1} q$, *para todo n inteiro positivo.*

Exemplo 3.3.1. *São progressões geométricas:*

- $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ *em que* $a_1 = 1$ e $q = 2$
- $(-1, -3, -9, -27, \ldots)$ *em que* $a_1 = -1$ e $q = 3$
- $(21, 21, 21, \ldots)$ *em que* $a_1 = 21$ e $q = 1$.

Classificação 3.3.1. *As progressões geométricas (PG) podem ser classificadas em:*

I. Crescente - São as PG'S em que cada termo é maior que o anterior. Notemos que isso ocorre de duas maneiras:

(a) PG com termos positivos

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$$

por exemplo: $(3, 12, 48, \ldots)$ *em que* $a_1 = 3$ e $q = 4$

(b) *PG com termos negativos*

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$$

por exemplo: $(-28, -14, -7, \frac{-7}{2}, \ldots)$ *em que* $a_1 = -28$ e $q = \frac{1}{2}$.

II. *Constante - São PG'S em que cada termo é igual ao anterior. Observemos que isso ocorre em duas situações:*

(a) *PG com termos todos nulos* $a_1 = 0$ e q *qualquer.*

(b) *PG com termos iguais e não nulos*

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \Leftrightarrow q = 1$$

por exemplo: $(5, 5, 5, 5, \ldots)$ *em que* $a_1 = 5$ e $q = 1$.

III. *Decrescente - São as PG'S em que cada termo é menor que o anterior. Notemos que isso ocorre de duas maneiras:*

(a) *PG com termos positivos*

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$$

por exemplo: $(5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots)$ *em que* $a_1 = 5$ e $q = \frac{1}{5}$

(b) *PG com termos negativos*

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$$

por exemplo: $(-3, -12, -48, -192, \ldots)$ *em que* $a_1 = -3$ e $q = 4$.

IV. *Altenantes - São as PG'S em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isso ocorre quando* $q < 0$. *Por exemplo:* $(3, -6, 12, -24, \ldots)$ *em que* $a_1 = 3$ e $q = -2$.

V. *Estacionária - São as PG'S em que* $a_1 \neq 0$ *e* $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$. *Isso ocorre quando* $q = 0$. *Por exemplo:* $(\sqrt{3}, 0, 0, 0, \ldots)$ *em que* $a_1 = \sqrt{3}$ e $q = 0$.

Teorema 3.3.1. *Em toda progressão geométrica* (a_n) *de razão q, tem-se,* $a_n = a_{n-1}q$, *para todo n inteiro e positivo.*

Demonstração. Pela definição de progressão geométrica , temos que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q \\ a_4 &= a_3 q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} q \end{aligned}$$

multiplicando essas $n-1$ igualdades, obtemos $a_n = a_1 q^{n-1}$. Esta expressão representa o termo geral da progressão geométrica. □

Exemplo 3.3.2. *Determinar o* 9 *termo da PG* $(3, 12, 48, \ldots)$

Solução.*Devemos determinar* $a_n = a_1 q^{n-1}$ *dessa PG tal que:*
$a_1 = 3$
$q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{12}{3} = 4$
$n = 9$
Logo, $a_9 = 3 \cdot 4^8 = 3 \cdot 65.536 = 196.608$

Exemplo 3.3.3. *Uma estimativa prevê um crescimento anual de* $0,15\%$ *na população de uma cidade. Supondo que essa estimativa esteja correta, calcular a população dessa cidade daqui a* 12 *anos, sabendo que a população atual é de* 63.500 *habitantes.*

Solução. *A sequência crescente das populações, ano a ano, dessa cidade, a partir do momento atual, é a PG de razão* 1,0015 *e primeiro termo* 63.500. *O termo* a_{12} *dessa PG é a população da cidade daqui a* 12 *anos.*
Pela expressão do termo geral, temos que
$a_{12} = 63.500 \cdot (1,0015)^{11}$
com o auxílio de uma calculadora, obtemos $(1,0015) \approx 1,017$ *e, portanto,*
$a_{12} \approx 63.500 \cdot 1,017 = 64.579,5$
Logo, daqui a 12 *anos a população da cidade será de* 64.579 *habitantes, aproximadamente.*

Teorema 3.3.2. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica* (a_n) *de razão* $q \neq 1$ *é igual a*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{3.2}$$

Demonstração. (Primeiro método)

Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ e, multiplicando por q, obtemos

$$qS_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q$$

Subtraindo essas iguldades, obtemos

$$S_n - qS_n = a_1 - a_n q = a_1 - a_1 q^n,$$

ou seja, $S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$.

Daí, já que $q \neq 1$, temos $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

□

Demonstração. (Segundo método: utilizando Indução Matemática)
Considere $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
Note que $P(1): \quad S(1) = a_1 \cdot \dfrac{1-q^1}{1-q} = a_1$ é verdadeiro.
Agora, suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $P(n)$ verdadeiro, isto é, a fórmula (2.2) é válida para tal valor n. Queremos provar que $P(n+1)$ é verdadeiro, isto é, $S_{n+1} = a_1 \cdot \dfrac{[1-q^{n+1}]}{1-q}$. Desenvolvendo, temos que

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$. $S_{n+1} = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} + a_1 \cdot q^n$

$S_{n+1} = a_1 \cdot \dfrac{[1-q^n+(1-q)\cdot q^n]}{1-q}$

$S_{n+1} = a_1 \cdot \dfrac{[1-q^n+q^n-q^{n+1}]}{1-q}$

$S_{n+1} = a_1 \cdot \dfrac{[1-q^{n+1}]}{1-q}$. □

Exemplo 3.3.4. *Calcule a soma das* 10 *parcelas iniciais da série* $(1\ +3\ +9\ +27\ +\ldots.)$

Solução.

- *Se* $q = 3$, $a_1 = 1$ *e* $n = 10$
- *aplicando a fórmula* (2.2), *então,*
- $S_{10} = 1 \cdot \dfrac{(1-3^{10})}{1-3} = 29.524$.

Exemplo 3.3.5. *Haroldo fez um regime alimentar durante nove meses. No primeiro mês, emagreceu* $4Kg$ *e, em cada um dos demais meses, emagreceu metade do que emagrecera no mês anterior. Quantos quilogramas Haroldo perdeu nesses nove meses?*

Solução. *É fácil ver que os valores mensais formam uma P.G decrescente de razão igual* $\frac{1}{2}$. *Para responder a essa pergunta, vamos construir a sequência formada pelos quilogramas perdidos nesse período:*

- $(4,\ 2, 1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64})$
- *indiquemos por* S_9 *a soma de seus nove termos*
- $S_9 = a_1 \cdot \frac{1-q^9}{1-q} = 4 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^9}{1-\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1-\frac{1}{2^9}}{\frac{1}{2}}$
- $S_9 = 8 \cdot (1 - \frac{1}{512}) = 8 - \frac{8}{512} = 8 - \frac{1}{64} = \frac{512-1}{64} = \frac{511}{64}$
- $S_9 = 7,984$

Logo, Haroldo emagreceu $8Kg$ *aproximadamente.*

4. FUNDAMENTOS DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS

4.1. Contexto Histórico

Com o desenvolvimento da astronomia e da navegação no fim do século XVI, a matemática dos cálculos aritméticos utilizados, se tornaram mais longos e laboriosos. Então, achar um método que permitisse efetuar com rapidez multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes era na época um problema fundamental.

A invenção dos logaritmos veio a ter um tremendo impacto sobre a estrutura da matemática nos cálculos aritméticos. Diversos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento dos logaritmos que conhecemos hoje, mas o escocês John Napier (1550-1617) foi de fato o primeiro a publicar uma obra em 1614 sobre logaritmo, sendo que idéias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente pelo suíço Jost Bürgi (1552-1632), mais ou menos ao mesmo tempo. Porém, Bürgi só públicou seus resultados em 1620.

4.2. Logaritmos

Definição 4.2.1. *Para todo número real positivo $a \neq 1$, uma função real $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica de base a ou um sistema de logaritmos quando tem as seguintes propriedades:*

A) Se $a > 1$, $\log_a$ é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;

B) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, o número $\log_a x$ chama-se o logaritmo de x.

A lista de propriedades das funções logarítmicas que seguem abaixo, são consequências de A e B acima enunciadas.

Propriedade 4.2.1. *Uma função logarítmica $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números diferentes têm logaritmos diferentes.*

Demonstração. Com efeito, se $x, y \in \mathbb{R}^+$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, resulta da propriedade A que $\log_a x < \log_a y$. No segundo caso tem-se $\log_a y < \log_a x$. Em qualquer hipótese, de $x \neq y$ conclui-se que $log_a x \neq log_a y$.

□

Propriedade 4.2.2. $\log_a 1 = 0$.

Demonstração. Com efeito, pela propriedade B temos
$\log_a 1 = \log_a(1\cdot 1) = \log_a 1 + log_a 1$, logo $log_a 1 = 0$. $\square$

Propriedade 4.2.3. *Uma função logarítmica não está definida para $x = 0$.*

Demonstração. Com efeito, se existisse $\log_a 0$, para $x \neq 0$, teríamos $\log_a 0 = \log_a(x\cdot 0) = \log_a x + \log_a 0$, então $\log_a x = 0$. Assim a função seria identicamente nula, o que contraria a propriedade A. $\square$

Propriedade 4.2.4. *Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.*

Demonstração. Com efeito, sendo $a > 1$, temos $\log_a$ crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta $\log_a x < \log_a 1 < \log_a y$, isto é $\log_a x < 0 < \log_a y$. $\square$

Propriedade 4.2.5. *Para todo $x > 0$, tem-se $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log x$*

Demonstração. Com efeito, de $x\cdot(\frac{1}{x}) = 1$ resulta que $\log_a x + log_a(\frac{1}{x}) = log_a 1 = 0$, donde $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$ $\square$

Propriedade 4.2.6. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, vale*

$$\log_a(\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y$$

Demonstração. Com efeito,

$$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x(\frac{1}{y})) = \log_a x - \log_a y.$$

$\square$

Propriedade 4.2.7. *Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = \frac{p}{q}$ tem-se $\log_a x^r = r log_a x$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observa-se que $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ se estende para o produto de um número qualquer de fatores. Por exemplo,

$$\log_a(xyz) = \log_a(xy)z = \log_a xy + \log_a z = \log_a x + \log_a y + \log_a z.$$

E assim por diante:

$$\log_a(x_1 x_2 x_3 \cdots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \cdots + \log_a x_n.$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$ então

$$\log_a(x^n) = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdots x) = \log_a x + \log_a x + \log_a x + \cdots + \log_a x = n\log_a x.$$

Portanto, vale quando $r = n$ é um natural. Para todo número $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se que $x^0 = 1$, logo $\log_a(x^0) = \log_a 1 = 0 = 0\cdot\log_a x$, isto é, vale também quando $r = 0$.

Consideremos agora o caso em que $r = -n, n \in \mathbb{N}$, isto é, onde r é um inteiro negativo. Então, para todo $x > 0$ temos $x^n \cdot x^{-n} = 1$. Logo

$$\log_a(x^n) + \log_a(x^{-n}) = \log_a 1 = 0,$$

e daí

$$\log_a(x^{-n}) = -\log_a(x^n) = -n\log_a x.$$

Finalmente, o caso geral, em que $r = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos

$$(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^p.$$

Logo $q \cdot \log_a(x^r) = \log_a[(x^r)^q] = \log_a(x^p) = p \cdot \log_a x$, em virtude do que já foi provado. Da igualdade $q \cdot \log_a(x^r) = p \cdot \log_a x$ resulta que $\log_a(x^r) = (\frac{p}{q}) \cdot \log_a x$, ou seja, que $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$. $\square$

Propriedade 4.2.8. *Uma função logarítmica $log : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.*

Demonstração. Primeiro iremos provar que ela é ilimitada superiormente. Seja $a > 1$. Suponhamos que nos seja dado um número real β e que sejamos desafiados a achar um número $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\log_a x > \beta$. Procederemos da seguinte maneira: tomamos um número natural n tão grande que $n > \dfrac{\beta}{log2}$. Como $log2$ é positivo (Propriedade 3.2.4), temos $n \cdot \log_a 2 > \beta$. Usando a Propriedade 5, vemos que $n \cdot log2 = \log_a(2^n)$. Portanto, $\log_a(2^n) > \beta$. Agora é só escolher $x = 2^n$. Temos $\log_a x > \beta$. Isto mostra que log é ilimitada superiormente.

Para provar que log também é ilimitada inferiormente, basta lembrar que $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$. Dado qualquer número real α, como vimos acima, podemos achar $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $logx > -\alpha$. Então, pondo $y = \frac{1}{x}$, teremos $\log_a y = -\log_a x < \alpha$.

$\square$

Teorema 4.2.1. *Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Mostraremos, neste caso, que $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$. Sendo $L(a) = M(a)$ concluímos que $L(a^r) = M(a^r)$ para todo r racional, pois $L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$. Suponhamos, por absurdo, que existisse algum $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Sem perda de generalidade, consideramos $L(b) < M(b)$. Escolhamos um número n suficientemente grande tal que

$$n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a).$$

Então

$$M(b) - L(b) > \frac{L(a)}{n} = L(a^{\frac{1}{n}}).$$

Por simplicidade, escrevamos $c - L(a^{\frac{1}{n}})$. Os números c, $2c$, $3c, \ldots$ dividem a reta real $(\mathbb{R}^+)$ em intervalos justapostos, de comprimento c. Como $c < M(b) - L(b)$, pelo menos um desses números, digamos $m \cdot c$, pertence ao interior do intervalo $(L(b), M(b))$, ou seja, $L(b) < m \cdot c < M(b)$. Daí tem-se que,

$$m \cdot c = m \cdot L(a^{\frac{1}{n}}) = L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}).$$

Então

$$L(b) < L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}) < M(b).$$

Como $L(x)$ é crescente, segue da primeira desigualdade $b < a^{\frac{m}{n}}$. Por outro lado, como M também é crescente, a segunda desigualdade implica $a^{\frac{m}{n}} < b$. Esta contradição mostra que b não existe: devemos ter $M(x) = L(x)$ para todo $x > 0$.

