UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ROSE MARY DOS SANTOS FARIAS RAMOS

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO SUPORTE PARA O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Vitória da Conquista, BA
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ROSE MARY DOS SANTOS FARIAS RAMOS

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO SUPORTE PARA O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva.

Vitória da Conquista, BA
2015

R146i Ramos, Rose Mary dos Santos Farias.

A investigação matemática como suporte para o estudo de seqüências e regularidades: uma experiência com alunos do 1º ano do ensino médio 2015. / Rose Mary dos Santos Farias, 2015.

121f. ; il.; col.

Orientador (a): Dr. Maria Deusa Ferreira da Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2015.

Referencias. 103- 106.

1. Matemática – Pesquisa educacional. 2. Matemática ensino médio – Seqüências e regularidades. I. Silva, Maria Deusa Ferreira da. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. III. T.

CDD: 510.72

Catalogação na fonte: Cristiane Cardoso Sousa / CRB 5/1843

UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

ROSE MARY DOS SANTOS FARIAS RAMOS

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO SUPORTE PARA O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva. (Orientadora)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Prof. Dr. Jorge Costa Nascimento
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Profª Drª Célia Barros Nunes
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Vitória da Conquista, Dezembro de 2015.

DEDICO *este trabalho ao meu esposo Dalvan que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades, e aos meus filhos, Guilherme e Otávio, que embora não tivessem conhecimento disto, mas iluminaram de maneira especial os meus pensamentos me levando a busca de mais conhecimentos.*

AGRADECIMENTOS

A Deus por me conceder força, coragem e sabedoria para seguir meu caminho, enfrentando os obstáculos necessário para o meu crescimento, e á Nossa Senhora por me ouvir, falar ao meu coração e ser minha intercessora junto ao Pai.

Ao meu esposo Dalvan, por todo amor, carinho, paciência e compreensão que tem me dedicado. Por ser meu porto seguro, minha fonte constante de incentivo, que nos momentos de fraqueza e cansaço não me deixou desistir. Por ser, acima de tudo, amigo e companheiro e por vivenciar cada minuto dessa conquista.

Aos meus queridos filhos sementes de luz que tanto amo, por serem muito mais do que sonhei e pedi a Deus.

Aos meus pais Luiz e Inês, por incentivarem, acreditarem e mostrarem que só é possível construir com dignidade e amor, sendo exemplo.

Às minhas queridas irmãs Lucineide, Lidinéia e Géssica companheiras e amigas de todos os momentos. E de forma especial, a Géssica, que mesmo distante, contribuiu de maneira imprescindível na realização deste trabalho.

À Prof.ª Dr.ª Maria Deusa, minha orientadora, que com suas orientações, colaborou de maneira significativa na realização desse trabalho. Meu carinho e gratidão a você que me transmitiu seus conhecimentos, apoiando-me nas minhas dificuldades.

Aos professores do mestrado e aos colegas de turma, em especial, as minhas amigas Tatiana Paiva e Adriana Laurenço pelo apoio e colaboração ao longo desse trabalho.

Ao diretor e aos alunos da 1ª série do Colégio Estadual Professora Lia Públio de Castro, pela colaboração, disposição e dedicação.

A SBM, Capes e UESB, por permitir a muitos professores realizarem seus sonhos.

Por fim a todos que de alguma forma contribuíram para a realização e concretização desse trabalho.

Mudam-se os tempos, mudam-se as vontades, muda-se o ser, muda-se a confiança; todo o mundo é composto de mudança, tomando sempre novas qualidades.

(Luís de Camões)

RESUMO

O presente estudo é um trabalho de mestrado desenvolvido junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT, Campus de Vitória da Conquista (BA) que teve como objetivo principal estudar as possibilidades e as contribuições de se utilizar a Metodologia da Investigação Matemática – MIM, no ensino de matemática, em especial no estudo de sequências e regularidades. A Experiência de Ensino foi realizada numa turma de 1º ano do ensino médio, ocorrida entre os meses de março e maio do ano de 2015. Este estudo assenta-se na conjectura de que as atividades de cunho exploratório despertam a curiosidade do aluno e desenvolve o raciocínio lógico, levando o aluno a estabelecer estratégias, formular seus próprios questionamentos, realizar teste, tornando-o autônomo de modo a construir sua própria aprendizagem. Além disso, pressupõe que o estudo de sequências, neste formato, possibilita o desenvolvimento das capacidades de representação e generalização, favorecendo a formação do pensamento algébrico. Assim, para estudar essa situação foi realizada uma pesquisa bibliográfica buscando obras que abordavam a Metodologia de Investigação Matemática de modo a aprofundar meus conhecimentos sobre o tema. O desenvolvimento da pesquisa, em sala de aula, foi estruturada a partir da aplicação de um questionário de sondagem e cinco atividades investigativas, sendo a primeira utilizada para apresentar aos alunos a MIM na resolução das tarefas. Para o desenvolvimento da pesquisa optei por utilizar uma metodologia de natureza qualitativa, do tipo pesquisa-ação, utilizando como forma de recolha de dados a observação, gravação de áudio e relatórios das atividades. Os resultados foram categorizados de acordo com os dados obtidos se observando as atitudes dos alunos frente à realização das atividades, as representações matemática, as estratégias de generalização, as capacidades e dificuldades ocorridas durante o processo. Dessa forma, apesar de algumas dificuldades encontradas nesta experiência, os resultados obtidos no decorrer desse estudo evidenciam que a utilização da MIM pode motivar o aluno a aprender e desenvolver capacidades transversais que contribuem para o amadurecimento de estratégias e habilidades matemáticas imprescindíveis para a aprendizagem de conteúdos da disciplina.

Palavras chaves: Investigação Matemática, Sequências e Regularidades, Atividades Investigativas.

ABSTRATC

This study is a master´s work produced with professional Masters Program in Mathematics in National area – PROFMAT, in Vitória da Conquista Campus – BA. Its main objective to study the possibilities and contributions of using the Mathematics Research Metodology-MRM. The teaching experience was done in the 1st year of high school class, between March and May 2015. This study is very important because the exploratory activities arouse the curiosity of the student and develops logical reasoning, so the student to establish strategies', formulate their own questions, conduct testing, making it autonomous to build your own learning. Else, presupposes that the study of sequences, enables the development of the capabilities of representation and generalization, favoring the formation of algebraic thinking. So, to study this situation a literature search was carried out seeking literary works that addressed the Mathematics Research Metodology, in this way to enrich my knowledge on the theme. The development of research, in the classroom, builds upon the application of a questionnaire survey and five investigative activities. The first was used to introduce to students the MRM in solving problems. For the development of the research I chose to use a qualitative methodology as action research, using as a means of the data collection observation, audio recording and reporting of activities. The results were categorized to the data obtained by observing the attitudes of students across the accomplishment of the activities, the mathematical representations, mainstreaming strategies, capabilities and difficulties encountered during the process. In this way, still some difficulties encountered in this experiment, the results obtained during this study show that the use of MRM can motivate the student to learn and develop transversal skills that contribute to the maturation strategies and essential mathematical skills for learning of content of the discipline.

KEY WORDS: Mathematics Research, sequences and regularities, Investigative Activities.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UESB - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

PROFMAT - Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional

UNEB - Universidade do Estado da Bahia

TCC - Trabalho de Conclusão de Curso

MIM - Metodologia da Investigação Matemática

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01 - Respondendo ao questionário de sondagem.....................................44
FIGURA 02 - Questão do questionário envolvendo sequências...............................46
FIGURA 03 - Desempenho dos alunos em questões envolvendo sequências..........47
FIGURA 04 – Sequência utilizada na atividade 4 50
FIGURA 05 - Sequência utilizada para realização da atividade 1..........................50
FIGURA 06 - Sequência utilizada para realização da atividade 2...........................51
FIGURA 07 - Sequência utilizada para realização da atividade 3............................52
FIGURA 08 - Sequência utilizada atividade ara realização da atividade 4..............52
FIGURA 09 - Resolvendo a atividade Introdutória..54
FIGURA 10 - Grupo F resolvendo a atividade 1..55
FIGURA 11 - Recorte da atividade 1, grupo B...56
FIGURA 12 - Recorte da atividade 1, grupo E...57
FIGURA 13 - Recorde da atividade 1, grupo D..58
FIGURA 14 - Recorte da atividade 1, grupo G...60
FIGURA 15 - Recorte da atividade 1, grupo H...60
FIGURA 16 - Recorte da atividade 1, grupo A...61
FIGURA 17 - Recorte da atividade 1, grupo F...62
FIGURA 18 - Recorte da atividade 1, grupo E...62
FIGURA 19 - Recorte da atividade 1, grupo E...63
FIGURA 20 - Recorte da atividade 1,grupo C..63
FIGURA 21 - Recorte da atividade 1 grupo H..64
FIGURA 22 - Momento da realização da tarefa 2..66
FGURA 23 - Representação da sequência pelo grupo E...67
FIGURA 24 - Recorte da atividadede 2, grupo I...68
FIGURA 25 - Recorte da atividade 2, grupo A...69
FIGURA 26 - Recorte da atividade 2, grupo A...70
FIGURA 27 - Recorte da atividade 2, grupo C...70
FIGURA 28 - Recorte da atividade 2, grupo G...71
FIGURA 29 - Recorte da atividade 3, grupo B...74
FIGURA 30 – Recorte da atividade 3, grupo G..74
FIGURA 31 - Recorte da atividade 3, grupo C...75
FIGURA 32 - Recorte da atividade 3, grupo H...75

FIGURA 33 - Resolvendo a atividade 4...77
FIGURA 34 – Recorte da atividade 4, grupo B..78
FIGURA 35 – Recorte da atividade 4, grupo C..80
FIGURA 36 - Recorte da atividade 4, grupo E...81
FIGURA 37 – Recorte da atividade 4, grupo F...82

SUMÁRIO

1.0 INTRODUÇÃO..13
1.1 Motivação e questões iniciais...13
1.2 Organização do trabalho..17

2.0 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA...19
2.1 Investigação Matemática: Pressupostos teórico e metodológico.........................20
2.2 A Investigação Matemática: da teoria a prática..24
2.3 O papel do professor nas aulas investigativas...27
2.4 Os cenários de investigação e avaliação..30
2.5 O aluno e a investigação matemática...35

3.0 METODOLOGIA..37
3.1 Participantes da pesquisa...38
3.2 Etapas da pesquisa..38
3.3 Procedimentos de recolha de dados...40

4.0 O TRABALHO EM SALA DE AULA...43
4.1 Questionário de sondagem..43
4.2 Apresentação das atividades..48
4.3 Descrição da aplicação das atividades...53
4.4 Questionário Final..83

5.0 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DAS ATIVIDADES....................................87
5.1 Representações matemáticas...88
5.2 Estratégias de generalização de regularidades...90
5.3 Capacidade investigativa...91
5.4 Dificuldades..92
5.5 Impressões...96

6.0 CONSIDERAÇÕES FINAIS...99

REFERÊNCIAS..103

APÊNDICE

Apêndice A – Questionário de sondagem..107
Apêndice B – Atividade Introdutória...109
Apêndice C – Atividade 1..111
Apêndice D – Atividade 2..112
Apêndice E – Atividade 3..114
Apêndice F – Atividade 4...116
Apêndice G – Questionário final..117
Apêndice H - Autorização dos alunos para a participação da pesquisa e divulgação dos resultados..118

1.0 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e questões iniciais

Minha vocação pela matemática começou desde as séries inicias e foi ampliando com o decorrer do Ensino Fundamental e Médio. Ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado da Bahia - UNEB em 2002, com muita vontade e luta, após passar por uma seleção muito concorrida para época.

Iniciei a docência no ano de 2005, antes mesmo de concluir minha graduação, com grande ansiedade em contribuir com a melhoria da aprendizagem do ensino de matemática na escola onde fiz o Ensino Básico. O início dos trabalhos como professora representou um momento no qual pude vivenciar experiências e empenhar-me em encontrar meios para auxiliar os alunos a compreender, gostar e aplicar os conhecimentos matemáticos no dia a dia. No entanto, depois de pouco tempo lecionando tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio, pude perceber uma grande dificuldade e desinteresse dos alunos no que diz respeito à disciplina, o que era agravada pelas precárias estruturas físicas da escola.

Em 2007 passei a trabalhar como professora concursada nas redes Estadual e Municipal nas quais tive a oportunidade de estar em contato com alunos de diferentes idades e níveis de interesse. Isso me favoreceu a observar a dificuldade da maioria deles em interpretar, realizar operações simples de cálculos, observar padrões, regularidades e obter generalizações ou até mesmo utilizar o raciocínio lógico, deixando-os, muitas vezes, impossibilitados de resolver problemas simples que lhes são apresentados em sala de aula e/ou no cotidiano, tornando a disciplina desinteressante, chata e muito temida pelos alunos.

Uma possível justificativa para isso é a forma de exposição das aulas de matemática. Desde as séries iniciais, se compõem de aulas conteudistas, centradas no professor, exigindo do aluno apenas memorização de fórmulas e reprodução fiel do que foi dado nos exercícios e avaliações. Isso tudo leva o aluno ao desinteresse e inibição da curiosidade, capacidade de se expressar, culminando, com o passar dos anos, pelo total desinteresse e baixo aproveitamento na disciplina. Isso me faz concordar com Pereira (2004, p.19), ao considerar que

> Todas as crianças chegam à escola com muitas experiências matemáticas já realizadas ainda que de forma inocente. A curiosidade em aprender, conhecer e experimentar são sentimentos naturais que não devem ser frustrados ou inibidos com aulas “mortas” nas quais se aplicam fórmulas e se treinam raciocínios e técnicas (sem grande utilidade, no entender dos mesmos).

O interessante é que a curiosidade e o espírito investigativo são características inerentes ao ser humano. Desde muito cedo exploramos o mundo, questionando sobre o desconhecido, testando situações. Este comportamento precisaria ser desenvolvido e aflorado a cada dia, na medida em que crescemos e vivenciamos experiências novas. Entretanto, o tempo passa e aos poucos os alunos deixam a impressão de não ter curiosidade em observar, explorar, conhecer e duvidar de mais nada. Acredito que um dos fatores que contribuem para isso é a metodologia de ensino empregada, em especial no ensino de matemática.

Alguns professores de matemática baseiam suas aulas no modelo tradicional, com aulas expositivas sobre conceitos e fórmulas, no qual o aluno copia e fazem exercícios de fixação, com intuito de memorizar como os exercícios foram desenvolvidos, confundindo a aprendizagem com a simples memorização de conteúdo. D’Ambrosio(1989) enfatiza que essa configuração de ensino faz os alunos acreditarem que a aprendizagem matemática se dá pelo acumulo de fórmulas e algoritmos que são transmitidos pelo professor. Além disso, induz os alunos a perceberem a matemática como ciência pronta e acabada, na qual não se questiona ou duvida.

Entretanto, não se pode negar a importância do treino, dos exercícios como elemento auxiliar na formação de alicerces para o aluno, conforme expõe Echeverría & Pozo (1998, p.17), “se o aluno desconhecer a técnica instrumental básica, não será capaz de utilizá-la para resolver um problema novo”. Todavia, muitos aprendizes veem a matemática como algo desinteressante, inacessível e inútil, que não possuem novidades que venham estimular a curiosidade e o raciocínio. Este estigma é reflexo de abordagens equivocadas que dominam o ensino desta ciência, contribuindo muito mais para gerar inseguranças e frustrações nos estudantes do que aprendizagem efetiva, sendo uma possível explicação para a falta de popularidade da matemática.

Assim, essas observações, agravadas principalmente pelo desinteresse, me fez permanecer por algum tempo nessa angústia de me sentir impotente por não conseguir cooperar para a educação de qualidade como desejava. Além disso, através do baixo desempenho em avaliações externas como a Prova Brasil, avalie e Enem, constatei a necessidade de mudanças.

Desse modo, nesse período comecei a questionar sobre a eficácia das práticas adotadas por mim em sala de aula, do tipo de professora almejava me tornar e das atitudes que poderia tomar a fim de promover melhorias no processo de ensino e aprendizagem. Procurei então ampliar meu repertório de leituras sobre educação matemática e participar com mais frequência e afinco de capacitações teóricas, debates, discussões e cursos de formação, buscando me inteirar das discussões sobre problemas de aprendizagem em Matemática e suas possíveis soluções e, assim, aperfeiçoar minha prática educacional para melhor qualidade no ensino.

Em meio à busca contínua por melhorias educacionais, em 2013, tive a oportunidade de ingressar no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, campus UESB, Vitória da Conquista, que oportunizou ampliar conhecimentos sobre conteúdos matemáticos, bem como novas perspectivas para prática docente.

Assim, envolvida constantemente em conversas e debates realizados durante o mestrado, especialmente nas disciplinas Trabalho de Conclusão de Curso – TCC e História da Matemática, bem como discussões com a orientadora e com o grupo de orientandos da mesma, em que discutíamos sobre os temas a serem desenvolvidos nos TCCs, passei a realizar muitas leituras nas quais tive a oportunidade de ampliar conhecimentos sobre vários assuntos. Isto me possibilitou a reflexão e busca por uma temática que me fosse conveniente diante da realidade exposta. Foi então que me deparei com a temática que despertou minha curiosidade, a "Metodologia da Investigação Matemática - MIM", tendência que tem crescido em relevância entre os Educadores Matemáticos.

Além disso, consultando os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs, bem como outros documentos oficiais que conduzem a Educação no Brasil, percebi a relevância dessa temática, uma vez que os mesmos ressaltam a importância da ocorrência da aprendizagem significativa, baseada na interação do aluno com o conteúdo. Vi, portanto, a MIM como um caminho para desenvolver essa aprendizagem em sala de aula.

Contudo, para que isso ocorra se faz necessário que o professor invista em um ambiente interativo, com situações desafiadoras que leve o aluno a desenvolver sua curiosidade, criatividade, espírito investigativo estabelecendo relações entre seus conhecimentos prévios e a nova situação. Neste sentido, realça a importância do professor estar preparado e disposto a trabalhar com metodologias e recursos que instiguem o surgimento dessas competências e habilidades, tal como a MIM.

Diante do exposto, surgiram alguns questionamentos que direcionaram a pesquisa: De que forma a Metodologia Investigação Matemática pode contribuir para o ensino e aprendizagem da matemática? Quais os benefícios desta metodologia para o ensino e aprendizagem de sequências e regularidades? Qual o nível de envolvimento e aprendizagem dos alunos com as atividades investigativas?

Assim, no intuito de investigar esta situação relatada e motivada pelas leituras de trabalhos de Ponte et al.(1999a), Ponte et al. (2013) sobre a MIM, busquei privilegiar uma abordagem que contemple o estudo de problemas envolvendo Sequências Numéricas e Regularidades, por meio da MIM. Dessa forma, surgiu a questão diretriz desse trabalho: **Quais as possibilidades e as contribuições de se utilizar a MIM no ensino de matemática, em especial no estudo de sequências e regularidades?**

Dessa forma, partindo do pressuposto que a Investigação Matemática é uma metodologia de ensino importante para o ensino e aprendizagem de matemática, é necessário pesquisar para conhecer esta metodologia que permite o dinamismo no processo de ensino e aprendizagem, e contribui para o desenvolvimento e formação humana e social do aluno.

Além disso, considero que o trabalho de ensino de sequências através de atividades de investigação leva o aluno a observar, despertar curiosidade, desenvolver raciocínio e imaginação, formular seus próprios questionamentos, estabelecer estratégias, realizar testes, tornando-o um sujeito autônomo na construção do conhecimento. Também, é razoável supor que o nível de envolvimento e aprendizagem dos alunos é bem maior quando se trabalha com atividades investigativas.

Assim sendo, o desenvolvimento desse trabalho teve como objetivo *estudar as possibilidades e as contribuições de se utilizar a Metodologia de Investigação Matemática no ensino de matemática, em especial no estudo de sequências e* *regularidades,* procurando aprimorar os conhecimentos através do contato direto com esta metodologia.

Com o intuito de alcançar tal objetivo, a pesquisa foi desdobrada nos seguintes objetivos específicos:

- Apontar a investigação matemática como metodologia importante no ensino de matemática.

- Proporcionar aos alunos, contato com a metodologia de investigação Matemática para que possam se apropriar dos conhecimentos matemáticos por meio da descoberta.

- Propor e desenvolver atividades sobre sequência e regularidades através da investigação matemática visando construção de conceitos, propriedades e regularidades.

- Investigar os benefícios de se utilizar a metodologia investigação matemática no ensino de matemática, em especial de sequências e regularidades.

- Analisar o nível de envolvimento (e dificuldades) dos alunos com as atividades investigativas.

1.2 Organização do trabalho

Versando o bom entendimento e a explanação geral do trabalho realizado, o mesmo foi dividido em cinco capítulos, na qual a seguir, será feita uma breve descrição dos assuntos abordados em cada um deles.

Este primeiro capítulo, apresentamos a introdução do trabalho a ser desenvolvido, onde foram relatados sobre a minha prática docente, anseios, frustrações e motivações pessoais que levaram a construção deste trabalho. Além disso, foi exposto a problemática, as perguntas norteadoras, hipóteses, objetivos da pesquisa, bem como a descrição dos capítulos.

No segundo capítulo, traz-se a base teórica com um breve comentário sobre as tendências metodológicas no ensino da matemática, evidenciando a Investigação Matemática como estratégia de grande relevância em estudos e práticas educacionais atuais. Além disso, explanamos sobre a importância na Investigação Matemática no ensino aprendizagem de matemática, as etapas envolvidas na realização de atividades investigativas em sala de aula, o papel do professor e do aluno nesse processo e a avaliação desse tipo de atividade.

O terceiro capítulo aponta as estratégias metodológicas que serão utilizadas na realização da pesquisa, na qual se fundamente na pesquisa qualitativa, além de discorrer sobre o ambiente de pesquisa, a turma pesquisada e os instrumentos utilizados para coleta e análise de dados.

No quarto capítulo é apresentamos o questionário de sondagem, bem como, as tarefas desenvolvidas em sala de aula. Além disso, fazemos uma descrição detalhada da aplicação dessas atividades, relatando dificuldades, questionamentos e considerações expostas pelos grupos pesquisados obtidas por meio das conversas, áudios e relatórios dos alunos. Também, trazemos o comentário do questionário final, relatando opiniões e comentários dos alunos após a aplicação das tarefas investigativas.

No quinto capítulo realizamos as discussões dos resultados das atividades investigativas aplicadas, relacionando com as descrições expostas no capítulo 4, tendo como foco as representações matemáticas e estratégias de generalização mais utilizada pelos grupos, capacidade investigativa dos alunos, dificuldades constantes e nossas impressões sobre a atividade.

Já no sexto capítulo trazemos as considerações finais, em que discorremos acerca do desenvolvimento deste trabalho evidenciando os benefícios avanços dos alunos ao utilizarem a MIM, as limitações encontradas no desenvolvimento desta pesquisa, bem como as possibilidades de estudo para o futuro.

2.0 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A preocupação constante por parte de pesquisadores e educadores matemáticos sobre uma proposta metodológica adequada ao contexto atual do ensino-aprendizado de matemática no Brasil tem trazido muitas inquietações, discussões, culminando com pesquisas e estudos sobre esta temática nos últimos anos.

Mesmo sendo a matemática uma ciência composta por definições, teoremas e regras dando a ela um caráter formal, ela também tem uma grande ligação com as situações do cotidiano, além de fazer do pensamento e cálculo matemático um componente auxiliar a outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, o ensino-aprendizagem da matemática deve constituir-se num processo que contribua para a formação do sujeito crítico e reflexivo de modo a atuar no contexto social, assim, deve-se contemplar o desenvolvimento das capacidades de comunicar, tomar decisões, criar, resolver problemas, fazer inferências, argumentar, aperfeiçoar conhecimentos e trabalhar cooperativamente.

Neste sentido, buscar metodologias que contribuam para a formação de sujeitos capazes de resolver situações-problemas e questionamentos diversos, justificando e validando os resultados encontrados matematicamente, se constitui em tarefa sempre desafiadora para a maioria dos estudiosos, professores e estudantes.

Assim, o anseio pela inovação na sala de aula e pelo desenvolvimento de uma prática docente interessante e adaptada às necessidades dos estudantes do século XXI, vem gerando várias linhas de estudo e divergências entre as opiniões dos pesquisadores sobre as tendências metodológicas mais propícias para o desenvolvimento da aprendizagem matemática.

Neste contexto, surge a MIM que passou a ser estudados por vários pesquisadores, inicialmente em Portugal na década de 80 e que recentemente no Brasil (WICHNOSKI e KLUBER, 2015). Ainda segundo Wichnoski e Kluber (2015, p.02) “Dentre vários pesquisadores, João Pedro da Ponte, destaca-se pelas significativas contribuições que tem dado a essa linha de pesquisa no cenário mundial.”.

2.1 Investigações Matemática: Pressupostos teórico-metodológicos

A Metodologia Investigação Matemática é um assunto recente no Brasil. Contudo, as discussões sobre o ensino de matemática por meio da investigação matemática na sala de aula vêm ganhando crescente viabilidade em vários projetos e trabalhos de pós-graduação. (LAMONATO E PASSOS, 2012).

Nas últimas décadas, em se tratando de ensino de matemática, a resolução de problemas era a metodologia que ocupava lugar de destaque, entretanto com a mudança da sociedade e seus novos anseios fez-se necessário buscar uma metodologia que possa desenvolver capacidades que possibilitem, a cada indivíduo, buscar soluções criativas e inteligentes para resolver estes problemas. Nesse sentido, Fonseca, et. al. (1999, p.4), expõe que "Muitas vezes, o processo de resolução pode implicar a exploração do contexto para além do que surge no enunciado, a formulação de questões alternativas.”, ampliando, dessa forma, para atividades de exploração e de investigação matemática.

Assim sendo, entende-se que existe uma similaridade entre a metodologia de resolução de problemas e do processo investigativo, visto que em ambos os casos, parte-se de uma situação ou problema em que se quer encontrar a solução ao problema posto sendo fornecidos alguns parâmetros ou condições, ou seja, os dados a serem trabalhados e, em cujo processo de resolução requer envolvimento, atenção e criatividade dos alunos. Porém, no primeiro, no geral, localiza-se claramente o que deve ser encontrado enquanto que no segundo possibilita ao aluno trilhar por vários caminhos em busca de descobertas e regularidades, até o processo de generalização ou solução. Segundo Fonseca, et. al. (1999, p. 5):

> [...] na resolução de problemas, o objetivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível; portanto, é um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

Para Ernest (1996) existe diferença entre os papeis do professor e do aluno ao se trabalhar com estas duas metodologias. Na resolução de problemas o professor tem a função de formular o problema, fazendo com que o método de resolução permaneça em aberto, e a função do aluno é procurar seu próprio caminho para chegar à resolução do problema. Já na investigação matemática o professor deve escolher uma situação de partida deixando para o aluno definir os seus próprios problemas dentro da situação, tentando resolvê-los buscando caminhos próprios.

Já Lamonato e Passos (2012, p. 70) corroboram que a resolução de problemas e a investigação matemática "são perspectiva metodológicas que se complementam, podendo estar em todos os níveis de escolaridade.", pois independente da maturidade intelectual do aluno os mesmos são capazes de analisar, elaborar e justificar caminhos utilizados em atividades que lhe serão propostas conforme seu nível de escolaridade. Entretanto, para os autores, para ocorrer realmente aprendizagem, ambas as metodologias, requerem participação e intervenção constante do docente durante o processo, tendo o cuidado de não encerrar a conversa na primeira pergunta ou afirmação.

O tratamento dado pelo professor a ambas as metodologias e a receptividade do aluno com os dois tipos de atividade é o que vai fazê-las convergir ou divergir. Segundo Lamonato e Passos (2012, p. 70), isso vai ocorrer "dependendo da proposta apresentada, dos objetivos e das ações do professor, das oportunidades aproveitadas na sala de aula e da atividade do aluno.".

