UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Uma Construção da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras

Weidson do Amaral Luna

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Braulio Maia Junior

Campina Grande - PB
Março/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG.

L961c Luna, Weidson do Amaral.

Uma Construção da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras / Weidson do Amaral Luna.
Campina Grande, 2013.
76 f.:il.
Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.
Referências.
Orientador: Prof. Dr. Braulio Maia Junior.
1. Geometria Analítica 2. Teorema de Tales 3. Teorema de Pitágoras
I. Maia Junior, Braulio. II. Título.

CDU-514.12(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Uma Construção da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras

por

Weidson do Amaral Luna †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Bolsista CAPES

Uma Construção da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras

por

Weidson do Amaral Luna

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia - UFG

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG

Prof. Dr. Braulio Maia Junior - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Março/2013

Dedicatória

"À minha mãe, à minha esposa e a minha filha que tiveram que abrir mão da minha atenção, da minha presença durante esses anos de vida acadêmica".

Agradecimentos

"Ao meu eterno PAI, DEUS, por todas as bênçãos que tem me dado, em nome de JESUS". Em obediência ao versículo: "Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente". Aleluia. Romanos 11:36.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional; à CAPES, pela concessão da bolsa; ao meu orientador, Prof. Braulio M. Junior; à Universidade Federal de Campina Grande, por ter "abraçado"este projeto e ao Departamento de Matemática, por sua dedicação a este mestrado.

Resumo

Este trabalho consta das biografias resumidas sobre Tales, Pitágoras e René Descartes, bem como as suas devidas contribuições para o estudo e progresso da geometria. Nele constam as demonstrações das principais fórmulas da Geometria Analítica como: Razão entre Dois Segmentos, Cálculo do Ponto Médio, Distância entre Dois Pontos, Condição de Alinhamento de Três Pontos, Equação Reduzida da Reta, Equação Segmentária da Reta, Distância entre Ponto e Reta, entre outras; evidenciando que estas têm por base os Teoremas de Tales ou o Teorema de Pitágoras, instigando, deste forma, a uma reflexão sobre a Geometria Analítica estar relacionada aos Teoremas enunciados.

Ao final do trabalho, relatamos uma experiência vivenciada em sala de aula, numa turma do 3º ano do ensino médio, em que as fórmulas da Geometria Analítica são apresentadas aos alunos, relacionando-as com o Teorema de Tales ou de Pitágoras, visando, desta forma, superar a rejeição à matemática, em especial a este conteúdo, por grande parte dos alunos. Por fim, concluímos que a base da Geometria Analítica está relacionada aos Teoremas citados, pois é possível demonstrar as fórmulas da Geometria Analítica a partir deles.

Palavras Chaves: Teorema de Tales. Teorema de Pitágoras. Geometria Analítica.

Abstract

This work consists of a brief biographies of Thales, Pythagoras and René Descartes, as well as their contributions to the study and advancement of geometry. It comprises the proofs of the main formulas of Analytic Geometry such as: Ratio of Two Segments, Calculation of Midpoint, Distance Between Two Points, Three Point Alignment Condition, Linear Equation: Slope-Intercept Form, Linear Equation: Intercept Form, Distance from a Point to a Line, among others; showing that they are based on the Thales's Theorem or on the Pythagorean Theorem, instigating, this way, a reflection on Analytic Geometry being related to the enunciated Theorems.

At the end of the work, report an experience in the classroom, a class of 3rd year of high school, where the formulas of Analytic Geometry are presented to students, linking them with the Thales's Theorem or Pythagorean Theorem, aiming, this way, to overcome the rejection of mathematics, particularly this content, for much of the students. Finally, we conclude that the basis of Analytical Geometry is related to the cited Theorems, because it is possible to demonstrate the formulas of analytical geometry from them.

Keywords: Thales's Theorem, Pythagorean Theorem and Analytic Geometry.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O presente capítulo trata dos aspectos iniciais relacionados a este trabalho, abordando, na sequência, os seguintes tópicos: a contextualização; os objetivos; a metodologia; o público alvo ao qual está direcionado; os pré-requisitos para o desenvolvimento desta proposta; as recomendações metodológicas; as dificuldades possivelmente encontradas pelos alunos aos quais forem apresentados; a descrição geral; as possíveis continuações ou desdobramentos e a estruturação dos capítulos subsequentes.

1.1 Contextualização

Atualmente os hábitos que prevalecem no ensino de Geometria são muitos diferentes daqueles que eram utilizados há décadas. O motivo pelo qual houve tantas mudanças, tais como, vários livros e, consequentemente, professores, abandonaram as demonstrações, limitando-se tão somente a enunciar teoremas e definições, num receituário monótono de enunciados e fórmulas sem a menor justificativa, é devido à reforma do ensino de matemática que ocorreu em meados do século passado e que ficou conhecida como "Matemática Moderna". Ironicamente, a Geometria, e nela inclusa a Geometria Analítica, foi a parte da matemática que mais se prejudicou com a referida reforma, pois vários reformistas propuseram uma redução dos conteúdos que se deveria ensinar de geometria e alguns grupos chegaram ao absurdo de propor que a geometria fosse totalmente abolida, como se a mesma não tivesse importância no processo de desenvolvimento dos alunos, [1].

No mundo inteiro, professores de matemática são abordados, diariamente, por alunos, entediados com demonstrações de teoremas e com questões que consideram incompreensíveis ou inúteis, questionando-os sobre qual é a utilidade ou aplicabilidade dos conteúdos [1]. Este questionamento se dá, muitas vezes, pela rejeição por parte dos mesmos ao formalismo rigoroso das demonstrações. O fato é que, mesmo não percebendo, lidamos cotidianamente com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, medida (comprimento, área, volume), simetria; seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão ou na comunicação oral. Assim, cotidianamente, estamos envolvidos com a geometria, o que a torna indispensável da grade curricular do ensino básico. Mas, deixemos claro que não é apenas a sua aplicabilidade na vida cotidiana e a sua capacidade de resolver importantes problemas que torna a matemática, e nela inclusa a Geometria e mais especificamente ainda, a Geometria Analítica, vital ao mundo moderno. Na sua própria essência, o raciocínio lógico dedutivo, possui extrema utilidade em áreas como Economia, Administração, liderança de grupos e até mesmo na tomada de decisão de caráter individual [5]. Assim, a matemática é utilíssima na vida prática e os professores têm muitos argumentos para convencer seus alunos disto, mas ela é também um campo que pode ser estudado apenas pelos prazeres que proporciona ao espírito, independentemente da inquestionável aplicação, como cita o engenheiro Gilberto Garbi na revista RPM 63 de 2007, pág. 05, [5];

> *"Os bons professores de matemática são aqueles que conseguem desenvolver em seus alunos o gosto pelo estudo da matemática pelo que ela é por si mesma e não apenas por sua utilidade".*

1.2 Objetivos

A finalidade deste trabalho é mostrar que é possível deduzir as principais fórmulas da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras, valorizando o raciocínio lógico dedutivo, onde um número reduzido de definições e proposições iniciais da Geometria Euclidiana, são o bastante para se demonstrar, uma após outra, as principais fórmulas da Geometria Analítica, provocando, assim, uma reflexão sobre o atual ensino da Geometria Analítica e conectando-a às contribuições de Tales e de Pitágoras para o seu desenvolvimento e resgatando, desta forma, o ensino de geometria adotado antes da reforma que ficou conhecida por "Matemática Moderna".

Pensamos que o que diferencia esta proposta dos modelos usuais do ensino de Geometria Analítica é o fato de demonstrarmos cada fórmula aqui apresentada a partir de fórmulas anteriores e estas, a partir de outras precedentes que estão relacionadas com o Teorema de Tales ou o Teorema de Pitágoras, de forma compreensível para os alunos e nem sempre com todo rigor lógico, tão rejeitado pelos mesmos. Assim, acreditamos que conseguiremos, de forma bastante simples e objetiva, conectar a álgebra à geometria e, principalmente, sugerir que os professores da rede pública de ensino, possam ser orientados a antes de optarem pelo ensino através da formulação e a fixação dos conteúdos por uso de excessivas listas de exercícios, mostrar que as fórmulas da Geometria Analítica não passam de novas roupagens de raciocínios e conhecimentos antes adquiridos.

1.3 Metodologia

Para a elaboração deste trabalho, realizou-se uma pesquisa bibliográfica, que permitiu a fundamentação da presente análise no que diz respeito à coerência e à relevância da temática escolhida. Desta forma, utilizou-se uma variedade de fontes que propiciassem o trajeto do processo de investigação e de análise.

1.4 Público Alvo

Diante do fato de que o conteúdo Geometria Analítica faz parte da grade curricular do 3º ano do ensino médio de todo o país, esta proposta é direcionada aos professores de matemática, para que os mesmos a apliquem aos alunos do 3º ano de ensino médio regular da rede pública de ensino.

1.5 Pré-requisitos

Para uma melhor compreensão, por parte dos alunos, dos conteúdos aqui abordados da Geometria Analítica, faz-se necessário que os mesmos possuam um conhecimento prévio dos seguintes conceitos:

- Razão e Proporção;
- Segmentos Comensuráveis e incomensuráveis;
- Retas Coplanares, Paralelas, Coincidentes, Concorrentes e Perpendiculares;
- Teoremas de Tales e de Pitágoras;
- Medianas e Baricentro;
- Plano Cartesiano e Coordenadas de Pontos;
- Fórmulas das áreas do Triângulo e do Trapézio;
- Função Afim;
- Determinantes e suas propriedades;
- Tangente da Diferença de Arcos Trigonométricos.

1.6 Recomendações Metodológicas

Recomendamos ao professor de matemática que ao aplicar esta proposta em sala de aula, comece apresentando as definições, as notações, os axiomas e as proposições iniciais da Geometria Euclidiana Plana, objetivando, desta forma, deixar os alunos familiarizados com os conteúdos aqui abordados da mesma, que serão utilizados para demonstrar as fórmulas da Geometria Analítica. Em seguida, faça a demonstração do Teorema de Tales e, principalmente, a demonstração do Teorema de Pitágoras usando o Teorema de Semelhança de Triângulos (tratado aqui como o Teorema de Tales aplicado em Triângulos), com a finalidade de evidenciar que o ponto de partida é o Teorema de Tales, mantendo assim o raciocino lógico dedutivo, onde cada proposição advém de outras anteriores.

1.7 Dificuldades Previstas

A primeira dificuldade prevista por parte dos alunos ao se depararem com o desenvolvimento desta proposta é a falta de conhecimento dos pré-requisitos necessários para a compreensão dos conteúdos abordados. Para superar esta dificuldade, recomendamos ao professor revisar os conceitos preliminares necessários, para então começar a desenvolvê-lo.

A segunda dificuldade esperada é o desinteresse, pois como já citado, os alunos estão sempre questionando qual a finalidade de aprender determinados conteúdos. Para superar esta dificuldade, recomendamos que os professores, ao longo do desenvolvimento desta proposta, enfatizem o caráter lógico dedutivo das demonstrações, pois acreditamos que é mais fácil para o aluno aprender novos conceitos matemáticos à medida que ele consiga relacioná-los com conhecimentos anteriormente adquiridos.

1.8 Roteiro Sugerido

Sugerimos que ao aplicar esta proposta em sala, o professor a divida nas seguintes partes:

1ª Parte: Inicialmente, fazer uma revisão dos pré-requisitos necessários para que os alunos possam entender os conteúdos aqui abordados, objetivando eliminar a primeira dificuldade prevista, que é a falta dos mesmos por parte dos alunos. Recomendamos que esta revisão seja feita em 3 aulas.

2ª Parte: Abordar os aspectos históricos das contribuições de Tales e de Pitágoras para o desenvolvimento da Geometria e da contribuição de René Descartes para a Geometria Analítica, objetivando tornar os alunos conhecedor destes personagens e de alguns de seus, respectivos, feitos na história da Matemática. Recomendamos que esta abordagem seja feita em 1 aula.

3ª Parte: Apresentar as definições, notações, axiomas e proposições iniciais da Geometria Euclidiana Plana aqui abordados, objetivando preparar os alunos para as demonstrações dos Teoremas de Tales, de Pitágoras e das fórmulas da Geometria Analítica. Recomendamos que estas apresentações sejam feitas em 5 aulas.

4ª Parte: Demonstrar os Teoremas de Tales e de Pitágoras, que formam a base deste trabalho, objetivando enfatizar a importância dos mesmos para o desenvolvimento desta proposta. Recomendamos que estas demonstrações sejam feitas em 4 aulas.

5ª Parte: Apresentar as definições iniciais da Geometria Analítica aqui abordadas, bem como todas as fórmulas referentes ao "estudo do Ponto", com suas respectivas demonstrações, objetivando mostrar as relações existentes entre estas fórmulas e os Teoremas de Tales e de Pitágoras. Recomendamos que estas apresentações e demonstrações sejam feitas em 7 aulas.

6ª Parte: Que ao término das apresentações das fórmulas referentes ao "estudo do Ponto", bem como de suas devidas demonstrações, o professor resolva, no quadro, alguns exemplos. Em seguida, selecione alguns exercícios a serem resolvidos pelos alunos. Ao final dos conteúdos referentes ao "estudo do Ponto", elabore uma atividade de avaliação constando de questões referentes a este conteúdo. Tudo isto, levando em consideração a realidade local da turma e visando a fixação dos conteúdos abordados. Para isto, recomendamos que sejam utilizadas 7 aulas.

7ª Parte: Apresentação das fórmulas e dos Teoremas referentes ao "estudo da Reta"com suas respectivas demonstrações, objetivando evidenciar que estas partem dos Teoremas de Tales ou de Pitágoras ou de uma fórmula da Geometria Analítica já demonstrada, usando um destes Teoremas; mantendo assim, o raciocínio lógico dedutivo, em que cada fórmula apresentada advém de outra anteriormente já mostrada. Recomendamos que estas apresentações e demonstrações sejam feitas em 6 aulas.

8ª Parte: Que ao término das apresentações das fórmulas referentes ao "estudo da Reta", bem como de suas devidas demonstrações, o professor resolva, no quadro, alguns exemplos. Em seguida, selecione alguns exercícios a serem resolvidos pelos alunos e que, ao final dos conteúdos referentes ao "estudo da Reta", elabore uma atividade de avaliação constando de questões referentes a este conteúdo. Tudo isto, levando em consideração a realidade local da turma e visando a fixação dos conteúdos abordados. Para isto, recomendamos que sejam utilizadas 7 aulas.

Por fim, recomendamos que todas as demonstrações sejam feitas de forma compreensível para os alunos e nem sempre com todo rigor lógico, ou seja, que elas devem ser adaptadas ao nível de conhecimento dos mesmos e, indicamos as referências [7, 14] como livros-textos para o professor selecionar os exercícios a serem resolvidos pelos alunos.

1.9 Possíveis Continuações

Sabemos que os conteúdos da Geometria Analítica, normalmente ensinados no 3º ano do ensino médio, são: O Ponto, A Reta e As Cônicas. Neste trabalho, abordaremos somente os dois primeiros conteúdos. Porém, é perfeitamente possível que o professor de matemática dê continuidade a esta proposta aplicando-a ainda no estudo das Cônicas, haja vista que as demonstrações da fórmula da equação geral da Circunferência, da Elipse, da Parábola e da Hipérbole, seguem da fórmula da distância entre dois pontos e que esta, como mostraremos, segue do Teorema de Pitágoras e este, por sua vez, do Teorema de Tales.

1.10 Estruturação dos Capítulos Subsequentes

Capítulo 2 - ***Um Pouco da história de Tales, Pitágoras e René Descartes*** - consta das biografias resumidas de Tales, Pitágoras e René Descartes, bem como as suas devidas contribuições para o estudo e progresso da geometria.

Capítulo 3 - ***Uma Construção da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras*** - Inicialmente, apresentamos alguns axiomas, definições, notações, proposições e teoremas da Geometria Euclidiana que serão utilizados para demonstrar as fórmulas da Geometria Analítica. Em seguida, apresentamos as demonstração das principais fórmulas da Geometria Analítica, tais como: Razão entre Dois Segmentos; Cálculo da Razão de Segmentos; Cálculo do Ponto Divisor; Coordenadas do Baricentro; Distância entre Dois Pontos; Condição de Alinhamento de Três Pontos; Área de um Triângulo; Equação Reduzida da Reta; Equação Segmentária da Reta; Distância entre Ponto e Reta e outras, evidenciando que estas têm por base os Teoremas de Tales ou de Pitágoras.

Capítulo 4 - ***Considerações Sobre as Aulas Ministradas Aplicando Esta Proposta***- relata uma experiência em sala de aula, vivenciada numa turma do 3º ano do ensino médio, em que as principais fórmulas da Geometria Analítica são apresentadas aos alunos, evidenciando a relação existente entre elas e os Teoremas de Tales ou de Pitágoras.

Capítulo 5 - ***Considerações Finais*** - concluímos que a base da Geometria Analítica está relacionada ao Teorema de Tales ou ao Teorema de Pitágoras, pois é perfeitamente possível demonstrar suas principais fórmulas a partir destes Teoremas, em especial, o Teorema de Tales, haja vista que a demonstração do Teorema de Pitágoras também o tem como base e que os professores, ao ensinarem seus conteúdos, não deveriam mostrar cada uma das fórmulas isoladamente, como sendo mais uma fórmula para os alunos memorizarem, mas sim, relacionar cada uma delas com um dos dois Teoremas referenciados acima, evidenciando que elas advêm de um deles.

Capítulo 2

Um Pouco da história de Tales, Pitágoras e René Descartes

Neste capítulo, apresentaremos um resumo das biografias de Tales de Mileto, Pitágoras e René Descartes, retiradas de [3, 4].

2.1 Tales de Mileto

"A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos."(Tales)

Tales de Mileto foi um filósofo grego que viveu por volta de 624-548 a.C. Sabe-se muito pouco a respeito de sua vida e de sua obra. Conjectura-se ter sido ele o criador da geometria demonstrativa. Por isto, ele é saudado como o primeiro matemático a dar uma contribuição à organização da geometria. Indícios apontam que se dedicou também ao estudo da astronomia, aplicando todo conhecimento matemático aprendido com os egípcios. Teria, conforme conta a história, em 585 a.C, previsto um eclipse solar desse ano. Não sabemos ao certo se a história é verídica de fato ou não. As sérias dúvidas em torno deste acontecimento podem ser encontradas em [3].