O caso geral reduz-se ao caso particular acima. Dadas L e M, funções logarítmicas arbitrárias, consideremos os números $L(x_0) > 0$ e $M(x_0 > 0)$ para algum $x_0 > 1$. Seja $c = \dfrac{M(x_0)}{L(x_0)} > 0$. Consideremos a função logarítmica $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $N(x) = c \cdot L(x)$. Como $N(x_0) = c \cdot L(x_0) = \dfrac{M(x_0)}{L(x_0)} \cdot L(x_0) = M(x_0)$, segue-se do que se provou acima que $N(x) = M(x)$ para todo $x > 0$, ou seja, que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 4.2.2. *Toda função logarítmica é sobrejetiva, isto é , dado qualquer número real c, existe sempre um (único) número real positivo x tal que $L(x) = c$.*

Para verificar a validade do teorema acima, faremos uso do seguinte lema

Lema 4.2.1. *Seja $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Dados arbitrariamente dois números reais $u < v$, existe $x > 0$ tal que $u < L(x) < v$.*

Demonstração do Lema. Fixemos um número natural n maior do que $\dfrac{L(2)}{v-u}$. Logo, é válido

$$n > \frac{L(2)}{v-u} \Rightarrow \frac{L(2)}{n} < v - u.$$

Considerando $c = \dfrac{L(2)}{n}$, temos que os múltiplos inteiros

$$m \cdot c = \frac{m}{n} \cdot L(2) = L(2^{\frac{m}{n}}),\ m \in \mathbb{Z},$$

decompõem a reta real $(\mathbb{R}^+)$ em intervalos justapostos, cujo comprimento $c = \dfrac{L(2)}{n}$ é menor do que o comprimento $v - u$ do intervalo $I = (u, v)$. Portanto, pelo menos um desses múltiplos $m \cdot c = L(2^{\frac{m}{n}})$ cai no interior do intervalo $I(u, v)$. Denotando $x = 2^{\frac{m}{n}}$, temos $u < L(x) < v$. $\square$

Antes de demonstrar o Teorema, lembremos que todo número real admite representação decimal

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \ldots,$$

onde a parte inteira α_0 é um número inteiro qualquer e os algarismos decimais α_n, $n \geq 1$, podem assumir os valores $0,\ 1,\ldots,\ 9$. Para todo $n \geq 0$, escrevemos

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n}.$$

Tem-se $\alpha_n \leq \alpha$ e $\alpha - \alpha_n < \dfrac{1}{10^n}$ para todo $n \geq 0$.

Se um número real x é menor do que α, então deve existir um $n \geq 0$ talque $x < \alpha_n$. Com efeito, $x < \alpha$ significa que $\alpha - x$ é número real positivo. Tomemos n tão grande que

$$\frac{1}{10^n} < \alpha - x.$$

Então

$$\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n} \alpha - x$$

logo $\alpha - \alpha_n < \alpha - x$. Daí resulta $x < \alpha_n$.

Demonstração do Teorema 3.2.2. Dado arbitrariamente um número real b, devemos obter um número real positivo α tal que $L(\alpha) = b$. Vamos obter α determinando cada um dos seus algarismos que compõe a sua representação decimal. Para determinar a parte inteira α_0, lembramos que L é uma função crescente ilimitada, logo devem existir inteiros k tais que $L(k) > b$. Seja $\alpha_0 +\ 1$ o menor inteiro tal que $L(\alpha_0 + 1) > b$. Então temos $L(\alpha_0) \leq b < L(\alpha_0 + 1)$.

Em seguida, consideremos os números

$$\alpha_0,\ \alpha_0 + \frac{1}{10},\ \alpha_0 + \frac{2}{10}, \ldots,\ \alpha_0 + \frac{9}{10},\ \alpha_0 +\ 1.$$

Como $L(\alpha_0) \leq b < L(\alpha_0 + 1)$ devem existir dois elementos consecutivos α e $\alpha_1 + \dfrac{1}{10}$ nessa sequência tais que $L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + \dfrac{1}{10})$, isto é, deve existir α_1 inteiro, $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que, pondo

$$\alpha_1 = \alpha_0,\ \ \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}.$$

Tem-se

$$L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + \frac{1}{10}).$$

Analogamente, considere os números

$$\alpha_1,\ \alpha_1 + \frac{1}{10^2},\ \alpha_1 + \frac{2}{10^2}, \ldots,\ \alpha_1 + \frac{9}{10^2},\ \alpha_1 + \frac{1}{10},$$

vemos que existe α_2, $0 \leq \alpha_2 \leq 9$, tal que, pondo

$$\alpha_2 = \alpha_0, \alpha_1 \quad \alpha_2 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2},$$

tem-se

$$L(\alpha_2) \leq b < \alpha_2 + \frac{1}{10^2}.$$

Prosseguindo analogamente, encontramos a representação decimal de um número real

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \dots$$

tal que , pondo $\alpha_n = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha - n$, tem-se:

$$L(\alpha_n) \leq b < L(\alpha_n + \frac{1}{10^n})$$

para todo $n \geq 0$.

Afirmamos que $L(\alpha) = b$. De fato, se fosse $L(\alpha) < b$, usaríamos o Lema para obter $x > 0$ tal que $L(\alpha) < L(x) < b$ Como L é crescente, isto implicaria $\alpha < x$. Então, tomando n tão grande que $x - \alpha > \frac{1}{10^n}$ teríamos $\alpha + \frac{1}{10^n} < x$, logo

$$\alpha_n + \frac{1}{10^n} \leq \alpha + \frac{1}{10^n} < x.$$

Como L é crescente, de $x > \alpha_n + \frac{1}{10_n}$ resultaria

$$L(x) > L(\alpha_n + \frac{1}{10^n}) > b,$$

um absurdo, pois o número x foi obtido de modo que $L(x) < b$.

Analogamente, não se pode ter $L(\alpha) > b$. Com efeito, usando novamente o Lema, obteríamos $x > 0$ tal que

$$b < L(x) < L(\alpha).$$

Como L é crescente, de $L(x) < L(\alpha)$ concluiríamos que $x < \alpha$. Isto implicaria, entretanto, que $x < \alpha_n$ para algum n. Então $L(x) < L(\alpha_n) \leq b$, contrariando o fato de que x foi obtido de modo a satisfazer $b < L(x)$. □

Corolário 4.2.1. *Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívica (bijeção) entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$.*

4.3. Exponenciais

Definição 4.3.1. *Exponencial - Uma bijeção $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ chama-se uma função exponencial, indicada pela notação $E(x) = a^x$, quando sua inversa $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica, ou seja,*

$$L(x) = y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Seja a um número real positivo diferente de 1. A bijeção $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, com $E(x) = a^x$, é dita função exponencial de base a.

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, a função exponencial possui a seguintes propriedades:

Propriedade 4.3.1. $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$.

Com efeito,

$$E(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = E(x) \cdot E(y).$$

Propriedade 4.3.2. *Se $E(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, então E é identicamente nula.*

Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $E(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$E(x) = E(x_0 + (x - x_0)) = E(x_0) \cdot E(x - x_0)) = 0 \cdot E(x - x_0) = 0,$$

logo E será indenticamente nula.

Mais ainda, a função é sempre positiva, $E(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois,

$$E(x) = E(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = E(\frac{x}{2}) \cdot E(\frac{x}{2}) = [E(\frac{x}{2})]^2 > 0.$$

Propriedade 4.3.3. $E(1) = a$.

Com efeito, como $E(1) = x \Leftrightarrow \log_a x = 1 \Leftrightarrow x = a$. Então, $E(1) = a$.

Propriedade 4.3.4. $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$, *quando* $a > 1$ e $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$, *quando* $0 < a < 1$.

A propriedade diz que a função exponencial é crescente para $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Daí resultará que existe uma única maneira de definir o valor de $E(x) = a^x$ quando x é irracional. Supondo que $a > 1$, então a^x tem a seguinte propriedade

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Não podem existir dois números reais diferentes, digamos $\alpha < \beta$, com a propriedade acima. Se existissem tais α e β teríamos

$$r < x < s, \ r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < \alpha < \beta < a^s$$

e então o intervalo $[\alpha, \beta]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, o que é um absurdo.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, $r < x$ e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, $x < s$

Propriedade 4.3.5. *A função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, E(x) = a^x, a \neq 1$, é ilimitada superiormente.*

Se $a > 1$, então a^x cresce, indefinidamente quando $x > 0$, ou seja,

$$\lim_{x \to \infty} a^x = +\infty.$$

E se $0 < a < 1, a^x$ torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$, ou seja,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

Propriedade 4.3.6. *A função exponencial é contínua.*

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ é possível tornar a diferença $| \ a^x - a^{x_0} \ |$ tão pequeno quanto se deseja, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0, ou seja

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Suponhamos $a > 1$ e $h = x - x_0 > 0$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, mostraremos que, tomando h pequeno, teremos $a^h < 1 + \varepsilon$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, temos que $n\varepsilon > a - 1$ logo, $a < 1 + n\varepsilon$.

Desigualdade de Bernoulli[1]. *Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, vale $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Pela desigualdade, temos $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$, então $a < (1+\varepsilon)^n$ e $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.*

Agora fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ e $h = x - x_0$, temos

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0 + h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

Se x se aproxima de x_0, h tende a zero, a^h tende a^0, $a^h - 1$ tende a zero, logo

$$\lim_{x \to x_0} (a^x - a^{x_0}) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Propriedade 4.3.7. *A função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, E(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetiva.*

Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$.

Supomos $a > 1$, $n \in \mathbb{N}$, escolhemos uma potência a^{r_n}, com r_n, no intervalo$(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$ de modo que $| \ b - a^{r_n} \ | < \frac{1}{n}$. Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b.$$

Assim, escolhemos as potências r_n sucessimente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b.$$

Assim, (r_n) é uma sequência crescente, limitada superiormente por s. Logo, os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, tal que

$$\lim_{x \to x_0} r_n = x.$$

A função exponencial sendo contínua, temos então

$$a^x = \lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b,$$

como queríamos demonstrar.

Vemos, pois, que para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $E(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com propriedade de transformar somas em produtos, isto é, $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$.

---

[1]Desigualdade demonstrada no Teo. 4.3.2.

5. NOÇÕES BÁSICAS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

A Matemática Financeira tem importância significativa na tomada de decisões corretas tais como: empréstimos, nas compras, no orçamento familiar, bem como economizar, investir e poupar.

Uma boa compreensão dos conteúdos referentes à Matemática Financeira poderá facilitar o controle financeiro em transações comerciais, bancárias, orçamento familiar entre outros, que são essenciais para um bom desempenho do indivíduo na sociedade. A falta de conhecimento sobre o assunto resultará em dificuldades que levarão a um controle financeiro inadequado. Portanto, como utilizar os conceitos Matemáticos Financeiros no cotidiano do aluno para uma boa Educação Financeira? Para responder esta questão busca-se proporcionar os conhecimentos básicos da Matemática Financeira no ensino médio e a reflexão sobre a importância no orçamento familiar no cotidiano do aluno.

A proposta aqui sugerida é a de se trabalhar a Matemática Financeira no Ensino Médio por meio de situações mais próximas da realidade e que possam suscitar nos alunos algum interesse acerca dessas relações financeiras.

O contorno em que serão apresentadas as atividades busca promover a Educação Financeira, através da informação e experimentação acerca de temas que um dia esses alunos terão contato, seja na compra de um bem móvel ou imóvel, na hora de programarem uma poupança para viagem ou mesmo, quando já estiverem no mercado de trabalho como assalariados ou empregadores.

5.1. Contexto Histórico

No passado, os homens viviam em comunidades distantes uma das outras, plantando e criando animais para assim suprir as suas necessidades. Com o desenvolvimento do artesanato e da cultura, passou a ser necessário realizar trocas, que foram aumentando gradativamente entre as comunidades.

Surge assim o escambo[1], como primeira troca comercial. Devido ao crescimento das trocas, em pouco tempo, o Homem percebeu a necessidade de um elemento de valor que intermediasse a operação. Assim surgiu a moeda, o dinheiro, o sistema monetário mais organizado com alguns princípios e padrões.

Pode-se citar alguns exemplos de mercadorias que eram utilizadas na intermediação das trocas. Como é o caso nas ilhas do Pacífico, as mercadorias foram estimadas em colares de pérolas ou de conchas. Após certo período, começou-se por trocar faixas de tecido por animais ou objetos. O tecido era a moeda; a unidade era o palmo da fita de duas vezes oitenta fios de largura.

Na medida em que o comércio se desenvolvia, os metais de valor desempenharam um papel

[1] Troca de mercadoria ou serviços sem fazer uso de moeda

importante nas transações comerciais, o que acabou se tornando a moeda de troca preferida dos vendedores e compradores. As mercadorias passaram a ser feitas através do peso, com um padrão que era relacionado a um metal ou a outro.

Utilizando esses metais e seus padrões se realizavam pagamento e multas, no caso das multas se tem uma noção dos primeiros cálculos de juros.

Disponível em http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php/tempo. Acesso em: 12 out. de 2015.

5.2. Fundamentos de Razão, Proporções e Porcentagens aplicados à Matemática Financeira

Exemplo 5.2.1. *Com a proximidade do evento e com muitos ingressos disponíveis, Carlos que é cambista passou a ofererecer um desconto de* 50% *sobre o preço de venda de certo tipo de ingresso. Mesmo dando o desconto, o Carlos ainda obteve um lucro de* 40% *sobre o preço de custo (preço de bilheteria) desse ingresso. Se não tivesse dado o desconto, mas tivesse, mesmo assim, vendido o ingresso, o lucro de Carlos seria de quanto?*

Solução. Uma estratégia para resolver questões que envolvem apenas porcentagem (questões que não são apresentados valores fixos) é atribuir um valor para um dos termos.
Considere que o preço do ingresso na bilheteria (custo) seja $R\$ \ 100,00$. Teremos então:

- Lucro de Carlos quando oferece 50% de desconto é $R\$ \ 40,00$.
- Valor do ingresso vendido por Carlos (com desconto) $\rightarrow R\$ \ 100,00 + R\$ \ 40,00 = R\$ \ 140,00$.
- Valor do ingresso vendido por Carlos (sem desconto) $\rightarrow R\$ \ 140,00 + R\$ \ 140,00 = R\$ \ 280,00$.
  Portanto, o lucro de Carlos ao vender o ingresso sem desconto é de $R\$ \ 180,00$ ou 180% do valor da bilheteria.

□

Exemplo 5.2.2. *Nas figuras abaixo temos duas faturas uma de energia elétrica e outra de água. Analizando essas faturas, responda:*

Solução. a) Sabendo que o valor do salário mínimo em vigência no Brasil é de R$ 788,00 e que o dono destas faturas recebe dois salários mínimos e meio, contribuindo 9% para previdência social (INSS). Qual a porcentagem ele gasta do seu salário líquido com essas faturas?

- $d_{INSS} = 788 \times 9\% = 788 \times \dfrac{9}{100} = 70,92$
- $S_l = 788 - d_{INSS} = 788 - 70,92 = 717,08$
- $P_{total} = P_1 + P_2 = 146,20 + 41,21 = 187,41$

Eletrobras
Distribuição Alagoas

Para contato com a Eletrobras, informe este NÚMERO

SEU CÓDIGO 506909-2

v. Fernandes Lima, nº 3349 - Grutas de Lourdes - CEP: 57057-900
ACEIÓ/AL - CNPJ: 12.272.084/0001-00 - IE: 24007177-8
EGIME ESPECIAL DE IMPRESSÃO AUTORIZADO PELA SEC. DA FAZENDA
F/FATURA DE ENERGIA ELÉTRICA/SERVIÇO SÉRIE U Nº

Nº da Nota Fiscal 000052330

A Tarifa Social de Energia Elétrica – TSEE foi criada pela Lei nº 10.438 de 26 de abril de 2002.