Para muitos pesquisadores a investigação matemática é uma ótima oportunidade de se alcançar mais aprendizagem em matemática, visto que a mesma possibilita ao aluno, sobre orientação do professor, a participação ativa no seu processo de aprendizado. Para Braumann (2002, p. 5) só através das atividades investigativas o aluno tem a possibilidade de dominar os conhecimentos adquiridos,

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como querer aprender a conduzir um automóvel com um instrutor que apenas nos explica como se conduz e nos deixa olhar para ele enquanto conduz. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender a conduzir, é preciso pegar no volante e conduzir, fazendo erros e aprendendo com eles, de preferência com um instrutor ao lado para nos ajudar.

Vimos também que os PCNs para o Ensino Fundamental mencionam a importância de práticas investigativas ao apresentar os objetivos para o ensino fundamental:

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o

> desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 2001, p.47).

Além disso, os mesmos ainda enfatizam a necessidade do "desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados". (ibid, p.75).

Desse modo, pesquisas realizadas tanto no Brasil como em Portugal, de acordo com Ponte (2003a), sugerem que atividades de natureza investigativa, exploratória ou aberta têm ganhado destaque nos currículos escolares, sendo que a realização de atividades investigativas pelos alunos, na aula de matemática, é uma metodologia presente na proposta curricular de vários países dentre eles, Estados Unidos da América, Inglaterra, França e Portugal. Em consonância com Ponte, Corradi (2011) aponta que o estudo desta literatura no Brasil, apesar de muito recente, já tem demonstrado as várias potencialidades desta estratégia metodológicas, auferindo espaço crescente nos currículos escolares, especialmente de matemática.

Sendo assim, a Investigação Matemática é uma atividade que possibilita a busca do aprendizado através da observação e do raciocínio. Investigar é partir do desconhecido explorando todos os caminhos possíveis desta situação, é fazer seus próprios questionamentos e buscar respondê-los de forma concisa, organizada e fundamentada, buscando sempre crescer com os erros e frustrações. Investigar é como viajar sabendo o ponto de partida mais jamais sabendo qual o possível ponto de chegada.

Portanto, se conclui que a palavra "investigar", no sentido etimológico, pode admitir vários significados, possibilitando ser empregada em variados contextos. Contudo, para Ponte (2003b) "investigar não é mais do que procurar conhecer, compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos.".

Pensando em ensino de matemática, o termo "investigar" tem acepção mais profunda, relaciona-se com o coletivo, com o nível de envolvimento da relação professor aluno, neste ambiente o professor deixa de ser o detentor do saber não se importando com o conteúdo propriamente, mas com aprendizagem efetiva, e é convidado a mobilizar e valorizar a criatividade e participação ativa dos alunos, de maneira a torná-los construtor do seu próprio conhecimento.

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito de atividade genuína, constituindo por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentos com os seus colegas e o professor. (PONTE, et. al. 2013, p.23).

Disso, entendemos que as aulas investigativas são um importante processo de construção do conhecimento, mas requer trabalho e disciplina. Ainda segundo Ponte, et. al. (2013), a realização de uma boa aula investigativa envolve três fases indispensáveis, a primeira fica a cargo do professor para fazer a introdução da tarefa, em seguida os alunos realizam a investigação individual ou em grupos, e a última fase, não menos importante, é a de discussão dos resultados. Nesse momento os alunos relatam suas descobertas viabilizando a discussão das experiências para possíveis aprendizados.

Além disso, em se tratando do trabalho realizado pelo aluno durante a investigação matemática, os autores afirmam ainda que a mesma envolve quatro momentos importantes, conforme quadro abaixo:

Momentos na realização de uma investigação

Momento	**Atividades envolvidas**
Exploração e formulação de questões	- reconhecer uma situação problemática - explorar a situação problemática - formular questões
Conjecturas	- organizar dados - formular conjecturas
Testes e reformulação	- realizar testes - refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	- justificar uma conjectura - avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

(PONTE, et. al. 2013, p.21)

Assim, o desenvolvimento dessas etapas depende muito do nível de envolvimento e participação da turma, possibilitando a ocorrência de forma simultânea. Entretanto, o desdobramento dessas etapas deve acontecer visando à divulgação e confirmação dos resultados, uma vez que, esta ação é muito importante e quase que obrigatória para o fechamento da atividade.

Ainda, no processo de investigação, o que importa, não é necessariamente resolver a situação proposta, o interessante é o surgimento de descobertas inesperadas que se revela, em muitos casos, até mais importantes que a solução do problema original. É esse anseio pela descoberta que torna a investigação matemática um processo de construção de conhecimento prazeroso e envolvente.

Além disso, esse tipo de trabalho, segundo Corradi (2011), pode contribuir para a construção do conhecimento, possibilitando ao aluno reforçar suas atitudes de autonomia, cooperação e capacidade oral e escrita. Ainda conforme Corradi (2011, p. 163): "Nessa atividade o aluno aprende Matemática por realizar algumas funções dos matemáticos á medida que procura compreender uma dada situação com um nível de desafio que o convida à especulação tornando o trabalho intrigante”.

Portanto, ao se trabalhar com a Investigação matemática não devemos preocupar em elaborar problemas complexos e difíceis, a proposta é elaborar problemas mais interessantes e abertos, que provoquem a curiosidade e o entusiasmo do aluno, na procura de caminhos que leve a produção de conhecimentos.

Entretanto, Santos et al.(2002, p. 90) afirmam que uma aula investigativa vai muita além de apenas planejar e produzir tarefas propícia a investigação , elas expõe que

> É igualmente necessário preparar o modo como a tarefa vai ser apresentada aos alunos, escolher a metodologia de trabalho, decidir o modo como vão ser confrontados os processos usados, bem como a produção final que é esperada dos alunos e reflectir após as aulas para poder inflectir e reajustar as próximas planificações.

Diante do exposto, é visível que o trabalho com a MIM é sempre uma chamada a novos desafios e a possibilidade que se abre para professores e alunos trilharem novos caminhos e novas descobertas, compartilhando conhecimentos o que corrobora por uma aprendizagem muito mais interessante e prazerosa. Tudo isso nos levou a perceber na MIM uma maneira de mudar nossa forma de conceber o ensino de matemática e querer realizar uma pesquisa fazendo uso dela.

2.2 A Investigação Matemática: da teoria a prática.

O ensino de matemática através de atividades investigativas, segundo Ponte (2003b), vem ganhando "viabilidade crescente nos currículos escolares, em particular na disciplina de matemática." Este fato desencadeou diversos estudos e pesquisas na sobre esta temática, constituído conforme ibid. (2003b) "tema central de diversos Projectos de investigação e teses de mestrado e doutoramento em didática matemática.”.

Nesta perspectiva Fonseca et al (1999) e Ponte (2003a, 2003b) realizaram estudos e pesquisas em diversos níveis de ensino buscando evidenciar alguns aspectos importantes, tanto a respeito do aluno quanto do professor, referentes ao trabalho com a Investigação Matemática em sala de aula.

Também Ponte et al.(1999a) desenvolveu um projeto (Matemática Para Todos: Investigações na sala de aula - Projeto MTP) que objetivou fazer um estudo teórico e metodológico sobre as possibilidades de inserção das atividades investigativas no currículo escolar. Este trabalho foi desenvolvido com uma equipe de docentes e Investigadores de Matemática, por meio de aplicação e discussão das atividades investigativas em sala de aula.

Ao discorrer sobre questões relevantes da MIM como, valor conceitual, aprendizagem dos alunos, papel do professor e sua formação, cenários, evolução curricular entre outros, os autores incentivam a utilização da MIM em sala de aula, ao mesmo tempo em que evidenciam a existência de trabalhos de outros matemáticos, que segundo os mesmos, comprovam o valor educacional e formativo desta metodologia. Entretanto, ressaltam a existência de lacunas que devem ser sanadas a respeito desta perspectiva dentro da matemática e do currículo.

Assim, nesses trabalhos, buscam-se abordagens fundamentadas que visam fornecer conhecimento e sugestões praticas sobre investigação, de modo a contribuir tanto para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor.

Nesse contexto, Morais (2012) realizou sua pesquisa de mestrado numa turma de 2º ano do ensino fundamental explorando atividades que envolvem diversos tipos de regularidades numéricas e/ou pictóricas. Com esse trabalho procurou compreender como se desenvolve o pensamento algébrico dos alunos, na fase inicial do 1º ciclo. Para tanto, o mesmo utilizou como metodologia a investigação matemática, baseada numa abordagem qualitativa inserida num paradigma interpretativo. Como conclusão deste trabalho a mesma expõe que considera comprovada que os alunos do 2º ano desenvolvem capacidades de representação e generalização, realizando tarefas matemáticas de natureza essencialmente exploratória.

Também, buscando entender melhor os reais resultados da investigação matemática na sala de aula, Segurado (2002) assumiu função de professora e investigadora ao realizar investigação em sua própria sala de aula. A mesma relatou em seu artigo ter observado algumas dificuldades iniciais pelo fato dos alunos não estarem acostumados com este tipo de tarefa. Afirmou que os mesmos além de solicitar a presença da professora, constantemente, limitavam a responder as perguntas formuladas demonstrando dependência da professora na realização da atividade. Contudo, no decorrer do trabalho observou uma mudança significativa no desempenho dos alunos, período em que os mesmo começaram a demonstrar criatividade e interesse pelo trabalho passando a formular novas questões, argumentar, procurando ao máximo comunicar matematicamente. Além disso, observou que através do desenvolvimento das atividades propostas puderam aperfeiçoar competências matemáticas já trabalhadas, dando-lhes maior segurança para prosseguir com as atividades.

Outro trabalho de grande relevância foi realizado por Fiorentini et al. (2005) que teve como objetivo investigar sobre as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no ensino de álgebra na 6ª série do ensino fundamental. Esta atividade foi desenvolvida com a finalidade de explorar e problematizar diferentes aspectos do pensamento algébrico. Foram aplicadas duas tarefas investigativas em duas classes de 6ª série de uma escola pública de Americana - SP. Após aplicação das atividades os pesquisadores relataram satisfação, visto que, apesar do estranhamento inicial, os alunos demonstraram entusiasmados, envolvidos e felizes na conclusão da atividade, o que contribuiu para que os pesquisadores considerassem comprovadas as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas para o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico.

Apesar disso, acharam relevante ressaltar algumas dificuldades que interferem no bom andamento do trabalho investigativo como a limitação do tempo para a atividade, a dificuldade de um professor subsidiar toda turma sozinho e as dificuldades dos alunos em iniciar a atividade, produzir relatório e socializar resultados. Entretanto, mesmo com todas as dificuldades citadas, afirmam que o trabalho com investigação matemática representa um contexto rico e desafiador de aprendizagem tanto para o aluno como para o professor.

2.3 O papel do professor nas aulas investigativas

Atualmente, a sociedade vivencia transformações consideráveis que vêm acarretando impactos e novos desafios, inclusive no âmbito escolar. A escola tradicional do passado que dava ênfase ao uso de processos mecânicos, como regras, fórmulas e cálculos, tornando os educandos meros repetidores, cedeu espaço para a implantação de novas ferramentas que facilitam a compreensão e aplicação do conhecimento como um todo.

Estas constantes mudanças ocorridas na sociedade, tem desdobrado grandes transformações na escola e especialmente, nas questões que cercam o ensino-aprendizagem de matemática. Diante disso, o papel do professor na sala de aula ganha novas dimensões. O professor é convidado a abandonar o lugar de transmissor do conhecimento, e passa a ocupar posição de facilitador, mediador e incentivador do ensino aprendizagem. Nesse sentido, Ponte et al. (1999b, p. 43) enfatizam que " É hoje consensualmente reconhecido que o professor tem um papel decisivo no processo de ensino-aprendizagem. Ele tem de ser capaz de propor aos alunos uma diversidade de tarefas de modo a atingir os diversos objectivos curriculares."

As DCN-EM propõe que o trabalho em sala de aula deva ser realizado dando ênfase a valorização do diálogo e da resolução de situações abertas que estimulem o raciocínio e a criatividade do aluno. Estas habilidades podem ser contempladas na realização de tarefas exploratórias e investigativas, que permite deixar o aluno livre para pensar, interagir, seguir seus próprios caminhos e por final, confirmar seus resultados.

Para ter um ambiente propício para as atividades investigativas, o professor precisa, antes de iniciar a atividade, fazer um breve apanhado da situação esclarecendo quais etapas a seguir e o objetivo da atividade, versando pelo bom entendimento do processo e o amplo desenvolvimento de suas atitudes e competências adquiridas no decorrer da mesma. Ponte et al.(2013, p.26), afirmam que "o professor tem que garantir que os alunos entendem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade."

Para a promoção de atividades investigativas prazerosas e significativas faz-se necessário que o professor seja participativo, interativo e tenha disponibilidade em ouvir, esclarecer e encorajar criando ambientes propícios a confiança, interação e argumentação, deixando o aluno á vontade para pensar, questionar e apresentar ideias com a certeza da valorização do seu raciocínio. Versando está participação, é de suma importância que o professor esteja atento na formulação de problemas que instiguem a curiosidade e interesse dos alunos, para a partir daí ele possa promover reflexão do exposto induzindo o aluno a raciocinar matematicamente, ultrapassando as possíveis dificuldades iniciais.

O cuidado na organização escrita ou verbal de cada tarefa investigativa é muito importante para se alcançar os objetivos propostos. Neste sentido, Fonseca et al. (1999) enfatizam que para uma aula investigativa ser verdadeiramente significativa para o aluno faz-se necessário que o docente seja criativo e invista bem na preparação de suas aulas, sendo imprescindível a construção, adaptação ou seleção de atividades potencialmente ricas e interessantes que contemple seus objetivos e possa realmente desencadear a investigação por parte dos alunos. Além disso, deve-se planejar ainda a organização dos alunos e gestão do tempo conforme necessidade de cada atividade.

O trabalho com este tipo de atividade exige que o professor seja perspicaz e flexível, assegurando grande desenvoltura em resolver situações inesperadas, além de versar por uma boa interação com os alunos. Também, faz-se necessário que o professor observe o andamento do processo investigativo e mantenha diálogo com os alunos realizando, quando conveniente, intervenções que direcione os alunos a enxergar novos caminhos, recordando e fornecendo, quando necessário, informações e conceitos que contribua para o prosseguimento da atividade, encorajando-os sempre sem mostrar respostas.

Nesse processo o professor deve assumir posturas diferentes conforme a necessidade do aluno. Ponte et al. (1999b) assevera que a função do professor, em relação a atividade investigativa pode ser afirmativo, quando o mesmo se propõe a esclarecer, explicar ou validar a proposição do aluno; e interrogativo, quando o docente instiga, questiona e solicita esclarecimento sobre a ideia exposta.

Nesse sentido, é inevitável e visível a mudança ocorrida no papel do professor e na atitude do aluno, no decorrer do processo, sendo imprescindível uma boa organização das atividades, além de adequada condução e desenvolvimento dos trabalhos na sala de aula. Dessa forma,

> Integrar e implementar investigações matemática no currículo da disciplina requer por parte do professor, a criação e a adaptação de

> tarefas que proporcionem ao aluno o desenvolvimento de capacidades/aptidões de valores/atitudes, bem como a aquisição de técnicas e conhecimentos imprescindíveis a sua formação. Essa tarefa não é fácil para o professor, pois, requer o reequacionamento das suas próprias concepções sobre o assunto que ensina e sobre o próprio currículo (PEREIRA, 2004, p.2).

Outro ponto indispensável neste processo é a constante avaliação. No decorrer da atividade é preciso que o professor esteja atento, recolhendo informações e observando eventuais dificuldades e descobertas, para que com base nisso, possa saber se alcançou ou não seus objetivos visando a possibilidade de permanecer ou mudar para outra fase do trabalho

As aulas investigativas tende a ser uma atividade desafiadora e muito produtiva tanto para os alunos quanto para os professores, por esse motivo é imprescindível que o professor valorize a cultura da investigação e além de manter-se preparado para inseri - lá em sua atividade pedagógica possa também mostrar as potencialidades desta proposta para outros professores na própria escola.

Diante do exposto, é amplamente reconhecido que o papel desempenhado pelo professor deve ser estratégico e fundamental em qualquer proposta curricular. Contudo, Serrazina (2002, p. 45), expõe que "Neste sentido há necessidade de estudar os futuros professores, contudo são poucos os estudos conhecidos no nosso país envolvendo alunos da formação inicial em tarefas de investigação."

Além disso, Serrazina (2002) enfatiza que é de grande importância que desde a formação inicial, os futuros professores sejam apresentados a este tipo de metodologia para que desta maneira possam estar preparados para programar com afinco um ensino que esteja em conformidade com a prática da investigação matemática. Entretanto, muitos alunos dos cursos de licenciatura, futuros professores de matemática, não tem oportunidade de conhecer e trabalhar com a investigação matemática durante sua formação.

Ponte (2003a, p. 45) corrobora que muitos desses estudantes ficam presos a métodos analíticos sem demonstrar flexibilidade e capacidade em lidar com este tipo de trabalho. O mesmo afirma que

> De um modo geral, os candidatos a professores do curso de formação inicial, tanto das escolas superiores de educação como das universidades não parecem ter uma formação matemática adequada para realizarem autonomamente pequenas investigações matemáticas.

Fonseca (2002) expunha que em estudo realizado com alunos do 4º ano do curso de licenciatura em ensino de matemática sobre essa temática, muitos alunos mostraram-se "perdidos" ou com alguma dificuldade na realização das primeiras investigações. Isto nos leva a supor que grande parte deles não conhece ou não domina tal prática educativa. Entretanto, tanto Fonseca (2002) como Ponte (2003a) enfatiza sobre a boa receptividade por parte dos futuros professores em relação ao trabalho com as atividades investigativas bem como o reconhecimento do potencial matemático e educativo de tais atividades.

Também, em relato de pesquisa realizada por Frota (2005) com professores e futuros professores (alunos do curso de pedagogia e curso normal superior) foi perceptível à falta de experiência por parte dos mesmos com as atividades investigativas. Nesse trabalho, Frota (2005) relatou que com aplicação das atividades investigativas observou dificuldades por parte dos alunos em fazer abstrações, generalizações e comunicação de ideias matemáticas, além de demonstrar atitudes de insegurança e impaciência atribuída à falta de conhecimento e hábito de investigar em matemática.

Nesse tocante, Frota (2005, p. 9) expõe ainda que "Vejo a introdução de atividades investigativas na sala de aula como uma poderosa força com vistas à educação matemática de nossos estudantes e reeducação matemática de nossos professores.”. Nesse sentido, faz-se necessário a integração de tais atividades nas grades curriculares das universidades, para que o futuro professor saia preparado para desenvolver em sua sala de aula tais atividades, uma vez que as investigações matemáticas revelam-se interessantes e de grande potencialidade para o ensino da disciplina.

2.4 Os cenários de investigação e avaliação

O fato de a matemática estar intimamente ligada à atividade escolar e ser descrita por vezes, como um conhecimento inalcançável por muitos estudantes, torna esta área particularmente importante no contexto educacional.

O ensino da matemática com foco no desenvolvimento das capacidades de formular e resolver problemas, de questionar, de comunicar e analisar criticamente uma situação, conforme sugerido pelos PCN (2001), favorece a formação de cidadãos aptos a intervir na realidade. Entretanto, a matemática que vem trabalhada de forma abstrata e distanciada da vivência do aluno, ao invés de efetivamente dar significado e sentido a esse estudo, conduzem apenas uma memorização temporária, o que não atende aos objetivos básicos da matemática que são a interpretação, compreensão e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

O cenário da matemática atual, segundo Alrø e Skovsmose (2010, p. 51) faz parte de um modelo tradicional caracterizado por "certas formas de organização da sala de aula”, na qual divide as aulas de matemática em duas partes: primeiro, a apresentação do conteúdo pelo professor através do livro didático, e em seguida, realização de exercícios com aplicação direta das técnicas apresentadas. Conforme o mesmo, os padrões de comunicação entre professor e alunos permanecem sempre os mesmos, sendo que as variações possíveis referem-se ao tempo gasto em cada etapa, e até mesmo apresentação pelos alunos de pequenos seminários ou exercícios resolvidos. Neste contexto, a resposta para cada exercício é única e universal, sem espaço para questionamento ou participação do aluno (SKOVSMOSE, 2000).

O fato de tal procedimento não está atendendo as reais necessidades dos educandos, fez-se necessário pensar em condições de ensino-aprendizagem que supere o paradigma do exercício. Alrø e Skovsmose (2010) convidam a substituir os exercícios por um ambiente de aprendizagem diferente, chamados cenários de investigação, no qual os alunos tem possibilidade de formular questões e planejar diversas linhas de investigação, agindo, refletindo e atribuindo significado a suas atividades e descobertas.

Para Skovsmose (2000, p. 68), cenário para investigação é “um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação”. Neste caso, um cenário para investigação deve ser interessante e dinâmico, baseado no diálogo, proposto conforme a realidade da turma. É importante que o professor convide o aluno a participar do processo, propondo algo que instigue sua curiosidade, algo para o qual ele deseja saber a resposta, sendo que para isso ele necessite levantar questões e elaborar estratégias de resolução. Segundo Alrø e Skovsmose (2002), só existe um real cenário para investigação quando o aluno aceita a proposta do professor e se integra ao processo, para eles, o que pode ser um cenário de investigação perfeito para uma turma, pode não ser para outra.

As práticas de sala de aula baseadas no paradigma dos exercícios diferem do cenário para investigação uma que a última visa levar os estudantes a produzirem significados para conceitos e atividades matemáticas, tornando-os mais críticos e reflexivos. Neste ambiente, a aprendizagem é potencializada pela interação e diálogo entre professor-aluno e aluno-aluno otimizando a oportunidade de ouvir as estratégias do outro e ser ouvido. Dessa forma, faz-se mister a boa relação entre professor e aluno, em que cada uma entenda e respeite os seus papeis garantindo a construção da aprendizagem.

Faz-se importante que o professor observe o desenvolvimento do aluno no decorrer de todo processo investigativo, e incentive-os a expor suas ideias e conclusões, promovendo reflexão sobre o trabalho realizado. Isto possibilitará ao professor avaliar o aluno, de forma a conhecer suas dificuldades, bem como, que conhecimentos adquiriram. Dessa forma, poderá esclarecer e orientar em que aspectos serão necessários aperfeiçoar-se. Segundo Corradi (2011, p.171),

> Nas aulas de investigação matemática é preciso que o professor dê um retorno aos alunos quanto ao desempenho de suas atividades devida a expectativa do aluno em ver como é que o seu trabalho está em relação a avaliação formativa e somativa realizada pelo professor.

É bastante consensual a ideia de que o processo avaliativo é um elemento significativo e indispensável a comunidade escolar, visto que através do mesmo o professor tem possibilidade obter informações importantes sobre a evolução das aprendizagens dos alunos, e consequentemente, buscar caminhos que viabilizem aprendizagens mais significativas que contribuam para o crescimento dos educandos.

A esse respeito Libâneo (1994) afirma que a avaliação escolar é um processo que envolve educador e educando, pois além de permitir ao professor rever sua prática pedagógica, ela possibilita ao aluno identificar seus avanços e suas dificuldades, buscando saná-las. É uma atividade indispensável em todo momento do processo ensino aprendizagem.

Entretanto a concepção de ensino atual privilegia, muitas vezes, a avaliação por provas e testes, utilizada com simples finalidade de fazer uma verificação do aprendido no final do processo educativo para atribuição de notas. Neste sentido, Santos (1997) afirma que os instrumentos avaliativos utilizados na sala de aula e seus contextos de ocorrência só são aplicados para apurar o que os alunos não aprenderam, pois o professor não dá importância em utilizar algum tempo para retomar e explicar os pontos em que foi apontado mais erros e dificuldades dos alunos.

Para Ponte et al (2013) assim como em qualquer atividade de aprendizagem matemática, as atividades de investigação matemática requer avaliação. Entretanto, faz-se necessário a utilização de uma avaliação diferenciada, pois a mesma é baseada em tarefas abertas em que não importa o resultado, mas a formulação de conjecturas, discussão, argumentação e prova dos resultados. Neste caso, a avaliação das atividades baseada nos objetivos estabelecidos, não pode ser feita simplesmente ressaltando os resultados dos alunos. É necessário observar todo o desenvolvimento da tarefa solicitada. Assim, precisa-se empregar instrumentos de variadas natureza, seja oral ou escrita, individual ou em grupo. O mais importante é que o professor acompanhe todo o processo investigativo para conhecer o desenvolvimento do aluno, pontos de progressão, dificuldades e situações que requer mais atenção.

É muito comum e de grande potencialidade, no trabalho investigativo, solicitar a construção de relatórios com descrição minuciosa de todo o processo investigativo, com formulação de conjecturas, refutações ou provas dessas conjecturas, e todo processo utilizado pelos alunos para chegar às conclusões.

Como os alunos não estão acostumados a este tipo de avaliação è de se esperar que nos primeiros relatórios produzidos neste processo, o mesmo tenha dificuldade de escrever, relatar e justificar o processo realizado, sendo eles acostumados a realizar muito cálculo sem necessidade de descrição de estratégias. Desta forma, cabe ao professor situá-lo no processo, em que Ponte et al.(2013, p. 116) relatam que

> Por isso, pelo menos numa fase inicial, pode ser vantajoso fornecer aos alunos um conjunto de indicações sobre o que espera que eles incluam nos relatórios e apoiá-los na compreensão e concretização dessas indicações. é bom que os alunos percebam o que se Ihes está pedindo e que saibam, desde o início, os aspectos que irão ser considerados na sua avaliação.

A avaliação realizada no processo de investigação por meio da construção de relatórios é de suma importância, pois além do professor poder avaliar seus erros mais frequentes e relevantes através do que está escrito, possibilita também conhecer as atitudes, questionamentos e competências do aluno antes, durante e depois de sua construção.

Os relatórios escritos servem de avaliação do aluno para o aluno e do aluno para o professor. A escrita do relatório, por se só, já é um aprendizado para o aluno, pois neste processo, o mesmo, é levado a fazer a releitura por várias vezes, além disso, ao reler ele pode observar os pontos de erros e/ou equívocos. Também, através desta escrita e apresentação dos relatórios e da observação feita pelo professor no processo de investigação, ele tem possibilidade de pontuar as maiores dificuldades dos alunos comparando com seus objetivos propostos possibilitando a reorganização do trabalho docente e com os possíveis conteúdos passíveis de revisão. Entretanto, a utilização exagerada e o excesso de exigência de qualquer potencialidade podem acarretar consequências não satisfatórias. Segundo Santos et al.(2002, p. 102), “É o caso do pedido sistemático de relatórios correr o risco de criar nos alunos a ideia de que investigar em matemática é uma actividade muito exigente e como tal levá-los a desenvolver uma atitude menos positiva face às investigações matemáticas".

A observação feita pelo professor durante a atividade e a apresentação oral realizada pelos alunos no final da mesma, são outras formas de avaliação, também de fundamental importância no processo de investigação e que devem ser realizadas em consonância com os relatórios. Segundo Ponte et al. (2013, p. 124), Através do processo de observação o professor pode,

> recolher muita informação sobre as atitudes dos alunos, sobre o modo como eles mobilizam os conhecimentos matemáticos formais e informais e sobre o seu entendimento do que é uma investigação, do seu papel na respectiva realização e da sua capacidade de levá-la a termo.

O momento de observação é muito importante para o professor perceber a reação dos alunos diante da atividade, conhecendo que estratégia e processos de raciocínio utilizam e quais competências estão desenvolvendo neste processo. Neste momento, é imprescindível que professor interaja com o aluno questionando-os e fazendo perguntas para instigá-lo a organizar seus pensamentos e conjecturas, provando-as ou refutando-as, dessa forma ele poderá conhecer melhor seus pensamentos e construções.