Encontramos nos livros antigos de História da Matemática, tais como, os referenciados em [3, 4], relatos e lendas, entre os quais, Tales teria surpreendido os egípcios ao calcular a altura de uma pirâmide a partir da sombra por ela projetada, utilizando-se das relações de proporcionalidade entre os segmentos de reta que são originados por retas paralelas e transversais, [4].

Tales como fundador da escola Jônica é considerado um dos "sete sábios". Foi ele quem introduziu na Grécia o estudo da geometria que trouxe do Egito. Consta que ele passou alguns anos lá, e assim estudou com os sacerdotes egípcios as ciências físicas e matemáticas.

A primeira referência que temos de Tales como iniciador do método dedutivo na matemática nos é dada pelo filósofo Proclus (410-485 d.C) no seu livro: *Comentário sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides*, como citado em [3].

"Tales primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empíricos."

Proclus atribui a Tales haver afirmado e demonstrado pela primeira vez as seguintes proposições:

"Um círculo é bissectado por um diâmetro; que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; que os ângulos opostos pelo vértice são iguais; que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto; que se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes."

Para maiores detalhes sugerimos a leitura de [3].

2.2 Pitágoras e a Escola Pitagórica

"Educai as crianças e não será preciso punir os homens." (Pitágoras)

Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C na ilha Egéia de Samos e é possível que ele tenha sido discípulo de Tales, pois era cinquenta anos mais novo que ele e morava perto de Mileto, onde vivia Tales.

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição que a causa última das varias características do homem e da matéria são os números inteiros, o que levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética, junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagóricos.

Admite-se, geralmente, que os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números foram dados por Pitágoras e seus seguidores. A Pitágoras é atribuído, ainda, o famoso Teorema que leva o seu nome - *O quadrado do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

A última e notável descoberta sobre números feita pelos pitagóricos, foi a relação entre intervalos musicais e razões numéricas. Considerando cordas sujeitas à mesma tensão, eles encontraram que para a oitava os comprimentos devem ter razão 2 para 1, para a quinta 3 para 2 e para a quarta 4 para 3. Esses resultados, os primeiros fatos registrados da física-matemática, levaram os pitagóricos a iniciar o estudo científico das escalas musicais. Para melhor conhecimento destes fatos históricos, recomendamos a leitura de [4].

Pitágoras fundou uma escola que levou o seu nome, A escola Pitágorica. Esta, era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígido. Neste código, o vegetarianismo era imposto aos seus membros, aparentemente porque o pitagorismo aceitava a doutrina da metempsicose, ou transmigração das almas, com a preocupação consequente de que se podia matar um animal que fosse a nova moradia da alma de uma amigo morto. Entre outros tabus da escola havia o de comer feijões (ou melhor, lentilhas). A mais notável característica da escola era a confiança que mantinham no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As palavras "filosofia"(ou "amor à sabedoria") e matemática (ou "o que é aprendido") supõem-se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais. Segundo consta, Pitágoras estabeleceu duas categorias de conferências, uma só para os membros da escola ou ordem, outra para os da comunidade mais ampla. Presume-se ainda que foi nas conferências da primeira categoria que Pitágoras apresentou as contribuições que fez à matemática, quaisquer que fossem essas. Por fim, tendo descrito a obra geométrica de Tales, Proclus diz que:

> *"Pitágoras, que veio depois dele, transformou essa ciência numa forma liberal de instrução, examinando seus princípios desde o início e investigando os teoremas de modo imaterial e intelectual. Descobriu a teoria das proporcionais e a construção de figuras cósmicas".*

Para maiores informações sobre a Escola Pitagórica, recomendamos a leitura de [3].

2.3 René Descartes

"Penso, logo existo" (René Descartes)

Foi com o filósofo e matemático francês René Descartes, cujo nome em latim é Renatus Cartesius, que surgiu a Geometria Analítica, [3].

Descartes nasceu perto de Tours, na França, no ano de 1596 e faleceu em Estocolmo, na Suécia, no ano de 1650. No entanto, foi durante a sua estadia de vinte anos na Holanda que ele produziu seus escritos, [4].

Trabalhando no campo da Matemática, Descartes escreveu uma obra chamada La Géométrie. Na primeira frase de La Geométrie, Descartes já havia estabelecido seu objetivo: *"Todo problema de Geometria pode ser reduzido de tal forma que o conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para a construção"*. Essa afirmação indica que seu objetivo era geralmente uma construção geométrica, e não necessariamente a redução da Geometria à Álgebra, ou seja, seu método consistia em partir de um problema geométrico, traduzi-lo em linguagem de equação algébrica e, depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolvê-la geometricamente. Com isto, pode-se dizer que toda a obra está dedicada a uma completa aplicação da Álgebra à Geometria e da Geometria à Álgebra. Mas, a omissão de grande parte dos detalhes elementares tornou a obra muito difícil de ser entendida por seus contemporâneos. Descartes, em suas observações finais, procurou justificar a falta de explicações dizendo que havia deixado muita coisa oculta para não roubar do leitor a alegria da descoberta, [3].

Não podemos deixar de ressaltar a decisiva contribuição que a utilização do método cartesiano deu para o progresso das ciências. As representações cartesianas de fenômenos, como a variação de temperatura de um doente ou a oscilação dos valores das ações na bolsa, nos permite avaliar, por um exame simples das curvas representadas num sistema de eixos coordenados, a marcha de uma transformação e prever seu desenvolvimento, com certa precisão, mostrando, entre outros exemplos, a importância do método de Descartes para o desenvolvimento do conhecimento humano.

Capítulo 3

Uma Construção da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras.

3.1 Geometria Euclidiana Plana

Neste tópico, apresentaremos alguns axiomas, definições, notações, proposições e teoremas da Geometria Euclidiana Plana que serão utilizados posteriormente para demonstrar as fórmulas da Geometria Analítica. Os conteúdos abordados neste tópico foram baseados nas referências bibliográficas [2], [8], [10] e [13].

Inicialmente, admitiremos que leitor tem uma boa ideia, baseados nas suas experiências diárias, do que vem a ser um ponto, uma reta e um plano. Portanto, assumiremos estas noções como conhecidas.

Axioma 3.1 *Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.*

Axioma 3.2 *Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.*

Definição 3.1 *Quando duas retas têm um único ponto em comum diz-se que elas se intersectam naquele ponto. Neste caso, as retas são ditas concorrentes.*

Indicaremos aqui pontos por letras maiúsculas e retas por letras minúsculas ou por $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e etc. Assim, na Figura 3.1, temos que as retas r e s são concorrentes, pois se intersectam no ponto P.

Definição 3.2 *O conjunto constituído pelos pontos distintos A e B sobre uma reta r e por todos os pontos da reta r que estão entre A e B, é chamado segmento AB. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.*

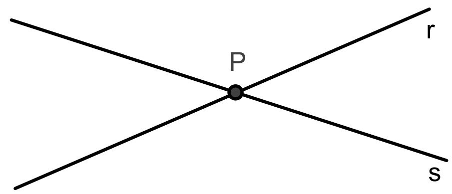

Figura 3.1: Retas Concorrentes.

Indicaremos aqui o comprimento de um segmento AB pelo símbolo $\overline{AB}$ ou por letras minúsculas do nosso alfabeto. No contexto ficará claro se estaremos usando letras minúsculas para nos referir a retas ou a comprimento de segmentos.

Axioma 3.3 *Dados três pontos distintos A, B e C sobre uma reta r, se o ponto C encontra-se entre os pontos A e B, então*

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

Definição 3.3 *Se A e B são pontos distintos sobre uma reta r, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C de r, tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de semirreta de origem A contendo o ponto B, e é representado por S_{AB}. O ponto A é então denominado origem da semirreta S_{AB}* (veja Figura 3.2).

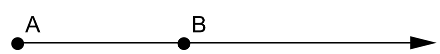

Figura 3.2: Semirreta S_{AB}.

Definição 3.4 *Dadas, no plano, duas semirretas S_{OA} e S_{OB}, um ângulo de vértice O e lados OA e OB é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas S_{OA} e S_{OB}* (veja Figura 3.3).

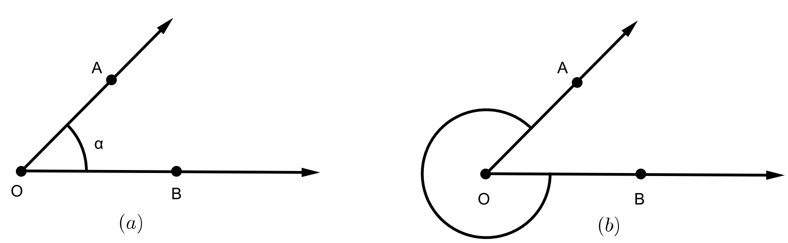

Figura 3.3: Ângulos formados por duas semirretas.

As semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo.

Para designarmos um ângulo, bem como sua medida, conforme o da Figura 3.3(a), usaremos a notação $A\hat{O}B$ ou letras gregas minúsculas, tais como α, β e θ. No contexto ficará evidente quando estaremos nos referindo ao ângulo ou a sua medida. Ao utilizarmos a notação $A\hat{O}B$, a letra indicativa do vértice deverá sempre aparecer entre as outras duas, as quais representam pontos das semirretas que formam o ângulo.

Definição 3.5 *Dizemos que duas retas são coplanares se elas estão contidas no mesmo plano.*

Definição 3.6 *Duas retas, coplanares, que não se intersectam são ditas paralelas* (Veja Figura 3.4*).*

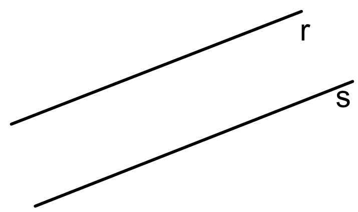

Figura 3.4: Retas Paralelas.

Representaremos o paralelismo de retas pelo símbolo $//$. Assim, na Figura 3.4, temos que $r//s$.

Definição 3.7 *Um feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.*

Definição 3.8 *Uma reta transversal de um feixe de retas paralelas de um plano, é a reta do plano que contém o feixe e que é concorrente com todas as retas do feixe.*

Na Figura 3.5, temos que a reta t é transversal às retas do feixe de paralelas a, b, c e d.

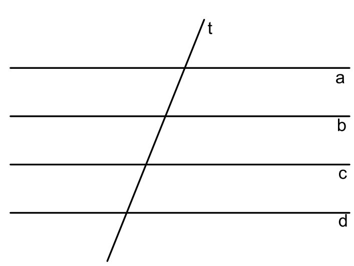

Figura 3.5: Reta Transversal t ao feixe de paralelas a, b, c e d.

Definição 3.9 *Pontos correspondentes de duas retas transversais de um feixe de paralelas, são os pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.*

Na Figura 3.6, as retas r e s são paralelas e as retas t e m são transversais a r e s. Assim, temos que os pontos A e C, bem como B e D são correspondentes.

Definição 3.10 *Segmentos correspondentes de duas retas transversais de um feixe de paralelas, são segmentos contidos nestas transversais, cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.*

Na Figura 3.6, temos que os segmentos AB e CD são correspondentes.

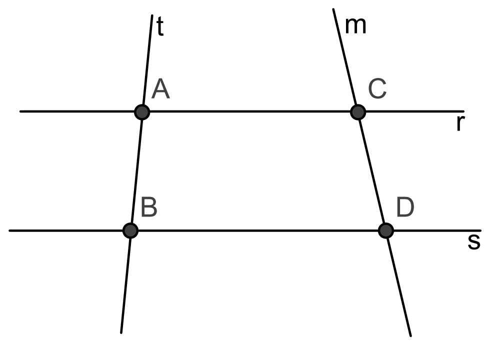

Figura 3.6: Segmentos correspondentes de duas retas transversais.

Definição 3.11 *Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$ e diremos que dois ângulos α e θ são congruentes se eles têm a mesma medida.*

O axioma a seguir trata-se do 5^o postulado de Euclides. Há evidência de que ele foi formulado pelo próprio Euclides e que tornou-se, de imediato, alvo de críticas pelos matemáticos da época. Este fato se deu devido a ele ser bastante diferente, inclusive em tamanho, dos outros postulados enunciados por Euclides, parecendo mais uma proposição do que um a-xioma. Além disso, a sua tardia utilização, após tantas proposições serem provadas sem seu auxílio, levantou suspeitas de que ele seria simplesmente uma proposição demonstrável a partir dos outros axiomas a qual Euclides não conseguira demonstrar.

Inumeráveis tentativas foram feitas para provar ou eliminar o 5^o postulado, mas foi somente na primeira metade do século dezenove que os matemáticos chegaram à conclusão de que o mesmo não era demonstrável a partir dos outros quatro axiomas enunciados por Euclides. Fato este, que ocorreu com a descoberta das chamadas geometrias não-Euclidianas. Para maiores detalhes, recomendamos a leitura de [2].

Axioma 3.4 *Por um ponto fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela à reta r.*

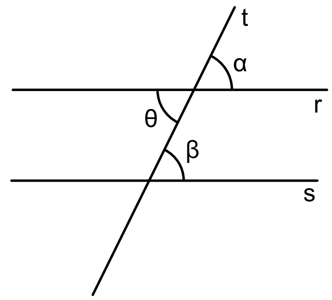

Figura 3.7: Ângulos correspondentes e ângulos alternos internos.

Definição 3.12 *Sejam r e s duas retas coplanares paralelas e t uma reta transversal às retas r e s, conforme Figura 3.7. Os ângulos α e β são ditos correspondentes e os ângulos θ e β são ditos alternos internos.*

Admitiremos, sem demonstração, que os ângulos correspondentes da Figura 3.7, α e β, são congruentes, bem como, que os ângulos alternos internos θ e β também são congruentes. Ao leitor interessado nestas demonstrações recomendamos a leitura de [2].

Definição 3.13 *Dado três pontos, dizemos que eles estão alinhados ou são colineares se pertencerem a uma mesma reta.*

Definição 3.14 *Dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se de triângulo ABC* (veja Figura 3.8).

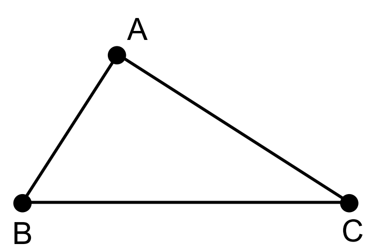

Figura 3.8: Triângulo *ABC*.

Usaremos a notação ΔABC, quando necessário, para nos referimos a um triângulo de vértices A, B e C.

Definição 3.15 *Se ABC é um triângulo, os seus ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são chamados de ângulos internos ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo.*

Na Figura 3.9, o ângulo $A\hat{C}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC adjacente ao ângulo interno $A\hat{C}B$, obtido pelo prolongamento do lado BC.

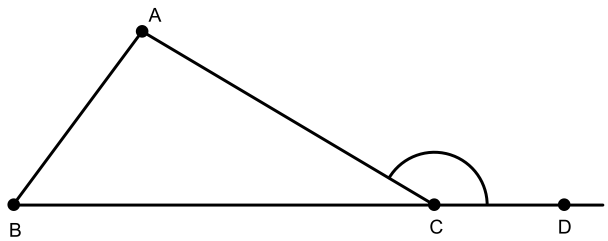

Figura 3.9: Ângulo externo do triângulo ABC com vértice em C.

Teorema 3.1 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é* 180°.

Prova: Seja ABC um triângulo, conforme Figura 3.10. Pelo vértice A tracemos a reta paralela ao lado BC, o que pelo Axioma 3.4 é perfeitamente possível.

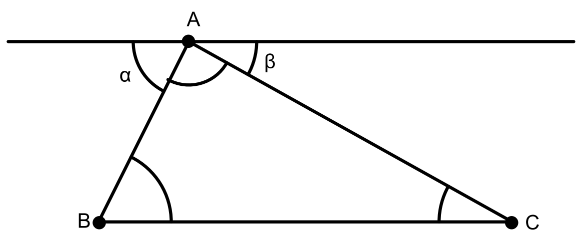

Figura 3.10: Esquema Geométrico da prova do Teorema 3.1.

Por construção, temos que

$$\alpha + B\hat{A}C + \beta = 180^\circ. \tag{3.1}$$

Daí, como $\alpha = A\hat{B}C$ e $\beta = A\hat{C}B$, pois tratam-se de ângulos alternos internos, então substituindo estas igualdades em (3.1), temos que

$$A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 180^\circ.$$

Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

■

Corolário 3.2 *A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.* Vide [13].

Definição 3.16 *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Existem, basicamente, três casos de congruência de triângulos, são eles: *lado, ângulo, lado* (L.A.L); *ângulo, lado, ângulo* (A.L.A); *lado, lado, lado* (L.L.L). Vide [2].

Proposição 3.3 *Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.*

Prova: Faremos a demonstração usando um feixe de três retas paralelas. Assim, sejam a, b e c três retas paralelas *e* t e m duas transversais, conforme a Figura 3.11.

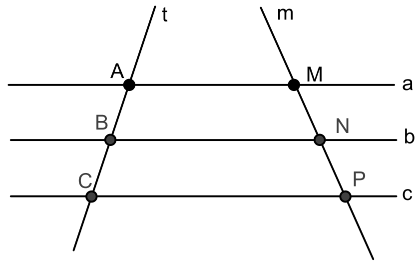

Figura 3.11: Retas paralelas com segmentos congruentes.

Por hipótese, temos que as retas do feixe de paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, digamos $\overline{AB} = \overline{BC}$. Devemos provar que $\overline{MN} = \overline{NP}$.

Traçando por M e N retas paralelas a t, conforme Figura 3.12, note que $ABRM$ e $BCSN$ são paralelogramos, pois por hipótese $a//b//c$ e por construção $\overleftrightarrow{MR}//t$ e $\overleftrightarrow{NS}//t$, ou seja, $\overleftrightarrow{MR}//\overleftrightarrow{NS}$.

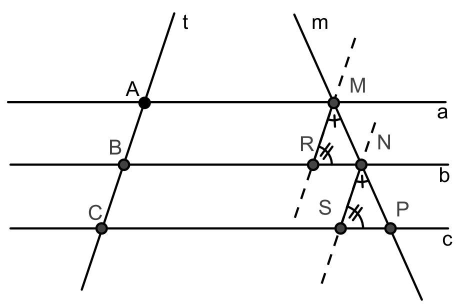

Figura 3.12: Ilustração da prova da Proposição 3.2.

