UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Ensino da Geometria no Sexto Ano do Ensino Fundamental por Meio de Oficinas

Claricy Alves Silva

Instituto de Matemática

Maceió, Abril de 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLARICY ALVES SILVA

O ENSINO DA GEOMETRIA NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DE OFICINAS

MACEIÓ
2016

CLARICY ALVES SILVA

O ENSINO DA GEOMETRIA NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DE OFICINAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, sob coordenação nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo

MACEIÓ
2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

S586e Silva, Claricy Alves.
O ensino da geometria no sexto ano do ensino fundamental por meio de oficinas / Claricy Alves Silva. – 2016.
149 f. : il.

Orientador: Vânio Fragoso de Melo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 96-98.
Anexos: f. 99-149.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Teoria dos Van Hiele. 3. Geometria – Ensino aprendizagem. 4. Oficinas – Matemática. I. Título.

CDU: 372.851.4

Folha de Aprovação

CLARICY ALVES SILVA

O ENSINO DE GEOMETRIA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DE OFICINAS

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 01 de abril de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr Vânio Fragoso de Melo - UFAL (Presidente)

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra - UFAL

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG

AGRADECIMENTOS

À Deus, que é o maior mestre que alguém pode conhecer por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades no decorrer do curso, e em todos os momentos de minha vida;

A Instituição com um todo, especialmente seu corpo docente e discente que oportunizaram a janela que hoje vislumbro em horizontes de grandes conhecimentos;

Ao professor Dr. Vânio Fragoso de Melo, pela orientação e apoio na elaboração deste trabalho tão significativo para meu curso;

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, especial aos professores da Universidade Federal de Alagoas/UFAL, pela oportunidade de contribuir com a ampliação do conhecimento neste processo de formação;

Aos meus filhos Guilherme e Gustavo pela oportunidade de experimentar a mais pura forma de amor;

A meu esposo Marcos Ramon, pelo apoio incondicional, companheirismo e incentivo em toda esta caminhada;

Aos meus pais pelo exemplo de dedicação, respeito e amor que têm demonstrado em toda a minha existência;

As minhas irmãs, sobrinhos e sobrinha, que em minha ausência sempre entenderam que meu futuro está sendo construído através desta constante dedicação presente;

Aos meus colegas de curso, com que partilhei todas as dificuldades enfrentadas, meu agradecimento especial;

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação, meu profundo agradecimento.

.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção.

FREIRE, Paulo

RESUMO

Na presente dissertação apresentamos um breve histórico sobre a geometria apontando as transformações ocorridas ao longo dos anos. Destacando ainda o que reza a Lei de Diretrizes e Bases da Educação nº 9394/96, assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e o Plano Nacional da Educação sobre o ensino da geometria. Apresentamos também algumas alternativas para o ensino da geometria tendo como fundamentação a Teoria dos Van Hiele levando em consideração a altivez de cinco distintos graus de pensamentos no que concerne ao desenvolvimento da concepção dos estudantes referentes à geometria. A proposta para o ensino da geometria é por intermédio de oficinas realizadas em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, tendo por base a Teoria dos Van Hiele, englobando ainda o uso do material concreto e manipulável e a utilização do ambiente de geometria dinâmica Geogebra. A proposta agrega a Geometria Plana e a Geometria Espacial, por meio da metodologia de ensino e aprendizagem utilizada nas oficinas que prioriza a observação dos ambientes que os cercam, tendo como objetivo mostrar uma nova alternativa de ensino da Geometria. Na apreciação e validação da implementação da proposta adotamos como embasamento a Teoria dos Van Hiele, ainda buscamos subsídios nas pesquisas de outros autores. A partir da apreciação dos resultados de atividades realizadas com base na teoria dos Van Hiele, na turma do 6º ano “C” de uma escola, foi detectado que aproximadamente 57% dos alunos atingiram o nível I, 30 % o nível II, e os 13% restante atingiram o nível III.

Palavras-chave: Geometria. Teoria dos Van Hiele. Oficinas. Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

In this thesis we present a brief history of geometry pointing out the changes that occurred over the years. also emphasizing that reads the Law of Directives and Bases of Education No 9394/96, as well as the National Mathematics Curriculum Standards and the National Education Plan on the teaching of geometry. We also present some alternatives to the teaching of geometry having as basis the theory of Van Hiele taking into account the haughtiness of five different degrees of thoughts regarding the development of the conception of the students related to geometry. The proposal for the teaching of geometry is through workshops in a class of 6th grade of elementary school, based on the Theory of Van Hiele, even encompassing the use of concrete and welding materials and the use of dynamic geometry environment Geogebra . The proposal adds the plane geometry and spatial geometry, through the teaching and learning methodology used in the workshops that prioritizes the observation of the environments around them, aiming to show a new alternative geometry teaching. In the assessment and proposed the implementation of validation adopted as basis the theory of Van Hiele, still seek subsidies in the research of other authors. From the assessment of the activities of results performed on the theory of Van Hiele, in the class of 6th grade "C" of a school, it was found that approximately 57% of pupils reached Level I, 30% Level II, and 13 remaining% achieved level III.

Keywords: Geometry. Van Hiele theory. Workshops. Teaching and Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PNE	Plano Nacional da Educação
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é fruto de várias reflexões realizadas no exercício da minha profissão sobre o ensino da matemática, em especial da geometria, nas escolas públicas onde trabalho ou já trabalhei nas cidades do interior de Alagoas, Santana do Ipanema e Poço das Trincheiras. Por várias vezes me questionei o porquê dos alunos não aprenderem geometria no ensino fundamental I (1º ao 5º ano) e chegarem ao 6º ano, sem conhecimentos básicos do Bloco Espaço e Forma, falha essa que acarreta em grandes problemas no decorrer da vida escolar e social do aluno.

Os dados estatísticos da situação dos estudantes brasileiros só confirmam o quanto o ensino de matemática está sendo ineficiente. No Pisa 2012 (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, realizado em 2012) o Brasil apresentou desempenho muito baixo em matemática, ficando em 58º lugar dentre os 65 países analisados e, dentre os estados brasileiros, Alagoas apresentou um dos piores resultados, 62,4 % dos estudantes de 15 anos que fizeram o exame ficaram abaixo do nível I, numa escala de I a VI.

Segundo estudos feitos pelo Todos Pela Educação, 9,3% dos alunos do ensino médio apresentam o conhecimento esperado em matemática, esse estudo é feito com base no desempenho dos alunos nas avaliações da Prova Brasil e do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) de 2013, desempenho esse que desde 2009 vem decrescendo. Para Alagoas o resultado é ainda pior, apenas 3,8% dos estudantes do ensino médio sabem o esperado em matemática.

Mudar essa realidade não é tarefa fácil, a primeira barreira que encontramos é convencer os colegas professores a buscarem novas alternativas de ensino, e que precisamos pesquisar e estudar mais para estarmos preparados para cumprir nossa missão de mediadores do conhecimento, visto que para isso o professor precisa de dedicação e tempo, mas com a realidade brasileira de desvalorização da classe (tanto social quanto financeira), grande maioria dos professores assume uma jornada dupla ou até tripla de trabalho para atender suas necessidades básicas. Outro obstáculo encontrado é o número mínimo de incentivos financeiros destinados à cursos de formação continuada para professores, específicos na área da matemática, em especial nas regiões mais pobres do país.

A geometria é considerada importante por pesquisadores e curriculistas porque, por meio dela, a criança desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações-problemas (PIRES, CURI, CAMPOS, 2000, p.15).

Nos últimos anos muitos estudiosos e pesquisadores vêm tentando mudar o ensino da geometria, propondo uma abordagem construtivista, com uso de materiais manipuláveis e softwares geométricos, com a finalidade de proporcionar um estudo dinâmico onde os discentes são agentes ativos da própria aprendizagem.

Mas para o professor que não vivenciou esta nova tendência do ensino da geometria na sua vida escolar, isso é um grande desafio, que demanda tempo e disposição, encontrar referências bibliográficas que os ensine na prática como deve ser sua abordagem em sala de aula não é fácil. Existem poucos livros com esse tipo de abordagem, o que mais encontramos são artigos de pesquisadores, com pouca experiência no assunto, descrevendo e sugerindo atividades realizadas que foram bem sucedidas.

O objetivo deste trabalho é apresentar estratégias didáticas, por meio de oficinas pedagógicas, que tornem o ensino da geometria mais atraente e acessível, com uso de material concreto e manipulável e do software educacional livre Geogebra. Com atividades planejadas e elaboradas segundo a teoria dos Van Hiele, do desenvolvimento geométrico que privilegia o uso de materiais concretos e manipuláveis para obter uma aprendizagem significativa através da ludicidade, para que professores interessados possam se apropriar deste trabalho e fazer uso das ideias apresentadas para melhorar o ensino da geometria.

A oficina foi realizada em uma escola municipal da cidade de Poço das Trincheiras, com uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. A escolha da turma se deu pelo fato de constatar que os alunos chegaram ao Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano) praticamente sem conhecimento em geometria. Ao conversar com outros professores da área da região, eles afirmaram que essa realidade infelizmente não era apenas dessa turma, mas sim das turmas em que eles lecionavam também.

Provavelmente esses alunos não tiveram a oportunidade de estudar a geometria como deveria, ou até mesmo nem estudaram, era notória a falta de conhecimento deles, muitos não reconheciam nem as formas mais simples da geometria plana como um quadrado, retângulo, triângulos e círculos, muito menos as formas espaciais.

2 HISTÓRICO DO ENSINO DA GEOMETRIA

Estudiosos indicam que os conhecimentos primários geométricos tenham sido construídos de maneira empírica partindo da necessidade do indivíduo em dominar determinados processos para ampliar a agricultura (CARDOSO, 2012).

Para alguns historiadores o início da geometria se deu no Egito, quando surgiu a necessidade da demarcação das terras agrícolas após as enchentes do rio Nilo, mais tarde ainda no Egito o famoso Thales de Mileto a pedido do imperador, dar uma demonstração de como calcular a altura de uma pirâmide do Egito através do comprimento da sombra no instante que a sombra de um bastão era igual a sua altura.

Nesse contexto Pavanello (1989, apud Cardoso, 2012, p. 5) enfatiza que o progresso da geometria se incide:

> No período Neolítico da agricultura e da tecelagem principalmente começam a propiciar ao homem uma compreensão mais acentuada das relações entre forma e número, deixando evidente a relação entre geometria e aritmética, desenvolvendo ainda as noções de simetria. A prática em massa da agricultura e da economia vai proporcionando uma gradual evolução da matemática e da geometria, pela necessidade de desenvolver técnicas e resolver problemas que se apresentavam nesse período (PAVANELLO, 1989, apud CARDOSO, 2012, p. 5).

Cardoso (2012) enfatiza ainda que os antigos gregos já revelavam ter ciência da geometria descritiva de Tales de Mileto que foi o pioneiro da geometria dedutiva, em sua ampla relevância, sobretudo pela ocorrência do mesmo ter chegado a essas informações por intermédio de determinado tipo de raciocínio lógico.

Para Cecilia Parra (1996, p. 23):

> O momento culminante no desenvolvimento da geometria como ramo da matemática se produz quando Euclides escreve OS Elementos (século III a.C.), sintetizando, o saber, geométrico de sua época. Nesta obra, se parte de um número reduzido de axiomas, postulados e definições para construir, por via de dedução, o conjunto das proposições geométricas vigentes, as que aparecem como consequências necessárias das afirmações primitivas (grifo do autor).

Por conseguinte, o pensamento geométrico foi se ampliando até chegar às geometrias denominadas não euclidianas. Assim os conhecimentos geométricos estiveram ao lado da matemática, fornecendo ainda subsídios para o progresso não só da matemática como também das demais ciências e da tecnologia.

Contudo ao analisar o ensino da geometria no âmbito escolar, percebe-se que ele é desenvolvido de modo rigorosamente clássico, deixando de lado o ensino que tem como finalidade a ampliação da aprendizagem expressiva terminando por induzir o aluno ao desprendimento em aprender esse âmbito matemático em detrimento de sua relevância (PAVANELLO, 1989).

Sabe-se que os conhecimentos a respeito da geometria são imprescindíveis para o indivíduo tanto no que concerne a sua vivência no dia a dia quanto pela perspectiva instrumental desses conhecimentos na construção do pensamento lógico e ampliação das competências dedutivas. Nessa perspectiva, as palavras enunciadas por Kant "a geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços" se elucidam.

Nessa perspectiva Lorenzato (1995, p. 5) ressalta que:

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida.

Apesar de tão elevada importância para humanidade ela não tem tido a devida importância na vida escolar dos estudantes, existe uma grande preocupação de estudiosos e educadores da área de matemática com o ensino da geometria no país, em especial nas escolas públicas, onde se concentra a grande maioria dos estudantes brasileiros e os índices de aprendizagem são mais baixos, segundo o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica).

Estudos comprovam que esse ramo da matemática foi excluído pelos professores da educação básica durante décadas, profissionais da área buscam encontrar os fatores que provocaram essa exclusão ao mesmo tempo em que se procura resgatar e sistematizar esse ensino, de acordo com as necessidades dos discentes.

Um dos fatores apontados por estudiosos como Pavanello (1989) e Lorenzatto (1995) foi à falta de preparação e de conhecimento geométrico dos docentes para acompanhar as mudanças no ensino provocadas pela reestruturação e inserção do Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

Lorenzatto (1995, p. 10) ainda afirma que:

> O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática

> Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje.

A Matemática Moderna, inserida na educação brasileira a partir da década de 1960, tinha por objetivo unificar o ensino de matemática, que até então era subdividido em aritmética, geometria, trigonometria e álgebra. Esses ramos da matemática seriam ensinados de maneira integrada, com a introdução de teoria dos conjuntos, das estruturas algébricas e das relações.

Nessa abordagem a geometria euclidiana seria substituída pela geometria das transformações, mas essa abordagem não conseguiu estabelecer-se na prática pedagógica o que gerou uma renúncia ao ensino da geometria. Para Lorenzatto (1989) a partir disso criou-se um círculo vicioso: a geração que não estudou geometria não sabe como ensiná-la.

Outro fator que também contribuiu para o abandono do ensino da geometria foi à promulgação da Lei de Diretrizes e Bases de 1971 - Lei nº 5692/71, lei essa que permitia que os estabelecimentos de ensino pudessem escolher os programas das diferentes disciplinas, oportunizando a escolha aos professores de matemática, isso resultou em consequências desastrosas para o ensino uma vez que muitos professores despreparados, do antigo 1º grau, optaram por não ensinar a geometria. Os poucos que ensinavam pareciam se aproveitar do fato dos autores de livros didáticos da época abordar os conteúdos de geometria na parte final dos livros e deixavam para abordar esses conteúdos nos últimos dias do ano letivo (nessa época o ano letivo tinha no mínimo 180 dias) de maneira superficial, sem a atenção e dedicação necessária.

Assim os alunos só estudavam geometria no 2º grau, quando estudavam, apresentando sérios problemas de aprendizagem, pois não tinham aprendido as noções básicas de geometria na disciplina de matemática e para piorar a disciplina Construções Geométricas havia sido substituída por Educação Artística.

Depois de anos de estudos e tentativas podemos dizer que o ensino da geometria vem melhorando ao longo dos anos, apesar de manter um ritmo bastante lento. Novas metodologias vêm surgindo, os autores dos livros didáticos já tentam abordar a geometria de forma contextualizada e associada aos outros campos da matemática, incentivando em alguns casos a exploração de material concreto, uso de softwares educacionais entre outros.

Atualmente encontramos em desenvolvimento no Brasil algumas tendências didático-pedagógicas para o ensino da geometria assim como da Geometria Experimental. Nessa

Geometria se menciona as constituições geométricas e modos de interpretação do mundo, intercedidas pelo experimento, em meio á determinadas propriedades estão às atividades de experiências através de manipulações de elementos sólidos e a resolução de problemas.

Ao observar os ambientes, percebe-se que a Geometria está em toda parte, no entanto é necessário conseguir vê-la, mesmo não desejando. Nesse contexto Lorenzatto (1995, p. 5) afirma que:

> Lidamos em nosso cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularíssimo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria.

Estudos psicológicos corroboram que a aprendizagem da geometria é imprescindível ao desenvolvimento do aluno, uma vez que diversas circunstâncias escolares demandam discernimento espacial, tanto em matemática quanto nas demais áreas.

Ao analisarmos os fatores que levaram ao abandono da geometria, em especial as classes menos favorecidas, composta por estudantes da rede pública, constatamos que o problema do ensino da geometria é de ordem social, alunos que não estudaram geometria tornaram-se professores com pouco ou sem conhecimento para formar novas gerações.

Devemos acabar com esse círculo vicioso, denominado por Lorenzatto (1995), precisamos instigar nossos atuais professores a buscarem conhecimentos geométricos e novas metodologias de ensino. Necessitamos também de mais formação continuada para os atuais professores, voltadas para conteúdos da Geometria, formação didática e práticas de ensino, e que as universidades tentem sanar essas dificuldades nos futuros professores que lá estão, para que comecemos a ter cidadãos cada vez mais preparados para enfrentar os desafios da vida cotidiana.

2.1 Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB

A Lei de Diretrizes e Bases nº 9.394/96 que constitui as diretrizes e bases da educação nacional provê relevantes direções. A LDB em seu artigo 13 apresenta algumas funções dos docentes, uma delas é zelar pela aprendizagem dos alunos.

Assim sendo, Brasil (1998, p. 36) assegura que:

> Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que

> não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Mediante essa citação, pode-se enfatizar que é imprescindível que o docente tenha conhecimento de metodologias diversificadas para o ensino da matemática, não apenas para dá embasamento ao trabalho em sala de aula, todavia para seu planejamento, e principalmente pensando na aprendizagem dos alunos.

A LDB em seu artigo 26, inciso 1 reza que:

> Os currículos do Ensino Fundamental e Médio deve abranger obrigatoriamente, o estudo da Língua Portuguesa, da Matemática, do Conhecimento do Mundo Físico e Natural e da realidade Social e Política, especialmente no Brasil.

A obrigatoriedade do ensino da matemática está estabelecida em lei, cabe aos professores e instituições de ensino zelar pelo seu cumprimento mantendo a qualidade de ensino para todos, seja na escola pública ou privada, negligenciar o ensino é crime, portanto cabe ao professor e instituições de ensino buscar meios e estratégias para melhoria do ensino da matemática, em especial da geometria que historicamente vem sendo abandonada.

Ainda na LDB, artigo 13, temos as obrigações dos docentes:

I - participar da elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino;

II - elaborar e cumprir plano de trabalho, segundo a proposta pedagógica do estabelecimento de ensino;

III - zelar pela aprendizagem dos alunos;

IV - estabelecer estratégias de recuperação para os alunos de menor rendimento;

V - ministrar os dias letivos e horas-aula estabelecidos, além de participar integralmente dos períodos dedicados ao planejamento, à avaliação e ao desenvolvimento profissional;

VI - colaborar com as atividades de articulação da escola com as famílias e a comunidade (BRASIL, 1996).

Estas incumbências determinadas por lei aos professores deixam ainda mais clara a sua importância do ensino-aprendizagem dos discentes, somos um elemento fundamental na educação brasileira, precisamos proporcionar aos nossos discentes um ensino que lhes possibilite adquirir as habilidades de compreender, descrever e representar de maneira organizada o mundo em que habitam adquirindo habilidades através do ensino da geometria.

2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN’s

De acordo com os PCN’s a Matemática é imprescindível para a vida em coletividade, ela tem um lugar na vida. Assim sendo, a Matemática está vinculada a medidas e números, e os mesmos estão intensamente atrelados ao estudo e constituição de esculturas, pinturas e obras de arte. E os assuntos geométricos transportam o aluno à resolução de situações do seu dia a dia.

> As crianças provenientes de um ambiente estimulante podem estabelecer relações entre os sujeitos e entre os objetos que os rodeiam e expressam tais relações dizendo: em cima de, sobre e outras. Isto tem a ver por um lado, com seu domínio do espaço, mas também com suas competências linguísticas. (DUHALDE e CUBERES, 1998, p. 69).

Os PCN’s (2000) evidenciam que as elementares noções espaciais do indivíduo se dão por meio dos sentidos e dos movimentos. Contudo, os conhecimentos geométricos não competem ao âmbito perceptivo, todavia seu ponto de partida seria a compreensão do espaço rumo à composição de um pensamento geométrico. Esse documento assinala que a primeira questão de alusão da criança na compreensão do espaço, na estimativa das medidas, das grandezas e na concepção/visualização das formas é o corpo da criança.

> Estudos sobre a construção do espaço pela criança destacam que a estruturação se inicia, desde muito cedo, pela constituição de um sistema de coordenadas relativo ao seu próprio corpo. É a fase chamada egocêntrica, no sentido de que, para se orientar, a criança é incapaz de considerar qualquer outro elemento, que não o seu próprio corpo, como ponto de referência. Aos poucos ela toma consciência de que os diferentes aspectos sob os quais os objetos se apresentam para ela são perfis de uma mesma coisa, ou seja, ela gradualmente toma consciência dos movimentos de seu próprio corpo, de seu deslocamento (BRASIL, 2000, p. 125 e 126).

Os PCN’s ainda destacam a importância da geometria como fator estimulante no estudo de outros ramos da matemática, além deixar claro seu vasto campo de exploração e habilidades adquiridas através de seu estudo, deixando mais óbvio a necessidade de um novo olhar para esse ramo da matemática.

> A geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo o qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa (BRASIL, 2000, p. 127).

2.3 Plano Nacional da Educação – PNE

O novo plano nacional de educação, estabelecido no Projeto de Lei nº 8530/10 por intermédio do poder Executivo para valer de 2011 a 2020, expõem dez diretrizes práticas e vinte metas, seguidas das suas estratégias características para sua consolidação.

O referido projeto afere em alento de lei às avaliações do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB e a confrontação com os resultados do IDEB com a média dos resultados em matemática, leitura e ciências conseguidas nas provas do Programa Internacional de Avaliação de Alunos – PISA “que são aplicadas a cada três anos aos alunos de 15 anos participantes da organização para a cooperação e desenvolvimento econômico (OCDE) e países convidados, como o Brasil” (LUZ, 2014, p. 23).

A meta 7 que se pode destacar neste plano faz referência à evolução dos índices do IDEB até 2021, tendo como estratégias:

> Selecionar, certificar e divulgar tecnologias educacionais para o ensino fundamental e médio, asseguradas a diversidade de métodos e propostas pedagógicas, bem como o acompanhamento dos resultados nos sistemas de ensino em que forem aplicadas. (BRASIL, 2011. p. 32)

Essas avaliações servem como subsídios para a preparação de uma proposta pedagógica para as aulas de matemática, mais exatamente geometria. Essas avaliações exteriores em que as instituições escolares são submetidas, entre elas o PISA, sucessivamente expõem 24 questões de matemática, na maioria delas de geometria.

2.4 Alternativas Eficazes para o Ensino da Geometria

2.4.1 A Teoria dos Van Hiele

A teoria dos Van Hiele apresentou sua procedência nas respectivas teses de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e de seu esposo, Pierre Van Hiele, na Universidade de Utrecht, na Holanda no ano de 1957 (VILLIERS, 2010).

Lorenzato (1995, p. 11) afirma que:

> Por questão de justiça, deve ser aqui citada à contribuição do casal van Hiele. Sob a orientação do eminente educador matemático Hans Freudenthal, os van Hiele pesquisaram o ensino da Geometria com alunos de 12 e 13 anos; eles colocaram ênfase na manipulação de figuras, acreditando que o procedimento didático adequado podia melhorar a aprendizagem do aluno e que esta não se dava quando o nível de ensino era superior ao nível de pensamento do aluno.

Ao mesmo tempo em que a tese de Pierre buscava, especialmente, elucidar o motivo pelo qual os alunos apresentavam dificuldades ao aprender geometria, sendo a mesma num enfoque explicativo e descritivo, a tese de Dina Van Hiele-Geldof tratava a respeito de um experimento educacional e, tendo uma abordagem mais prescriptiva com correspondência à classificação do assunto de geometria e atividades de aprendizado dos alunos.

Deste modo a particularidade fundamental da teoria é a altivez de cinco distintos graus de pensamentos no que concerne ao desenvolvimento da concepção dos alunos referentes à geometria.

Usiskin (1982, apud de DE VILLIERS, 2010) cita quatro características imprescindíveis da teoria sendo sintetizadas do seguinte modo:

> • **ordem fixa:** A ordem na qual os alunos progridem por meio dos níveis de pensamento não varia. Em outras palavras, um aluno não pode estar no nível *n* sem ter passado pelo nível *n-1*.
> • **adjacência:** Em cada nível de pensamento que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual.
> • **distinção:** Cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos.
> • **separação:** Duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes não podem entender uma à outra.

Os Van Hiele conferiram o motivo principal da lacuna do currículo de geometria tradicional a ocorrência de que o currículo era exposto em um grau mais elevado do que o dos alunos, isto é, eles não conseguiam compreender o docente e o docente não conseguia perceber o porquê os alunos não aprendiam. Mesmo que a teoria de Van Hiele perpetre diferenciação em meio aos cinco distintos graus de pensamento, neste momento vamos nos concentrar somente nos quatro primeiros graus, uma vez que eles são os mais proeminentes para a geometria.

As características globais de cada grau podem ser citadas do seguinte modo:

> **Nível 1: reconhecimento**
> Os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente.
> **Nível 2: análise**
> Os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades das mesmas.
> **Nível 3: ordenação**

> Os alunos realizam a ordenação lógica das propriedades de figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre as figuras (por exemplo, inclusões de classe).
> **Nível 4: dedução**
> Os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas (VILLIERS, 2010, p. 401).

De acordo com Lorenzato (1995, p. 11) "no Brasil muito do nosso ensino de Geometria fica no nível inicial, onde os alunos julgam que o quadrado não é retângulo só porque possuem aparências diferentes".

2.4.2 Uso do material concreto e manipulável

Por intermédio da utilização do material concreto e manipulável no estudo da Geometria, que vai além de tornar as aulas de matemática mais atraentes e agradáveis, procura-se ainda a melhor compreensão do conteúdo abordado por parte dos alunos, com a finalidade de aperfeiçoar a vinculação de ensino e aprendizagem.

Silva e Martins (2000) por partilharem desse ponto de vista alegando que:

> [...] os materiais manipuláveis são fundamentais se pensarmos em ajudar a criança na passagem do concreto para o abstrato, na medida em que eles apelam a vários sentidos e são usados pelas crianças como uma espécie de suporte físico numa situação de aprendizagem. Assim sendo, parece relevante equipar as aulas de Matemática com todo um conjunto de materiais manipuláveis (cubos, geoplanos, tangrans, réguas, papel ponteado, ábaco, e tantos outros) feitos pelo professor, pelo aluno ou produzidos comercialmente, em adequação com os problemas a resolver, as ideias a explorar ou estruturados de acordo com determinado conceito matemático (SILVA e MARTINS, 2000, p. 4).

Já Kaleff (2003, p.16), nesse contexto evidencia a relevância da visualização e manipulação na conjuntura da geometria: "ao visualizar objetos geométricos, o indivíduo passa a ter controle sobre o conjunto das operações básicas mentais exigidas no trato da geometria".

2.4.3 Uso do software educacional livre Geogebra

Geogebra é um *software* de matemática eficaz para usar em espaço de sala de aula, que agrupa geometria, álgebra e cálculo. Auferiu diversos prêmios internacionais compreendendo a recompensa de *software* educativo Alemão e Europeu (FERREIRA, 2010).

O referido *software* foi concebido e designado por Markus Hohenwarterodar na universidade de Salzburg (FERREIRA, 2010).

Por se tratar de um sistema eficaz de geometria permite ao construtor que escolher por utilizá-lo, fazendo constituições “com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como funções e mudá-los dinamicamente depois, e ainda equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente”. (FERREIRA, 2010, p. 2).

Desta forma, o Geogebra tem a capacidade de versar das variáveis para números, vetores e pontos, permite entender derivadas e integrais de funções e apresenta gerências como raízes ou extremos.

Têm dois pontos de vista que são propriedades do Geogebra: uma inserção na janela algébrica produz a um componente na janela geométrica e vice-versa.

2.5 A Utilização de Oficinas Pedagógicas

O estudo da Matemática ao longo dos anos foi visto como algo difícil de entender e assim usava-se muito a memorização, a qual era presente constantemente na concepção tradicional.

D’ Ambrósio (1991, p.1) garante que “[...] há algo errado com a matemática que estamos ensinando. O conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil”.

> As palavras deste autor evidenciam a necessidade de se abandonar o tradicionalismo, isto é, a visão da matemática como disciplina que desperta ansiedade e medo em crianças, jovens e adultos, além de apresentar o maior índice de reprovação nas escolas. Evidencia, também, a urgência de uma reflexão acerca de novas estratégias pedagógicas que contribuam para a facilitação do processo de ensino aprendizagem dessa disciplina, ao mesmo tempo em que estimule nos alunos o pensamento independente, o que lhes permitirá a utilização de recursos e instrumentos úteis no seu cotidiano (JACOMINI, 2008, p. 12).

Diversos recursos e metodologias estão sendo criados e utilizados para proporcionar aos educadores novos caminhos para que eles possam conduzir os princípios da Matemática de maneira mais prazerosa e significativa, além de motivar o estudante, no que se refere ao interesse por seu desenvolvimento, aprendizagem e contentamento pessoal, de maneira atraente e dinâmica.

> O processo de adaptação ao novo método de ensino e aprendizagem é delicado, por ser uma ciência exata e o seu resultado não pode ser diversificado por conta da metodologia. A flexibilidade dos professores para

> adesão às novas formas de transmitir conhecimentos para os alunos, talvez seja a etapa mais difícil do processo como um todo, por consequência da didática que eles conheciam quando alunos, na época em que era tradicional o professor transmitir o assunto de forma mecânica e, o aluno tinha obrigação de aprender a lição sem nenhum incentivo para ser um aluno participativo (SILVA et al, 2013, p.30).

Para mudar o paradigma tradicional, tem-se buscado nos dias atuais novas metodologias e recursos para que o ensino da matemática não seja mecanizado. Bem como Valente (1999, apud OLIVEIRA e SILVA, p. 7), “acredita que a postura do professor como orientador seja ainda mais relevante e que, a partir da transformação desse papel do professor, é que ocorrerá a mudança de paradigmas”.

> A Matemática, como todos nós sabemos, é uma das disciplinas que mais gera discussões e debates sobre os seus métodos específicos de ensino. Outro fato que também nos é comum, é o enraizamento das concepções tradicionais de ensino na maioria das escolas, onde se privilegia a memorização de conceitos matemáticos, deixando de lado a capacidade do aluno de raciocinar logicamente e construir seus próprios conceitos (ALBUQUERQUE, 2009, p.16).

Atualmente as oficinas pedagógicas têm sido cerne de pesquisas e estudos em vários aspectos, através de pesquisadores, educadores e psicólogos, pois a sua utilização enquanto recurso didático beneficia a aprendizagem na medida em que incidem trocas de conhecimentos entre os discentes e o educador.

A oficina pedagógica no ensino da matemática deve ser colocada em prática em diversas situações, pois instiga o empenho, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para construir conhecimentos matemáticos.

Mediante esse contexto o educador pode utilizá-la para dar início a um conteúdo novo, para aprimorar um conteúdo em andamento ou para concluí-lo. Desta forma, percebe-se que não tem importância o período em que é usado, mas de que maneira a metodologia é colocada em prática, aplicada e conduzida.

> Um grande desafio que a escola tem enfrentado é o ensino da matemática. Professores, pais e alunos deparam durante todo o ano letivo com situações às vezes difíceis de resolver. É geral o conceito de que a matemática é difícil e que somente os inteligentes conseguem assimila-la. Atualmente os estudiosos, psicopedagogos e educadores têm se preocupado com vários problemas na aprendizagem dos alunos e um deles se relaciona ao déficit na aprendizagem da matemática (ABREU, 2014, p.1).

Sabe-se que nas aulas de geometria muitas vezes os docentes se deparam com discentes que manifestam dificuldades e problemas em aprender os conhecimentos matemáticos.

3 GEOMETRIA PLANA E GEOMETRIA ESPACIAL

Este capítulo é destinado aos professores da educação básica que desejam aprimorar seus conhecimentos a respeito de alguns tópicos de geometria plana e geometria espacial, esses tópicos servirão de embasamento teórico para o desenvolvimento da oficina que segue.

As obras que embasaram os resultados apresentados neste capítulo foram Lima (2013), Lima et al (2006) e Paiva (2010).