Além disso, outro momento que merece atenção é a apresentação oral do relatório que pode ser considerado o cume da atividade, visto que é o momento em que o aluno pode expor ao professor e aos colegas suas estratégias e conclusões do trabalho desenvolvido. Sobre isso, Ponte et al (2013, p.125) afirmam que

> As apresentações orais permitem avaliar uma variedade de objetivos, incluindo as atitudes e valores, a compreensão do processo de investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral. (p. 125)

Através das apresentações o professor tem a oportunidade de apreciar os trabalhos ressaltando seus avanços e recomendando pontos em que o aluno precisa aperfeiçoar. Contudo, o grande empecilho para este tipo de avaliação é o extenso tempo utilizado para realização das apresentações, visto que necessitaria de muitas aulas para todos os alunos expor suas atividades, o que as tornariam mais exaustiva e redundante. Mesmo assim, faz-se necessário que o professor pesquise a forma de avaliação que mais se adéque a seus objetivos conforme a sua turma.

2.5 O aluno e a investigação matemática

De fato, grande parte dos alunos restringe a matemática á sua forma tradicional, que serve tão só para executar ações do tipo calcular, efetuar, simplificar, determinar. Este caráter técnico e formal limitam a percepção e interesse dos jovens em relação ao estudo da mesma.

Nessa perspectiva o ensino da disciplina deve contribuir para desenvolver uma atitude positiva face á matemática, para tanto, faz-se necessário mudar está visão errônea do aluno e estimular o mesmo para que ele seja curioso, desenvolva o espírito critico e a capacidade de argumentação, busque situações novas, talvez mais gerais, queria descobrir padrões, regularidades se aproximem cada vez mais de um estudante que queira estudar e produzir matemática.

O ensino de matemática com foco no desenvolvimento das capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar resultados, de analisar criticamente uma situação levando em conta suas possibilidades e restrições, favorece a formação de cidadãos aptos a realizar intervenções na realidade. Almejando estas competências, o aluno deve ser constantemente exposto a atividades investigativas que propiciam o desenvolvimento do raciocínio, explorar/experimentar e apropriar significativamente dos resultados encontrados.

É de se esperar que no início do processo investigativo, o aluno se sinta inquieto e inseguro por não estar acostumado com este tipo de atividade. Por esse motivo é importante que logo na introdução da tarefa o professor deixe claro todos os passos e objetivos envolvidos na atividade.

A partir do momento em que o aluno já estiver familiarizado com este tipo de atividade e saiba lidar com o ato de investigar, ele terá mais facilidade em desenvolver sua capacidade de criar estratégias, argumentar e justificar resultados. Entretanto, é de suma importância que o estudante abandone sua concepção tradicional de que estudar e aprender matemática é simplesmente fazer exercícios e busque sempre cria caminhos para formular e justificar seus próprios questionamentos. As atividades investigativas só terão realmente êxito se os alunos estiverem interessados e engajados no processo investigativo.

3.0 METODOLOGIA

Traçar caminhos e criar estratégias para investigar algo nem sempre é uma tarefa fácil. A produção do conhecimento decorrente do estudo de um problema de interesse do professor/pesquisador e requer observação, planejamento, questionamentos, estudos, registros e análise reflexiva dos fatos e dos ambientes estudados. Segundo Vale (2004, p. 176), "a estratégia usada na investigação é determinada pelas questões e pelo propósito de estudo, pela natureza das questões e pela capacidade do investigador bem como pelos meios que tem ao nosso alcance.".

Em nosso caso, esta investigação consistiu de uma pesquisa em ensino que objetivou observar todo o processo, interpretar os dados e discorrer sobre o fenômeno observado em seu ambiente natural, e de acordo os autores (Vale, 2004; Borba e Araújo, 2004; Garnica,1997) para estes tipos de pesquisas o mais usual e viável é uma pesquisa de caráter qualitativo. Assim, nossa pesquisa foi de cunho qualitativo.

A pesquisa qualitativa, conforme (Ludke e André, 1986; Minayo et al., 1995; Marconi e Lakatos, 1999) configura-se pelo trabalho com dados subjetivos, atitudes, crença, valores, opiniões, fenômenos e hábitos que não podem ser quantificados. Nesse tocante, Ludke e André (1986, p. 13) corroboram ainda que a pesquisa qualitativa: "[...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtido no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes.”.

Desse modo, para a realização deste trabalho buscamos estratégias que visaram responder a questão de pesquisa e contemplar os objetivos propostos. Para tanto, assumimos a postura de professor e pesquisador, participando ativamente do processo e buscando fazer mudança em nossa prática docente que envolveu o planejamento de atividades, aplicação de tarefas e observação direta do grupo envolvido na pesquisa. Desse modo, a pesquisa consistiu em uma experiência com um grupo de alunos em que buscamos modificar nossa prática profissional (Ponte, 2002) e, ainda, buscamos refletir sobre as possibilidades e contribuições da MIM na aprendizagem dos alunos.

Ainda, Marconi e Lakatos (1999, p. 33) apontam que “tanto os métodos quanto as técnicas devem adequar-se ao problema a ser estudado, às hipóteses levantadas e que se queria confirmar, e ao tipo de informantes com que se vai entrar em contato". Nessa perspectiva, esta pesquisa se configurou como uma pesquisa de natureza qualitativa na modalidade pesquisa-ação, visto que se enquadra no exposto por Thiollent (2000, p. 14) ao definir a pesquisa-ação como sendo

> [...] um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

Nessa direção, este trabalho foi centrado no planejamento e aplicação de atividades que contribuam para melhoria da aprendizagem através da participação ativa do pesquisador e dos participantes da pesquisa à luz da reflexão-ação. Assim, Moreira (2011, p. 92) ratifica a escolha dessa modalidade de pesquisa, ao afirmar que "pode-se dizer que a pesquisa-ação sempre implica um plano de ação baseado em objetivos de mudança (melhora), [...].", na qual compõe um processo cíclico de planificação - ação - reflexão, que requer o envolvimento dos participantes da pesquisa em todas suas (ibid, p.95).

Assim sendo, de acordo o exposto, ao desenvolver este trabalho com ações planejadas, aplicadas e revisadas pelo próprio pesquisador e com interação constante com os pesquisados, reafirmamos tratar de uma pesquisa qualitativa do tipo pesquisa-ação, em que o pesquisador busca promover mudanças na própria prática.

3.1 Sujeitos da pesquisa

O presente estudo envolveu 30 alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio, do Colégio Estadual Professora Lia Públio de Castro, do distrito de Ibitira, Município de Rio do Antônio-BA. A aplicação das tarefas ocorreu entre os meses de março e maio do ano de 2015, período referente ao 1º bimestre de estudo.

3.2 Etapas da pesquisa

O desenvolvimento da pesquisa se deu em quatro etapas. A Primeira etapa pode ser caracterizada como um período de sondagem. Nessa fase, procuramos conhecer o perfil dos alunos em questão, bem como seus conhecimentos sobre sequências e regularidades. Para tanto, aplicamos um questionário constituído de seis perguntas fechadas que foram respondidas individualmente pelos alunos. Segundo Gil (1999, p. 128), o questionário pode ser definido “como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc.". Ainda nessa fase, realizamos um teste de sondagem organizado em duas questões, com o objetivo de observar/detectar quais conhecimentos os alunos já tinham sobre sequências e regularidades.

Na segunda etapa da pesquisa, ocorreu o planejamento das atividades, bem como a elaboração de um conjunto de atividades investigativas separadas em cinco tarefas. A primeira atividade foi construída visando à explanação sobre a MIM, objetivando que os alunos tivessem conhecimento sobre esta metodologia e sobre os passos necessários no processo. Para dar ênfase a esta explanação inicial aplicou-se uma atividade utilizada por Ponte et al. (2013), "explorações com números".

As quatro atividades restantes, foram preparadas de maneira a contemplar a MIM, seguindo as recomendações de Ponte et al. (2013). Desta maneira, as atividades foram elaboradas criteriosamente levando em consideração as respostas dos alunos obtidas no questionário de sondagem e a não familiaridade com a MIM, procurando aumentar gradativamente o nível de dificuldades durante o processo.

A terceira etapa se configurou como o momento de aplicação das cinco atividades em sala de aula. Na primeira delas buscamos permitir ao aluno compreender a MIM, como um artifício que propicia a descobertas de novos conhecimentos por meio da participação ativa dos mesmos nas atividades. As atividades seguintes possibilitaram ao aluno formar conjecturas baseadas na observação e em seus conhecimentos prévios, realizando provas e refutações de modo a favorecer o desenvolvimento de conceitos e procedimentos, bem como, a confiança e a autonomia.

O tempo utilizado para a prática junto aos alunos foi de 12h/aula, sendo 2h/aulas utilizada para o questionário de sondagem e às 10h/aulas restantes divididas 2h/aulas semanalmente dedicada a cada tarefa, com a possibilidade de ser estendido conforme necessidade de observação e complementação da atividade.

Na aplicação em sala de aula optou-se por trabalhar em grupos de 3 ou 4 alunos que variavam em cada aula conforme suas preferências pessoais, entendendo-se que dessa forma os alunos teriam mais oportunidade de dialogar e argumentar sobre as atividades, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, tornando o trabalho mais prazeroso, atraente e com maior aprendizado. Nesse sentido, Cavalcanti (2001, p. 27) afirma que, ao se trabalhar assim, os alunos terão mais “interação com seus colegas e, nesse sentido, as discussões orais em sala, permitem que o aluno fale sobre suas descobertas, mostre o seu trabalho e entenda algum conceito através da explicação, da leitura ou observação do trabalho de outro colega da classe.”.

Por se tratar de uma turma de 30 alunos, foram formados 10 grupos (ou nove grupos quando faltava algum aluno) que foram nomeados com as 10 primeiras letras do alfabeto: Grupo A, Grupo B, Grupo C, ..., Grupo J, conforme ordem de entrega dos relatórios. Para identificar seus membros foi utilizada a seguinte notação: A1, A2, A3 integrantes do Grupo A, conforme nomes escritos no relatório. O mesmo realizamos com os demais grupos.

Ao final do trabalho com as atividades em sala de aula, aplicamos um questionário com a finalidade de conhecer a opinião dos alunos sobre as tarefas desenvolvidas, bem como, sobre a metodologia utilizada.

A etapa final se caracterizou pela análise dos resultados. Momento em que realizamos leitura criteriosa dos relatórios dos alunos e diário de campo, promovendo um comparativo com os áudios das aulas.

A etapa final se caracterizou pela análise dos resultados. Nesse caso, os dados foram todos obtidos em ambiente natural - sala de aula - sendo a professora da turma também a investigadora, logo a mesma desempenha o papel de participante e observadora em todo processo.

3.3 Procedimentos de recolha de dados

Visando seguir as orientações de Ponte et al.(2013) sobre o trabalho com a MIM, bem como a obtenção de dados para análise posterior foram utilizadas, além do questionário de sondagem, algumas técnicas de coleta de dados como a observação e anotações realizadas no diário de bordo, produção de áudio, recolha do material escrito produzido pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades, e também, aplicação de questionário na etapa final da pesquisa para conhecer a opinião dos alunos sobre o trabalho desenvolvido.

De acordo com Lüdke e André (1986, p. 26), "a observação ocupa um lugar privilegiado nas novas abordagens da pesquisa educacional. [...] a observação possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado". Além disso, como desempenhávamos o papel de professor-pesquisador, acreditamos que isso facilitou o processo de investigação, visto que já conhecíamos a classe e possuíamos, de certo modo, o controle sobre seu comportamento e suas dificuldades. Dessa forma, estes aspectos, dentre outros, não provocaram interferência no fenômeno observado e possibilitaram uma observação mais rigorosa e detalhada, na qual pudemos analisar cenário, participantes, atividades, comportamento e interações. Nesse sentido, tivemos a oportunidade de conhecer os processos de raciocínio, as etapas de resolução, bem como as estratégias para produção do conhecimento.

Entretanto, ressaltamos que o processo de observação não foi uma tarefa fácil. Além da necessidade de nos mantermos imparciais frente às informações observadas, ainda tivemos que manter uma acentuada atenção, senso crítico e uma boa memória, para produzir registros significantes dos acontecimentos mais relevantes ocorridos durante a aula. Desse modo, os relatórios produzidos após a observação, também conhecidos como diário de bordo, conforme Fiorentini e Lorenzato (2012), de fato, foi um dos instrumentos de coleta de dados mais ricos, visto que com ele registramos nossas observações e fizemos descrições dos sujeitos pesquisados, do cenário, de acontecimentos e diálogos.

O recurso à gravação de áudio, também é de suma importância no processo investigativo uma vez que através deles é possível recapitular episódios e captar certas informações do grupo no qual muitas vezes passa despercebido por motivo do trabalho ser direcionado a toda turma. A gravação dos áudios foi realizada por um integrante de cada grupo em momentos de discussões mais arraigadas nos grupos, nos períodos de intervenções da professora e por ocasião da discussão em coletivo, no final das tarefas. Para a gravação foram utilizados celulares dos próprios alunos, no qual posteriormente, as informações foram passadas ao professor pesquisador.

Outra fonte de informação importante foram os relatórios escritos produzidos pelos alunos no decorrer das atividades. Os alunos foram orientados a organizar suas ideias e registrá-las no decorrer da atividade, desde as primeiras conclusões, não se esquecendo de anotar também as estratégias utilizadas durante o processo.

Entretanto, a escrita dos relatórios se mostrou inicialmente uma tarefa difícil para o estudante, por se tratar de escrever conclusões matemáticas em formas de texto, no qual não estavam acostumados a fazer. Isto fez com que os alunos produzissem os primeiros relatórios no final da atividade registrando apenas conclusões sem qualquer tipo de justificativa. Neste caso, os relatórios tornaram-se pobres, com poucas conclusões e ideias não fundamentadas. Nesse sentido, Ponte et al (2013) afirma que num relatório é importante conter a maneira como os alunos organizaram os dados, as conjecturas provadas e refutadas e os procedimentos utilizados, para que dessa forma o professor possa conhecer os pontos de dificuldades e aprendizagem dos alunos durante a atividade.

Com o decorrer das aulas, os alunos foram entendo a importância de se construir o relatório durante o processo, e designaram um integrante do grupo para anotar as estratégias, conclusões e frustações, que integraria o relatório no final da atividade. Dessa forma, os alunos tiveram oportunidade de descrever os processos utilizados para chegar às conclusões, fazendo-nos conhecer posteriormente seu processo de construção do conhecimento.

As produções de áudio e os relatórios escritos foram recolhidos no final de cada aula, com a finalidade de se obter maior precisão das informações da pesquisa. Os áudios gerados foram ouvidos, transcritos e analisados por nos concomitante aos relatórios e diário de bordo de cada atividade. Brocardo (2002) expõe que ao desenvolver estudo no 8º ano sobre as investigações na sala de aula de Matemática, o tempo gasto para ouvir/ler, transcrever e analisar os dados coletados, observando as partes a considerar mais importantes, foi decisivo para perceber melhor as características dos alunos estudados.

Além disso, Vale (2004, p. 180) acrescenta que “As observações são a melhor técnica de recolha de dados do indivíduo em actividade, em primeira mão, pois permitem comparar aquilo que diz, ou que não diz, com aquilo que faz.”. Dessa forma, a análise das produções geradas por esses instrumentos, juntamente ao diário de bordo produzido por meio de nossas observações, viabilizou comparações entre o que foi observado e as impressões dos alunos, nos dando oportunidade de compreender, complementar e ilustrar as informações recolhidas durante aula.

4.0 O TRABALHO EM SALA DE AULA

4.1 Questionários de sondagem

Este questionário foi aplicado com intuito de conhecer melhor a turma a ser trabalhada, bem como seus conhecimentos prévios sobre sequência e regularidades. O questionário foi elaborado com perguntas simples, conquanto possibilitassem melhor conhecimento da turma e sua opinião sobre o conteúdo em questão, visto que eram alunos do 1º ano do Ensino Médio, sendo o nosso primeiro ano com eles. Além disso, as aulas referentes ao ano letivo de 2015 recém haviam começado.

Também, este questionário conteve algumas questões envolvendo sequências para que os alunos pudessem respondê-las e, por meio dele, pudéssemos avaliar os conhecimentos da turma referente à Matemática e, principalmente, a Sequências e Regularidades. Em uma das questões foi abordado sequências numéricas e pictóricas consideradas simples, na qual foram dados os primeiros termos e solicitado os próximos três termos da mesma. Em seguida foram questionados a respeito da lei de formação de alguma delas.

Vale (2004) corrobora que o questionário seja talvez o método de coleta de dados mais utilizada em investigação uma vez que é mais fácil de administrar e proporcionam respostas diretas com mais facilidade de classificação. Além disso, a partir das questões, que podem ser abertas ou fechadas, passa-se a conhecer fatos e opiniões dos personagens pesquisados.

A figura 01 deixa evidente que o questionário foi aplicado individualmente, com boa receptividade e empenho por parte dos alunos, apesar das dificuldades de resolução das questões que abordava o conteúdo sequência.

Figura 01: Respondendo ao questionário de sondagem

Fonte: Arquivo da professora

As questões iniciais do questionário foram utilizadas sobre intenção de conhecer a dinâmica e opiniões da turma em questão, dessa forma perpassava pelas seguintes perguntas: Gênero/Idade; Tipo de instituição que estudos o ensino fundamental; Você gosta de Matemática? Por quê? ; Você se considera um aluno excelente, bom, médio ou fraco em Matemática? Por quê?; Quando você está fazendo uma tarefa matemática, qual é a sua maior preocupação em relação a esta tarefa? .

A turma em questão, é formada por 30 alunos, sendo 8 meninos e 22 meninas, nos quais demonstram bom entrosamento e interesse. Após análise dos resultados pudemos observar que os alunos possuíam idade entre 14 a 16 anos, nos quais todos cursavam o 1º ano pela primeira vez. Além disso, 40% dos alunos pesquisados estudaram o ensino fundamental em escola municipal e o restante estudou na escola estadual do município, na qual está sendo realizada a pesquisa.

Como resposta a pergunta “gosta da disciplina matemática?” constatou-se que mesmo relatando possuírem dificuldade de entender os conteúdos e de resolver as questões propostas pelo professor, a maioria dos alunos afirma gostar da disciplina de matemática, expressando saber da necessidade de aprender os conteúdos matemáticos para êxitos futuros. Vejamos algumas respostas:

“Alguns assuntos são legais, outros não”.

“Mesmo não sendo muito boa em matemática, me identifico com a disciplina, pois sei que vou precisar no futuro.”

“Às vezes é chato, mas eu gosto raciocinar para resolver problemas”

“Mesmo não tirando notas boas, gosto de estudar, pois cada vez aprendo mais.”

“Tenho dificuldade em quase tudo mais sei que tenho que estudar.”

“Acho a matemática meio difícil e chata de aprender. Fazer o que?”.

“É boa a sensação de saber fazer as questões”

“Preciso aprender, mais este negocio de calculo não entra na minha cabeça”.

Neste tocante, mesmo que 83% dos alunos tenham relatado gostar de matemática, apenas 17% dos alunos se consideram bons e 47% dos alunos da turma se consideram medianos em matemática. Além disso, a maior parte dos alunos afirmou possuir dificuldades em matemática, dentre esses, sete alunos afirmavam terem dificuldades também em outras disciplinas.

Nesse sentido, Vitti (1999) relata que as dificuldades e desinteresse observadas nos estudantes em relação à matemática, é reflexo, muitas vezes, de um trabalho inadequado do professor em séries anteriores e/ou de ideias pré-estabelecidas dos pais em relação à matemática.

Em relação às questões que envolviam sequências, as mesmas foram elaboradas baseadas em algumas sequências já conhecidas, com intuito de cobrar habilidades básicas que suponhamos que os alunos já possuíam de estudos em séries anteriores. Nessas questões, solicitamos que o aluno observasse cada sequência, identificasse a regularidade e, em seguida escreva seus três próximos termos, conforme figura 02.

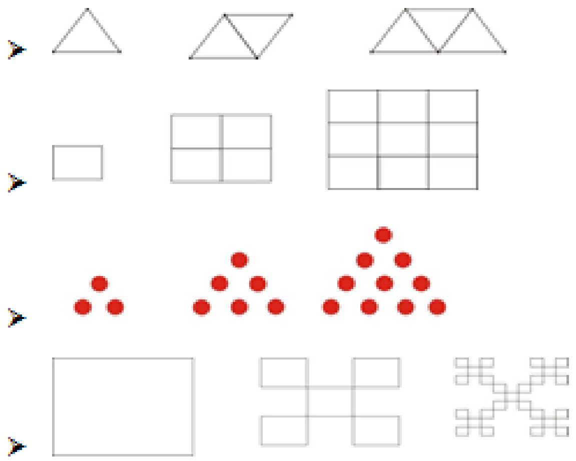
Figura 02: Questão do questionário envolvendo sequências

5- Situações em que temos que identificar padrões e regularidades está presentes desde as séries iniciais. A prática em observar esses padrões e resolver tais exercícios é o que irá habilitá-los a desenvolver diferentes estratégias para o trabalho com este tipo de situações.
Observe cada sequência, identifique a regularidade e, em seguida escreva seus três próximos termos.

a) SEQUENCIAS NUMÉRICAS

- 1, 4, 7, 10,...
- 2, 4, 8, 16,...
- 1, 3, 9, 27,...
- 0, 2, 6, 12,...

b) SEQUENCIAS PICTÓRICAS

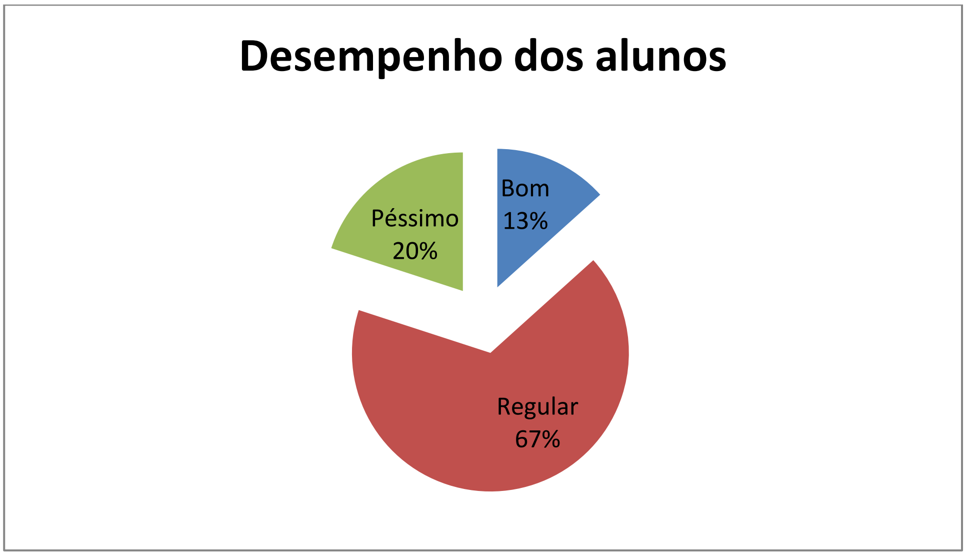


Fonte: Arquivo da professora

Após tentarem continuar estas sequências, a maioria dos alunos apresentaram muitas dificuldades em identificar padrões para continuar a escrever os próximos termos. Ao chegar nesta questão, os alunos se mostraram muito inquietos, afirmando não saber como prosseguir. Nesse item, nenhum dos alunos conseguiu responder a todas as sequências e, grande parte deles deixou mais da metade sem responder, tendo o caso de dois alunos que não responderam nada.

Nas questões seguintes, ao responderem “Já havia resolvido este tipo de questões no ensino básico?” e “Qual seu desempenho nesse tipo de questão?” Apenas três dos alunos disseram sim, mais que isso ocorreu em raros momentos. Além disso, ao considerar o desempenho deles na interpretação e resolução deste tipo de questões obtivemos o resultado mostrado na figura 03:

FIGURA 03: Desempenho dos alunos em questões envolvendo sequências



Fonte: Questionário aplicado aos alunos

Vejamos alguns comentários sobre cada consideração:

Péssimo: *“Porque não tenho muito raciocínio pra aprender coisas de matemática”.*

Regular: “*Porque consigo resolver algumas questões*”.

Bom: *“Porque em cada atividade eu observava as relações entre ambos e conseguia resolver as questões”.*

Ao analisar as resoluções das sequências observamos que quase toda a turma não conseguiu responder nem a metade da atividade proposta, demonstrando a dificuldade existente em observar padrões para conseguir dar continuidade aos próximos termos da sequência. Esse fato nos deixou confusos, ao notarmos a incoerência, visto que 80 % se consideram regular ou bom na resolução deste tipo de questão.

Ao percebermos a grande dificuldade dos alunos desta turma em encontrar regularidades e raciocinar logicamente, o nosso interesse pela aplicação das atividades aumentaram, deixando-nos mais empolgados em buscar melhorias para este quadro. Assim, tomando por base a aplicação desse questionário, é possível dizer que, no geral, a turma é dinâmica e participativa, contudo apresenta dificuldades de aprendizagem, especialmente no que se refere a utilizar sua percepção para observar padrões e regularidades.

4.2 Apresentação das atividades

Dentre os possíveis conteúdos matemáticos que poderiam ser abordados nas atividades, optamos em desenvolver a pesquisa utilizando MIM, em particular Sequências e Regularidades, visto que, conforme Luís et al (1996) este conteúdo é muito rico e interessante, possibilitando o estudo de diversos conceitos de forma lúdica, além de permitir o trabalho com todos os conteúdos do programa matemática. Também, os PCNs orientam aos professores a utilizarem, desde o ensino fundamental, situações que levam os alunos a criar estratégias e explorar padrões favorecendo a capacidade de abstrair e generalizar regularidades, possibilitando o desenvolvimento de ideias matemáticas. Entretanto, na prática, percebe-se que existe uma grande dificuldade por parte dos alunos em observar padrões e principalmente fazer generalizações, dificuldades estas, geradas e/ou agravadas pela ausência experiência com este tipo de atividade.

O trabalho com sequências e regularidades deve possibilitar o desenvolvimento da capacidade de generalização e formação de regularidades que, por sua vez, segundo Morais (2012) é de fundamental importância na construção do pensamento algébrico, uma vez que o desenvolvimento das atividades requer observação e identificação da estrutura comum de vários termos, podendo ser utilizada estratégias diversas para atingir a generalização. Neste sentido, Pimentel et al. (2010, p. 53) afirma que o processo de generalização "requer o estímulo de modos de pensamento que resultam na análise de relações entre quantidades, reparar na estrutura, estudar a mudança e, particularmente, generalizar" .

Este conjunto de atividade foi construído tomando por base, sequências já conhecidas, adequando-as a um formato que propiciasse a utilização da MIM. A mesma foi organizada de forma a constituir uma sucessão coerente de nível de dificuldades, no qual possibilita ao aluno empregar diferentes representações para caracterizar a sequência explorada e consequentemente chegar à generalização e a lei de formação da mesma, promovendo dessa forma, a aprendizagem através da investigação, conforme proposto por Ponte (2009).

Desse modo, em nossa pesquisa, seguindo a orientação de Ponte et al.(2013) trabalhamos cada atividade investigativa seguindo a ordem: introdução (apresentação da atividade), desenvolvimento (resolução da atividade pelos grupos) e reflexão/discussão (apresentação e discussão dos resultados pela classe).

Na aplicação de cada atividade, distribuímos a folha impressa com a sequência a ser trabalhada, bem como os respectivos questionamentos para direcionar a investigação. Em seguida, solicitamos a leitura da atividade para esclarecimentos de eventuais dúvidas de compreensão e interpretação, sempre buscando manter a motivação para não comprometer o processo. Segundo Ponte e Velez (2011) o cuidado do professor em relação ao entendimento da tarefa pela turma e ao incentivo a atitude investigativa é de fundamental importância nesse momento inicial, para que se possa alcançar os objetivos propostos.