CONTA MÊS	VENCIMENTO	CONSUMO (kWh	TOTAL A PAGAR (R$)
SETEMBRO/2015	21/09/2015	190	146,20

LDO AGUSTINHO ALVES
VICENTE CELESTINO 40 SANTA LUCIA
7.082-036 - MACEIO ROT: 001.40.011.004320

DADOS DA LEITURA	kWh	kVArh
Atual:	7902	
Anterior:	7712	
Constante de Multiplicação:	1,000	
Consumo Medido:	190	
Consumo Faturado:	190	FCAM

DATAS DA LEITURA	
Atual:	04/09/2015
Anterior:	05/08/2015
Próxima Leitura:	04/10/2015
Emissão:	04/09/2015
Apresentação:	04/09/2015

Forma de Faturamento: NORMAL Fator de Potência: Dias de Consumo: 30

DADOS DA UNIDADE CONSUMIDORA

Classe/Subclasse	Ligação	Número Medidor	Poste	Código Fat	Média 12 meses
ESIDENCIAL	MONO	E2038634	S 1 02209 1.1.1.1		210

HISTÓRICO kWh

Mês/ano	consumo
AGO/15	172
JUL/15	209
JUN/15	217
MAI/15	225
ABR/15	248
MAR/15	236
FEV/15	211
JAN/15	219
DEZ/14	219
NOV/14	195
OUT/14	209
SET/14	163

DESCRIÇÃO DA CONTA

CONSUMO 190 kWh a R$ 0,668313 =	126,97
CONTRIB. DE ILUMINACAO PUBLICA(COSIP)	19,23
ADICIONAL BANDEIRA VERMELHA - 10,19	
FECOEP = 0,68	

MENSAGENS IMPORTANTES / REAVISO DE VENCIMENTO

COBRANCA DO SERVICO DE TERCEIRO INCLUIDA EM SUA FATURA PODE SER ANCELADA, A QUALQUER TEMPO, EM NOSSOS CANAIS DE ATENDIMENTO. IGUE 0800 082 0196 E FACA OPCAO VENCIMENTO 3 8 13 18 23 28

ESERVADO AO FISCO 4783.36EE.DA58.A744.99D3.1709.6876.FFA2

COMPOSIÇÃO DA CONTA - R$	
Distribuição:	88,87
Energia:	0,00
Transmissão:	0,00
Encargos:	0,00
Tributos:	38,10

IMPOSTOS/TRIBUTOS - R$		
Base de Cálculo:		126,97
Alíquota ICMS:		27,00%
Valor do ICMS:		34,28
Valor do PIS:	0,54%	0,68
Valor do COFINS:	2,48%	3,14

INDICADORES DE CONTINUIDADE

	DIC			FIC			DMIC	DICRI
	Mensal	Trimestral	Anual	Mensal	Trimestral	Anual	Mensal	Mensal
Limite	5,67	11,34	22,69	3,42	6,85	13,70	3,29	
Realizado	0,00			0,00			0,00	

Conjunto SE TABULEIRO DOS Período de apuração: 07/2015 EUSD: 46,68

Eletrobras
Distribuição Alagoas
Fernandes Lima, nº 3349 - Grutas de Lourdes - CEP: 57057-900
CEIÓ/AL - CNPJ: 12.272.084/0001-00 - IE: 24007177-8

SEU CÓDIGO	TOTAL A PAGAR - R$
506909-2	146,20
MÊS FATURADO	**VENCIMENTO**
SET/2015	21/09/2015

Nº da Nota Fiscal: 000052330 FCAM

83610000001 4 46200003000 9 00000000506 6 90920915008 7

Casal

COMPANHIA DE SANEAMENTO DE ALAGOAS
Rua Barão de Atalaia, 200 - Centro - Maceió - AL CEP 57.020-510
C.N.P.J. 12.294.708/0001-81 INSC EST. Nº 24.008.146-3.

FATURA

CLIENTE/ENDEREÇO DE ENTREGA
ALDO AGUSTINHO ALVES
RUA CANTOR VICENTE CELESTINO, 0040 - 00000
SANTA LUCIA CEP: 57000-000

MATRÍCULA 001632965
MÊS/ANO 09/2015

RESPONSÁVEL
CPF/CNPJ 000000000000000
Nº HIDRÔMETRO Y10L593936

DATA LEITURA	LEIT. ANTERIOR	LEIT. ATUAL	CONSUMO	MÉDIA	CONS. RATEADO	INFORMAÇÕES ADICIONAIS
21/09	928	939	11	11		2R000 31R

ENDEREÇO DO IMÓVEL
CIDADE MACEIO UN BENEDITO B

SA	SE	ECONOMIAS RES	COM	IND	PUB	SETOR	QUADRA	LOTE	SUBLOTE
3	1	1	0	0	0	37	1220	0215	000

AVISO : SUJEITO A CORTE APÓS O VENCIMENTO

CÓDIGO	DESCRIÇÃO	VALOR
	AGUA	41,21
	Valor aproximado de tributos, R$ 3,81 PIS e COFINS, Lei 12.741 de 2012	

VENCIMENTO 26/09/2015 TOTAL A PAGAR 41,21

HISTORICO DE CONSUMO

MES/ANO	LEITURA	OL	OC	CONSUMO	MES/ANO	LEITURA	OL	OC	CONSUMO
08/2015	928	00		12	02/2015	861	00		16
07/2015	916	00		10	01/2015	845	00		10
06/2015	906	00		12	12/2014	836	00		12
05/2015	894	00		12	11/2014	824	00		16
04/2015	882	00		12	10/2014	808	00		13
03/2015	870	00		10	09/2014	795	00		13

QUALIDADE DA ÁGUA DISTRIBUÍDA

Nº AMOSTRAS	TURBIDEZ	COR	CLORO	pH	COLIF. TOTAIS	E.coli
MÍNIMO EXIGIDO	32	32	108	0	108	0
REALIZADAS	124	124	124	124	124	124
QUE ATENDERAM A LEGISLAÇÃO	73	124	33	32	117	124
OBSERVAÇÃO						

MENSAGENS:
COM O SEU PAGAMENTO A CASAL MELHORA OS SERVICOS DE AGUA E ESGOTO

VIA USUÁRIO
VIA CASAL

Casal

MATRÍCULA	MÊS/ANO	CIDADE	SETOR	QUADRA	LOTE	SUBLOTE
001632965	09/2015	471	37	1220	0215	000

VENCIMENTO 26/09/2015 TOTAL A PAGAR 41,21

82660000000 2 41210012820 3 01632965092 9 01500000000 8

- $p = \dfrac{P_{total}}{S_l} = \dfrac{187,41}{717,08}$

- $p \approx 0,2613$ ou $p \approx 26,13\%$

b) Qual o percentual cobrado na fatura de energia pela contribuição da iluminação pública?
Solução.

- $p = \dfrac{19,23}{146,20} = 0,1315$ ou $p = 13,15\%$

c) Qual o percentual cobrado na fatura de água pela contribuição do PIS e COFINS (Lei 12.741 de 2012)?
Solução.

- $p = \dfrac{3,81}{41,21} \approx 0,0924$ ou $p \approx 9,24\%$

□

Exemplo 5.2.3. *(A matemática financeira no contracheque) - O Sr Azulão é funcionário das lojas VT Eletro. Trabalhando como vendedor recebe um salário mínimo mais uma comissão de* $1,3\%$ *sobre as vendas. Tendo vendido, no mês de agosto, um total de* $R\$143.000,00$ *e levando em consideração todos os descontos, vamos preencher contracheque e descobrir seu salário líquido.*

Solução.

- salário base
  $SB = R\$788,00$

- comissão sobre vendas
  COMISSÃO $= R\$143.000,00 \times 1,3\% = R\$143.000,00 \times 0,013 = R\$1.859,00$

- vale transporte
  $VT = R\$9,00 \times 24 = R\$216,00$
  DESCONTO VT $= R\$788,00 \times 6\% = R\$788,00 \times 0,06 = R\$47,28$

- vale alimentação
  $VA = R\$15,00 \times 24 = R\$360,00$
  DESCONTO VA $= R\$788,00 \times 20\% = R\$788,00 \times 0,2 = R\$157,60$

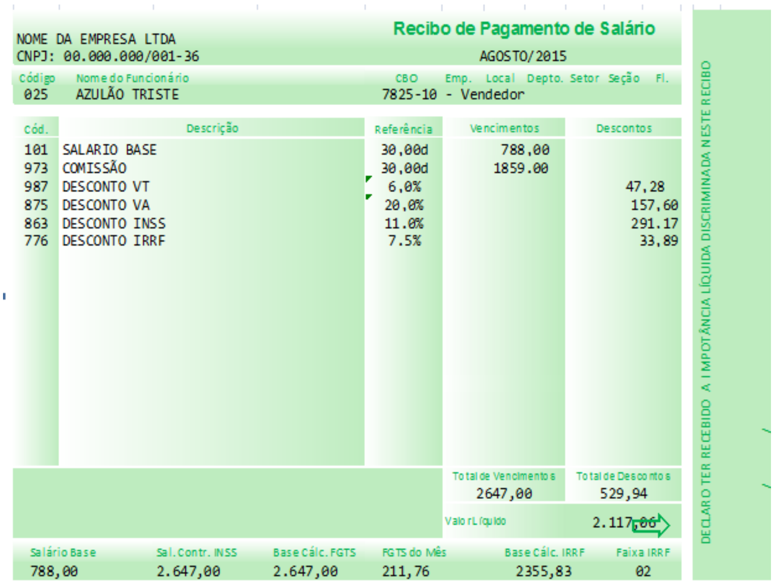
- salário bruto
  SBr = SB + COMISSÃO
  $SBr = R\$788,00 + R\$1.859,00 = R\$2.647,00$

- previdência
  INSS = SBr$\times$alíquota
  $INSS = R\$2.647,00 \times 11\% = R\$2.647,00 \times 0,11 = R\$291,17$

- imposto de renda
  IRRF = (SBr - INSS) $\times$ alíquota - dedução
  $IRRF = (R\$2.647,00 - R\$291,17) \times 7,5\% - R\$142,80$
  $IRRF = (R\$2.355,83) \times 0,075 - R\$142,80 = R\$33,89$

- fundo de garantia
  FGTS = SBr $\times$ alíquota
  $FGTS = R\$2.647,00 \times 8\% = R\$2.647,00 \times 0,08 = R\$211,76$

- preenchendo o contracheque[2]



NOME DA EMPRESA LTDA
CNPJ: 00.000.000/001-36
Recibo de Pagamento de Salário
AGOSTO/2015

Código	Nome do Funcionário	CBO	Emp.	Local	Depto.	Setor	Seção	Fl.
025	AZULÃO TRISTE	7825-10 - Vendedor						

Cód.	Descrição	Referência	Vencimentos	Descontos
101	SALARIO BASE	30,00d	788,00	
973	COMISSÃO	30,00d	1859.00	
987	DESCONTO VT	6,0%		47,28
875	DESCONTO VA	20,0%		157,60
863	DESCONTO INSS	11.0%		291.17
776	DESCONTO IRRF	7.5%		33,89

Total de Vencimentos	Total de Descontos
2647,00	529,94

Valor Líquido 2.117,06

Salário Base	Sal. Contr. INSS	Base Cálc. FGTS	FGTS do Mês	Base Cálc. IRRF	Faixa IRRF
788,00	2.647,00	2.647,00	211,76	2355,83	02

DECLARO TER RECEBIDO A IMPORTÂNCIA LÍQUIDA DISCRIMINADA NESTE RECIBO

Disponível em http://www.lugardasdicas.com.br/modelos-de-holerite

□

[2]Fontes das alíquotas: http://economia.uol.com.br/empregos-e-carreiras/noticias/redacao/2013/01/01/imposto-de-renda-e-inss-entenda-os-descontos-no-seu-salario.htm

5.3. Fundamentos de PA'S e PG'S Aplicadas à Matemática Financeira

5.3.1 Sistema ou Regime de Capitalização

A capitalização é a forma de apuração e incorporação dos juros quanto à incidência de taxa sobre o capital e é dividida em: Simples e Composta

5.3.1.1 Capitalização Simples (Juros Simples)

- É a forma de capitalização em que a taxa i de juro íncide sempre sobre o capital inicial C_0 para a formação dos juros $J = i \cdot C_0$ e estes não são incoporados ou integralizados ao capital inicial ao longo do prazo em que perdure o empréstimo ou aplicação. A integralização dar-se-á ao final do prazo e sua progressão é aritmética (PA), ou seja, se um capital inicial for aplicado a juros simples, à taxa i por período, durante n períodos de tempo temos que

- Juros após 1 período: $J_1 = i \cdot C_0$
- Juros após 2 período: $J_2 = i \cdot C_0 + i \cdot C_0 = 2i \cdot C_0$
- Juros após 3 período: $J_3 = i \cdot C_0 + i \cdot C_0 + i \cdot C_0 = 3i \cdot C_0$
  $\vdots$
- Juros após n período: $J_n = i \cdot C_0 + i \cdot C_0 + i \cdot C_0 + \ldots + i \cdot C_0 = n\, i \cdot C_0$

O montante é $C_n = C_0 + J_n = C_0 + n\, i \cdot C_0$ ou $C_n = C_0 \cdot (1 + n \cdot i)$ resultando em um crescimento de juros linear. Esse regime de capitalização normalmente é utilizado para curtíssimo período de tempo ou para cálculo de juro de mora.

Exemplo 5.3.1. Parcelar ou não?
Muitas vezes o comprador possui o dinheiro para pagar à vista, mas escolhe a prazo.
Nesses casos, é comum que sejam cobrados juros que encarecem o produto.
Acompanhe a situação:
Juventino é um chefe de família que decide comprar um Velocípede para seu filho Robertinho.
A loja oferece dois planos de pagamento:

I. *À vista por* $R\$\ 480,00$.

II. *Em duas parcelas iguais de* $R\$\ 270,00$, *sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após a compra.*

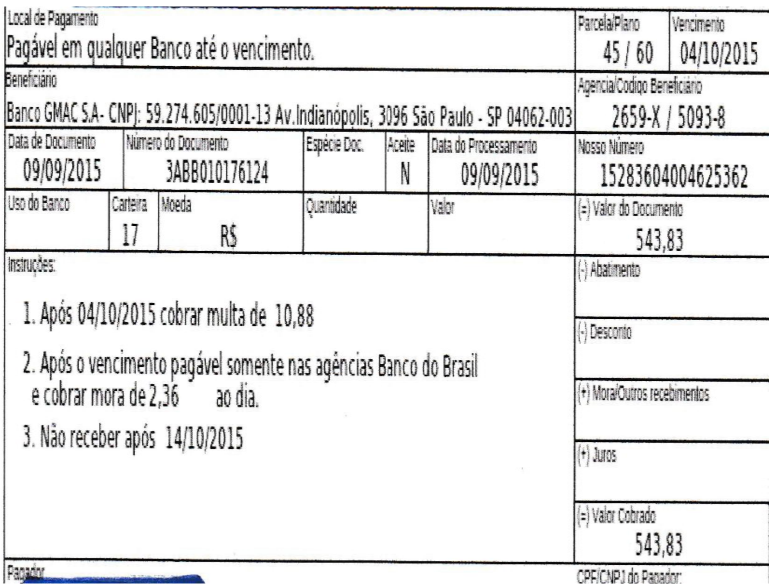
Caso Juventino opte pelo pagamento a prazo, qual a taxa mensal de juros que ele pagará?

Solução.
- A 1ł prestação (na compra parcelada) é paga no ato da compra e, dessa forma, não incidem juros sobre ela
- Preço à vista:$R\$\ 480,00$ (esse é o valor da mercadoria sem juros)
- Preço a prazo:$R\$\ 540,00 = R\$\ 270,00 + \ R\$\ 270,00$
- Após pagar a 1ł parcela, à vista, o valor que ele estará devendo é $R\$\ 480,00 - R\$\ 270,00 = R\$\ 210,00$
- Se optar por efetuar o pagamento da 2ł parcela após 1 mês, terá de pagar $R\$\ 270,00$ (e não $R\$\ 210,00$)
- Logo, os juros cobrado serão $J = i \cdot C$ em que $J = 270 - 210 = 60$, $C = 210$, isto é, $i = \dfrac{60}{210} \approx 0,286 = 28,6\%$ ao mês.