Então, temos que $\overline{AB} = \overline{MR}$ e $\overline{BC} = \overline{NS}$. Daí, como $\overline{AB} = \overline{BC}$, segue que, $\overline{MR} = \overline{NS}$. Agora, note que $M\hat{R}N = N\hat{S}P$ e que $N\hat{M}R = P\hat{N}S$, pois, como já citado, $b//c$ e $\overleftrightarrow{MR}//\overleftrightarrow{NS}$. Por consequência, temos que os triângulos MRN e NSP são congruentes, pelo caso ângulo, lado, ângulo (A.L.A). Portanto, $\overline{MN} = \overline{NP}$.

■

Definição 3.17 *Dados os segmentos AB, CD, EF e GH, dizemos que o par de segmentos* $\{AB, CD\}$ *é proporcional ao par de segmentos* $\{EF, GH\}$ *se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}.$$

Teorema 3.4 *(Tales) Um feixe de retas paralelas determina em duas transversais, quaisquer, segmentos proporcionais.*

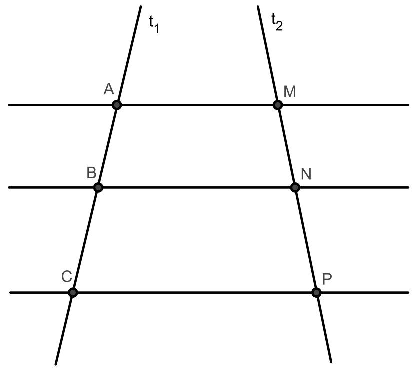

Figura 3.13: Segmentos Proporcionais.

Prova: Para fazermos a demonstração, iremos dividí-la em dois casos: $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis, ou seja, a razão das medidas dos segmentos é um número racional e, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis, ou seja, a razão das medidas dos segmentos é um número irracional.

1º Caso: $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis, ou seja, a razão das medidas dos segmentos é um número racional.

Sejam a, b e c três retas paralelas e t_1 e t_2 duas retas transversais às retas a, b e c, conforme Figura 3.14:

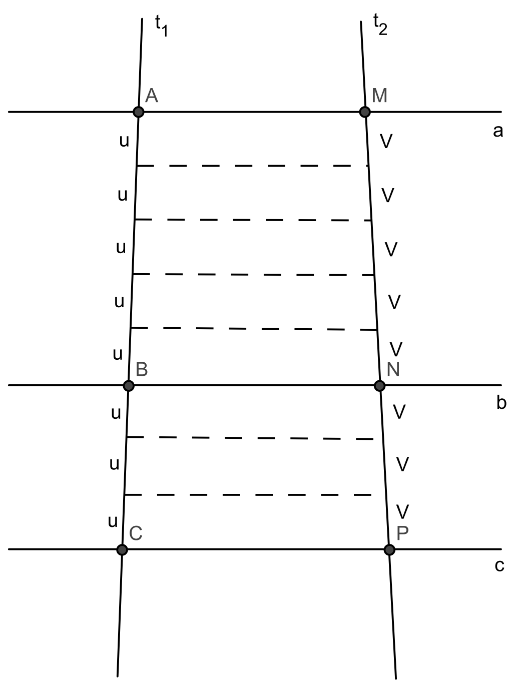

Figura 3.14: Esquema Geométrico da Prova do Teorema de Tales (1° caso).

Como AB e BC são comensuráveis, então existe um segmento de comprimento u que divide o comprimento do segmento AB em p partes e o segmento BC em q partes, em que p e q são números inteiros. Na Figura 3.14 $p = 5$ e $q = 3$. Assim, temos que

$$\overline{AB} = pu \quad e \quad \overline{BC} = qu.$$

Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{pu}{qu} = \frac{p}{q}.$$

Daí, nos pontos obtidos pela divisão de AB e BC por u, traçemos retas paralelas à reta $\overleftrightarrow{AM}$ do feixe que irão intercectar t_2 em segmentos congruentes v, de acordo com a Proposição 3.3 do feixe de paralelas. Desse modo, temos que os segmentos MN e NP ficarão divididos em p partes e q partes respectivamente, ou seja, $\overline{MN} = pv$ e $\overline{NP} = qv$. Daí

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \frac{pv}{qv} = \frac{p}{q}.$$

Logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}.$$

Portanto, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são proporcionais.

2º Caso: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis, ou seja, a razão das medidas dos segmentos é um número irracional.

Tomando um segmento y submúltiplo de $\overline{BC}$, em que $y > 0$ temos que existe um inteiro n, tal que

$$\overline{BC} = ny. \tag{3.2}$$

Por serem $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ incomensuráveis, não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, ou seja, a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ é um número irracional e por conseguinte, a razão $\frac{\overline{AB}}{y}$ também é um número irracional. De fato, suponhamos que $\frac{\overline{AB}}{y}$ seja racional, ou seja, que existem dois números inteiros e primos entre si p e q tal que

$$\frac{\overline{AB}}{y} = \frac{p}{q}.$$

Daí

$$\overline{AB} = \frac{py}{q}. \tag{3.3}$$

Mas, por hipótese

$$y = \frac{\overline{BC}}{n}. \tag{3.4}$$

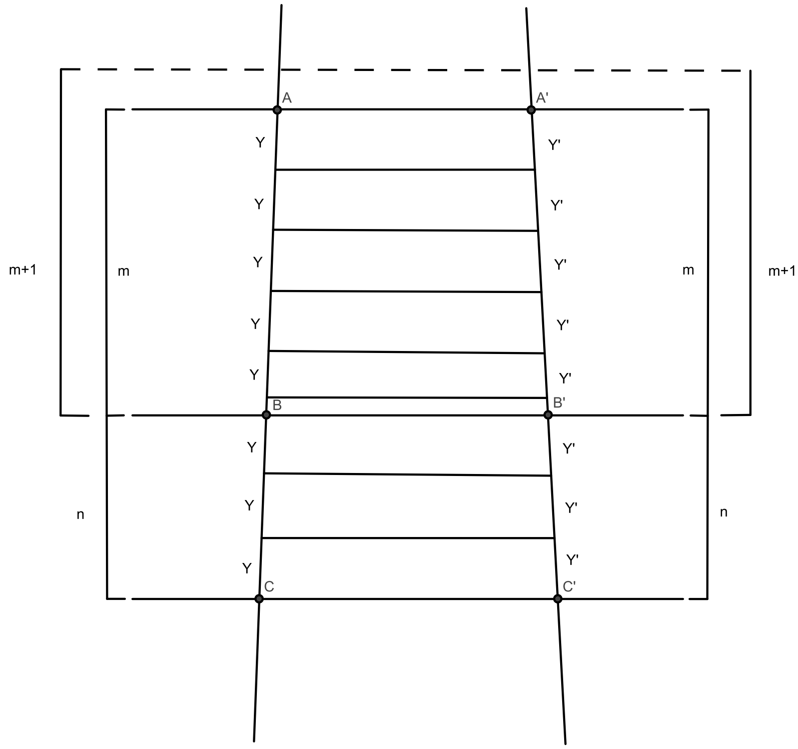

Figura 3.15: Prova do Teorema de Tales (2° caso).

Então, substituindo (3.4) em (3.3), temos que

$$\overline{AB} = \frac{p\overline{BC}}{qn}.$$

Assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{p}{qn}.$$

Logo, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seria um número racional, o que contraria a hipótese. Portanto, $\frac{\overline{AB}}{y}$ é irracional. Com isto, segue que $\frac{\overline{AB}}{y}$ pertence a algum intervalo $(m, m+1)$, onde m é um número inteiro, ou seja;

$$m < \frac{\overline{AB}}{y} < m+1. \tag{3.5}$$

Segue que

$$my < \overline{AB} < (m+1)y. \tag{3.6}$$

Daí, operando com as relações (3.2) e (3.6), obtemos

$$\begin{cases} my < \overline{AB} < (m+1)y \\ ny = \overline{BC} = ny \end{cases}. \tag{3.7}$$

Assim, temos que

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{m+1}{n}. \tag{3.8}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, assim, de acordo com a Proposição 3.3 do feixe de paralelas, temos que

$$\overline{A'B'} = ny', \tag{3.9}$$

e, analogamente, obtemos que

$$m < \frac{\overline{A'B'}}{y'} < m+1. \tag{3.10}$$

Daí

$$my' < \overline{A'B'} < (m+1)y'. \tag{3.11}$$

Operando com as relações (3.9) e (3.11), obtemos

$$\begin{cases} my' < \overline{A'B'} < (m+1)y' \\ ny' = \overline{B'C'} = ny' \end{cases}. \tag{3.12}$$

Assim, temos que

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} < \frac{m+1}{n}. \tag{3.13}$$

Concluímos que as razões $\overline{AB}/\overline{BC}$ e $\overline{A'B'}/\overline{B'C'}$ pertecem a um mesmo intervalo aberto $\left(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$. Por outro lado observe que n foi escolhido dependendo do comprimento y, que dividia o comprimento BC deixando resto igual a zero. Evidemente, se dividirmos y em comprimentos menores, aumentaremos n para obter o comprimento do segmento BC. O mesmo acontecendo para m. Logo, termos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

■

A seguir, definiremos semelhança de triângulos para em seguida enunciarmos o Teorema 3.5.

Definição 3.18 *Dizemos que dois triângulos são semelhantes, se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e que os lados correspondentes sejam proporcionais.*

Iremos considerar a seguir, o caso de semelhança de triângulos *ângulo-ângulo*(A.A), como sendo o Teorema de Tales Aplicado em Triângulos, devido à sua demonstração ser uma consequência imediata deste, como veremos.

Teorema 3.5 *(Teorema de Tales aplicado em Triângulos) Dado dois triângulos ABC e EFG, como na Figura 3.16, se $B\hat{A}C = F\hat{E}G$ e $A\hat{B}C = E\hat{F}G$, então os triângulos são semelhantes.*

Prova: Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180^o, então a congruência dos ângulos $B\hat{A}C$ e $F\hat{E}G$ e dos ângulos $A\hat{B}C$ e $E\hat{F}G$ acarreta na congruência dos ângulos $A\hat{C}B$ e $E\hat{G}F$. Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, admitiremos, sem perda de generalidade, que $\overline{EF} > \overline{AB}$. Agora, tome na semirreta S_{EF} o ponto H de modo que $\overline{EH} = \overline{AB}$. Pelo ponto H trace uma reta paralela a FG, o que é perfeitamente possível pelo 5^o Postulado de Euclides, Axioma 3.4. Esta intersecta a semirreta S_{EG} num ponto J, formando o triângulo EHJ que é congruente ao triângulo ABC, já que $B\hat{A}C = F\hat{E}G$, $\overline{EH} = \overline{AB}$ e $A\hat{B}C = E\hat{F}G = E\hat{H}J$, esta última congruência deve-se ao paralelismo de JH e GF.

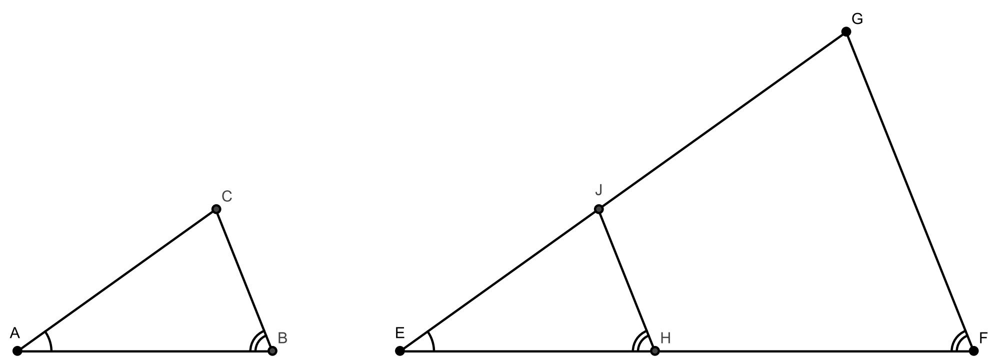

Figura 3.16: Esquema geométrico para a prova do Teorema de Tales aplicado em Triângulos.

Daí, como $\overleftrightarrow{HJ} // \overleftrightarrow{FG}$ e, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{EG}$ são transversais às paralelas $\overleftrightarrow{HJ}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, segue do Teorema de Tales, Teorema 3.4, que

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}}. \tag{3.14}$$

Assim, como $\overline{EH} = \overline{AB}$ e $\overline{EJ} = \overline{AC}$, então, substituindo em (3.14) obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}.$$

De maneira análoga demonstra-se que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GH}}.$$

■

Definição 3.19 *Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa e os outros dois lados são denominados catetos (veja Figura 3.17).*

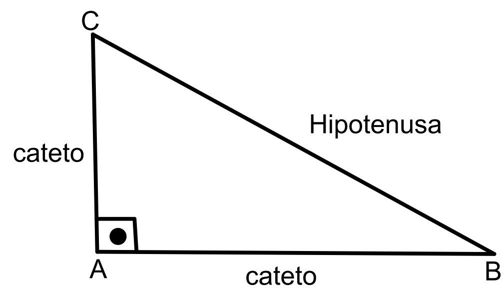

Figura 3.17: Triângulo Retângulo em A.

Assim, na Figura 3.17, temos que os segmentos AB e AC são os catetos e o segmento BC é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC.

O Teorema a seguir é um dos mais importantes e mais úteis Teoremas da Geometria Euclidiana, conhecido como o Teorema de Pitágoras.

Teorema 3.6 *Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Prova: Seja ABC um triângulo de ângulo reto $B\hat{A}C$, como Figura 3.18. Pelo vértice A, tracemos a altura do triângulo relativamente à base BC, sendo D o ponto de intersecção desta reta com o lado BC, conforme Figura 3.18. Por questão de simplicidade utilizaremos, excepcionalmente, letras minúsculas para representar o comprimento de segmentos, estabelecendo, assim, a seguinte notação, conforme na Figura 3.18

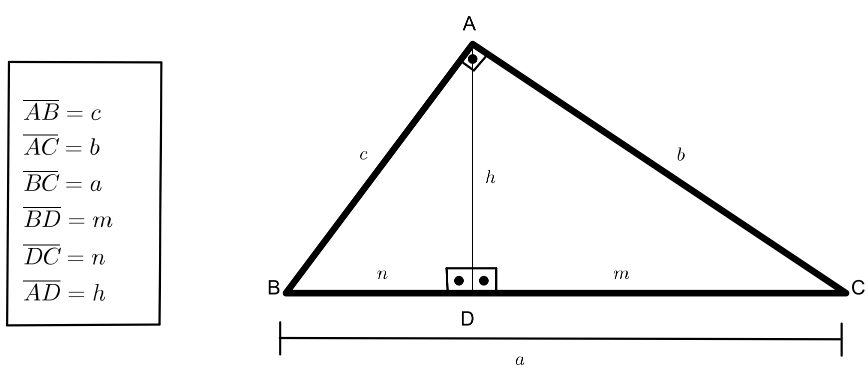

Figura 3.18: Triângulo Retângulo ABC usado na prova do Teorema de Pitágoras.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a $180°$, então, no triângulo ABC, temos que

$$A\hat{B}C + B\hat{C}A + B\hat{A}C = 180^\circ.$$

Mas, por hipótese, $B\hat{A}C = 90^\circ$. Assim

$$A\hat{B}C + B\hat{C}A = 90^\circ.$$

E mais, por construção, temos que $A\hat{B}C = A\hat{B}D$ e $B\hat{C}A = D\hat{C}A$. Daí

$$A\hat{B}D + D\hat{C}A = 90^\circ. \tag{3.15}$$

Analogamente, no triângulo DAC, temos

$$D\hat{C}A + C\hat{A}D + C\hat{D}A = 180^\circ.$$

Como, por hipótese, AD é perpendicular ao lado BC. Daí, segue que $B\hat{D}A = C\hat{D}A = 90^\circ$. Assim

$$D\hat{C}A + C\hat{A}D = 90^\circ. \tag{3.16}$$

De (3.15) e (3.16) temos que

$$A\hat{B}D + D\hat{C}A = D\hat{C}A + C\hat{A}D.$$

Então

$$A\hat{B}D = C\hat{A}D.$$

Logo, pelo Teorema de Tales aplicado em Triângulos, Teorema 3.5, temos que os triângulos ABC e DAC são semelhantes, pois $A\hat{B}D = C\hat{A}D$ e $B\hat{A}C = A\hat{D}C$.

Como $A\hat{B}D = C\hat{A}D$ e $B\hat{D}A = C\hat{D}A$, então os triângulos DAC e DBA também são semelhantes. Logo, os triângulos ABC, DAC e DBA são todos semelhantes entre si. Podemos, então, estabelecer as seguintes relações, conforme ilustrado na Figura 3.19.

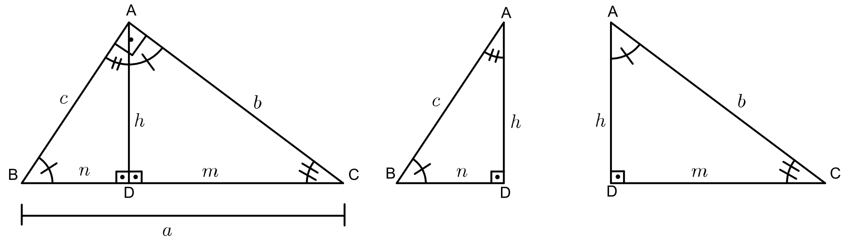

Figura 3.19: Triângulos semelhantes.