3.1 Noções de Geometria Plana

Qualquer conjunto não vazio de pontos é chamado de ***figura geométrica***.

Uma figura geométrica é ***plana*** quando todos os seus pontos estão contidos no mesmo plano, ou seja, são coplanares, as figuras planas podem ser:

- Unidimensionais: apresentam apenas uma dimensão (comprimento).
- Bidimensionais: apresentam duas dimensões (comprimento e largura/altura).

As figuras não planas recebem o nome de ***reversas***, elas são tridimensionais, ou seja, apresentam três dimensões (comprimento, largura e altura).

Nota: As figuras reversas também recebem o nome de figuras espaciais, no entanto essa denominação é ambígua, porque figura espacial é qualquer figura do espaço e, portanto, uma figura plana também pode ser espacial.

3.2 Noções de Geometria de Posição

Conceitos Primitivos

Precisamos esclarecer que ***conceitos primitivos*** são objetos que não apresentam definição e que qualquer teoria da matemática apresenta seus conceitos primitivos, esses precisam ser aceitos como ponto de partida da teoria, além do mais para usar esses conceitos corretamente é preciso dispor de um conjunto de princípios ou regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades, a esse conjunto damos o nome de ***axiomas*** ou ***postulados*****.**

Os axiomas ou postulados são proposições que não se demonstram, ou seja, são aceitas sem demonstração. A partir do momento que enunciamos todos os conceitos primitivos e axiomas de uma teoria, as afirmações seguintes deverão ser demonstradas, essas afirmações recebem o nome de ***teorema***, enquanto que suas consequências imediatas são os ***corolários***.

Uma vez que estabelecemos todos os axiomas referentes a cada tópico da geometria espacial, as proposições que seguem são os teoremas. Para demonstrar os teoremas podemos fazer uso dos axiomas anteriormente definidos.

O livro Elementos de Euclides já apresentava noções sobre alguns conceitos primitivos:

- ***Ponto*** é “aquilo que não possui partes”.
- ***Linha*** é o “que possui comprimento, mas não largura”.
- ***Reta*** é “uma linha que jaz igualmente com respeito todos os seus pontos”.

Apesar das descrições acima não serem consideradas definições elas auxiliam o desenvolvimento do pensamento intuitivo dos discentes a respeito das noções primitivas.

Os axiomas que garantem a existência dos conceitos primitivos são:

- **A1**: Existem infinitos pontos.
- **A2**: Existe reta. Uma reta é um conjunto *r* de infinitos pontos e há infinitos pontos que não pertencem a *r*.
- **A3**: Existe plano. Um plano é um conjunto r de infinitos pontos, e há infinitos pontos que não pertencem a rX

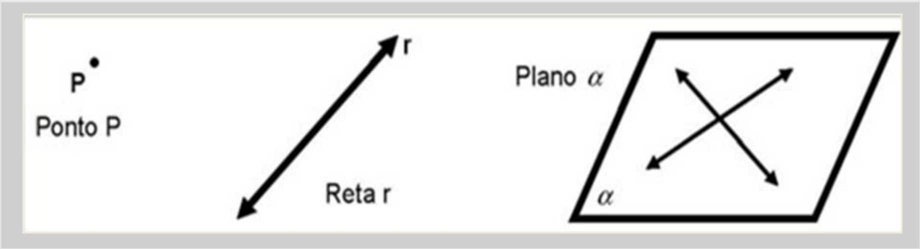
O espaço

Espaço é o conjunto de todos pontos.

Representação e notações

Os objetos que apresentamos anteriormente são imaginários, ou seja, não existe no mundo real, o que existe na verdade são representações, melhor dizendo modelos. Veja exemplos na figura 1:

Figura 1 - Representação de ponto, reta e plano.



Fonte: Autora, 2016.

Podemos representar um ponto por uma marca realizada com a ponta da caneta, uma reta, por uma linha desenhada com o auxílio de régua, e um plano, por um paralelogramo qualquer. Essas representações estão presentes nos mais diversos locais, inclusive na sala de aula podendo ser exploradas no decorrer das aulas.

Para facilitar à representação desses elementos da geometria a maioria dos autores costuma representar os pontos por letras maiúsculas (A, B, C, D,..., Z) e as retas por letras minúsculas (a, b, c, d,..., z) do nosso alfabeto, já os planos por letras minúsculas do alfabeto grego (α, β, γ,..., ω).

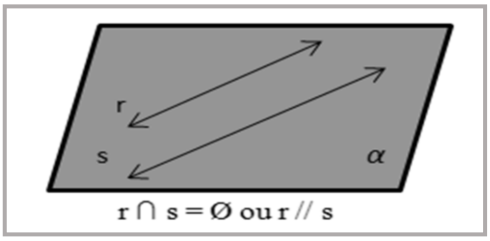
<u>Posições relativas entre retas</u>

Duas retas coplanares podem ser paralelas ou concorrentes, já no espaço essas podem assumir mais uma posição, reversas.

- **Retas paralelas.**

Duas retas coplanares são paralelas se, e somente se, não têm ponto em comum.

Figura 2- Retas paralelas.



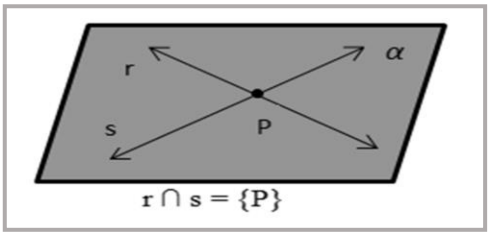
Fonte: Autora, 2016.

Nota: Usamos o símbolo // para indicar o paralelismo.

- **Retas concorrentes**

Duas retas coplanares são concorrentes se, e somente se, têm um ponto em comum.

Figura 3 - Retas concorrentes.



Fonte: Autora, 2016.

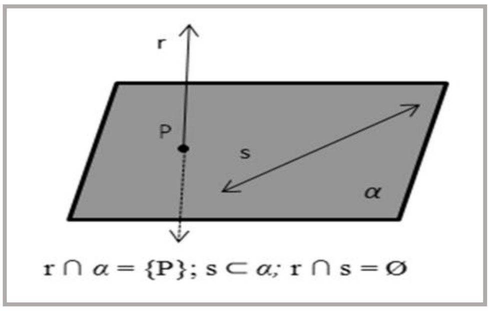
Duas retas concorrentes são perpendiculares se, e somente se, determinam um ângulo reto entre si.

Indicamos que uma reta *r* é perpendicular a uma reta s por $r \perp s$.

- **Retas reversas**

Duas retas são reversas se, e somente se, não existe plano que contenha as duas simultaneamente, ou seja, não são coplanares além de sempre possuírem interseção vazia.

Figura 4 - Retas reversas.



Fonte: Autora, 2016.

Axiomas das retas:

- **A4**: Dados dois pontos distintos do espaço, existe uma, e somente uma reta que os contém.
- **A5**: Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano.
- **A6**: Dada uma reta e um ponto não pertencente a ela, existe uma única reta que passa por esse ponto e é paralela a reta.
- **A7**: Duas retas distintas podem ter no máximo um ponto em comum.

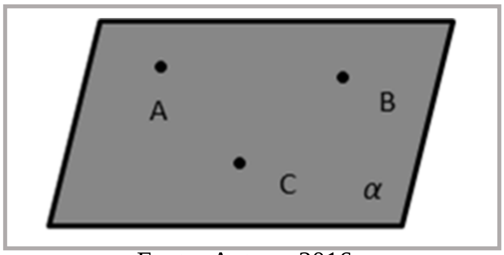
Determinação de um plano

Um plano poder ser determinado através de qualquer um dos casos a seguir.

Axioma de determinação do plano:

- **A8**: Dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contêm.

Figura 5 - Três pontos não colineares determinam um plano.



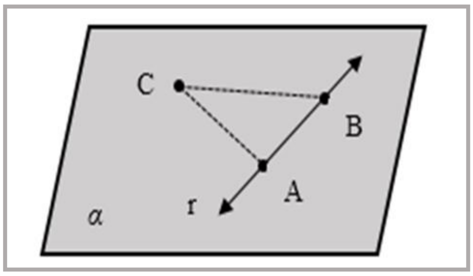
Fonte: Autora, 2016.

Teoremas de determinação do plano:

- **T1**: Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um plano.

Prova. Tomemos *C* um ponto não pertencente à reta *r*, *A* e *B* dois pontos distintos pertencentes à reta *r*, conforme figura 6. Temos que *A*, *B* e *C* não são colineares, uma vez a reta *r* é a única reta que passa por *A* e *B*, por hipótese, *C* não pertencente à reta *r*. Logo os pontos *A*, *B* e *C* não colineares pertencem a único plano, assim concluímos que existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela, uma vez que a reta *r* possui dois de seus pontos pertencentes ao plano rUe esse é o único plano que contém *A*, *B* e *C*, assim também é o único plano que contém *C* e *r*.

Figura 6 - Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um plano.



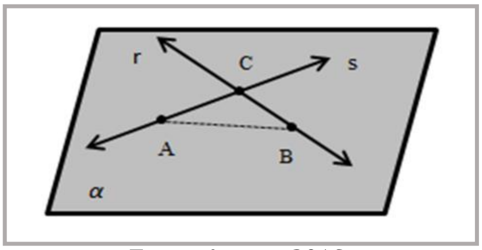
Fonte: Autora, 2016.

~

- **T2**: Duas retas concorrentes determinam um plano.

Prova. Dado um ponto *C*, ponto de interseção das retas *r* e *s* (figura 7), um ponto *B* pertencente à reta *r* e um ponto *A* pertencente à reta s, sendo *A*, *B* e *C* pontos distintos. Como *A*, *B* e *C* não são colineares, eles determinam um único plano *α,* o que nos leva a concluir que esse plano também contém as retas *r* e *s*, visto que essas retas contêm dois pontos também pertencentes a *α.*

Figura 7 - Duas retas concorrentes determinam um plano.

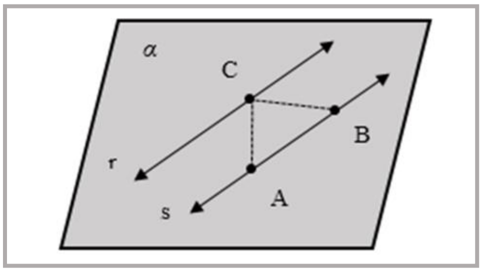


Fonte: Autora, 2016.

- **T3**: Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

Prova: Existe um único plano *α* que contém o ponto *C* e a reta *s*, nesse plano também só existe uma, e somente uma, reta *r* paralela a *s* que passam por *C*. No entanto, não existem retas paralelas a *s* passando por *C* que não estejam contidas em *α,* uma vez que todas as retas coplanares com *s* passando por *C* estão contidas em *α.*

Figura 8 - Duas retas paralelas distintas determinam um plano. □



Fonte: Autora, 2016.

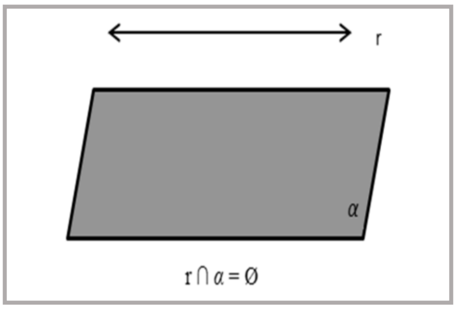
Posições Relativas entre Retas e Planos

- **Reta paralela a um plano.**

Uma reta *r* é paralela a um plano r se, e somente se, *r* e r não têm ponto em comum.

$$\mathbf{r \,//\, \alpha \iff r \cap \alpha = \emptyset}$$

Figura 9 - Reta paralela ao plano.

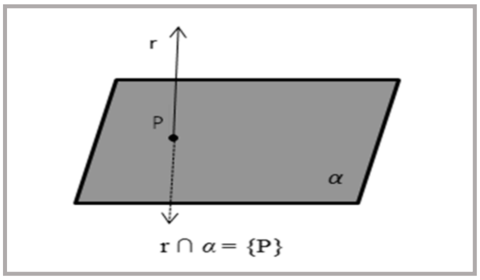


Fonte: Autora, 2016.

- **Reta secante a um plano**

Uma reta r é secante ou concorrente a um plano α se, e somente se, r e α têm um único ponto em comum.

Figura 10 - Reta secante ao plano.



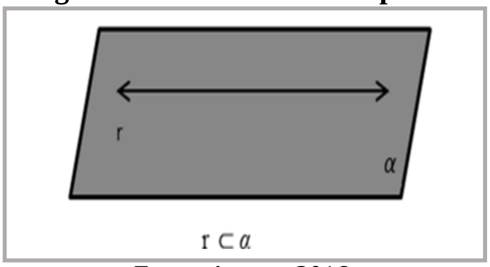
Fonte: Autora, 2016.

- **Reta contida em um plano**

Uma reta r está contida em um plano α se, e somente se, α contêm todos os pontos de r.

$$\mathbf{r \subset \alpha \Longleftrightarrow r \cap \alpha = r}$$

Figura 11 - Reta contida no plano.



Fonte: Autora, 2016.

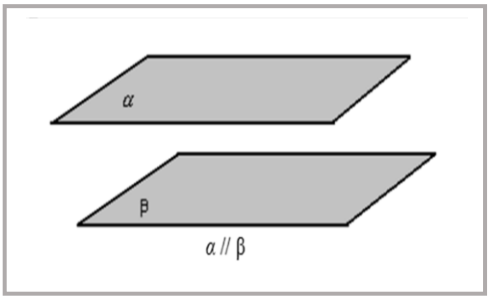
<u>Posições Relativas entre dois Planos</u>

- **Planos paralelos**

Dois planos distintos são paralelos se, e somente se, não têm ponto em comum.

$$\boldsymbol{\alpha \,//\, \beta \text{ e } \alpha \neq \beta \iff \alpha \cap \beta = \emptyset}$$

Figura 12 - Planos paralelos.

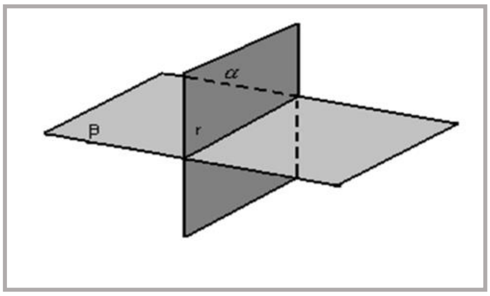


Fonte: Autora, 2016.

- **Planos secantes**

Dois planos são secantes se, e somente se, têm uma única reta em comum.

Figura 13 - Planos secantes.



Fonte: Autora, 2016.

Dois planos secantes são perpendiculares se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

Indicamos que um plano α é perpendicular a um plano β por $\alpha \perp \beta$.

<u>Axioma:</u>

- **A9**: Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então eles têm pelo menos dois pontos distintos em comum.

3.3 Sólidos Geométricos

3.3.1 Poliedros

Seja S uma reunião de um número n finito de polígonos, com $n \geq 4$, tal que:

- Não há dois polígonos adjacentes contidos em um mesmo plano;
- Cada lado de qualquer polígono é lado de dois e apenas dois deles.

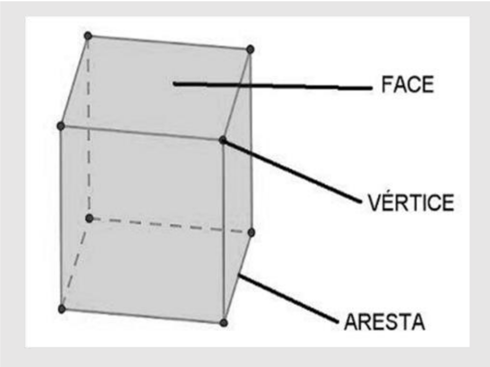
A superfície S separa o espaço em duas regiões que não têm ponto em comum: a região I, limitada por S, e a região ilimitada E. A reunião da superfície S com a região limitada I é chamada de poliedro.

Elementos de um poliedro

- ***Face*** é cada polígono do poliedro (superfícies planas).
- ***Aresta*** é lado comum de duas faces.
- ***Vértice*** é cada vértice de uma face qualquer do poliedro.

Exemplo:

Figura 14 - Face, aresta e vértice de um cubo.



Fonte:http://doutormatematico.blogspot.com/2014/05/face-aresta-e-vertice.html.

Nomenclatura dos poliedros

Os poliedros são classificados de acordo com o seu número de faces.

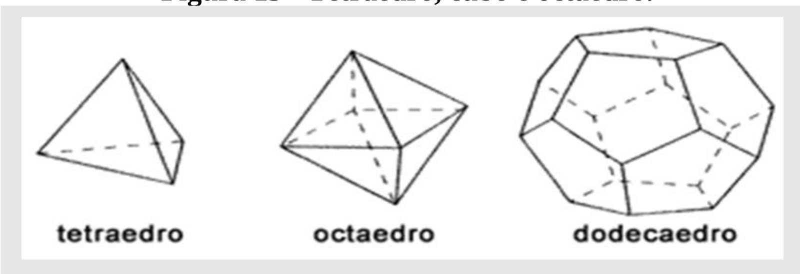
Quadro 1 - Nomenclatura de poliedros.

Número de faces	Nome do poliedro
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
13	Tridecaedro
14	Tetradecaedro
15	Pentadecaedro
16	Hexadecaedro
17	Heptadecaedro
18	Octadecaedro
19	Eneadecaedro
20	Icosaedro

Fonte: Autora, 2016.

Exemplo:

Figura 15 - Tetraedro, cubo e octaedro.



Fonte: http://www.prandiano.com.br/html/m_dic3.html.

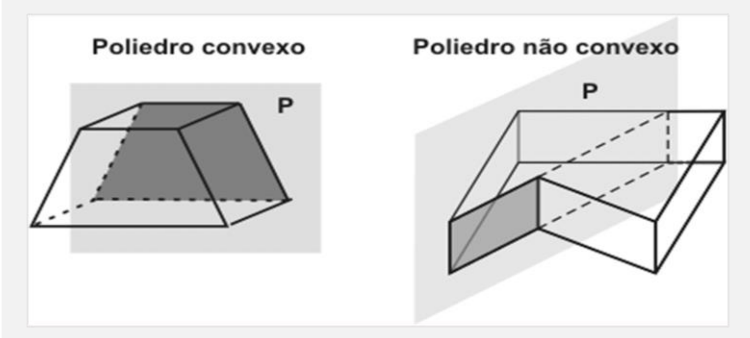
Poliedro convexo

Um poliedro é convexo quando o plano que contém qualquer uma de suas faces deixa as outras faces contidas em um mesmo semiespaço.

Todas as faces de um poliedro convexo são polígonos convexos.

Exemplo:

Figura 16 - Um poliedro convexo e um não convexo.



Fonte: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10483/open/file/geo1001.html.

Primeiras relações

Abordaremos agora as relações entre arestas, faces e vértices, para isso consideremos *A* o número de arestas, *F* o número de faces e *V* o número de vértices. Consideramos também F_n ($n \geq 3$), o número de faces que possui *n* lados e V_n o número de vértices nos quais concorrem *n* arestas, já que as faces e os vértices podem ser de gêneros distintos.

Temos as seguintes igualdades

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_n$$

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + ... + V_n$$

Caso desejemos encontrar o número de arestas de um poliedro podemos, multiplicar o número de triângulos por três, de quadriláteros por quatro, de pentágonos por cinco e assim sucessivamente, realizar o somatório e por fim dividir por dois, já que cada aresta é lado de duas faces de um poliedro, assim temos:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...\ \ nF_n \qquad (2.1)$$

Outra alternativa seria verificar os vértices do poliedro, em cada vértice contar quantas arestas nele concorrem, somando os resultados usando raciocínio análogo ao anterior e dividindo por dois, já que cada aresta foi contada duas vezes, obteremos:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ...\ \ + nV_n \qquad (2.2)$$

Através das igualdades (2.1) e (2.2) podemos concluir que:

1) $2A \geq 3F$

2) $2A \geq 3V$

Demostraremos a primeira desigualdade e a segunda deixaremos a cargo do leitor, uma vez que o processo é análogo. Temos que:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...$$
$$2A = 3.(F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_n) + F_4 + 2F_5 + ... + (n - 3).F_n$$
$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + ... + (n - 3).\ F_n$$

Logo,

$$2A \geq 3F$$

Observe que a igualdade só acontece se $F_4 = F_5 = ... = F_n = 0$, ou seja, se o poliedro possuir apenas faces triangulares, na segunda desigualdade a igualdade só acontece se de todos os vértices concorrerem exatamente três arestas.

Teorema de Euler

Em todo poliedro convexo vale a relação:

V – A + F = 2

onde *V*, *A* e *F* representam os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

A demonstração que segue foi retirada na integra do livro Matemática do Ensino Médio Vol. 2, o autor da mesma foi o professor Zoroastro Azambuja Filho.

Iniciaremos a demonstração calculando a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo *P*. As faces são numeradas de 1 até *F* e seja n_k o gênero da *k*-ésima face ($1 \leq k \leq F$). Lembrando que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de gênero *n* é igual a $\pi\ (n – 2)$ e observando que, se um poliedro é convexo, então, todas as suas faces são polígonos convexos, teremos para a soma dos ângulos internos de todas as faces de *P* a expressão:

$$S = \pi\ (n_1 – 2) + \pi\ (n_2 – 2) + ... + \pi\ (n_F – 2),$$

ou ainda,

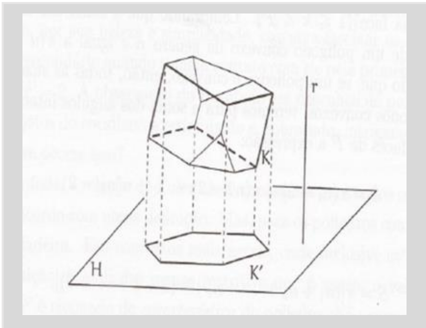
$$S = \pi\ [(n_1 + n_2 + ... + n_F)\ - (2 + 2 + ... + 2)]$$

Ora, no primeiro parêntese, a soma dos números de lados de todas as faces é igual ao dobro do número de arestas e no segundo parêntese, a soma das *F* parcelas é igual a *2F*. Assim,

$$S = \pi\,(2A - 2F) = 2\pi\,(A - F) \tag{2.3}$$

Vamos, agora, escolher uma reta *r* que não seja paralela a nenhuma das faces de *P*. Tomamos também um plano *H*, que não intersecta *P* e que seja perpendicular a *r*. O plano *H* será chamado *plano horizontal* e as retas paralelas a *r* (logo, perpendiculares a *H*) serão chamadas *retas verticais*. *H* divide o espaço em dois semiespaços, um dos quais contêm o poliedro *P*. Este será chamado o semiespaço superior e diremos que seus pontos estão acima de *H*. Para melhor ilustrar o nosso raciocínio, imaginaremos o sol brilhando a pino sobre o semiespaço superior de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto *X* do semiespaço s*uperior* corresponde um ponto *X'* em *H*, chamado *sombra* de *X*. A sombra de qualquer conjunto *C*, contido no semiespaço superior é, por definição, o conjunto *C*, contido em *H*, formado pelas sombras dos pontos *C*.

Figura 17 - A região iluminada e a região sombria.

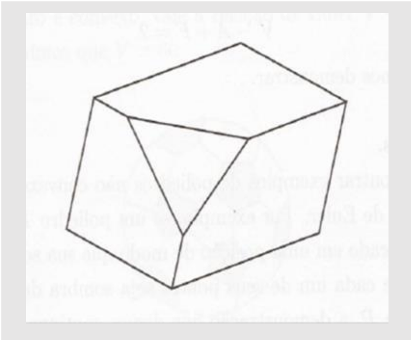


Fonte: Lima et al (2006).

Consideremos, então, a sombra *P'* do poliedro *P*. Como *P* é convexo, cada ponto de *P'* é a sombra de um ou dois pontos de *P*. Ora, a sombra *P'* do poliedro *P* tem como contorno um polígono convexo *K'*, sombra de uma poligonal fechada *K* formada por arestas de *P*. Cada ponto de *K'* é sombra de um único ponto de *P*. A poligonal *K* é chamada de contorno aparente do poliedro *P*. Cada ponto interior de *P'* (portanto, não pertencente a *K'*) é sombra de exatamente dois pontos de *P*. Dados dois pontos de *P* que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de *H*) chamaremos *ponto iluminado* e o mais baixo será chamado *sombrio*.

Depois dessas considerações, vamos calcular novamente a soma de todos os ângulos das faces de *P*, observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a *mesma soma dos* *ângulos internos de sua sombra* (ambos são polígonos de mesmo gênero). Sejam: V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente *K*. Então, $V = V_0 + V_1 + V_2$. Notemos ainda que V_0 é o número de vértices (e de lados) da poligonal *K'*, contorno de *P'*. Consideremos, então, a sombra das faces iluminadas.

Figura 18 - A sombra das faces iluminadas.



Fonte: Lima et al (2006).

A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores, sombra dos vértices iluminados de *P*. A soma de todos os ângulos da figura anterior é:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi (V_0 - 2).$$

Por raciocínio inteiramente análogo. Obteríamos, para a soma de todos os ângulos da sombra das faces sombrias,

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi (V_0 - 2).$$

Somando as duas, obtemos:

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi (V_0 - 2) \tag{2.4}$$

$$S = 2\pi (V_1 + V_2 + V_0 - 2)$$

$$S = 2\pi (V - 2)$$

Comparando (2.3) e (2.4) e dividindo por 2π, resulta que $A - F = V - 2$, ou seja,

$$V - A + F = 2.$$

Como queríamos demonstrar.

Nota: Existem polígonos não convexos que satisfazem a relação de Euler, por isso não podemos afirmar que todo polígono que satisfaça a relação de Euler é convexo.

Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

- Todas as faces são polígonos regulares congruentes;
- Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Teorema:

- **T4**: Existem somente cinco poliedros regulares convexos.

Prova. Seja n ($n \geq 3$) o número de lados das faces e m o número de arestas que concorrem em cada vértice, usando as igualdades (2.1) e (2.2), obtemos

$$2\mathrm{A} = \mathrm{n.F} = \mathrm{m.V},$$

Ou,

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{n.F}}{2} \text{ e } \mathrm{V} = \frac{\mathrm{n.F}}{m}$$

Substituindo, na relação de Euler, temos:

$$\frac{\mathrm{n.F}}{m} - \frac{\mathrm{n.F}}{2} + \mathrm{F} = 2$$

Isolando o F, ficamos com:

$$\mathrm{F} = \frac{4\mathrm{m}}{2m + 2n - mn} \qquad (2.5)$$

Para garantir a igualdade devemos ter:

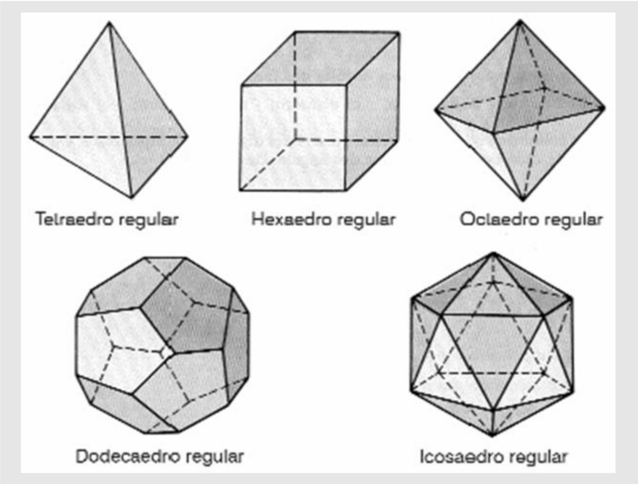
$$2m + 2n - mn > 0,$$

$$m < \frac{2n}{n-2}.$$

Sabemos que $m \geq 3$, uma vez que concorrem no mínimo três arestas em cada vértice, logo $n < 6$, substituindo os possíveis valores de n na equação (2.5), temos:

- $n = 3 \ \rightarrow \ F = \frac{4m}{6-m} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = 3 \ \rightarrow F = 4 \ (tetraedro) \\ m = 4 \ \rightarrow F = 8 \ (octaedro) \\ m = 5 \ \rightarrow F = 20 (icosaedro) \end{cases}$
- $n = 4 \ \rightarrow \ F = \frac{2m}{4-m} \ \rightarrow \ m = 3 \rightarrow \ \ F = 6 \ (cubo)$
- $n = 5 \ \rightarrow \ F = \frac{4m}{10-3m} \ \rightarrow \ m = 3 \rightarrow \ \ F = 12 \ (\ dodecaedro)$

Figura 19 - Poliedros regulares.



Fonte: http://claudiomir1.xpg.uol.com.br/pp/pregulares.html.

<u>Poliedros de Platão</u>

Um poliedro convexo recebe o nome de poliedro de Platão se, e somente se, são obedecidas as seguintes condições:

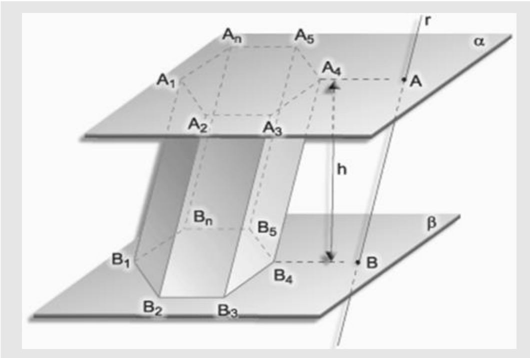
- Todas as faces têm o mesmo número de arestas;
- Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Existem cinco poliedros de Platão: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Esses poliedros eram associados aos quatro elementos considerados primordiais: ar, associado ao octaedro; terra, associado ao cubo; fogo, associado ao tetraedro; e água, associado aos icosaedro. O quinto é o último poliedro foi o dodecaedro, que Platão considerou o símbolo do universo.

PRISMA

Consideremos dois planos paralelos distintos, α e β, uma reta r secante a esses planos e um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ contido em α. Consideremos também todos os segmentos de reta paralelos a r, de maneira que cada um deles possua um extremo pertencente ao polígono e o outro pertence ao plano β. Veja figura 20.

Figura 20 - Prisma.



Fonte: http://conteudoonline.objetivo.br/Aula/Index/4084

A união de todos esses segmentos de reta é um poliedro convexo chamado de prisma.

Elementos de um prisma:

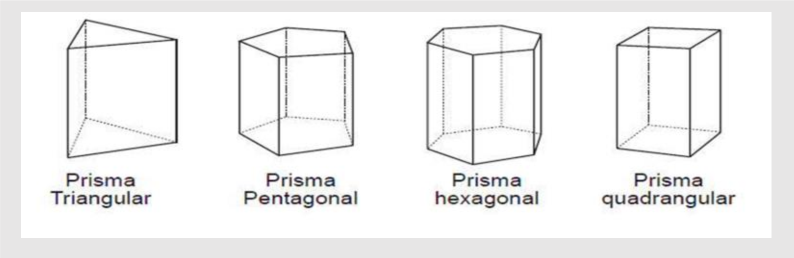
Observando a figura, temos:

- Os polígonos $A_1A_2A_3...A_n$ e $B_1B_2B_3...B_n$ são as ***bases*** do prisma;
- Os polígonos $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, ..., A_nA_1B_1B_n$ são as ***faces laterais*** do prisma;
- Os pontos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ são os ***vértices*** do prisma;
- Os segmentos de reta $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_nA_1}, \overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}, ..., \overline{B_nB_1}$ são as ***arestas da base*** do prisma;
- Os segmentos de reta $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, .., \overline{A_nB_n},$ são as ***arestas laterais*** do prisma;
- h é ***altura*** do prisma, chamamos de altura a menor distância entre as bases do prisma;
- Os segmentos de reta cujos extremos são vértices que não pertencem a mesma face lateral do prisma são recebem o nome de ***diagonal*** do prisma.

Nomenclatura dos prismas:

Todo prisma é classificado de acordo com o número de arestas de sua base.

Figura 21 - Prismas de base triangular, pentagonal, hexagonal e quadrangular.



Fonte: http://portfoliodematematica.blogspot.com/2012/12/221-prismas.html.

E assim sucessivamente.

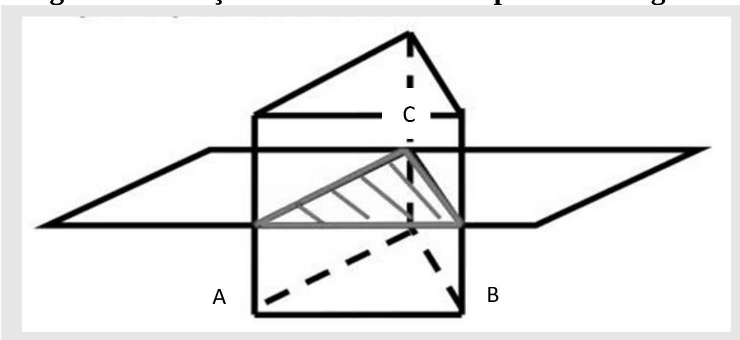
<u>Secção transversal de um prisma</u>

Qualquer intersecção não vazia do prisma com um plano paralelo à uma de suas bases é uma ***secção transversal*** de um prisma.