□

Exemplo 5.3.2. *Carlito financia um carro 0km em 60 meses. O boleto abaixo corresponde a uma dessas parcelas, com as informações contida nele, responda:*

Figura 5.1 Boleto bancário



Local de Pagamento
Pagável em qualquer Banco até o vencimento.
Parcela/Plano 45 / 60
Vencimento 04/10/2015
Beneficiário
Banco GMAC S.A- CNPJ: 59.274.605/0001-13 Av.Indianópolis, 3096 São Paulo - SP 04062-003
Agência/Codigo Beneficiário 2659-X / 5093-8
Data de Documento 09/09/2015
Número do Documento 3ABB010176124
Espécie Doc.
Aceite N
Data do Processamento 09/09/2015
Nosso Número 15283604004625362
Uso do Banco
Carteira 17
Moeda R$
Quantidade
Valor
(=) Valor do Documento 543,83
Instruções:
1. Após 04/10/2015 cobrar multa de 10,88
2. Após o vencimento pagável somente nas agências Banco do Brasil e cobrar mora de 2,36 ao dia.
3. Não receber após 14/10/2015
(-) Abatimento
(-) Desconto
(+) Mora/Outros recebimentos
(+) Juros
(=) Valor Cobrado 543,83
Pagador
CPF/CNPJ do Pagador:

Fonte:Banco GMAC S.A

a) Qual a taxa de juros de multa cobrada após o vencimento?
Solução.

- $p = \dfrac{10,88}{543,83} \approx 0,02$ *ou* $p \approx 2\%$

b) Qual a taxa de juros de mora diário cobrado após o vencimento?
Solução.

- $p = \dfrac{2,36}{543,83} \approx 0,0043$ *ou* $p \approx 0,43\%$

c) Carlito pagará o boleto no dia $07/10/2015$. *Qual o valor cobrado no boleto?*
Solução.

- *Temos* 3 *dias de atraso, logo,* $C_3 = 543,83 + 3 \cdot 0,0043 \cdot 543,83 \approx 543,83 + 7,01$

- $C_3 \approx 550,84$

Portanto Carlito pagará aproximadamente $R\$ \ 550,84$.

Exemplo 5.3.3. *Theobaldo aplicou* $R\$ \ 800,00$ *em certo banco, com a taxa de juros simples de* $1,5\%$ *ao mês. Qual o montante acumulado após 5 meses?*
Solução. O montante acumulado após 5 meses será no 6° mês, logo:

- $n = 6 \ \ a_n = a_6$

- $a_1 = R\$ \ 800,00$ *capital inicial*

- $r \rightarrow$ *valor do lucro obtido por mês*

- $r = 800 \cdot \dfrac{1,5}{100} = 8 \cdot 1,5 = 12$

- $a_6 = a_1 + (6-1)r = 800 + 5 \cdot 12 = 860$

O montante acumulada após 5 meses foi de $R\$ \ 860,00$.

5.3.1.2 Capitalização Composta (Juros Compostos)

- É o regime de capitalização em que há a incorporação dos juros ao capital em cada período. O crescimento dos juros é de progressão geométrica (PG). É a forma utilizada largamente no mercado para cálculo das prestações a pagar, resgate de empréstimo, cheque especial ou aplicações financeiras.

Para entender melhor a ideia como funciona os juros compostos, que não "adiciona", antes, "compõe", vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 5.3.4. *(Poupança Simples) Suponha que uma pessoa deposite numa poupança* $R\$ \ 1.000,00$ *em um banco que pague* 5% *de taxa de juros anualmente. No final de um ano, o principal de* $R\$ \ 1.000,00$ *valerá*

$$R\$ \ 1.000,00 + (5\% \ de \ R\$ \ 1.000,00) = (R\$ \ 1.000,00 + \frac{5}{100} \cdot R\$ \ 1.000,00) =$$
$$= (R\$ \ 1.000,00 + R\$ \ 50) = R\$ \ 1.050,00.$$

No entanto, o mesmo juro não será simplesmente adicionado no próximo ano. Com efeito, o juro no segundo ano será calculado baseado no "novo" principal de $R\$ \ 1.050,00$ *depois do* *primeiro ano. Logo, depois de dois anos, o principal é*

$$R\$ \ 1.050,00 + (5\% \ de \ R\$ \ 1.050,00) = (R\$ \ 1.050,00 + \frac{5}{100} \cdot R\$ \ 1.050,00) =$$
$$= (R\$ \ 1.050,00 + R\$ \ 52,50) = R\$ \ 1.102,50.$$

Continuando o cálculo para cada um dos aniversário, obtemos

3º aniversário: $R\$ \ 1.157,63$,
4º aniversário: $R\$ \ 1.215,51$,

e assim por diante. (Desse modo, não apenas a soma original recebe juros anuais, mas também juros sobre o principal - daí a expressão "juros compostos".) Percebemos que o saldo cresce numa progressão geométrica, com a taxa comum de $1,05$ *(razão dessa progressão).*

A partir do exemplo acima, podemos formalizar o conceito. Seja p_t o principal depois t-ésimo aniversário e seja p_0 o principal inicial. Seja r a taxa de juros, onde $r = \frac{5}{100}$ no exemplo acima. O principal p_t ao t-ésimo aniversário pode ser calculado usando o principal p_{t-1} do aniversário anterior. De fato, é dado pela relação

$$p_t = p_{t-1} + r \cdot p_{t-1} = p_{t-1}(1+r), \quad t \geq 1.$$

Expandindo recursivamente a fórmula, vemos que

$$\begin{aligned} p_t &= p_{t-1}(1+r) \\ &= (p_{t-2}(1+r))(1+r) = p_{t-2}(1+r)^2 \\ &= \cdots \\ &= p_0(1+r)^t, \quad t \geq 1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Esta é a fórmula do montante de um capital p_0 sujeito a uma taxa de juros r num período t.

Teorema 5.3.1. *No regime de juros compostos de taxa* r*, um principal* p_0 *transforma-se, em* t *períodos de tempo, em um montante igual a* $p_t = p_0(1+r)^t$.

Demonstração. Para cada k, seja p_k a dívida após k períodos de tempo. Temos

$$p_{k+1} = p_k + rp_k = (1+r)p_k.$$

Daí, (p_k) é uma progressão geométrica de razão $1+r$ e $P_t = p_0(1+r)^t$. □

Exemplo 5.3.5. *(Poupança Contínua) A senhora Mariana pretende comprar um terreno, à vista, no prazo de doze meses. Para tanto depositando regulamente em uma poupança com juros anuais de* $7,97\%$ *(digamos, no início de cada mês) uma quantia de* $R\$ \ 900,00$*, quanto é que terá no décimo segundo mês?*
Solução.

- *$P = 900$ depósito mensal na conta poupança,*
- *$i = \dfrac{7,97}{12} = 0,664\%a.m$ ou $i = \dfrac{0,664}{100} = 0,00664$ taxa de juro constante durante os 12 meses,*
- *$n = 12$ meses duração da poupança,*
- *M_n o montante da conta após 12 meses,*
- *depositando R\$ 900,00 no primeiro dia, depois de um mês, o juro é calculado e depositado na conta, e ela também deposita um adicional de R\$ 900,00. Ao final do primeiro mês, o balanço é de*
- $M_1 = 900 + 0,00664 \cdot 900 + 900 = 900 \cdot (1 + 0,00664) + 900.$
- *Ao final do segundo mês, o balanço é de $M_2 = M_1 \cdot (1 + 0,00664) + 900.$*
- $\dots$
- *Ao final de 12 meses, o montante é de*
- $M_{12} = 900 \cdot (1+0,00664)^{12} + 900 \cdot [1 + (1+0,00664) + (1+0,00664)^2 \dots + (1+0,00664)^{11}]$
- $M_{12} = 900 \cdot (1,00664)^{12} + 900 \cdot [1 + (1,00664) + (1,00664)^2 \dots + (1,00664)^{11}]$
- $M_{12} = 900 \cdot [1 + (1,00664) + (1,00664)^2 \dots + (1,00664)^{11} + (1,00664)^{12}]$
- $[1 + (1,00664) + (1,00664)^2 \dots + (1,00664)^{11} + (1,00664)^{12}]$ *é a soma de uma PG de 13 termos onde $a_1 = 1$ e razão 1,00664. Logo,*
- $a_{13} = 1 \cdot \dfrac{1 - (1,00664)^{13}}{1 - 1,00664} \approx 13,53$
- $M_{12} \approx 900 \cdot 13,53 = 12.177$

Logo, o saldo será aproximadamente R\$ 12.177,00.

Teorema 5.3.2. *(Desigualdade de Bernoulli) Se $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$, vale*

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \tag{5.2}$$

Demonstração. Considere $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.
Note que $P(1): \ (1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ é verdadeiro.
Agora, suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $P(n)$ verdadeiro, isto é, a desigualdade (4.2) é válida para tal valor de n. Queremos mostrar que

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x.$$

Sendo $(1+x) > 0$ pois $x > -1$ e multiplicando ambos os lados da desigualdade (4.2) por esse fator, temos

- $(1+x)^n(1+x) \geq (1+n\cdot x)(1+x)$
- $(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2$
- $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$
- $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$\square$

Exemplo 5.3.6. Juros Simples $\times$ Juros Compostos
Maria Eduarda tem R\$ 1000,00 para investir em um banco durante 11 meses. O gerente de investimentos ofereceu duas altenativas:

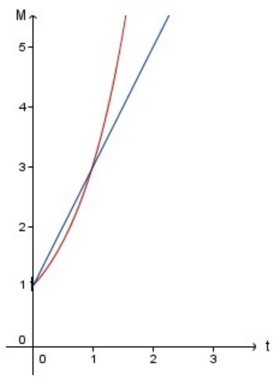
i -Aplicação a juros simples de $2,7\%$ ao mês.

ii -Aplicação a juros compostos de $2,7\%$ ao mês.

Qual a melhor altenativa para Maria Eduarda?
Solução. *Sabemos que a juros simples, os montantes constituem uma progressão aritmética (de razão iC_0) onde C_0 é o capital investido e, a juros compostos, os montantes constituem uma progressão geométrica (de razão $1+i$).*
Sendo $M_{11} = C_0 + 11iC_0 = C_0(1+11i)$ o montante do juros simples e $M_{11} = C_0(1+i)^{11}$ o montante do juros compostos, temos que $(1+i)^{11} \geq (1+11i)$ por (4.2). Portanto, a segunda altenativa é a melhor para Maria Eduarda, pois, $C_0(1+i)^{11} \geq C_0(1+11i)$.

Observe que: a juros compostos, os montantes constituem uma P.G. e, a juros simples, uma P.A.

Figura 5.2 juros simples $\times$ juros compostos



Fonte: Autor

O gráfico mostra que os montantes a juros compostos são maiores que os montantes a juros simples, sempre que $t > 1$.

Observação 5.3.1. *Na vida real, juros simples são raramente uasados. É de interesse dos detentores do capital que os juros sejam composto. A exceção ocorre se o prazo for menor que a unidade de tempo; neste caso, juros simples darão maior montante. Esta é a única situação da vida real - que ocorre tipicamente em juros de mora, isto é, nos juros que são cobrados por pequenos atrasos em pagamentos - em que juros simples são usados.*

5.3.2 Sistemas de Amortização

Ao tomarmos um capital emprestado ou ao fazermos um financiamento, poderemos devolver esse capital ou o valor do financiamento em parcelas ou em um pagamento único. Nos dois casos, amortizar significa devolver o capital que se tomou emprestado.

No Brasil, temos mais de uma forma de realizar essa amortização. Temos, assim, os chamados Sistema de amortização. Vamos, a seguir, estudar os dois principais desses sistemas.

5.3.2.1 Sistema Price

1. Sistema Price - Parcelas Iguais

O Sistema Francês de Amortização, muito utilizado no setor financeiro e de capitais, é também conhecido como **Sistema Price**. Nesse sistema, é adotado o critério de rendas imediatas, ou seja, a amortizações crescentes, juros decrescentes e prestações ocorrem em parcelas periódicas, iguais e sucessivas, com o primeiro pagamento ao fim do primeiro período contratado. Trata-se do sistema mais adotado pelas instituições financeiras.

Exemplo 5.3.7. *Uma instituição financeira concedeu a um indivíduo um crédito no valor de* $R\$\ 5.800,00$, *para ser pago em 12 parcelas iguais, com vencimento da 1ł parcela em 30 dias e periodicidade mensal de amortização e juros de* $3,40\%$ *a.m.. Então:*
a) Determine o valor da parcela a ser paga mensalmente;

b) Determine o valor de cada parcela de juros paga e o valor a ser amortizado mensalmente;
Prestações Iguais - Sistema Price

Solução. *A questão principal envolvida nesse problema é a do pagamento de um crédito concedido pelo Banco no valor de* $R\$\ 5.800,00$. *A taxa cobrada pela instituição era de* $3,40\%$ *a.m. e o prazo para liquidação total do débito era de 12 meses. A priori, podemos afirmar que nesse período o Banco deveria receber a quantia de* $R\$\ 7.160,16$ *(*$R\$\ 5.800,00$ *pelo principal e* $R\$\ 1.360,19$ *pelos juros). Uma das formas existentes de efetuar tal pagamento é utilizar uma modalidade de financiamento denominada Sistema Price .*
O financiamento nesse sistema é pago em prestações iguais, cada uma sendo subdividida em duas parcelas:

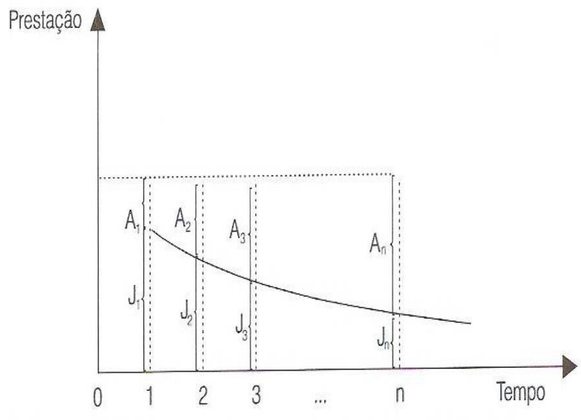
a) juros do período (calculados sobre o saldo da dívida no início do período) e,

b) amortização do principal (correspondente ao pagamento parcial ou integral do principal e obtida a partir da diferença do valor da prestação e o valor dos juros no período).
Resumindo: no sistema "Price", para qualquer prestação é válida a relação

PRESTAÇÃO = JUROS + AMORTIZAÇÃO.