Da semelhança dos triângulos ABC e DBA, temos

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} = \frac{b}{h}. \tag{3.17}$$

Assim, da primeira igualdade de (3.17), obtemos que

$$c^2 = an. \tag{3.18}$$

Da semelhança dos triângulos ABC e DAC, obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}. \tag{3.19}$$

Da primeira igualdade de (3.19), temos que

$$b^2 = am. \tag{3.20}$$

Daí, somando as equações (3.18) e (3.20), membro a membro, teremos que

$$b^2 + c^2 = am + an. \tag{3.21}$$

Com isto, colocando a em evidência em (3.21), teremos que

$$b^2 + c^2 = a(m+n).$$

Mas, $m + n = a$. Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

■

Definição 3.20 *Uma Mediana de um triângulo é o segmento de reta ligando um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice.*

Obs. 3.1 *Admitiremos, sem demonstração, que todo triângulo possui exatamente três medianas e que estas concorrem em um único ponto chamado de Baricentro, denotado aqui por G (veja Figura 3.20). O baricentro divide cada mediana em duas partes, tais que a medida da parte que contém o vértice é o dobro da medida da outra parte. Por fim, denotando a área de uma figura plana por S, temos que a área de um triângulo é dada por metade do produto da medida de sua base pela medida da sua altura e que a área de um trapézio é igual à metade do produto da medida de sua altura pela soma das medidas de suas bases, vide [13]. Assim, na Figura 3.20, temos que:*

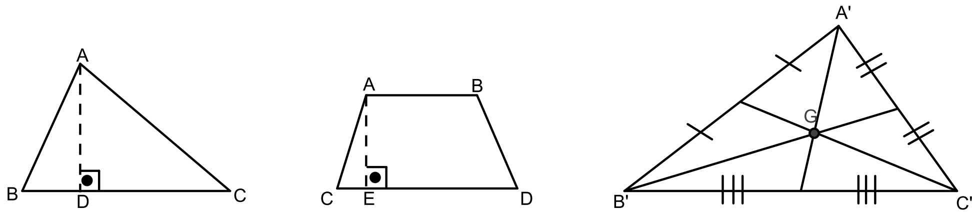

Figura 3.20: Triângulo ABC, Trapézio $ABCD$ e Triângulo $A'B'C'$.

1º) A área do triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{\overline{BC}\,\overline{AD}}{2}.$$

2º) A área do trapézio $ABCD$ é dada por:

$$S = \frac{(\overline{CD}+\overline{AB})\overline{AE}}{2}.$$

3º) O ponto G é o baricentro do triângulo $A'B'C'$.

3.2 Geometria Analítica

Os conteúdos abordados no "estudo do Ponto" e no "estudo da Reta" foram baseados nas referências bibliográficas [6], [7], [9], [11], [12] e [14].

Um dos objetivos da Geometria Analítica é fazer uma conexão entre fatos geométricos e as relações algébricas. Assim sendo, a seguir apresentaremos as fórmulas da Geometria Analítica e faremos as suas respectivas demonstrações partindo dos Teoremas de Tales e de Pitágoras, possibilitando, assim, que a Álgebra e a Geometria se relacionem.

3.2.1 O Ponto

Definição 3.21 *Uma reta na qual estabelecemos um sentido de percurso, chamado positivo, é chamada de reta orientada. O sentido inverso é chamado negativo.*

Figura 3.21: Reta orientada.

Definição 3.22 *Uma reta orientada na qual estabelecemos uma origem é chamada de eixo.*

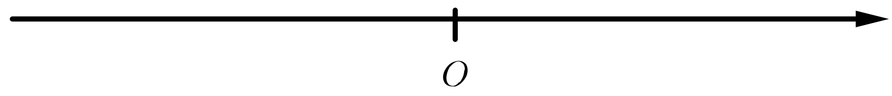

Figura 3.22: O eixo.

Todo eixo E pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais, de modo que a origem O do eixo faz-se corresponder o número zero. A cada ponto P de E situado a direita de O corresponde um número real positivo x que corresponde a distância de P à origem, denotado por $d(O,P)$. Aos pontos situados à esquerda de O corresponde os números reais negativos, cujos valores absolutos medem as distâncias desses pontos à origem. Além disso, dados dois pontos P e Q sobre o eixo E, se suas coordenadas são x_p e x_q, respectivamente, então a distância do ponto P ao ponto Q é dada por

$$d(P,Q) = |x_p - x_q| = |x_q - x_p|$$

Definição 3.23 *Um sistema de coordenadas cartesianas no plano* Π *consiste em um par de eixos perpendiculares OX e OY contidos neste plano e com a mesma origem O. OX é chamado de eixo das abscissas e OY eixo das ordenadas.*

Indicaremos o sistema de coordenadas cartesianas pela notação XOY. A escolha de um sistema de coordenadas no plano Π permite estabelecer uma correspondência biunívoca $\Pi \to \mathbb{R}$. Desta forma, cada ponto P do plano cartesiano corresponde a um único par ordenado (x,y) de números reais e, inversamente, cada par ordenado (x,y), corresponde a um único ponto do plano. E mais, considerando um ponto P do plano e baixando por ele paralelas aos eixos OX e OY, estas intersectam os eixos coordenados em x e y, respectivamente. Os números x e y são chamados de coordenadas cartesianas do ponto P, onde x é a chamado de abscissa e y de ordenada do ponto P, representados por $P(x,y)$. Além disso, os eixos perpendiculares decompõe o plano em quatros regiões, chamadas quadrantes, conforme Figura 3.23.

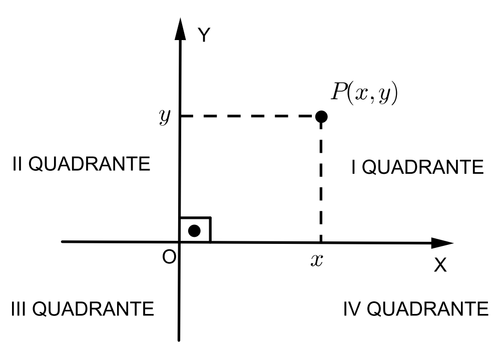

Figura 3.23: Plano Cartesiano.

Definição 3.24 *Dado o segmento AB, dizemos que o ponto C o divide na razão k, com k pertencente ao conjunto dos números reais, se*

$$k = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Para esclarecermos a Definição 3.24, consideremos que $\overline{AC} = 3l$ e $\overline{CB} = 2l$, então

$$k = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{3l}{2l} = \frac{3}{2}.$$

Mas,

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{-3l}{2l} = \frac{-3}{2},$$

pois, o sinal da razão depende somente de uma comparação de sentidos entre AC e CB.

Proposição 3.7 *(Cálculo da Razão de um Segmento) Dados os pontos $A(x_a,y_a)$ e $B(x_b,y_b)$, extremidades de um segmento AB não paralelo aos eixos coordenados, e o ponto $C(x_c,y_c)$ que o divide na razão k, temos que*

$$k = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c} = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_c}.$$

Prova: Considerando a Figura3.24, note que, por construção, $BB"//CC"$ e que esses segmentos são intersectados pelas retas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AB"}$. Assim, pelo Teorema de Tales, Teorema 3.4, temos que

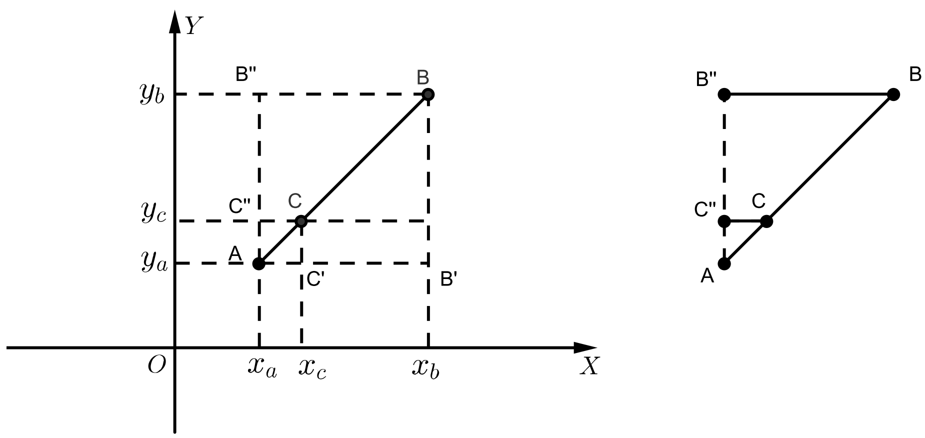

Figura 3.24: Esquema geométrico da prova da Proposição 3.7.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B''}}.$$

Daí, como, por definição, $k = \overline{AC}/\overline{CB}$, então

$$k = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B''}}. \tag{3.22}$$

Mas, note, na Figura3.24, que

$$\overline{AC''} = y_c - y_a \quad e \quad \overline{C''B''} = y_b - y_c. \tag{3.23}$$

Assim, substituindo (3.23) em (3.22), teremos que

$$k = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_c}.$$

Agora, observe na Figura 3.24 que $CC'//BB'$. Então, procedendo analogamente para as transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AB'}$, teremos que

$$k = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c}.$$

Portanto

$$k = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c} = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_c}.$$

■

Deixemos claro que se o segmento AB for paralelo a um dos eixos perpendiculares OX ou OY, teremos que apenas uma das igualdades acima ocorrerá, vejamos:

1º Caso: O segmento *AB* é horizontal. Neste caso, temos que os pontos A, B e C possuem a mesma ordenada. Sejam $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_a)$ extremidades do segmento AB e $C(x_c, y_a)$ o ponto que o divide na razão k. Então

$$k = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c}.$$

2º Caso: O segmento *AB* é Vertical. Neste caso, temos que os pontos A, B e C possuem a mesma abscissa. Sejam $A(x_a, y_a)$ e $B(x_a, y_b)$ extremidades do segmento AB e $C(x_a, y_c)$ o ponto que o divide na razão k. Então

$$k = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_c}.$$

Proposição 3.8 *(Cálculo do Ponto Divisor) Se o ponto $P(x_p, y_p)$ divide o segmento AB, $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$, numa razão $r_p \neq -1$, temos que*

$$P\left(\frac{x_a + r_p x_b}{1 + r_p}, \frac{y_a + r_p y_b}{1 + r_p}\right).$$

Prova: Seja AB um segmento não paralelo aos eixos coordenados. Por hipótese temos que o ponto P divide AB na razão r_p, então, da fórmula do cálculo da razão, Proposição 3.7, temos que

$$r_p = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{x_p - x_a}{x_b - x_p} = \frac{y_p - y_a}{y_b - y_p}.$$

Daí, considerando

$$r_p = \frac{x_p - x_a}{x_b - x_p},$$

teremos que

$$r_p(x_b - x_p) = x_p - x_a.$$

Com isto

$$r_p x_b - r_p x_p = x_p - x_a.$$

Então

$$x_p + r_p x_p = x_a + r_p x_b.$$

Assim

$$x_p(1 + r_p) = x_a + r_p x_b.$$

Logo, considerando $r_p \neq -1$, teremos que

$$x_p = \frac{x_a + r_p x_b}{1 + r_p}.$$

Procedendo analogamente para $r_p = \frac{y_p - y_a}{y_b - y_p}$ e considerando $r_p \neq -1$, teremos que

$$y_p = \frac{y_a + r_p y_b}{1 + r_p}.$$

Portanto, as coordenadas do ponto divisor do segmento AB são dadas por:

$$P\left(\frac{x_a + r_p x_b}{1 + r_p}, \frac{y_a + r_p y_b}{1 + r_p}\right).$$

$\blacksquare$

Deixemos claro que se o segmento AB for paralelo a um dos eixos coordenados, a fórmula acima também é válida.

Obs. 3.2 *Considerando um ponto P qualquer na reta contendo o segmento orientado AB, temos que:*

- *Se P é interior ao segmento AB, então* $r_p > 0$
- *Se P é exterior ao segmento AB, então* $r_p < 0$
- *Se P = A, então* $r_p = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AA}}{\overline{AB}} = 0$
- *Se* $P = B$*, não existe* r_p*, pois* $\overline{PB} = 0$.
- *Se* $\overline{AP} = \overline{PB}$*, então* $r_p = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = 1$*. Neste caso, P é chamado ponto médio do segmento AB, caso este que será analisado a seguir.*

Definição 3.25 *chamamos de ponto médio de um segmento AB um ponto* $M(x_m, y_m)$ *deste segmento, tal que,* $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Proposição 3.9 *(Coordenadas do Ponto Médio de um Segmento) As coordenadas do ponto médio M de um segmento AB,* $A(x_a, y_a)$ *e* $B(x_b, y_b)$*, são dadas por:*

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right).$$

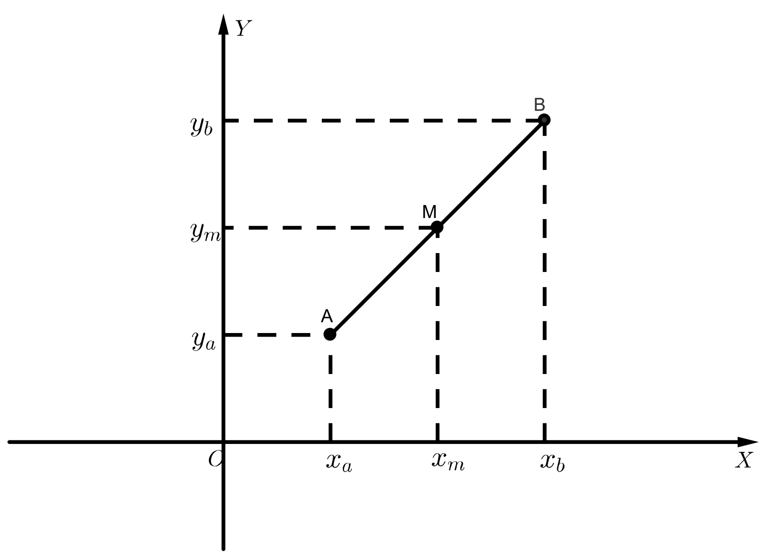

Figura 3.25: Ponto médio.

Prova: Seja *AB* um segmento não paralelo aos eixos coordenados. Por hipótese, temos que *M* é ponto médio. Assim, $\overline{AM} = \overline{MB}$. Então, da fórmula do cálculo da razão, Proposição 3.7, temos que

$$k = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{x_m - x_a}{x_b - x_m} = \frac{y_m - y_a}{y_b - y_m} = 1.$$

Daí

$$k = \frac{x_m - x_a}{x_b - x_m} = 1.$$

Então

$$x_m - x_a = x_b - x_m.$$

Por conseguinte

$$2x_m = x_a + x_b.$$

Logo

$$x_m = \frac{x_a + x_b}{2}.$$

Procedendo analogamente para $k = \frac{y_m - y_a}{y_b - y_m}$, teremos que

$$y_m = \frac{y_a + y_b}{2}.$$

Portanto, as coordenadas do ponto médio M do segmento AB são dadas por:

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right).$$

■

Deixemos claro que se o segmento AB for paralelo a um dos eixos coordenados, a fórmula acima também é válida. Vejamos:

1º Caso: O segmento AB é horizontal.

Neste caso, temos que os pontos A, B e M possuem a mesma ordenada. Sejam $A(x_a, y_m)$ e $B(x_b, y_m)$ extremidades do segmento AB e $M(x_m, y_m)$ o seu ponto médio. Assim

$$k = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{x_m - x_a}{x_b - x_m} = 1.$$

Daí

$$k = \frac{x_m - x_a}{x_b - x_m} = 1.$$

Assim

$$x_m - x_a = x_b - x_m.$$

Por conseguinte

$$2x_m = x_a + x_b.$$

Logo

$$x_m = \frac{x_a + x_b}{2}.$$

Agora, note que, como os pontos A, B e M possuem a mesma ordenada, digamos y_m, então

$$y_m = \frac{y_a + y_b}{2} = \frac{y_m + y_m}{2} = \frac{2y_m}{2} = y_m.$$

Portanto

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right).$$

2º Caso: O segmento AB é Vertical.

Neste caso, temos que os pontos A, B e M possuem a mesma abscissa. Sejam $A(x_m, y_a)$ e $B(x_m, y_b)$ extremidades do segmento AB e $M(x_m, y_m)$ o seu ponto médio. Assim

$$k = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{y_m - y_a}{y_b - y_m} = 1. \tag{3.24}$$

Desenvolvendo (3.24), chegaremos que

$$y_m = \frac{y_a + y_b}{2}.$$

Agora, note que, como os pontos A, B e M possuem a mesma abscissa, digamos x_m, então

$$x_m = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{x_m + x_m}{2} = \frac{2x_m}{2} = x_m.$$

Logo

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right).$$

Portanto, fica claro que a fórmula que nos dá as coordenadas do ponto médio de um segmento AB no plano cartesiano é válida tanto no caso em que o segmento AB é paralelo a um dos eixos coordenados, como em que ele não é paralelo a um dos eixos coordenados.

Para enriquecimento, apresentaremos, a seguir, outra demonstração da Proposição 3.9 usando agora a fórmula do cálculo do ponto divisor, Proposição 3.8.

Prova: Por hipótese, temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$, então da fórmula do cálculo do ponto divisor, Proposição 3.8, temos que a razão com que M divide o segmento AB é $r_m = 1$. Assim

$$x_m = \frac{x_a + r_m x_b}{1 + r_m} = \frac{x_a + 1x_b}{1+1}.$$

Logo

$$x_m = \frac{x_a + x_b}{2}.$$

Procedendo analogamente para y_m, teremos que

$$y_m = \frac{y_a + y_b}{2}.$$

Portanto, as coordenadas do ponto médio M do segmento AB são dadas por

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right).$$

■

Podemos dizer, então, que a abscissa do ponto médio de um segmento é a média aritmética das abscissas das extremidades, o mesmo ocorrendo com a ordenada do ponto médio.

Proposição 3.10 *(Coordenadas do Baricentro) Sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ os vértices de um triângulo como na Figura 3.26. Se $G(x_G, y_G)$ é o seu baricentro, então*

$$G\left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_b}{3}\right).$$

Prova: Seja $M(x_m, y_m)$ o ponto médio do segmento BC. Sabemos que o baricentro $G(x_G, y_G)$ divide a mediana AM na razão dois, como citado na Obs. 3.1. Assim, usando a fórmula do cálculo do ponto divisor, Proposição 3.8, temos que

$$x_G = \frac{x_a + r_G x_m}{1 + r_G}.$$

Como, $r_G = 2$, e $x_m = \frac{x_b + x_c}{2}$ então

$$x_G = \frac{x_a + 2.(\frac{x_b + x_c}{2})}{1+2}.$$

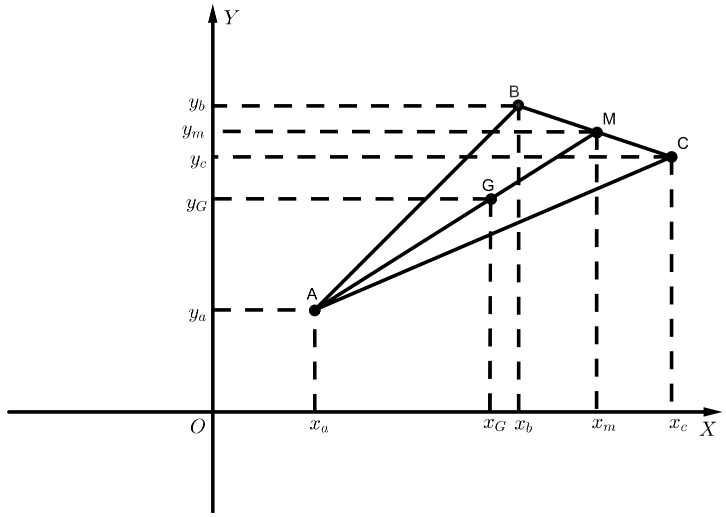

Figura 3.26: Triângulo ABC e seu baricentro G.