Exemplo:

A secção transversal do prisma de base triangular abaixo é o triângulo ABC.

Figura 22 - Secção transversal de um prisma triangular.



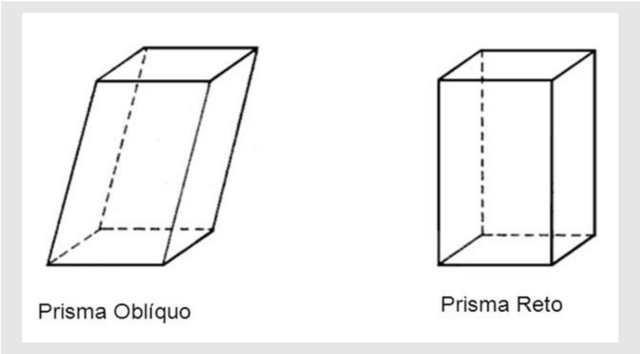
Fonte: http://pt.dayshare.org/PROFZEZEU/prismas-35457771.

Em todo prisma a secção transversal é congruente às suas bases.

<u>Prisma reto e prisma oblíquo</u>

Todo prisma que possui arestas laterais perpendiculares aos planos das bases é chamado ***prisma reto***, os prismas que não são retos recebem o nome de ***prismas oblíquos***.

Figura 23 - Prisma oblíquo e prisma reto.



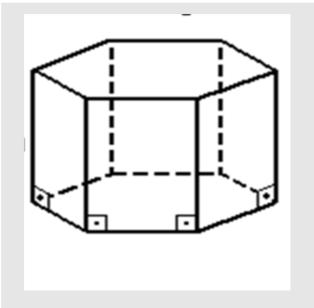
Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/1470645/.

<u>Prisma regular</u>

Todo prisma reto que possui polígonos regulares em suas bases é chamado de ***prisma regular***.

Os prismas regulares possuem faces laterais retangulares e congruentes entre si.

Figura 24 - Prisma hexagonal regular.

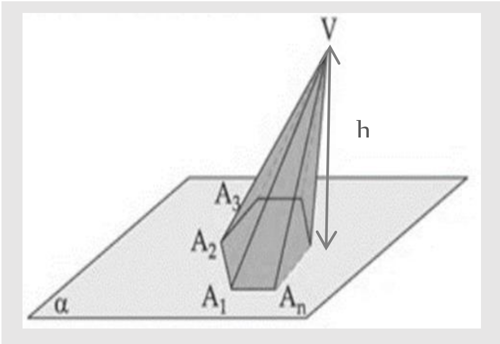


Fonte: https://br.answers.yahoo.com/question/index?qid=20120903222151AAroFXQ.

<u>PIRÂMIDE</u>

Sejam um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ contido em um plano α e um ponto V, externo a α ($V \notin \alpha$). Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao polígono e o outro extremo em V (conforme figura 25).

Figura 25 - Pirâmide.



Fonte: http://pt.slideshare.net/rodrigocarvalho_mat/pirmides-45526024.

A união de todos esses segmentos de reta recebe o nome de pirâmide.

Elementos de uma pirâmide:

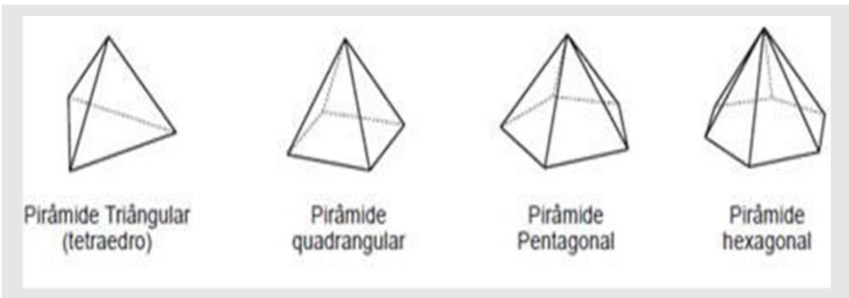
De acordo com a figura, temos:

- O ponto V é o ***vértice*** da pirâmide;
- O polígono $A_1A_2A_3...A_n$ é a ***base*** da pirâmide;
- Os pontos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ são os ***vértices da base*** do pirâmide;
- Os polígonos $A_1A_2V, A_2A_3V, ..., A_nA_1V$ são as ***faces laterais*** da pirâmide;
- Os segmentos de reta $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_nA_1}$ são as ***arestas da base*** da pirâmide;
- Os segmentos de reta $\overline{A_1V}, \overline{A_2V}, ..., \overline{A_nV}$ são as ***arestas laterais*** da pirâmide;
- h é ***altura*** da pirâmide, chamamos de altura a menor distância entre a base da pirâmide contida em α e o vértice V.

Nomenclatura dos prismas

Todo pirâmide é classificado de acordo com o número de arestas de sua base.

Figura 26 - Pirâmides de base triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal.



Fonte: http://alunosonline.uol.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.html.

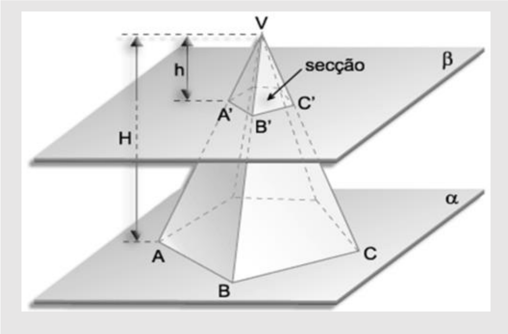
E assim sucessivamente.

<u>Secção transversal de uma pirâmide</u>

Qualquer intersecção não vazia e não unitária da pirâmide com um plano paralelo a uma de sua base é uma secção transversal de uma pirâmide.

Exemplo:

Figura 27 - Secção transversal de uma pirâmide pentagonal.



Fonte: http://conteudoonline.objetivo.br/Aula/Index/828.

<u>Pirâmide reta e pirâmide oblíqua</u>

Toda pirâmide cuja projeção ortogonal de seu vértice coincide com o centro do polígono da base é chamada de ***pirâmide reta***, as pirâmides que não são retas recebem o nome de ***pirâmides oblíquas***.

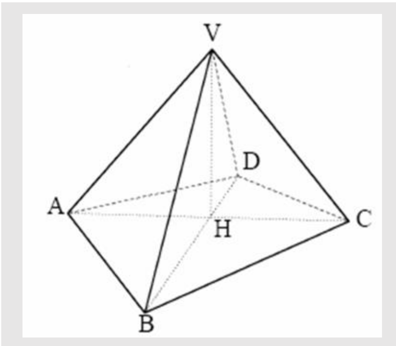
As faces laterais de uma pirâmide reta são triângulos isósceles.

<u>Pirâmide regular</u>

Uma pirâmide é regular se, e somente se, sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é o seu centro.

As pirâmides regulares possuem faces laterais triangulares e congruentes entre si.

Figura 28 - Pirâmide quadrangular regular.



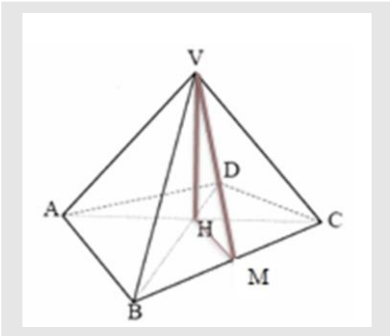
Fonte: http://docplayer.com.br/160841-Geometria-espacial-piramides.html.

Apótema de uma pirâmide regular e apótema da base

O segmento de reta que possui um extremo no ponto *M*, ponto médio de qualquer uma das arestas da base, e outro no vértice *V* da pirâmide (figura 29) é chamado de ***apótema de uma pirâmide***.

O segmento de reta que possui um extremo no ponto *M*, ponto médio de qualquer uma das arestas da base (figura 29), e outro no centro *H* da base é chamado de ***apótema da base***.

Figura 29: Apótema da pirâmide regular e apótema da base.



Fonte: http://docplayer.com.br/160841-Geometria-espacial-piramides.html.

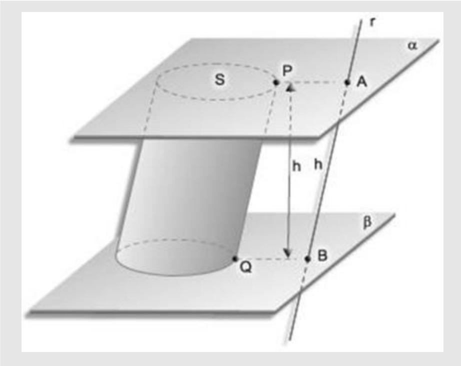
3.2.2 Corpos Redondos

Iremos tratar a partir de agora das formas arrendodadas: cilindro, cone e esfera.

CILINDRO

Dados dois planos paralelos distintos α e β, uma reta secante *r* a esses dois planos e um círculo *S* contido em α. Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a reta *r*, de maneira que cada segmento tenha um extremo pertencente ao círculo *S* e o outro pertencente ao plano β, conforme figura 30.

Figura 30 - Cilindro.



Fonte: http://conteudoonline.objetivo.br/Aula/Index/381.

A união de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado cilindro circular ou simplesmente ***cilindro***.

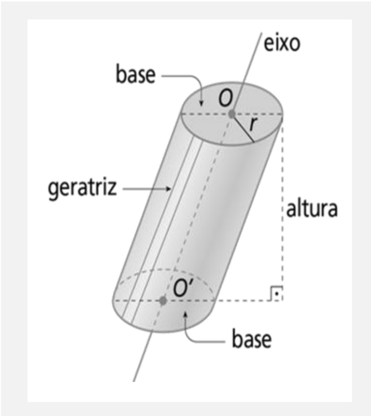
<u>Elementos de um cilindro circular</u>

Consideremos o cilindro da figura 31.

- Os círculos paralelos de centro *O* e *O'* são chamados de ***bases*** do cilindro;
- A reta que passa por $\overline{OO'}$ recebe o nome de ***eixo*** do cilindro;
- O raio do círculo inferior é chamado de ***raio*** da base do cilindro;
- A distância entre as duas bases é chamada de ***altura*** do cilindro.
- Os segmentos de reta, paralelos ao eixo *OO'*, que possuem extremidades pertencentes ás circunferências das bases, recebem o nome de ***geratriz*** do cilindro.

  Veja:

Figura 31 - Elementos do cilindro.



Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/6814959/.

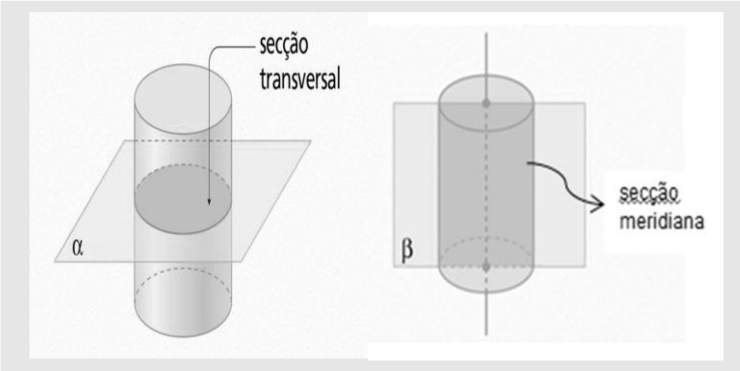
<u>Secções de um cilindro circular</u>

Qualquer intersecção não vazia do cilindro com um plano paralelo ás suas base recebe o nome ***secção transversal***, essas secções são congruentes aos círculos das bases.

Já a intersecção do cilindro com um plano que passa pelos centros das bases chama-se ***secção meridiana.***

Exemplos:

Figura 32 - Secção transversal e secção meridiana de um cilindro.

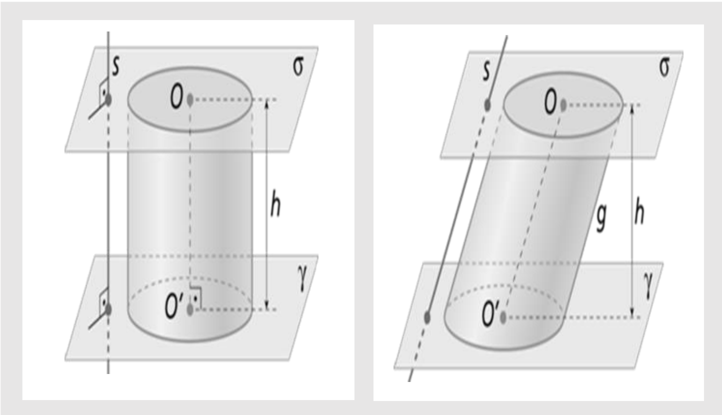


Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/6814959/.

Todo cilindro circular cujas geratrizes são perpendiculares às bases é chamada de ***cilindro circular reto***.

Cilindro circular oblíquo é aquele que não é reto.

Figura 33 - Cilindro circular reto e cilindro circular oblíquo.



Fonte: http://conteudoonline.objetivo.br/Aula/Index/381.

Toda secção meridiana de um cilindro circular reto é um retângulo cuja base é o diâmetro da base do cilindro e a altura é igual a altura do cilindro, essas secções dividem sempre o cilindro circular reto em dois sólidos congruentes chamados de semicilindros retos.

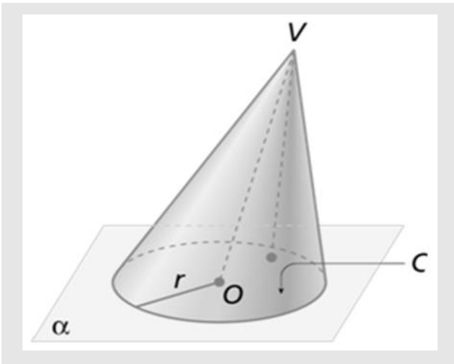
Qualquer cilindro circular reto cujas secções meridianas são quadradas recebe o nome de ***cilindro equilátero***.

CONE CIRCULAR

Consideremos um círculo C de centro O, contido em um plano α e um ponto V não pertencente a α, consideremos também todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao círculo C e o outro no ponto V.

A união de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado cone circular ou simplesmente ***cone***.

Figura 34 - Cone circular.



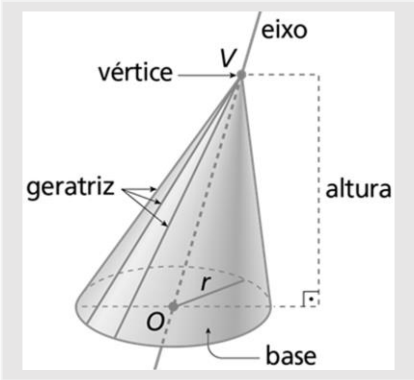
Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/7700681/

Elementos de um cone circular

Consideremos o cone da figura.

- O círculo C é chamado de ***base*** do cone;
- O vértice V é chamado de ***vértice*** do cone;
- A reta que passa por $\overline{OV}$ é chamada de ***eixo*** do cone;
- O raio r do círculo C é chamado de ***raio da base*** do cone;
- A ***altura*** do cone é a distância entre o plano da base é o vértice do cone.
- A ***geratriz*** do cone é qualquer segmento de reta cujos extremos são um ponto da circunferência da base e o outro ponto é o vértice V.

Figura 35: Elementos do cone circular



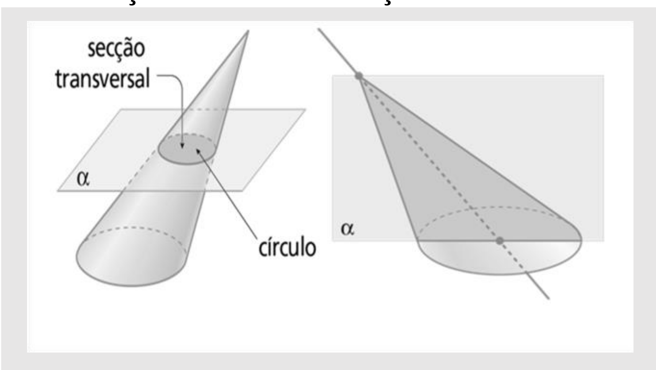
Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/770068.

<u>Secções de um cone circular</u>

Toda intersecção não vazia e não unitária do cone com um plano paralelo à sua base é dita ***secção transversal*** do cone, essas secções são sempre um círculo.

Toda intersecção do cone com um plano que passa pelo centro da base e pelo vértice do cone é chamada de ***secção meridiana***, essas secções são sempre um triângulo.

Figura 36 - Secção transversal e secção meridiana de um cone.



Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/7700681/

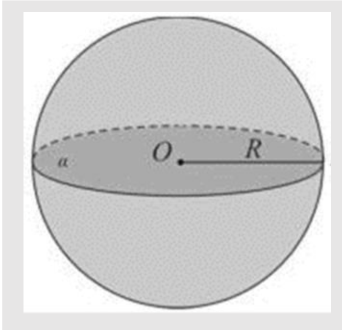
Os cones cujas secções meridianas são triângulos equiláteros recebem o nome de ***cones equiláteros.***

<u>ESFERA</u>

Dado um ponto O e uma medida R, com $R > 0$.

Chamaremos de esfera de centro O e raio R o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais que o raio R.

Figura 37 - Esfera.



Fonte: http://www.infoescola.com/geometria-espacial/esfera/

A partir da definição acima, temos:

- O conjunto de todos os pontos dos espaços cujas distâncias ao ponto O são menores que R é chamado de ***interior*** da esfera;
- O conjunto de todos os pontos dos espaços cujas distâncias ao ponto O é igual a R é chamado de ***superfície esférica***;
- O conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O é maior que R é chamado de ***exterior*** da esfera;

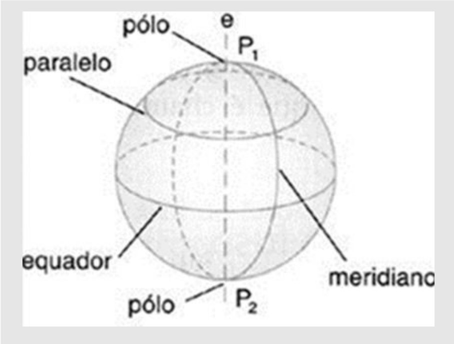
Elementos da esfera

Consideremos a figura:

- Uma reta e que passa pelo centro da esfera é chamado de ***eixo*** da esfera;
- Os pontos P_1 e P_2 de interseções do eixo com superfície esférica são chamados de ***polos***;
- A circunferência obtida pela interseção da superfície esférica e o plano perpendicular ao eixo que passa pelo centro é chamada de ***equador***;
- ***Paralelo*** é qualquer seção (circunferência) perpendicular ao eixo;
- ***Meridiano*** é qualquer seção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo;
- ***Seção da esfera*** é o círculo obtido pela interseção da esfera e um plano secante a ela.

Caso o plano secante contenha o centro da esfera o círculo será máximo.

Figura 38 - Elementos da Esfera



Fonte: http://www.colegioweb.com.br/esfera/conceito-de-esfera.html

4 APRECIAÇÃO DOS DADOS OBTIDOS

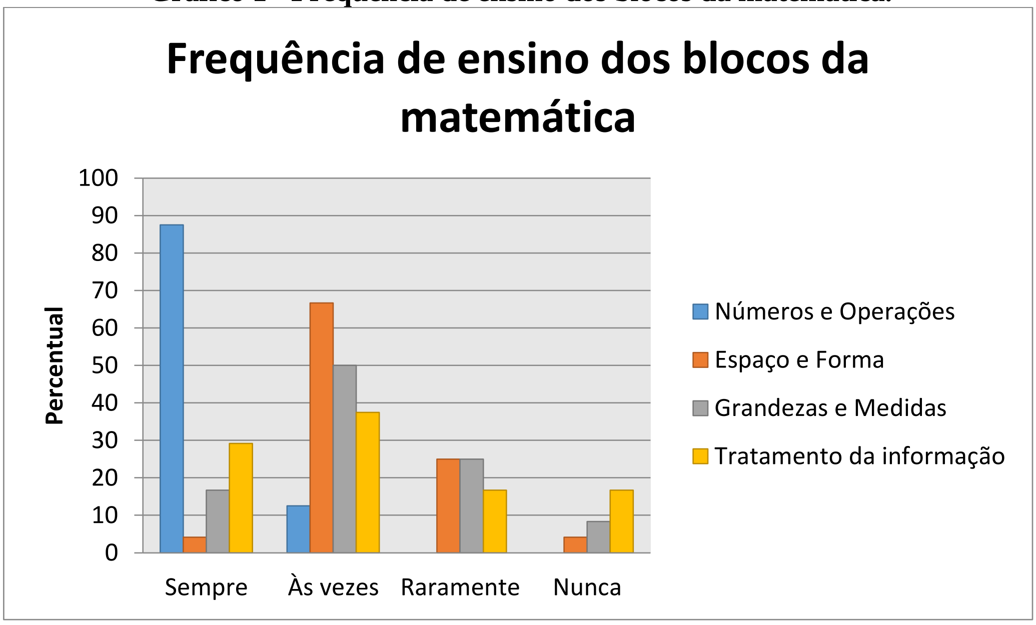
4.1 Análise da Entrevista com Docentes

Essa pesquisa teve como objetivo conhecer um pouco da concepção dos professores, suas compreensões a respeito do ensino da geometria, a frequência com que eles abordam seus conteúdos e as ferramentas mais utilizadas por esses professores no processo de ensino aprendizagem da geometria (Espaço e Forma).

Para essa pesquisa foram entrevistados 24 professores polivalentes do ensino fundamental I, das cidades de Santana do Ipanema e Poço das Trincheiras, sertão de Alagoas, esses professores tem em média uma carga horária semanal de trabalho de 30 horas.

O gráfico abaixo apresenta a frequência com que os blocos da matemática são abordados por esses professores durantes suas aulas, lembrando que são professores polivalentes, ou seja, lecionam outras disciplinas além da matemática.

Gráfico 1 - Frequência de ensino dos blocos da matemática.



Fonte: Autora, 2016.

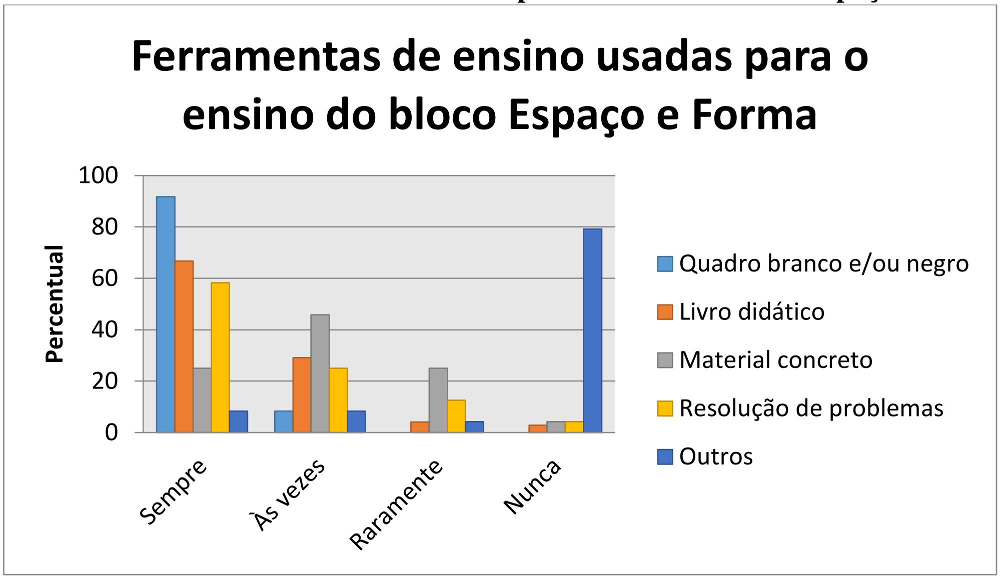
Ao analisarmos o gráfico percebemos a diferença discrepante entre o percentual da frequência de ensino do bloco Números e Operações em relação aos demais blocos, no que se refere à frequência “sempre”, ficando clara a supervalorização e preferência dos professores pelo ensino desse bloco, enquanto o percentual de professores que afirmaram sempre ensinar o bloco Números e Operações é 87,5%, os demais blocos juntos apresentam um percentual de

50,02%. Comprovamos também que o bloco menos explorado por esses professores é o Espaço e Forma, apenas 4,15% desses professores ensinam com maior frequência esse bloco.

O fato mais grave é a constatação que 29,15% desses professores raramente ou nunca exploram o bloco Espaço e Forma durante suas aulas, acredito que esses professores não tenha conhecimento da importância desse bloco para vida escolar e social de seus alunos, devemos ainda deixar claro que esses professores não estão seguindo as orientações dos PCN, que sugere que os blocos sejam organizados de forma articulada e integrada.

Já o gráfico 2 apresenta as ferramentas de ensino usadas pelos professores ao explorarem o bloco Espaço e Forma.

Gráfico 2 - Ferramentas de ensino usadas para o ensino do bloco Espaço e Forma.



Fonte: Autora, 2016.

Esse gráfico aponta que as ferramentas de ensino mais empregadas pelos professores ao abordarem os conteúdos do bloco Espaço e Forma são o quadro branco e/ou negro e o livro didático, situação nada favorável para aprendizagem dos alunos.

Além desses conteúdos serem pouco abordados em sala, a metodologia aplicada na maioria das vezes é obsoleta e não atende as necessidades do ensino da geometria atual, que exige uma metodologia voltada para o aluno. Apenas 25% dos professores afirmaram que fazem uso de material concreto durante as aulas do bloco Espaço e Forma, percentual menor que o grupo de professores que afirmaram nunca usar ou usar raramente, 29,2%.

Na entrevista constatamos também que um pequeno número de professores utilizam jogos educacionais como ferramenta de ensino, única ferramenta citada pelos professores na opção “outros”, citados por 20,8% dos professores.

Na pesquisa também questionamos se esses professores conheciam a teoria dos Van Hiele, a resposta foi unânime, todos alegaram não conhecer.

Outro questionamento foi em relação ao desejo de conhecer outras metodologias aplicadas ao ensino da geometria, apenas um dos vinte e quatro entrevistados afirmou não sentir necessidade de obter novas informações a respeito do tema, ele respondeu: *"Não, pois os livros didáticos são suficientes".*

O último questionamento foi a respeito da opinião deles sobre o ensino do bloco Espaço e Forma na região. Obtivemos respostas como:

"Na minha avaliação é aplicada de forma fragmentada, sem muita importância e abrangência".

"Algumas vezes um pouco esquecido, dando ênfase aos números e operações".

"Ainda trabalhamos com muita precariedade devido à falta de espaço físico e recursos adequados".

"Geralmente fica abstrato, não é utilizado material concreto".

"É perceptível que muitos professores não abordam o conteúdo, ás vezes por falta de material concreto, ás vezes pelo simples fato de priorizar outros conteúdos".

"Sem dúvidas precisa ser mais e melhor explorado, porém antes precisamos subsidiar nossos professores com metodologias alternativas para que possamos melhorar o processo de ensino do bloco Espaço e Forma".

Percebemos que a maioria desses professores reconhece que o ensino do bloco Espaço e Forma não vêm sendo abordado de maneira satisfatória, melhor dizendo não atende as necessidades reais dos discentes. Mas houve também respostas como:

"*Satisfatório*"

"*Bom*"

O lado positivo desse diagnóstico foi à constatação que 93,3% desses professores desejam conhecer novas metodologias, na intenção de melhorarem o ensino da geometria na região e consequentemente no país, um dos passos mais importantes para a mudança.

4.2 Desempenho dos Estudantes do 5º Ano na Prova Brasil

A Prova Brasil é uma Avaliação Nacional do Rendimento Escolar cuja finalidade é medir a qualidade do ensino ministrado nas escolas públicas brasileiras em relação à aprendizagem de língua portuguesa e matemática, realizada a cada dois anos com os alunos do 5º e 9º ano do ensino fundamental e da 3ª série do ensino médio.

Os dados sobre o desempenho das áreas avaliadas são expressos em escalas de proficiência, essas escalas são constituídas por níveis progressivos e cumulativos, ou seja a classificação é realizada em ordem crescente e o indivíduo que se classifica no nível de proficiência apresenta os conhecimentos e habilidades exigidos no nível anterior.

Apresentaremos na tabela abaixo os dez níveis da escala de proficiência da área de matemática e suas respectivas descrições, onde são classificados os alunos do 5º ano do ensino fundamental.

Quadro 2 - Descrição dos níveis da escala de proficiência.