Dessa maneira ao longo do tempo, os juros $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n$ formam uma sequência decrescente (pois o saldo devedor vai diminuindo) ao passo que as amortizações $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ formam uma sequência crescente (pois em qualquer instante tem-se $P_n = J_n + A_n$), de tal modo que a soma dessas duas parcelas se mantenha sempre igual ao valor constante da prestação. Assim o gráfico das prestações em função do tempo tem o aspecto da figura abaixo:

Figura 5.3 Gráfico prestação x tempo



Fonte: Autor

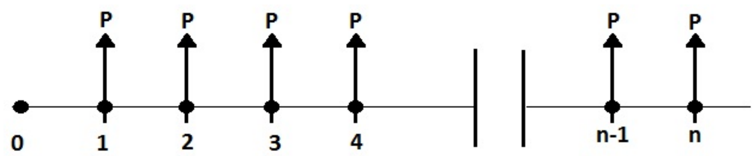
Sendo assim, o próximo passo é determinar qual o valor da parcela a ser pago mensalmente, de tal maneira, que efetuando esses 12 pagamentos mensais isso seja equivalente ao pagamento integral do montante da dívida daqui a 12 meses. Na pratica esse problema se resolve utilizando a equação básica de juros compostos $(1+r)^t$, para a capitalização do principal e de cada parcela. Logo podemos obter a fórmula matemática para o cálculo do valor da parcela P:

$$V = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-t}}{i}$$

Onde V é o valor do principal, i a taxa do período e t número de períodos.

Teorema 5.3.3. *O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a*

$$V = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$



Demonstração.

$$\begin{aligned} V &= P(1+i)^{-1} + P(1+i)^{-2} + P(1+i)^{-3} + \ldots + P(1+i)^{-n} \\ &= P \cdot [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n}] \\ &= P \cdot [(1+i)^{-1} \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}] \\ &= P \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

□

Logo, usando (4.3) encontramos o valor para P, que é de $R\$ \, 596,68$. Podemos observar, que por definição, o Sistema Price tem a conceituação de juros compostos ou juros sobre juros. A partir do valor encontrado para a parcela, podemos construir uma tabela denominada tabela Price utilizando as definições impostas ao sistema e descritas nos itens (a) e (b) acima:

Exemplo 5.3.8. *- Financiamento estudantil* **FIES** *ou* **PRIVADO***?*
- O FIES é uma iniciativa do Governo Federal, um financiamento a juros baixos(taxa de juros de $6,5\%$ ao ano, a partir do segundo semestre de 2015) que os praticados no mercado e maior prazo para pagamento da dívida. Para participar é necessário cumprir requisitos como:

parcela	valo de p	juros	amortização	saldo devedor
0	–	–	–	5.800,00
1	596,68	197,20	399,48	5.400,52
2	596,68	183,62	413,06	4.987,46
3	596,68	169,60	427,08	4.560,35
4	596,68	155,05	441,63	4.118,72
5	596,68	140,04	456,64	3.662,08
6	596,68	124,51	472,17	3.189,91
7	596,68	108,45	488,23	2.701,68
8	596,68	91,86	504,82	2.196,86
9	596,68	74,69	521,99	1.674,87
10	596,68	56,94	539,74	1.135,13
11	596,68	38,59	558,09	577,04
12	596,68	19,64	577,04	0,0

Fonte: Autor

Tabela 5.1 Sistema Price

- *renda familiar máxima de* $2,5$ *salários mínimo por pessoa;*
- *comprometimento da renda com a mensalidade de pelo menos* 20%*;*
- *participação do ENEM, com peloo menos* 450 *pontos nas provas objetivas e nota maior do zero na redação(para quem se formou no ensino médio a partir de* 2010*).*

- Financiamento privado é oferecido por empresas(é um produto financeiro, funciona como um empréstimo ou crédito), tem um prazo menor para pagamento da dívida(o prazo para pagamento costuma ser de 12 *meses), não tem limite de renda e não exige a participação no ENEM. O estudante contrata o financiamento recebe o crédito para pagar um semestre de curso(e não curso inteiro).*

5.3.2.2 Empréstimo

O mais comum é o **CDC**, realizado diretamente através dos Terminais de Auto Atendimento (TAA) da rede bancária, e que têm como formatação de pagamento uma Série Uniforme Postecipada, cuja equação[3] da prestação é:

$$V = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-t}}{i}.$$

A recomendação é que o valor da prestação não comprometa mais que 30% da renda do cliente, considerando, inclusive, outros empréstimos que ele já tenha.

[3]Equação demonstrada no Teo. 4.3.3.

Exemplo 5.3.9. *Se um cliente tem renda de $R\$1.600,00$, deve comprometer no máximo $R\$480,00$ em prestações. Ele solicita um empréstimo junto ao banco e pretende pagar num prazo de 24 meses. Se a taxa praticada pelo banco for de $3,5\%$ a.m quanto no máximo ele pode tirar de empréstimo?*

Solução. *Seja V o valor do empréstimo. Temos que:*

- $P = 480 \;\; e \;\; i = \dfrac{3,5}{100}$
- $V = 480 \cdot \dfrac{1-(1+0,035)^{-24}}{0,035} = 7.708$

Logo, o valor máximo do empréstimo é $R\$\ 7.708,00$.

Os empréstimos **CONSIGNADOS** são realizados para clientes que são funcionários de empresas que têm convênio com a instituição bancária ou que sejam aposentados ou pensionistas do INSS. O pagamento dar-se-á também através de uma Série Uniforme de Pagamentos. O que o distingue de outros empréstimos é a taxa que pode beneficiar o contratante, por ser menor, em virtude do risco mínimo da operação para o banco.

5.3.2.3 Sistema SAC

2. Sistema SAC - Sistema de Amortização Constante

No sistema de amortização constante (SAC) a parcela de amortização da dívida é calculada tomando por base o total da dívida (saldo devedor) dividido pelo prazo do financiamento, como um percentual fixo da dívida, desta forma é considerado um sistema linear. No SAC, a prestação inicial é um pouco maior que na Tabela Price, pois o valor que é pago da dívida (amortização) é maior, assim, você estará liquidando mais da dívida desde o início do financiamento e pagando menos juros ao longo do contrato.

À medida que a dívida começa a ser amortizada, a parcela dos juros e consequentemente a prestação como um todo tendem a decrescer, uma vez que o próprio saldo devedor se reduz. Com isso, no SAC, o saldo devedor e a sua prestação tendem a decrescer de forma constante desde o início do financiamento e não deixa resíduo. Desta forma, você estará menos exposto em caso de aumento do indexador do contrato (a TR, TJLP ou INCC) durante o financiamento. Assim, considerando um principal p a ser amortizado em n parcelas $A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_n$, e supondo pagamento dos juros em todos os períodos, teremos:

$A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_n = \dfrac{p}{n} = A$ (valor da amortização constante)

O valor das prestações é dado por:

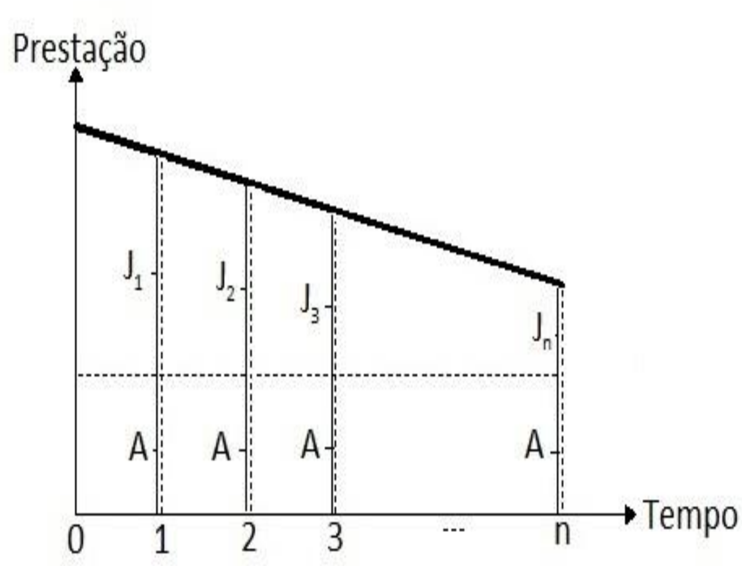
- $V_1 = A + J_1 = A + P \cdot i$
- $V_2 = A + J_2 = A + (P - A) \cdot i = A + P \cdot i - A \cdot i$

- $V_3 = A + J_3 = A + (P - 2A) \cdot i = A + P \cdot i - 2A \cdot i$
  $\vdots$
- $V_n = A + J_n = A + [P - (n-1)A] \cdot i = A + P \cdot i - (n-1)A \cdot i$

Portanto, as prestações do SAC constituem uma progressão aritmética decrescente, cujo primeiro termo é $A + P \cdot i$, e cuja razão é $-A \cdot i$.

Logo, o gráfico das prestações em função do tempo tem o aspecto da da fig.

Figura 5.4 Gráfico prestação x tempo



Fonte: Autor

Exemplo 5.3.10. *(O Sonho da Casa Própria) - João de Barro conseguiu encontrar uma casa nova, que espera caber no seu orçamento. Sendo a renda bruta da família* $R\$$ 2.300,00 *e o preço do imóvel* $R\$$ 97.500,00*. Ele pediu seu filho para fazer uma simulação no prazo de* 360 *meses no simulador habitacional da Caixa. Logo, obtiveram as seguintes informações: Subsídio Minha Casa Minha Vida* $R\$$ 6.752,00*, Valor de entrada* $R\%$ 2.998,00 *Valor do financiamento* $R\$$ 87.750,00 *e 1º prestação* $R\$$ 625,26*. Como seu filho tinha conhecimento de matemática financeira calculou o juro de contrato e o valor da 5ł parcela,veja abaixo:*
Solução.

- *Valor da amortização constante* $A = \dfrac{P}{n} = \dfrac{87.750}{360} = 243,75$
- $V_1 = A + P \cdot i \rightarrow 625,26 = 243,75 + \ 87.750 \cdot i$
- $87.750 \cdot i = 381,51 \rightarrow i = \dfrac{381,51}{87.750} \approx 0,00435$

- $i \approx 0,435\%a.m$ *ou* $1 + i_{efe} = (1 + 0,00435)^{12} \rightarrow i_{efe} \approx 0,05346$.

Portanto o juro de contrato é $i_{efe} \approx 5,346\%$.

- $V_5 = A + P \cdot i - (5-1)Ai \rightarrow V_5 = 243,75 + 87.750 \cdot 0,00435 - 4 \cdot 243,75 \cdot 0,00435$

- $V_5 \approx 243,75 + 381,71 - 4,24 = 621,22$.

Portanto a 5ł *parcela será* $R\$ \ 621,22$.

Nas páginas seguintes estão partes das tabelas SAC e PRICE, podendo assim fazer um comparativo entre elas.

	SAC	Price
Juros devidos	$R\$ \ 68.899,11$	$R\$ \ 86.104,63$
Pricinpal devido	$R\$ \ 87.750,00$	$R\$ \ 87.750,00$
Total devido	$R\$ \ 156.649,11$	$R\$ \ 173.854,63$

Fonte: Autor

Tabela 5.2 Comparativos entre as tabelas SAC e PRICE

Observação 5.3.2. *Se optar pela tabela Price, João de Barro pagará a mais* $R\$ \ 17.205,52$ *pelo financiamento. Lembrando que para financiamentos de curto prazo, as instituições financeiras utilizam sempre a tabela Price.*

Tabela SAC

Financiamento	Prazo (meses)	Taxa Anual (C.E.T.)	Taxa Mensal	Prestação Máxima	Renda Mínima
R$ 87.750,00	360	5,35%	0,435%	R$ 625,26	R$ 2.300,00

Parc	Saldo Inicial	Juros	Saldo Atualizado	Amortização	Prestação	Saldo Devedor
1	87.750,00	381,71	88.131,71	243,75	625,46	87.506,25
2	87.506,25	380,65	87.886,90	243,75	624,40	87.262,50
3	87.262,50	379,59	87.642,09	243,75	623,34	87.018,75
4	87.018,75	378,53	87.397,28	243,75	622,28	86.775,00
5	86.775,00	377,47	87.152,47	243,75	621,22	86.531,25
6	86.531,25	376,41	86.907,66	243,75	620,16	86.287,50
7	86.287,50	375,35	86.662,85	243,75	619,10	86.043,75
8	86.043,75	374,29	86.418,04	243,75	618,04	85.800,00
9	85.800,00	373,23	86.173,23	243,75	616,98	85.556,25
10	85.556,25	372,17	85.928,42	243,75	615,92	85.312,50
11	85.312,50	371,11	85.683,61	243,75	614,86	85.068,75
12	85.068,75	370,05	85.438,80	243,75	613,80	84.825,00
13	84.825,00	368,99	85.193,99	243,75	612,74	84.581,25
14	84.581,25	367,93	84.949,18	243,75	611,68	84.337,50
15	84.337,50	366,87	84.704,37	243,75	610,62	84.093,75
16	84.093,75	365,81	84.459,56	243,75	609,56	83.850,00
17	83.850,00	364,75	84.214,75	243,75	608,50	83.606,25
18	83.606,25	363,69	83.969,94	243,75	607,44	83.362,50
19	83.362,50	362,63	83.725,13	243,75	606,38	83.118,75
20	83.118,75	361,57	83.480,32	243,75	605,32	82.875,00
21	82.875,00	360,51	83.235,51	243,75	604,26	82.631,25
22	82.631,25	359,45	82.990,70	243,75	603,20	82.387,50
23	82.387,50	358,39	82.745,89	243,75	602,14	82.143,75
24	82.143,75	357,33	82.501,08	243,75	601,08	81.900,00
25	81.900,00	356,27	82.256,27	243,75	600,02	81.656,25
26	81.656,25	355,20	82.011,45	243,75	598,95	81.412,50
27	81.412,50	354,14	81.766,64	243,75	597,89	81.168,75
28	81.168,75	353,08	81.521,83	243,75	596,83	80.925,00
29	80.925,00	352,02	81.277,02	243,75	595,77	80.681,25
30	80.681,25	350,96	81.032,21	243,75	594,71	80.437,50
31	80.437,50	349,90	80.787,40	243,75	593,65	80.193,75
32	80.193,75	348,84	80.542,59	243,75	592,59	79.950,00
33	79.950,00	347,78	80.297,78	243,75	591,53	79.706,25
34	79.706,25	346,72	80.052,97	243,75	590,47	79.462,50
35	79.462,50	345,66	79.808,16	243,75	589,41	79.218,75
36	79.218,75	344,60	79.563,35	243,75	588,35	78.975,00
37	78.975,00	343,54	79.318,54	243,75	587,29	78.731,25
38	78.731,25	342,48	79.073,73	243,75	586,23	78.487,50
39	78.487,50	341,42	78.828,92	243,75	585,17	78.243,75
40	78.243,75	340,36	78.584,11	243,75	584,11	78.000,00
41	78.000,00	339,30	78.339,30	243,75	583,05	77.756,25