Dando prosseguimento ao trabalho, cada grupo de aluno procurou realizar momentos de reflexão, discussão, análise da atividade e, concomitante a isso, produção do relatório. Por não terem experiência na produção de relatórios fornecemos também um conjunto de instruções escritas acompanhadas por esclarecimentos orais. Enquanto os alunos procurava fazer a atividade, circulávamos pela sala, procurando comentar, esclarecer e instigar possíveis estratégias de resolução e envolver os alunos na atividade realizada, bem como fazer anotações desses momentos.

Cada atividade foi finalizada com apresentação dos resultados obtidos por cada grupo, propiciando discussão e argumentação em meio a confronto de estratégias, resultados e relatos de dúvidas. Este espaço foi de fundamental importância para que nos esclarecêssemos e formalizássemos conceitos, propriedades e representações matemáticas discutidas e cobradas na atividade, nos quais os alunos não conseguiram ter um bom entendimento. Neste sentido, Barbosa et al.(2011, p. 10) corrobora que " Sempre que os seus resultados são discutidos em grande grupo, os alunos são levados a analisar e discutir diferentes conjecturas e representações" .

Faz-se importante destacar que as falas e trechos dos relatórios dos alunos foram utilizados na integra, sem correção de ortografia e cortes, para que pudéssemos aproximar ao máximo a realidade dos alunos em questão. Além disso, destacamos ainda que os alunos participantes da pesquisa sabiam desde o começo que este trabalho desenvolvido em sala de aula compunha uma pesquisa de mestrado envolvendo as possibilidades e as contribuições de se utilizar a Metodologia de Investigação Matemática no ensino de matemática, em especial no estudo de sequências e regularidades.

- ATIVIDADE INTRODUTÓRIA

A primeira atividade foi planejada com o intuito de esclarecer sobre a investigação Matemática e o trabalho a ser realizado, buscando expor o que é investigar, como se realiza, quais objetivos, bem como os passos importantes numa investigação, de acordo com Ponte et al. (2013): Exploração e formulação de questões; formulação de conjecturas; realização de testes e reformulação; justificativa da conjectura e avaliação do resultado.

Para tanto, no início da mesma continha um resumo sobre a investigação matemática, seguido do objetivo deste trabalho e das etapas para a investigação, conforme já referido. Além disso, foi utilizada a atividade "Explorações com números", exposta em Ponte et al (2013, p. 27), conforme figura 04.

Figura 04: Sequência utilizada na atividade Introdutória

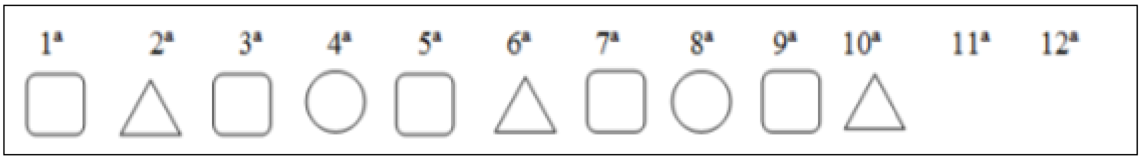
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...	...	...	...

Fonte: (PONTE et al, 2013, p. 27)

- ATIVIDADE 1

A atividade 1 se referiu à exploração de uma sequência repetitiva de algumas figuras planas. O grupo que se repete é formado por quatro elementos que corresponde a um quadrado, um triângulo, seguido de outro quadrado e um círculo. Para realização da atividade, relacionamos a figura com a posição ocupada e dispomos a sequência até a décima posição, conforme figura 05.

Figura 05: Sequência utilizada para realização da atividade 1



Fonte: Arquivo da professora

A observação e análise da sequência possibilita a visualização de regularidades e características que viabiliza identificar e compreender a parte que se repete ciclicamente, continuar a representar a sequência, descrever uma relação entre os termos e sua ordem e expressar essa representação em linguagem natural.

- ATIVIDADE 2

A atividade 2 abordou uma sequência que representa a forma de vôo em bando de algumas espécies de aves migratória, intitulada "Voo em V". Na configuração desta sequência, cada figura representa um bando de aves, cada ponto simboliza uma ave. Esta é uma sequência crescente em que cada termo subsequente aumenta do anterior em duas unidades, de acordo figura 06.

Figura 06: Sequência utilizada para realização da atividade 2

Fonte: Adaptado de < https://redematematica.files.wordpress.com/2009/11/tarefa-1-e28093-voo-em-e2809cve2809d.pdf>

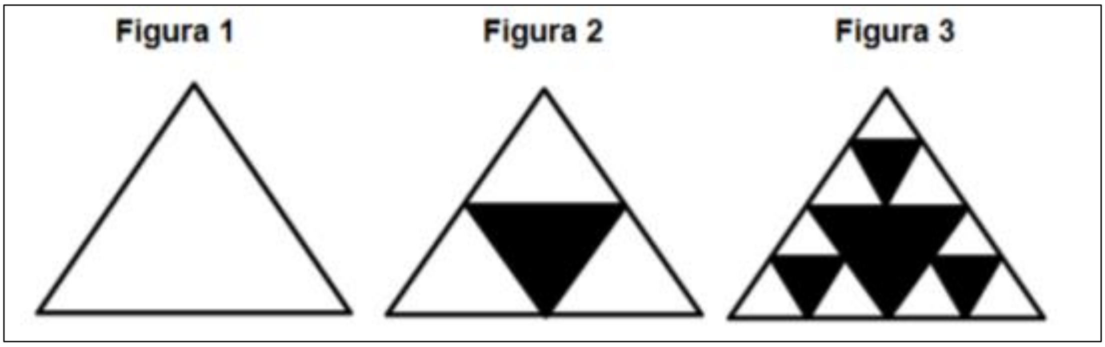
A regra de formação desta sequência pode surgir através da identificação dos elementos que a constitui relacionando termo e ordem ou por meio da análise de termos consecutivos.

- ATIVIDADE 3

A atividade 3 trouxe triângulo de Sierpinski, que é um exemplo de geometria fractal. A utilização dos fractais, como base desta atividade, deve-se ao fato deles ser uma parte da matemática formada por estruturas geométricas complexas que, em geral, repetem-se indefinidamente seguindo uma ordem, sendo uma parte semelhante ao todo.

A atividade trata-se de uma sequência crescente formada por meio do processo de construção do triângulo de Sierpinski, no qual foram dispostos os três primeiros termos, conforme mostra figura 07.

Figura 07: Sequência utilizada para realização da atividade 3



Fonte: Arquivo da professora

Para entender a formação da sequência, a comparação de termos consecutivos é imprescindível. Além disso, após a observação da regularidade, a lei de formação da mesma pode surgir facilmente relacionando termo com a ordem de cada um deles.

- ATIVIDADE 4

A atividade 4 utilizou o triângulo aritmético infinito ou triângulo de Pascal. Este triângulo é formado por números que tem diversas relações entre si e sua versão mais antiga foi creditada ao chinês Yang Hui. Entretanto, este triângulo mostrado na figura 08, levou o nome Triângulo de Pascal motivado pelo fato de várias de suas propriedades terem sido descobertas e estudadas pelo francês Blaise Pascal.

Figura 08: Sequência utilizada para realização da atividade 4

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Fonte: Arquivo da professora

È difícil caracterizar este triângulo por uma regra de formação, visto que o mesmo é constituído pelo conjunto organizado de números, formando diversas sequências com várias propriedades interessantes.

4.3 Descrição da aplicação das atividades

O momento da análise dos dados é o momento de organizar e confrontar informações recolhidas durante todo o processo de pesquisa com intuito de obter respostas consistentes as questões que direcionam o trabalho. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 133) "Esse é um processo trabalhoso e meticuloso que implica múltiplas leituras do material disponível, tentando nele buscar unidades de significados ou, então, padrões e regularidades para, depois, agrupá-los em categorias.".

Por meio dos instrumentos de obtenção de dados foi feita uma análise dos conteúdos recolhidos observando os sujeitos envolvidos e seus discursos, seja oral ou escrito, procurando identificar e descrever, em cada um deles, aspectos relevantes em relação as perguntas orientadora deste estudo, para tanto, procura-se destacar principalmente as representações, dificuldades, questionamentos e estratégias utilizadas durante as tarefas desenvolvidas.

- ATIVIDADE INTRODUTÓRIA

Para realização desta atividade, compareceu a aula todos os alunos. Inicialmente, explico aos alunos no que consiste e como será desenvolvido o trabalho, visto que é a primeira vez em que os mesmos têm contato com este tipo de conteúdo especialmente nesta configuração de exploração, conforme afirmam em questionário aplicado. Para tanto, supondo melhor estratégia por se tratar de uma sequência numérica organizada em n linhas e quatro coluna, foi utilizada a atividade citada por Ponte et al.(2013) explorações com números para introdução do trabalho.

Após a explanação sobre o tema, propomos divisão em grupos e a entrega das folhas de atividades, a mesma foi lida pelo professor conjuntamente com os alunos, incentivando a interação em grupo e motivando a dedicar-se a atividade para melhores resultados seguindo o orientado anteriormente.

Como os alunos não estavam acostumados a realizar este tipo de atividade principalmente em utilizar este processo de resolução, já era de se esperar certa agitação e dificuldade para realizar a atividade. Dessa forma, após ler a atividade, explicamos a eles que tentariam encontrar alguma regularidade para continuar a escrever a sequência e que cada grupo poderia encontrar sua forma de fazê-la.

Entretanto, mesmo após esclarecimentos, observamos a grande dificuldade dos alunos em dar início ao trabalho, nos deparando com perguntas do tipo "o que é para fazer mesmo?", "devemos procurar o que?", "Começamos por onde?". Percebendo os grupos estáticos aguardando a nossa posição sobre o que era para fazer. Então, resolvemos ir ao quadro e realizar a atividade em conjunto com toda a turma.

Com a sequência exposta no quadro fomos questionando-os e ajudando-os a formular conjecturas que posteriormente foram confirmadas ou refutadas por eles mesmos ou pelos colegas, ao tempo que íamos dispondo o ocorrido em um relatório geral sobre a tarefa, escrito por uma aluna nomeada por eles.

A figura 09 retrata o momento da realização da atividade, no qual todos participaram e se mostraram curiosos para entender como realizar este tipo de atividade.

Figura 09: Resolvendo a Atividade Introdutória

Fonte: Arquivo da professora

De modo geral, acredita-se que a atividade serviu para aproximá-los da MIM, fazendo com que entendessem o processo investigativo. Ao término da aula, já se mostravam ansiosos em como seria fazer a próxima atividade sozinhos.

- Atividade 1

Na resolução da atividade 1, compareceram a aula 28 alunos da turma que foram dispostos em 9 grupos, sendo 8 grupo de 3 alunos e 1 grupo com 4 alunos. Para dar início ao trabalho foi feita a leitura da mesma, dando ênfase aos objetivos propostos e questionamentos de modo a nortear o trabalho, porém solicitamos que os alunos para não se prendessem a isso para não limitar suas descobertas.

Ao iniciar a atividade, a maioria dos grupos se mostraram indecisos sem estarem muitos certos do que fazer, solicitando nossa intervenção constantemente, entretanto a maior parte deles, mesmo que sem um “planejamento prévio”, optaram por dar continuidade à sequência para reconhecer a regularidade da mesma, conforme podemos observar na figura 10, em que o grupo F utiliza o processo citado.

Figura 10: Grupo F resolvendo a Atividade1

Fonte: Arquivo da professora

Com esta mesma dificuldade, o grupo B se mostrou muito inquieto, sem saber por onde começar, ao notar nossa aproximação um dos alunos deste grupo questionou:

B1: Professora, o que é para fazer? Por onde devemos começar?

Prof: Vocês já leram os objetivos e os questionamentos? Já observaram a sequência?

B2: Já sim professora, mais ainda não compreendemos o que é para responder.

Prof: Se vocês observarem bem, o primeiro objetivo da atividade é identificar o grupo que se repete na sequência. Para isso, vocês devem desenvolver uma estratégia que possibilite está percepção.

E ao perceber que o grupo ainda tinha dificuldades, a professora continua:

Prof: Se fosse para vocês continuarem a escrever esta sequência, quais seriam as próximas figuras a serem desenhadas?

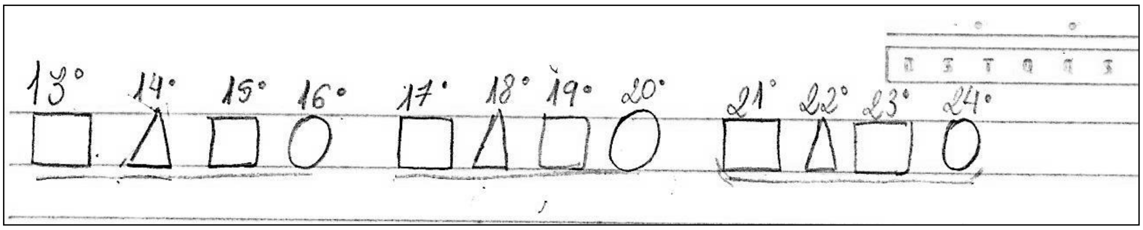
B2: Deixa eu ver, ...

Após essa intervenção, os alunos fizeram descrição oral dos elementos da sequência entre eles e apresentam a sequência escrita até a 24ª posição, representando separadamente a parte que se repete.

B1: Professora, a formação dessa sequência assim.

Diz o grupo B ao apresentar a imagem da figura 11.

Figura 11: Recorte da atividade 1, grupo B



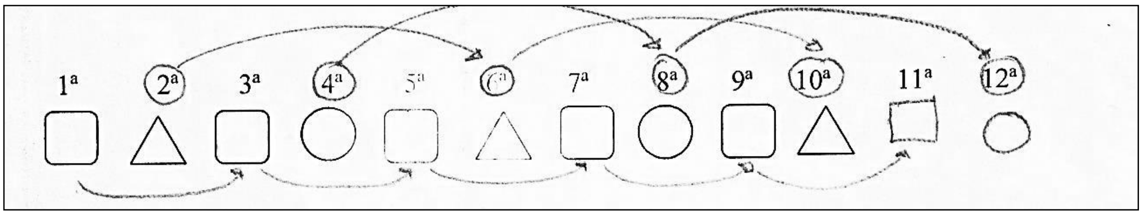
Fonte: Relatórios dos alunos

Prof: Como conseguiram chegar a ela?

B1: Ué, percebemos que a sequência é formada por formas geométricas que se repetem de quatro em quatro vezes, sempre na ordem quadrado, triângulo, quadrado e círculo; e como a 12ª figura foi um círculo e sempre depois do círculo é um quadrado, continuamos a desenhar a sequência colocando um quadrado na 13ª figura e assim por diante.

Essa forma de encontrar os termos seguintes da sequência, desenhando os termos, foi utilizada por muitos grupos, entretanto teve grupo que utilizou a representação por meio de flechas para entender e explicar as regularidades encontradas. Outros ainda optaram por marcações com linhas e círculos acompanhadas por descrição do que foi observado, em que destacam regularidades encontradas, conforme figura 12.

Figura 12: Recorte da atividade 1, grupo E



Fonte: Relatórios dos alunos

O grupo D, por sua vez, após período de observação revela ter encontrado a regularidade da sequência de 4 em 4.

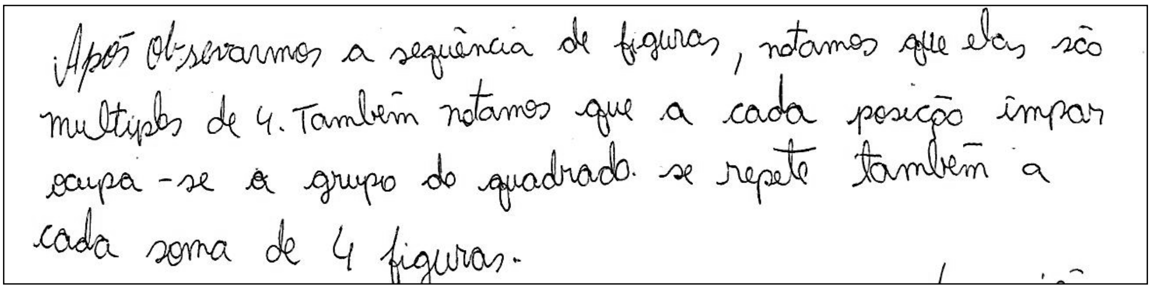
D1: Professora, achamos... a sequência vai se repetindo de 4 em 4. Vai ser quadrado, triângulo, quadrado, círculo.

Prof: Como chegaram a isto?

D1: Observando percebemos que apesar de ter dois quadrados no mesmo espaço, depois do primeiro vem um triângulo e depois do segundo vem um círculo. Depois começa tudo novamente.

Porém, apesar desse grupo dar uma explicação bem clara sobre o conjunto que se repete na sequência, no relatório escrito há uma descrição de pouco entendimento ao se referir a formação da sequência, demonstrando dificuldade em passar a linguagem oral para escrita, conforme podemos ver na figura 13. Nesse sentido, apesar de referirmos apenas ao grupo D, essa dificuldade é perceptível em quase todos os grupos

Figura 13: Recorde da atividade1, grupo D


Após observarmos a sequência de figuras, notamos que elas são multiplos de 4. Também notamos que a cada posição impar ocupa-se o grupo do quadrado. se repete também a cada soma de 4 figuras.

Fonte: Relatórios dos alunos

Comparando as duas descrições, pode-se perceber que o grupo não tem muito domínio dos conceitos e definições, em especial de múltiplos. Propõe-se que o erro ocorreu ao grupo tentar descrever as observações numa linguagem mais formal.

Apesar de toda inquietação que se pode observar no início da atividade, grande parte dos grupos logo conseguiram encontrar a regularidade da sequência e assimilar as posições pares aos quadrados e as posições ímpares aos triângulos e círculos.

Contudo, um dos grupos apesar de entender o grupo que se repete e perceber a repetência do quadrado de 2 em 2, não conseguiram assimilar as descobertas aos números pares e ímpares, ao perceber isso a professora interferiu: Vejamos:

Prof: O que vocês já conseguiram?

E1: Observe professora... Percebemos que o quadrado pula de 2 em 2, assim somado a 2 a partir da primeira posição, a sua posição será o resultado da soma.

Prof: Como. Não entendi.

E1: Assim, o quadrado ocupa primeiro a posição 1, 1 + 2 = 3, logo a próxima posição do quadrado é 3, depois 3 + 2 = 5, então o quadrado vai estar no 5. E assim por diante.

Prof: Entendi. Mas e o triângulo e o círculo? Como vamos saber?

E1: È só somar 4 a posição da primeira figura, pois eles aparece de 4 em 4.

Com o auxílio de uma folha, E1 continua:

E1: Por exemplo, o triângulo começa no 2, 2 + 4 = 6 + 4 = 10 + 4 = 14, então o triângulo vai estar no 2, 6, 10, 14, ... e o círculo começando do da quarta posição, vai ser 4, 8, 12, ...

Percebe-se neste processo, que os integrantes do grupo, mesmo sabendo da necessidade de relacionar os elementos com a posição, os mesmo tem dificuldade em diferir e utilizar números cardinais e ordinais.

Ao chegarem as estas constatações alguns grupos acharam suficiente as descobertas propondo finalizar o trabalho e outros não conseguiam continuar afirmando não saber como proceder, neste momento a professora chamou atenção da turma e questionou sobre como saber quais figuras ocupariam algumas posições como 15º, 31º e 149º. Neste momento praticamente todos os grupo, mesmo sugerindo que a respostas do 15º e do 21º sejam quadrados por serem ímpares, resolveram dá prosseguimento a sequência para comprovar os resultados, conforme figura 14. Daí, observando outras posições ímpares constataram que para qualquer posição ímpar não precisariam desenhar já saberiam que seria quadrado. Vejam:

Prof: Qual seria a décima quinta figura dessa sequência?

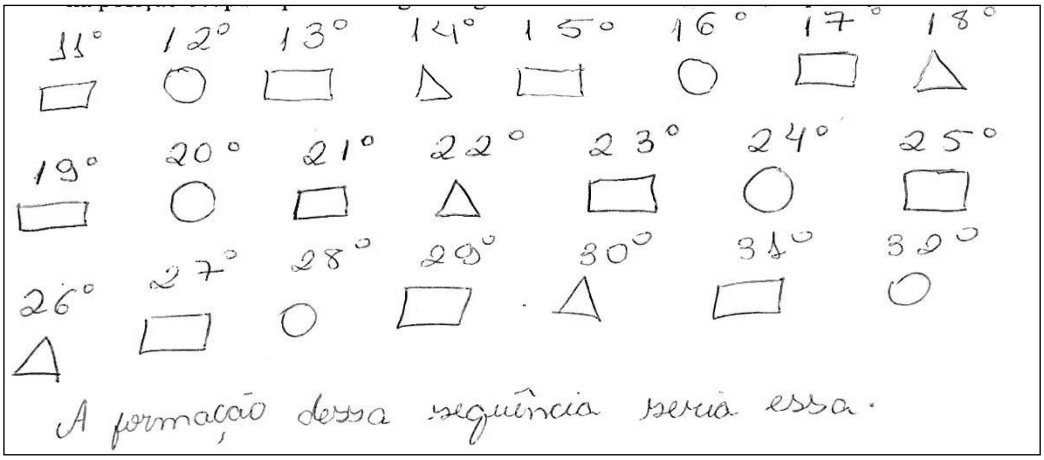
Depois de algum tempo.

G1: Um quadrado, professora.

Prof: Porque afirma isso?

G1: Fui desenhando e contando até chegar lá. Assim...

Figura 14: Recorte da atividade 1, grupo G



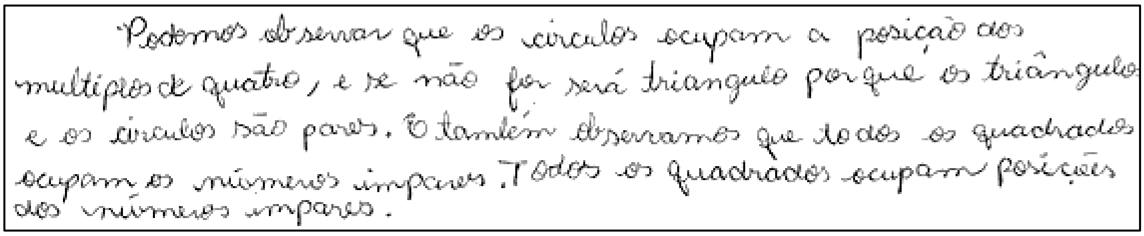
Fonte: Relatórios dos alunos

Prof: E se eu pedisse uma posição maior, como a 149º como faria? Também iria desenhar?

G1: Não professora, pois desenhando estes já percebemos que todo lugar ímpar tem um quadrado.

O grupo H expunha esta mesma observação em seu relatório, de acordo figura 15. Entretanto, ao invés de relacionar cada elemento da sequência a uma posição, faz o processo contrário relacionando os triângulos e círculos aos números pares e cada número ímpar a um quadrado.

Figura 15: Recorte da atividade 1 do grupo H


Podemos observar que os circulos ocupam a posição dos multiplos de quatro, e se não for será triangulo porque os triângulo e os circulos são pares. E também observamos que todos os quadrados ocupam os números impares. Todos os quadrados ocupam posições dos números impares.

Fonte: Relatórios dos alunos

Ao serem questionados sobre as posições dos triângulos e círculos, quase todos os grupos conseguiram chegar ao fato de ocuparem posições pares, entretanto apenas alguns grupos conseguiram alguma maneira de diferir quais as posições pares que seriam triângulos e quais seriam círculos. Um grupo tentando descobrir observa:

F1: Acho que descobrimos algo.

Prof: Vamos ver.

F1: Encontramos que a cada 10 posições o triângulo e o círculo muda a quantidade.

Prof: Como? Não compreendi.

F1: Ah, deixa. Não deve ser importante.

Prof: É importante sim, é descoberta de vocês. Digam.

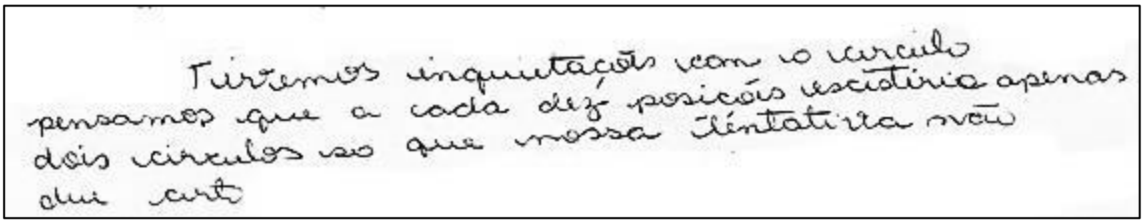
F2: De 1 a 10, tem 3 triângulos e 2 círculos; de 11 a 20, tem 2 triângulos e 3 círculos; e assim continua

Prof: Muito bem, por que será que isso acontece? Tentem descobrir.

Neste diálogo é possível perceber a falta de confiança em suas descobertas. Isso acontece por não estarem acostumados a realizar este tipo de tarefas em que precisam utilizar seu raciocínio e atenção para produzir novos conhecimentos que possam gerar aprendizado. Neste caso, coube a nos, intervir, para conscientizá-los da importância da ação que estavam realizando, que era chegar sozinhos a descobertas matemáticas, independente da coerência das mesmas.

É possível perceber que ao fazer conjecturas e testá-las, alguns grupos chegaram a conclusões não estariam corretas, ou até mesmo não seria muito útil. Vejamos na figura 16 o comentário do grupo A que através da observação da sequência sugeriu certa frequência na ocorrência do círculo, conforme grupo supracitado, que logo foi refutada após contagem.

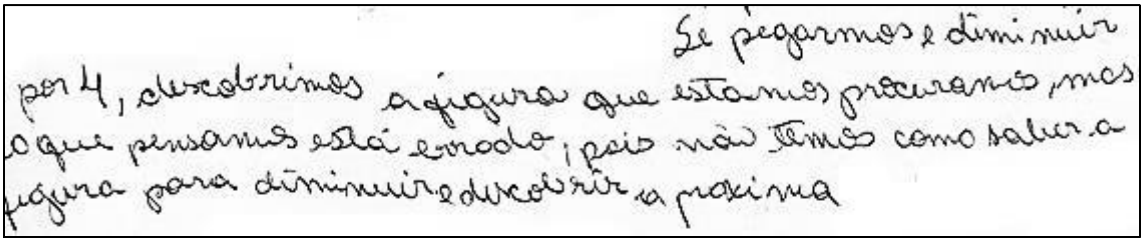
Figura 16: Recorte da atividade 1, grupo A


Tivemos inquietaçõis com o circulo
pensamos que a cada dez posicóis esciotiria apenas
dois circulos so que nossa tentativa não
deu certo

Fonte: Relatórios dos alunos

Também, outro grupo observou o fato dos triângulos e círculos se repetirem na sequência de 4 em 4. Conforme pode-se ver na figura 17, eles sugeriram:

Figura 17: Recorte da atividade 1, grupo F


Se pegarmos e diminuir por 4, descobrimos a figura que estamos procurando, mas o que pensamos está errado, pois não temos como saber a figura para diminuir e descobrir a próxima

Fonte: Relatórios dos alunos

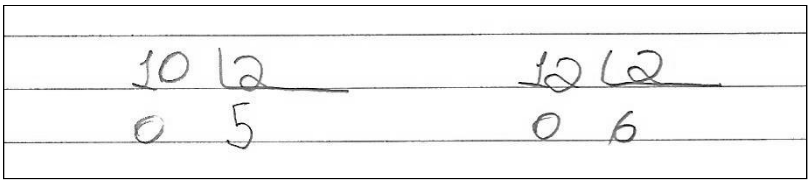
Dos nove grupos que realizaram a atividade apenas cinco conseguiram chegar a uma maneira coerente para localizar as posições ocupadas pelo círculo e triângulo, mesmo sem saber ao certo justificar o porquê desse fato. Vejamos a justificativa do grupo E, ao apresentarem as contas expostas na figura 18:

E1: Para descobrir a posição é só dividir o número por dois, se der par vai ser um círculo, se der ímpar vai ser triângulo.