Nível	Descrição do Nível – O estudante provavelmente é capaz de:
Nível 1: Desempenho maior ou igual a 125 e menor que 150	**Grandezas e medidas**: Determinar a área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas por meio de contagem.
Nível 2: Desempenho maior ou igual a 150 e menor que 175	**Números e operações**: álgebra e funções: Resolver problemas do cotidiano envolvendo adição de pequenas quantias de dinheiro. **Tratamento de informações**: Localizar informações, relativas ao maior ou menor elemento, em tabelas ou gráficos.
Nível 3: Desempenho maior ou igual a 175 e menor que 200	**Espaço e forma**: Localizar um ponto ou objeto em uma malha quadriculada ou croqui, a partir de duas coordenadas ou duas ou mais referências. Reconhecer dentre um conjunto de polígonos, aquele que possui o maior número de ângulos. Associar figuras geométricas elementares (quadrado, triângulo e círculo) a seus respectivos nomes. **Grandezas e medidas**: Converter uma quantia, dada na ordem das unidades de real, em seu equivalente em moedas. Determinar o horário final de um evento a partir de seu horário de início e de um intervalo de tempo dado, todos no formato de horas inteiras. **Números e operações**: álgebra e funções: Associar a fração ¼ a uma de suas representações gráficas. Determinar o resultado da subtração de números representados na forma decimal, tendo como contexto o sistema monetário. **Tratamento de informações**: Reconhecer o maior valor em uma tabela de dupla entrada cujos dados possuem até duas ordens. Reconhecer informações em um gráfico de colunas duplas.
Nível 4: Desempenho maior ou igual a 200 e menor que 225	**Espaço e forma**: Reconhecer retângulos em meio a outros quadriláteros. Reconhecer a planificação de uma pirâmide dentre um conjunto de planificações. **Grandezas e medidas**: Determinar o total de uma quantia a partir da quantidade de moedas de 25 e/ou 50 centavos que a compõe, ou vice-versa. Determinar a duração de um evento cujos horários iniciais e finais acontecem em minutos diferentes de uma mesma hora dada. Converter uma hora em

	minutos. Converter mais de uma semana inteira em dias. Interpretar horas em relógios de ponteiros. **Números e operações**; álgebra e funções: Determinar o resultado da multiplicação de números naturais por valores do sistema monetário nacional, expressos em números de até duas ordens e posterior adição. Determinar os termos desconhecidos em uma sequência numérica de múltiplos de cinco. Determinar a adição, com reserva, de até três números naturais com até quatro ordens. Determinar a subtração de números naturais usando a noção de completar. Determinar a multiplicação de um número natural de até três ordens por cinco, com reserva. Determinar a divisão exata por números de um algarismo. Reconhecer o princípio do valor posicional do Sistema de Numeração Decimal. Reconhecer uma fração como representação da relação parte-todo, com o apoio de um conjunto de até cinco figuras. Associar a metade de um total ao seu equivalente em porcentagem. Associar um número natural à sua decomposição expressa por extenso. Localiza um número em uma reta numérica graduada onde estão expressos números naturais consecutivos e uma subdivisão equivalente à metade do intervalo entre eles. **Tratamento de informações**: Reconhecer o maior valor em uma tabela cujos dados possuem até oito ordens. Localizar um dado em tabela de dupla entrada.
Nível 5: Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250	**Espaço e forma**: Localizar um ponto entre outros dois fixados, apresentados em uma figura composta por vários outros pontos. Reconhecer a planificação de um cubo dentre um conjunto de planificações apresentadas. **Grandezas e medidas**: Determinar a área de um terreno retangular representado em uma malha quadriculada. Determinar o horário final de um evento a partir do horário de inicio, dado em horas e minutos, e de um intervalo dado em quantidade de minutos superior a uma hora. Converter mais de uma hora inteira em minutos. Converter uma quantia dada em moedas de 5, 25 e 50 centavos e 1 real em cédulas de real. Estimar a altura de um determinado objeto com referência aos dados fornecidos por uma régua graduada em centímetros. **Números e operações**; álgebra e funções: Determinar o resultado da subtração, com recursos à ordem superior, entre números naturais de até cinco ordens, utilizando as ideias de retirar e comparar. Determinar o resultado da multiplicação de um número inteiro por um número representado na forma decimal, em contexto envolvendo o sistema monetário. Determinar o resultado da divisão de números naturais, com resto, por um número de uma ordem, usando noção de agrupamento. Resolver problemas envolvendo a análise do algoritmo da adição de dois números naturais. Resolver problemas, no sistema monetário nacional, envolvendo adição e subtração de cédulas e moedas. Resolver problemas que envolvam a metade e o triplo de números naturais. Localizar um número em uma reta numérica graduada onde estão expressos o primeiro e o último número representando um intervalo de tempo de dez anos, com dez subdivisões entre eles. Localizar um número racional dado em sua forma decimal em uma reta numérica graduada onde estão expressos diversos números naturais consecutivos, com dez subdivisões entre eles. Reconhecer o valor posicional do algarismo localizado na 4ª ordem de um número natural. Reconhecer uma fração como representação da relação parte-todo, com apoio de um polígono dividido em oito partes ou mais. Associar um número natural às suas ordens e vice-versa.
Nível 6: Desempenho maior ou igual a 250	**Espaço e forma**: Reconhecer polígonos presentes em um mosaico composto por diversas formas geométricas. **Grandezas e medidas**: Determinar a duração de um evento a partir dos horários de inicio, informado em horas e minutos, e de término, também

	informado em horas e minutos, sem coincidência nas horas ou nos minutos dos dois horários informados. Converter a duração de um intervalo de tempo, dado em horas e minutos, para minutos. Resolver problemas envolvendo intervalos de tempo em meses, inclusive passando pelo final do ano (outubro a janeiro). Reconhecer que entre quatro ladrilhos apresentados, quanto maior o ladrilho, menor a quantidade necessária para cobrir uma dada região. Reconhecer o m² como unidade de medida de área. **Números e operações**; álgebra e funções: Determinar o resultado da diferença entre dois números racionais representados na forma decimal. Determinar o resultado da multiplicação de um número natural de uma ordem por outro de até três ordens, em contexto que envolve o conceito de proporcionalidade. Determinar o resultado da divisão exata entre dois números naturais, com divisor até quatro, e dividendo com até quatro ordens. Determinar 50% de um número natural com até três ordens. Determinar porcentagens simples (25%, 50%). Associar a metade de um total a algum equivalente, apresentado como fração ou porcentagem. Associar números naturais à quantidade de agrupamentos de 1000. Reconhecer uma fração como representação da relação parte-todo, sem apoio de figuras. Localizar números em uma reta numérica graduada onde estão expressos diversos números naturais não consecutivos e crescentes, com uma subdivisão entre eles. Resolver problemas por meio da realização de subtrações e divisões, para determinar o valor das prestações de uma compra a prazo (sem incidência de juros). Resolver problemas que envolvam soma e subtração de valores monetários. Resolver problemas que envolvam a composição e a decomposição polinomial de números naturais de até cinco ordens. Resolver problemas que utilizam a multiplicação envolvendo a noção de proporcionalidade. Reconhecer a modificação sofrida no valor de um número quando um algarismo é alterado. Reconhecer que um número não se altera ao multiplicá-lo por 1. **Tratamento de informações**: Interpretar dados em uma tabela simples. Comparar dados representados pelas alturas de colunas presentes em um gráfico.
Nível 7: **Desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300**	**Espaço e forma**: Interpretar a movimentação de um objeto utilizando referencial diferente do seu. Reconhecer um cubo a partir de uma de suas planificações desenhadas em uma malha quadriculada. **Grandezas e medidas**: Determinar o perímetro de um retângulo desenhado em malha quadriculada, com as medidas de comprimento e largura explicitados. Converter medidas dadas em toneladas para quilogramas. Converter uma quantia, dada na ordem das dezenas de real, em moedas de 50 centavos. Estimar o comprimento de um objeto a partir de outro, dado como unidade padrão de medida. Resolver problemas envolvendo conversão de quilograma para grama. Resolver problemas envolvendo conversão de litro para mililitro. Resolver problemas sobre intervalos de tempo envolvendo adição e subtração e com intervalo de tempo passando pela meia noite. **Números e operações**; álgebra e funções Determinar 25% de um número múltiplo de quatro. Determinar a quantidade de dezenas presentes em um número de quatro ordens. Resolver problemas que envolvem a divisão exata ou a multiplicação de números naturais. Associar números naturais à quantidade de agrupamentos menos usuais, como 300 dezenas. **Tratamento de informações**: Interpretar dados em gráficos de setores.
Nível 8: **Desempenho maior ou igual a 300 e menor que**	**Espaço e forma**: Reconhecer uma linha paralela a outra dada como referência em um mapa. Reconhecer os lados paralelos de um trapézio expressos em forma de segmentos de retas. Reconhecer objetos com a forma esférica dentre

325	uma lista de objetos do cotidiano. **Grandezas e medidas:** Determinar a área de um retângulo desenhado numa malha quadriculada, após a modificação de uma de suas dimensões. Determinar a razão entre as áreas de duas figuras desenhadas numa malha quadriculada. Determinar a área de uma figura poligonal não convexa desenhada sobre uma malha quadriculada. Estimar a diferença de altura entre dois objetos, a partir da altura de um deles. Converter medidas lineares de comprimento (m/cm). Resolver problemas que envolvem a conversão entre diferentes unidades de medida de massa. **Números e operações**; álgebra e funções Resolver problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais requerendo mais de uma operação. Resolver problemas envolvendo divisão de números naturais com resto. Associar a fração ½ à sua representação na forma decimal. Associar 50% à sua representação na forma de fração. Associar um número natural de seis ordens à sua forma polinomial. **Tratamento de informações**: Interpretar dados em um gráfico de colunas duplas.
Nível 9: Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350	**Espaço e forma**: Reconhecer a planificação de uma caixa cilíndrica. **Grandezas e medidas**: Determinar o perímetro de um polígono não convexo desenhado sobre as linhas de uma malha quadriculada. Resolver problemas que envolvem a conversão entre unidades de medida de tempo (minutos em horas, meses em anos). Resolver problemas que envolvem a conversão entre unidades de medida de comprimento (metros em centímetros). **Números e operações**: álgebra e funções Determinar o minuendo de uma subtração entre números naturais, de três ordens, a partir do conhecimento do subtraendo e da diferença. Determinar o resultado da multiplicação entre o número oito e um número de quatro ordens com reserva. Reconhecer frações equivalentes. Resolver problemas envolvendo multiplicação com significado de combinatória. Comparar números racionais com quantidades diferentes de casas decimais. **Tratamento de informações:** Reconhecer o gráfico de linhas correspondente a uma sequência de valores ao longo do tempo (com valores positivos e negativos).
Nível 10: Desempenho maior ou igual a 350	**Espaço e forma:** Reconhecer dentre um conjunto de quadriláteros, aquele que possui lados perpendiculares e com a mesma medida. **Grandezas e medidas**: Converter uma medida de comprimento, expressando decímetros e centímetros, para milímetros.

Fonte: http://sistemasprovabrasil.inep.gov.br/.

A tabela abaixo apresenta um comparativo dos percentuais de classificação dos alunos do 5º ano do ensino fundamental do ano de 2013, por nível de proficiência. Ressaltamos que a última Prova Brasil foi realizada no ano de 2015, mas os dados ainda não foram divulgados pelo Ministério da Educação.

Quadro 3 - Distribuição Percentual dos Alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental por Nível de Proficiência – Matemática

	Abaixo do nível 1	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	Nível 7	Nível 8	Nível 9	Nível 10
Santana do Ipanema	18,44%	21,23%	25,43%	16,72%	10,97%	3,72%	2,42%	0,65%	0,41%	0,00%	0,00%
Poço das Trincheiras	17,64%	21,96%	24,93%	14,85%	8,75%	5,97%	4,17%	1,10%	0,80%	0,00%	0,00%
Alagoas	12,07%	15,79%	20,81%	17,75%	13,71%	9,27%	5,75%	2,82%	1,47%	0,55%	0,00%
Brasil	5,13%	7,99%	13,59%	16,82%	16,97%	14,97%	11,46%	7,24%	3,74%	2,10%	0,00%

Fonte: http://sistemasprovabrasil.inep.gov.br/.

As informações dessa tabela comprovam o que já havíamos afirmado a respeito do ensino da geometria nas cidades de Santana do Ipanema e Poço das Trincheiras sobre o ensino da geometria, as estratégias didáticas apresentadas na pesquisa elaborada com os professores citados estão diretamente ligadas ao baixo desempenho dos discentes concluintes da última etapa do ensino fundamental I, uma vez que o percentual de discentes que não apresentou desempenho satisfatório para classificação no nível III, onde se exige os primeiros conhecimentos básicos do bloco Espaço e Forma, foi de 65,1% na cidade de Santana do Ipanema e 64,53% na cidade de Poço das Trincheiras, enquanto que o percentual geral do Brasil nos mesmos níveis observados foi de 26,71%.

Quadro 4 - Médias de proficiência do 5º ano do ensino fundamental.

Médias de proficiência do 5º ano do ensino fundamental	
Santana do Ipanema	163.17
Poço das Trincheiras	166.93
Alagoas	174.93
Brasil	205.08

Fonte: http://sistemasprovabrasil.inep.gov.br/.

Analisando as médias de proficientes percebemos ainda que os estudantes brasileiros de maneira geral não concluem o ensino fundamental I com conhecimento satisfatório na área de matemática, isso acarreta graves problemas na aprendizagem desses alunos, uma vez que a maioria dos professores de matemática costuma usar os livros de didáticos como principal recurso didático e esse são planejados de maneira sistemática e linear, a partir de parâmetros nacionais, sem considerar as peculiaridades locais e sociais dos discentes, isso resulta em graves problemas como: alunos desmotivados, pois não conseguem compreender os conteúdos, uma vez que eles são repassados em nível superior ao que eles têm capacidade de assimilar e professores angustiados, pois não conseguem compreender o porquê de seus alunos não aprenderem os conteúdos ensinados durante as aulas.

Queremos deixar claro que a intenção desse estudo não é apontar culpados para o fracasso do ensino da geometria, mas sim analisar dados e apontar possíveis sugestões para melhoria no ensino no país, pois sabemos que o professor tem papel fundamental no processo de ensino aprendizagem, mas existem muitos outros fatores que influenciam diretamente na aprendizagem dos alunos como: estímulo da família, espaço físico adequado para estudo, recursos didáticos, alimentação, recursos financeiros destinados à educação, entre outros. Muitas vezes os professores têm até vontade de melhorar sua metodologia de trabalho, mas as condições do ambiente que os cerca não contribui para isso, além de muitas vezes ocorrer à falta de preparação desses profissionais, por isso faz-se necessário mais investimentos em cursos de formação continuada por parte dos governantes.

5 UMA INTERVENÇÃO NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

5.1 A oficina

As atividades que seguem têm como desígnio tornar o estudo de alguns tópicos da geometria, mais dinâmico, prazeroso e acima de tudo acessível ao nível intelectual de alunos do 6º ano do ensino fundamental.

As atividades selecionadas e/ou elaboradas buscam estimular o raciocínio dos alunos, por meio da observação, manipulação, experimentação, visualização de materiais concretos, além de fazer uso do software educacional livre Geogebra. No decorrer da concretização das atividades os alunos assumiram o papel de investigadores, tendo a oportunidade de compartilhar suas ideias, fazer novas descobertas, conhecer as ideias dos outros, deduzir propriedades referentes às formas manipuladas.

- **Atividade:**

Este bloco de atividades foi inspirado, mas com grandes alterações, em atividades realizadas num processo de formação para professores, oferecido por um projeto de pesquisa - Estudo de fenômenos de ensino-aprendizagem de noções geométricas, realizado na PUC/SP e financiado pela FAPESP, cujo objetivo era analisar os fatores e as estratégias suscetíveis de influenciar o ensino e a aprendizagem de noções geométricas nas séries finais do ensino fundamental.

- **Descritores:**

Identificar semelhanças e diferenças, agrupar com a finalidade de classificar, definir e verificar propriedades de alguns objetos planos e espaciais.

- **Contexto/Objetivo:**

As atividades foram elaboradas na intenção de promover uma aprendizagem mais efetiva do estudo das formas, visto que muitos alunos chegam ao ensino fundamental II sem conhecer as formas geométricas e suas propriedades. Durante toda minha experiência docente vivenciei a dificuldade dos alunos em identificar e diferenciar as figuras planas e não planas, além das confusões que eles fazem, por exemplo, muitos chamam o cubo de quadrado, a esfera de círculo, a pirâmide de triângulo e ainda existem aqueles que não identificam nem as figuras planas.

O ponto de partida das atividades foi dado a partir da identificação “semelhanças e diferenças” a fim de classificar, definir e verificar propriedades de alguns objetos planos e espaciais.

Espera-se no decorrer das atividades propostas que os alunos apresentem evolução nos níveis de classificação em relação à teoria dos Van Hiele. Vale ressaltar que segundo essa teoria a evolução é sempre em ordem crescente e que não é possível intercalar níveis, por exemplo, se o estudante encontra-se no nível I, esse não poderá passar para o nível III, sem ter passado pelo nível II, outro detalhe é que essa classificação independe da idade e da série estudantil que se encontra o estudante.

- **Escolha da Turma:**

Essa oficina foi aplicada na Escola Municipal de Ensino Fundamental Professor Tobias Medeiros, localizada na cidade de Poço das Trincheiras/AL, com os 30 alunos do 6º ano “C”, turno vespertino. As atividades foram desenvolvidas durante três semanas, com um total de 12 aulas, tendo total apoio e autorização da direção da escola.

A escolha da turma se deu após constatação, durante o primeiro semestre do ano letivo de 2015, que esses alunos chegaram ao início do ensino fundamental II (6º ano) praticamente sem conhecimento de geometria, com exceção de alguns alunos. Ao iniciar as atividades no ano letivo elaborei várias atividades na intenção de identificar o nível de aprendizagem desses alunos, todas elas mostravam que mais da metade desses alunos não tinham conhecimento matemático satisfatório para aquele ano de estudo, mas na área de geometria a situação era ainda mais crítica, já que menos de 20% apresentava conhecimento satisfatório para o ano/série estudado.

Em conversas informais com outros professores da área cheguei à conclusão que o problema que pensei que fosse específico dessa turma, na verdade é um problema regional dos munícipios onde trabalho, provavelmente esses alunos não tiveram oportunidade de estudar o bloco Espaço e Forma de maneira satisfatória, ou até mesmo nem estudaram, pois era notória a falta de conhecimento deles, muitos não reconheciam nem as formas geométricas planas mais simples como: quadrado, retângulo, triângulo e círculo, muito menos as formas espaciais.

A elaboração das atividades desenvolvidas foi baseada na teoria dos Van Hiele, respeitando o nível de desenvolvimento geométrico e o tempo de aprendizagem de cada aluno, na Proposta Curricular do Ensino Fundamental e em livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental.

▪ **Diagnóstico Inicial da Turma:**

O questionário inicial (anexo A) foi elaborado no intuito de verificar a concepção dos alunos a respeito de conceitos geométricos, dificuldades que apresentam em relação a esses conceitos e identificar os níveis de aprendizagem da geometria dos discentes, através da teoria dos Van Hiele. O mesmo foi realizado na turma do 6º ano C de uma escola pública municipal do município de Poço das Trincheiras, composta por 30 alunos.

As primeiras questões contidas no questionário diagnóstico tinham como objetivo conhecer a opinião dos alunos a respeito da importância da matemática, avaliar o que entediam do estudo da geometria e verificar se estes alunos tinham alguma experiência na utilização de software na sala de aula. As demais questões buscavam identificar as principais dificuldades dos alunos em alguns conteúdos da geometria como: identificação e definição de figuras geométricas planas e não planas, nomenclatura, dimensão, principais características, planificação, número de faces, de vértices e de arestas.

Diante das respostas obtidas, observamos que 19 (dezenove) dos alunos entrevistados são capazes de expressar bem a importância dos conhecimentos matemáticos para humanidade, 11 (onze) deles não chegam a respostas significativas. Quanto ao questionamento a cerca do que se estuda na geometria, 09 (nove) dos estudantes apontam como estudo das formas e figuras, os demais apenas mencionam não saber. Ao serem questionados sobre o uso do software na sala de aula, apenas 01 (um) aluno explica que utilizou um recurso no 4º ano e 29 (vinte e nove) responderam que nunca usaram, dentre esse 01 (um) aluno afirmou que não precisa e que atrapalha a aula. Tratando-se de conhecimentos geométricos, apenas 07 (sete) alunos identificam conceitos elementares das figuras planas e não planas, esses conceitos são indispensáveis para construção de entendimentos mais complexos a cerca do conteúdo estudado.

Analisando o questionário como um todo, concluímos que a maior parte dos alunos da turma não se classifica nem se quer no nível I, segundo a teoria dos Van Hiele, que é a visualização das figuras, incluindo a identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, pois não conseguiram responder os questionamentos relativos aos conteúdos citados.

Durante a realização do questionário de diagnóstico muitos alunos mostraram-se impacientes, um aluno chegou a reclamar que era muita tarefa e que a professora não havia avisado que era para estudar aqueles conteúdos, outros disseram que não que estavam conseguindo responder, pois nunca tinham estudado aqueles conteúdos. Após alguns esclarecimentos a respeito da importância e objetivo da atividade eles mostraram-se mais dispostos a realizar a mesma, apesar de certa dificuldade, mesmo assim observamos ainda um número muito alto de questões em branco.

Figura 39 - Alguns registros da aplicação do questionário de diagnóstico.

Fonte: Autora, 2016.

- **Sequência didática:**

A sequência de atividades que compõem a oficina pedagógica, aplicada durante a intervenção é composta pelas atividades:

1) Excursão a um supermercado, um museu, uma igreja, uma praça, sugerimos ainda uma visita a um parque ecológico, caso tenha na região;

2) Observação e classificação em objetos planos e não planos;

3) Observação e classificação de objetos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais;

4) Observação e classificação de sólidos geométricos em poliedros e corpos redondos;

5) Estudando a planificação dos sólidos;

6) Explorando software livre Geogebra para construção dos poliedros de Platão.

Nos parágrafos seguintes apresentaremos cada atividade que compõe a oficina pedagógica desenvolvida de maneira detalhada.

5.1.1 Atividade – **Excursão a um supermercado, um museu, uma igreja, uma praça, sugerimos ainda uma visita a um parque ecológico, caso tenha na região**.

Objetivo Geral:

- Aproximar os alunos da geometria, fazendo-os perceber as diferentes formas geométricas presentes ao seu redor, na natureza, no trânsito, supermercados, igrejas e praças, além de voltar ao passado observando as formas existentes na antiguidade, durante a visita a um museu.

Objetivos Específicos:

- Estabelecer relações do cotidiano do aluno com as formas geométricas;
- Desenvolver a capacidade de observar diferenças ou semelhanças na forma dos objetos;
- Identificar as formas geométricas mais frequentes nos lugares observados;
- Observar a maneira como essas formas são empilhadas;
- Visualizar as figuras planas e espaciais.

Material Necessário:

Câmera fotográfica, folhas para anotações, lápis, papel 40, computador e datashow.

Roteiro da atividade:

Sugerimos que desde a saída da escola que o professor explore as formas que vão encontrando, por exemplo, as placas de sinalização, construções, faixadas de lojas, entre outros. Durante toda excursão o professor pode incentivar os alunos a observarem e ir perguntando o que sabem sobre essas formas, nesse momento o professor pode também explorar o conhecimento prévio dos alunos, além de observar a linguagem utilizada por eles, sem se preocupar em corrigi-los caso não se expressem de maneira matematicamente correta, mas sim valorizar a maneira como se expressam, para evitar constrangimento. Essas observações serão úteis para identificar o nível de conhecimento dos alunos em relação às formas geométricas.

Durante a excursão no supermercado solicitar que observem as formas da natureza (frutas e legumes), as embalagens e a maneira como elas são armazenadas, questionando se seria possível armazená-las em posições diferentes, por exemplo, o que aconteceria com as latas de ervilhas se elas fossem organizadas deitadas? Quando uma pessoa retirasse uma dessas latas o que aconteceria com as outras? A ideia é fazer com que os alunos percebam que sólidos como o cilindro e cone não podem ser apoiados em qualquer posição, uma vez que são corpos redondos, mas sem utilizar esses termos.

Durante a visita ao museu o professor poderá explorar as formas geométricas presentes na antiguidade, fazendo com que os alunos percebam que elas não fazem parte apenas no mundo moderno, mas que vem sendo usada há muitos anos. Ainda no museu pode ser explorado fatos importantes que motivaram as descobertas no campo da geometria.

Já na igreja e praças sugerimos que sejam exploradas as formas geométricas presentes na sua arquitetura, na disposição das cadeiras e bancos, questionando o porquê de nas igrejas as cadeiras estarem enfileiras voltadas para frente e nas praças os bancos estarem dispostos uns de fronte para os outros. Esse momento também é oportuno para se trabalhar noções sobre posição relativa entre retas.

Relato da Experiência:

No dia 07 de outubro de 2015 me reuni com os alunos do 6º ano “C” na escola citada, para realizarmos nossa atividade, a excursão ao Hipermercado Nobre, Museu Darras Noya, Igreja de Senhora Santana e Praça Central, todos os lugares localizados em Santana do Ipanema/AL, cidade vizinha à aproximadamente 12 km de distância. A escolha de não realizar a excursão na própria cidade da escola foi o fato de ser uma cidade pequena, onde o comércio é pouco desenvolvido e só existem mercadinhos instalados em pequenos espaços, o que dificultava a movimentação dos alunos, além de oportunizar a exploração de lugares diferentes, uma vez que a maioria dos alunos não conheciam os locais explorados, fator importante para aquisição de novos conhecimentos.

A secretária municipal de educação da localidade disponibilizou o transporte para realizar a excursão no horário estabelecido. Antes de sairmos da escola expliquei o objetivo da atividade para os alunos e entreguei a lista de atividade (anexo B) para que eles fizessem as devidas anotações. Às 8 horas da manhã sairmos da escola e começamos a observar as formas que fomos encontrando no trajeto.

Os alunos mostraram-se bastante interessados e curiosos durante toda excursão, mesmo aqueles que durante as aulas em sala não demostravam interesse pela matemática, talvez pelo fato de estarmos explorando um ambiente novo, lugares que não estavam acostumados a frequentar, pois a maioria dos alunos é de família de baixa renda, moram na zona rural e não estão acostumados a sair da cidade onde moram.

Durante o trajeto observavam as formas presentes nas placas de trânsito, faixadas de lojas, nas construções e na estrada, muitos diziam os nomes das formas de maneira errada outros preferiam perguntar o nome das formas e já iam fazendo anotações na lista de atividade que receberam.

Na visita ao supermercado percebi um encantamento maior neles, fizeram vários questionamentos sobre as formas que foram encontrando, queriam saber o nome de todas elas. Aproveitei a oportunidade para explicar que nem todas as formas recebem nomes especiais e que a maioria delas foi inspirada em formas na natureza.

Na seção de frutas e hortaliças pedi que observassem as formas presentes na natureza e que fossem associando às formas geométricas que foram inspiradas nelas, as formas que mais encontraram associação foram o cilindro e a esfera.

Nas demais seções solicitei que os alunos observassem as embalagens e a forma como elas estavam sendo armazenadas e organizadas, mudei algumas caixas de goiabada na forma de cilindro que estavam apoiadas em uma das bases e deixei elas “apoiadas” na superfície não plana e perguntei a eles o que aconteceria quando eu soltasse as caixas, eles afirmaram que elas iriam virar e iam ficar “bagunçadas” à medida que as pessoas fossem retirando os produtos da prateleira. Fiz a mesma coisa com umas velas, com elas a ideia ficou mais clara, pois à medida que íamos colocando as velas “deitadas” umas sobre as outras o monte ia desmoronando.

Desafiei os alunos a encontrarem no supermercado um sólido composto por todas as partes iguais (faces, preferi não usar os termos matemáticos nesse momento), mas eles não encontraram nenhuma embalagem com essa característica, ao sair questionei-os sobre quais as formas são mais fáceis de ser encontradas e quais formas gostariam de ter encontrado. As formas mais encontradas foram paralelepípedo (só conheciam a forma por esse nome) e cilindro (muitos confundiam o cilindro com o cone), alguns afirmaram que a forma que gostariam de ter encontrado era o cubo (para eles a única forma que existiam com as partes iguais, alguns chamavam o cubo de dado) outros não souberam se expressar. Nesse momento já senti que eles estavam se familiarizando com a nomenclatura das formas geométricas.

Durante a visita ao museu eles puderam constatar a presença das formas geométricas em objetos antigos, como: máquinas agrícolas, moinho de pedra, ferro de passar, pilão, baú, móveis, televisão, telefone, rádio, disco de vinil, entre outros, provavelmente da época dos seus avós ou bisavôs. O museu que eles visitaram é municipal, onde as peças expostas são doações de antigos moradores e retratam a história do munícipio, assim eles também puderam aproveitar para aprender um pouco de sua história, visto que Poço das Trincheiras era distrito de Santana do Ipanema, até o ano de 1958.

A visita à igreja e a praça foi mais rápida, pois já estávamos excedendo o tempo para o retorno estabelecido pela direção da escola. Nesses lugares eles tiveram a oportunidade de observar as formas presentes na arquitetura e observar as formas como os bancos são organizados na igreja e na praça, perguntei o que elas achavam da organização da igreja, onde os bancos são dispostos paralelamente e na praça em forma circular. O objetivo era fazer com que eles percebessem que na igreja a atenção está voltada para o altar, o que justifica a disposição das cadeiras, já nas praças a ideia é a confraternização das pessoas.

Retornamos para escola às 11 horas. Durante o percurso de retorno pedi que descrevessem o que eles tinham achado daquela aula, uma aluna respondeu: “A aula foi muito diferente e divertida, deu pra aprender muita coisa”. De maneira geral as respostas foram positivas. Ao chegamos à escola pedi que eles terminassem de preencher a lista de atividades, mas não foi possível produzir o cartaz ou slides conforme solicitado no item 6 da lista de atividade (anexo B). Eles reclamaram que não tinham computador em casa e que se fossem fazer em uma “lan house” iam gastar muito dinheiro com impressão, já que eles não sabiam fazer slides. Como os computadores da sala de informática não estavam funcionando por falta de manutenção, não era possível ensiná-los a fazer os slides. Pedi que os alunos mandassem as fotos pra mim e organizei uma exposição com elas. Na semana seguinte mostrei as fotos para eles e aproveitamos para revisar o conteúdo estudado durante a excursão, com a finalidade de sanar algumas dificuldade e corrigir os erros apresentados na resolução da lista de atividade.

Figura 40 - Alguns registros da excursão.

Fonte: Autora, 2016.

5.1.2 Atividade - **Observação e classificação em objetos planos e não planos**.

Objetivo Geral:

Compreender a diferenciação dos objetos planos e não planos, através da visualização e observação das formas e características desses objetos, com uso da manipulação. Ao determinar o critério para separação dos objetos os discentes serão forçados a observar padrões e criar estratégias de separação.

Objetivos Específicos:

- Diferenciar os objetos planos e não planos;
- Observar as formas e características dos objetos;
- Explorar a manipulação dos objetos;
- Designar estratégias de separação.

Material Necessário:

Modelos em cartolina de prismas (cubo, paralelepípedo, prisma triangular, prisma hexagonal, ou outros que julgue necessário), pirâmides (tetraedro, pirâmide de base retangular, pirâmide pentagonal), cone, círculo, algumas superfícies poligonais e não poligonais. Além de cilindro de cera ou sabão, bolinha de isopor ou de plástico, linha grossa, clipes retorcidos e superfície retangular dobrada, papel para anotações, lápis e cartolina.

Roteiro da atividade:

Recomendamos que essa atividade seja realizada em grupos de no máximo seis alunos. Para iniciar a atividade o professor terá que entregar a cada grupo um kit contendo todos os objetos produzidos antecipadamente. Após entrega dos objetos o professor deverá:

- Incentivar os alunos a manipular os objetos recebidos e discutir entre eles a respeito das características dos mesmos, semelhanças e diferenças existentes;
- Solicitar que criem um critério para separar os objetos em duas categorias;
- Solicitar que descubram qual o critério utilizado pelo grupo vizinho e que explique a turma.

Ao observar os critérios utilizados pelos outros grupos, eles perceberão que existem diversas maneiras de separar as duas categorias e serão forçados a utilizar o raciocínio lógico para descobrir o critério utilizado pelo grupo vizinho.

Ao finalizar a atividade sugerimos que o professor solicite que cada grupo apresente seu critério de divisão em categorias para os demais, essa é uma ótima oportunidade para que o professor possa analisar a linguagem usada pelos alunos e seus conhecimentos prévios, além oportunizar a troca de conhecimento.

Durante as apresentações o professor deverá estar atento aos critérios usados pelos alunos. Dificilmente eles irão dividir as figuras em planas e não planas, objetivo específico da atividade, cabendo-lhe realizar intervenções no intuito de instigar os alunos a procurar um melhor critério de realizar a divisão, sem deixar de fora nenhum objeto, sem dar margem para que um objeto possa pertencer a mais de um grupo, além de garantir que cada grupo tenha no mínimo um objeto.

Espera-se que ao fim da atividade os alunos tenham compreendido que os objetos classificam-se em:

- **Objetos planos** (sem considerar a espessura): Superfícies poligonais, superfícies curvas, linha grossa, clipe retorcido e círculo.
- **Objetos não planos:** prismas, pirâmides, cone, bolinha de isopor, cilindro de cera e retângulo dobrado.

Sugerimos também que o professor ao fim da atividade revise, realize a síntese dos conteúdos vistos e solicite que os alunos façam o registro do conteúdo estudado, mesmo que seja mera reprodução de sua linguagem, essa é uma das fases da teoria aplicada. As conclusões desta atividade também poderão ser registradas em um cartaz, para ficar exposto em sala para futuras consultas, além de permitir que os alunos possam visualizar as informações diariamente.

Relato da Experiência:

Para realizar essa atividade dividi a sala em seis grupos com cinco alunos, a escolha dos membros do grupo foi realizada pelos próprios alunos. Inicialmente entreguei o kit com os objetos citados e solicitei que realizassem as atividades conforme descrito abaixo.

1) Observem atentamente os objetos recebidos e discutam entre vocês a respeito das características dos mesmos, semelhanças e diferenças existentes;

2) Criem um critério para separar os objetos em duas categorias;

3) Tentem descobrir qual o critério utilizado pelo grupo vizinho e que explique a turma.

Durante a etapa de manipulação e observação dos objetos os alunos ficaram bastante concentrados, mas tinham dificuldade de se expressar, acredito que devido à timidez e o fato de não estarem habituados a desenvolverem esse tipo de atividade, mas no transcorrer da mesma foram ficando mais participativos.

A maioria dos grupos não conseguiu criar um critério eficiente, na verdade eles não sabiam nem contar os lados das figuras planas, alguns alunos disseram que o quadrado possui seis lados, pois além dos lados contavam a frente e o verso do papel, mesmo sendo solicitados que desconsiderassem a espessura do papel, outros diziam que o cubo tinha seis lados.

O primeiro grupo dividiu os objetos usando como critério o número de lados, mas não sabiam distinguir lado de face, usando a palavra lado em ambas as situações. Além de não conseguirem contar corretamente o número de lados e faces dos objetos, outros dois grupos tentaram usar a mesma estratégia, acredito que tentando imitar o que os outros tinham feito.

Um grupo, por exemplo, afirmou que a bola de isopor tinha seis lados e outro que o círculo e superfícies curvas tinham lados, imediatamente os outros alunos contestaram, ficando visível o senso crítico deles, pois contestavam os critérios usados pelos outros, não aceitando qualquer critério.

Mas um grupo se destacou na divisão dos objetos. Esse grupo dividiu os objetos em planos e não planos, mas não usou essas palavras, segundo os membros do grupo o critério usado por eles foi: os objetos fáceis de pegar (não planos) e os objetos difíceis de pegar (planos, com exceção do retângulo dobrado), todos os objetos estavam sobre a mesa.