Tabela SAC

324	9.018,75	39,23	9.057,98	243,75	282,98	8.775,00
325	8.775,00	38,17	8.813,17	243,75	281,92	8.531,25
326	8.531,25	37,11	8.568,36	243,75	280,86	8.287,50
327	8.287,50	36,05	8.323,55	243,75	279,80	8.043,75
328	8.043,75	34,99	8.078,74	243,75	278,74	7.800,00
329	7.800,00	33,93	7.833,93	243,75	277,68	7.556,25
330	7.556,25	32,87	7.589,12	243,75	276,62	7.312,50
331	7.312,50	31,81	7.344,31	243,75	275,56	7.068,75
332	7.068,75	30,75	7.099,50	243,75	274,50	6.825,00
333	6.825,00	29,69	6.854,69	243,75	273,44	6.581,25
334	6.581,25	28,63	6.609,88	243,75	272,38	6.337,50
335	6.337,50	27,57	6.365,07	243,75	271,32	6.093,75
336	6.093,75	26,51	6.120,26	243,75	270,26	5.850,00
337	5.850,00	25,45	5.875,45	243,75	269,20	5.606,25
338	5.606,25	24,39	5.630,64	243,75	268,14	5.362,50
339	5.362,50	23,33	5.385,83	243,75	267,08	5.118,75
340	5.118,75	22,27	5.141,02	243,75	266,02	4.875,00
341	4.875,00	21,21	4.896,21	243,75	264,96	4.631,25
342	4.631,25	20,15	4.651,40	243,75	263,90	4.387,50
343	4.387,50	19,09	4.406,59	243,75	262,84	4.143,75
344	4.143,75	18,03	4.161,78	243,75	261,78	3.900,00
345	3.900,00	16,97	3.916,97	243,75	260,72	3.656,25
346	3.656,25	15,90	3.672,15	243,75	259,65	3.412,50
347	3.412,50	14,84	3.427,34	243,75	258,59	3.168,75
348	3.168,75	13,78	3.182,53	243,75	257,53	2.925,00
349	2.925,00	12,72	2.937,72	243,75	256,47	2.681,25
350	2.681,25	11,66	2.692,91	243,75	255,41	2.437,50
351	2.437,50	10,60	2.448,10	243,75	254,35	2.193,75
352	2.193,75	9,54	2.203,29	243,75	253,29	1.950,00
353	1.950,00	8,48	1.958,48	243,75	252,23	1.706,25
354	1.706,25	7,42	1.713,67	243,75	251,17	1.462,50
355	1.462,50	6,36	1.468,86	243,75	250,11	1.218,75
356	1.218,75	5,30	1.224,05	243,75	249,05	975,00
357	975,00	4,24	979,24	243,75	247,99	731,25
358	731,25	3,18	734,43	243,75	246,93	487,50
359	487,50	2,12	489,62	243,75	245,87	243,75
360	243,75	1,06	244,81	243,75	244,81	0,00

Tabela Price

Financiamento		Prazo (meses)	Taxa Anual (C.E.T.)	Taxa Mensal	Prestação Máxima	Renda Mínima
R$ 87.750,00		**360**	**5,35%**	0,4350%	R$ 625,46	R$ 2.300,00
Parc	**Saldo Inicial**	**Juros**	**Saldo Atualizado**	**Amortização**	**Prestação**	**Saldo Devedor**
1	87.750,00	381,71	88.131,71	101,22	482,93	87.648,78
2	87.648,78	381,27	88.030,06	101,66	482,93	87.547,13
3	87.547,13	380,83	87.927,96	102,10	482,93	87.445,03
4	87.445,03	380,39	87.825,41	102,54	482,93	87.342,48
5	87.342,48	379,94	87.722,42	102,99	482,93	87.239,49
6	87.239,49	379,49	87.618,98	103,44	482,93	87.136,06
7	87.136,06	379,04	87.515,10	103,89	482,93	87.032,17
8	87.032,17	378,59	87.410,76	104,34	482,93	86.927,83
9	86.927,83	378,14	87.305,96	104,79	482,93	86.823,03
10	86.823,03	377,68	87.200,71	105,25	482,93	86.717,78
11	86.717,78	377,22	87.095,01	105,71	482,93	86.612,08
12	86.612,08	376,76	86.988,84	106,17	482,93	86.505,91
13	86.505,91	376,30	86.882,21	106,63	482,93	86.399,28
14	86.399,28	375,84	86.775,12	107,09	482,93	86.292,19
15	86.292,19	375,37	86.667,56	107,56	482,93	86.184,63
16	86.184,63	374,90	86.559,53	108,03	482,93	86.076,60
17	86.076,60	374,43	86.451,04	108,50	482,93	85.968,11
18	85.968,11	373,96	86.342,07	108,97	482,93	85.859,14
19	85.859,14	373,49	86.232,63	109,44	482,93	85.749,70
20	85.749,70	373,01	86.122,71	109,92	482,93	85.639,78
21	85.639,78	372,53	86.012,31	110,40	482,93	85.529,38
22	85.529,38	372,05	85.901,44	110,88	482,93	85.418,51
23	85.418,51	371,57	85.790,08	111,36	482,93	85.307,15
24	85.307,15	371,09	85.678,23	111,84	482,93	85.195,30
25	85.195,30	370,60	85.565,90	112,33	482,93	85.082,97
26	85.082,97	370,11	85.453,08	112,82	482,93	84.970,16
27	84.970,16	369,62	85.339,78	113,31	482,93	84.856,85
28	84.856,85	369,13	85.225,97	113,80	482,93	84.743,04
29	84.743,04	368,63	85.111,68	114,30	482,93	84.628,75
30	84.628,75	368,14	84.996,88	114,79	482,93	84.513,95
31	84.513,95	367,64	84.881,59	115,29	482,93	84.398,66
32	84.398,66	367,13	84.765,79	115,80	482,93	84.282,86
33	84.282,86	366,63	84.649,49	116,30	482,93	84.166,56
34	84.166,56	366,12	84.532,69	116,80	482,93	84.049,76
35	84.049,76	365,62	84.415,38	117,31	482,93	83.932,45
36	83.932,45	365,11	84.297,55	117,82	482,93	83.814,62
37	83.814,62	364,59	84.179,22	118,34	482,93	83.696,29
38	83.696,29	364,08	84.060,37	118,85	482,93	83.577,44
39	83.577,44	363,56	83.941,00	119,37	482,93	83.458,07
40	83.458,07	363,04	83.821,11	119,89	482,93	83.338,18
41	83.338,18	362,52	83.700,70	120,41	482,93	83.217,77
42	83.217,77	362,00	83.579,77	120,93	482,93	83.096,84

325	16.060,30	69,86	16.130,16	413,07	482,93	15.647,23
326	15.647,23	68,07	15.715,30	414,86	482,93	15.232,37
327	15.232,37	66,26	15.298,63	416,67	482,93	14.815,70
328	14.815,70	64,45	14.880,15	418,48	482,93	14.397,22
329	14.397,22	62,63	14.459,85	420,30	482,93	13.976,92
330	13.976,92	60,80	14.037,72	422,13	482,93	13.554,79
331	13.554,79	58,96	13.613,75	423,97	482,93	13.130,82
332	13.130,82	57,12	13.187,94	425,81	482,93	12.705,01
333	12.705,01	55,27	12.760,28	427,66	482,93	12.277,35
334	12.277,35	53,41	12.330,75	429,52	482,93	11.847,82
335	11.847,82	51,54	11.899,36	431,39	482,93	11.416,43
336	11.416,43	49,66	11.466,09	433,27	482,93	10.983,16
337	10.983,16	47,78	11.030,94	435,15	482,93	10.548,01
338	10.548,01	45,88	10.593,89	437,05	482,93	10.110,97
339	10.110,97	43,98	10.154,95	438,95	482,93	9.672,02
340	9.672,02	42,07	9.714,09	440,86	482,93	9.231,16
341	9.231,16	40,16	9.271,32	442,77	482,93	8.788,39
342	8.788,39	38,23	8.826,62	444,70	482,93	8.343,69
343	8.343,69	36,30	8.379,98	446,63	482,93	7.897,05
344	7.897,05	34,35	7.931,41	448,58	482,93	7.448,48
345	7.448,48	32,40	7.480,88	450,53	482,93	6.997,95
346	6.997,95	30,44	7.028,39	452,49	482,93	6.545,46
347	6.545,46	28,47	6.573,93	454,46	482,93	6.091,00
348	6.091,00	26,50	6.117,50	456,43	482,93	5.634,57
349	5.634,57	24,51	5.659,08	458,42	482,93	5.176,15
350	5.176,15	22,52	5.198,67	460,41	482,93	4.715,74
351	4.715,74	20,51	4.736,25	462,42	482,93	4.253,32
352	4.253,32	18,50	4.271,82	464,43	482,93	3.788,89
353	3.788,89	16,48	3.805,37	466,45	482,93	3.322,45
354	3.322,45	14,45	3.336,90	468,48	482,93	2.853,97
355	2.853,97	12,41	2.866,38	470,51	482,93	2.383,45
356	2.383,45	10,37	2.393,82	472,56	482,93	1.910,89
357	1.910,89	8,31	1.919,20	474,62	482,93	1.436,27
358	1.436,27	6,25	1.442,52	476,68	482,93	959,59
359	959,59	4,17	963,77	478,76	482,93	480,84
360	480,84	2,09	482,93	480,84	482,93	0,00
Totais pagos:		86.104,63		87.750,00	173.854,63	

5.3.3 Investimentos

Na ótica de investimentos, a aplicação mais longeva e popular é a POUPANÇA, por sua tradicional Segurança, entretanto, vem perdendo, cada vez mais essa popularidade, face a baixa rentabilidade que proporciona.

O rendimento mensal da Poupança corresponde a $0,5\%$ acrescido da variação da TR (a Taxa Referencial é obtida através da média das taxas de CDB praticada por 30 instituições financeiras selecionadas). Entretanto, caso a Taxa SELIC, estabelecida pelo Banco Central nas reuniões do COPOM (Comitê da Politica Monetária) fique igual ou inferior a $8,5\%$ ao ano, o rendimento da Poupança será calculado pela unificação da TR com 70% da Taxa SELIC[4].

Os rendimentos da Poupança só são realizados mensalmente. Caso o cliente saque antes da data-base, não tem direito a nenhum rendimento. Esse é um dos pontos que faz com que diversos clientes direcionem parte de suas aplicações para os Fundos de Investimentos, cuja diversidade hoje é bastante abrangente, permitindo aplicações de valores baixo, possibilitando o acesso a quaisquer pessoas.

No caso da Poupança, não há cobrança de Imposto de Renda e o acúmulo do saldo dar-se-á através da Capitalização Composta. Assim, se um cliente aplica $R\$ \ 200,00$ em uma Poupança, cujos rendimentos nos dois meses seguintes foi de $0,60\%$ e $0,58\%$, o saldo (montante) após esses dois meses será obtido diretamente pela aplicação da fórmula do Montante de Juros Compostos, utilizando como taxa a unificação dos dois índices, o que daria, como saldo $R\$ \ 202,37$.

Teorema 5.3.4. *Um plano que envolve reservar uma quantia de p reais mensalmente, por n meses em uma poupança, onde o banco oferece uma taxa de juros i, assumida composta mensalmente, o balanço V_n da conta após n meses é*

$$V_n = P \cdot \frac{[(1+i)^{n+1} - 1)]}{i}.$$

Demonstração. Depositando P no primeiro dia, depois de um mês, o juro é calculado e depositado na conta, e o cliente também deposita um adicional de P.
Ao final do primeiro mês, o balanço é de $V_1 = P + i \cdot P + P = P \cdot (1+i) + P$.
Ao final do segundo mês, o balanço é de $V_2 = V_1 \cdot (1+i) + P = P \cdot (1+i)^2 + P \cdot [1 + (1+i)]$.
$\vdots$
Ao final de n meses, o balanço é de

$$\begin{aligned} V_n &= P \cdot (1+i)^n + P \cdot [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}] \\ V_n &= P \cdot (1+i)^{n-1} + P \cdot [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}] \\ V_n &= P \cdot [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n], \end{aligned}$$

onde $[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$ é a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma PG de razão $1 + i \neq 1$ e $a_1 = 1$. Logo,

$$S_{n+1} = 1 \cdot \frac{1 - (1+i)^{n+1}}{1 - (1+i)} = \frac{[(1+i)^{n+1} - 1)]}{i}.$$

[4] A taxa Selic é a taxa básica de juros utilizada como referência pela politica monetária do Brasil.

Portanto,

$$V_n = P \cdot S_{n+1} = P \cdot \frac{[(1+i)^{n+1} - 1)]}{i}.$$

$\square$

Exemplo 5.3.11. *Azarildo que joga semanalmente na lotofácil (Os sorteios são realizados às segundas, quartas e sextas-feiras, a aposta mínima de* 15 *números, custa* $R\$ \ 2,00$*), experimenta guardar esse dinheiro em uma conta de poupança durante* 15 *anos, a partir de setembro de* 2015*. Quanto terá em agosto de* 2030*, suponha constante a taxa* $i = 0,6876\% a.m$*?*
(cotação 01/09/2015)
Solução. *Na prática é reservar uma quantia* $R\$ \ 24,00$ *reais mensalmente, por* 15 *anos. Durante estes* 15 *anos, o banco oferece uma taxa de juros* i*, assumida composta mensalmente. Considerando* 12 *jogos mensais, temos que*

- $P = 12 \cdot 2,00 = 24,00$ *depósito mensal na conta poupança,*
- $i = \dfrac{0,6876}{100} = 0,006876$ *taxa de juros constante durante os* 15 *anos,*
- $n = 15$ *anos* $= 180$ *meses duração da poupança,*
- V_n *balanço da conta após* n *meses* $n = 0,1,\ldots,180$*,*
- *depositando* $R\$ \ 24,00$ *no primeiro dia, depois de um mês, o juros é calculado e depositado na conta, e Azarildo também deposita um adicional de* $R\$ \ 24,00$*. Ao final do primeiro mês, o balanço é de*
- $V_1 = 24 + 0,006876 \cdot 24 + 24 = 24 \cdot (1 + 0,006876) + 24.$
- *Ao final do segundo mês, o balanço é de* $V_2 = V_1 \cdot (1 + 0,006876) + 24.$
- $\vdots$
- *Ao final de* 180 *meses, o balanço é de*
- $V_{180} = 24 \cdot (1+0,006876)^{180} + 24 \cdot [1 + (1+0,006876) + (1+0,006876)^2 + \ldots + (1 + 0,006876)^{179}]$
- $V_{180} = 24 \cdot (1,006876)^{180} + 24 \cdot [1 + (1,006876) + (1,006876)^2 + \ldots + (1,006876)^{179}]$
- $V_{180} = 24 \cdot [1 + (1,006876) + (1,006876)^2 + \ldots + (1,006876)^{179} + (1,006876)^{180}]$
- $[1 + (1,006876) + (1,006876)^2 + \ldots + (1,006876)^{179} + (1,006876)^{180}]$ *é a somade uma PG finita de razão* $1,006876$*. Logo,*
- $V = P \cdot \dfrac{[(1+i)^n - 1)]}{i}$
- $V = 24 \cdot \dfrac{[(1,006876)^{180} - 1)]}{0,006876} = 24 \cdot \dfrac{2,433}{0,006876} = 24 \cdot 353,84 = 8.492,16.$

Portanto, o saldo será $R\$\ 8.492,16$.

No caso dos Fundos de Investimentos, há uma taxa de administração, que é devido ao banco pela administração dos recursos e tem cobrança de Imposto de Renda sobre os rendimentos auferidos, com base no período em que o capital ficou aplicado. Se a aplicação for até 180 dias, a alíquota de IR é de $22,5\%$; se entre 181 dias e 360 dias, a alíquota é de 20%; se entre 361 e 720 dias, a alíquota é de $17,5\%$; se acima de 720 dias, a alíquota é de 15%.

5.4. Fundamentos de Logaritmos e Exponenciais Aplicados à Matemática Financeira

O objetivo dos exemplos abaixo é relacionar juros compostos com exponenciais e logaritmos.