Logo

$$x_G = \frac{x_a + x_b + x_c}{3}.$$

Procedendo analogamente para y_G, concluiremos que

$$y_G = \frac{y_a + y_b + y_b}{3}.$$

Portanto, as coordenadas do Baricentro do triângulo ABC são dadas por:

$$G\left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_b}{3}\right).$$

■

A seguir apresentaremos a fórmula que nos fornece a distância entre dois pontos quaisquer no plano Cartesiano, bem como sua respectiva demonstração.

Proposição 3.11 *(Distância entre Dois Pontos) Dados os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ e sendo $d(A,B)$ a distância entre eles, em que $d(A,B) \geq 0$, então*

$$d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Prova: Inicialmente, se o segmento AB for paralelo ao eixo OX, teremos que

$$d(A,B) = |x_b - x_a|,$$

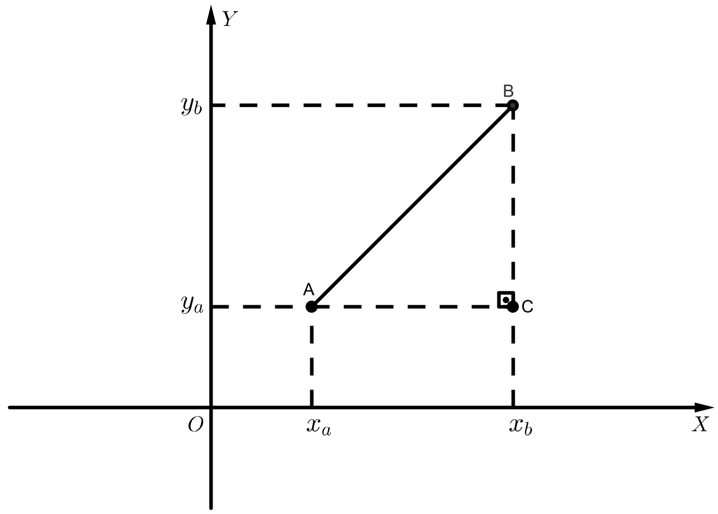

Figura 3.27: Distância entre dois pontos.

e, se o segmento AB for paralelo ao eixo OY, teremos que

$$d(A,B) = |y_b - y_a|.$$

Casos estes que consideramos como triviais. Supondo agora que o segmento AB não seja paralelo aos eixos coordenados, conforme Figura3.27, então aplicando o Teorema de Pitágoras, Teorema 3.6, no triângulo ABC da Figura 3.27, temos que

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2. \tag{3.25}$$

Mas, note que, $\overline{AB} = d(A,B)$, $\overline{AC} = |x_b - x_a|$, $\overline{BC} = |y_b - y_a|$. Assim, substituindo em (3.25), teremos que

$$[d(A,B)]^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2.$$

Portanto

$$d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

■

Surge a seguinte indagação: É possível aplicar a fórmula da distância entre dois pontos nos casos em que o segmento AB é paralelo a um dos eixos coordenados? Adiantamos que nestes casos, a fórmula acima pode ser perfeitamente aplicada, porém, aplicando-a, recairemos nos casos que consideramos como triviais. Vejamos:

1^o Caso: *AB* é horizontal.

Neste caso, os pontos A e B possuem a mesma ordenada. Sejam $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_a)$ dois pontos, temos que

$$d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = |x_b - x_a|.$$

2^o Caso: *AB* é vertical.

Neste caso, os pontos A e B possuem a mesma abscissa. Sejam $A(x_a, y_a)$ e $B(x_a, y_b)$ dois pontos, temos que

$$d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = |y_b - y_a|.$$

Teorema 3.12 *(Condição de Alinhamento de Três Pontos) Três pontos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ estão alinhados se, e somente se*

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Prova: Suponhamos, inicialmente, que os pontos A, B e C estão alinhados e mostraremos que

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para isto, podemos considerar três casos:

1^o Caso: Três pontos numa reta não paralela aos eixos Coordenados.

Considerando a Figura 3.28 e analisando os triângulos ABD e BCE, observe que, $B\hat{A}D = C\hat{B}E$ e $B\hat{D}A = C\hat{E}B = 90°$. Assim, pelo Teorema de Tales aplicado em Triângulos, Teorema 3.5, temos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{EC}} = \frac{x_b - x_a}{x_c - x_b} = \frac{y_b - y_a}{y_c - y_b}. \tag{3.26}$$

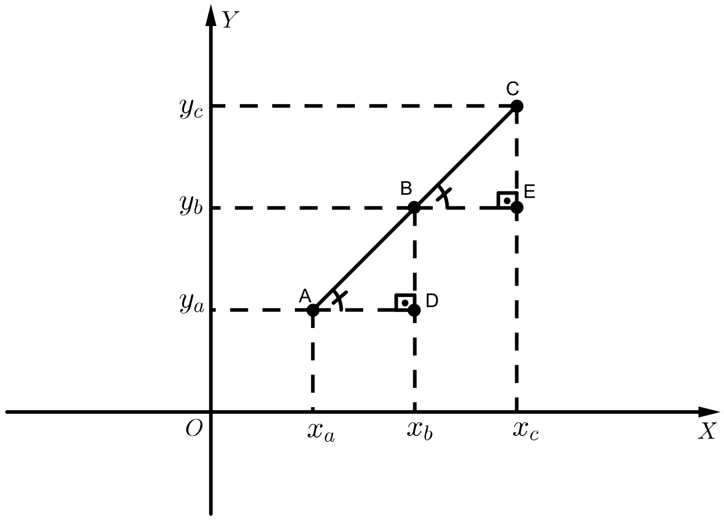

Figura 3.28: Três pontos numa reta não paralela aos eixos coordenados.

Fazendo o produto dos meios pelos extremos em (3.26), teremos que

$$(y_c - y_b)(x_b - x_a) - (x_c - x_b)(y_b - y_a) = 0.$$

Por conseguinte

$$x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c - x_a y_c - x_c y_b - x_b y_a = 0.$$

Mas, note que

$$x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c - x_a y_c - x_c y_b - x_b y_a = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}.$$

Portanto, se os três pontos estão alinhados, então

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2º Caso: Três pontos alinhados horizontalmente.

Neste caso, as ordenadas dos pontos A, B e C são iguais (veja Figura 3.29), ou seja;

$$y_a = y_b = y_c.$$

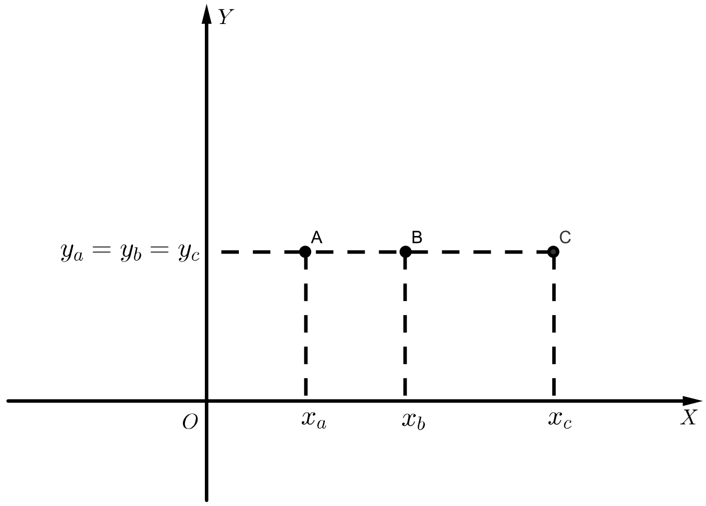

Figura 3.29: Três pontos alinhados horizontalmente.

Portanto, por propriedade de determinantes, temos que o determinante é nulo, pois a 2ª e a 3ª coluna são proporcionais.

3º Caso: Três pontos alinhados verticalmente.

Neste caso, as abscissas dos pontos A, B e C são iguais (veja Figura 3.30), ou seja;

$$x_a = x_b = x_c.$$

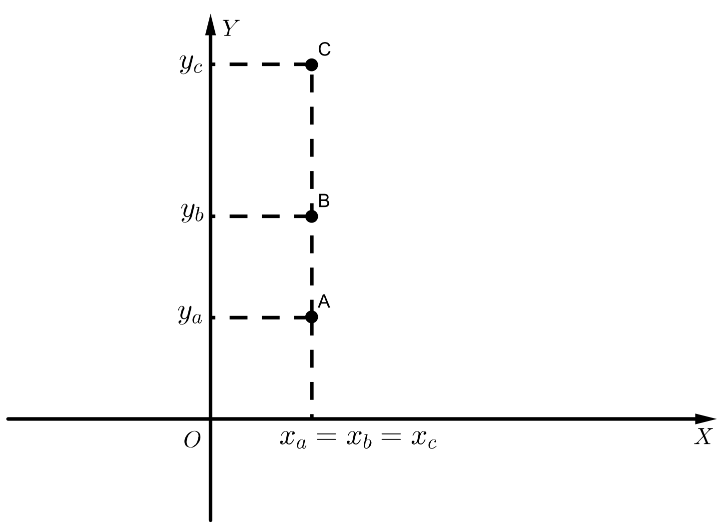

Figura 3.30: Três pontos alinhados verticalmente.

Portanto, por propriedade de determinantes, temos que o determinante é nulo, pois a 1ª e a 3ª colunas são proporcionais.

Para não nos desviarmos do objetivo central desta proposta, deixamos a cargo do leitor a demonstração da recíproca do Teorema 3.12. Ao leitor interessado nesta demonstração, sugerimos a leitura de [7].

■

Na Geometria Euclidiana Plana, sabemos que a área de um triângulo qualquer é dada por metade do produto das medidas de sua base pela sua altura. Assim sendo, a seguir apresentamos a fórmula usada na Geometria Analítica para calcular a área de um triângulo qualquer, dados os seus vértices.

Proposição 3.13 *(Área do Triângulo) Dados três pontos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, x_c)$ não-colineares no plano cartesiano, como o da Figura 3.31, a área do triângulo por eles formado é dada por:*

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|D_{ABC}|}{2}.$$

Em que

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}.$$

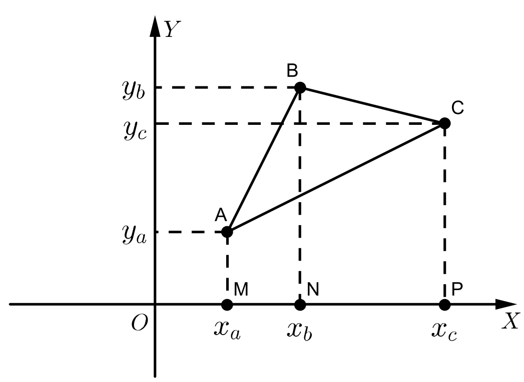

Figura 3.31: Esquema geométrico da prova da Proposição 3.13.

Prova: Podemos calcular a área do triângulo *ABC* decompondo a Figura 3.31 em três trapézios, conforme a Figura 3.32. Como a área de um trapézio é dada por:

$$S = \frac{(Base\,maior + Base\,menor)Altura}{2}.$$

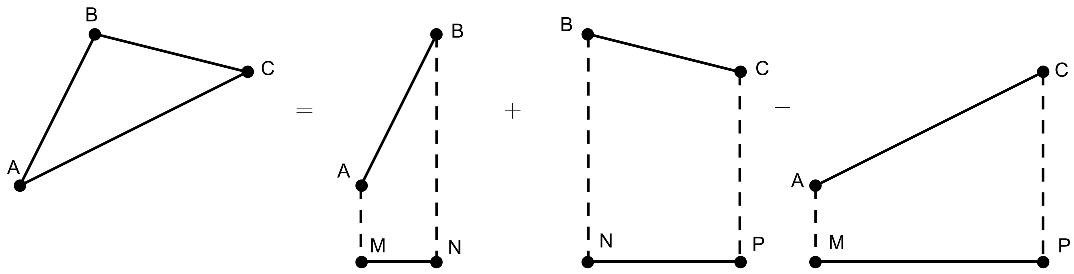

Figura 3.32: Equivalência ao triângulo *ABC* da Figura 3.31.

Então

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(\overline{BN}+\overline{AM})\overline{MN}}{2} + \frac{(\overline{BN}+\overline{CP})\overline{NP}}{2} - \frac{(\overline{CP}+\overline{AM})\overline{MP}}{2}. \tag{3.27}$$

Daí, usando a fórmula da distância entre dois pontos, Proposição 3.11, para calcularmos os comprimentos dos segmentos em (3.27), chegaremos que

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(y_b+y_a)(x_b-x_a)+(y_b+y_c)(x_c-x_b)-(y_c+y_a)(x_c-x_a)}{2},$$

ou ainda;

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}[(x_c y_b + x_a y_c + x_b y_a) - (x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c)].$$

Colocando (-1) em evidência, obtemos

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(-1)[(x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c) - (x_c y_b + x_a y_c + x_b y_a)].$$

Mas, note que

$$(x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c) - (x_c y_b + x_a y_c + x_b y_a) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}.$$

Daí, consideremos

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}.$$

Como a área de uma região plana é sempre um número real positivo, faz-se necessário aplicarmos o módulo. Então, concluimos que

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|D_{ABC}|}{2}.$$

$\blacksquare$

3.2.2 A Reta

Equação Reduzida da Reta

A equação reduzida de uma reta pode ser estabelecida a partir da condição de alinhamento de três pontos. Assim, observando a reta r contida no plano cartesiano ilustrado na Figura 3.33, mostraremos que sua equação reduzida é dada por:

$$y = ax + b.$$

Em que:

- a é chamado coeficiente angular, parâmetro angular ou declividade da reta;
- b é chamado coeficiente linear ou parâmetro linear da reta.

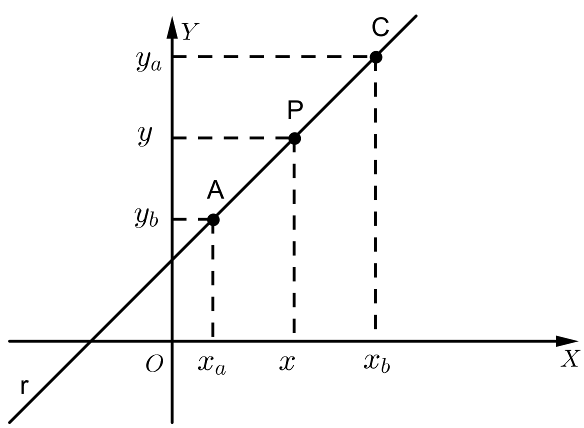

Figura 3.33: Reta r contida no plano cartesiano.

Teorema 3.14 *Toda reta não-vertical tem por equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, chamada de função afim. Reciprocamente, o gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical.*

Prova: Inicialmente, provaremos que toda reta não-vertical tem por equação $y = ax + b$. Para isto, sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $P(x, y)$ três pontos colineares pertencentes à uma reta não-vertical, conforme Figura 3.33 e P um ponto genérico desta reta. Então, pela condição de alinhamento de três pontos, Teorema 3.12, temos que

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por conseguinte

$$x_a y_b + x y_a + x_b y - x y_b - x_a y - x_b y_a = 0.$$

Então

$$x(y_a - y_b) + y(x_b - x_a) = -x_a y_b + x_b y_a.$$

Daí

$$y(x_b - x_a) = -x(y_a - y_b) - x_a y_b + x_b y_a.$$

Assim, como por hipótese a reta é não-vertical, temos que $x_a \neq x_b$ e podemos escrever que

$$y = \frac{-x(y_a - y_b)}{(x_b - x_a)} + \frac{-x_a y_b + x_b y_a}{(x_b - x_a)},$$

ou ainda

$$y = \left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\right) x + \frac{x_b y_a - x_a y_b}{x_b - x_a}.$$

Com isto, fazendo

$$a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad e \quad b = \frac{x_b y_a - x_a y_b}{x_b - x_a},$$

teremos que

$$y = ax + b.$$

Concluímos, desta forma, a prova da primeira parte do Teorema.

Agora, para provarmos que a recíproca é verdadeira, ou seja, que o gráfico de uma função afim $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta não-vertical, consideremos três pontos quaisquer neste gráfico:

$$P_1(x_1, ax_1+b), P_2(x_2, ax_2+b) \text{ e } P_3(x_3, ax_3+b).$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $x_1 < x_2 < x_3$ e mostraremos que os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares, ou seja, que

$$d(P_1,P_3) = d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3),$$

de acordo com o Axioma 3.3. Ora, como $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$ e $x_3 - x_1$ são positivos, então

$$d(P_1,P_3) = \sqrt{(x_3-x_1)^2 + [(ax_3+b)-(ax_1+b)]^2} = \sqrt{(x_3-x_1)^2 + a^2(x_3-x_1)^2}.$$

Assim

$$d(P_1,P_3) = (x_3-x_1)\sqrt{1+a^2}.$$

E mais,

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + [(ax_2+b)-(ax_1+b)]^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + a^2(x_2-x_1)^2}.$$

Assim

$$d(P_1,P_2) = (x_2-x_1)\sqrt{1+a^2}. \tag{3.28}$$

Por fim, temos que

$$d(P_2,P_3) = \sqrt{(x_3-x_2)^2 + [(ax_3+b)-(ax_2+b)]^2} = \sqrt{(x_3-x_2)^2 + a^2(x_3-x_2)^2}.$$

Assim

$$d(P_2,P_3) = (x_3-x_2)\sqrt{1+a^2}. \tag{3.29}$$

Agora, somando (3.28) com (3.29), obtemos

$$d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3) = (x_2-x_1)\sqrt{1+a^2}+(x_3-x_2)\sqrt{1+a^2} = (x_3-x_1)\sqrt{1+a^2} = d(P_1,P_3).$$

Ou seja;

$$d(P_1,P_3) = d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3).$$

Portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical.