Prof: Não compreendi quem vai dar par ou ímpar. Podes explicar?

E1: Olha um exemplo professora.

Figura 18: Recorte da atividade 1, grupo E



Fonte: Relatórios dos alunos

E1: Nesta conta o resultado foi cinco que é ímpar, então é um triângulo. Na outra o resultado foi seis, então é círculo por que é par.

Prof: Vocês conseguem justificar porque isso ocorre?

E2: Porque dá certo agente não sabe, mais é assim pois olhamos com vários números e deu certo.

Conforme a figura 19, outro grupo escreveu em seu relatório:

Figura 19: Recorte da atividade 1, grupo E.

Concluimos que se dividirmos um número por 2 e o resultado for par, o número estará no circulo, e se o resultado da divisão for impar, o número estará no triângulo.
Ex:

Fonte: Relatórios dos alunos

Em ambas as descrições ao utilizar as expressões "der par" e "for par" os alunos não explicam a quem se refere, consideram suficiente a resposta dada. Neste caso, percebem os conceitos, mas não diferem os termos da adição. Além disso, ao observar a frase "o número estará no círculo" que está escrita no relatório percebe-se que neste caso os alunos passam a consideram as figuras como posição e os números como sequência.

Ainda sobre a localização dos triângulos e círculos, dois grupos chegaram às conclusões seguintes, de acordo figura 20 e 21:

Grupo C:

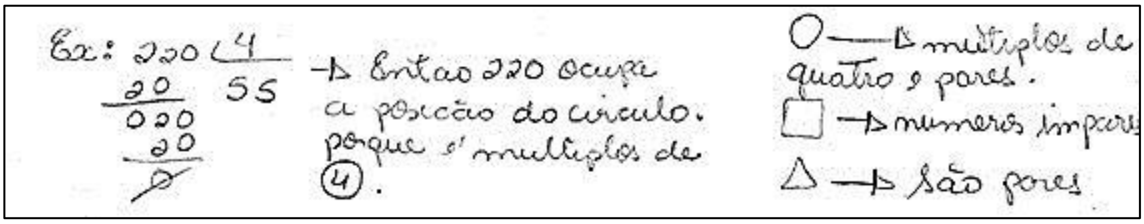
Figura 20: Recorte da atividade 1, grupo C

□ = impar
Δ = par é do tipo 4N + 2
O = (Multiplo de 4.) 4N.
Se pegar a posição que queremos descobrir e dividir por 4 não der exata vai ser triângulo e se o resultado der exato vai ser circulo.

Fonte: Relatórios dos alunos

Grupo H:

Figura 21: Recorte da atividade 1, grupo H.



Fonte: Relatórios dos alunos

Nesses relatos, apesar de não escrever claramente, para os alunos, já está subtendido que os triângulos ficam nas posições pares que não são múltiplos de 4. Vejamos a resposta, por exemplo, do grupo C, ao ser questionado pela professora:

Prof: Quer dizer que todas as posições pares são triângulos?

H1: Não professora, tá escrito aqui, os pares que são múltiplos de 4, são círculos.

Neste sentido, é possível perceber, a dificuldade dos alunos em descrever as respostas detalhadamente, de forma clara e com máximo de informação, para que todos os colegas possam compreender qual sua estratégia e a quais conclusões chegaram.

Síntese da atividade 1

Por ser a primeira atividade em que os alunos iriam utilizar a MIM, procuramos empregar uma sequência simples na qual os alunos pudessem observar facilmente a regularidade e recorrer a conhecimentos prévios básicos como números pares, números ímpares, múltiplos, no qual pressupus que os mesmos já tinham domínio e iriam resolvê-la facilmente, despertando interesse pelas atividades investigativas. Entretanto, notamos muita dificuldade por parte dos alunos, em reconhecer estas propriedades matemáticas tidas como básicas.

Como era de se esperar, esta primeira atividade trouxe muita inquietação á turma, apresentando dificuldades em iniciar a atividade. Além disso, grande parte dos alunos apresentaram também dificuldades em relacionar descobertas a conceitos e definições já estudados, não conseguindo relacionar as posições ocupadas pelo quadrado como posições ímpares, as ocupadas por triângulos como pares que não são múltiplos de quatro e as ocupadas pelo círculo como múltiplos de quatro.

A maioria dos grupos, tendo dificuldades em continuar a atividade, deu por suficiente à observação das primeiras conjecturas em que perceberam as regularidades por recorrência. Além disso, pelo fato de não terem costume de produzir relatórios, inicialmente, os alunos se mostraram indecisos em o que escrever e/ou preguiçosos. Estas dificuldades apresentadas inicialmente numa tarefa considerada relativamente fácil deixaram-nos apreensivos e preocupados em não obter êxito no trabalho proposto.

Contudo, um fato positivo foi a busca de interação entre os integrantes do grupo. A todo instante percebia-se os alunos buscando ajuda do colega no desenvolvimento de estratégias e tentando convencer os mesmos de suas conjecturas.

- ATIVIDADE 2

Na resolução da atividade 2 todos os alunos compareceram à aula, formando 10 grupos com 3 alunos. Para dar início aos trabalhos, distribuímos a atividade impressa, propondo a leitura da mesma e em seguida, fizemos um breve comentário sobre a atividade e seus questionamentos. Nesta atividade foi possível perceber um bom nível de envolvimento e participação dos alunos durante a realização das tarefas conforme mostra a figura 22.

Figura 22: Momento da realização da tarefa 2

Fonte: arquivos da professora

Logo no início da atividade, após análise da sequência, foi possível ouvir comentários sobre as características da mesma.

Grupo A:

A3: Ela vai sempre aumentando e só tem círculos.

Grupo E:

E1:Tem a forma de um triângulo

E2: Não é um triângulo, é um V.

Grupo D:

D2: È só aumentar um círculo de cada lado.

Em seguida quase todos os grupos se propuseram a utilizar a representação icónica, desenhando os próximos termos da sequência com o intuito de descobrir alguma coisa que eles considerassem importante. Entretanto, outros grupos optaram por representar a sequência numericamente por meio de uma tabela, somando duas unidades a cada termo. Como é o exemplo do Grupo E, mostrada na figura 23.

Figura 23: Representação da sequência pelo grupo E

Tabela que representa a sequência:

1º	2ª	3ª	4º	5ª	6º	7º	8ª	9º	10º
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Fonte: Relatórios dos alunos

Ao chegar ao 10º termo E2 afirma:

E2: Reparam que só tá dando números ímpares [referindo a quantidade de pontos de cada posição.

Estas constatações iniciais foram encontradas por praticamente toda a classe. Pode-se notar que já houve um crescimento neste ponto, visto que no trabalho com a mesma, os alunos já partiram para a observação buscando uma maneira mais conveniente para perceber a sua regularidade, mostrando-se mais confiantes e decididos. Além disso, todos os grupos, uns mais cedo outros mais tarde, identificaram os termos como sendo todos ímpares. Este conceito havia passado despercebido por alguns grupos, na tarefa 1, aplicada anteriormente, sendo motivo de comentário no momento de discussão dos resultados, em que a professora aproveitou para conceituar.

As dificuldades dos alunos passaram a ser perceptível a partir do momento que foi questionado sobre o que fazer para encontrar o número de pontos de uma figura qualquer. Alguns grupos ainda continuaram com a ideia de continuar a sequência até a posição solicitada, entretanto, em seguida, lembraram-se dos comentários e questionamentos da tarefa anterior e propuseram a buscar outros meios.

Apesar de conseguirem justificar o crescimento da sequência, a dificuldade em generalizar era muito grande, conforme se constata no diálogo que se segue:

F1: De uma figura para outra aumenta dois, assim para encontrar a quantidade de círculo da figura 10 é só somar 2 na figura 9.

F2: Mas como vamos fazer se não sabemos a quantidade de círculos da figura 9.

F3: Só se desenhar.

F2: Não. A professora disse na outra atividade que se fosse para encontrar de um número grande ficava difícil desenhar. Temos que achar outro jeito.

O grupo H, por sua vez, ao sugerir que encontrassem a quantidade de pontos da 100ª figura, solicita a presença da professora e afirma ter encontrado o valor:

H3: Encontramos que a 100ª figura tem 203 pontinhos.

Prof: Como chegaram a este valor?

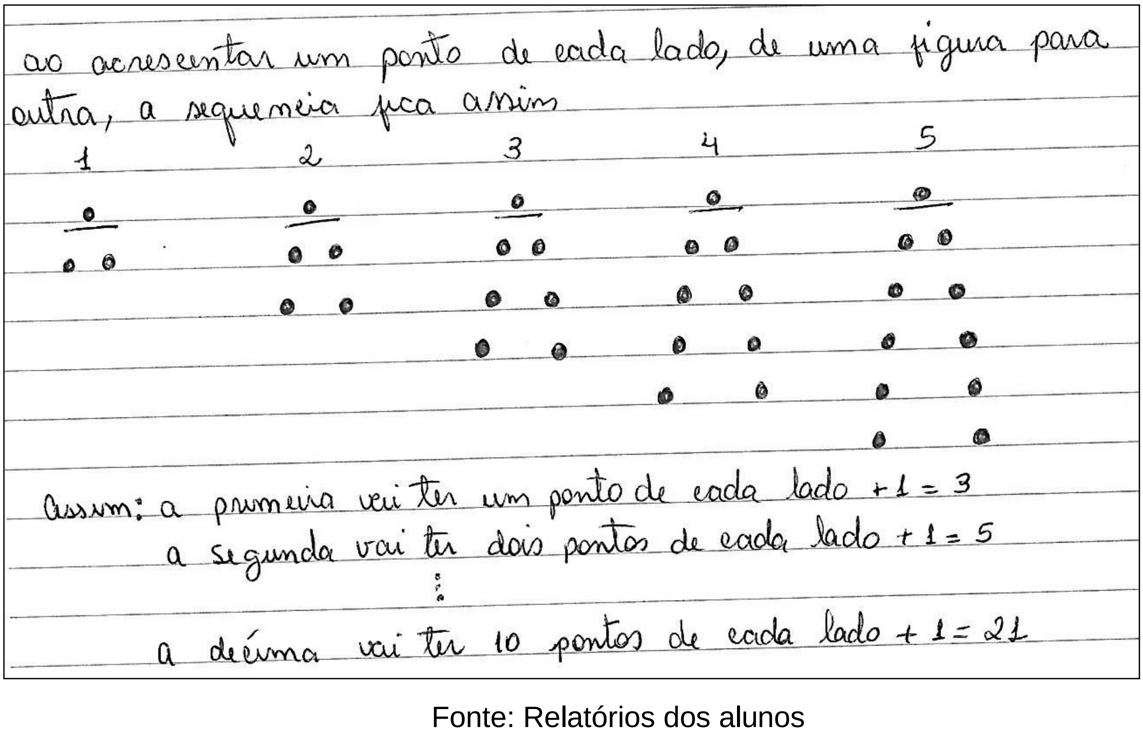
H3: Como a sequencia começa com 3, e vai aumentando 2, fui somando até chegar em 100.

Prof: Tem certeza que é essa quantidade.

H2: È sim, professora. Eu também fiz.

Por meio da observação em sala e da análise dos relatórios e dos áudios, foi possível perceber que 6 dos 10 grupos formados conseguiram observar a regularidade e encontrar o número de pontos de qualquer termo solicitado. Alguns grupos utilizaram a representação icônica para entender a regularidade, como foi o caso do grupo I, vejamos na figura 24:

Figura 24: Recorte da atividadede 2, grupo I.



Fonte: Relatórios dos alunos

Ao observar o desenho, os alunos foram questionados:

Prof: E se quisessem saber a quantidade de pontos da 10ª posição, como fariam?

I3: Só é colocar dez pontos de cada lado mais um de cima, vinte e um.

Prof: E se eu soubesse que em certa posição haveria 135 pontos, teria como saber qual era essa posição?

Depois de algum tempo, solicitaram a professora:

I2: Achamos. É a figura 67.

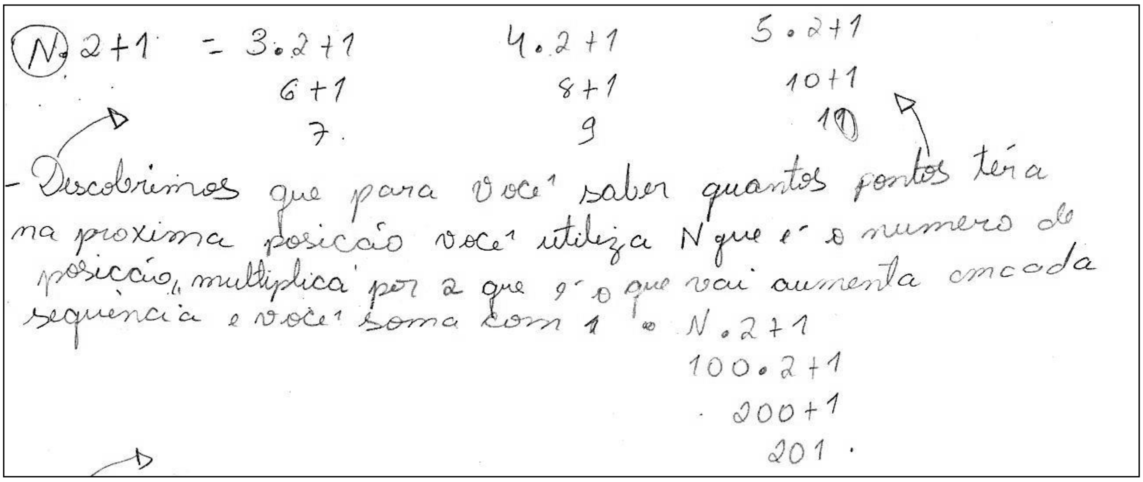
Prof: Me explique como chegaram a 67.

I2: Fomos aproximando. Testamos primeiro o 60 deu 121, aí fomos aumentando.

I3: Fizemos assim: duas vezes 67, que é 67 de cada lado, mais 1 e deu 135.

Assim como em outros grupos, apesar de mostrar ter entendido a regularidade da sequência e ter encontrado uma maneira coerente de relacionar as posições á quantidade de pontos, apenas dois dos grupos chegaram a fórmula algébrica, para fazê-lo. Vejamos as figuras 25 e 26 com a explicação do grupo A:

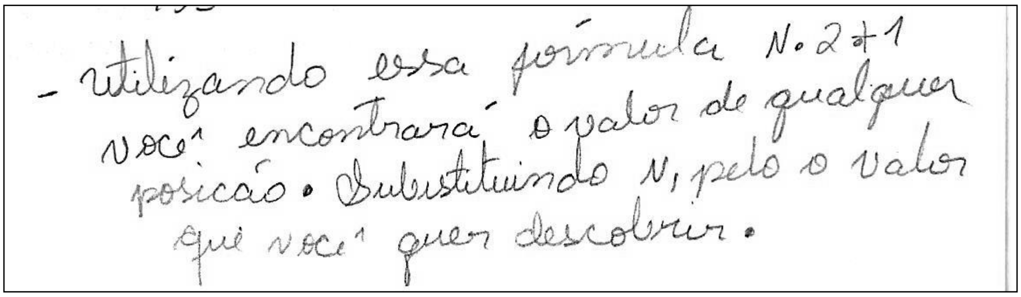
Figura 25: Recorte da atividade 2, grupo A


N.2+1 = 3.2+1   4.2+1   5.2+1
6+1   8+1   10+1
7   9   11

- Descobrimos que para você saber quantos pontos terá na proxima posicão você utiliza N que é o numero de posição, multiplica por 2 que é o que vai aumenta em cada sequencia e você soma com 1 ∴ N.2+1
100.2+1
200+1
201

Fonte: Relatórios dos alunos

Figura 26: Recorte da atividade 2, grupo A

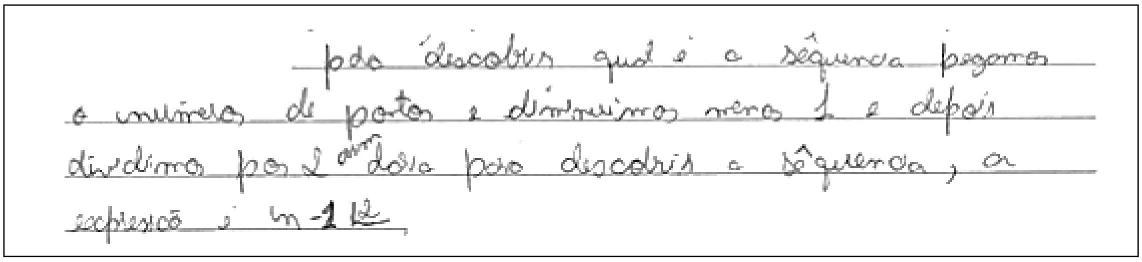


- utilizando essa formula N.2+1 você encontrará o valor de qualquer posição. Substituindo N, pelo o valor que você quer descobrir.

Fonte: Relatórios dos alunos

Ao serem questionados sobre como proceder para encontrar a posição que tem 135 pontos, 9 dos 10 grupos chegaram a resposta 67. Contudo, 8 deles mostraram tanto no diálogo em sala quanto na escrita dos relatório conseguir fazê-lo fazendo testes sucessivos até chegar ao valor. Apenas o grupo C, mostrou-se a todo tempo ter mais facilidade na atividade, ofereceu a justificativa da figura 27 seguir.

Figura 27: Recorte da atividade 2, grupo C.

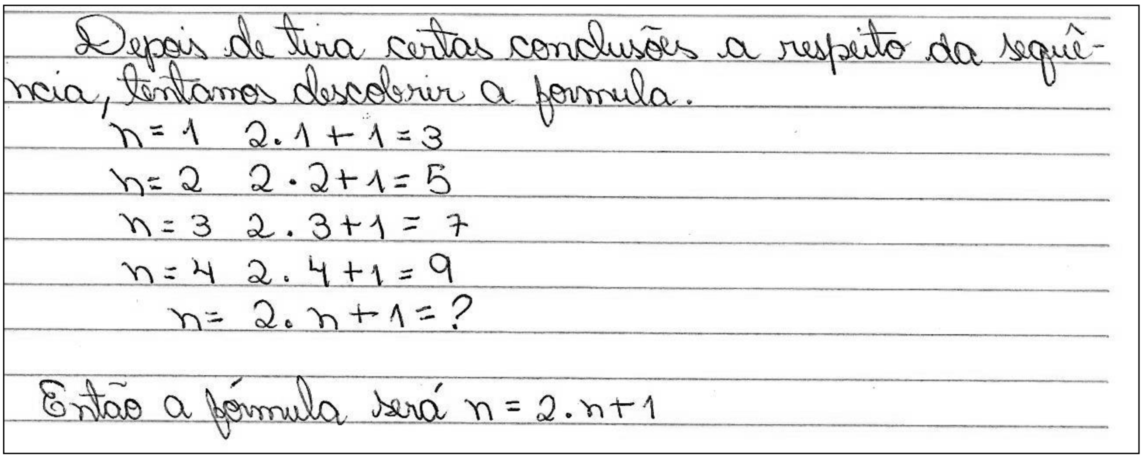


pra descobrir qual é a sequência pegamos o número de pontos e diminuímos menos 1 e depois dividimos por 2 ou dois para descobrir a sequência, a expressão é $n-1/2$

Fonte: Relatórios dos alunos

Mesmo alguns grupos conseguindo relacionar o termo com a posição ocupada, chegando à expressão algébrica, todos utilizaram a incógnita sem dar significado a ela, conforme se pode observar no fragmento do relatório do grupo C exposto anteriormente e do grupo G, mostrado na figura 28.

Figura 28: Recorte da atividade 2, grupo G.



Depois de tira certas conclusões a respeito da sequê-ncia, tentamos descobrir a formula.

$n = 1 \quad 2.1 + 1 = 3$

$n = 2 \quad 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$n = 3 \quad 2.3 + 1 = 7$

$n = 4 \quad 2.4 + 1 = 9$

$n = 2.n + 1 = ?$

Então a fórmula será $n = 2.n + 1$

Fonte: Relatórios dos alunos

Neste caso, o grupo utiliza inicialmente a letra n como sendo posição e ao escrever a fórmula utiliza n para representar também a quantidade de pontos da figura. Este fato é comum a todos os outros grupos que chegaram à fórmula algébrica. Isso mostra claramente a dificuldade dos mesmos em se expressar algebricamente.

O momento da explanação do trabalho foi bem interessante e proveitoso. O grupo I começou por desenhar os próximos termos da sequência comentando as descobertas iniciais e ouvindo as descobertas dos outros grupos. Quando o grupo H apresentou sua forma de encontrar o centésimo termo, alguns colegas logo afirmaram estar errado, enfatizando que o correto seria $201 = 110 \times 2 + 1$. Ao explicarem como encontraram este valor percebemos que estavam considerando o primeiro termo como sendo 5, resultado de $3 + 2$. Organizadamente, todos expuseram e ouviram a explicações, demonstrando assimilar o que foi exposto.

Síntese da atividade 2

Ao lembrarmo-nos das dificuldades apresentadas pelos alunos no desenvolvimento da atividade anterior, ao elaborar esta atividade, procuramos fazê-la da forma mais simples possível, com o intuito de que os alunos não tivessem muitas dificuldades em trabalhar com a mesma, de modo a tomar gosto pelas atividades investigativas, resolvendo-a de forma prazerosa.

Todos os grupos conseguiram identificar as características básicas da sequência e encontrar os próximos termos. Alguns alunos utilizaram uma tabela para registrar o número de elementos de cada termo, outros optaram pela representação icônica, e desenharam os próximos termos. De uma forma geral, estes procedimentos permitiu-lhes identificar e compreender a regularidade presente com mais facilidade.

A linguagem natural está sempre presente no decorrer da tarefa, seja na fala ou na escrita, como veículo para comunicar e justificar raciocínios e estratégias. Além disso, pode-se observar que alguns alunos já estão se familiarizando com as estratégias de generalização, utilizando até mesmo, a decomposição dos termos para chegar à fórmula algébrica. Como foi o caso do grupo A com a decomposição das figuras e do grupo C.

A chegada à expressão algébrica, mesmo faltando algumas definições ao utilizar as incógnitas, foi muito importante. Isto deu ao aluno certa autoconfiança no trabalho desenvolvido.

Tomando como base toda a turma, pode-se dizer que ainda é frequente as dificuldades de generalização, argumentação e relacionar as incógnitas ao devido significado. Entretanto, comparando a tarefa 1 com a atividade 2, observamos uma melhora significativa no trabalho com a segunda atividade, visto que, além de ter conseguido fazer mais descobertas, também percebemos maior empenho, confiança e vontade de fazer mais atividades.

- ATIVIDADE 3

Na resolução da atividade 3, compareceram a aula 28 alunos da turma que foram dispostos em 9 grupos, sendo 8 grupo de 3 alunos e 1 grupo com 4 alunos. A introdução da tarefa foi feita de modo similar às atividades anteriores: distribuição da atividade impressa, leitura, breve comentário sobre a atividade e seus questionamentos. Contudo, para que os alunos entendessem melhor sobre os fractais, foi utilizado um vídeo, no qual rendeu muitas perguntas e comentários sobre o conteúdo, aproveitando o espaço para comentar também sobre o triângulo de Sierpinski.

Assim que receberam a atividade o alunos buscaram interagir com o grupo de modo a comparar termos, encontrar regularidade e continuar a sequência. É perceptível que os alunos já compreenderam a necessidade de observar, discutir e dialogar com o colega, sem estar constantemente solicitando a presença do professor.

Neste momento, ao perambular pela sala e observar a resolução da atividade, pude ouvir comentários sobre as descobertas iniciais.

Grupo F:

F2: Em cada figura os triângulos pretos estão deitados e os brancos estão de pé.

Grupo H:

H1: Os triângulos brancos vão sempre aumentando quando multiplicados por 3.

H2: Os valores são todos ímpares.

Grupo F:

F3: Tem algo relacionado com o 3.

Grupo B:

B2: É só multiplicar a posição da figura por 3, acharemos a quantidade de triângulos brancos da próxima figura.

Ao ouvir o comentário do grupo B, a professora interveio:

Prof: Como assim? Vocês podem explicar melhor?

B2: A primeira figura tem um, 1 x 3 = 3. Então a segunda figura vai ter 3.

Prof: Entendi. E os próximos termos?

B2: Se a segunda figura tem 3, 3 x 3 = 9. A terceira figura vai ter 9.

Prof: Então vocês estão multiplicando a posição por 3?

B1: Não professora, é a quantidade de triângulos por três, para achar a da frente.

Neste diálogo, como em outros casos observados, os alunos entendem o proposto, entretanto ao procurar expor sua justificação revelam dificuldade em expressar a descobertas matemáticas por escrito. Além disso, é comum procurarem encontrar os próximos termos utilizando recorrência, como é o caso do grupo B, supracitado e do grupo E exposto na figura 29.

Figura 29: Recorte da atividade 3, grupo B.

Fizemos a conta para ver quantos triangulos iria ter na 9º figura pegamos o resultado da 8º figura e multiplicamos por 3

Fonte: Relatórios dos alunos

Também, o grupo G, mostra que consegue entender a regularidade e encontrar o número de triângulos brancos de um termo a partir do anterior multiplicando por 3, entretanto no momento da escrita do relatório, na intenção de obter uma fórmula para isso, expressa usando a incógnita n sem expor o que ela representa. Vejamos na figura 30, a fórmula encontrada pelo grupo G:

Figura 30: Recorte da atividade 3, grupo G

Fórmula para sabe quantos triângulos terá na proxima posicão é fazer → $n \times 3 = n$.

Fonte: Relatórios dos alunos

Ao serem questionados sobre quantos triângulos brancos teriam a 9ª figura, todos os grupos chegaram corretamente a resposta construindo uma tabela e recorrendo a multiplicação do termo anterior por três. Desses, apenas dois chegaram à generalização por meio da fórmula. O grupo C, por exemplo, utilizou a tabela para conseguir visualizar a fórmula e ao questionar como conseguiu encontrá-la, responderam:

C2: primeiro percebemos que a 1ª figura tinha 1 triangulo branco, a 2ª tinha 3, e a 3ª tinha 9 então percebemos que era múltiplos de três. Mas avaliando melhor vimos que nem todos múltiplos de 3 estavam aí foi então que pensamos na potencia de 3 e começamos a testar.

Prof: Mais vocês testam o que?

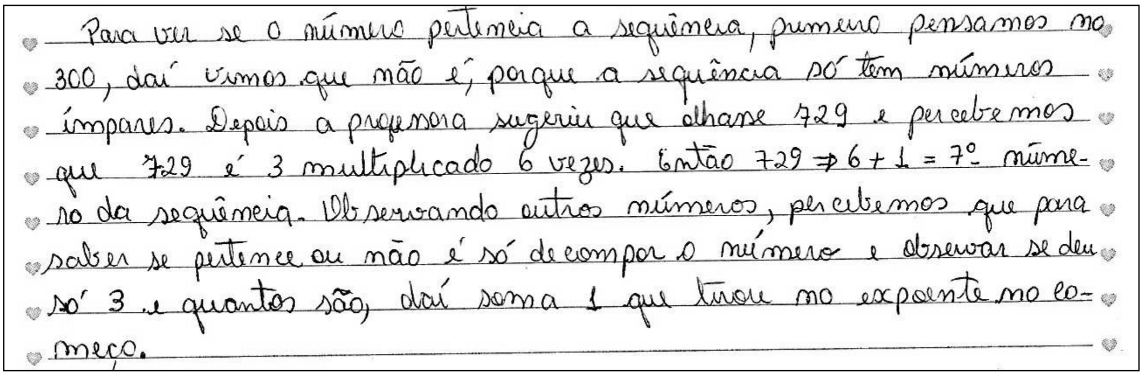
C3: Testamos 3^n, mais como faltou o 1 vimos que tava faltando alguma coisa. Foi quando C2, falou em tirar 1 no expoente. Então ficou 3^{n-1}.