Exemplo 5.4.1. *Certo banco oferece um investimento que rende uma taxa de 0,8% ao mês de juros compostos. Observe a simulação de investimento de R$ 2.500,00 em período de três meses.*

mês	*juros*	*montante*
1	$R\$20,00$	$R\$2.520,00$
2	$R\$20,16$	$R\$2.540,16$
3	$R\$20,32$	$R\$2.560,48$

Qual a função que determina o montante M obtido ao final do mês t?
Solução.
1 *mês:* $M_1 = C + J = C + C \cdot i = C \cdot (1+i) = 2.500,00 \cdot (1+0,008) = 2.520,00$
2 *mês:* $M_2 = M_1 + J_1 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1+i) = C \cdot (1+i)^2 = 2.500,00 \cdot (1+0,008)^2 =$
$= 2.540,16$
3 *mês:* $M_3 = M_2 + J + 2 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^3 = 2.500,00 \cdot (1+0,008)^3 =$
$= 2.560,48$
$\vdots$
t-ésimo mês: $M_t = M_{t-1} + J_{t-1} = M_{t-1} + M_{t-1} \cdot i = M_{t-1} \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^t$

Exemplo 5.4.2. *Dispondo de* $R\$\ 12.500,00$ *um comerciante necessita de* $R\$\ 15.700,00$ *para ampliar seu empreendimento. Por este motivo, ele irá aplicar a quantia que dispõe em fundo de capitalização que rende 1,8% a.m. Qual o tempo necessário que o comerciante deve esperar para efetuar essa ampliação?*
Solução.

- *Sendo* $M_n = C \cdot (1+i)^n$ e $i = 1,8\% = 0,018$,
- *temos* $15.700 = 12.500(1+0,018)^n$,

- $(1,018)^n = \dfrac{15.700}{12.500} = 1,246.$

- *Aplicando logaritmo na igualdade,*

- *temos* $log(1,018)^n = log1,246 \to nlog1,018 = log1,246,$

- *logo,* $n = \dfrac{log1,246}{log1,018} = 12,33.$

Portanto, o comerciante deve esperar 12 *meses e* 10 *dias.*

Exemplo 5.4.3. *Investindo seu capital a juros mensais de* 0,8%*, em quanto tempo você dobrará o seu capital inicial?*
Solução.

- *Temos* $M_n = 2C$ *e* $i = 0,8\% = 0,008,$

- *logo* $2C = C(1+0,008)^n \to 2 = (1,008)^n.$

- *Aplicando logaritmo na igualdade,*

- *temos* $log2 = log(1,008)^n \to log2 = nlog(1,008),$

- *logo,* $n = \dfrac{log2}{log(1,008)} \approx 87.$

Portanto, levará 87 *meses ou* 7 *anos e* 3 *meses.*

5.4.1 Planos de Pagamentos

Exemplo 5.4.4. *Um cliente resolveu comprar uma TV de LCD 42"e se deparou com os seguintes planos de pagamentos:*

1. *Plano A: Pagamento à vista de* $R\$1.425,00$
2. *Plano B: Em quatro prestações iguais e mensais de* $R\$500,00$ *, sendo uma entrada. Então:*

   (a) *Qual foi a taxa financeira usada pela loja?*

   (b) *Se fosse usada uma taxa financeira de* 7,5% *a.m., então qual seria o valor da prestação? (Suponha com entrada e sem entrada)*

   (c) *Se essa TV fosse financiada em 5 parcelas iguais e sem entrada a uma taxa de* 9,0% *a.m., então qual seria o seu saldo devedor após o pagamento da terceira parcela?*

Solução.

- *Se optar pelo pagamento a prazo, a primeira prestação (na compra parcelada) é paga no ato da compra e, dessa forma, não incidem juros sobre ela*

- *Preço à vista:*$R\$\ 1.425,00$ *(esse é o valor da mercadoria sem juros)*

- *Preço a prazo:*$R\$\ 2.000,00 = R\$\ 500,00 + R\$\ 500,00 + R\$\ 500,00 + R\$\ 500,00$

- *Após pagar a primeira parcela, à vista, o valor que ele estará devendo é* $R\$\ 1.425,00 - R\$\ 500,00 = R\$\ 925,00$

- *Se optar por efetuar o pagamento da segunda parcela após* 1 *mês, terá de pagar* $R\$\ 500,00$ *(e não* $R\$\ 308,33$*)*

- *Logo, os juros cobrado serão* $J = i \cdot C$ *em que* $J = 500 - 308,33 = 60$, $C = 191,67$, *isto é,* $i = \dfrac{191,67}{308,33} \approx 0,621 = 62,1\%$ *ao mês.*

5.4.2 Inflação

O fenômeno do aumento persistente e generalizado dos preços de bens e de serviços, com conseqüente perda do poder aquisitivo da moeda, denomina-se *inflação.*

Exemplo 5.4.5. *Qual deve ser a taxa mensal de inflação para que os preços sejam multiplicado por* 1,693 *em 10 anos?*
Este problema equivale aos problemas de juros compostos, pois os preços inflacionados também crescem em progressão geométrica. Seja p_0 *o preço-base e* p_t*, o preço inflacionado.*

$$p_t = p_0(1+r)^t$$

$$\frac{p_t}{p_0} = (1+r)^t$$

$$log(\frac{p_t}{p_0}) = log(1+r)^t$$

$$log(1+r) = \frac{log(\frac{p_t}{p_0})}{t}$$

$$sendo \qquad \frac{p_t}{p_0} = 1,693$$

$$t = 120$$

$$log(1+r) = \frac{log 1,693}{120}$$

$$log(1+r) = \frac{0,228657}{120}$$

$$r = 0,004397 \ \ ou \ \ 0,4397\% \text{ ao mês.}$$

5.4.3 Desconto

Quando uma pessoa contrai uma dívida é muito comum o credor emitir um documento que serve como comprovante desta operação financeira,chamado de título. Comum também as empresas, que possuem o direito de receber os valores contidos nestes títulos, utilizarem um produto bancário chamado desconto. Este produto visa antecipar o valor a ser recebido em uma data futura, buscando assim atender eventuais necessidades de caixa. Exemplos de títulos: nota promissória; duplicata; letras de câmbio e cheques.

No desconto bancário(ou taxa de desconto simples bancário, ou ainda, taxa de desconto simples por fora) os bancos efetuam o descontos de acordo com a fórmula $A = F \cdot (1 - dt)$, onde d é uma taxa fixada pelo banco e t é o prazo da operação, medido na unidade à qual se refere a taxa.

Exemplo 5.4.6. *Mário desconta uma promissória de R\$ 2.000,00, com vencimento de 60 dias, em um banco cuja taxa de desconto é 4,5% ao mês. Quanto Mário receberá?* **Solução.**

- *temos* $A = F \cdot (1 - dt) = 2.000(1 - 0,045 \cdot 2) = 2.000 \cdot 0,91 = 1.820.$

Logo, Mário receberá agora R\$ 1820,00 para pagar R\$ 2.000,00 em 60 dias. Se i é a taxa mensal de juros, $2.000 = 1.820(1 + i)^2$. *Daí,* $i \approx 0,0483$ *ou* $i \approx 4,83\%$.

Observe que anunciar a taxa de desconto e não a taxa de juros é um modo sutil de fazer crer aos mais ingênuos estarem eles pagando juros menores do que os que realmente lhes estão sendo cobrados.

No desconto composto por dentro ou desconto composto racional, os valores atual (A) e futuro (F) de um título satisfazem $A = F \cdot (1 - d)^t$, onde d é a taxa de desconto e t é o prazo da operação, medido na unidade à qual se refere a taxa.

Exemplo 5.4.7. *Calcular o valor atual composto por fora de um título de R\$ 1.000,00 três meses antes do seu vencimento, se a taxa de desconto é de 11% ao mês.*

- *Ora,* $A = F \cdot (1 - d)^t = 1.000(1 - 0,11)^3 = 1.000(0,89)^3 = 704,97.$

Logo, o valor é R\$ 704,97.

5.4.4 O Número e e a Matemática Financeira

Teorema 5.4.1. *Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a r_{nom}, a taxa de juros relativamente a t períodos de tempo é r_{efe} tal que*

$$1 + r_{efe} = (1 + r_{nom})^t.$$

Demonstração. Se p_0 é o valor inicial de um principal, o seu valor daqui a t períodos de tempo será $p_0(1 + r_{efe}) = p_0(1 + r_{nom})^t$. Daí, $1 + r_{efe} = (1 + r_{nom})^t$. □

Observação 5.4.1. *A taxa nominal r_{nom} é a taxa de juro acordada em contrato que se acrescentará às prestações de um empréstimo. Esta taxa geralmente é expressa em períodos de incorporação dos juros que não coincide com aquele que a taxa está se referindo. A taxa efetiva r_{efe} geralmente é usada quando o período de formação e incorporação dos juros coincide com o período que a taxa está se referindo. Essa taxa é resultante da aplicação periódica do juro previsto na taxa nominal.*

Exemplo 5.4.8. *Arthur investe seu dinheiro a juros de $6,6\%$ ao ano com capitalização mensal. Qual é a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Arthur?*
Solução.

- *Nesse caso, como a capitalização mensal, temos $r_{nom} = \dfrac{6,6}{12} = 0,55\%$ ao mês*
- *Logo, $1 + r_{efe} = (1 + 0,0055)^{12}$*
- $1 + r_{efe} \simeq 1,068$
- $r_{efe} \simeq 0,068 = 6,8\%$

A taxa anual de juros é de $6,8\%$.

Exemplo 5.4.9. *A maioria dos bancos calculam o juro acumulado não uma vez, mas várias vezes por ano. Se, no exemplo 11 da seção anterior, uma taxa de juro de 5% é composta semestralmente, o banco usará metade da taxa de juros anual como taxa por período. Daí que, num ano, haveria dois depósito de juros, e sua composição produziria um principal $R\$1.000,00 \cdot 1,025^2$ ou $R\$1.050,62$, cerca de sessenta e dois centavos a mais do que o mesmo dinheiro renderia se fosse composto anualmente a 5%. Quando o banco calcula juros em intervalos menores que um ano, a taxa de juros anunciada é chamada de* **taxa de juros nominal**. *A taxa de juros real observada no final de um ano será um pouco maior que isto e é chamada de* **taxa de juros efetiva**. *No exemplo citado, a taxa de juros nominal era de 5%, enquanto que a taxa efetiva era de $5,0625\%$. Com efeito*

$$1 + r_{efet} = (1 + \frac{0,05}{2})^2$$
$$r_{efet} = 5,0625\%,$$

que é desvantagem ao cliente.

Na comunidade bancária, podemos encontrar todo os tipos de composição de juros: anual, semestral, trimestral, mensal, semanal e mesmo diário. Suponha que a composição seja feita n vezes ao ano. Para cada "período de conversão" o banco usa a taxa anual dividida por n, que é $\frac{r}{n}$. E como em t anos existem (nt) períodos de conversão, um principal p_t, após t anos renderá

$$p_t = p_0(1 + \frac{r}{n})^{nt}, \quad n,t \geq 1 \quad (2)$$

É claro que a equação 1 é apenas um caso especial da equação 2, o caso onde $n = 1$.

periodo	n	nt	r/n	p_t
anual	1	20	$0,05$	$p_0 \cdot 2,653$
simestral	2	40	$0,025$	$p_0 \cdot 2,685$
trimestral	4	80	$0,0125$	$p_0 \cdot 2,701$
bimestral	6	120	$0,0083333$	$p_0 \cdot 2,707$
mensal	12	240	$0,0041667$	$p_0 \cdot 2,712$
diário	365	7300	$0,000137$	$p_0 \cdot 2,718$

Fonte: Autor

Tabela 5.3 O pricipal investido durante 20 anos a 5%

Se na tabela acima continuarmos capitalizando a cada hora, a cada minuto ou a cada segundo não afetará o principal, as mudanças acontecerão em dígitos cada vez menos significativos.

Esse comportamento é devido a taxa efetiva quando os períodos de composição diminuem. Se o ano for dividido em n períodos iguais, então a taxa de juros efetiva associada com uma taxa nominal de r é dada por

$$1 + r_{efet}(n) = (1 + \frac{r}{n})^n$$

aplicando juros continuamente, a taxa efetiva será

$$1 + r_{efet}(\infty) = \lim_{n\to\infty}(1 + r_{efet}(n)) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{r}{n})^n = e^r.$$

Para chegar a última parte da equação acima usa a fórmula

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e,$$

que é mostrado normalmente num primeiro curso de Cálculo. Usando a mundanças de variáveis $m = \frac{n}{r}$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{r}{n})^n = \lim_{m\to\infty}(1 + \frac{1}{m})^{mr} = (\lim_{m\to\infty}(1 + \frac{1}{m})^m)^r = e^r.$$

Logo, voltando ao exemplo e fazendo $t = 20$, podemos escrever

$$p_{20} = p_0(1 + r_{efet}(\infty))^{20} = p_0(e^r)^{20} = p_0 e^{\frac{5}{100}\times 20} = p_0 e.$$

6. ATIVIDADES SUGERIDAS

Os temas abordados em Matemática Financeira nas atividades sugeridas estão presentes no cotidiano de todos, por isso é importante conhecer os procedimentos utilizados em seu estudo. Segundo os PCN's para o ensino médio

> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.[Bra99]

Logo, ao final dessas atividades o aluno deve desenvolver competências e habilidades recomendadas pelos PCN's:

Representação e comunicação:

- Ler e interpretar textos de Matemática;
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc);
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.

Investigação e compreensão:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc);
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos;
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades;
- Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

Contextualização sócio-cultural:

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real;
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Sugestão para trabalhar as atividades:
Antes

- Formar os grupos e entregar a atividade;
- Dar tempo para que os alunos busquem a solução;
- Observar a participação dos alunos, estimulando-os para a construção de novos conhecimento;
- Atender aos alunos, sem dar respostas imediatas, questionando-os quanto aos métodos utilizados até aquele momento;
- Os grupos devem entregar, por escrito, suas resoluções ao Professor.

Depois

- O Professor é o guia e orientador dos questionamentos que ele já programou;
- Os alunos participam também com questionamentos próprios e devem ser ouvidos em todas as suas dúvidas numa participação ativa e respeitosa;
- A busca de um consenso é o principal objetivo nesse momento. A discussão organizada constitui-se numa parte rica nessa busca.

6.1. Oficina 1: Fundamentos de Razão, Proporções e Porcentagens aplicados à Matemática Financeira

As situações-problemas exemplificadas nessa oficina, procura mostrar a importância de explorar na sala de aula situações financeira do cotidiano do aluno, como ler, interpretar e calcular desconto, aumento e impostos embutidos em faturas de contas de consumo de água, luz, telefone. Conhecer todas infomações em um contra-cheque e saber calcular os ítens nele relacinados. Assim, incentivando a desenvolver seu senso crítico como cidadão.

Atividade 6.1.1. - "VAMOS ÀS COMPRAS"
Conteúdo explorados: Porcentagem

Objetivos: Explorar conceitos de porcentagem a partir de uma atividade prática.
Material: Folhas de atividades, lápis e borracha.

MOMENTO 1: O professor deverá programar uma visita, junto aos alunos a dois supermercados diferentes. Neste, os alunos deverão ser separados em grupos. Cada grupo receberá a primeira folha de atividades que deverá ser preenchida com os preços dos produtos obtidos nos dois supermercados, colocando as marcas desses produtos nas células correspondentes.