Já outro grupo usou o seguinte critério, os que têm face e os que não têm face, mas cometeram um equivoco ao incluírem a esfera no grupo dos objetos que tinha face. Esse mesmo grupo também afirmou que os objetos que tinham face era os que ficavam “em pé”, o que me chamou atenção nesse grupo foi o uso do termo face, já que até o momento não estávamos usando a linguagem matemática, o que leva a crer que alguns desses alunos já apresentavam alguma noção do conteúdo abordado.

Os alunos não conseguiram descobrir o critério usado pelos participantes dos outros grupos, visto que os objetos não foram divididos usando critérios claros e eficientes, o que dificultava bastante essa tarefa.

Durante toda atividade fiz questionamentos, tentando mostrar que aqueles critérios utilizados por eles apresentavam falhas e precisávamos encontrar um critério melhor, muitas vezes os próprios alunos contestavam as afirmações dos colegas, ao perceberem que não estavam usando afirmações verdadeiras. Esses momentos foram bastante proveitosos, pois permitiram uma troca de conhecimento entre eles, alunos que se mostraram tímidos durante o decorrer do ano letivo, mostraram-se participativos e interessados.

Ao fim da atividade expliquei para eles o que são figuras planas e não planas e solicitei que eles usassem esse critério para dividir os objetos. Os alunos tiveram mais dúvida em classificar os seguintes objetos: o clipe retorcido, a linha grossa e o retângulo dobrado. Não entenderam de imediato que deveriam desconsiderar a espessura da linha e do clipe, do mesmo jeito que desconsideraram nos objetos recortados em cartolina. Quanto ao retângulo dobrado pedi que analisassem a peça dobrada e questionei se ele ficaria totalmente apoiado na mesa, logo perceberam que não e o colocaram no grupo de objetos não planos.

Depois que todos chegaram a um consenso colamos os objetos em uma cartolina, dividindo os objetos em planos e não planas e fizemos o registro do conteúdo estudado.

Figura 41 - Alguns registros da atividade - Observação e classificação de objetos planos e não planos.

Fonte: Autora, 2016.

5.1.3 Atividade - **Observação e classificação de objetos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.**

Objetivo Geral:

- Compreender a classificação dos objetos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, através da observação e manipulação dos mesmos.

Objetivos Específicos:

- Classificar os objetos unidimensionais (só tem comprimento), bidimensionais (possui comprimento e largura) e tridimensionais (possui comprimento, largura e altura);
- Desconsiderar a espessura do arame do clipe, da linha grossa e dos objetos recortados em cartolina.

Material Necessário:

Modelos em cartolina de prismas (cubo, paralelepípedo, prisma triangular, prisma hexagonal, ou outros que julgue necessário), pirâmides (tetraedro, pirâmide de base retangular, pirâmide pentagonal), cone, circulo, algumas superfícies poligonais e não poligonais. Além de cilindro de cera ou sabão, bolinha de isopor ou de plástico, linha grossa, clipes retorcidos, superfície retangular dobrada, papel para anotações, lápis e cartolina.

Roteiro da atividade:

Esta atividade pode ser desenvolvida de maneira análoga a anterior, seguindo os mesmos critérios de divisão da turma em grupos e questionamentos. Espera-se que os alunos tenham mais facilidade em realizar essa divisão, visto que agora são três grupos para separar os objetos. Mais uma vez recomendamos que o professor estimule através de questionamentos os grupos a buscarem pela divisão mais adequada para os objetos. Agora o professor deverá solicitar:

- Observem atentamente os objetos recebidos e discutam entre vocês a respeito das características dos mesmos, semelhanças e diferenças existentes;
- Criem um critério para separar os objetos em três categorias;
- Solicitar que descubram qual o critério utilizado pelo grupo vizinho e que explique a turma.

Espera-se que ao fim da atividade, os alunos tenham compreendido que apesar de todos ocuparem um lugar no espaço os objetos classificam-se em:

- **Unidimensionais** (desconsiderando a espessura): linha grossa e clipe retorcido.
- **Bidimensionais** (desconsiderando a espessura)**:** superfícies poligonais e superfícies curvas.
- **Tridimensionais:** prismas, pirâmides, cone, bolinha de isopor, retângulo dobrado e cilindro de cera.

Mantemos aqui também a revisão, a síntese dos conteúdos vistos e registro do conteúdo estudado de forma individual. As conclusões desta atividade também poderão ser registradas em um cartaz, para ficar exposto em sala para futuras consultas, com a finalidade de permitir que os alunos possam visualizar as informações diariamente.

Relatório da Experiência:

O objetivo de dividir os objetos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais não foi atingido por nenhum grupo, a atividade que aparentemente parecia mais fácil, tornou-se mais difícil, talvez devido ao fato de agora eles precisarem pensar em mais um critério e também por não terem noção sobre dimensão de objetos, fato comprovado através da atividade de diagnóstico (anexo A).

O primeiro grupo dividiu os objetos da seguinte maneira: os que não têm face (cone, cilindro de cera e bolinha de isopor), os que têm face (prismas e pirâmides) e os que não possuem aresta (demais objetos). Os alunos desse grupo tentaram usar a linguagem matemática, influenciados por outro grupo que já havia usado, mas de maneira equivocada. Na verdade, eles queriam dizer que o primeiro grupo de objetos seriam os que não possuem arestas, só que assim eles só teriam dois grupos os que têm aresta e os que não têm aresta.

O segundo grupo tentou agrupar os objetos que se parecem, da seguinte maneira: Estavam no primeiro grupo o cubo que para eles se parecia com o quadrado, o paralelepípedo com o retângulo, as pirâmides com triângulo, o cone e a bolinha de isopor se parecem com o círculo, percebe-se aqui uma tentativa de associar os sólidos com superfícies planas presentes na sua planificação, com exceção da bolinha de isopor que não possui planificação, mas se fizermos um corte na bolinha obtemos um círculo (essa foi a ideia demonstrada pelos membros do grupo). No outro grupo tinha o prisma de base hexagonal que se parece com o hexágono, o cilindro de vela que se parece com o clipe retorcido e a linha grossa, e no terceiro grupo os objetos que para eles não se parecem com os outros. Desta forma, concluímos que esses alunos só dividiram os objetos em dois grupos: os que se parecem e os que não se parecem.

O terceiro grupo foi o que mais se aproximou do objetivo, eles fizeram a seguinte divisão: os prismas e pirâmides (“ficam em pé”); os polígonos, superfícies curvas e o retângulo dobrado (“não ficam em pé”); a linha grossa, o clipe retorcido, a bolinha, o cilindro de cera e o cone (“são arredondados”), apesar de seus membros não conseguirem se expressar adequadamente.

Os demais grupos não conseguiram definir um critério, fizeram a divisão contando os lados das figuras, mas ainda continuaram a confundir lado com face, o que tornava a divisão ineficaz.

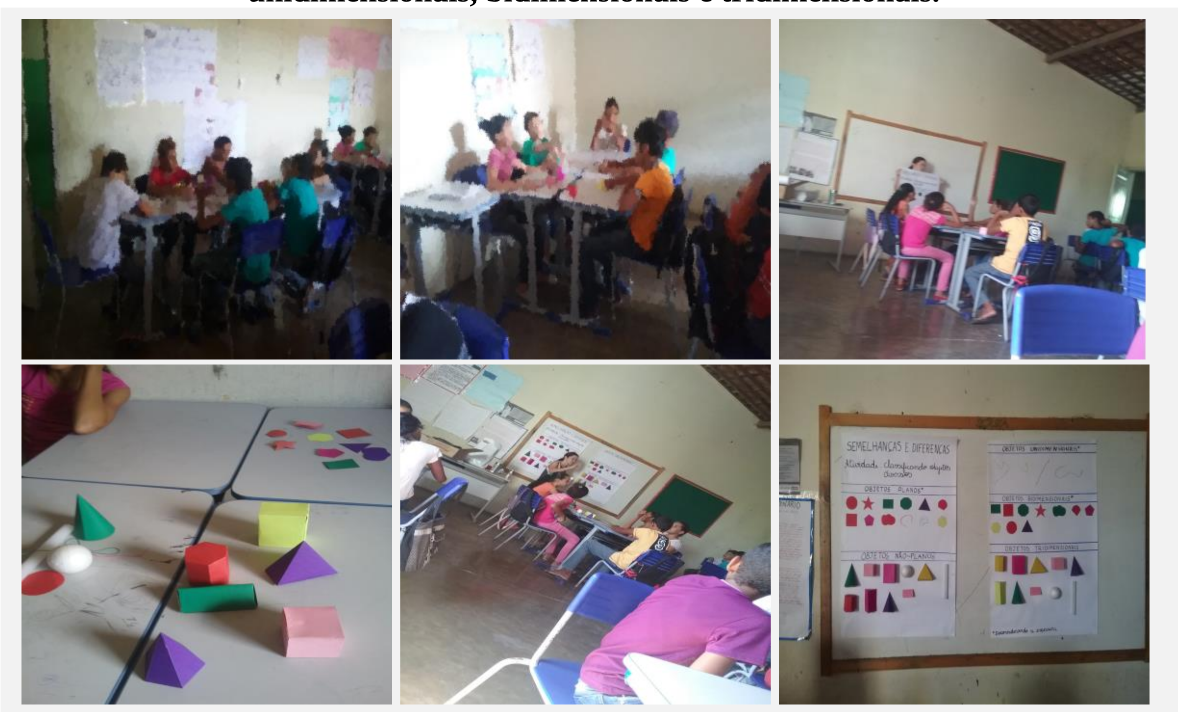
Mais uma vez os grupos não conseguiram descobrir os critérios utilizados pelos demais grupos, apesar de várias tentativas.

Após alguns questionamentos a respeito dos critérios usados por cada grupo e algumas discursões entre os alunos, concluímos que os critérios usados não foram eficientes e que precisávamos de um critério melhor. Realizei alguns questionamentos para que eles percebessem características comuns entre os objetos, por exemplo:

- Como compramos a linha e o arame? O que usamos para medi-los?
- Que objetos ficam totalmente apoiados sobre a mesa (desconsiderando a espessura)?
- Quais objetos não ficam totalmente apoiados sobre a mesa?

Em seguida expliquei para os alunos a definição de figuras unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, solicitei que classificassem os objetos dados de acordo com a definição e colamos os objetos separados por grupo em um cartaz. Para finalizar a atividade pedi outros exemplos de objetos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais e solicitei o registro da síntese do conteúdo escrito no quadro. Apesar da dificuldade apresentada inicialmente os alunos conseguiram atingir o objetivo da atividade de maneira satisfatória.

Figura 42 - Alguns registros da atividade - Observação e classificação de objetos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.



Fonte: Autora, 2016.

5.1.4 Atividade - **Observação e classificação de sólidos geométricos em poliedros e corpos redondos.**

Objetivo Geral:

- Classificar os objetos em poliedros ou corpos redondos, observando as semelhanças e diferenças presente nas formas, o comportamento desses sólidos ao serem colocados em uma superfície plana inclinada e observando secções desses sólidos.

Objetivos Específicos:

- Realizar a classificação dos objetos em poliedros ou corpos redondos;
- Saber as semelhanças e diferenças presentes nas formas.

Material Necessário:

Modelos em cartolina de prismas (cubo, paralelepípedo, prisma triangular, prisma hexagonal), pirâmides (tetraedro, pirâmide de base retangular, pirâmide pentagonal), cone, cilindro e bolinha de isopor, cartolina, cola, mesa, estilete, papel para anotações e lápis.

Roteiro da atividade:

Esta atividade pode ser iniciada como as demais, entregando o material para os alunos e solicitando que realizem os seguintes comandos:

- Manipulem os objetos recebidos e discutam entre si a respeito das características dos mesmos, semelhanças e diferenças existentes.
- Criem um critério para separar os objetos em duas categorias.
- Descubram qual o critério utilizado pelo grupo vizinho e explique-o.

Devemos manter a estratégia de deixar os alunos à vontade, ir apenas fazendo questionamentos e dando sugestões que induzam ao resultado desejado.

Depois que os alunos fizerem primeira tentativa da divisão, o professor poderá colocar os sólidos em uma mesa e em seguida levantar um dos lados e pedir que os alunos observem os sólidos que realizaram o mesmo tipo de movimento e que os agrupe. Com os dois grupos separados, com o auxílio de um estilete, realizar cortes paralelos às bases nos sólidos, com exceção na esfera que não possui base e verificar as superfícies planas que aparecem.

A ideia é fazer com que os alunos consigam compreender que os sólidos que rolam em pelo menos uma das posições e que apresentam as secções transversais na forma de círculo ou circunferência são chamados de corpos redondos e os que não rolam, formados apenas por superfícies planas e que apresentam as secções transversais na forma de polígonos são os poliedros.

Após conseguir a separação ideal o professor deverá solicitar que seus alunos dividam o grupo dos poliedros em dois subgrupos, observando as semelhanças e diferenças, existentes entre prismas e pirâmides.

Finalizar a atividade com a síntese dos conteúdos, registro individual dos alunos, e produção de um cartaz, com a separação dos sólidos geométricos e características dos sólidos estudados.

Relatório da Experiência:

A participação dos alunos durante essa atividade em relação a anterior foi bem melhor, pareciam terem perdido a timidez e respondiam com mais entusiasmo os questionamentos que ocorriam durante a realização da mesma.

O primeiro grupo dividiu os sólidos usando o seguinte critério: os que têm pontas (cone, prismas, pirâmides) e os que não têm pontas (cilindro de cera e bolinha de isopor), a maneira que eles realizaram a divisão não foi a que desejamos, mas estava correta. Pela primeira vez um grupo conseguiu descobrir o critério utilizado por outro, que foi justamente esse.

Já o segundo grupo separou os objetos usando o seguinte critério: os sólidos que eles mais veem no dia a dia deles (cubo, paralelepípedo, cilindro, cone e esfera) e os que menos veem (demais sólidos). Esse grupo não atendeu o objetivo da atividade que era dividir os objetos analisando as diferenças e semelhanças, apenas usou um critério qualquer.

O terceiro separou os objetos que se parecem, por exemplo: para eles a esfera se parece com o prisma hexagonal, a pirâmide com o cone, a pirâmide de base retangular com o prisma retangular, dos objetos que não se parecem, que para eles eram o cubo, o paralelepípedo e cilindro, mas não conseguiu justificar com clareza o critério usado, à medida que os componentes do grupo apresentavam seu critério os demais alunos contestavam as informações incoerentes.

Os outros dois grupos usaram critérios parecidos, dividiram os grupos pelo número de lados (faces), mas continuaram usando o conceito errado e ainda contaram as superfícies não planas como sendo lados.

Como nenhum grupo conseguiu atingir o objetivo, coloquei os sólidos sobre uma mesa, inclinei-a e solicitei que eles observassem o movimento dos sólidos, eles constaram que uns sólidos rolam e outros apenas deslizam, aproveitei o momento para explicar que os objetos que rolam recebem o nome de corpos redondos e os que só deslizam recebem o nome de poliedros.

Em seguida realizei cortes paralelos às bases dos sólidos, com exceção da esfera que realizei o corte passando pelo centro, e pedi que observassem as formas encontradas nas secções. Eles puderam concluir que os corpos redondos possuem secções transversais paralelas as base em forma de círculos ou circunferências e que as secções dos poliedros são polígonos.

Solicitei que tentassem descobrir diferenças e semelhanças entre as pirâmides e prismas e fui copiando o que iam dizendo na lousa, em seguida fizemos a síntese de todo o conteúdo estudado na atividade, para que os alunos realizassem o registro individual.

Figura 43 - Alguns registros da atividade - Observação e classificação de sólidos geométricos em poliedros e corpos redondos.

Fonte: Autora, 2016.

5.1.5 Atividade - **Estudando a planificação dos sólidos geométricos.**

Objetivo Geral:

- Compreender a definição de planificação dos sólidos percebendo as diferenças que os sólidos apresentam, através da observação, manipulação dos mesmos. Além de compreender a relação entre os sólidos e as figuras planas, a definição de aresta, vértice e face de sólidos geométricos e ainda a nomenclatura dos mesmos.

Objetivos Específicos:

- Apresentar a planificação de sólidos geométricos;
- Fazer com que os alunos percebam que os sólidos geométricos (tridimensionais) são formados a partir de figuras planas (bidimensionais);
- Apresentar a definição de aresta, vértice e face de um sólido geométrico;
- Explorar a nomenclatura dos sólidos;

Material Necessário:

Modelos em cartolina de prismas (cubo, paralelepípedo, prisma triangular, prisma hexagonal), pirâmides (tetraedro, pirâmide de base retangular, pirâmide pentagonal), cone e cilindro, cartolina, cola, tesoura ou estilete, papel para anotações e lápis.

Roteiro da atividade:

Esta atividade faz o caminho inverso da maioria das atividades de livros didáticos. Optamos por partir do sólido geométrico para chegar à planificação, pois iniciamos nossa oficina com a observação dos sólidos e formas presentes no nosso dia a dia, para em seguida estudarmos as propriedades e os elementos dos sólidos geométricos.

Ao entregar os sólidos geométricos aos alunos o professor poderá solicitar que os alunos realizem cortes com a intenção de descobrir como eles foram montados e quais formas geométricas foram usadas na sua construção.

Nessa atividade a linguagem matemática já deve começar a ser usada, mas com bastante cuidado para não causar confusão entre os alunos, por exemplo, “ponta = vértice”; quina= aresta; “característica = propriedade”; “igual = congruente”.

Compete ao professor explorar o máximo possível às superfícies planas que compõem os sólidos, sua nomenclatura, elementos, propriedades e aproveitar para explorar também a definição de polígono.

Recomendamos que professor aproveite o transcorrer dessa atividade para inserir a definição de planificação e dos elementos dos sólidos (arestas, faces, vértices e superfícies não planas).

Relatório da Experiência:

Ao chegar à sala de aula com os sólidos para realizar esta atividade a recepção não foi das melhores, uma aluna disse:

“De novo, aguento mais não esses sólidos”, isso me deixou triste, mas resolvi interpretar pelo lado bom o que antes eles chamavam de “coisa”, agora já tinha nome específico, sólido.

Antes de entregar os sólidos para que fossem cortados, fizemos uma revisão do que eles já vinham estudando: figuras planas e não planas; figuras unidimensionais, bidimensionais, tridimensionais; poliedros (prismas e pirâmides) e corpos redondos.

E ainda aproveitei o momento para explicar a definição de arestas, faces e vértices que até então eram mais conhecidos por dobras, lados (superfícies planas) e pontas, como objetivo de aprimorar a linguagem matemática.

Cada grupo recebeu dois ou três sólidos para serem cortados com o objetivo de obter a planificação dos mesmos. Diante da recepção percebi que eles talvez já tivessem cansados da oficina e que por isso a participação não fosse efetiva, mas ocorreu o oposto eles mostraram-se animados em cortar os sólidos para obter a planificação, todos se propuseram a realizar os cortes.

Após a exploração da definição de planificação, dos elementos dos sólidos e suas respectivas nomenclaturas, fizemos uma atividade envolvendo todos os grupos. Completamos uma tabela onde numa coluna tinha os sólidos e em outra estava faltando a planificação e vice-versa, em seguida contamos o número de arestas, vértices e faces e escrevemos o nome de cada sólido geométrico nas respectivas colunas da tabela.

Ao fim da atividade mantemos a ideia de registrar os conteúdos vistos durante a atividade.

Figura 44 - Alguns registros da atividade – Estudando a planificação dos sólidos

Fonte: Autora, 2016.

5.1.6 Atividade - **Explorando o software livre Geogebra para construção dos poliedros de Platão.**

Objetivo Geral:

- Compreender as propriedades e planificações dos poliedros de Platão, número de faces, de vértices e de arestas, além de exercitar a visualização das diferentes vistas dos sólidos, já que o Geogebra permite a movimentação do mesmo.

Objetivos Específicos:

- Entender as propriedades e planificações dos poliedros de Platão;
- Observa a relação existente entre o número de faces, vértices e arestas;
- Explorar a visualização das distintas vistas dos sólidos, uma vez que o Geogebra consente a movimentação do mesmo.

Material Necessário:

Laboratório de informática com computadores em condição de uso, software livre Geogebra previamente instalado nos computadores, Datashow, papel para anotações e lápis.

Roteiro da atividade:

A atividade deverá ser desenvolvida em laboratório de informática, com o software Geogebra previamente instalado nos computadores, tendo de preferência um computador para cada aluno ou para cada dupla. Iniciar a atividade com uma breve explanação sobre o software e sua importância no estudo da matemática, em seguida ensinar as ferramentas necessárias para construção dos sólidos de Platão, mas antes disso, é claro, que o professor já deverá ter abordado o que são os sólidos de Platão e quem foi Platão, para instigar ainda mais o interesse pela atividade.

Os alunos deverão construir os cinco sólidos de Platão, com suas devidas planificações com ou sem animação para em seguida responder a lista de atividade (anexo C), onde será explorada a nomenclatura dos sólidos, suas propriedades, sua planificação, relação entre o número de vértices, arestas e faces, caso o professor deseje ele pode introduzir o teorema de Euler.

Relato da Experiência:

Como não tínhamos computador disponível para cada aluno, decidimos por realizar a atividade em grupo, os mesmos grupos das outras atividades, o que facilitou a aprendizagem sobre algumas funções do software, pois apesar de ser o primeiro contato para eles, alguns alunos conseguiam desenvolver as tarefas sem muita dificuldade e iam ajudando os demais. Começamos ensinando o procedimento para construir o tetraedro, o cubo, o octaedro, dodecaedro e por fim o icosaedro.

À medida que iam construindo os sólidos iam também construindo as respectivas planificações com animações e respondendo a lista de atividade proposta. O problema maior detectado nessa atividade foi à impaciência dos alunos em esperar que os colegas realizassem as atividades, já que tínhamos um computador para cada cinco alunos. Mas, ao fim, todos tiveram a oportunidade de construir pelo menos um sólido usando o Geogebra. Pela primeira vez no ano eles reclamaram quando a aula acabou.

Um aluno disse: “Logo agora que tava ficando bom!”, isso nos deixou feliz, pois estávamos conseguindo motivar a aprendizagem dos alunos através de novas tecnologias.

Durante a realização das atividades percebi certo encantamento nos alunos quando eles observavam suas construções no programa, principalmente ao observarem a animação da planificação e movimentação dos sólidos, para eles tudo isso era novidade, já nunca haviam usado o computador para uma atividade de matemática.

A grande vantagem de usar as novas tecnologias é trazer a matemática para realidade dos alunos, apesar de quase todos os alunos não disporem de computador em casa. Eles se sentem fascinados em fazer uso dessa tecnologia, em poder desfrutar de algo que para muitos faz parte do cotidiano, mas que para eles é sonho, que infelizmente só pode ser usado no ambiente escolar devido suas condições financeiras.

Figura 45 - Alguns registros da atividade – Explorando o software livre Geogebra para construção de poliedros de Platão.

Fonte: Autora, 2016.

5.2 Diagnóstico Final

Ao finalizar as atividades aplicamos um novo questionário com os 30 (trinta) alunos do 6º ano C, que apresentou os resultados a seguir:

- ✓ Identificação das figuras planas.

O aprendizado neste quesito foi expressivo, pois 27 (vinte e sete) alunos identificam corretamente as figuras planas, os demais apresentaram algumas dificuldades. Significa dizer que 90% da turma consegue identificar na totalidade se uma figura geométrica é plana ou não plana.

- ✓ Nomenclatura das figuras.

Quanto à nomenclatura o aprendizado foi evidente, considerando que 26 (vinte e seis) apresentaram a nomenclatura sem nenhuma falha. Assim praticamente 87% dos alunos demostram aprendizado satisfatório.

- ✓ Dimensão de figuras.

As dimensões foram identificadas facilmente por 28 (vinte e oito) dos alunos, considerando então que 93% dos estudantes conseguiram expressar seu conhecimento a cerca da dimensão das figuras.

- ✓ Caracterização das figuras.

Neste questionamento, 23 (vinte e seis) alunos conseguiram indicar ao menos uma característica de cada figura. Então aproximadamente 77% dos alunos demostram conhecimento aceitável.

- ✓ Planificação, número de faces, vértices e arestas.

Dentre estes conhecimentos, 24 (vinte quatro) dos estudantes que responderam o questionário conseguiram identificar na totalidade estes itens em cada figura proposta, ou seja, 80% dos alunos conseguiram obter uma aprendizagem significativa desses conteúdos.

- ✓ Como o sólido geométrico é visto.

Na observação dos sólidos geométricos, 26 (vinte e seis) alunos apresentaram conhecimento satisfatório da visão espacial dos sólidos, onde praticamente 87% dos alunos alcançaram os objetivos das oficinas.

Esta experiência contribuiu para melhorar o aprendizado dos alunos participantes da oficina a respeito dos conhecimentos geométricos. Os questionários de avaliação final apresentam indícios consistentes que 57% dos alunos atingiram o nível I, 30 % atingiram o nível II, e os 13% (restante) o nível III, segundo a teoria dos Van Hiele. Precisamos salientar que para atingir esse objetivo o interesse e a participação dos alunos foram indispensáveis, o que fez com que se apropriassem de conceitos discutidos em todas as atividades propostas e realizadas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a proposta de ensino da geometria na educação básica por meio de oficinas, foi realizado estudo histórico da geometria, com ênfase nas transformações ocorridas ao longo dos anos, além de revisar a Lei de Diretrizes e Bases da Educação nº 9394/96, Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e o Plano Nacional da Educação, seguido da realização de oficinas em sala de aula.

Inicialmente uma pesquisa teórica seguida de leituras, objetivando um embasamento acerca da história da geometria, assim como as leis que regem a educação em nosso país, buscando analisar as transformações ocorridas ao longo dos anos, em se tratando do ensino de geometria nas escolas. Por meio da realidade encontrada identificamos que poucas foram as mudanças ocorridas ao longo dos anos, que os professores ainda dão maior ênfase ao ensino do bloco Números e Operações, deixando de explorar o bloco Espaço e Forma com atenção e dedicação necessária, além de fazer uso de uma metodologia pouco eficiente para aprendizagem dos alunos. Ao avaliar todos os pontos identificados chegamos a uma conclusão: que a inserção da geometria no cotidiano da sala de aula ainda está distante da realidade, até porque os professores atuais não tem uma formação com suporte para o trabalho efetivo com a geometria.

Considerando a realidade e tomando por base o ensino da geometria fundamentado na teoria dos Van Hiele, considerando seus níveis de aprendizagem, foi aplicado em sala de aula um questionário, com a finalidade de diagnosticar o nível de conhecimento dos alunos de uma turma de 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública do sertão de Alagoas. A partir da realização da análise do diagnóstico dos alunos, buscamos alternativas de atividades que amenizassem as dificuldades na aprendizagem dos conhecimentos geométricos apresentadas por esses alunos.

Dentre a sequência de atividades realizadas, primeiramente foi realizada uma excursão para visitas a supermercado, museu, igreja e praça, onde a geometria foi observada, localizada e estudada, associando cada item encontrado às diversas formas geométricas, explorando sua classificação e características. Foi impressionante observar a atenção, curiosidade e interesse desses alunos durante a excursão, em cada momento que era feita qualquer associação das formas notadas.

Ao realizar a oficina em sala de aula, as atividades foram desenvolvidas em grupo, e a cada experiência foi-se percebendo que com o desenvolvimento das atividades que a interação entre os alunos iam aumentando, o que possibilitava maior compreensão das atividades, cujo objetivo era identificar e classificar os objetos em questão, fator esse que sem dúvida contribuiu para um resultado excelente.

Para evidenciar a importância do trabalho com oficinas foi aplicado um novo questionário, onde os alunos conseguiram expressar o conhecimento adquirido explicitando um resultado muito positivo, podendo considerar que os conhecimentos da maioria dos alunos estão além dos conhecimentos expressos muitas vezes por alunos do ensino médio de escolas públicas.

A realização desta pesquisa foi excepcional para minha vida profissional, até me instiga a realizar oficinas com professores dos anos iniciais do ensino fundamental e posteriormente com os docentes dos anos finais do ensino fundamental, com o propósito de plantar uma sementinha das transformações para os processos de ensino e aprendizagem da geometria.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, E. **Como criar poliedros, planificá-los e animá-los usando o GeoGebra**. Disponível em: http://www.prof-edigleyalexandre.com/2015/08/como-criar-poliedros-planificalos-animalos-geogebra.html. Acesso em: setembro de 2015.

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. F.. **Semelhanças e diferenças: análise de atividades envolvendo objetos de diferentes dimensões.** In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. VII EPEM - Resumos. São Paulo: SBEM- São Paulo, 2004. v. 1. p. 171-171.

ANDRINI, Á; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática** 6/Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 3. ed. rev. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção praticando matemática).

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, EDUSP, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Guia do livro didático de Matemática. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Políticas de Formação, Materiais Didáticos e de Tecnologias para Educação Básica Coordenação-Geral de Materiais Didáticos. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE. Brasília. 2011.

CARDOSO, F. C. **O Ensino da Geometria e os Registros de Representação sob um enfoque Epistemológico.** IX ANPED SUL. Seminário de Pesquisa em Educação Sul, 2012.

CATTAPAN, Julio. **O teorema de Pitágoras**. Disponível em: http://chc.cienciahoje.uol.com.br/o-teorema-de-pitagoras/. Acesso em: 12 de janeiro de 2016.
D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da Teoria à Prática.** 7. Ed. Campinas: Papirus, 1991.

DUHALDE, Maria Elena e CUBERES, María Teresa Gonsález. **Encontros iniciais com a Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

FERREIRA, R. C. **ENSINANDO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA.** Enciclopédia Biosfera, Centro Científico Conhecer - Goiânia, vol.6, N.10, 2010.

FRANZONI, G. G. e FLEURY, P. A. M. ***Geometria*** – ***Tangram*** Disponível em: http://paje.fe.usp.br/~labmat/edm321/1999/geometr/tangram.html. Acesso em: 16 de janeiro de 2016.

GOMES, Carla Regina. **Pitágoras de Samos: Seu mito e sua herança científico - cultural**. Disponível em: http://www.hcte.ufrj.br/downloads/sh/sh3/trabalhos/Carla%20Regina%20 Gomes.pdf.Acesso em: 10 de dezembro de 2016.

JACOMINE, M. A. **Reprovação escolar na opinião de pais e alunos: um estudo sobre os ciclos e a progressão continuada na Rede Municipal de Ensino São Paulo**. 270 f. (tese) Doutorado – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo Poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. Niterói: UFF, 2003.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

__________. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

LOPES, J.A. O perímetro do Tangram (七巧板) e suas aplicações no desenho industrial Educação matemática em revista, março de 2009. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/9. Acesso em: 28 de janeiro de 2016.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 2. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 1995. (Coleção Formação de Professores).

LUZ, R. N. **Avaliação de Diferentes Metodologias Aplicadas ao Ensino da Geometria**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT) Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio De Janeiro, 2014.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar**: geometria euclidiana plana. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PAIVA, M. R. **Matemática: Paiva**. 2. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

PAVANELO, M. R. **O abandono do ensino de Geometria: Uma visão histórica**. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia do Ensino) Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas/SP, 1989.

RABELO, M. L. **AVALIAÇÃO EDUCACIONAL:** fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

RESUMO ESCOLAR. Tangram – Origem e lendas. Disponível em: http://www.resumoescolar.com.br/matematica/tangram-origem-e-lendas/.Acesso em: 02 de fevereiro de 2016.

SANTANA, S. **Tutorial da Construção do Tangram com a Técnica do Origam**. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=jHC6iMUa5u0. Acesso em: dezembro de 2015.

SÃO PAULO. Secretaria do Estado. Aprender vale a pena. (1998) Módulo 2. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me000539.pdf. Acesso em: 02 de fevereiro de 2016.

SILVA, A.; MARTINS, S. **Falar de Matemática hoje é ...**. Millenium – Revista do ISPV: Instituto Superior Politécnico de Viseu, sem, n. 20, out. 2000. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/20_ect5.htm>. Acesso em: 15 de setembro de 2015.

SILVA, JONAS LARANJEIRA SARAIVA DA, et al. **Matemática lúdica ensino fundamental e médio** - *Revista: Educação em Foco, mês, n. 06, maio 2013.* Disponível em: http://unifia.edu.br/revista_eletronica/revistas/educacao_foco/artigos/ano2013/matematica_ludica.pdf. Acesso em: 20 de novembro de 2015.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**: 3. São Paulo: FTD, 2013.

VILLIERS, M. de. **Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.3, 2010.