■

Podemos dizer, então, que a equação reduzida da reta $y = ax+b$, se caracteriza pelo fato de:

- A variável y ser dada em função da variável x;
- Ambas as variáveis terem grau um.

Estudo do Coeficiente Angular *(a)*

Do Teorema 3.14, temos que $a = \frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}$. Agora, mostraremos que o coeficiente angular a corresponde à tangente do ângulo que a reta r forma com o eixo OX, que chamaremos de α. Considere a Figura 3.34.

Incialmente, seja C o ponto de interseção da reta paralela ao eixo OX que passa pelo ponto A com a reta paralela ao eixo OY que passa pelo ponto B. Daí, aplicando a definição de tangente no triângulo retângulo ABC da Figura 3.34, teremos que

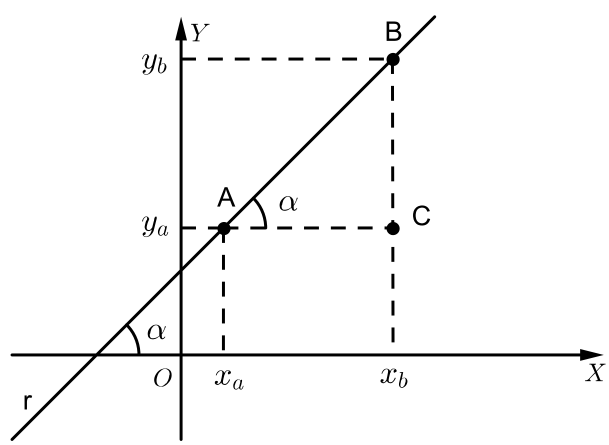

Figura 3.34: Coeficiente angular da reta $y = ax+b$.

$$tg\alpha = \frac{Medida\ do\ Cateto\ Oposto\ ao\ \hat{A}ngulo\ \alpha}{Medida\ do\ Cateto\ Adjacente\ ao\ \hat{A}ngulo\ \alpha}.$$

Como $B\hat{A}C = \alpha$, pois são ângulos correspondentes, então

$$tg\alpha = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}.$$

Mas, por hipótese

$$a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}.$$

Logo

$$a = tg\alpha.$$

Portanto, a declividade a corresponde a tangente do ângulo que a reta r forma com o eixo OX.

De modo geral:

- Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $a > 0$, pois a função tangente é positiva no 1^o quadrante. Neste caso, a reta é o gráfico de uma função crescente (veja Figura 3.35).

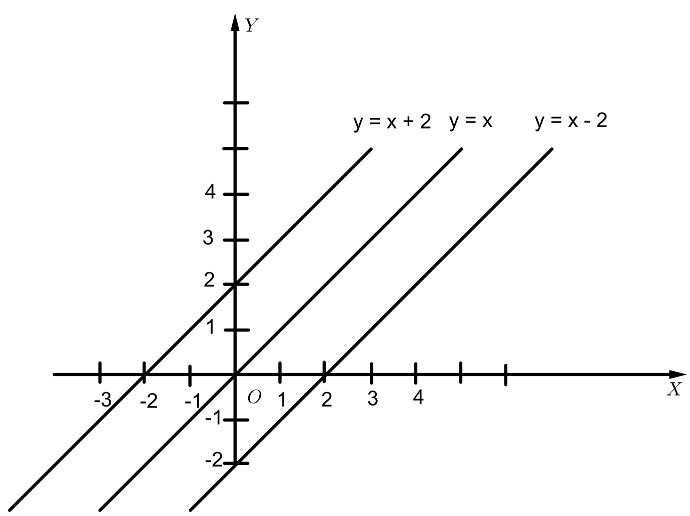

Figura 3.35: Retas de coeficiente ângular $a = 1$, gráficos de funções crescentes.

- Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $a < 0$, pois a função tangente é negativa no 2^o quadrante. Neste caso, a reta é o gráfico de uma função decrescente (veja Figura 3.36).

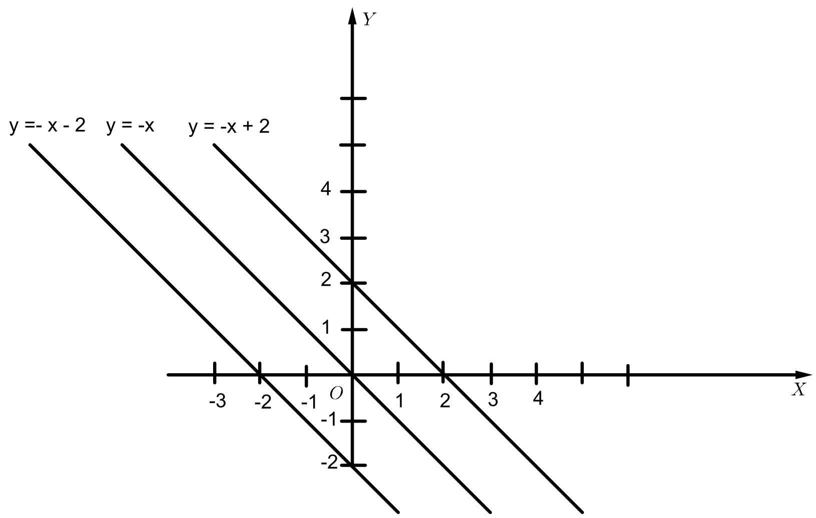

Figura 3.36: Retas de coeficiente ângular $a = -1$, gráficos de funções decrescentes.

- Se $\alpha = 0\ rad$, então $a = 0$, pois $tg(0) = 0$. Neste caso, a reta é horizontal e paralela ao eixo OX (veja Figura 3.37).

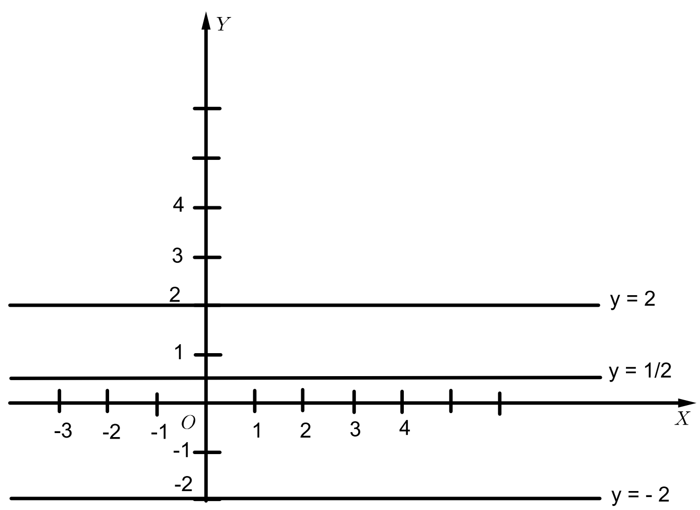

Figura 3.37: Retas horizontais de coeficiente ângular $a = 0$.

- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então a não é definida, pois não existe $tg(\frac{\pi}{2})$. Neste caso, a reta é vertical e paralela ao eixo OY. Dizemos também, que neste caso a inclinação a é infinita (veja Figura 3.38).

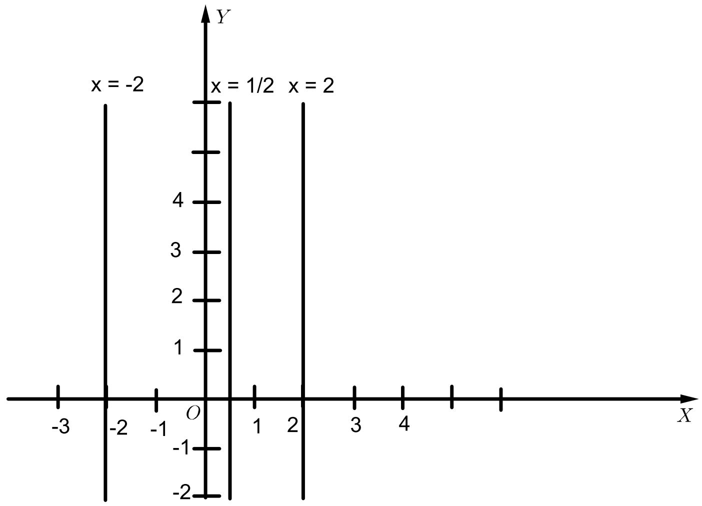

Figura 3.38: Retas verticais de coeficiente ângular infinito.

Estudo do Coeficiente Linear *(b)*

Em um mesmo Plano Cartesiano, vamos construir as retas $r : y = x$, $s : y = x + 1$ e $t : y = x - 2$ (veja Figura 3.39). Assim, temos que

$$r : \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \end{cases}$$

$$t : \begin{cases} a = 1, \\ b = -2, \end{cases}$$

Observe, na Figura 3.39, que as retas r, s e t intersectam o eixo OY no ponto de coordenadas $(0,0)$, $(0,1)$ e $(0,-2)$, respectivamente.

De modo geral, toda reta não-vertical intersecta o eixo OY no ponto onde a abscissa x é zero, isto é, em $(0,y)$. Assim, fazendo $x = 0$ em $y = ax + b$, teremos que

$$y = a.0 + by = b.$$

Logo

$$y = b.$$

Portanto, o coeficiente linear b indica a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas.

Definição 3.26 *(Equação Geral da Reta) Chamamos de equação geral da reta, a equação dada por:*

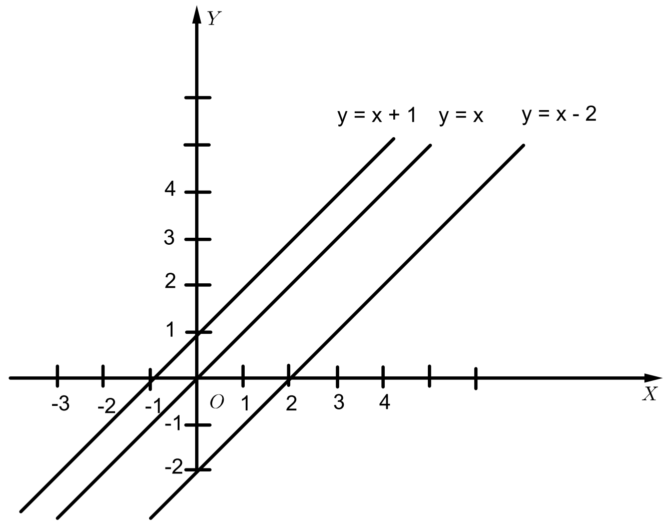

Figura 3.39: Coeficiente Linear.

$$Ax + By + C = 0.$$

Definição 3.27 *(Equação Segmentária da Reta) Seja r uma reta que intersecta o eixo OX no ponto $P(p, 0)$ e o eixo OY no ponto $Q(0, q)$, em que $p \neq 0$ e $q \neq 0$ (veja Figura 3.40). Chamamos de equação segmentária de r a equação dada por:*

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

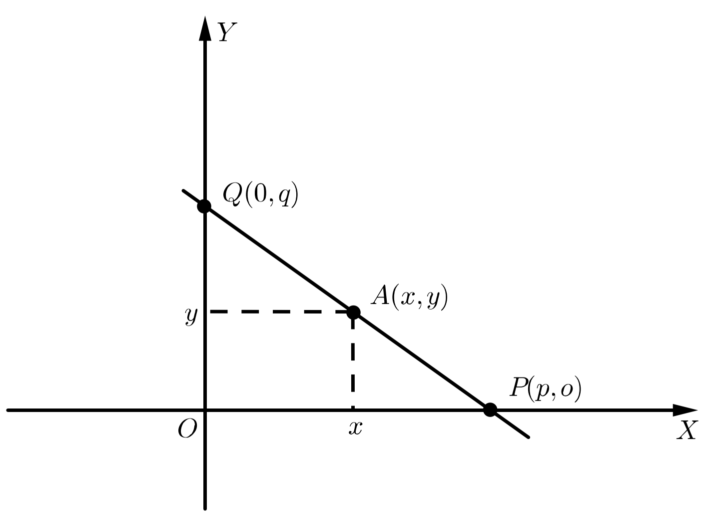

Figura 3.40: Reta r que intersecta o eixo OX no ponto P e OY no ponto Q.

Posições Relativas Entre Retas

Consideremos duas retas r e s no plano de equações $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, respectivamente. Teremos três posições relativas entre estas retas, quais sejam: as retas r e s são paralelas, ou seja, essas retas não têm pontos em comum; as retas r e s são coincidentes, ou seja, essas retas têm todos os seus pontos em comum; e as retas r e s são concorrentes, ou seja, essas retas têm apenas um ponto em comum.

Neste momento, faz-se pertinente lembrar ao leitor que os coeficientes angular e linear da reta são oriundos, neste trabalho, da Condição de Alinhamento de Três Pontos (veja a prova do Teorema 3.14), a qual foi demonstrada usando o Teorema de Tales Aplicado em Triângulos. Desta forma, o estudo das relações existentes entre os coeficientes angulares e lineares de duas ou mais equações reduzidas das retas dadas e as posições relativas entres estas retas está dentro do objetivo central desta proposta.

Teorema 3.15 *(Paralelismo) As retas r e s de equações $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, respectivamente, são paralelas se, e somente se, $a = a'$ e $b \neq b'$.*

Prova: Inicialmente mostraremos que se $a = a'$ e $b \neq b'$, então as retas são paralelas. Para isto, observemos que se $a = a'$, então $ax = a'x$ e sendo $b \neq b'$, temos que $ax + b \neq a'x + b', \forall x \in \mathbb{R}$. Isto significa que dois pontos, um na reta de equação $y = ax + b$ e outro na reta de equação $y = a'x + b'$(com mesma inclinação, ou seja, $a = a'$) que tenham a mesma abscissa x, têm ordenadas diferentes. Logo, estas retas não possuem pontos em comum, portanto, são retas paralelas.

Agora, mostraremos à recíproca, ou seja, se as retas de equações $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são paralelas, então $a = a'$ e $b \neq b'$. Suponhamos, inicialmente, que $b \neq b'$, pois do contrário, elas teriam em comum o ponto de abscissa zero, haja vista que em $x = 0$, teríamos na primeira reta $y = b$ e na equação da segunda reta $y = b'$, ou seja, as retas em questão teriam o ponto $(0, b)$ ou $(0, b')$ em comum, o que contraria a hipótese das mesmas serem paralelas. Além disso, deve-se ter $a = a'$, pois, se $a \neq a'$, então a equação $ax + b = a'x + b'$ teria uma solução, digamos x_0, em que

$$x_0 = \frac{b' - b}{a - a'},$$

ou seja, existiria um valor de abscissa de tal modo que as ordenadas seriam iguais, e este fato também contraria a hipótese das retas serem paralelas. Logo, a consideração de $a \neq a'$ não é satisfatória. Portanto, $a = a'$.

$\blacksquare$

Teorema 3.16 *(Coincidência) As retas r e s de equações $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, respectivamente, são coincidentes se $a = a'$ e $b = b'$.*

Prova: Temos por hipótese que $a = a'$ e $b = b'$ e devemos mostrar que as retas são coincidentes. Para isto, observemos que se $a = a'$ e $b = b'$, então $ax = a'x$. E mais, $ax+b = a'x+b'$. Isto significa que, qualquer que se seja o valor da abscissa, teremos um mesmo valor da ordenada em ambas as retas. Logo, essas retas têm todos os seus pontos em comum. Portanto, são retas coincidentes.

■

Teorema 3.17 *(Concorrência) As retas r e s de equações $y = ax+b$ e $y = a'x+b'$, respectivamente, são concorrentes se $a \neq a'$.*

Prova: Nossa hipótese é que $a \neq a'$ e devemos provar que as retas r e s se intersectam em um único ponto, ou seja, que elas são concorrentes. Façamos duas considerações, quais sejam:

1ª) Suponha que $b \neq b'$. Então, a equação $ax+b = a'x+b'$ tem uma única solução, digamos x_0, igual a

$$x_0 = \frac{b'-b}{a-a'},$$

pois, por hipótese, $a \neq a'$ e, por conseguinte, $a-a' \neq 0$. Logo, o ponto $P\left(\frac{b'-b}{a-a'}, \frac{ab'-ba'}{a-a'}\right)$ é o único ponto de interseção entre as retas r e s. Portanto, as retas são concorrentes.

2ª) Suponha, agora, que $b = b'$. Com isto, a equação $ax+b = a'x+b'$ tem solução única em $x = 0$, pois a equação $ax+b = a'x+b'$ passa a ser escrita como $ax = a'x$, haja vista que $b = b'$. Consequentemente, neste caso as retas terão um único ponto em comum, exatamente sobre o eixo OY. Portanto, as retas são concorrentes.

■

Vamos agora estudar um caso particular de retas concorrentes, que são as retas perpendiculares. Para isto, inicialmente considerando que uma delas é horizontal (equação $y = b$), então, a outra é vertical (equação $x = c$) e não há mais o que dizer. Portanto, vamos nos restringir as retas <u>não-verticais</u> e <u>não-horizontais</u>, e neste caso vejamos o seguinte Teorema:

Teorema 3.18 *(Perpendicularismo) Duas retas r e s são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é igual a (-1) (veja Figura 3.41).*

Prova: Inicialmente, chamaremos de α_1 e α_2 os ângulos que as retas r e s formam com o eixo OX, respectivamente. Por conseguinte, chamaremos de m_r e m_s os coeficientes angulares de r e s, respectivamente.

Agora, provaremos a primeira parte do Teorema. Para isto, temos por hipótese, que as retas são perpendiculares, fato este visualizado na Figura 3.41.

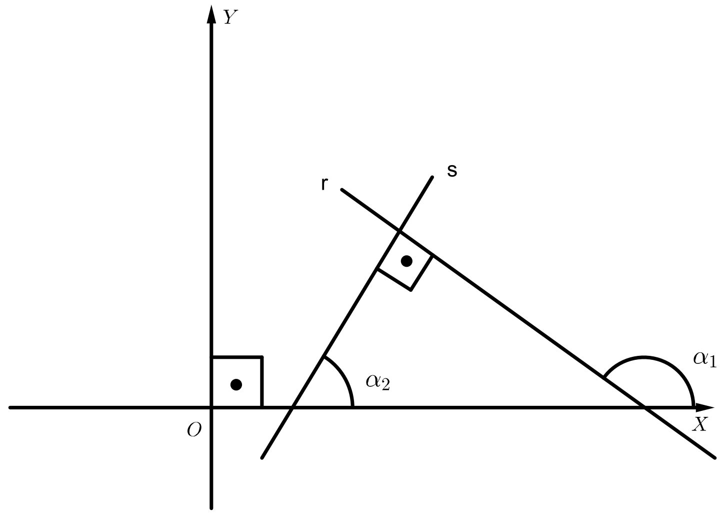

Figura 3.41: Retas perpendiculares.