MOMENTO 2: Na aula subsequente à atividade no MOMENTO 1, os mesmos grupos devem retomar suas folhas de atividades com os dados obtidos a partir da visita aos supermercados para discutirem as diferenças de preços observadas para os produtos dos dois supermercados.
Cada grupo receberá a segunda folha de atividades. Nela, os alunos devem repassar os preços dos treze produtos listados, preenchendo a coluna referente à diferença de preço, calculando a porcentagem referida a esta diferença através da fórmula[1]

$$p = \frac{\Delta p \cdot 100}{pm}\%, \text{ onde pm significa preço menor}$$

Em seguida, os preços de cinco produtos devem ser representados em um gráfico que será construído pelos alunos na segunda folha de atividades, em forma de barras, onde as alturas dessas barras correspondem aos preços desses produtos. (Duas barras para cada produto, com os preços, respectivamente, dos dois supermercados).
Com base na análise desses dados, responder as questões descritas na terceira folha (pág.74) de atividades.
Comentários: Antes de levar os alunos aos supermercados, sugiro que o professor ou a escola entre em contato com os pais dos alunos e o gerente do supermercado, explicando-lhe os objetivos da atividade.

[1] representa variação percentual: fórmula (1.1), pág. 17.

Produto	Marca	Unidade	Mercado 1	Mercado 2
Arroz		$5Kg$		
		$5Kg$		
Feijão		$1Kg$		
		$1Kg$		
Macarrão		$500g$		
		$500g$		
Açucar		$1Kg$		
		$1Kg$		
Farinha de Mandioca		$1Kg$		
		$1Kg$		
Sal		$1Kg$		
		$1Kg$		
Óleo de Soja		$900ml$		
		$900ml$		
Extrato de Tomate		$130g$		
		$340g$		
		$130g$		
		$340g$		
Detergente		$500ml$		
		$500ml$		
Sabonete		$90g$		
		$130g$		
		$90g$		
		$130g$		
Creme Dental		$50g$		
		$90g$		
		$50g$		
		$90g$		
Esponja de Aço		pc		
		pc		
Sabão em pó		$500g$		
		$1kg$		
		$500g$		
		$1kg$		

Fonte: Autor

Tabela 6.1 Atividade 1

Produto	Marca	Unidade	Mercado 1	Mercado 2	diferença (Preço)	Porc. %
Arroz		$5Kg$				
Feijão		$1Kg$				
Macarrão		$500g$				
Açucar		$1Kg$				
Farinha de Mandioca		$1Kg$				
Sal		$1Kg$				
Óleo de Soja		$900ml$				
Extrato de Tomate		$130g$				
Detergente		$500ml$				
Sabonete		$90g$				
Creme Dental		$50g$				
Esponja de Aço		pc				
Sabão em pó		$500g$				
Total						

Fonte: Autor

Tabela 6.2 Atividade 2

Atividade 6.1.2. - "A MATEMÁTICA FINANCEIRA NO CONTRACHEQUE"
Conteúdo explorados: Razão, Proporção e Porcentagem
Objetivos: Explorar conceitos de razão, proporção e porcentagem a partir de uma atividade prática.
Material: caderno, lápis e borracha.

O professor divide a turma em grupos de três ou quatro alunos para executar as terefas dos Comentários abaixo.

O Sr São Paulão é funcionário da fábrica T & T. Trabalhando como subgerente de produção recebe um salário mínimo mais um adicional de 12% *sobre o salário para cada* 5 *mil peças produzidas. Tendo produzido* 60 *mil peças, no mês de outubro, vamos preencher seu contracheque, levando em consideração todos os descontos, e descobrir seu salário líquido. Vamos cacular:*

- *salário base*
  $SB = ?$
- *adiciona sobre produção*
  $PRODUÇÃO = ?$
- *vale transporte*
  $VT = ?$
  $DESCONTO\ VT = ?$
- *vale alimentação*
  $VA = ?$
  $DESCONTO\ VA = R\$788,00 \times 20\% = R\$788,00 \times 0,2 = R\$157,60$
- *salário bruto*
  SBr = SB + PRODUÇÃO
  $SBr = ?$
- *previdência*
  INSS = SBr$\times$alíquota
  $INSS = ?$
- *imposto de renda*
  IRRF = (SBr - INSS) $\times$ alíquota - dedução
  $IRRF = ?$
  $IRRF = (R\$2.384,49) \times 0,075 - R\$142,80 = R\$36,03$
- *fundo de garantia*
  FGTS = SBr $\times$ alíquota
  $FGTS = ?$

Comentários: No Cálculo do FGTS, o empregador deve recolher a importância correspondente a oito por cento da remuneração devida a seu empregado.

O FGTS não pode ser descontado do salário do trabalhador, caracterizando-se como uma obrigação do empregador.

A alíquota de 8% referente ao recolhimento mensal de FGTS incide sobre o salário bruto do empregado, acrescido de eventuais horas extras, comissões, premiações, gratificações, diárias para viagem e abonos pagos pelo empregador. Essa alíquota também incide sobre a remuneração referente ao décimo-terceiro salário e ao adicional de gozo de férias.

- *preenchendo o contracheque*

Atividade 6.1.3. - "O TABAGISMO"

(Enem-2003) O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1500 são casos diagnosticados de câncer, e 500 são casos diagnosticados de enfisema. Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2000 pessoas é, aproximadamente:
(A) 740 (B) 1100 (C) 1310 (D) 1620 (E) 1750

Atividade 6.1.4. - "ORÇAMENTO DOMÉSTICO"
Conteúdo explorados: Porcentagem
Objetivos: Explorar conceitos de porcentagem a partir de uma atividade prática.
Material: Caderno, lápis e borracha.

Senhor Zeca conseguia "equilibrar" o seu orçamento doméstico com uma renda mensal R\$ 1.795,00. Sabe-se que os seus gastos eram feitos principalmente com aluguel, alimentação, transportes, plano de saúde, vestuário e outros (cerveja, lazer, cinema,... etc.). A distribuição com os gastos no ano passado foi a seguinte:

Item	%
aluguel	22
transporte	17
alimentação	35
plano de saúde	15
vestuário	6
outros	5

Assim sendo:
a) Qual será a nova distribuição orçamentária, se os gastos necessários sofreram o seguinte reajuste: aluguel (9%), supermercado (8%), transporte (15%), plano de saúde (10%) e vestuário

(16%). *Suponha que a sua renda mensal seja a mesma e que aluguel, supermercado , plano de saúde e transporte sejam indispensáveis ...*

b) E se a sua renda mensal sofrer um reajuste da ordem de 11%*, então como ficariam os seus gastos? Considere os dados do item (a).*

c) Qual o reajuste mínimo para que possam ser garantidos todos os itens descritos em (a)?

Atividade 6.1.5. - "MENSALIDADES ESCOLARES"
Conteúdo explorados: Porcentagem
Objetivos: Explorar conceitos de porcentagem a partir de uma atividade prática.
Material: Folhas de atividades, lápis e borracha.

O Colégio HCB utiliza 80% das mensalidades escolares para pagar a folha de pagamento dos professores (Receita do colégio é composto pela soma das mensalidades). Então:

a) Sabendo que o colégio pretende reajustar o salário dos professores em 20%*, e que de agora em diante ele se vê obrigado a utilizar no máximo 60% de sua receita para a folha de pagamento dos professores, assim qual deveria ser a taxa de reajuste das mensalidades?*

b) Qual seria o reajuste dos professores, se o colégio reajustasse as mensalidades em 50%, e que toda a receita fosse gasta com a folha de pagamento dos professores?

6.2. Oficina 2: Fundamentos de PA'S e PG'S aplicados à Matemática Financeira

Atividade 6.2.1. -"SONHANDO COM A CASA PRÓPRIA"
Conteúdo explorados: Progressões e Amortizações
Objetivos: Explorar conceitos de progressões aplicadas na amortização a partir de uma atividade prática.
Material: Caderno, lápis e borracha.
Momento 1: O professor expõe sobre o tema amortização e comenta o exemplo de um financiamento de um imóvel de $R\$\ 100$ *mil, pelo prazo de* 10 *anos (a um custo anual de* 14%*), o valor da primeira prestação na tabela Price será de* $R\$\ 1.552,66$*, enquanto no SAC fica em* $R\$\ 2$ *mil. A última parcela, na Price, continua em* $R\$\ 1.552,66$*, enquanto no SAC cai para* $R\$\ 879,93$*. Ao final, quem optou pela Tabela Price paga* $R\$\ 186.319,72$ *enquanto quem escolheu a SAC paga* $R\$\ 172.796,09$*, ou seja,* $R\$\ 17.500,00$ *a menos. Os dados são da Associação Nacional dos Executivos de Finanças (Anefac).*

Disponível em:http://economia.terra.com.br/minha-casa-minha-vida-resgata-tabela-price-em-financiamentos Acesso em:09nov.2015.

Momento 2: O professor propõe aos alunos que eles façam uma simulação do financiamento de uma casa em site, usando as tabelas SAC e Price.

Momento 3: O professor abre um espaço para comentários sobre qual sistema é mais vantajoso e em seguida ele propõe uma atividade.

Carmelita e o esposo conseguiram encontrar uma casa nova, que esperam caber no seus orçamentos. Sendo a renda bruta da família $R\$ \; 1.980,00$ *e o preço do imóvel* $R\$ \; 93.000,00$*, ela pediu seu filho Carlos para fazer uma simulação no prazo de* 360 *meses no simulador habitacional da caixa. Logo, obtiveram as seguintes informações: Subsídio Minha Casa Minha Vida* $R\$ \; 9.654,00$*, Valor do financiamento* $R\$ \; 83.346,00$ *e 1º prestação* $R\$ \; 590,60$*. Como seu filho tinha conhecimento de matemática financeira, calculou o juro de contrato e algumas parcelas,veja abaixo:*

Atividade 6.2.2. -"PLANEJANDO UMA APOSENTADORIA TRANQUILA"
Conteúdo explorados: Progressões
Objetivos: Explorar conceitos de progressões a partir de uma atividade prática.
Material: Folhas de atividades, lápis e borracha.
Momento 1: O professor divide a turma em grupos e determina os grupos que irão pesquisar sobre plano de previdência privada (modalidade, rentabilidade e taxa de administração e outros impostos), poupança e outro investimentos a longo prazo.
Momento 2: O professor irá intermediar um debate sobre o tema proposto na atividade (quais as vantagens e desvantagens).
Momento 3: O professor propõe a seguinte atividade

Gastão completou 30 *anos em* 5 *de outubro de* 2015*. Logo, pensando em complementar sua aponsentadoria contratou um plano de previdência privada (estimativa de rentabilidade anual líquida* 8%*). Ele pretende contribuir iniciamente com* $R\$ \; 120,00$ *durante* 28 *anos na modalidade* **VGBL***. Qual o valor total acumulado nesse período(sem as taxas administrativas)? Se a renda vitalícia for estimada em* $R\$649,55$*, qual é a taxa percentual mensal cobrado pela a taxa de administração financeira e a taxa de carregamento?*

6.3. Oficina 3: Fundamentos de Logaritmos e Exponenciais aplicados à Matemática Financeira

Atividade 6.3.1. -"PLANOS DE PAGAMENTOS"
Conteúdo explorados: exponenciais
Objetivos: Explorar conceitos de exponenciais a partir de uma atividade prática.
Material: Caderno, lápis e borracha.

Netinho resolveu comprar um notebok e se deparou com os seguintes planos de pagamentos:
Plano A: Pagamento à vista de R$ 810,00
Plano B: Em três prestações iguais e mensais de R$ 300,00 , sendo uma entrada.
Então:
a) Qual foi a taxa financeira usada pela loja?

b) Qual o plano mais vantajoso se a taxa de poupança é de $0,7\%$ $a.m$*?*

c) Se fosse usada uma taxa financeira de $12,0\%$ *a.m., então qual seria o valor da prestação? (Suponha com entrada e sem entrada)*

d) Se essa TV fosse financiada em 5 parcelas iguais e sem entrada a uma taxa de $13,4\%$ *a.m., então qual seria o meu saldo devedor após o pagamento da segunda parcela?*

Atividade 3

Com base na análise dos dados da atividade 2, responder as questões descritas abaixo.

1) Se você fosse fazer a compra dos 13 produtos relacionados, em qual dos supermercados você faria a compra? Justifique sua resposta.

....
....
....

2) Observando visualmente o gráfico dos 5 produtos relacionados, é possível dizer qual o supermercado está vendendo tais produtos mais baratos?

....
....
....

3) Some todos os valores da coluna correspondente a diferença de preços. Esta soma coincide com a diferença da soma? Por quê?

....
....
....

4) Observando a questão anterior, calcule a média das porcentagens. Ela coincide com a porcentagem da soma?

....
....
....

5) Se usássemos a fórmula $p = \dfrac{\Delta p \cdot 100}{pm}\%$, o que representeriam os resultados da coluna de porcentagem?

....
....
....

Fonte: Autor

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi de servir como sugestão para auxiliar o professor de matemática com atividades educacionais dentro de um contexto concreto no qual o aluno se veja naturalmente inserido. Assim, a participação dele nas discursões do conteúdo se tornará efetiva, porque fazem parte do seu cotidiano assuntos como matemática comercial, isto é , razão, proporção e porcentagem.

Trazendo uma apredizagem contextualizada com os temas, usando recibos de água, energia e contra-cheque, dicutindo toda matemática comercial neles embutida, abrindo assim espaço em sala de aula para uma discursão sobre cosumo consciente e o transformando em um agente multiplicador dessa idéia. A partir da matemática financeira, falamos de temas básicos como progressões, logaritmos e exponenciais aplicados a assuntos como juros simples e compostos e descontos, dentro de temas como: créditos, empréstimos, investimentos, planos de pagamentos e inflação. São temas que proporciona uma reflexão e disperta curiosidade no aluno, então os problemas motivadores contidos neste trabalho vem como mais uma sugestão de atividades para o professor explorar, fazer questionamentos como: Esse é momento para comprar? Juros não estão abusivos? À vista ou a prazo? Poupança ou fundo de investimento?

Logo, promovendo a participação crítica dos alunos, formando cidadãos conscientes e autônomos diante dos problemas futuros a serem enfrentados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Bra99] Brasil. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio. matemática. 1999.

[HP07] S. Hazzan and J. N. Pompeo. *Matemática Financeira*. Saraiva, RJ, sixth edition, 2007.

[IHD06] G. Iezzi, S. Hazzan, and D. Degenszajn. *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 11. Atual, SP, first edition, 2006.

[LCW99a] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, and E. Wagner. *A Matemática do do Ensino Médio*, volume 1. SBM, RJ, fourth edition, 1999.

[LCW99b] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, and E. Wagner. *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2. SBM, RJ, first edition, 1999.

[Lim10] E. L. Lima. *Logaritmos*. SBM, RJ, fourth edition, 2010.

[Mao08] E. Maor. *e : A História de Um Número*. Record, RJ, fourth edition, 2008.

[MWZ01] A.C. Morgado, E. Wagne, and S.C. Zani. *Progressões e Matemática Financeira*, volume 8 of *Coleção do Professor de Matemática*. SBM, RJ, fifth edition, 2001.

[RSA15] C. Rousseau and Y. Saint-Aubin. *Matemática e Atualidade*. SBM, RJ, fourth edition, 2015.