ANEXO A

PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática Universidade Federal de Alagoas - UFAL Instituto de Matemática – IM Mestranda: Claricy Alves Silva	UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Questionário de Diagnóstico		
6º ano " C"	Turno: Vespertino	___/___/2015
Aluno (a):		

1. Que importância tem a matemática para a humanidade?

____

____

2. Você sabe o que estuda a geometria? Descreva.

____

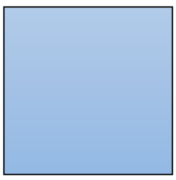
____

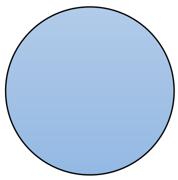
3. Alguma vez você usou software (programa de computador) durante as aulas de matemática? Descreva.

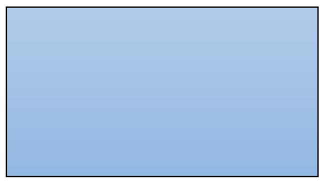
____

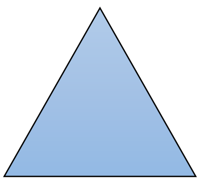
____

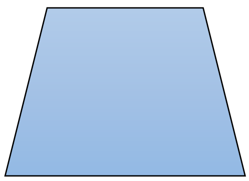
4. Dê o nome das figuras abaixo:

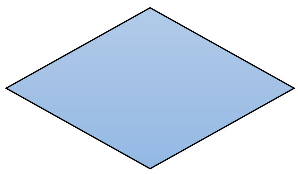
a) 

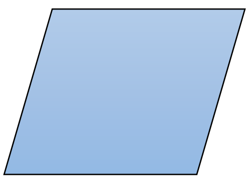
b) 

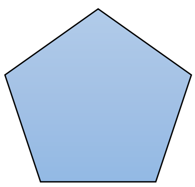
c) 

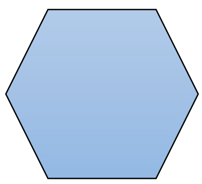
d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

- Quantas dimensões têm essas figuras? ____________________

- Quais dessas figuras você costume ver no seu dia a dia?

____

____

- Você já estudou na escola sobre essas figuras?

____

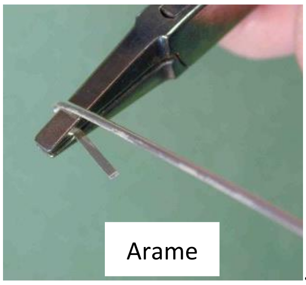
____

5. Cite as principais características de cada figura:

a) ____________________
b) ____________________
c) ____________________
d) ____________________
e) ____________________
f) ____________________
g) ____________________
h) ____________________
i) ____________________

6. Qual dos objetos abaixo compramos usando medidas de comprimento como: o quilômetro, o metro, o centímetro, entre outros?

( )



( )

( )

( )

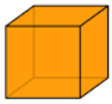
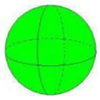
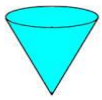
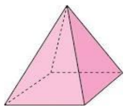
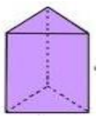
( )

( )

- Como são chamados os objetos que compramos usando medidas de comprimento?

____

7. Complete a tabela abaixo:

Figura	**Nome da figura**	**Nome do objeto que você encontra no seu cotidiano que se assemelha a essa figura**	**Partes da figura**	**Número de faces (F)** **Número de vértices (V)** **Número de arestas (A)**
A 				F = ___ V = ___ A = ___
B 				F = ___ V = ___ A = ___
C 				F = ___ V = ___ A = ___
D 				F = ___ V = ___ A = ___
E 				F = ___ V = ___ A = ___
F 				F = ___ V = ___ A = ___
G 				F = ___ V = ___ A = ___

8. Essas figuras possuem quantas dimensões?

____

- Como essas figuras são chamadas?

____

- O que é planificação?

____

- Quais das figuras são corpos redondos? Cite suas características.

- Quais figuras são poliedros? Cite suas características.

- Quais diferenças existem entre prismas e pirâmides?

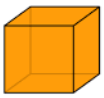
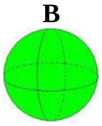
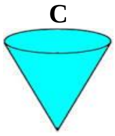
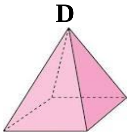
- O que são vértices?

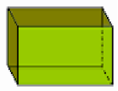
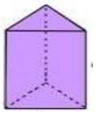
- O que são arestas?

- O que são faces?

---

9. Dos sólidos dados, desenhe de cada um deles, as vistas (como o objeto é visto):

Figura	Frente	Trás	Cima	Baixo	Lateral direito	Lateral esquerdo
A 						
B 						
C 						
D 						
E						

						
F 						
G 						

ANEXO B

	Mestrado Profissional em Matemática Universidade Federal de Alagoas - UFAL Instituto de Matemática – IM Mestranda: Claricy Alves Silva	
Atividade - Excursão a um supermercado, um museu, uma igreja e uma praça.		
6º ano " C"	Turno: Vespertino	___/___/2015
Aluno (a):		

1. Observe e fotografe as formas geométricas encontradas durante a excursão.

2. Listar os nomes das formas geométricas encontradas durante a excursão.

3. Por que latas em forma de cilindro, como as de milho, ervilha, leite condensado, entre outras, geralmente são empilhadas em pé, e não deitadas?

4. E porque embalagens no formato de paralelepípedo, como as de chocolate, leite, sucos, entre outras, podem ser empilhadas em posições diversas?

4. Quais formas geométricas foram encontradas com mais frequência nos lugares visitados?

5. Durante a excursão você viu alguma forma diferente das que costuma ver na escola? Como ela era?

6. Junte-se a três colegas e organize cartazes ou slides com as fotografias realizadas durante a excursão, dividindo-as em grupos de acordo com suas características e mostrem para seus colegas, explicando que critérios foram utilizados.

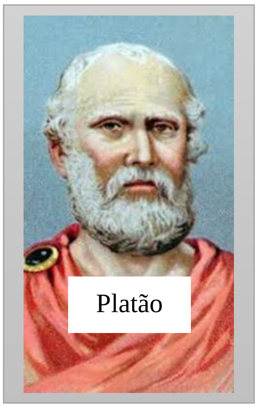
ANEXO C

PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática Universidade Federal de Alagoas - UFAL Instituto de Matemática – IM Mestranda: Claricy Alves Silva	UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Atividade - Explorando o software livre geogebra para construção dos poliedros de Platão.		
6º ano “ C”	Turno: Vespertino	___/___/2015
Aluno(a):		

Leia o texto abaixo, retirado do livro Novo Olhar Matemática, vol. 3.

Poliedros de Platão

Platão (427 a. C. – 347 a. C.) foi um filósofo grego, discípulo de Sócrates, nascido em Atenas. Em 387 a. C., após a morte de seu mestre, fundou em sua cidade natal uma escola que ficou conhecida como “Academia”. Na fachada dessa escola, podia-se ler: “Que ninguém que ignore a Geometria entre aqui”. Nessa frase, podemos observar que, apesar de Platão não ter dado contribuição significativa aos resultados matemáticos técnicos da época, ele tinha uma grande admiração pela Geometria.

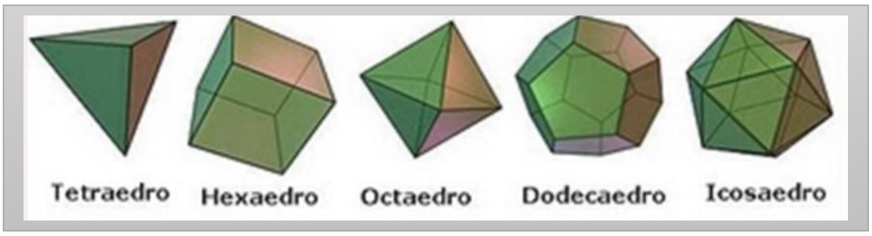


Platão

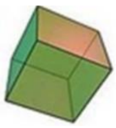
Comumente é dito que Platão passou a ter uma visão matemática por influência de um amigo, Arquitas. Acredita-se também que foi a partir daí que ele soube da existência de cinco poliedros: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Nessa época, esses poliedros eram associados aos quatro elementos considerados primordiais: ar, associado ao octaedro; terra, associado ao cubo; fogo, associado ao tetraedro; e água, associado ao icosaedro. O quinto é o último poliedro foi o dodecaedro, que Platão considerou o símbolo do universo.

Devido à sua importância, esses poliedros convexos são chamados **Poliedros de Platão**. Um poliedro de Platão satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- todas as faces têm o mesmo número de arestas
- de cada vértice parte o mesmo número de arestas
- a Relação de Euler é válida (número de vértices mais número de faces é igual ao número de arestas mais dois)



1. Complete a tabela abaixo:

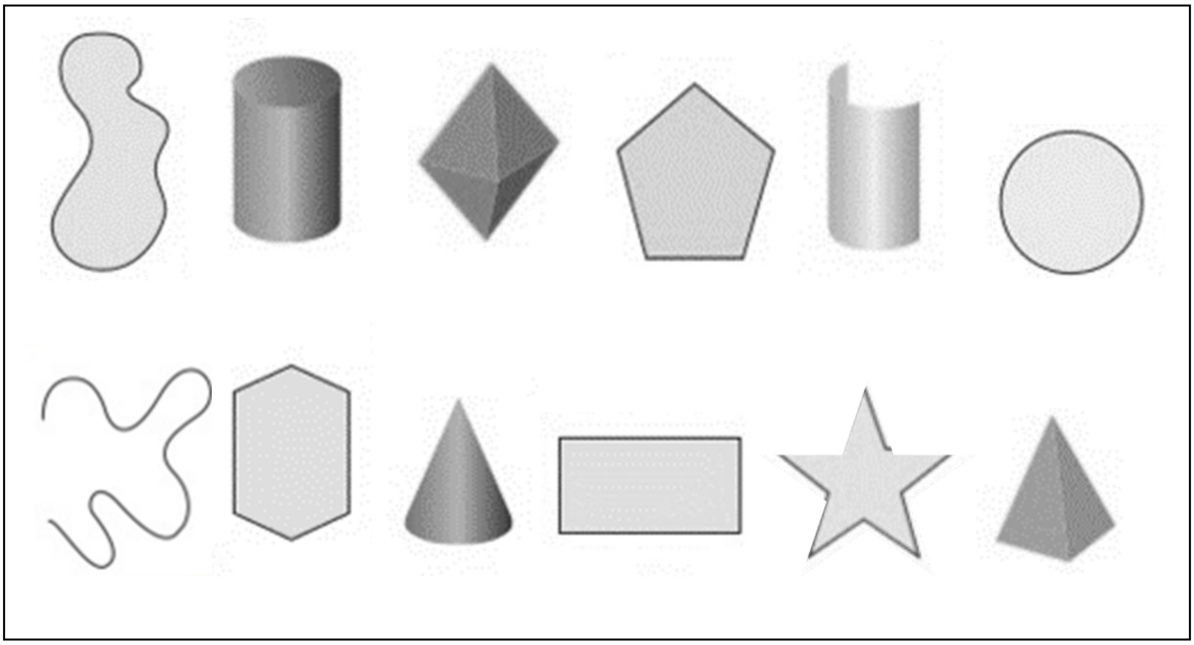
Sólidos de Platão	Nomenclatura	Polígonos das faces	Número de vértices (V)	Número de faces (F)	Número de arestas (V)
					
					
					
					
					

2. Assinale as alternativas verdadeiras.
(   ) Existem 5, e somente 5, classes de poliedros de Platão.
(   ) O cubo também pode ser chamado de hexaedro.
(   ) O paralelepípedo é um poliedro de Platão.
(   ) As pirâmides de base quadrada são exemplos de poliedro de Platão.
(   ) A relação de Euler é válida somente para poliedros platônicos.

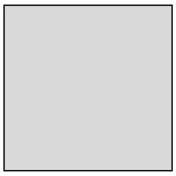
ANEXO D

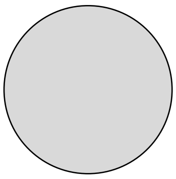
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática Universidade Federal de Alagoas - UFAL Instituto de Matemática – IM Mestranda: Claricy Alves Silva	UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Questionário de Diagnóstico Final		
6º ano “ C”	Turno: Vespertino	___/___/2015
Aluno(a):		

1. Circule as figuras planas que aparecem abaixo:

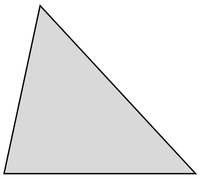


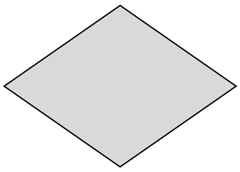
2. Dê o nome das figuras abaixo:

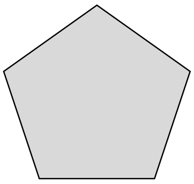
a) 

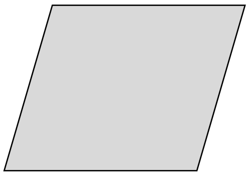
b) 

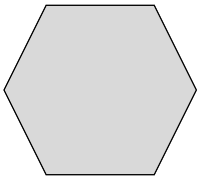
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

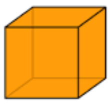
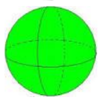
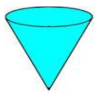
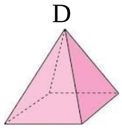
h) 

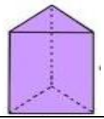
- Quantas dimensões têm essas figuras? ___________________________________

3. Cite as principais características de cada figura:

a) ____
b) ____
c) ____
d) ____
e) ____
f) ____
g) ____
h) ____
i) ____

4. Complete a tabela abaixo:

Figura	Nome da figura	Nome do objeto que você encontra no seu cotidiano que se assemelhas a figura	Partes da figura	Número de faces (F) Número de vértices (V) Número de arestas (A)
A 				F = ___ V = ___ A = ___
B 				F = ___ V = ___ A = ___
C 				F = ___ V = ___ A = ___
D 				F = ___ V = ___ A = ___
E 				F = ___ V = ___ A = ___
F 				F = ___ V = ___ A = ___
G				F = ___ V = ___ A = ___

- Esses sólidos possuem quantas dimensões? Como são chamadas as figuras que possuem essa quantidade de dimensões?

____

- Quais sólidos são corpos redondos? Cite suas características.

____

____

- Quais sólidos são poliedros? Cite suas características.

____

____

- Quais diferenças existem entre prismas e pirâmides?

____

____

- O que são vértices?

____

____

- O que são arestas?

____

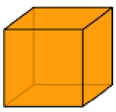
____

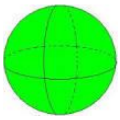
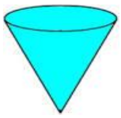
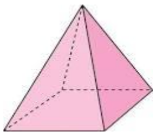
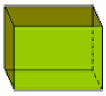
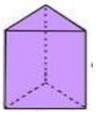
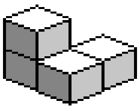
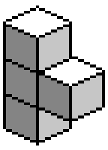
- O que são faces?

____

____

5. Dos sólidos dados, desenhe de cada um deles, as vistas (como o objeto é visto):

Figura	**Frente**	**Trás**	**Cima**	**Baixo**	**Lateral direita**	**Lateral esquerda**
A 						

B 						
C 						
D 						
E 						
F 						
G 						
H 						
I 						

ANEXO E

Descobrindo o teorema de Pitágoras

1. Um breve histórico sobre o teorema de Pitágoras e da Escola Pitagórica

Existem várias formas de se enunciar o famoso teorema de Pitágoras, claro que todas elas com o mesmo sentido, mas cada autor usa a linguagem que acredita ser a melhor.

Segue um dos enunciados, talvez o mais claro: “A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos”. (LIMA, 2012, p. 59-60).

A esse respeito Cattapan (2015, p. 4) afirma que:

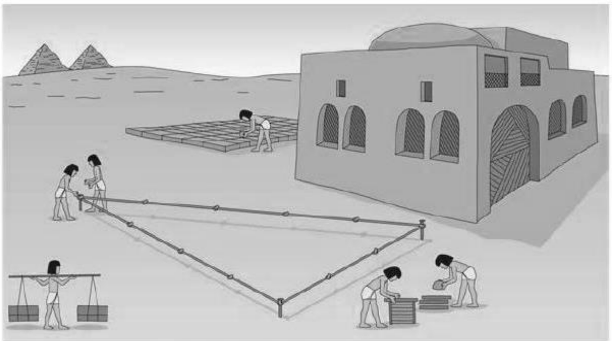
> A maior descoberta de Pitágoras foi o teorema que leva seu nome, ensinado hoje em escolas de todo o mundo. Ao observar os triângulos retângulos (que têm um ângulo de 90 graus, chamado ângulo reto), o filósofo notou que eles obedecem a uma lei matemática. A soma dos quadrados dos catetos (lados menores do triângulo) é igual ao quadrado da hipotenusa (lado maior): $a^2 + b^2 = c^2$.

Na verdade esse famoso teorema já era a usado bem antes de Pitágoras, acredita-se que os pitagóricos na verdade fizeram a primeira demonstração do teorema, por isso que ele recebeu o nome de teorema de Pitágoras.

Segundo historiadores existem comprovações que egípcios e babilônios, já tinham conhecimento de alguns casos específicos desse teorema. Para determinar um ângulo reto os egípcios usavam um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 unidades.

Os egípcios usavam também uma corda marcada com 13 nós, cada nó tinha a mesma distância um dos outros, prendiam a corda no solo com estacas no 1º, 4º, 8º e finalmente prendiam o 13º nó, no mesmo local do primeiro, formando assim um triângulo retângulo, esse cálculo era bastante usado para marcar as terras.

Figura - Egípcios medindo a terra



Fonte: Livro Praticando a Matemática (6º ano).

Segundo Lima (2012, p. 60):

> Há também um manuscrito chinês, datando de mais de mil anos antes de Cristo, onde se encontra a seguinte afirmação: “Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa”. Outros documentos antigos mostram que na Índia, bem antes da era Cristã, sabia-se que os triângulos de lados 3, 4, 5 ou 5, 12, 13, ou 12, 35, 37 são retângulos.

O teorema de Pitágoras teve grandes admiradores, mas sem dúvida o professor de Matemática da cidade de Cleveland, Ohio (Estados Unidos), foi o maior deles, durante mais de 20 anos ele colecionou demonstrações do famoso teorema. No ano de 1927 ele publicou o livro “The Pythagorean Proposition” com 230 demonstrações do teorema, 13 anos após ele publicou a segunda edição do livro com 370 demonstrações.

Lima (2012, p. 59):

> O professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas “algébricas” (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas “geométricas” (baseadas em comparações de áreas).

Existem muitas dúvidas a respeito da demonstração feita pelo próprio Pitágoras, uma vez que não existem documentos que comprovem, mas a grande maioria dos historiadores acredita que ele fez uma demonstração do tipo “geométrica”.

De acordo com Gomes (2015, p. 2) por meio de 540 a. C. Pitágoras constituiu, na cidade de Crotone, a Escola Pitagórica, igualmente apreciada como Irmandade Pitagórica, que agrupou diversos discípulos empenhados no estudo da aritmética (no que concerne a Teoria dos Números), “da Geometria, da Astronomia e da Música, que eram um grupo de matérias da *Escola* e que posteriormente foi chamado de *quadrivium”*.

Nesse contexto a Escola era assinalada por ser uma corporação sigilosa, que continha um código de comportamento rígido, onde os seus componentes perpetravam uma promessa de não mostrar as descobertas científicas da corporação, que eram consagradas ao seu criador, com a penalidade de morte para os discípulos que não cumprisse seu juramento. A Escola tinha como características o conservadorismo, além de ser uma escola comunitária, onde os seus componentes eram vegetarianos, era também uma sociedade religiosa, onde as divindades eram os números inteiros.

Nessa perspectiva Boyer (1996, apud GOMES, 2015, p. 3) enfatiza que:

> O lema da *Escola* era "*Tudo é número*" e para eles a Matemática se relacionava mais com a sabedoria do que com as exigências da vida prática O símbolo da *Irmandade* era o *pentagrama* (insígnia que identificava os pitagóricos), ou seja, um pentágono regular estrelado, formado ao se traçar as diagonais da face pentagonal de um dodecaedro regular. (grifo do autor)

Os membros da Escola acreditavam que as analogias em meio aos números manifestariam segredos do universo e colocaria o indivíduo mais perto dos deuses.

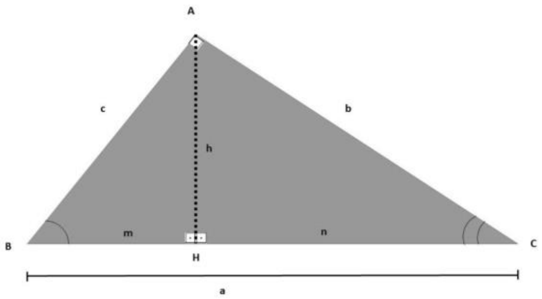
2. Algumas demonstrações do teorema de Pitágoras

Apresentaremos a seguir algumas demonstrações do teorema de Pitágoras, presentes na obra de LIMA (2012).

- ***A prova mais curta*** (conhecida também como demonstração clássica)

Essa demonstração é feita através de semelhança de triângulos retângulos, ou como é conhecida por muitos como relações métricas no triângulo retângulo, que é consequência da semelhança de triângulos.

Consideremos o seguinte triângulo abaixo.



a é hipotenusa

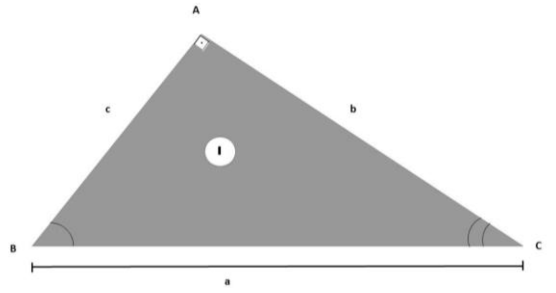
b e ***c*** são catetos

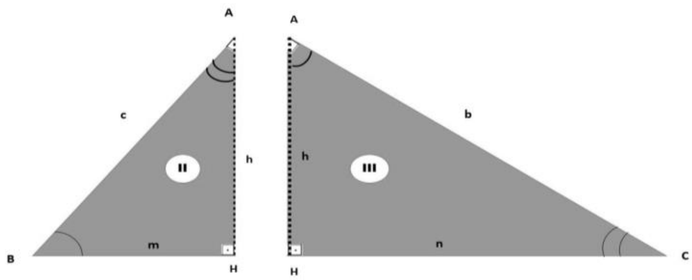
h é a altura relativa à hipotenusa

m é projeção do cateto ***c***

n é projeção do cateto ***b***

Decompondo o triângulo a partir da altura relativa à hipotenusa obtemos os seguintes triângulos semelhantes, pelo caso AA (ângulo- ângulo):





Fazendo as razões de semelhança nos triângulos I e II, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \quad \rightarrow \quad c^2 = a.m \quad (i)$$

Agora nos triângulos I e III:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \quad \rightarrow \quad b^2 = a.n \quad (ii)$$

Somando membro a membro as igualdades (i) e (ii), obtemos:

$$c^2 + b^2 = a.m + a.n \implies c^2 + b^2 = a\,.(m + n)$$

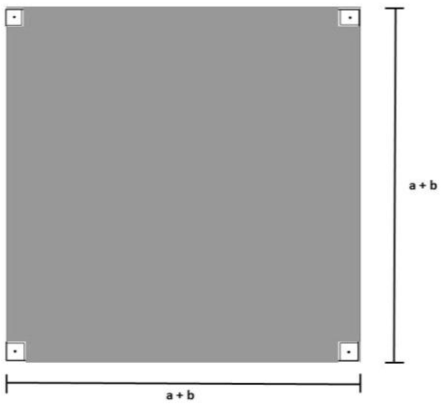
Como $a = (m + n)$, concluímos que

$$\boldsymbol{c^2 + b^2 = a^2}$$

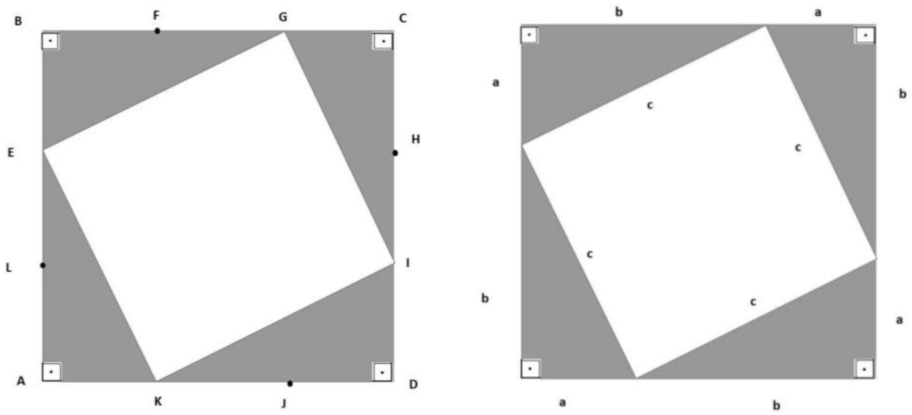
- ***A mais bela de prova***

Muitos historiadores acreditam que essa é a verdadeira demonstração de Pitágoras, ou que pelo menos essa foi sua linha de pensamento. Essa demonstração é feita através da comparação de áreas e quase que não exige conhecimentos prévios o que facilita a aprendizagem dos alunos. Ela pode ser feita com material concreto (cartolina, emborrachado ou chapa de madeira) para que os alunos possam observar e manipular as peças, o que facilita aprendizagem.

Consideremos o quadrado abaixo de lado (a + b).



Para comprovamos o teorema de Pitágoras, precisamos dividir a figura do seguinte modo:



Onde $\overline{AK} = \overline{DI} = \overline{CG} = \overline{BE} = a$, $\overline{KD} = \overline{IC} = \overline{GB} = \overline{EA} = b$ e $\overline{EK} = \overline{KI} = \overline{IG} = \overline{GE} = c$.

Sabemos que a área do quadrado ABCD é igual a soma das áreas dos quatro triângulos cinzas com o quadrado EGIK, branco.

Fazendo a equivalência das áreas obtemos:

$$(a+b)^2 = \frac{b.a}{2}.4 + c^2$$

Desenvolvendo a igualdade

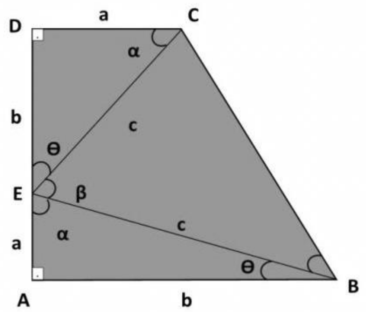
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ba + c^2$$

Logo,

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$$

- ***A demonstração do presidente***

Essa demonstração elaborada por James Abram Garfield, o vigésimo presidente dos Estados Unidos, que além de advogado e militar tinha grande interesse pela matemática. A demonstração dele também é baseada na comparação de áreas.



Temos que a área do trapézio retângulo ABCD é igual a soma das áreas dos triângulos ABE, BCE, CDE, também retângulos, fazendo a equivalência das áreas, obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{(a+b).(a+b)}{2} = \frac{b.a}{2}.2 + \frac{c^2}{2}$$

Desenvolvendo a igualdade,

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{2} = \frac{2ab+c^2}{2}$$

Portanto,

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$$

3. Oficina: Teorema de Pitágoras e balança dois pratos

Objetivo:

Demonstrar o teorema de Pitágoras de forma simples e ao mesmo tempo dinâmica, através do uso de material concreto e manipulável fazendo uso da comparação do “peso” e volume de caixas retangulares, cujas medidas são lados de um triângulo retângulo.

Material necessário:

- 1 caixa de vidro com comprimento *a* e altura *a* igual a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, confeccionada com vidro 4 mm;
- 1 caixa de vidro com comprimento *b* e altura *b* igual a medida de um dos catetos do mesmo triângulo retângulo, confeccionada com vidro 4 mm;
- 1 caixa de vidro com comprimento *c* e altura *c* igual a medida do outro cateto do triângulo retângulo, confeccionada com vidro 4 mm;
- 1 caixa de vidro com comprimento *a* e altura *a* igual a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, confeccionada com vidro 4 mm nas faces quadradas, 5 mm na base e 6 mm nas demais faces;
- Areia suficiente para encher as caixas;
- Balança de dois pratos.
- Papel e caneta para anotações.

Lembrete: as caixas devem ter a mesma espessura e devem ser confeccionadas com o mesmo material. Nesse experimento usei as medidas de um triângulo retângulo com 15 cm, 12 cm e 9 cm.

Público alvo:

Alunos do 9º ano do ensino fundamental

Conteúdos:

- Teorema de Pitágoras;
- Definição e cálculo de área e volume de blocos retangulares;
- Equação;
- Desigualdade triangular;
- Teorema de Tales.

Preparação da oficina:

O objetivo desse experimento era demonstrar o teorema de Pitágoras, através do "peso" (medida de massa) de caixas retangulares, usando uma balança de dois pratos, para isso foi necessário construir as caixas no seguinte formato:

Figura - Caixas retangulares A, B e C.

Fonte: Autora, 2016.

Tabela - Medidas das caixas retangulares A, B e C.

Caixa	Comprimento (cm)	Altura (cm)	Largura (cm)
A	15	15	4
B	12	12	4
C	9	9	4

Fonte: Autora, 2016.

Observação: todas as caixas foram confeccionadas com vidro da mesma espessura, 4 mm.

Antes de usar a balança para comparar as massas, optamos por fazer a comparação do volume, do seguinte modo: primeiro foram cheias as caixas B e C com areia e depois colocamos a areia na caixa A, verificando assim que a quantidade de areia que cabe na caixa A é a mesma quantidade que cabe nas caixas B e C juntas, veja:

Figura - Enchimento das caixas com areia.

Fonte: Autora, 2016.

Em seguida calculamos o volume das três caixas.

Tabela - Volume das caixas retangulares A, B e C.

Caixa	Volume (cm³)
A	15 x 15 x 4 = 900
B	12 x 12 x 4 = 576
C	9 x 9 x 4 = 324

Fonte: Autora, 2016.

Assim comprovamos matematicamente que:

Volume de A = Volume de B + Volume de C

Só que o objetivo aqui não era esse, mas sim provar através da balança de dois pratos, que o "peso" da caixa A era igual "peso" das caixas B e C juntas, através do uso da balança de dois pratos. Para isso colocamos a caixa A totalmente cheia com areia em um dos pratos da balança e no outro prato as caixas B e C, também totalmente cheias, nos deparamos com um problema, a balança não ficou equilibrada, melhor dizendo, o "peso" da caixa A não é menor ao "peso" das caixas B e C, juntas.

Figura - Comparação do "peso" da caixa A, com as caixas B e C, juntas, todas com areia.

Fonte: Autora, 2016.

Precisávamos justificar o porquê da desigualdade verificada na balança, uma vez que já havíamos comprovado que a caixa A tem o mesmo volume que as caixas B e C, juntas, a única justificativa para isso seria a quantidade de vidro usado na confecção das caixas, uma vez que todo o vidro usado tem a mesma espessura.

Necessitamos agora analisar a quantidade de vidro necessária para confeccionar as caixas, veja:

Tabela - Quantidade de vidro necessário para confeccionar as caixas A, B e C.

Caixa	Quantidade de vidro dos quadrados (área)	Quantidade de vidro restante (área)	Quantidade de vidro total (área)
A	15 x 15 x 2 = 450 cm²	15 x 4 x 3 = 180 cm²	630 cm²
B	12 x 12 x 2 = 288 cm²	12 x 4 x 3 = 144 cm²	432 cm²
C	9 x 9 x 2 = 162 cm²	9 x 4 x 3 = 108 cm²	270 cm²

Fonte: Autora, 2016.

Analisando a tabela constatamos que a quantidade de vidro necessário para confeccionar a caixa A é menor que a quantidade de vidro necessário para confeccionar as caixas B e C juntas, fato que justifica o desequilíbrio mostrado na balança. Ainda analisando a tabela podemos constatar que a quantidade de vidro necessária para fazer os quadrados da caixa A é igual à quantidade de vidro necessário para fazer os quadrados das caixas B e C, juntas.

Como a diferença está na quantidade de vidro necessário para fazer as demais faces, uma alternativa para eliminar essa diferença, constatada na balança, seria igualar o "peso" dos vidros dessas faces em relação às mesmas faces dos quadrados B e C.

Sendo x a espessura do vidro das faces restantes da caixa A e y a espessura do vidro das faces restantes das caixas B e C, precisamos ter:

$$180x = 144y + 108y$$

$$180x = 252\,y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{5}$$

Assim concluímos que podemos usar uma espessura qualquer de vidro para as faces quadradas de ambas as caixas e que a espessura do vidro das faces restantes da caixa A está para espessura do vidro das faces restantes das caixas B e C assim como 7 está para 5.