Prof: Mais este n refere-se a quem? è a quantidade de triângulos?

C2: Não professora. A quantidade de triângulos é o que vamos encontrar, n é o número da figura (referindo-se a posição).

Foi perceptível que este grupo foi o que entendeu o problema mais rápido, chegando a uma fórmula coerente. Além disso, foram os únicos a conseguir verificar se certo número está relacionado a quantidade de triângulos desta sequência. Observe a figura 31, a justificativa exposta no relatório.

Figura 31:Recorte da atividade 3, do grupo C

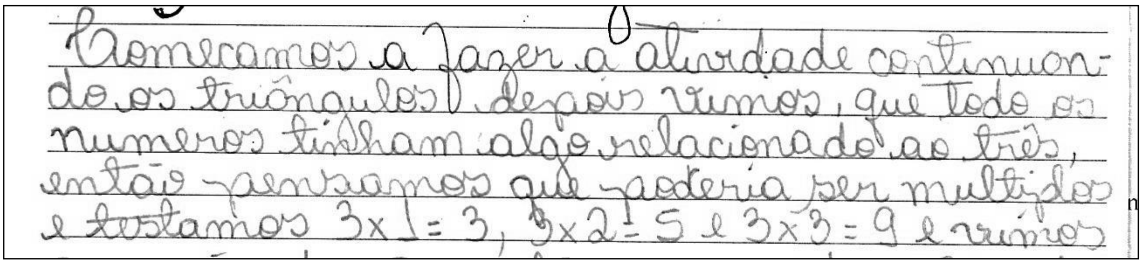

Para ver se o número pertencia a sequência, primeiro pensamos no 300, daí vimos que não é, porque a sequência só tem números ímpares. Depois a professora sugeriu que olhasse 729 e percebemos que 729 é 3 multiplicado 6 vezes. Então 729 ⇒ 6 + 1 = 7º número da sequência. Observando outros números, percebemos que para saber se pertence ou não é só decompor o número e observar se deu só 3 e quantos são, daí soma 1 que troca no expoente no começo.

Fonte: Relatórios dos alunos

Aparentemente, este grupo foi o que mais obteve êxito no decorrer das tarefas, demonstrando no final do processo facilidades em observar regularidades, fazer generalizações e até mesmo, representar algebricamente a sequência. Apesar de não justificar esta resposta algebricamente, demonstra entender como encontrar a posição de qualquer termo. Vale ressaltar que dois dos integrantes desse grupo, se mantiveram juntos em praticamente todas as tarefas, sendo talvez, o entrosamento uma justificativa para maior sucesso nas atividades.

O grupo H, antes de chegar corretamente à regularidade para encontrar o termo qualquer da sequência, expõe uma conjectura que foi refutada. Observe a figura 32.

Figura 32: Recorte da atividade 3, grupo H.


Começamos a fazer a atividade continuando os triângulos, depois vimos que todo os numeros tinham algo relacionado ao três, então pensamos que poderia ser multiplos e testamos 3x1 = 3, 3x2 = 5 e 3x3 = 9 e vimos

Fonte: Relatórios dos alunos

No decorrer da análise dos relatórios dessa tarefa foi pouco comum encontrar conjecturas que foram refutadas. A razão disso é que muitos alunos tem vergonha e/ou acham desnecessário expor conjecturas que segundo ele “deram errado”.

A discussão em coletivo foi um momento muito rico na troca de ideias e entendimento de novos raciocínios. Houve uma grande agitação inicial, pois todos queriam expor suas descobertas. Ao ouvir os colegas, os outros grupos tiveram oportunidade de comparar e refletir sobre estratégias de resolução e conceitos. Os alunos demonstraram entender bem o exposto pelos colegas e o momento foi aproveitado para comentar sobre os conceitos de múltiplo e potências. Além disso, observando a dificuldade em encontrar o número de triângulos de "figura qualquer", mesmo dos grupos que encontraram a fórmula, a oportunidade foi aproveitada para realizar esclarecimentos sobre o que está sendo questionado com está expressão.

Síntese da atividade 3

Ao preparar esta atividade envolvendo fractais já imaginávamos ser bem recebida pelos alunos, visto que, é um tema muito interessante e que normalmente desperta a curiosidade, como de fato ocorreu.

Este entusiasmo mostrado no início da aula foi muito importante para o desenvolvimento das atividades. Nessa tarefa, já percebemos mais envolvimento e facilidade em realizar a atividade. Os alunos já estão mais confiantes nos processos que estão realizando formando um número maior de conjecturas. Mesmo apresentando ainda, dificuldades de expressar por escrito os questionamentos e descobertas e de representar a sequência algebricamente, já pudemos perceber uma mudança substancial no interesse e participação dos alunos.

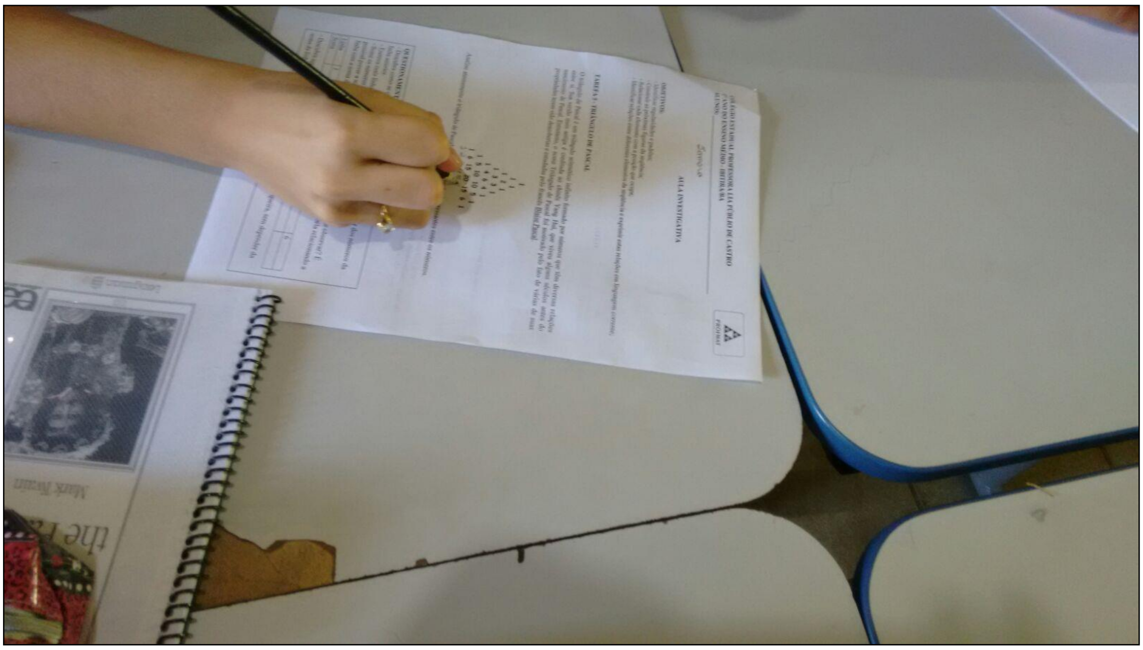
Apesar disso, nessa atividade, os alunos se mostraram mais consciente, interessados e esclarecidos sobre o que era necessário ser feito. As perguntas do tipo "o que é para fazer?" utilizadas no início do trabalho investigativo já quase não existia mais.

- ATIVIDADE 4

Na resolução da atividade 4 todos os alunos compareceram à aula, formando 10 grupos com 3 alunos. Início a aula me referindo ao nome Blaise Pascal, em seguida distribuímos a tarefa impressa e após leitura da mesma, fizemos um breve comentário sobre o triângulo aritmético e o que é proposto na atividade. Além disso, após a observação dos alunos ao triângulo, esclarecemos sobre a formação das linhas e diagonais, incentivando-os a numerá-las da mesma forma para facilitar a comunicação dos grupos e entendimento no momento da discussão. Também, incentivamos-os a fazer o desenho do triângulo deixando evidente que é mais fácil aceitar ou refutar as conjecturas quando expostas no triângulo.

De início, os alunos acharam a atividade um tanto quanto difícil, mas isso não foi empecilho, ao contrário, eles se mostraram muito interessados em buscar possíveis relações entre os números. Nesta fase inicial, foi possível ouvir vários comentários que exprimiam o bom nível de discussão em busca de regularidades e a necessidade de expor sua opinião e convencer o outro de sua veracidade. A figura 33 mostra um grupo procurando dar continuidade ao triângulo aritmético com intuito de compreender o padrão.

Figura 33: Resolvendo a atividade 4



Fonte: Arquivo da professora

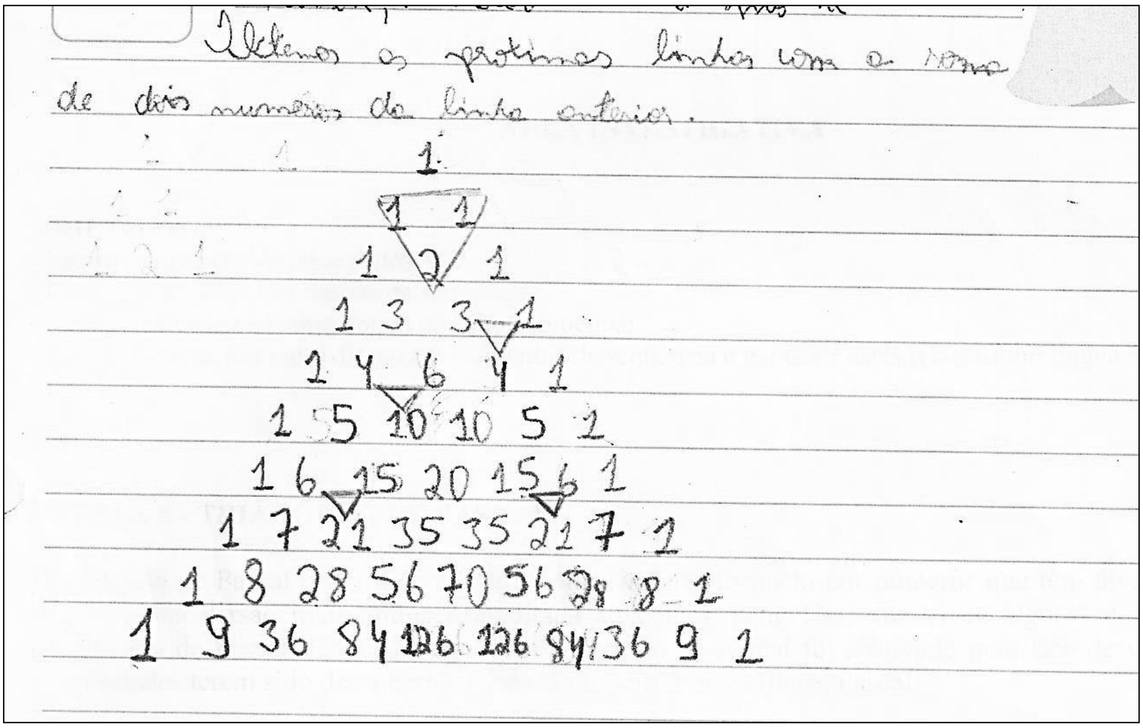
Algumas observações e descobertas foram comuns a quase toda turma como:

- A lateral do triângulo é composta pelo número 1;

- A 2ª diagonal dos dois lados do triângulo é formada pelos números naturais. Neste caso, apenas alguns dos grupos observaram que falta o zero para completar o conjunto;

- A soma de dois números de uma linha, resulta no número da linha seguinte, imediatamente abaixo dos somados, conforme mostrado na figura 34. Esta observação possibilitou a construção de mais linhas do triangulo aritmético. E levou os alunos a perceberem que este triângulo é infinito.

Figura 34: Recorte da atividade 4, grupo B



Fonte: Relatórios dos alunos

- O triângulo tem um eixo de simetria.

D1: Se fizermos um risco no meio do triângulo, os números de um lado e do outro ficam iguais.

D2: Também, as linhas pares não tem número que fica no meio, pois o número de elementos é par; e as linhas ímpares, tem uma quantidade de números ímpares e sempre tem um número par no meio.

Prof: Tem certeza que esta afirmação é verdadeira? Já experimentaram nas linhas seguintes?

D1: Já sim professora. Fizemos até a linha 10.

D3: Isso só não vale para a primeira linha em que o 1 fica no meio.

Essas observações parecem simples, mas achamos importante pois nas atividades anteriores, apesar de saber reconhecer pares e ímpares, os alunos não expressavam nenhuma observação sobre isso, tendo dificuldade de perceber, por exemplo, que todos os números de uma linha eram pares.

Outro grupo, ao observar a simetria do triângulo, solicitou a nossa presença e fez colocação que eu não esperávamos.

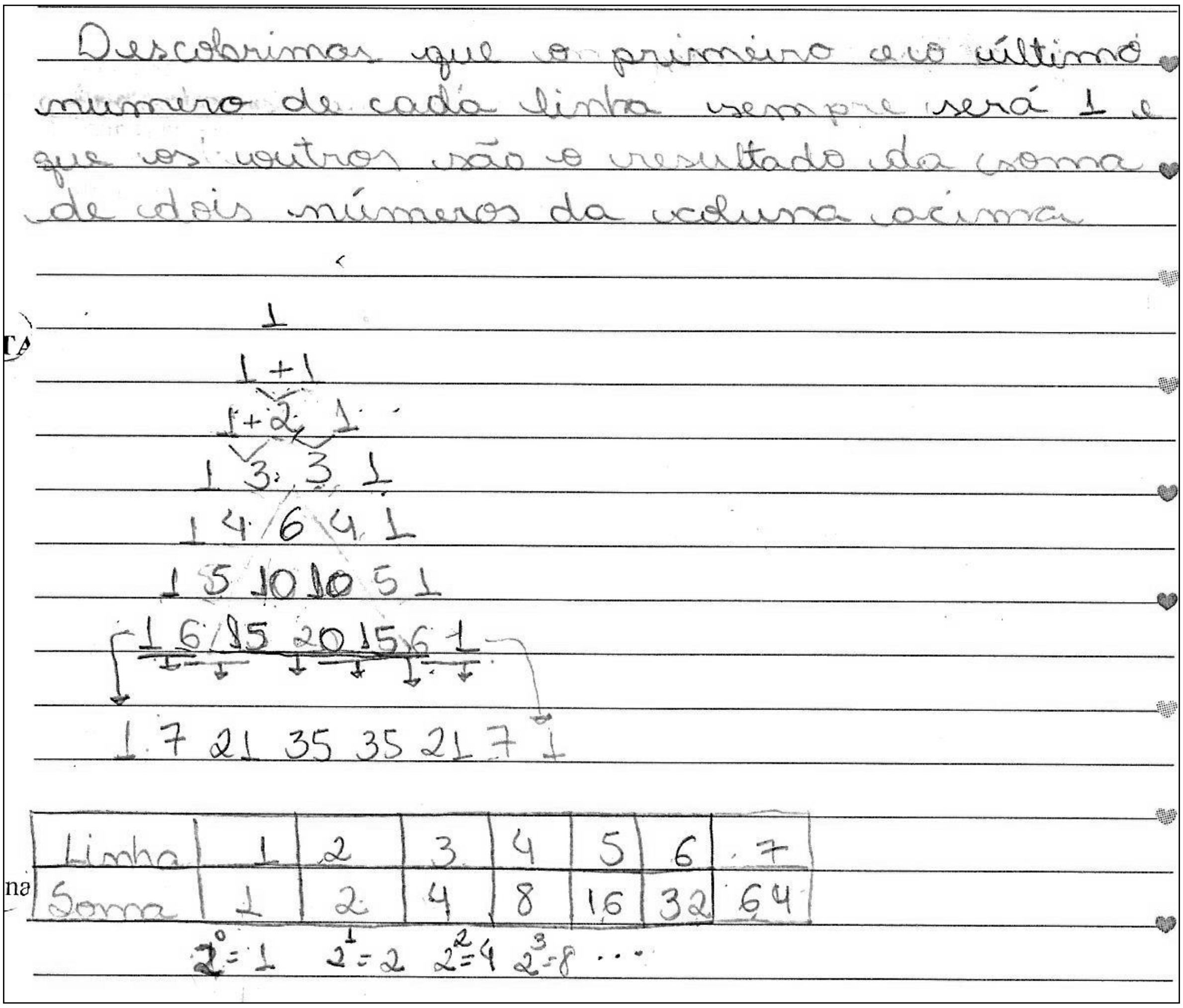
A3: Observamos que em todas as linhas, os números são colocados do mesmo jeito da esquerda para a direita e da direita para esquerda.

A1: Já vimos sobre isso em alguma prova que fizemos. Eles têm um nome diferente, não é?

Prof: Tem sim, são os números capicuas.

Esta situação mostra a necessidade do professor estar atento e preparado para se posicionar frente a situações inesperadas. Dos 10 grupos formados, 6 deles conseguiram identificar que a soma dos números em cada linha era uma potência de base 2 e que o expoente da potência estava relacionado ao número da linha. Para explicação, o grupo A recorreu ao esquema que se apresenta na figura 35.

Figura 35: Recorte da atividade 4, grupo F


Descobrimos que o primeiro e o último número de cada linha sempre será 1 e que os outros são o resultado da soma de dois números da coluna acima

1
1 + 1
1 + 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Linha	1	2	3	4	5	6	7
Soma	1	2	4	8	16	32	64

$2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ ...

Fonte: Relatórios dos alunos

Apesar da descoberta da regularidade, a dificuldade em obter uma fórmula algébrica que correspondesse a soma das linhas ainda persistia. Apenas, dois dos grupos que conseguiram obter esta conjectura chegaram a fórmula. Vejamos a discussão do grupo A:

A1: Quando fazemos dois elevado a linha dá o número da linha da frente.

A3: Então tem alguma coisa "a ver".

Depois de algum tempo de discussão.

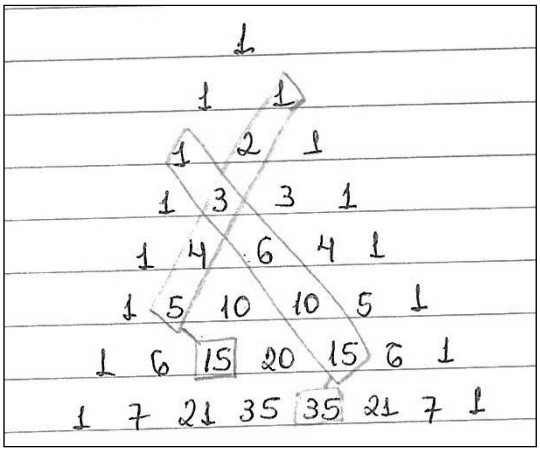
A1: Encontrei, a fórmula é essa. [a aluna refere-se a 2^{n-1}].

A2: Temos que fazer para as outras linhas para ver se dá certo.

Neste caso, os alunos testaram até a décima linha e tomaram a fórmula como correta. Entretanto, assim como na tarefa anterior, apesar de deixar subtendido que a incógnita n refere-se à linha, os alunos em momento algum deixam este fato registrado, mesmo que na tarefa anterior tenha deixado registrado essa necessidade.

O grupo E, foi o que mais conseguiu formar conjecturas e justificá-las. Além das citadas anteriormente, os alunos deste grupo chegou a observar que "a soma de qualquer conjunto dos números na diagonal direita vai dar o número abaixo a esquerda. E se fizermos da diagonal esquerda vai da o número abaixo a direita." conforme relatado por E2. A partir do exposto, a professora aconselhou-os a fazer o desenho para facilitar o entendimento do grupo. Vejamos a figura 36:

Figura 36: Recorte da atividade 4, grupo E.

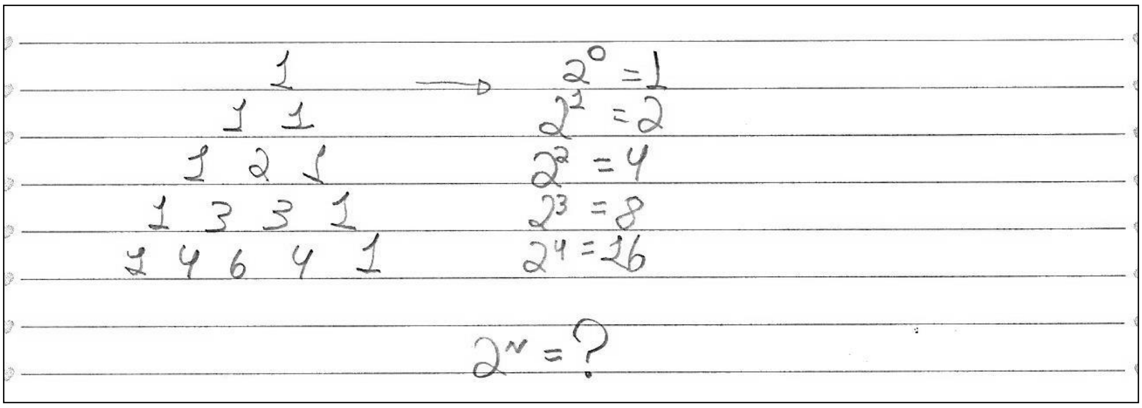


Fonte: Relatórios dos alunos

A conclusão da atividade com a apresentação e discussão dos grupos, foi uma parte muito proveitosa. Os alunos souberam apresentar e defender seu raciocínio, e em relação a apresentação do outro, souberam ouvir e questionar quando necessário refutando ou validando as conjecturas.

No momento da apresentação, o grupo C afirmou que “a soma dos números em cada linha é uma potência de base 2 e o expoente da potência correspondia ao número da linha" e expuseram no quadro conforme esquema da figura 37.

Figura 37: Recorte da atividade 4, grupo C



Fonte: Relatórios dos alunos

Inicialmente, os colegas que não havia conseguido associar a potência de 2 a soma das linhas, pediu que esclarecessem melhor . Antes mesmo de o grupo explicar o que foi solicitado, o colega E3 questionou sobre o $2^0 = 1$ afirmando não existir a linha 0. Neste momento, o grupo ficou percebeu seu erro e passou a esclarecer o solicitado com a ajuda dos colegas do grupo A.

Síntese da atividade 4

Ao propor está atividade, imaginávamos que os alunos iriam estranhar um pouco, visto que, neste triângulo não fica esclarecido qual a sequência a ser trabalhada, como nas atividades anteriores. Além disso, a formação de cada conjectura exigia dos grupos um bom nível de observação, organização e estruturação do argumento, para que assim além de encontrá-lo, pudessem explicar aos colegas de forma entendível. Entretanto, essa preocupação foi dissipada ao perceber os alunos motivados e interessados em obter relações numéricas que pudessem ser validadas posteriormente.

O fato de todos os grupos terem conseguido identificar alguma regularidade e mais da metade terem conseguido perceber que a soma dos números de cada linha formavam uma sequência que era potência de 2, me deixou mais motivada, visto que já era perceptível avanço no processo de investigação, além disso, a utilização de potência havia sido motivo de dificuldades na tarefa anterior e foi comentada na explanação geral dos grupos, nos levando a crer na assimilação deste conteúdo.

A dificuldade mais acentuada dos grupos continua sendo a de encontrar a expressão algébrica. Além disso, foi perceptível a dificuldade em nomear certas propriedades, como é o caso números capicuas e simetria. O grupo D e o grupo A, conseguiram identificar as propriedades de simetria e números capicuas, respectivamente, contudo eles não sabiam qual o nome dado a ela.

Dessa forma, no momento da apresentação, houve a preocupação em esclarecer ou reforçar estes e outros conceitos como múltiplos e potências, além de alguns procedimentos matemáticos.

4.4 Questionário Final

Como já especificado no capítulo de metodologia de pesquisa, um dos instrumentos de coleta de dados foi um questionário aplicado aos alunos no final do trabalho. O questionário em questão foi elaborado e aplicado com a intenção de que os alunos pudessem expressar sua opinião sobre as tarefas desenvolvidas e também sobre a MIM.

Dessa forma, a seguir será apresentada a análise e discussão das respostas das questões como sendo uma avaliação dos alunos sobre a MIM. Na primeira questão buscamos conhecer a opinião dos alunos sobre a atividade desenvolvida e o modo como elas foram conduzidas. Como complementação da ideia, solicitamos se possível, citar uma situação positiva e uma negativa.

Como fator positivo, todos os alunos manifestaram o seu agrado, disseram ter gostado muito das tarefas e da maneira como foram conduzidas. Vejamos alguns trechos, considerados por eles como positivos, que foram mais frequentes nas respostas:

"Experiência diferente e interessante.";

"Nós tinha que prestar atenção para entender";

"Melhorou o nosso nível de raciocínio";

"Era bom discutir com os colegas para fazer as descobertas"

"Foi bom trabalhar em grupo, aprendi a ouvir a opinião dos colegas e mostrar a minha"

"Apesar de sentir dificuldades no começo, com a escrita dos relatórios, melhoramos a maneira de ver e escrever as respostas de matemática."

"A discussão no final das atividades fazia com que percebêssemos nossos erros".

Estas falas vêm confirmar a necessidade de prepararmos aulas dinâmicas que possam motivar e prender a atenção dos alunos, ao tempo que deixa claro a importância da interação no trabalho em grupo para o desenvolvimento de habilidades e aprendizagem matemática.

Segurado (2002) corrobora sobre o entusiasmo e a participação dos alunos na realização de tarefas investigativas, em que os alunos têm mais liberdade de atuação. Segundo ela, o trabalho com estas atividades favorece a capacidade de argumentação e a capacidade de comunicar matematicamente, seja por escrito ou oralmente.

Além disso, a colocação dos alunos sobre o trabalho em grupo vem de encontro a trabalho desenvolvido e relatado em Ponte et al. (1998) no qual sugerem que esta forma de trabalho promove a comunicação de modo a favorecer a formação de conjecturas e realização de testes, estabelecendo maior desempenho e melhor formalização do raciocínio.

Também, no que diz respeito aos relatórios, conforme citado por alguns alunos, Ponte (2003a, p.54) ressalta que "os relatórios obrigam os alunos a refletir sobre o trabalho realizado na sua investigação levando-os a aprofundar e clarificar, muitas vezes, aspectos menos conseguido." Fonseca(2002) enfatiza sobre a importância dos relatórios ao relatar que, ao trabalhar com aulas investigativas numa turma do 10º ano, a produção constante de relatórios fez seus alunos melhorarem a qualidade da escrita matemática. Além disso, passaram também a aprimorar a organização das ideias possibilitando o aprofundamento das investigações.

Como ponto negativo, os poucos alunos que responderam enfatizaram sua dificuldade e frustração em não conseguir chegar à fórmula algébrica que representava a sequência trabalhada. Vejamos dois deles:

“A decepção de muitas vezes não conseguir descobri as fórmulas".

"Às vezes não dava certo as respostas que pensava e eu ficava com raiva."

A dificuldade em criar a regra de formação da sequência foi constante, e permaneceu na maioria dos alunos durante todo processo, com raras exceções. Borralho e Barbosa (2009) sugerem que o trabalho, desde as séries iniciais, com atividades que exploram padrões e regularidades, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que os alunos podem aprender, desde cedo, estabelecer conexões matemáticas, utilizar diferentes representações e generalizar relações. Observando esta perspectiva, a ausência de resolução de atividades envolvendo sequências e regularidades, conforme relatado em questionário de sondagem, pode ser uma possível justificativa para esta deficiência.