Como α_1 é o ângulo externo do triângulo formado pelos pontos de interseção das retas r e s com o eixo OX e pelo ponto de interseção das retas r e s, então, de acordo com a Colorário 3.2, temos que $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{\pi}{2}$. Daí

$$tg\alpha_1 = tg\left(\alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) = tg\alpha_1 = -cotg(\alpha_2).$$

Por conseguinte

$$tg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_2}.$$

Logo

$$tg\alpha_1.tg\alpha_2 = -1.$$

Mas $tg\alpha_1 = m_r$ e $tg\alpha_2 = m_s$. Portanto

$$m_r.m_s = -1.$$

Vamos agora a segunda parte do teorema. Para isto, temos como hipótese que

$$m_r.m_s = -1.$$

Este fato já nos assegura que as retas em questão são concorrentes, pois se fossem paralelas ou coincidentes teriam o mesmo coeficiente angular e isso implicaria no absurdo de o quadrado de cada um desses coeficientes ser igual a (-1), ou seja,

$$m_r.m_s = m_r^2 = m_s^2 = -1.$$

Assim, chamando de θ o ângulo entre as retas em questão, como visualizado na Figura 3.42. Com isto, do Colorário 3.2, temos que: $\alpha_1 = \alpha_2 + \theta$. Daí, usando a hipótese de que $m_r.m_s = -1$, e sabendo que $tg\alpha_1 = m_r$ e $tg\alpha_2 = m_s$, teremos

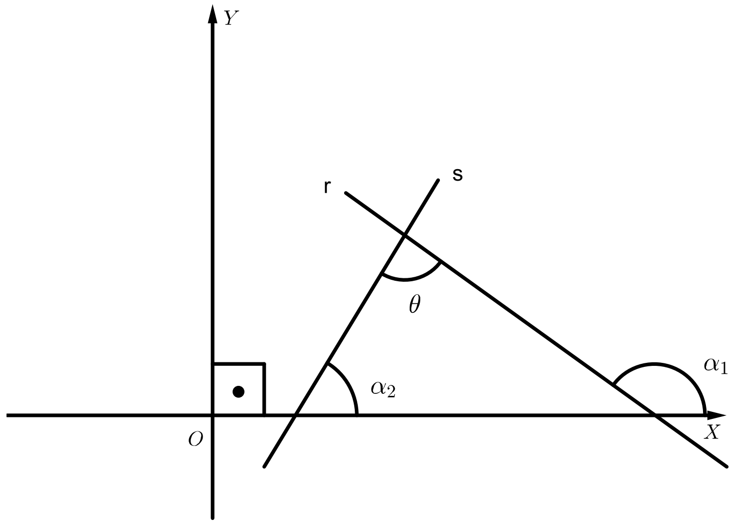

Figura 3.42: Esquema geométrico da prova da recíproca do Teorema 3.18.

$$tg\alpha_1 tg\alpha_2 = -1.$$

Por conseguinte

$$tg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_2}.$$

Daí

$$tg\alpha_1 = -cotg(\alpha_2) = tg\left(\alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Como $0 < \alpha_1 < \pi$ e a função tangente é injetiva neste intervalo, temos que

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{\pi}{2}.$$

Com isto, comparando as equações abaixo:

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \theta \quad e \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \frac{\pi}{2},$$

obtemos que

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, as retas r e s são perpendiculares.

■

Ângulos entre Duas Retas a partir de seus Coeficientes Angulares.

No estudo de ângulos entre duas retas r e s, suporemos sempre que as retas tenham apenas um ponto em comum. E mais, faremos duas considerações com relação a essas retas, quais sejam:

1°) Uma das retas em questão é vertical, digamos s (veja Figura 3.43).

Inicialmente consideremos o ângulo α_1 que a reta r forma com o eixo OX como sendo um ângulo agudo, ou seja, $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$.

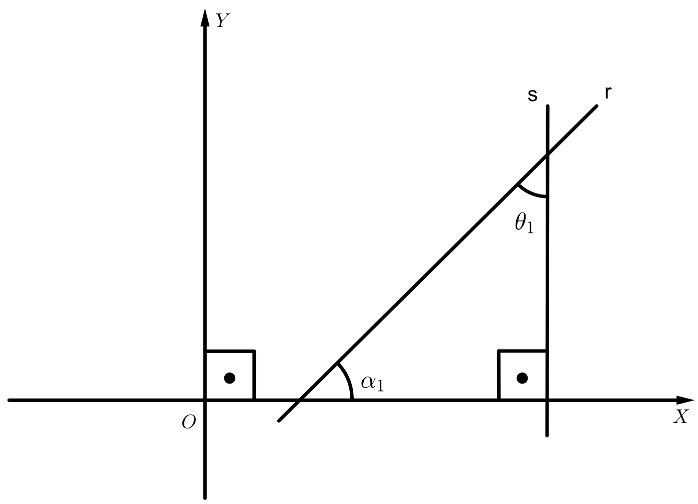

Figura 3.43: Ângulo entre duas retas, em que uma reta é vertical e a outra faz um ângulo agudo com o eixo OX.

Assim, de acordo com o Teorema 3.1, temos que

$$\alpha_1 + \theta_1 + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

ou seja,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1.$$

Daí

$$tg\theta_1 = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = cotg\alpha_1.$$

Logo

$$tg\theta_1 = \frac{1}{tg\alpha_1}.$$

Mas, $tg\alpha_1 = m_r$. Por conseguinte

$$tg\theta_1 = \frac{1}{m_r}.$$

Agora, consideremos o ângulo α_1 como sendo obtuso, ou seja, $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi$, conforme Figura 3.44.

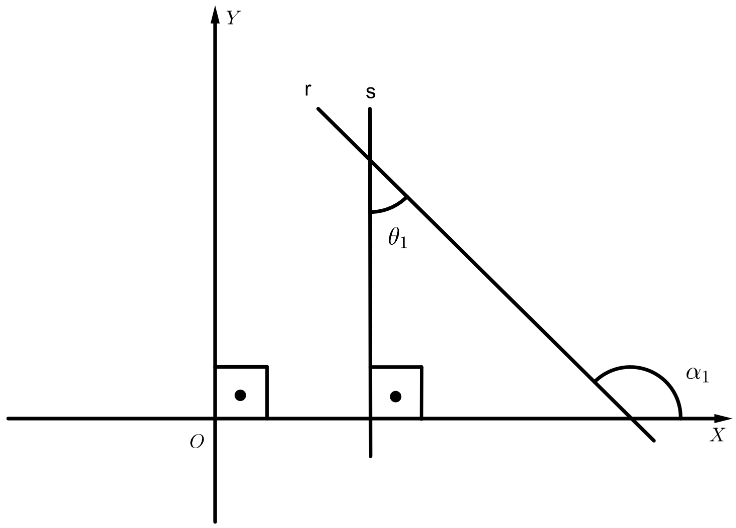

Figura 3.44: Ângulo entre duas retas, em que uma reta é vertical e a outra faz um ângulo obtuso com o eixo *OX*

Assim, usando o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, Teorema 3.1, temos que

$$(\pi - \alpha_1) + \theta_1 + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Logo

$$\theta_1 = \alpha_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Daí

$$tg\theta_1 = tg\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -cotg\alpha_1.$$

Então

$$tg\theta_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}.$$

Sintetizando as duas situações numa única equação, concluímos que

$$tg\theta_1 = \left|\frac{1}{m_r}\right|.$$

Com isto, passaremos a considerar o ângulo entre as retas r e s como sendo o ângulo agudo θ_1 formado entre elas, ou seja, que $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$.

2°) Nenhuma das retas é vertical:

Inicialmente consideremos o ângulo α_1 que a reta r forma com o eixo OX como sendo um ângulo agudo (veja Figura 3.45).

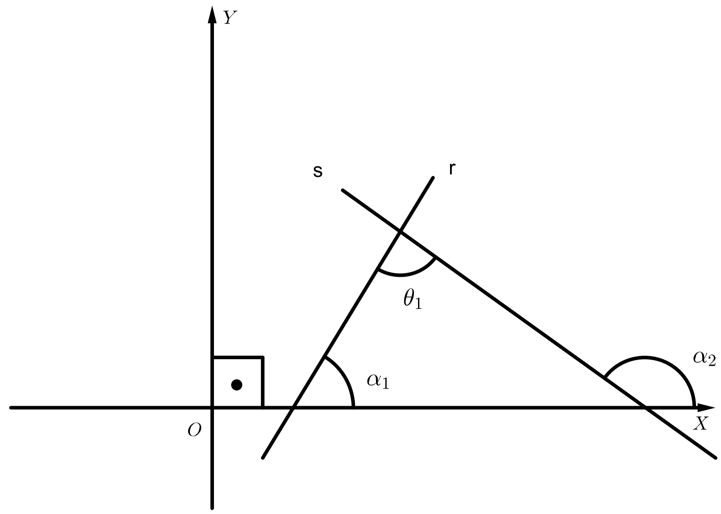

Figura 3.45: Ângulo entre duas retas não-verticais, em que α_1 é um ângulo agudo.

Com isto, do Teorema 3.1, temos que

$$\alpha_1 + \theta_1 + (\pi - \alpha_2) = \pi.$$

Por conseguinte

$$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Assim

$$tg\theta_1 = tg(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Logo, pela fórmula da tangente da diferença de dois arcos, temos que

$$tg\theta_1 = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1}.$$

Mas, $tg\alpha_1 = m_r$ e $tg\alpha_2 = m_s$. Donde segue que

$$tg\theta_1 = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}.$$

Agora, considerando o ângulo α_1, que a reta r forma com o eixo OX, como sendo um ângulo obtuso, ou seja $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi$, então do Teorema 3.1, teremos que

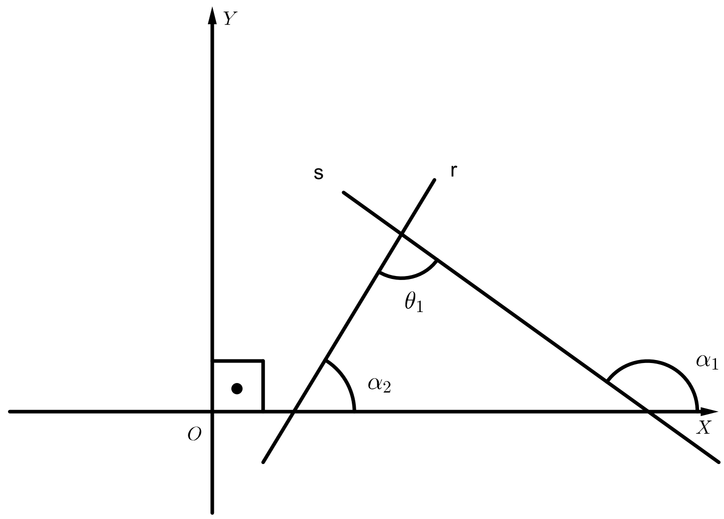

Figura 3.46: Ângulo entre duas retas não-verticais, em que α_1 é um ângulo obtuso

$$\alpha_2 + \theta_1 + (\pi - \alpha_1) = \pi.$$

Daí

$$\theta_1 = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Assim

$$tg\theta_1 = tg(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Logo, aplicando a fórmula da tangente da diferença de dois arcos, temos que

$$tg\theta_1 = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}.$$

Mas, $tg\alpha_1 = m_r$ e $tg\alpha_2 = m_s$. Por conseguinte

$$tg\theta_1 = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}.$$

Portanto, em qualquer situação para o ângulo θ_1, temos que

$$tg\theta_1 = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|.$$

O Teorema a seguir, Teorema 3.19, trata-se da fórmula para calcularmos, no plano, a distância de uma reta r a um ponto $P(x_p, y_p)$ não pertencente a r. Para demonstrá-lo usaremos algumas proposições apresentadas até o presente momento da Geometria Analítica que foram demonstradas usando o Teorema de Tales ou de Pitágoras, ou ainda, uma proposição que advinha de um destes Teoremas, tais como: Equação Reduzida da Reta (Teorema 3.14), Distância entre Dois Pontos (Proposição 3.11), Perpendicularísmo de Retas (Teorema 3.15). Este fato torna, de certa forma, esta demonstração uma aplicação dos conteúdos estudados.

Antes de enunciarmos o próximo Teorema, lembramos que para calcular a distância de um ponto $P(x_p, y_p)$ a uma reta r no plano, denotada por $d(P, r)$, equivale a calcularmos a distância do ponto P ao ponto P_0, em que P_0 é o ponto de interseção da reta r com a única reta, digamos t, perpendicular a r e que passa pelo ponto P (veja 3.47), ou seja, $d(P, r) = d(P, P_0)$.

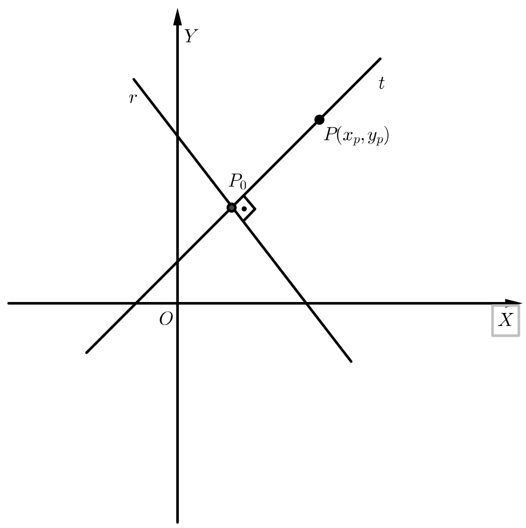

Figura 3.47: Distância entre ponto e reta.

Teorema 3.19 *(Distância entre Ponto e Reta) Dados um ponto $P(x_p, y_p)$ e uma reta $r : ax + by + c = 0$, a distância entre eles, $d(P, r)$, é dada por:*

$$d(P, r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Prova: Para encontrarmos a fórmula que irá determinar a distância de um ponto a uma reta, comecemos com o problema de calcular a distância entre duas retas paralelas. Para isto, sejam $ax + by + c = 0$ e $ax + by + c' = 0$ as equações gerais dessas retas paralelas, conforme Figura 3.48.

Para facilitar nossos calculos, consideremos uma reta t perpendicular às paralelas e que passe pela origem do sistema dos eixos perpendiculares. Esta reta é única e obviamente terá equação $y = (b/a)x$, pois, o coeficiente angular das paralelas é igual a $(-a/b)$. Assim, pelo

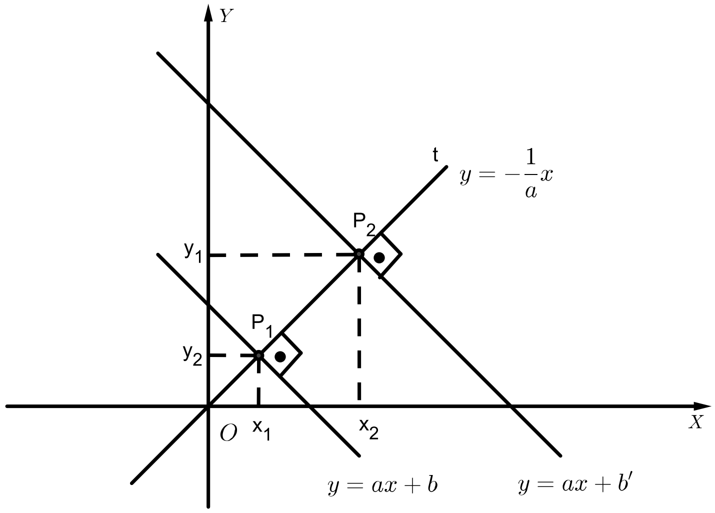

Figura 3.48: Distância entre duas retas paralelas.

Teorema de Perpendicularismo de retas, Teorema 3.18, temos que $m_t.(-a/b) = -1$. Logo, $m_t = (b/a)$. Além disso, como a reta t passa pela origem do sistema de eixos coodenados, então o seu coeficiente li-near é igual a zero. Com isto, o problema de calcular a distância entre as paralelas se resume ao de calcular a distância entre os pontos P_1 e P_2, originados da interseção da perpendicular t com as paralelas de equações $ax+by+c=0$ e $ax+by+c'=0$, respectivamente. Ou seja, $d(P,r) = d(P_1,P_2)$, em que:

$$P_1(x_1, \frac{b}{a}x_1) \quad e \quad P_2(x_2, \frac{b}{a}x_2).$$

Assim, usando a fórmula da Distância entre Dois Pontos, Proposição 3.11, temos que

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+\left[\left(\frac{b}{a}\right)x_1-\left(\frac{b}{a}\right)x_2\right]^2}.$$

Daí

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+\left[\left(\frac{b}{a}\right)(x_1-x_2)\right]^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2(x_1-x_2)^2}.$$

Então

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]} = |x_2-x_1|\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}.$$

Logo

$$d(P_1,P_2) = |x_2 - x_1|\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}. \tag{3.30}$$

Por outro lado, P_1 e P_2 pertencem às retas paralelas. Assim, substituindo suas coordenadas nas equações de $ax+by+c=0$ e $ax+by+c'=0$, respectivamente, temos que

$$ax_1 + b\left(\frac{b}{a}\right)x_1 = -c, \tag{3.31}$$

e

$$ax_2 + b\left(\frac{b}{a}\right)x_2 = -c'. \tag{3.32}$$

Daí, objetivando encontrar o valor de $|x_2 - x_1|$, subtrairemos (3.31) de (3.32), membro a membro, obtendo

$$\left[ax_2 + b\left(\frac{b}{a}\right)x_2\right] - \left[ax_1 + b\left(\frac{b}{a}\right)x_1\right] = -c' - (-c).$$

Ou seja;

$$ax_2 + \frac{b^2}{a}x_2 - ax_1 - \frac{b^2}{a}x_1 = a(x_2 - x_1) + \frac{b^2}{a}(x_2 - x_1) = -c' + c.$$

Daí

$$(x_2 - x_1)\left(a + \frac{b^2}{a}\right) = (x_2 - x_1)\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right) = -c' + c.$$

Por conseguinte

$$(x_2 - x_1) = \frac{a(-c'+c)}{a^2+b^2}. \tag{3.33}$$

Aplicando o módulo em ambos os membros de (3.33), teremos que

$$|x_2 - x_1| = \left|\frac{a(-c'+c)}{a^2+b^2}\right|.$$

Logo

$$|x_2 - x_1| = \frac{|a||-c'+c|}{a^2+b^2}. \tag{3.34}$$

Com isto, substituindo (3.34) em (3.30), obtemos

$$d(P_1,P_2) = \frac{|a||-c'+c|\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)|a|}.$$

Mas, note que

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} = \frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{a^2+b^2} = \frac{1}{(a^2+b^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Assim

$$d(P_1,P_2) = \frac{|-c'+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3.35}$$

A expressão (3.35) nos fornece a distância entre as retas paralelas de equações gerais $ax+by+c=0$ e $ax+by+c'=0$.