Mas essa construção não foi possível, pois as vidraçarias da cidade (Santana do Ipanema/AL) não dispõe de vidro de 7 mm, os proprietários alegam que não existe. Diante dessa impossibilidade decidimos por manter o tipo de vidro das caixas B e C (manter o mesmo "peso") e tentar aproximar o máximo possível o "peso" das demais faces (lateral direita, esquerda e base) da caixa A com as demais faces das caixas B e C, juntas, com a condição de usar espessura de vidro apenas inteiras, pois não existe vidro com espessuras decimais. Por inspeção, obtemos a melhor aproximação que foi com face lateral direita e esquerda com vidro de 6 mm e base com vidro de 5 mm, assim obtemos a melhor aproximação para o "peso" das caixas.

Por fim enchemos a nova caixa (substituta da caixa A), as caixas B e C e colocamos na balança do seguinte modo:

Figura - Comparação do "peso" da caixa A, com as caixas B e C, juntas, todas com areia.

Fonte: Autora, 2016.

Ainda é perceptível o desiquilíbrio da balança, mas não tão evidente quanto à primeira medição, apesar de não conseguimos igualar os "pesos" da caixa A com os pesos das caixas B e C, juntas, conseguimos algo ainda mais importantes que foi abrir campo para exploração de outros conteúdos que não estavam previstos no início da oficina, como: o cálculo de área e volume, cálculo de desigualdade triangular e teorema de Tales. do volume de blocos retangulares.

Roteiro da oficina:

1ª provocação: Quais caixas tem o maior volume: a caixa A ou as caixas B e C, juntas?

Dar uma dica: usar o triângulo de vidro para mostrar como as caixas foram construídas, enfatizar que o triângulo usado é retângulo.

Caso o professor acredite ser necessário, ele deve realizar uma revisão dos conteúdos ângulos e triângulos, dando ênfase aos triângulos retângulos.

Dificilmente os alunos levarão em consideração as medidas das caixas, muitos irão dar palpites baseados apenas na visualização dos objetos.

2ª provocação: Como podemos fazer a comparação dos volumes usando apenas a areia?

Esperar que os alunos reflitam e expressem suas opiniões.

Continuar o experimento da areia sem usar a balança, apenas mostrando que a areia usada para encher a caixa maior enche completamente as outras duas caixas (ou vice-versa).

O experimento irá apontar que o volume da caixa A é igual ao volume das caixas B e C, juntas.

3ª provocação: Qual o volume das caixas A, B e C?

Revelar as dimensões do triângulo de vidro e a largura das caixas para que os alunos efetuem os cálculos referentes ao volume das caixas, solicitar que façam os registros no caderno.

Ensinar como se calcula o volume de paralelepípedos, caso necessário. Os alunos devem concluir através da equivalência de volume que o volume da caixa A é igual ao volume das caixas B e C, juntas.

É interessante aproveitar o momento para explicar que devido às caixas terem a mesma largura, as únicas medidas que podem variar o volume é a medida das faces quadrangulares.

4ª provocação: Se as medidas do triângulo usado como gabarito fossem a, b e c, sendo "a" a maior delas (hipotenusa), o que nos mostra o experimento?

Espera-se que os alunos obtenham a seguinte conclusão:

Sabemos que o volume de areia na caixa maior é igual ao volume de areia nas caixas menores, ou seja

$$4a^2 = 4b^2 + 4c^2$$

Dividindo todos os termos da igualdade por 4, obtemos

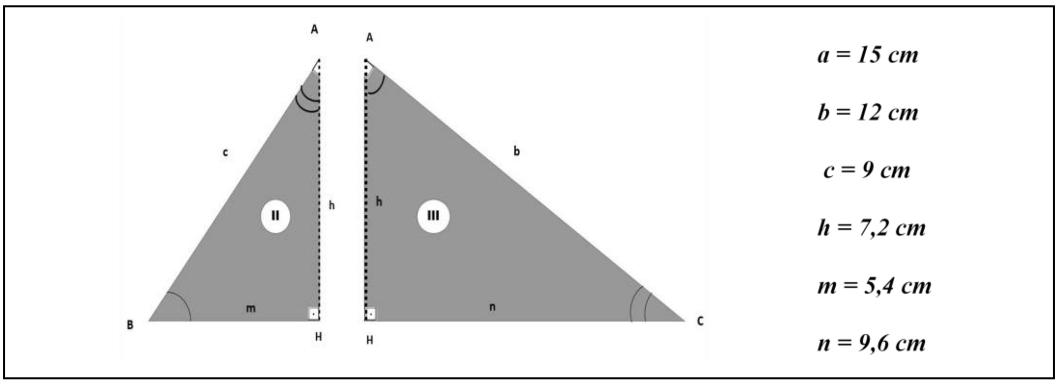
$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

esse resultado é o famoso teorema de Pitágoras. Enfatize que vale para todos os triângulos retângulos.

5ª provocação: Verifiquem se o teorema de Pitágoras vale no triângulo de lados 9, 12 e 15.

Resposta: calculando temos $15^2 = 9^2 + 12^2$, assim concluímos que o triângulo é retângulo.

Apresente a divisão desse triângulo em outros dois a partir da altura relativa à hipotenusa, conforme figura abaixo.



6ª provocação: Verifiquem o teorema de Pitágoras para esses outros dois triângulos retângulos, para tanto, usa-se uma régua para medir os lados. Guardem esses valores para depois.

Resposta: espera-se que todos percebam a validade do teorema de Pitágoras.
Em seguida, formalize o teorema: *"A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos"*.

7ª provocação: Voltando as caixas, se enchermos todas com areia e colocarmos na balança, será que as caixas B e C, juntas, têm o mesmo peso da caixa A?
Esperar alunos darem suas opiniões, apesar de acreditar que eles darão uma resposta afirmativa, influenciados pela demonstração anterior (2ª provocação).
Ao colocarmos a caixa A em um prato da balança e as caixas B e C no outro prato eles perceberão que a balança não ficou em equilíbrio, logo a resposta correta é *não*.

8ª provocação: Como pode a balança não está em equilíbrio se nos dois pratos há a mesma quantidade de areia?
Espera-se que os alunos suspeitem que a quantidade de vidro necessária para produzir a caixa A seja diferente da quantidade necessária para produzir as caixas B e C, juntas, visto que em ambos os pratos se tem a mesma quantidade de areia.
Explique que isso acontece porque as caixas B e C, juntas, possuem mais vidro que a caixa A.
Refaça a experiência sem areia para constatar que a balança se comportará da mesma forma.
Esse momento é oportuno para trabalhar a ideia de conservação do volume, por exemplo, se um sólido é decomposto em sólidos menores então a soma dos volumes dos sólidos menores é igual ao volume do sólido maior, conhecimento bastante simples para nós professores, mas não tão claro para os alunos. Também esclarecer que isso não acontece com a área total desses sólidos.
Solicitar que os alunos calculem a quantidade de vidro necessário para construir cada caixa conforme tabela abaixo.

Caixa	Quantidade de vidro dos quadrados (área)	Quantidade de vidro restante (área)	Quantidade de vidro total (área)
A	15 x 15 x 2 = 450 cm²	15 x 4 x 3 = 180 cm²	630 cm²
B	12 x 12 x 2 = 288 cm²	12 x 4 x 3 = 144 cm²	432 cm²
C	9 x 9 x 2 = 162 cm²	9 x 4 x 3 = 108 cm²	270 cm²

9ª provocação: O que podemos concluir ao saber que a área total da superfície da caixa maior é menor do que a soma das áreas totais das outras caixas?

Dica: monte a desigualdade considerando as medidas a, b e c das caixas. O professor deve levar os alunos a compreender a desigualdade triangular.

Resposta:

$$2a^2 + 3x4a < 2b^2 + 3x4b + 2c^2 + 3x4c$$

$$2a^2 + 12a < 2(b^2+c^2) + 12(b + c), \text{ mas } a^2 = b^2 + c^2$$

$$12a < 12(b + c), \text{ dividindo tudo por doze, } a < b + c$$

Esse resultado é chamado de desigualdade triangular.

10ª provocação: Verifiquem a desigualdade triangular no triângulo (9, 12, 15). Enfatize que essa desigualdade vale para qualquer triângulo.

Resposta: $9 < 12 + 15$; $12 < 9 + 15$ e $15 < 9 + 12$

Formalizar e explorar o conceito de desigualdade triangular: a medida de um lado de qualquer triângulo é menor do que a soma das medidas dos outros lados.

Enfatizar que, a balança ficou desigual (sem estar em equilíbrio) por conta da desigualdade triangular, mas existe uma forma de evitar esse problema. Antes disso...

11ª provocação: O que acontece se sobrepuser os três triângulos de vidro apresentados na 5ª provocação?

Resposta: apresentarão bases paralelas e os segmentos definidos pelas retas que suportam essas bases, definem nos lados dos triângulos segmentos proporcionais.

É fácil ver o paralelismo, mas para ver a proporcionalidade, retome os valores dos lados dos triângulos (essas medidas foram guardadas na 5ª provocação) e efetue as razões para verificar as igualdades.

Agora é vez de explorar o Teorema de Tales e suas aplicações (formalizar: retas transversais definem segmentos proporcionais sobre retas paralelas).

De certo modo, o Teorema de Tales resolve o problema da balança, pois se o “segredo” é respeitar a proporção, uma caixa maior tem de possuir um vidro de espessura maior.

Repetir a experiência na balança com a caixa de vidro mais grosso.

12ª provocação: Que cuidados devemos ter na confecção da nova caixa para não alteramos a quantidade de areia que cabe na caixa (volume interno)?

Fazer com que os alunos percebam que se mantivermos a forma de confecção das caixas seu volume interno, irá diminuir, pois é necessário deixar a diferença entre a espessura do vidro das faces quadrangulares e das faces retangulares para fora da caixa.

ANEXO F

Os mistérios do Tangram

1. Um breve histórico sobre a origem do Tangram

O tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa, composto por sete figuras geométricas planas: dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo, essas peças recebem o nome de tans. Estima-se que com essas peças é possível montar mais de 1700 figuras distintas, dentre elas animais, plantas, pessoas, objetos diversos, formas geométricas e símbolos.

Esse quebra-cabeça é conhecido entre os chineses por **"Tch'i Tch'iao pan"**, e significa "Tábuas das Sete Sabedorias" ou "tábua das sete sutilezas", temos registro que a referência mais antiga do tangram é de um livro chinês publicado em 1803, apesar de alguns autores relatarem o surgimento entre os anos de 960 e 1279 d.C., mas acredita-se que só chegou a Europa no começo do Século XIX.

Há relatos que os chineses usavam o tangram como um teste para auxiliar nos estudos sobre a inteligência dos humanos.

Existe uma infinidade de lendas sobre o surgimento do tangram, uma delas conta que: um monge chinês deu uma tarefa a seu discípulo, pediu que ele fosse percorrer o mundo em busca de ver e relatar todas as belezas que nele existe, assim deu para ele um quadrado de porcelana e vários objetos para que pudesse registrar o que encontrasse. Muito descuidado seu discípulo deixou a porcelana cair, essa se dividiu em sete pedaços em forma de triângulos, quadrado e paralelogramo. Ao tentar juntar as peças, ele notou que poderia construir todas as maravilhas do mundo.

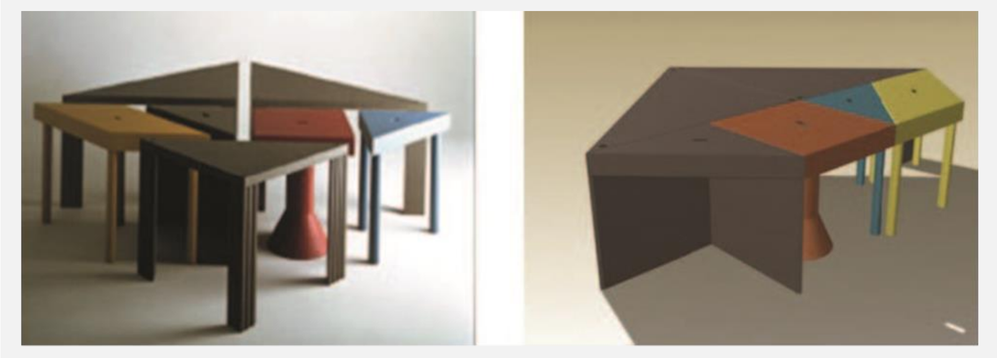
Outra lenda conta que um chinês deixou cair no chão um pedaço de espelho quadrado, o qual se quebrou em sete pedaços. Para sua surpresa, com os cacos do espelho ele poderia dar origem a várias formas conhecidas, como animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas, entre outras. Precisamos admitir que apesar de não termos convicção da veracidade dessas lendas, elas tornam a história do tangram mais atraente aos leitores, em especial as crianças.

A construção deste jogo milenar pode ser feita por meio de dobraduras, papel quadriculado, materiais como régua e compasso ou softwares matemáticos como o Geogebra.

Esse jogo pode ser confeccionado em vários tipos de material como: papel sulfite, cartolina, emborrachado (E.V.A), acrílico, madeira, isopor, entre outros.

Além de muito usado pelos professores de matemática, o tangram também encontrou admiradores na área de designer e arquitetura, em 1983 o designer italiano Massimo Morozzi criou uma mesa modular cujos tampos têm o formato das peças do tangram, nessa criação é possível usar a mesma mesa para atender a necessidades diversas de seus usuários.

Figura - Mesa modular criada pelo designer italiano Massimo Morozzi, em 1983.



Fonte: https://matematicalidades.wordpress.com/2011/09/26/o-tangram-no-design-decoracao-e-na-arquitetura/.

Já o designer Daniele Lago, desenvolveu em 2002 uma estante tangram que pode ser montada de acordo com as conveniências e o gosto do cliente, conforme figura abaixo.

Figura - Modelos de estantes idealizadas pelo design Daniele Lago, em 2002.

Fonte: https://matematicalidades.wordpress.com/2011/09/26/o-tangram-no-design-decoracao-e-na-arquitetura/.

Há relatos que grandes escritores e pesquisadores teriam adquirido um exemplar do jogo com o objetivo de estimular a imaginação e o lado criativo, entre eles está Lewis Carol, o autor de “Alice no país das maravilhas” Lewis Carol e o poeta e crítico literário Edgar Alan Poe.

1. Oficina: Desvendando os mistérios da matemática com o tangram, origami e geogebra.

Justificativa:

Esta oficina foi planejada para ensinar a geometria de maneira dinâmica e criativa, buscando assim melhorar a visão dos alunos em relação à matemática e favorecendo uma aprendizagem significativa.

Sugestões de conteúdos que podem ser explorados:

- Identificação de figuras geométricas planas;
- Composição e decomposição de figuras geométricas;
- Conceito de área e perímetro de figuras planas;
- Semelhança de triângulos;
- Ângulos, retas paralelas e ponto médio;
- Representação de frações;
- Teorema de Pitágoras;
- Números irracionais;
- Simetria;
- Porcentagem;

Objetivo:

- Desenvolver a criatividade e raciocínio lógico dos discentes;
- Favorecer uma aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos através da ludicidade;
- Inserir a história da matemática, o material concreto e as novas tecnologias nas aulas de matemática;

Público alvo:

Estudantes do ensino fundamental I (6º ao 9º ano)

Atividade 1: **Um pouco da história do Tangram**.

1) Entregar para os alunos uma cópia com a seguinte lenda do tangram.

Lenda do Tangram

"Conta a lenda que um jovem chinês despedia-se de seu mestre, pois iniciara uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse:

- Com esse espelho você registrará tudo que vir durante a viagem, para mostrar-me na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

- Mas mestre, como, com um simples espelho, poderei eu lhe mostrar tudo o que encontrar durante a viagem?

No momento em que fazia esta pergunta, o espelho caiu-lhe das mãos, quebrando-se em sete peças.

Então o mestre disse:

- Agora você poderá, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.

Solicitar que todos leiam e em seguida fazer alguns questionamentos como:

- O que vocês acharam da história?
- Vocês acreditaram na lenda do tangram?
- Vocês conhecem alguma maneira de obter as peças do tangram?
- Vocês já viram algum objeto construindo usando as peças do tangram?

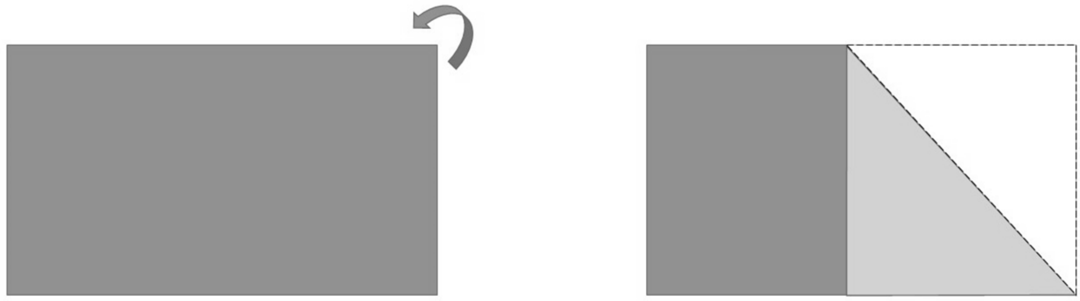
Espera-se nessa atividade despertar a curiosidade dos discentes sobre o tangram, estimular o pensamento crítico, a criatividade e o raciocínio dos mesmos.

Atividade 2**: Tangram e origami uma mistura perfeita!**

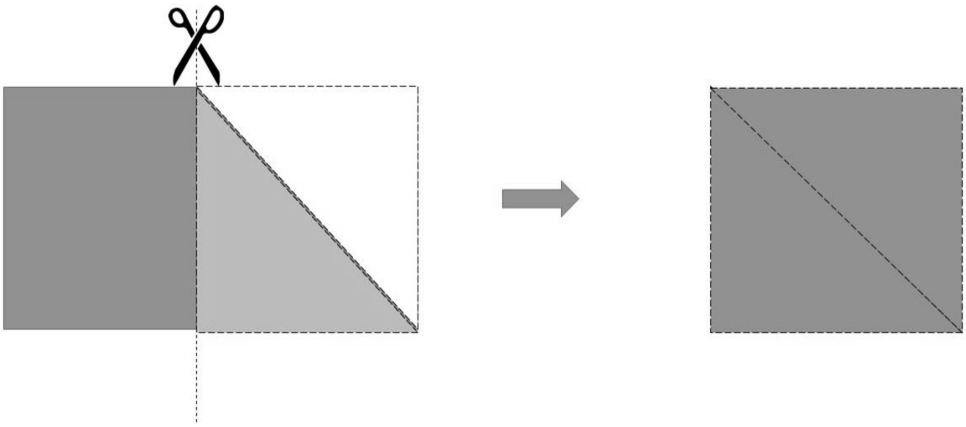
Nessa atividade os discentes terão a oportunidade de trabalhar com o material concreto, o que facilita o manuseio, a observação das formas presentes e suas características. A técnica de confecção do tangram através do Origami, que será apresentada abaixo é baseada nas instruções do Professor Ronald Santana.

Ensinar as técnicas de construção do tangram através do origami.

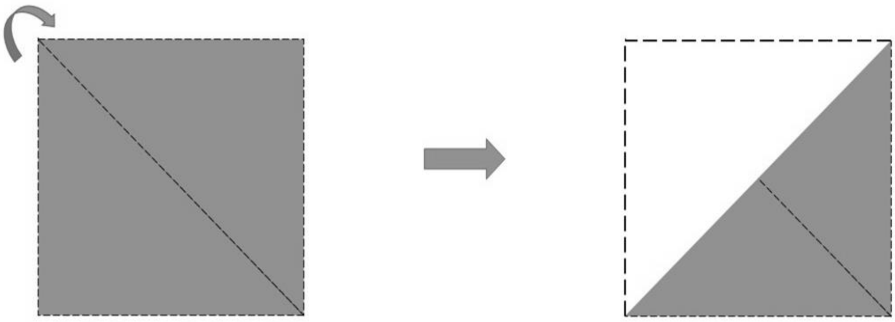
1º passo: Dobre uma das pontas da folha de papel A4, conforme modelo a seguir.



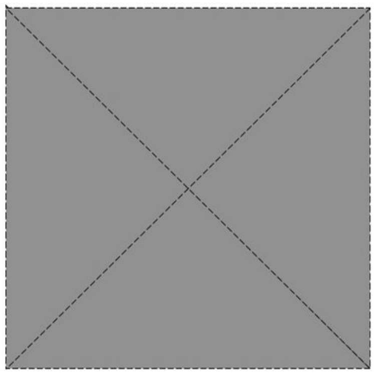
2º passo: Recorte, no local indicado, e separe o triângulo do retângulo. Abra o triângulo e observe a figura que se forma.



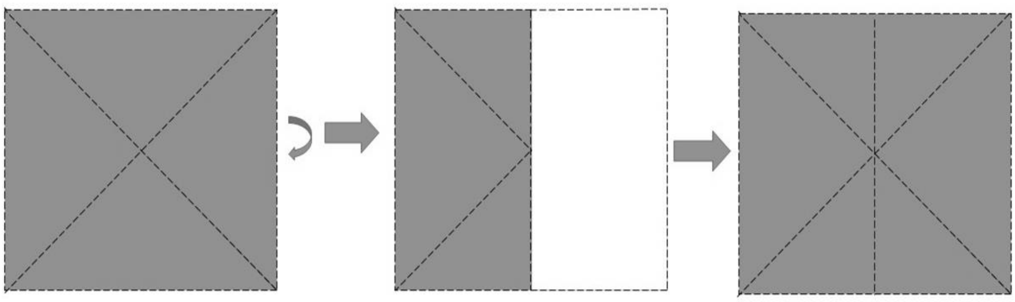
3º passo: É com o quadrado que se formou que será construído o tangram. Forme novamente o triângulo, unindo agora, os outros dois vértices (pontas) do quadrado.



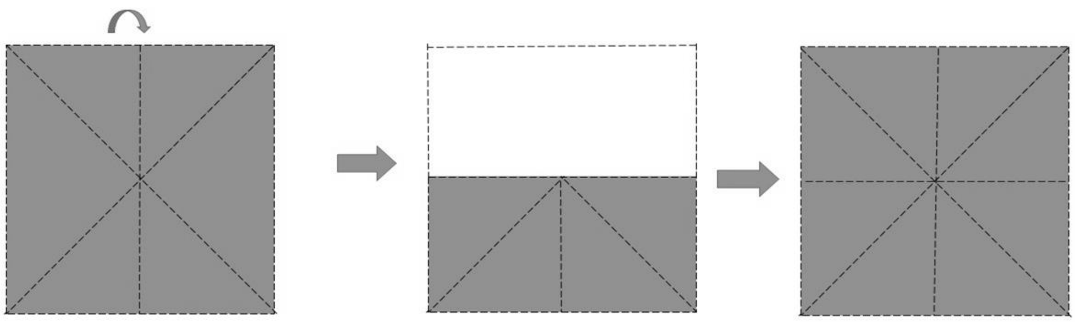
4º passo: Abra o triângulo novamente.



5º passo: Dobre o quadrado ao meio na vertical, em seguida desfaça as dobras.

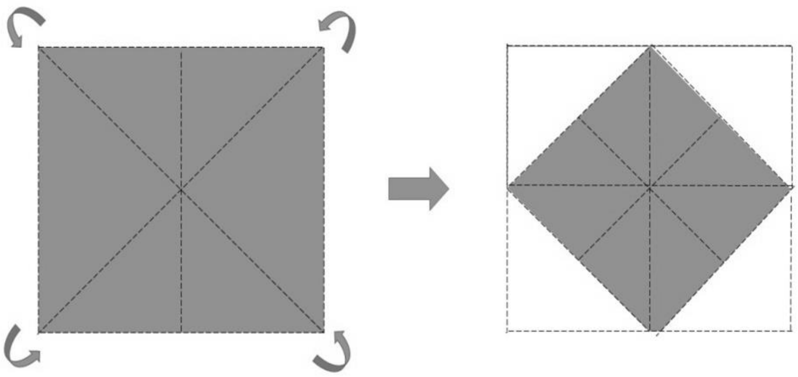


6º passo: Repita o processo anterior, mas agora fazendo a dobra na horizontal.

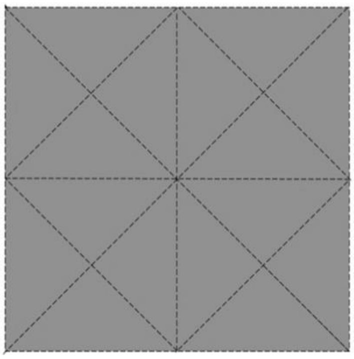


7º passo: Leve todos os vértices ao centro do quadrado e dobre.

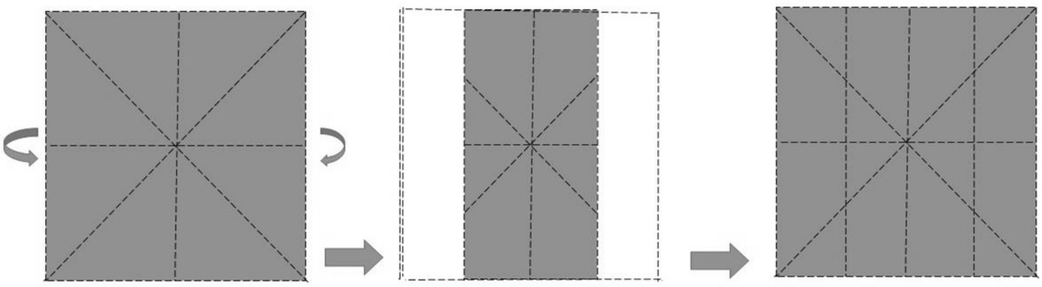
Observação: O centro do quadrado é o ponto de encontro das duas diagonais.



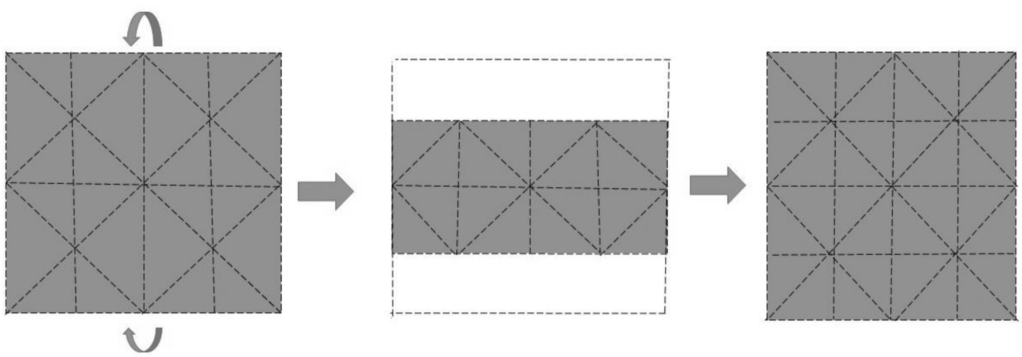
8º passo: Abra o quadrado.



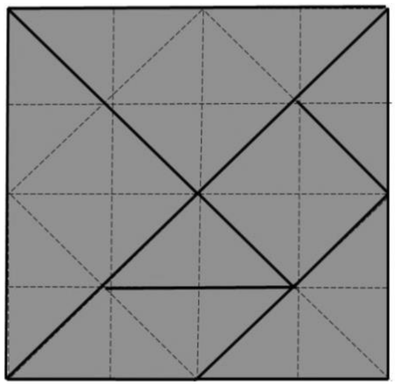
9º passo: Agora leve cada lado do quadrado para a marcação que o divide ao meio, na vertical, e desfaça as dobras.



10º passo: Repita o processo anterior, só que na horizontal.



11º passo: Para finalizar o tangram, trace com o auxílio de esquadro ou régua os segmentos de reta abaixo.



Ao terminar o processo de confecção do tangram identificar todos os polígonos obtidos, seus elementos e suas principais características, com a finalidade de esclarecer possíveis dúvidas sobre as formas e aprimorar o conhecimento dos discentes.

Para finalizar essa atividade solicitar que cada discente use lápis colorido para pintar os polígonos com cores distintas ou até mesmo que colem as peças em E.V.A. para facilitar o manuseio das peças e que montem uma figura seguindo os seguintes critérios:

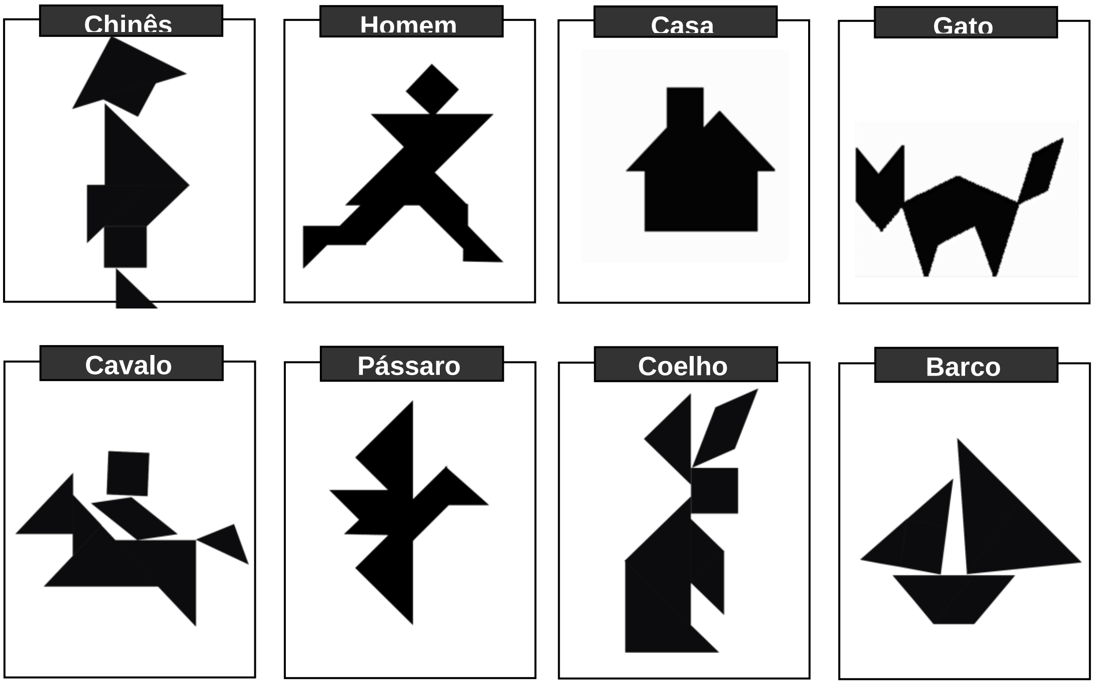
1) Usar as sete as peças do tangram;

2) Não sobrepor peças;

3) Formar apenas figuras planas, ou seja, todas as formas devem ser apoiadas no mesmo plano.

Caso deseje aumentar o grau de dificuldade no desenvolvimento da atividade o professor pode sugerir que os discentes montem figuras específicas, como as silhuetas abaixo.

Figura - Algumas silhuetas do tangram



Fonte: http://pt.vector.me/browse/132613/tangram_clip_art.

Ou ainda criar uma competição onde os participantes deverão montar determinada figura no menor tempo possível, vence a aquele que ao fim da atividade tiver atingido a melhor marca, esse jogo exige muita concentração, habilidade e paciência, atitudes indispensáveis na vida das pessoas que já podem ser trabalhadas desde a infância.

As figuras formadas pelos discentes poderão ser coladas em papel A4 ou cartolina para expor nos murais da escola ou na própria sala de aula, buscando valorizar e estimular as habilidades desenvolvidas pelos mesmos.

O professor ainda poderá lançar como desafio que discente formem polígonos regulares através da composição e decomposição dos peças.

Atividade 3**: Construindo o tangram com auxílio do software livre geogebra.**

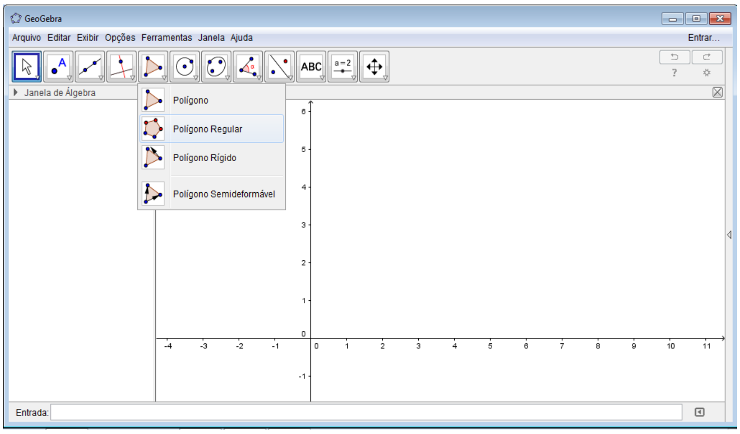
Com essa atividade pretende-se explorar a definição de plano cartesiano, polígono regular, diagonal, segmento de reta, ponto médio, base média de um triângulo, paralelismo e ângulos, conhecimentos necessários para executar os comandos que iremos realizar.