Ao continuar o questionário, a segunda questão discute se já conheciam a MIM. Em relação a isto, todos relataram nunca terem a usado antes, além de nunca terem ouvido falar.

Ao serem questionados se consideravam fácil ou difícil estudar o conteúdo dessa forma, apenas um afirmou ter achado difícil e justificou "*por que requer muito o nosso raciocínio e atenção"*. Disto podemos sugerir que o aluno não possui costume e/ou interesse em resolver questões de cunho exploratório. Entretanto, a resposta do restante da turma percorreu as seguintes afirmações:

"Apesar de parecer difícil no começo, após a realização da primeira atividade entendemos como podíamos fazer.".

"O fato de não se usar grandes fórmulas e cálculos, somente o raciocínio, deixou mais fácil"

"Contribuiu para aumentar o raciocínio e ter mais força de vontade de aprender."

"É sempre bom estudar de um jeito novo e diferente."

"Já consigo fazer muitas questões deste tipo."

"Como foi em grupo, cada um descobria algo, dando mais vontade de aprender"

"Mostrou que temos que ter atenção.";

Além da dificuldade inicial prevista, conforme relatada por Ponte et al.(2013) e já comentada neste trabalho, os alunos faz referência ao trabalho conteudista ao comentar sobre o ensino baseado em cálculos e fórmulas, e enfatiza sobre a importância de mudar, fazer matemática de um jeito novo, que acaba sendo mais interessante.

Mendes (1997) corrobora que o trabalho com atividades investigativas conduz os alunos a uma participação e envolvimento ativo, propiciando um ambiente instigante a promoção de novas aprendizagens.

Finalmente foi solicitado aos estudantes que comentassem se as atividades contribuíram de alguma forma na sua aprendizagem, relatando alguma crítica ou sugestão ao trabalho. Nesse sentido, destacamos alguns relatos dos estudantes.

"'Nos levou a perceber que podemos aprendermos por nos mesmo, é só querer"

"Hoje conseguimos responder este tipo de questão com mais facilidade.".

"Estas aulas foram interessantes, poderiam fazer dessa forma nos outros conteúdos também.";

"Acho que se tivesse mais tempo para pensar, era melhor.";

"Se trabalhasse mais com os grupos, para discutir outros assuntos em sala, acho que aprende mais."

"Se pudesse continuar fazendo atividades deste tipo por mais tempo, acho agente ia acabar aprendendo a chegar na fórmula da sequência."

Ao ler atentamente todas as respostas, foi possível perceber o contentamento dos alunos em serem construtores do seu conhecimento, ao tempo que, ao sistematizar ideias e resultados, desenvolvia seu espírito criativo, critico e lógico, obtendo uma visão global da Matemática, dando significado ao estudo, conforme relatado por Castro (2003).

Além disso, acreditamos que o trabalho desenvolvido, apesar de não ter dado as respostas esperadas em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, levou tanto os alunos quanto o professor a perceber sua carência em relação à matemática, bem como a contribuição das tarefas para uma nova visão da álgebra, levando-nos a compreender a necessidade de corrigir esta lacuna.

5.0 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DAS ATIVIDADES

O início do trabalho investigativo foi o momento mais complicado, visto que os alunos nunca tinham trabalho ou ouvido falar sobre a MIM, conforme relato em questionário. Para a concretização desta experiência propusemos aos alunos, tal como já nos referimos, a realização de diversas tarefas de natureza exploratória.

Assim sendo, esta experiência de ensino, tiveram tarefas direcionadas a procura de regularidades em sequências, bem como a identificação da lei de formação, por meio da MIM. Segundo Brocardo et al (2010) explorar situações que envolvem regularidades alavanca a formação de propriedades e relações muito importantes para o desenvolvimento raciocínio e do pensamento algébrico.

Para tanto, nas atividades, foi observado certas condutas dos alunos referentes a representações matemáticas, estratégias de generalização, capacidade investigativa, dificuldades ocorridas durante o processo e impressões sobre o trabalho. Estes tópicos serão comentados separadamente, em seguida.

Vale ressaltar que, para a realização do trabalho, todas as atividades foram entregues por escrito, acompanhada da leitura e comentário da temática de cada uma delas, para que os alunos entendessem o contexto da tarefa e o que se esperava dela. Esse procedimento, segundo Ponte et al (2013), é muito vantajoso, principalmente pelo fato de vir acompanhado de uma introdução oral realizada pelo professor.

Assim, o início desse processo ocorreu de modo turbulento. Os alunos se mostraram inquietos e inseguros, sem saber como começar, conforme diálogo com o grupo B na tarefa 1, apresentado anteriormente. Apesar de já imaginarmos a ocorrência desse fato, em virtude da falta de experiência dos alunos e nossa com este tipo de metodologia, isso não nos deixou menos apreensivos com o desenvolvimento das atividades. Contudo, à medida que fomos desenvolvendo as atividades o medo e as dificuldades de ambas as partes foram se amenizando e ao final, os alunos já se mostravam mais confiantes e participativos.

Sobre isso, Santos et al (2002, p. 102) comenta que o modo como os alunos reagem a atividade investigativa está diretamente relacionada com sua visão sobre o ensino de matemática. Os mesmos afirmam que [...] "Nos alunos, em que predomina uma visão automatizada da Matemática e de uma aprendizagem que decorre das explicações do professor e da prática de regras, verifica-se uma falta de autonomia que acaba por trazer muitas dificuldades no prosseguimento de um trabalho investigativo."

Diante deste fato buscamos estratégias para motivar e envolver os alunos na resolução das tarefas, tentando questioná-los, instigá-los e desafiá-los de modo a estimular o interesse e a criatividade nas suas explanações, conforme mostrado em diálogos relatados no capitulo anterior. Neste contexto, Ponte et al (1998) corrobora sobre a necessidade de o professor acompanhar o trabalho, demonstrar uma atitude investigativa no decorrer das atividades buscando despertar a curiosidade dos alunos.

Assim, superando nossas próprias incertezas e medos, durante a atividade procuramos estar sempre movimentando pela sala e abordando os vários grupos, interagindo com um grupo por vez, sem uma ordem estabelecida. Procuramos não recusar o diálogo, porém tomamos cuidado para que os alunos não se dispersassem da atividade.

Nos grupos em que detectamos mais dificuldades, buscamos envolvê-los e direcioná-los à investigação até conseguirem prosseguir sozinhos. Entretanto, procuramos dar apenas informações suficientes e necessárias ao desenvolvimento de um bom trabalho. Fonseca et al (1999) expõe a importância do professor ponderar sobre o fato de dar muita informação já indicando o caminho da atividade, ou pouca informação, correndo o risco da atividade se tornar solta e desinteressante.

Ponte et al (2013) expõe ainda sobre a importância do professor compreender o processo utilizado pelos alunos na realização dos trabalhos, bem como, a necessidade de apoiá-los quando necessário. Assim, seguindo as orientações de Ponte et al (2013), conforme podemos observar nos diálogos já relatados, durante a realização das tarefas acompanhamos de perto os grupos, nos propondo a observar as discussões, prestar esclarecimentos, questioná-los quando necessário, responder as dúvidas surgidas e dar sugestões para ultrapassar situações de impasse, de modo a não interferir no processo nem deixa-los totalmente soltos.

5.1 Representações matemáticas

Representar é mostrar uma coisa de outra forma. No sentido matemático, são ferramentas utilizadas para organizar ou comunicar ideias dentro de um contexto, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Para Bruner (2009) existem três tipos distintos de representações matemáticas: ativas(manipulação de objetos), icônicas(representações pictóricas, diagramas e símbolos não convencionais) e simbólicas(algarismos, números, sinais e expressões matemáticas, letras e palavras).

Tratando-se da turma em questão, deixamos a vontade por utilizarem representação que achassem conveniente. Dessa forma, por meio da observação, frequentemente percebemos, a utilização da representação ativa, em que os alunos recorriam aos dedos das mãos para auxiliarem a contagem e ao raciocínio.

Além disso, outra forma de representação ativa foi a utilização de tabelas como artifício para contribuir na busca de regularidades, por um ou outro grupo, nas três ultimas tarefas, conforme já exposto. Barbosa et al (2011) afirma que a utilização de tabelas favorece a formação do pensamento recursivo, permitindo chegar com mais facilidade a generalização.

Representação icônica também esteve presente na exploração das atividades. Conforme já relatado, em todas elas, a maioria dos grupos optou por dar continuidade à sequência por meio de desenhos até conseguirem reconhecer a regularidade ou chegar ao termo cogitado. Além disso, também procuram organizar o raciocínio utilizado para obter a regularidade da sequência por meio de flechas, conforme exposto na tarefa 1, do grupo B. Bruner (2009) corrobora sobre a importância de se utilizar a representação icônica no começo da atividade para facilitar a exploração, o que confirma o observado durante a realização do trabalho.

Ao que se refere a representações simbólicas, também são de grande importância na realização das atividades. Em todas as aulas apresentava-se a necessidade em relacionar a posição ao termo para chegar a generalização. Dessa forma, os alunos necessitavam associar a sequência numérica á sequência pictórica para encontrar a generalização da sequência por meio da expressão matemática.

Este tipo de representação é uma especialidade da representação simbólica, que pode ser observada grupo C na atividade 1 e em vários grupos na atividade 2. Entretanto a representação matemática que prevalece nas atividades é reportada a linguagem natural, seja oral ou escrita, utilizada para expressar ideias e dificuldades, observada em vários grupos e exposta na figura 13, referente ao grupo D.

Em todas as atividades, principalmente nas primeiras, os alunos utilizam a linguagem natural, por meio principalmente da expressão oral para expressar suas ideias e suas dificuldades. Contudo, os mesmos demonstram dificuldades em passar o observado para a forma escrita, principalmente na linguagem matemática, como foi relatado na tarefa 3, uma situação ocorrida com o grupo B.

Além dessas representações, nas atividades 2 e 3 podemos perceber a utilização da representação ativa juntamente com a simbólica, quando os alunos substituem a figura pelo número correspondente. Esta representação possibilita melhor entendimento da situação levando os grupos a chegar com mais facilidade a solução questões mais complexas.

5.2 Estratégias de generalização das regularidades

No trabalho com sequências é primordial a descoberta de regularidades. Ponte et al (2009) define o termo regularidade como a relação existente entre os termos ou objetos, ou seja, a característica que de certo modo os liga. Dessa forma, ao observar estratégias para obter generalização da sequência, a mais frequente inicialmente, foi a que eles representavam todos os termos até o termo solicitado, conforme exposto do grupo D atividade 1. Outros observavam a regularidade e tentavam encontrar o termo solicitado por recorrência, comparando dois termos consecutivos e em seguida realiza contagem termo a termo, conforme dialogo exposto na atividade 2, grupo H.

Além disso, alguns grupos utilizaram a estratégia de decompor os elementos da sequência relacionando-o a sua posição, como mostrado na atividade 2, pelos grupos A e I. Este artifício possibilita identificar o processo de construção da sequência, favorecendo a descoberta da fórmula algébrica.

No decorrer das atividades, após discussão dos resultados da primeira tarefa, apesar de considerarem muito difícil compreender termo geral, a maioria deles já tem a noção que deveriam relacionar o elemento a posição, conforme diálogo do grupo F na atividade 2.

Dessa forma, foi possível perceber que o modo como os alunos interpretam as figuras das sequências e põem em prática determinadas estratégias utilizadas é que vai possibilitar o entendimento do termo geral e alavancar a escrita de expressões algébricas. Neste sentido, Ponte et al (2009) comenta que a dificuldade dos alunos em criar estratégias de generalização reflete diretamente no problema de determinar termos de ordem distante e de encontrar generalizações que estabelecem relação entre o termo da sequência e sua ordem.

Também, outra estratégia que a maioria dos grupos recorreu, foi a construção de uma tabela. A mesma era utilizada com intuito de facilitar o entendimento da regularidade, bem como, a relação existente entre o elemento e sua posição, conforme foi possível observar no fragmento do relatório do grupo A, atividade 4.

De modo geral, há de mencionar que cada grupo, mesmo tendo dificuldade em realizar generalizações algébricas, demonstrou habilidade em encontrar estratégia para generalização de termos mais distantes.

5.3 Capacidades investigativas

No início dos trabalhos com a Investigação Matemática os alunos se mostraram pouco produtivos e com muita dificuldade em entender e trabalhar com a investigação. A proposta pareceu deixá-los inseguros, por ser uma construção aberta, sem um objetivo explicito. Na tarefa inicial, os alunos evidenciaram muita dificuldade em se desprender da abordagem mecanicista das atividades matemáticas com perguntas e respostas diretas, que consistia apenas em chegar a uma conclusão, e tentar se entregar a esta nova metodologia.

> É muito forte nos alunos a ideia que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjecturas e desenvolvem vários ciclos de confirmação ou refutação destas, é um processo demorado e que tem de ser objecto de um trabalho explícito por parte do professor. (BROCARDO, 2002, p. 540)

Almejando clarificar o entendimento dos alunos sobre as características da investigação com foco na formação de conjecturas, a professora leu a tarefa levando a discussão da situação proposta no intuito de esclarecer sobre os questionamentos da mesma. Nesta fase os alunos começaram a explorar a tarefa e produzir afirmações que, já eram tomadas como verdadeiras, apenas ao observar alguns casos. Observando este fato, buscamos esclarecer sobre a importância de formular questões/conjecturas e procurar prová-las. Entretanto, mesmo após, demasiado conhecimento e experiência dos alunos no processo investigativo, tal característica permaneceu constante na maioria deles, durante a realização de todas as atividades investigativas.

Pelas observações ficou perceptível que para os alunos é mais fácil construir afirmações do que propor questões/conjecturas a ser provadas. Ponte et al.(1998) ponderam sobre a dificuldade dos alunos em formular conjecturas e relatam sobre a tendência dos mesmos em considerarem uma conclusão como uma conjectura, se preocupando em criar o maior número possível de conclusões sem se preocupar com sua trivialidade.

Em suma, ainda que a maioria dos alunos não conseguiram assimilar coerentemente todas as etapas de uma aula investigativa conforme proposto por Ponte et al (2013) percebe-se que ao final do trabalho, mesmo apresentando dificuldade em formular conjecturas, já demonstravam curiosidade e desenvoltura para obter caminhos que permitia chegar a características e regularidades das sequências.

Dessa forma, acreditamos que o fato de já demonstrarem, ainda que em pouca quantidade, habilidades investigativas já é motivo de êxito, pois seria incoerente supor que alunos que não conhecia uma aula investigativa tornassem investigadores ao realizarem apenas 4 atividades.

5.4 Dificuldades

O desenvolvimento da experiência em questão evidenciou diversas dificuldades, em que algumas puderam ser sanadas através dos tempos. De início, a dificuldade relacionava ao fato da turma ainda não possuir experiência com a atividade investigativa, mostrando-se necessário uma explanação geral sobre a MIM e seu desenvolvimento, conforme já citado. Este fato dificultou o desenvolvimento das primeiras atividades, visto que muitos alunos não conseguiam se envolver ao trabalho proposto.

Durante a realização das primeiras tarefa a maior parte dos alunos da turma se mostraram interessados, porém evidenciavam dificuldades em entender o processo investigativo e demonstravam pouca confiança no seu raciocínio. Ponte et al (2013) relata ser esta uma reação natural, visto que os alunos ainda não estão acostumados a realizara atividades investigativas. È o caso do grupo B, na atividade 1 que precisou de esclarecimentos para compreender como começar a atividade.

Esta dificuldade esteve presente em outros grupos na atividade 1, porém na atividade 2 já se percebia mais desprendimento e desenvoltura em observar as primeiras impressões da atividade.

Além disso, alguns grupos davam por satisfeitos ao encontrar algumas regularidades, sem se preocupar em provar sua eficiência para toda sequencia. Sobre isso Porfírio e Oliveira (1999, p.115) afirmam "Os alunos, sobretudo os que têm pouca experiência de trabalho neste tipo de tarefas, tendem a dar-lhes o estatuto de conclusões. Ou seja, uma relação que se verifica ser válida para vários casos, é assumida como sendo válida para todos. Coloca-se então nesta fase a questão da demonstração ou prova.".

Neste contexto, com a evolução da atividade, à medida que os alunos iam familiarizando com as atividades investigativas as dificuldades foram diminuindo, sendo possível perceber o desenvolvimento de atitudes investigativas nos grupos. A dificuldade voltou a ocorrer com a necessidade de encontrar termos mais distantes da sequência. A maioria dos alunos recorreu à estratégia aditiva, enumerando termo a termo até chegar ao termo solicitado, demonstrando pouca capacidade de generalização.

Além disso, na atividade 2 que apresentava uma sequência numérica, alguns grupos se limitavam a identificar a regularidade numérica, mostrando apenas o que é acrescentado de um termo para outro, não se preocupando observar como o acrescimento ocorre e como encontrar um termo qualquer.

O fato de não conseguir generalizar a sequência investigada foi uma característica constante e que deixou os alunos apreensivos. Eles relataram não ter o hábito de resolver este tipo de questões e que apesar de se sentir desafiados, ficavam preocupados por não conseguir chegar a fórmula algébrica.

Nas últimas atividades foi possível observar que os alunos já possuíam facilidade em identificar a regularidade e reconhecer a diferença entre o termo e o seguinte, situação está que representava dificuldade no teste de sondagem e nas primeiras atividades. Entretanto, mesmo conseguindo fazer estas associações, foram poucos os grupos que conseguiram chegar a fórmula algébrica, demonstrando dificuldade em traduzir a maneira de pensar como continuar a sequência em capacidade de determinar o elemento que ocupa posição qualquer. Ponte et al (2009) expõe que mesmo sendo este, um aspecto essencial para a generalização de uma sequencia, nem sempre esta percepção conduz a generalização.

. Dificuldades conceituais também foram evidenciadas durante as aulas. Percebeu-se que a maioria dos alunos apresentou dificuldade quanto à compreensão e formalização do conceito de sequência numérica, de fazer e trabalhar com generalizações. Além disso, desde as primeiras tarefas os alunos demonstraram dificuldade na compreensão de conceitos e propriedades matemáticas simples, contudo relevantes. É o caso de números pares e ímpares, números primos, múltiplos, divisores, potencia, dentre outros.

Na primeira atividade, por exemplo, o grupo E não conseguiu assimilar as figuras a posições pares e ímpares, observando cada termo recorrendo ao anterior. Além disso, os mesmos se confundem ao utilizando ora números cardinais e ora números ordinais para representar as posições. Também, nas atividades seguintes outros problemas envolvendo conceitos foram ocorrendo.

Segurado e Ponte (1998) reportam que conhecimentos mais básicos podem ser desenvolvidos no decorrer da atividade investigativa e que o domínio imperfeito de certos conceitos não constitui fator impeditivo para a realização das atividades.

Com o avançar dos trabalhos eles demonstraram mais interação com o trabalho, buscando logo no começo das atividades, criar estratégias, apresentar conjecturas e procurar perceber generalizações para então apresentar o seu raciocínio para os colegas e professora.

Apesar do trabalho em grupo ser de suma importância para o desenvolvimento de uma investigação, o grande número de grupos dificultou as intervenções e interações, não tendo tempo de estar com os grupo em todo momento que fui solicitada. Além disso, nos momentos de discussão dos resultados tive que selecionar alguns em razão do tempo necessário para as apresentações.

Outra dificuldade observada foi a escrita dos relatórios pelos grupos. Os registros eram feitos de modo problemático, sem muita informação, escritos com grandes dificuldades, visto que os mesmos não estavam habituados a escrever matematicamente.

Esta dificuldade fez com que nas primeiras tarefas, os alunos se mostrassem desmotivados em expor suas estratégias e descobertas no relatório. Os mesmos demonstravam dificuldade em argumentar, afirmando não conseguir relatar suas ideias de forma escrita, deixando para escrever algo no final da atividade.

Neste sentido Brocardo (2002) afirma que numa fase inicial do processo investigativo é comum os alunos apresentarem respostas curtas e sem muita informação, contudo à medida que vão adquirindo experiência, a tendência é melhorar a qualidade da escrita dos relatórios que produzem sobre suas investigações.

Com o avançar do trabalho, mesmo não conseguindo produzir relatórios, considerados por eles, como bons, já demonstravam mais confiança e desprendimento na elaboração dos mesmos, procurando descrever todo o ocorrido desde o começo da atividade conforme orientado no início dos trabalhos.

A elaboração do relatório propicia um retrospecto que conduz a aprendizagem de elementos que passaram despercebidos. Ponte (2003a, p. 54) expõe que "Os relatórios obrigam os alunos a refletir sobre o trabalho realizado na sua investigação levando-os a aprofundar clarificar, muitas vezes, aspectos menos conseguidos.".

Durante a realização da atividade, ocorreram muitas conjecturas que foram refutadas, mas poucas descrições foram encontradas nos relatórios, isto por que a maioria dos alunos não quisera expor suas inquietações e conjecturas não provadas, mesmo tendo exposto da importância da mesma.

Também, a discussão dos resultados da investigação, que é indispensável ao processo investigativo, foi uma parte da tarefa que preocupou os alunos, visto que, em virtude da insegurança, os mesmos relatavam possuir vergonha em expor suas descobertas e elas estarem erradas. Dessa forma, os grupos que conseguiram chegar a poucos resultados geralmente se negam a falar, sugerindo que os comentários e explanações sejam feitas aos que conseguiram maiores descobertas, contudo nos momentos de apresentação todos participaram e tiraram suas dúvidas, apesar da maioria dos alunos já demonstrarem certo cansaço propondo pouca discussão para findar logo a atividade.

Atenta ao fato, procuramos estimular à discussão, expondo desde o início da primeira atividade, a importância de apontar suas descobertas para que os mesmo pudessem confrontar suas estratégias e conjecturas, desenvolvendo assim "a capacidade de comunicar matematicamente e refletir sobre seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar, que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação." (PONTE et al, 2013, p. 41), pois conforme questionamentos e dificuldades manifestada pelos alunos durante as tarefas era possível realizar discussões para esclarecer conceitos e promover o sucesso dos alunos.

5.5 Impressões

O trabalho com as atividade investigativas propiciou momentos de interação e discussão que favoreceu o desenvolvimento de novas atitudes e concepções possibilitando uma visão global da matemática, evidenciando a construção gradativa de novos conhecimentos e capacidades matemáticas. Segundo Ponte et al (1998, p. 17) "Um dos grandes objectivos das actividades de investigação é a condução dos alunos a graus progressivos de generalização e de abstracção. Consequentemente, a justificação das conjecturas apresentadas é uma componente importante do seu trabalho".

Dessa forma, à medida que as atividades foram sendo aplicadas, os alunos foram se mostrando mais seguros em suas descobertas, aumentando assim o interesse pela busca de regularidades.

Também, o trabalho em grupo pareceu-nos uma forma muito adequada á atividade e com potencialidade para interações entre os alunos. Foi perceptível durante as tarefas que este modo de trabalho possibilita o diálogo, permitindo-lhes partilhar ideias, ouvir questionamentos e ajudar-se mutuamente, de modo a apropriar-se do que ouviu com intuito de elaborar estratégias e descobrir respostas para os questionamentos das atividades.

Neste sentido, Ponte et al. (2013, p. 30) corrobora sobre a viabilidade do trabalho em grupo ao expor que "a situação do trabalho em grupo potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa,...". Com o trabalho em grupo, as interações foram gradativamente mais ricas e significativas, ultrapassando a ideia de tarefas limitadas de algoritmos já conhecidos.

Apesar do bom nível de discussão e entrosamento entre os alunos, na maioria dos grupos, os questionamentos dirigidos à professora e a apresentação dos resultados eram realizados por um aluno específico, aparentemente os que consideravam mais desinibido e “inteligente”. Sobre isso, Ponte et al (2013, p. 30) afirma que no trabalho em grupo "muitas vezes, um ou dois alunos tomam a liderança e levam o grupo a centrar-se em certas ideais, facilitando, assim, o trabalho conjunto."

Entretanto, durante a resolução das atividades, mesmo os alunos com maior nível de dificuldade, se envolveram com empenho nas atividades, passando a confiar na sua capacidade de produzir matemática, fortalecendo a discussão, elaboração e teste de conjecturas. Na última atividade, ficou perceptível, que estes alunos não se preocupavam mais em ficar no grupo dos alunos que eles consideravam mais inteligentes. Eles já acreditavam que tinham condições de desenvolver um bom trabalho com qualquer colega. Esse fato favoreceu o desenvolvimento individual e propiciou que cada um passasse a ter um papel mais ativo frente à matemática.

Vale frisar que alguns alunos que nós considerávamos fracos em matemática nos surpreenderam positivamente na resolução das atividades. A dificuldade observada que ainda prevaleceu nesses alunos até o final do trabalho foi à descoberta da fórmula algébrica da sequência. Isso ficou evidente em seus comentários e relatórios. Neste sentido, os PCN (2001) apontam que uma das finalidades do ensino da matemática é desenvolver no aluno a autoestima e a perseverança na busca de soluções, fazendo sentir seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos.

Também, ao perceber nos alunos, no decorrer das tarefas, o desenvolvimento de capacidades como expressar-se matematicamente, observar regularidades e justificá-las coerentemente, acreditamos que a exploração de atividades de cunho investigativo, a longo prazo, venha facilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico e, consequentemente melhorar a aprendizagem matemática.

No final do trabalho, alguns grupos já demonstravam mais condições e confiança em descrever, representar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio que favorece a prova e argumentação de conjecturas, conforme proposto pelos PCN (2001). Além disso, no decorrer do trabalho os alunos desenvolveram habilidades de se expressar de forma mais clara e saber ouvir e compreender o outro, oportunizando o desenvolvimento da aprendizagem de matemática.

Também, o momento de discussão dos resultados das tarefas, além de permitir a explanação e sistematização das principais ideias dos grupos, possibilitou a revisão e comentário de conceitos matemáticos importantes. Conforme Oliveira et al (1999, p. 194) “Usualmente, é nesta fase que serão postas em confronto as estratégias, as hipóteses e as justificações que os diferentes alunos ou grupos de alunos construíram e que o professor assume as funções de moderador.".

Assim, foi importante percebermos que a cada tarefa, a maioria dos alunos, já apresentavam maior facilidade em lembrar e utilizar em suas estratégias, conceitos explanados na discussão da tarefa anterior. Além disso, ao conseguirem formalizar e provar, a cada discussão, um maior número de conjecturas, os alunos demonstravam mais entusiasmo e motivação para a realização da tarefa seguinte. Nesse tocante, a cada nova tarefa, era possível perceber exploração de um maior número de questionamentos e conjecturas. Isso permitiu exploração mais aprofundada das atividades favorecendo a capacidade de abstração e generalização.

6.0 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho é o culminar de uma pesquisa desenvolvida ao longo de um ano de estudo dividido em conhecimento teórico, preparação de atividades, aplicação das atividades e estudo dos resultados. A pesquisa em questão buscou analisar quais as possibilidades e contribuições na MIM no ensino de matemática, em especial no estudo de sequências e regularidades, tendo como base para o presente estudo uma turma de 1º ano do ensino médio.

Para tanto, visando fundamentar esse trabalho, buscamos aprofundar nosso conhecimento sobre a MIM, por meio da leitura de diversos artigos, teses e dissertações que abordavam esta temática, e a partir daí construirmos o referencial teórico desta pesquisa. Por meio desses estudos tivemos a oportunidade de conhecer a opinião de alguns estudiosos sobre o que é uma aula investigativa, que momentos são indispensáveis a esse tipo de aula, qual o papel do professor e do aluno neste processo, como ocorre a avaliação numa aula investigativa, dentre outros aspectos relacionados ao tema. Dessa forma, alcançamos maior conhecimento e segurança para preparar, aplicar e avaliar as atividades investigativas na sala de aula. O trabalho em sala de aula foi conduzido privilegiando uma abordagem de investigação proposta por Ponte et al (2013).