Agora, vamos considerar a reta de equação $ax+by=-c$ e um ponto $P(x_p,y_p)$ que não pertence à reta dada, conforme Figura 3.49:

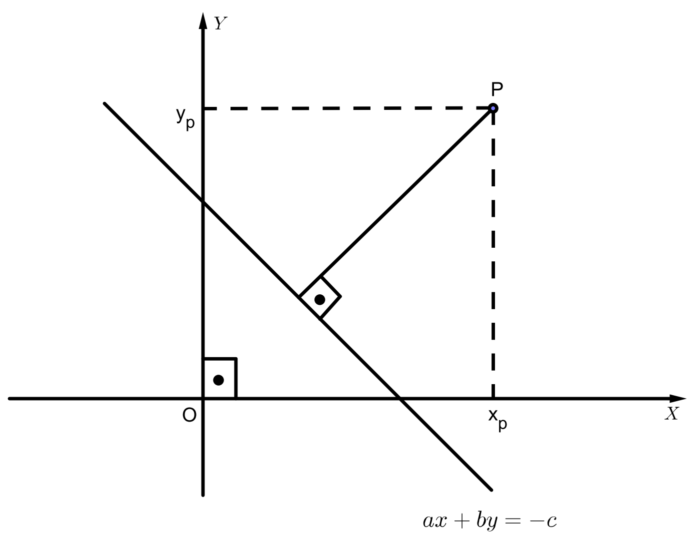

Figura 3.49: Distância de um ponto a uma reta que não contém o ponto dado

Do Axioma 3.4 da Geometria Euclidiana Plana, sabemos que existe uma e somente uma reta que passa pelo ponto P e é paralela à reta dada, como Figura 3.50.

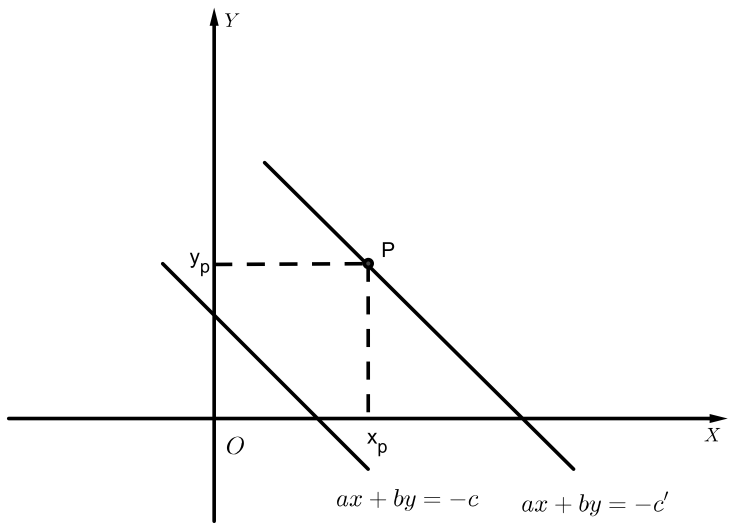

Figura 3.50: Distância entre ponto e reta.

Seja $ax+by=-c'$ a equação desta reta. Então, $ax_p+by_p=-c'$, pois o ponto $P(x_p,y_p)$ pertence à reta, por construção.

Assim, o problema de calcularmos a distância de um ponto a uma reta é solucionado com um caso particular da fórmula (3.35), ou seja, sendo r a reta de equação $ax+by=-c'$, temos que

$$d(P,r)=d(P_1,P_2)=\frac{|-c'+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3.36}$$

Em que os pontos P_1 e P_2 são originados da interseção da perpendicular t com as paralelas de equações $ax+by+c=0$ e $ax+by+c'=0$, respectivamente, conforme Figura 3.48. Mas, $ax_p+by_p=-c'$, pois por hipótese o ponto P pertence à reta de equação $ax+by=-c'$. Portanto, substituindo-a em (3.36), obtemos que

$$d(P,r)=d(P_1,P_2)=\frac{|ax_p+by_p+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

■

Com o intuito de encontrarmos uma fórmula que nos desse a distância entre duas retas paralelas no plano cartesiano, partindo exclusivamente da equação reduzida das retas dadas, chegaremos a fórmula do Teorema a seguir. É fato que esta fórmula não é encontrada nos livros didáticos, tais como [6], [7] e [14]. Não sabemos o motivo deste fato, porém chegamos a conclusão de que esta facilita muito os cálculos para encontrarmos a distância entre as retas paralelas, quando dado no problema somente as equações reduzidas das paralelas.

Teorema 3.20 *(Distância entre Retas Paralelas) Dadas duas retas paralelas $r: y=ax+b$ e $s: y=ax+b'$, no plano cartesiano, a distância entre elas, denotada por $d(r,s)$, é dada por:*

$$d(r,s) = \frac{|b-b'|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Prova: Sejam $r : y = ax+b$ e $s : y = ax+b'$ duas retas paralelas. Consideremos uma reta $t : y = cx+d$ perpendicular às retas r e s, passando pelo origem do sistema de eixos coordenados, como ilustrado na Figura 3.51. Assim, temos que $d = 0$ e que $ca = -1$. Logo, $c = -1/a$. Então, a equação reduzida de t é dada por: $y = -\frac{1}{a}x$.

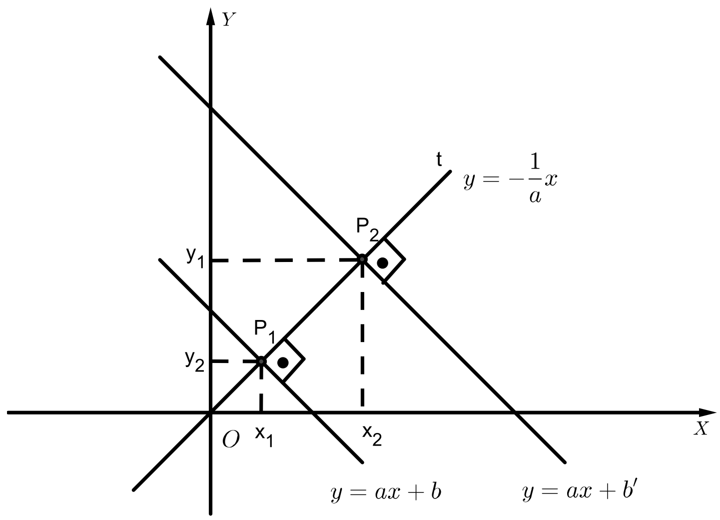

Figura 3.51: Distância entre retas paralelas com equações reduzidas
proposição6

Com isto, o problema de calcular a distância entre as paralelas se resume ao de calcular a distância entre os pontos P_1 e P_2, originados da interseção da perpendicular t com as paralelas de equações reduzidas $y = ax+b$ e $y = ax+b'$, respectivamente. Ou seja, vamos calcular $d(P_1,P_2)$, pois $d(r,s) = d(P_1,P_2)$, em que:

$$P_1(x_1, -\frac{1}{a}x_1) \quad e \quad P_2(x_2, -\frac{1}{a}x_2).$$

Assim, usando a fórmula da distância entre dois pontos, Proposição 3.11, temos que

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+\left[\left(-\frac{1}{a}\right)x_2-\left(-\frac{1}{a}\right)x_1\right]^2}.$$

Daí

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+\left[\left(-\frac{1}{a}\right)(x_2-x_1)\right]^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+\left(-\frac{1}{a}\right)^2(x_2-x_1)^2}.$$

Então

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2\left[1+\left(\frac{1}{a}\right)^2\right]} = |x_2-x_1|\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}}.$$

Logo

$$d(P_1,P_2) = |x_2-x_1|\frac{\sqrt{a^2+1}}{|a|}. \tag{3.37}$$

Por outro lado, P_1 e P_2 pertencem às retas paralelas. Daí, substituindo suas coordenadas nas equações $y = ax+b$ e $y = ax+b'$, respectivamente, teremos que

$$-\frac{1}{a}x_1 = ax_1+b.$$

Por conseguinte

$$ax_1+\frac{1}{a}x_1 = -b.$$

Assim

$$x_1\left(a+\frac{1}{a}\right) = -b. \tag{3.38}$$

Temos também que

$$-\frac{1}{a}x_2 = ax_2+b'.$$

Por conseguinte

$$ax_2+\frac{1}{a}x_2 = -b'.$$

Assim

$$x_2\left(a+\frac{1}{a}\right) = -b'. \tag{3.39}$$

Assim, subtraindo (3.38) de (3.39), membro a membro, obtemos

$$x_2\left(a+\frac{1}{a}\right)-x_1\left(a+\frac{1}{a}\right) = -b'-(-b).$$

Ou seja;

$$(x_2 - x_1)\left(\frac{a^2+1}{a}\right) = -b' + b.$$

Então

$$(x_2 - x_1) = \frac{a(-b'+b)}{a^2+1}. \tag{3.40}$$

Aplicando o módulo em ambos os membros de (3.40), teremos que

$$|x_2 - x_1| = \left|\frac{a(-b'+b)}{a^2+1}\right|.$$

Logo

$$|x_2 - x_1| = \frac{|a|\,|-b'+b|}{a^2+1}. \tag{3.41}$$

Com isto, substituindo (3.41) em (3.37), obtemos

$$d(P_1,P_2) = \frac{|a|\,|-b'+b|\sqrt{a^2+1}}{(a^2+1)|a|} = \frac{|-b'+b|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Mas, $d(P_1,P_2) = d(r,s)$. Portanto

$$d(r,s) = \frac{|b-b'|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

■

Capítulo 4

Considerações Sobre as Aulas Ministradas Aplicando Esta Proposta

A fim de evidenciarmos nossa proposta, iniciamos uma aula na turma do 3º ano do ensino médio da escola CAIC José Joffily, localizada no município de Campina Grande - PB, com o objetivo de apresentar aos alunos as fórmulas da Geometria Analítica partindo dos Teoremas de Tales e de Pitágoras.

No nosso primeiro encontro, começamos a aula fazendo uma revisão dos conceitos necessários para o entendimento dos conteúdos de Geometria Analítica, bem como foram discutidos, no quadro, alguns exercícios referentes a estes conteúdos. Em seguida, foi solicitado que os alunos respondessem alguns exercícios para que fosse avaliado o grau de entendimento e quais dúvidas ainda existiam.

No segundo encontro com a turma, resgatamos um pouco das contribuições de Tales, Pitágoras e René Descartes para o estudo e progresso da Geometria. Nesse instante, traçamos um breve perfil de cada personalidade, relatando seus grandes feitos e a importância dos estudos realizados por essas celebridades na época deles, baseado no Capítulo 2 deste trabalho.

Do terceiro ao sétimo encontro, foram apresentados aos alunos os axiomas, as definições, as notações e as proposições da Geometria Euclidiana Plana, bem como os Teoremas de Tales e de Pitágoras e suas respectivas demonstrações; conteúdos estes que foram utilizados, posteriormente, como auxílios nas demonstrações das fórmulas da Geometria Analítica.

Do oitavo ao décimo quarto encontro, iniciou-se a apresentação dos conteúdos referentes ao "estudo do Ponto", totalizando três encontros, cada um constando de duas horas-aulas. Nestes, as fórmulas referentes ao "estudo do Ponto" e suas respectivas demonstrações foram apresentadas aos alunos, enfatizando que estas têm por base o Teorema de Tales ou de Pitágoras, pois em cada demonstração realizada, utilizou-se de um dos Teoremas citados ou uma fórmula referente ao Ponto, anteriormente já demonstrada utilizando um desses Teoremas. Ao término de cada fórmula apresentada e demonstrada foram discutidos, no quadro, alguns exercícios, bem como foi solicitado que os alunos respondessem algumas atividades, retiradas de [6], [7], [9] e [14], visando a fixação dos conteúdos apresentados.

Do décimo quinto ao vigésimo primeiro encontro, iniciou-se a apresentação dos conteúdos referentes ao "estudo da Reta". Ao todo foram três encontros com este conteúdo, cada um constando de duas horas-aulas. Nestes, as fórmulas referentes ao "estudo da Reta"e suas respectivas demonstrações foram apresentadas aos alunos, enfatizando o raciocínio lógico dedutivo, pois para cada demonstração realizada, utilizou-se de conhecimentos anteriormente apresentados referentes ao ponto, que advinha do Teorema de Tales ou do Teorema de Pitágoras, como já mostrado anteriormente aos alunos. Ao término de cada fórmula apresentada e demonstrada foram discutidos, no quadro, alguns exercícios, bem como foi solicitado que os alunos respondessem algumas atividades retiradas de [6], [7], [9] e [14], visando a fixação dos conteúdos apresentados.

Ao término dos conteúdos apresentados, os alunos foram interrogados sobre o rendimento das aulas expostas. Os resultados deste questionamento foi que eles acharam mais fácil entender os conteúdos da forma com que foram apresentados, pois eles associavam cada fórmula ao Teorema de Tales ou de Pitágoras, conteúdos estes que eles já tinham familiaridade desde o 9º ano (antiga 8º série) ou a uma fórmula anteriormente já apresentada de Geometria Analítica que está relacionada a um dos Teoremas citados. Houve ainda quem dissesse que da forma como foram apresentados os conteúdos da Geometria Analítica, parecia que a matemática tinha começo, meio e fim e não apenas uma fórmula atrás da outra para eles memorizarem sem começo, nem fim e, principalmente, sem relação nenhuma entre elas.

Deixemos claro que houve alunos que não apresentaram nenhum interesse pelos conteúdos apresentados, tampouco pela forma com que eles foram mostrados; mas, no geral, os alunos disseram que as aulas foram boas e que o que eles haviam mais gostado foi a forma construtiva com que as fórmulas foram apresentadas, em que cada fórmula advinha de outra anteriormente demonstrada.

Ao final, foi feita uma avaliação e constatou-se que as médias dos alunos que prestaram atenção nas aulas e responderam os exercícios propostos pelo professor foi acima da média e que as notas daqueles que não se interessaram pelos conteúdos, muito menos pelas aulas, mas que se fizeram presentes, não foram tão baixas. Já aqueles que tiveram uma baixíssima frequência, tiveram notas péssimas. Por fim, em conversas informais, houve ainda, alguns alunos que disseram que iriam se inscrever no vestibular para o curso de matemática, devido terem achado tão interessante as aulas expostas.

Capítulo 5

Considerações Finais

As contribuições desse trabalho remetem a uma reflexão de integração da álgebra com geometria, contextualizando uma reconstrução da fragmentação que a matemática sofreu, além de viabilizar um breve histórico de personalidades da matemática.

Mostrou-se que a base da Geometria Analítica está relacionada aos Teoremas de Tales e de Pitágoras, pois é possível demonstrar as fórmulas da Geometria Analítica a partir destes, em especial do Teorema de Tales, haja vista que a demonstração do Teorema de Pitágoras também o tem como base.

É de senso comum o fato que a matemática torna-se um "bicho de sete cabeças" por possuir bastante fórmulas e que estas, muitas vezes, distanciam-se de suas aplicações do mundo real, o que para muitos se torna uma dificuldade de entendimento e de, consequente, aprendizagem. Assim, o presente trabalho permite enxergar que muitas das fórmulas da Geometria Analítica são na verdade aplicações de fórmulas já conhecidas no ensino fundamental e que, dessa forma, os professores poderiam ser orientados a, antes de optarem pelo ensino através da formulação e visar à fixação por uso de excessivas listas de exercícios, mostrar que as fórmulas da Geometria Analítica não passam de novas roupagens de raciocínios e conhecimentos antes adquiridos.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G.; *Reflexões sobre o ensino de geometria*, Revista Professor de Matemática, SBM, N^o 71, (2010), pp. 1-8.

[2] BARBOSA, J. L. M.; *Geometria Euclidiana Plana*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 7ª edição, (2004).

[3] BOYER, C. B.; *História da Matemática*, Trad.: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, (1974).

[4] EVES, H.; *Introdução à História da Matemática*, Trad.: Hygino H. Domingues - Campinas - SP, Editora da UNICAMP, (2004).

[5] Gilberto, G.G.; *Para que serve isso?*, Revista Professor de Matemática, SBM, N^o 63, (2007), pp. 1-5.

[6] GENTIL, N.; *Matemática para o 2° grau*, *V.3*, São Paulo, Ática, (1996).

[7] IEZZI, G.; *Fundamentos de Matemática Elementar, V.7*, São Paulo, Ed. Atual, (1977).

[8] IEZZI, G.; *Fundamentos de Matemática Elementar, V.9*, São Paulo, Ed. Atual, (1977).

[9] IEZZI, G.; *Matemática Ciência e Aplicações*, *V.3*, São Paulo, Ed. Atual, 4ª edição, (1977).

[10] LIMA, E. L.; *Meu Professor de Matemática e outras Histórias*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, (1991), pp. 127-133.

[11] LIMA, E. L.; *Coordenadas no Plano*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 4ª edição, (2002).

[12] LIMA, E. L.; *A Matemática do Ensino Médio, V.3*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 4ª edição, (2004).

[13] NETO, A.C.M.; *Tópicos de Matemática Elementar,V.2*, Geometria Euclidiana Plana, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, (2012).

[14] SIGNORELLI, C. F.; *Matemática do 2º Grau, V.3*, São Paulo, Ed. Ática, 2ª edição, (1992).