Sugerimos que incialmente o professor faça uma explanação sobre plano cartesiano, abordando um pouco da história de seu surgimento e algumas aplicações, em seguida dar início ao processo de construção do jogo e à medida que os outros conceitos forem sendo abordados o professor deve realizar questionamentos para sondar o conhecimento prévio dos discentes e se necessário fazer intervenções com objetivo de esclarecer possíveis equívocos ou dúvidas, esses momentos serão indispensáveis para aproximar os discentes da linguagem matemática e construção do conhecimento geométrico dos discentes.

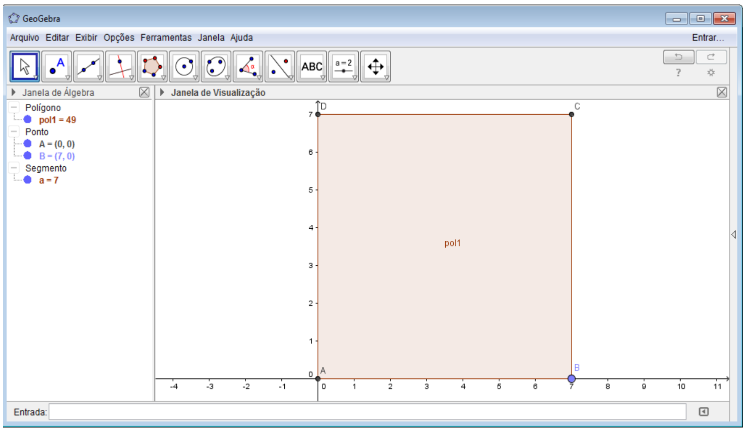
O uso das tecnologias em sala de aula por si só já despertam o interesse dos discentes, visto que nossos discentes vivem em um mundo tecnológico, mas o professor deverá ter bastante cuidado para que no desenvolvimento dessa atividade não perca o objetivo principal que é a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

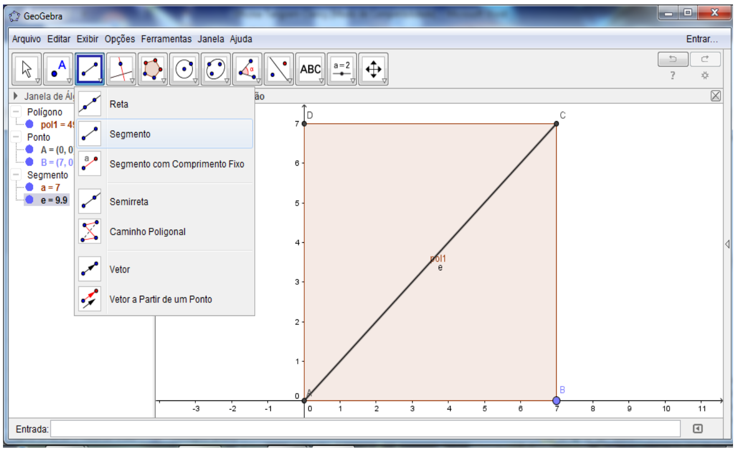
Orientações que deverão ser repassadas para construção do tangram através no geogebra.

1º passo: Construa um quadrado com a ferramenta polígono regular, para isso será necessário clicar na ferramenta polígono regular, em seguida selecionar dois pontos quaisquer e digitar o número de vértices da figura que se deseja construir, na caixa de texto.

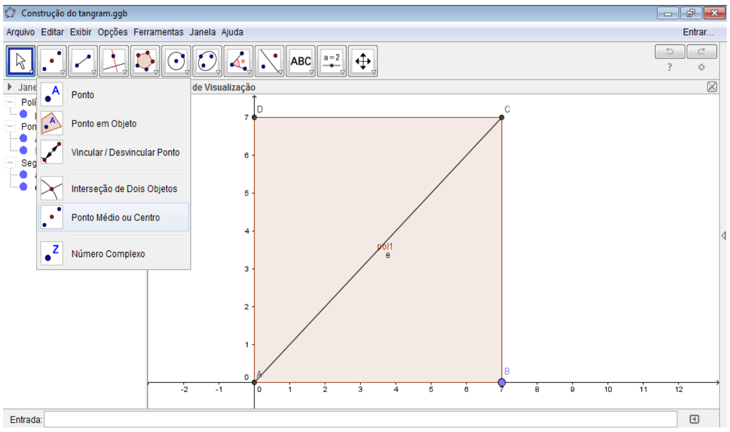


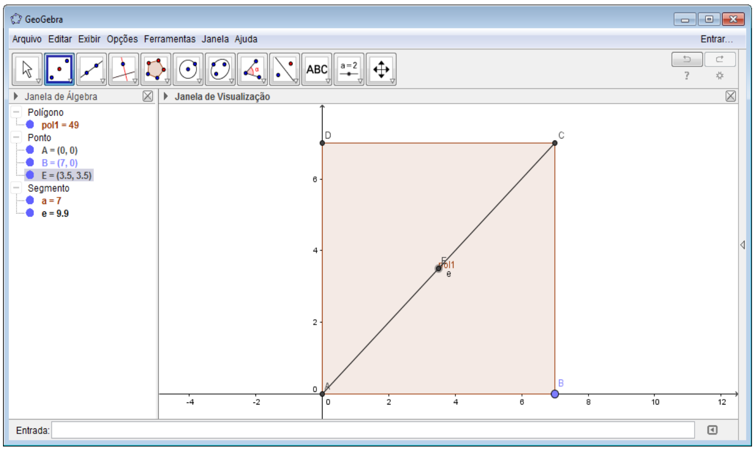
2º passo: Agora clique na ferramenta segmento para construção da diagonal do quadrado, para traçar a diagonal é necessário selecionar dois vértices não consecutivos do polígono.



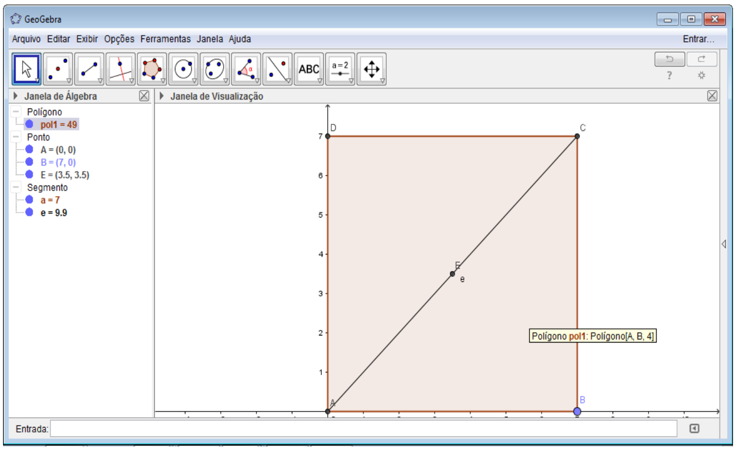


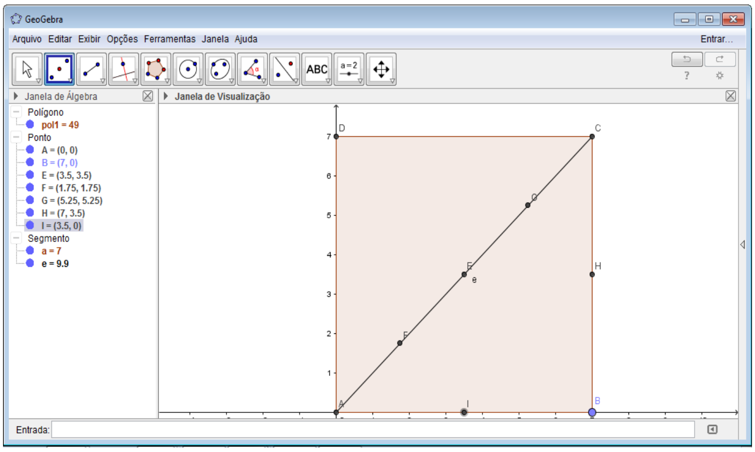
3º passo: Agora será necessário marcar o ponto médio da diagonal traçada, nesse caso $\overline{AC}$, agora precisamos clicar na ferramenta ponto médio ou centro e depois selecionar as extremidades da diagonal $\overline{AC}$.



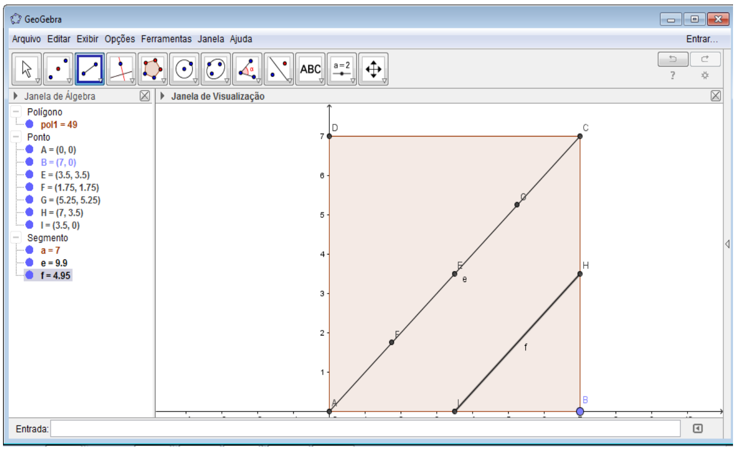


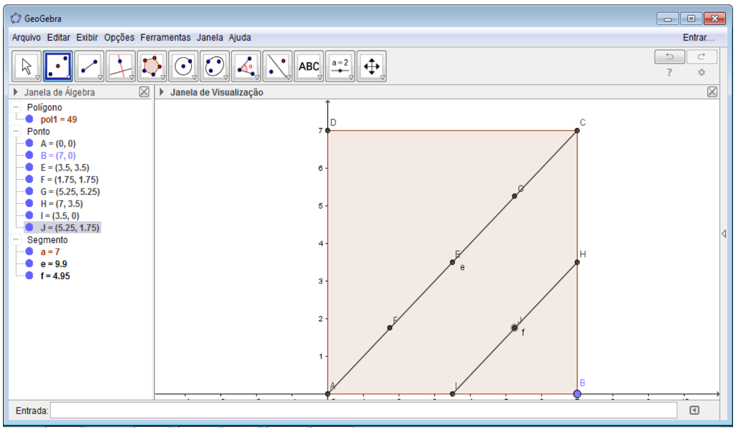
4º passo: Do mesmo modo, marque os pontos médios dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$.



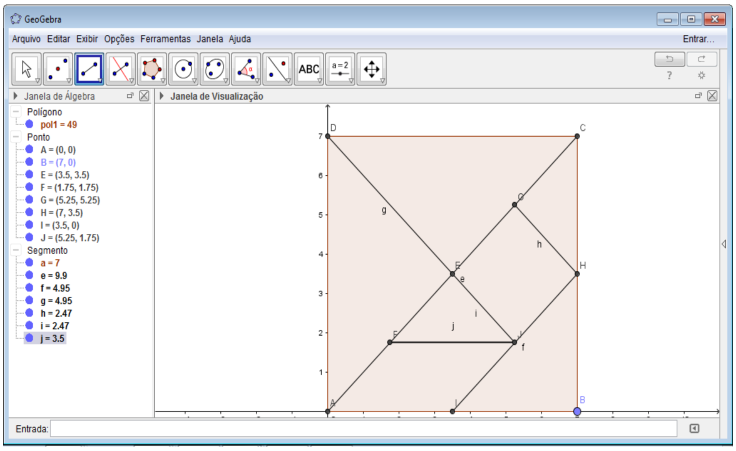


5º passo: Usando a ferramenta segmento de reta, trace o segmento $\overline{HI}$ e em seguida marque seu ponto médio.

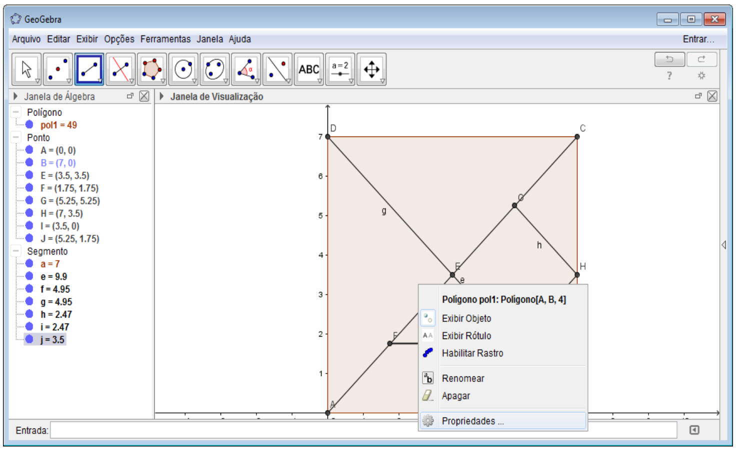


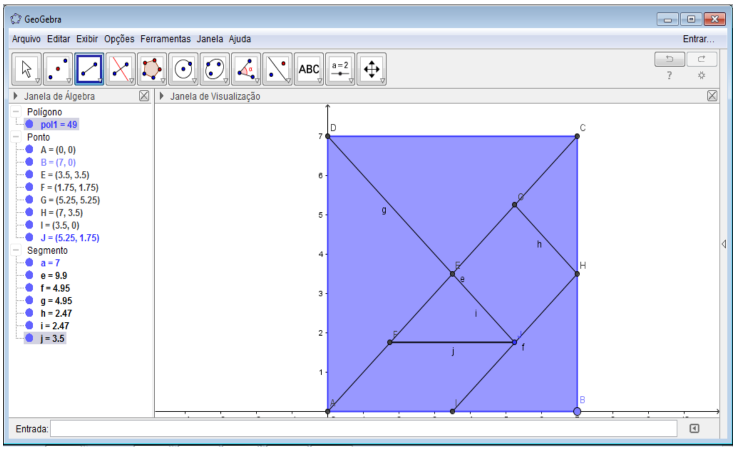


6º passo: Para finalizar trace os segmentos de reta $\overline{DE}$, $\overline{GH}$ e $\overline{FJ}$, usando mais uma vez ferramenta segmento de reta.

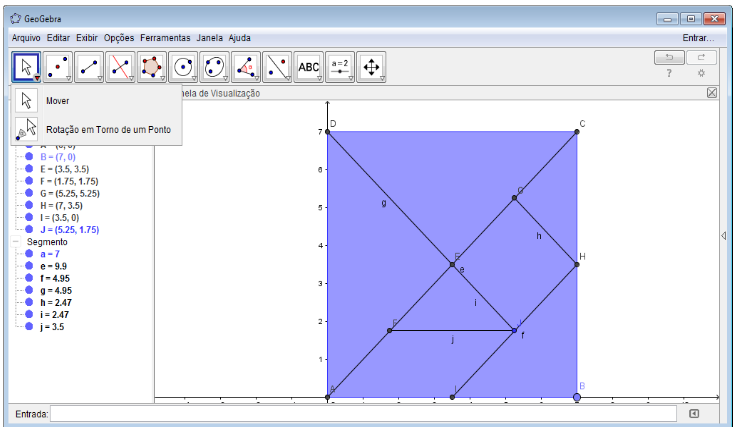


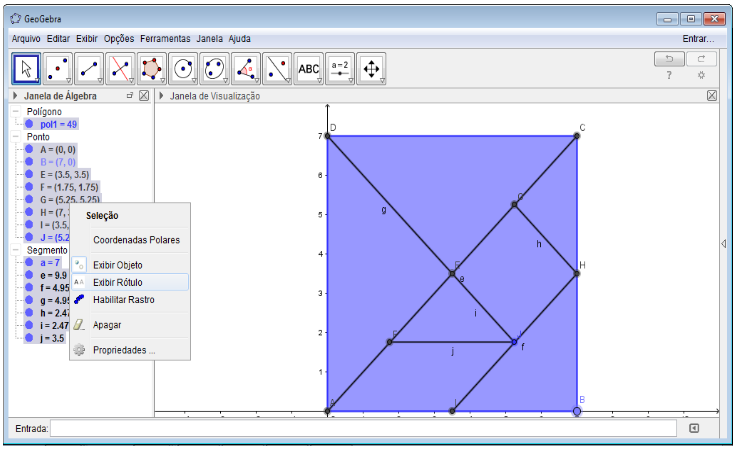
7º passo: Para colorir o quadrado basta clicar com o botão direito do mouse, com o cursor sobre o quadrado, selecionar a opção “propriedades”, em seguida “cor”, clicar na cor desejado e fechar a janela aberta.

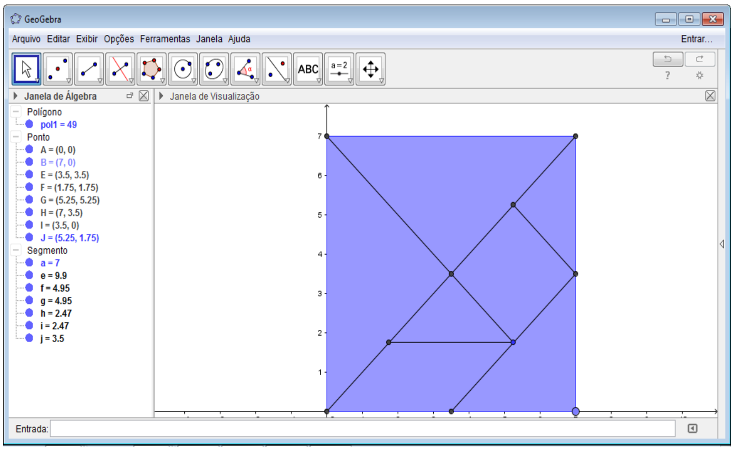




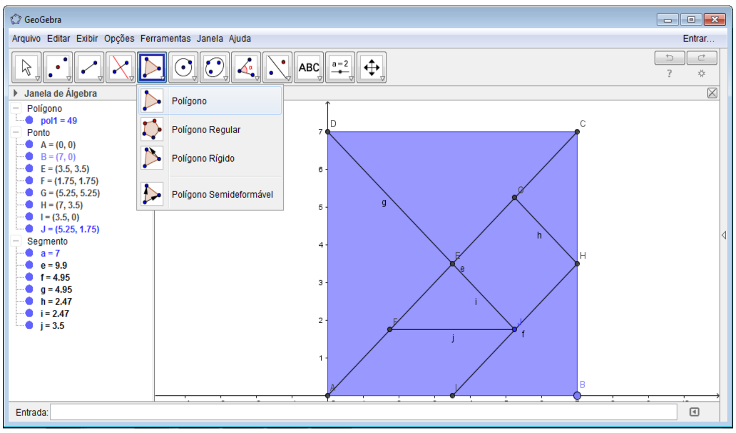
8º passo: Para limpar as informações do quadrado, precisa clicar na ferramenta mover, depois clicar na janela de álgebra, selecionar tudo (ctrl + A) e com o botão direito do mouse selecionar a opção exibir rótulo, ainda com toda janela selecionada clique novamente com o botão direito do mouse e selecione opção exibir rótulo.

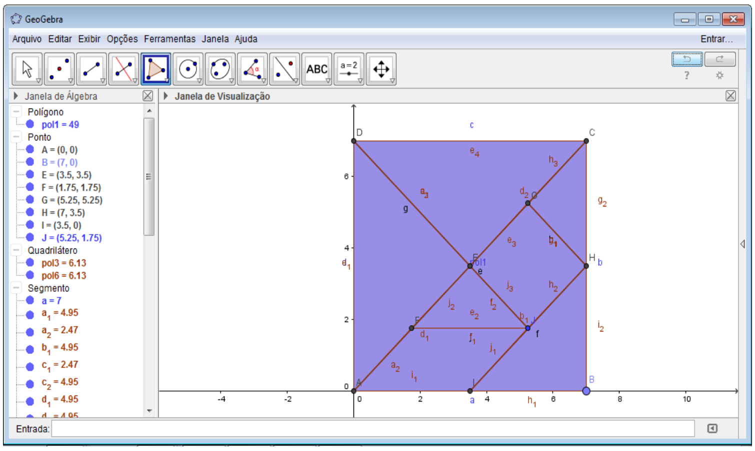




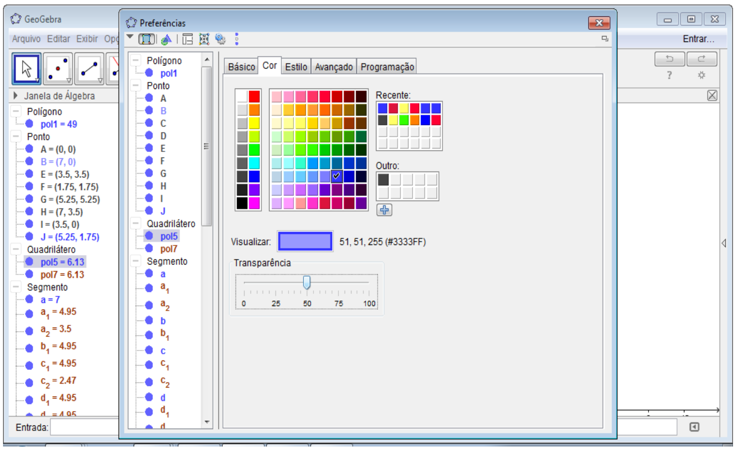


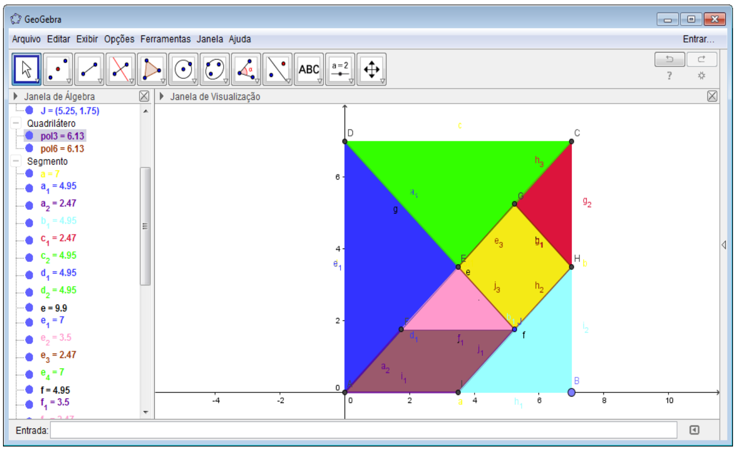
9º passo: Caso deseje que as peças do tangram tenham cores distintas é necessário construir cada polígono de maneira isolada, nessa proposta optamos por montar o tangram a partir do quadrado, mas podemos usar a ferramenta polígono e construir as peças do tangram selecionando os vértices dos sete polígonos já traçados, do seguinte modo: selecione a ferramenta polígono, em seguida os vértices do polígono, retornando sempre ao vértice anterior, devemos fazer isso com as sete peças.



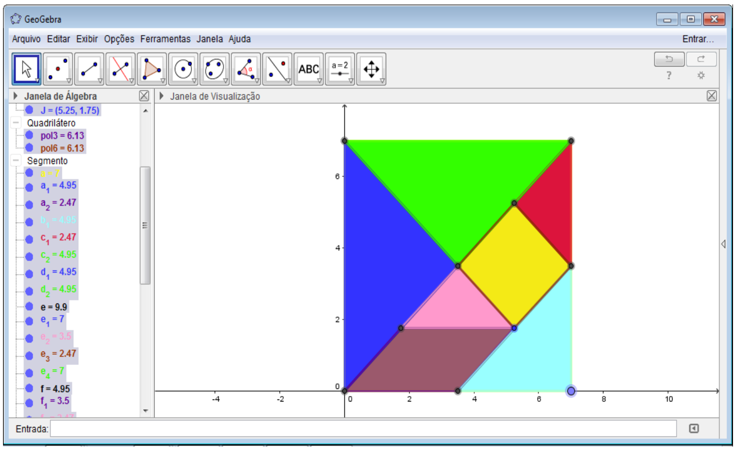


10º passo: Para colorir cada polígono, basta selecionar cada um deles na janela de álgebra , clicar com o botão direito do mouse, selecionar a opção propriedades e seguida a cor desejada e por fim fechar a janela.





Para limpar a imagem repita o mesmo processo descrito no 8º passo.

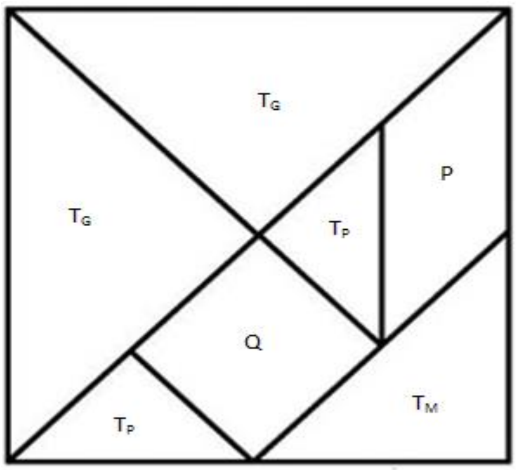


Solicitar que os alunos salvem a construção obtida para realizar futuras atividades.

Atividade 4**: Explorando o tangram**.

Entregar aos alunos uma cópia do tangram, de preferência a impressão do mesmo que eles fizeram no geogebra, medindo 12 cm de lado, para realizar as seguintes atividades.

<u>Frações e porcentagem</u>



1) Resolvam as questões:

a) Quantos triângulos pequenos (T_P) são necessários para cobrir o triângulo médio (T_M)?

b) Quantos triângulos pequenos (T_P) são necessários para cobrir o quadrado (Q)?

c) Quantos triângulos pequenos (T_P) são necessários para cobrir o paralelogramo (P)?

d) Quantos triângulos pequenos (T_P) são necessários para cobrir o triângulo médio (T_G)?

e) Quantos triângulos pequenos (T_P) são necessários para cobrir o tangram?

2) Complete a tabela.

Peça	Fração correspondente	Porcentagem (%)
Triângulo pequeno (T_P)		
Triângulo médio (T_M)		
Triângulo grande (T_G)		
Quadrado (Q)		
Paralelogramo (P)		
Quadrado grande (tangram)		

Nessa questão o professor poderá trabalhar a relação parte-todo, solicitando que os alunos somem as frações e as porcentagens correspondentes de todas as peças do tangram, a ideia é que eles cheguem a conclusão que a soma das frações é igual a um e a soma das porcentagens é igual a cem por cento, o professor pode ainda trabalhar o conceito de frações equivalentes e transformações de frações em porcentagem e vice-versa.

Área e perímetro

1) Resolva as questões abaixo:

a) Obtenha, com auxílio de régua, as medidas dos lados e altura de todas as peças do tangram, para determinar a área e o perímetro das peças.

b) Complete a tabela abaixo

Peça	Área	Perímetro
Triângulo pequeno (T_P)		
Triângulo médio (T_M)		
Triângulo grande (T_G)		
Quadrado (Q)		
Paralelogramo (P)		
Quadrado grande (tangram)		

Depois do preenchimento dessa tabela, o professor poderá voltar a construção feita pelo alunos no geogebra para que os alunos percebam que a medida que os polígonos são traçados o próprio software já determina a medida dos lados e calcula sua área, assim os alunos poderão comparar as respostas obtidas.

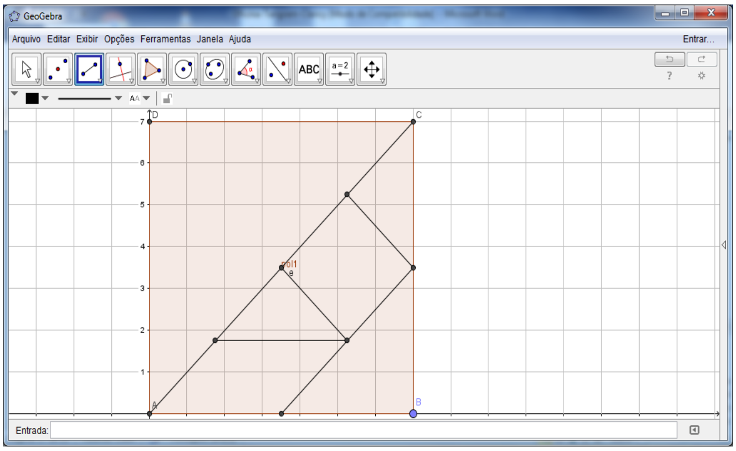
b) Quais peças do tangram ocupam o mesmo espaço? Podemos dizer que essas peças têm a mesma medida de superfície (área)?

c) Quais peças do tangram possuem o mesmo perímetro?

d) Podemos afirmar que todas figuras que tem áreas iguais possuem o mesmo perímetro? Justifique.

e) Some as áreas correspondentes de todas as peças do tangram. O que representam essa soma?

Essa atividade pode ser explorada em diferentes níveis de aprendizagem, para discentes que nunca estudaram o conceito de área e perímetro o professor poderá usar da malha quadriculada, essa opção está disponível no geogebra, fazendo uso no quadradinho como unidade de área e do lado do quadradinho como unidade de comprimento, e ainda através da comparação de áreas entre as peças. Veja:



Para alunos que já tem a noção de área e perímetro a atividade pode ser desenvolvida através das fórmulas já conhecidas para cálculo da área, nessa atividade o professor poderá também permitir que os alunos usem a calculadora pra agilizar os cálculos, tendo em vista que objetivo aqui não é aprendizagem das operações com números decimais.

Caso deseje aproveitar o momento para explorar outros conteúdos da geometria como: aplicação do teorema de Pitágoras no cálculo da diagonal do quadrado maior (tangram); conceito de ponto médio na divisão da diagonal AC em quatro partes iguais, na divisão dos lados AB e BC em dois segmentos e na divisão da base do triângulo médio também em dois segmentos iguais; conceito de base médio do triângulo, uma vez que o segmento HG é base média do triângulo ABC.

O professor pode ainda explorar o conjunto dos irracionais, a partir do cálculo da diagonal do quadrado (grande) do tangram, usando o teorema de Pitágoras, com essa medida e através da ideia de ponto médio o aluno pode obter as medidas que faltam para calcular a área e o perímetro de cada peça do tangram, conforme tabela abaixo:

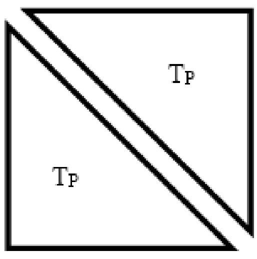
Peça	**Áreas (cm²)**	**Perímetro (cm)**
Triângulo pequeno (T_P)	9	$6 + 6\sqrt{2}$
Triângulo médio (T_M)	18	$12 + 6\sqrt{2}$
Triângulo grande (T_G)	36	$12 + 12\sqrt{2}$
Quadrado (Q)	18	$12\sqrt{2}$
Paralelogramo (P)	18	$12 + 6\sqrt{2}$
Quadrado grande (tangram)	144	48

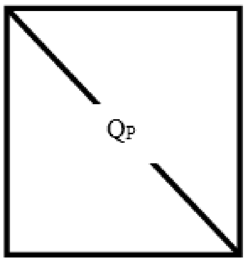
Ao final da atividade chamar atenção dos alunos para a presença de $\sqrt{2}$ no perímetro de todas as peças do tangram, nesse momento é interessante que o professor além de explorar os números irracionais, trabalhe um pouco com a história de seu surgimento.

Ainda é possível explorar a questão da fragmentação da figura, pois para os alunos não é tão claro o fato de que quando uma figura é dividida em outras partes, ela continua com a mesma área, mas que o mesmo fato não acontece com o perímetro.

Exemplo:

Temos que o quadrado pequeno (Q_P) equivale a dois triângulos pequenos (T_P), logo área do quadrado é igual ao dobro da área do triângulo pequeno, mas o perímetro (contorno) do quadrado pequeno é inferior ao dobro do perímetro do triângulo pequeno, uma vez que o perímetro do quadrado é a soma apenas dos catetos dos dois triângulos.





Peça	**Áreas (cm²)**	**Perímetro (cm)**
Triângulo pequeno (TP)	9	$6 + 6\sqrt{2}$
Quadrado (Q)	18	$12\sqrt{2}$