A realização das atividades em sala de aula, á luz dessa nova metodologia, foi uma experiência muito importante e enriquecedora. Por meio dela, pudemos absorver as potencialidades dessa metodologia para o estudo de sequências e regularidades, bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico e aprendizagem de outros conceitos matemáticos.

Também, o mesmo possibilitou a abertura de novos horizontes, nos mostrando uma maneira diferenciada de desenvolver os conteúdos matemáticos em sala de aula, em que o aluno é participante ativo na construção de sua aprendizagem.

Além disso, o trabalho realizado, ao longo de 5 atividades exploratórias, proporcionou aos alunos um espaço para descobertas e discussões, em que cada um foi convidado a se adentrar no processo de modo a favorecer o desenvolvimento da capacidade de organização, representação, generalização e raciocínio, criando estratégias e manifestando entendimentos. Além disso, a possibilidade e necessidade de recorrer a conceitos e propriedades já estudadas favoreceu a concatenação de alguns conteúdos matemáticos já estudados anteriormente.

Vimos ainda que, a exploração de situações matemáticas abertas por meio da MIM favoreceu um processo de aprendizagem por meio de descobertas matemáticas, na qual foi imprescindível a discussão dos resultados, gerando um ambiente de interação entre os elementos dos grupos, entre os grupos e conosco.

Assim, o trabalho com a MIM constituiu uma situação completamente nova para os alunos e para nós, deixando-nos, inicialmente, desestabilizados com a situação. Apesar destas dificuldades iniciais, foi possível perceber a evolução na disposição dos alunos em participar da aula e desenvolver as tarefas. No decorrer das atividades, os alunos demonstraram compreender o seu papel numa investigação, evidenciando maior autonomia e segurança no desenvolvimento do trabalho e nas discussões dos resultados.

As observações e análise dos registros feitos durante a realização das atividades evidenciaram que, ao trabalhar com aulas investigativas, os alunos sentem-se mais motivados e participativos, adquirindo criatividade e independência. Alguns alunos que se mostraram tímidos e desanimados no começo das tarefas, mesmo não possuindo ainda coragem de se dirigir a toda turma e/ou a professora, já se apresentavam mais ativos, responsáveis e questionadores com os componentes do grupo.

Com o trabalho em grupo, cada aluno teve oportunidade de expor suas ideias, discutir sobre sua veracidade e posteriormente construir uma solução comum ao grupo. Neste sentido, concordo com Segurado e Ponte (1998) ao afirmar que essa possibilidade de interação favorece o processo de ensino-aprendizagem de Matemática ao passo que, o trabalho em grupo contribuiu para a formalização do raciocínio lógico, estimulando o amadurecimento da capacidade de cada aluno argumentar junto aos professores e colegas.

Assim, o trabalho proposto possibilitou aos alunos o desenvolvimento de competências e habilidades que segundo os PCN são de suma importância para a formação do aluno. Foi perceptível o aperfeiçoamento de certas capacidades como: argumentações sobre as suas explorações, justificação sobre suas conjecturas; ouvir a opinião dos outros e validação dos resultados. Além disso, foi perceptível o desenvolvimento de capacidades transversais como iniciativa, responsabilidade, autonomia e espírito critico.

Portanto, o desenvolvimento desse trabalho nos revelou uma ótima oportunidade de ampliar conhecimentos. Foi compensatório observar o amadurecimento de estratégias e habilidades que fizeram geram aprendizagens significativas. Entretanto, gerenciar uma atividade investigativa não é uma tarefa fácil. A necessidade de administrar uma turma, ao tempo que observa, instiga, comenta, argumenta e ainda, se preocupa em gerir o volume de informações é um trabalho tenso que requer paciência, dedicação e comprometimento.

Contudo, a utilização da MIM em sala de aula, apesar de trabalhoso, é possível e importante, basta que o professor tenha coragem e dedicação para planejar bem as atividades e incentivar a turma a realizar o trabalho. Visto que, o professor deve propiciar um ambiente favorável a aprendizagem, pois, "não existem habilidades matemáticas inatas cabe ao professor, através de suas práticas, contribuir para o seu desenvolvimento" (BORRALHO e BARBOSA, p.10)

Apesar das dificuldades, esta experiência de ensino nos possibilitou compreender as potencialidades da MIM para o estudo de conteúdos matemáticos, bem como as formas de representações, estratégias de resolução, dificuldades e capacidades matemáticas utilizadas pelos alunos na sala de aula. Estas informações, além de subsidiar a resposta à pergunta diretriz, nos permitiu trabalhar sobre os erros dos alunos e planejar ações que pudessem melhorar nossa prática e, consequentemente, a aprendizagem matemática dos alunos.

De tudo isso, hoje, percebemos a Investigação Matemática como uma alternativa metodológica que deve ser constante em sala de aula, visto que, a mesma oportuniza o desenvolvimento de diversas habilidades matemáticas, conforme já citadas, que favorecem a aprendizagem de muitos conteúdos matemáticos. A postura interrogativa adotada pelo professor neste tipo de aula favorece a compreensão do aluno, do papel do professor e do seu papel ativo frente à aprendizagem (PONTE et al, 2013).

Entretanto, é importante salientar que esta metodologia não é a solução a todos os problemas referentes a aprendizagem matemática. O trabalho com atividades investigativas exige comprometimento do professor e um grau de empenho e criatividade por parte do aluno, dessa forma, apesar de toda potencialidade da MIM, fica a cargo do professor analisar metodologia conveniente à explanação de cada conteúdo, conforme característica e necessidade de sua turma.

Parece-nos razoável continuar o estudo desta natureza por um espaço maior de tempo, para analisar com maior eficiência, o impacto desta metodologia, em longo prazo, no ensino da matemática. Nesse sentido, pretendemos continuar realizando estudo dessa natureza a fim de obtermos mais dados sobre a temática.

Além disso, sendo está, uma metodologia que ainda é pouco conhecida no Brasil, sugerimos maior divulgação desta metodologia entre os professores, para que os mesmos possam buscar formação como professor investigador para melhoria no trabalho em sua sala de aula. Nesse tocante, vemos a Investigação Matemática como uma ferramenta de grande importância para uma nova fase na Educação Matemática Brasileira.

REFERÊNCIAS

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2010. 160 p.

BARBOSA, Ana. et al. **Padrões em Matemática: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino da Matemática**. Lisboa: Texto Editores, 2011.

BORRALHO, António; BARBOSA, Elsa. Pensamento Algébrico e exploração de Padrões. **Documento consultado em http://www. apm. pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2. pdf, a**, v. 22, 2009.

BORBA, Marcelo de Carvalho. ARAÙJO, Jussara de Loiola. **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Autêntica Editora, 2004.

BRASIL. MINISTÈRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros curriculares nacionais: **Matemática**. Brasília (DF), 1998.

BRASIL/CNE/CEB. Parecer nº 5 de 01/06/98. **DCN para o Ensino Médio**. Relatora: Guiomar Namo de Mello.

BRAUMANN, Carlos A. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), **Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores** (pp. 5-24). Lisboa: SPCE, 2002.

BROCARDO, Joana. **As investigações na sala de aula de Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano** (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM, 2002.

BROCARDO, Joana. Et al. **1º Ano-Números e Operações**. 2010.

BRUNER, jerome S. **Para uma teoria da educação**. Relógio d'água, 2009.

CAVALCANTI, Claúdia T. Diferentes formas de resolver problemas**.** In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Artmed, 2007.

CASTRO, Juliana Facanali . Quadrados e Perímetros: uma experiência sobre aprender a investigar e investigar para aprender. In: Dario Fiorentini; Alfonso Jiménez. (Org.). **Histórias de Aulas de Matemática: Compartilhando Saberes Profissionais.**. 1ed.Campinas: Gráfica FE / CEMPEM / UNICAMP, 2003, v. 1, p. 69-79.

CORRADI, Daiana Katiúscia Santos. Investigações matemáticas. **Revista Educação Matemática**, v. 1, 2011. P. 162-175.

DAMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. **SBEM**. Ano II. Brasilia, 1989. P.15-19.

ECHEVERRÍA, Maria P.P.; POZO, Juan.I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J.I. (org) **A solução de Problemas.** Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 13-42.

ERNEST, Paul. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In.: ABRANTES, P.;LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa, Portugal: Projecto MPT e APM, 1996, p. 25-48.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos.** 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FONSECA, Helena. Aprender a ensinar Investigando. **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**, p. 177-188, 2002.

FONSECA, Helena. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. **Actas do ProfMat** 99. Lisboa: APM, 1999.

FROTA, Maria Clara R. Experiência matemática e investigação matemática. In: **V Congresso**. 2005.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia**. Interface–Comunicação, Saúde e Educação.** São Paulo, v. 1, n. 1, 1997.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática p.(51-74). **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 19, n. 36, 2012.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986

LUÍS, Antonio; et al. Padrões no 1º ciclo Para quê? **Revista Educação Matemática**, 44-47, 1996.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de Pesquisa**. 4ª. São Paulo: Atlas, 1999.

MINAYO. Maria Cecília de Souza et al. **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis (RJ): Vozes, 2003.

MORAIS, Ana Margarida Leandro. **A exploração de sequências e regularidades como suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2012.

MOREIRA, Marco Antônio. **Metodologias de pesquisa em ensino**. Porto Alegre: Editora Livraria da Física, 2011.

PEREIRA, Magda Cristina Nunes . **As investigações matemáticas no ensino-aprendizagem das sucessões: Uma experiência com alunos do 11º ano de escolaridade.** 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2004.

PIMENTEL, Teresa. et al. Matemática nos primeiros anos–Tarefas e desafios para a sala de aula**. Texto Editores**, 2010.

PONTE, João Pedro da et al. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE; João Pedro da. et al. **A relação professor aluno na realização de investigações matemáticas.** Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.

PONTE, João Pedro da. et al. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** Quadrante, 7(2), 41-70, 1999.

PONTE, João Pedro da. **Investigar a nossa própria pratica. In: GTI(Ed.), refletir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, p.11-34, 2002.

PONTE, João Pedro da. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. 2003.

PONTE, João Pedro da. **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do profmat. Lisboa: APM, p. 25-39, 2003.

PONTE, João Pedro da. et al. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC-ME, 2009.

PONTE, João Pedro da; VELEZ, Isabel. **Representações em tarefas algébricas no 1º ciclo.** Educação e Matemática, 2011.

PONTE, João Pedro da. et al . **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PORFÍRIO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. **Investigações matemáticas na aula e no currículo,** p. 111-118, 1999.

SERRAZINA, Lurdes et al. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. JP Ponte, C. Costa, AI Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & AF Dionísio (Eds.), **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**, p. 41-58, 2002.

SANTOS, Leonor et al. Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N.

Figueiredo, & A. Dionísio (Orgs). **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**, p. 83-106, 2002.

SANTOS, Vânia Maria Pereira. (Coord.). **Avaliação de Aprendizagem e Raciocínio em Matemática: métodos alternativos.** Rio de Janeiro: UFRJ /Projeto Fundão, 1997.

SEGURADO, Irene. O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas. **Reflectir e investigar sobre a prática profissional.** APM, p. 57-73, 2002.

SEGURADO, Irene; PONTE, João Pedro da. **Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo**. Associação dos Professores de Matemática, 1998.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 14, p. 66 – 91, 2000.

THIOLLENT, Michael. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo. Cortez, 2000.

VALE, Isabel. Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática, o estudo de caso. **Revista da Escola Superior de Educação**, v. 5, p. 171-202, 2004.

VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer, a partir da história e da geometria**. 2ª Ed. Piracicaba – São Paulo. Editora UNIMEP. 1999. 103p.

WICHNOSKI, Paulo; KLÜBER, Tiago Emanuel. Uma revisão crítica da tendência Investigação Matemática no Brasil. In: **XIV Conferência Interamericana de Educación Matemática**. 2015.

APÊNDICE

Apêndice A – Questionário de Sondagem

COLÉGIO ESTADUAL PROFESSORA LIA PÚBLIO DE CASTRO
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática UESB
Autora: Rose Mary dos Santos Farias Ramos
Aluno: ____

QUESTIONÁRIO DE SONDAGEM

1) Gênero/Idade:
Masculino( ) Feminino ( )
Idade: _____

2) Tipo de instituição que estudos o ensino fundamental:
( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Municipal/estadual

3) Gosta da disciplina Matemática? Por quê?
( ) Sim ( ) Não
Justificativa:
____
____

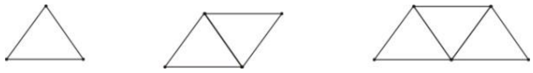
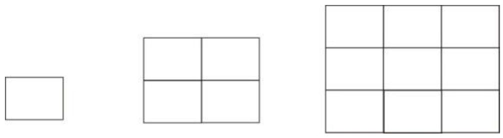
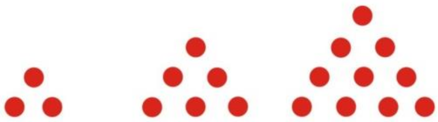
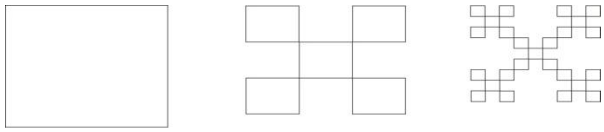
4) Você se considera um aluno excelente, bom, médio ou fraco em Matemática? Porque?
( ) Excelente ( ) bom ( ) médio ( ) fraco
Justificativa:
____
____

5- Situações em que temos que identificar padrões e regularidades estão presentes desde as séries iniciais. A prática em observar esses padrões e resolver tais exercícios é o que irá habilitá-los a desenvolver diferentes estratégias para o trabalho com este tipo de situações.
Observe cada sequência, identifique a regularidade e, em seguida escreva seus três próximos termos.

a) SEQUENCIAS NUMÉRICAS

- 1, 4, 7, 10, ...
- 2, 4, 8, 16, ...
- 1, 3, 9, 27, ...
- 0, 2, 6, 12, ...

b) SEQUENCIAS PICTÓRICAS

- 
- 
- 
- 

6- Você consegue identificar a expressão matemática que relaciona a sequência dada conforme a posição ocupada?
(   ) Sim
(   ) Não

7- Já havia resolvido este tipo de questões no ensino básico?
(   ) Sim
(   ) Não

7.1) Se sim, com que frequência?
(   ) Raramente
(   ) ás vezes
(   ) Sempre

7.2) Como você considera seu desempenho na resolução deste tipo de questão?
(   ) Bom
(   ) Regular
(   ) Péssimo
Justificativa:

____

____

8) Quando você está fazendo uma tarefa matemática, qual é a sua maior preocupação em relação a esta tarefa?
(   ) Acertar a resposta
(   ) Desenvolver o processo de resolução corretamente.
(   ) Terminar Rápido.
(   ) Outro.
____

Apêndice B – Tarefa Introdutória

COLÉGIO ESTADUAL PROFESSORA LIA PÚBLIO DE CASTRO
1º ANO DO ENSINO MÉDIO - IBITIRA/BA
ALUNOS: ____
PROFESSORA: ROSE MARY

AULA INVESTIGATIVA – TAREFA INTRODUTÓRIA

BREVE COMENTÁRIO:
As aulas investigativas são aulas diferentes das que estamos acostumados, com resolução de exercícios e problemas que tem soluções únicas. Estas aulas possibilita a aprendizagem através da observação, questionamento e raciocínio. Nelas o aluno deverá explorar todos os caminhos possíveis da situação, fazer seus próprios questionamentos e buscar respondê-los de forma concisa, organizada e fundamentada, buscando sempre crescer com os erros e frustrações.

OBJETIVO GERAL:
O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões, conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos resultados e na discussão e argumentação com os colegas e professor (PONTE, 2013)

OBJETIVO ESPECÍFICO:
- Compreender o conceito de sequência;
- Identificar regularidades, padrões e compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica;
- Desenvolver a capacidade de trabalhar com vários tipos de representações;
- Identificar relações entre os elementos da sequência e exprimir esta relação em linguagem corrente.
- Traduzir, por escrito e oralmente, os raciocínios desenvolvidos;

ETAPAS DO TRABALHO
- Observar a tarefa;
- Formular questões;
- Levantar hipóteses;
- Testar a hipótese para vários valores;
- Tentar justifica (provar que a hipótese esta correta);
- Registrar tudo que foi produzido;
- Apresentar a classe argumentando em defesa da hipótese.

EXEMPLO - Explorações com números (Baseado em Ponte, Brocardo, Oliveira, 2013, p.27)

Procure descobrir relações entre os números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...	...	...	...

Registre as conclusões que forem obtendo.

Questionamentos:
- Continue a representação da tabela até obteres o número 40.
- Supõe que esta tabela é continuada infinitamente. Identifica as regularidades que conseguires encontrar.
- Podes prever em que coluna se encontra o número 64? E em que linha?
- Podes prever em que coluna se encontra o número 99? E em que linha?
- Considerando um número qualquer, podes prever em que coluna e em que linha se encontra nesta tabela?
- Podes observar outras regularidades?

Apêndice C – Tarefa 1

COLÉGIO ESTADUAL PROFESSORA LIA PÚBLIO DE CASTRO
1º ANO DO ENSINO MÉDIO - IBITIRA/BA
ALUNOS: ____
PROFESSORA: ROSE MARY

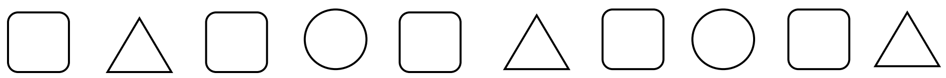
AULA INVESTIGATIVA

OBJETIVOS:
- Identificar o grupo que se repete;
- Continuar sequência repetitivas;
- Relacionar cada elemento com a posição que ocupa;
- Identificar relações entre diferentes elementos da sequência e exprimir estas relações em linguagem corrente;

TAREFA 1 - SEQUÊNCIA REPETITIVA COM FIGURAS

Observe a sequência de figuras

1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 6ª 7ª 8ª 9ª 10ª 11ª 12ª



Supondo que a lei de formação dessa sequência continue a mesma, tente observar regularidades que ocorre na posição ocupada por cada figura registrando suas dificuldades, inquietações e descobertas.

QUESTIONAMENTOS: Que figura ocupa a 15ª posição? e a 21ª? e na 149º?
Você acha possível saber que figura ocupa qualquer posição solicitada sem ter que desenhá-la? Como?

Apêndice D– Tarefa 2

COLÉGIO ESTADUAL PROFESSORA LIA PÚBLIO DE CASTRO
1º ANO DO ENSINO MÉDIO - IBITIRA/BA
ALUNOS: ____
PROFESSORA: ROSE MARY

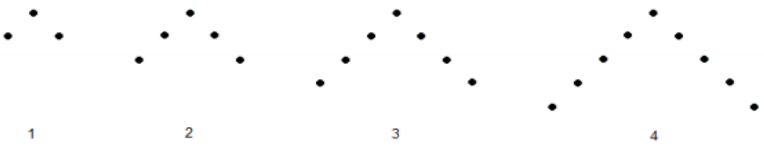
AULA INVESTIGATIVA

OBJETIVOS:
- Identificar regularidades e padrões;
- Construir as próximas figuras da sequência;
- Relacionar cada elemento com a posição que ocupa;
- Identificar relações entre diferentes elementos da sequência e exprimir estas relações em linguagem corrente;

TAREFA 2 - VOO EM V

Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Diversas equipes de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis às vantagens para o voo das aves e dos aviões.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis os quatro primeiros termos:



Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquema cálculos ou símbolos.

QUESTIONAMENTOS:

- Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência?
- Quantos pontos tem a 100.ª figura (termo de ordem 100) desta sequência?
- Existe, nesta sequência, alguma figura com 86 pontos? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde.
- Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.
- Escreve uma regra que permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.
- Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra -descrita na pergunta anterior.

REFERÊNCIA: PONTE, João Pedro da. et al. *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC-ME, (2009). (p.12)

Apêndice E – Tarefa 3

COLÉGIO ESTADUAL PROFESSORA LIA PÚBLIO DE CASTRO
1º ANO DO ENSINO MÉDIO - IBITIRA/BA
ALUNOS: ____
PROFESSORA: ROSE MARY

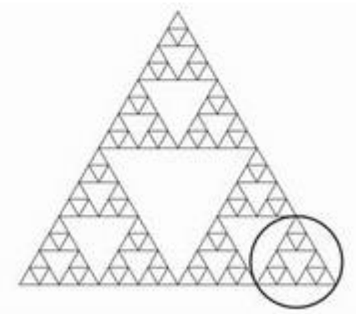
PROFMAT

AULA INVESTIGATIVA

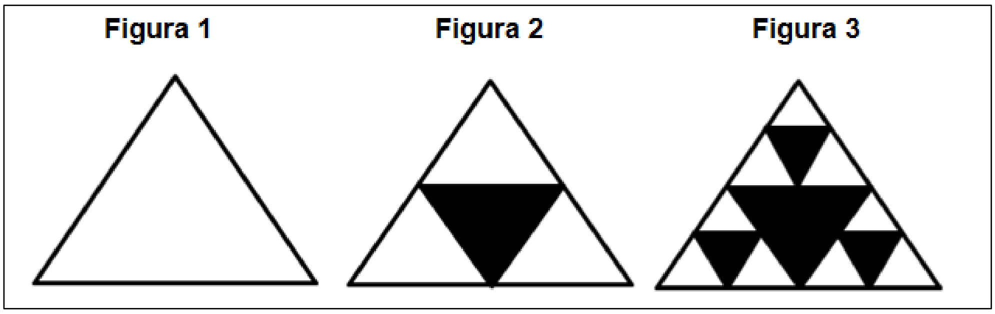
OBJETIVOS:
- Identificar regularidades e padrões;
- Construir as próximas figuras da sequência;
- Relacionar cada elemento com a posição que ocupa;
- Identificar relações entre diferentes elementos da sequência e exprimir estas relações em linguagem corrente;

TAREFA 3 - TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

O estudo de fractais tem se revelado de grande importância em vários campos científicos. A Geometria fractal é uma parte da matemática que estuda, entre outras coisas, a repetição de padrões. Os fractais são formados por estruturas geométricas complexas que em geral repetem indefinidamente seguindo uma ordem. Um exemplo de fractal é o triângulo de Sierpinski, idealizado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), que conforme definição, uma parte é semelhante ao todo.



Agora observe o processo de construção do triângulo Sierpinski.



Tomando como base os questionamentos seguintes, procure criar estratégias para chegar resultados importantes, registrando-os no relatório.

QUESTIONAMENTOS:

a) Desenhe a próxima figura da sequência. Como é formada essa figura?
b) Como imagina que será formada a 5ª figura?
c) E na 9ª figura?
d) Complete a tabela abaixo que relaciona os quadradinhos brancos existentes em cada figura da sequencia.

FIGURA	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de triângulos brancos								

e) Existe figura com 243 triângulos brancos em sua construção? E com 300?
f) Quantos triângulos brancos possui a n(enésima) figura? Escreva uma regra que relaciona o número de triângulos brancos com a posição da figura.

Apêndice F– Tarefa 4

COLÉGIO ESTADUAL PROFESSORA LIA PÚBLIO DE CASTRO
1º ANO DO ENSINO MÉDIO - IBITIRA/BA
ALUNOS: ____
PROFESSORA: ROSE MARY

AULA INVESTIGATIVA

OBJETIVOS:
- Identificar regularidades e padrões;
- Construir as próximas figuras da sequência;
- Relacionar cada elemento com a posição que ocupa;
- Identificar relações entre diferentes elementos da sequência e exprimir estas relações em linguagem corrente;

TAREFA 6 - TRIÂNGULO DE PASCAL

O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético infinito formado por números que têm diversas relações entre si. Sua versão mais antiga é creditada ao chinês Yang Hui, que viveu alguns séculos antes do nascimento de Pascal. Entretanto, o nome Triângulo de Pascal foi motivado pelo fato de várias de suas propriedades terem sido descobertas e estudadas pelo francês Blaise Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Analise atentamente o triângulo de Pascal e encontre relações interessantes entre os números.

QUESTIONAMENTOS:
- Descubra como se obtêm os números de cada linha deste triangulo, a partir dos números da linha anterior.
- Escreva mais linhas deste triângulo.
- Some os números de cada uma das linhas do triangulo de pascal. O que pode observar? É possível prever a soma dos números das próximas linhas? Construa uma tabela relacionando a linha com a soma dos números da mesma.

Linha	1	2	3	4	5	6
Soma						

- Descubra agora um modo de saber a soma de qualquer linha que se queira, sem depender da soma da linha anterior.

Apêndice G – Questionário Final

COLÉGIO ESTADUAL PROFESSORA LIA PÚBLIO DE CASTRO
1º ANO DO ENSINO MÉDIO - IBITIRA/BA
ALUNOS: ____
PROFESSORA: ROSE MARY

Questionário

1) O que você achou das atividades e do desenvolvimento das aulas? Descreva uma situação positiva e uma negativa

____
____
____
____

2) Já conhecia essa metodologia de ensino que foi utilizada na realização das atividades? Se sim, de onde?

____
____
____

3) Considera que foi mais fácil ou difícil estudar o conteúdo de sequências desta forma. Explique.

____
____
____

4) Você acha que este tipo de tarefas contribuiu de alguma forma para o seu aprendizado?

____
____
____

5) Faça as considerações, críticas e sugestões que achar convenientes.

____
____
____

Apêndice H – Autorização dos alunos para a participação da pesquisa e divulgação dos resultados

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário (a) a participar da pesquisa: **A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO SUPORTE PARA O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES.**

PROFESSORA PESQUISADORA: Rose Mary dos Santos Farias Ramos
PROFESSORA ORIENTADORA: Maria Deusa Ferreira da Silva
INSTITUIÇÃO A QUE PERTENCE A PESQUISADORA RESPONSÁVEL: O presente estudo é um trabalho de mestrado desenvolvido junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT, que ocorre na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, Campus de Vitória da Conquista (BA)

LOCAL E SÉRIE A SER ESTUDADA:
Colégio Estadual Professora Lia Públio de Castro, 1º ano do Ensino Médio.

A JUSTIFICATIVA E O OBJETIVO:
Este trabalho se justifica pelo motivo de a Matemática ser uma ciência tão presente na nossa vida cotidiana e ao mesmo tempo ser tão marginalizada, resumindo a aprendizagem matemática com a simples memorização de conteúdo. Nesse sentido, surge a ideia do trabalho com as atividades investigativas aspirando desenvolver nos alunos a capacidade de observar, despertar curiosidade, desenvolver raciocínio e imaginação, formular seus próprios questionamentos, estabelecer estratégias, realizar testes, tornando-o um sujeito autônomo na construção do conhecimento.
Dessa forma, o objetivo desse trabalho é estudar as e as possibilidades e contribuições de se utilizar a Metodologia de Investigação Matemática no ensino de matemática, em especial no estudo de sequências e regularidades.

GARANTIA DE ESCLARECIMENTO, LIBERDADE DE RECUSA:
Você será esclarecido(a) sobre a pesquisa em qualquer aspecto que desejar. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não irá acarretar qualquer penalidade ou perda de benefícios.
A pesquisadora irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Seu nome ou o material que indique a sua participação não será liberado sem a sua permissão.

CUSTOS DA PARTICIPAÇÃO:
A participação no estudo não acarretará custos para você e não será disponível nenhuma compensação financeira adicional.

AUTORIZAÇÃO:
Declaro que concordo em participar desse estudo e autorizo utilizar os dados coletados em sala de aula durante as atividades investigativas aplicadas, bem como informações dos áudios, questionários e relatórios.
Recebi uma cópia deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Ibitira, ____ de fevereiro 2015.

____
Assinatura do participante

____
Assinatura dos pais/responsável

____
Assinatura da pesquisadora