Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências e Tecnologias

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

André Luis Pinto Ferreira

Probabilidade e Loterias

Rio de Janeiro

2015

André Luis Pinto Ferreira

Probabilidade e Loterias

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Profº. Dr. Sérgio Luiz Silva

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

F991 Ferreira, André Luis Pinto.
Probabilidade e Loterias / André Luis Pinto Ferreira. – 2015.
111 p.
Orientador:.Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Probabilidade – Teses. 2. Loteria – Teses. 3. Jogos de azar – teses. I. Silva, Sérgio Luiz. II. Universidade do Restado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 519.1

________________________ Assinatura

____________ Data

André Luis Pinto Ferreira

Probabilidade e Loterias

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 25 de agosto de 2015.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

____

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araújo Carneiro
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

____

Profª . Dra. Cecília de Souza Fernandez
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2015

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus e ao grande mestre Jesus Cristo, que nos momentos mais difíceis me deu força e me tomou em seus braços nunca deixando que eu me sentisse desamparado.

A todos os professores que contribuíram para minha formação, em especial ao Prof. Dr. Sérgio Luiz, pela paciência e atenção sendo o orientador deste trabalho e a Prof(a). Jeanne Barros pelo enorme carinho e dedicação com os alunos, tendo participado de minha formação na graduação e neste curso de mestrado.

À minha esposa Camila, que em todos os momentos está ao meu lado me apoiando e ajudando em minhas escolhas profissionais, sendo compreensiva e amorosa nos momentos mais difíceis e me apoiou bastante na realização deste curso.

À minha filha Maria Eduarda, que desde o dia de seu nascimento me ensina muito com seus pequenos atos, com sua força, vontade de viver e personalidade.

À minha mãe Marize, pela educação, esforço incansável em criar e formar três filhos e principal incentivadora para que eu fizesse esse curso de mestrado.

Ao meu pai Alberto, pelo caráter, exemplo de como deve ser um homem de bem, digno, cumpridor de seus deveres e chefe de família.

Aos meus avôs Delfim e Antônio e avós Ilda e Marta, in memorian, por participar de minha criação e serem diretamente responsáveis pelo homem que hoje me tornei.

Aos meus irmãos Daniel Luis e João Luis, por estarem sempre presentes em todas as etapas da minha vida, sendo fundamentais nos momentos de maior dificuldade.

Aos amigos Eduardo Telles e Rafael Brito, irmãos que encontrei ao longo de minha trajetória acadêmica e estão presentes em todos os momentos me incentivando e me apoiando.

Aos funcionários do departamento de Ensino, pela excelência no atendimento aos alunos.

RESUMO

FERREIRA, A.L.P. *Probabilidade e Loterias.* 2015. 111 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

O presente trabalho é uma abordagem para o ensino médio com o intuito de ensinar probabilidades, explorando os jogos de loteria, principalmente, a Mega Sena que atrai inúmeros apostadores. O breve histórico do desenvolvimento da teoria das probabilidades visa ser um atrativo a mais para a discussão do tópico. O capítulo que aborda a teoria tem bastantes exemplos e questões do vestibular da UERJ objetivando dar ao leitor exemplos práticos e mostrar a importância deste tópico nos vestibulares, em especial no vestibular da UERJ. No terceiro capítulo, o leitor ficará a par das regras das loterias. O capítulo seguinte calcula as chances de acertos nos jogos de loterias. No penúltimo capítulo o leitor se depara com algumas atividades pedagógicas que visam atrair a atenção do aluno e colocá-lo como protagonista, ajudando-o a compreender melhor o tópico a ser ensinado. Finalmente, no sexto e último capítulo é apresentado a conclusão e as expectativas do autor em relação ao trabalho e as práticas pedagógicas aqui propostas.

Palavras – chave: Matemática, probabilidade, jogos e Mega Sena.

ABSTRACT

FERREIRA, A.L.P. Probability and Lotteries. 2015. 111 f. Dissertation (Professional Master's degree in Mathematics in National Network - PROFMAT) - Institute of Mathematics and Statistics, State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, in 2015.

This work is an approach to high school in order to teach probability, exploring the lottery games, especially the Mega Sena which attracts many gamblers. The brief history of the development of probability theory aims to be the most attractive one for discussion of the topic. The chapter covering the theory has enough examples and UERJ vestibular issues aiming to give the reader practical examples and show the importance of this topic in college entrance exams, especially in the vestibular of the UERJ. In the third chapter, the reader will be familiar with the rules of lotteries. The next chapter calculates the chances of hits in lottery games. In the penultimate chapter the reader is faced with some educational activities aimed at attracting the attention of the student and put him as the protagonist, helping you to better understand the topic being taught. Finally, the sixth and final chapter presents the conclusion and the author's expectations in relation to work and educational practices proposed here.

Keywords: Mathematics, probability, games and Mega Sena.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de probabilidade nas escolas é visto no segundo ano do ensino médio e torna a ser abordado, em algumas escolas, no terceiro ano do ensino médio como revisão para as provas de vestibular. Diante de alguns relatos sobre a dificuldade em compreender esse tópico tão importante e aplicável em várias áreas como a genética, estatística, seguros, entre outras, percebo que a deficiência de aprendizado em probabilidade se deve muito às lacunas que os estudantes trazem em sua formação. A álgebra dos conjuntos, por exemplo, é um assunto que julgo ser de fundamental importância para o estudante aprender análise combinatória e, na sequência, probabilidade. Tópico onde na maioria das escolas é abordado apenas superficialmente. Outro tópico que sequer nem é visto em muitas escolas e ajudaria bastante são noções básicas de lógica matemática.

Este TCC foi pensado para servir como uma alternativa para o ensino de probabilidade fugindo um pouco das práticas atuais. Serão explorados jogos em loterias e outras atividades, que fazem um 'link' com outras áreas da matemática, onde se espera que o aprendizado se torne mais efetivo e mais agradável. A ideia parte do princípio de que o aluno, ao participar das práticas e através das discussões com os colegas, tendo o professor como mediador, torne-se protagonista desse processo e possa assim construir o conhecimento de forma mais satisfatória.

Este trabalho está dividido em capítulos, seis no total. O primeiro trata da parte histórica, onde o leitor terá uma pequena visão de como evoluiu o estudo das probabilidades e o surgimento das loterias. O segundo capítulo é a parte mais formal deste trabalho, onde temos uma abordagem formal da parte teórica que fundamenta o estudo da probabilidade, usando como exemplos, para facilitar o entendimento da teoria, algumas questões que foram usadas no vestibular da UERJ. No terceiro capítulo o leitor ficará a par das regras de alguns jogos de loterias, em especial a mega sena. Tomando o cuidado de ser explicado através de cálculos quantas quadras, quinas e senas devem ser pagas ao apostador que, por exemplo, apostar sete números e acertar os seis sorteados. No quarto capítulo são feitos os cálculos probabilísticos das chances de um apostador acertar a sena, a quina e a quadra. O quinto capítulo é a parte mais importante deste trabalho, pois nele são propostas seis atividades pedagógicas que visam facilitar o ensino de probabilidade. O sexto capítulo é a conclusão deste trabalho, nele é relatado o que se espera da aplicação das atividades propostas no capítulo anterior. No apêndice o leitor encontrará a resolução do jogo da Balla e paradoxo de São Petersburgo.

1 **PARTE HISTÓRICA**

O homem, até recentemente, creditava a ocorrência de qualquer evento aos deuses ou a alguma outra causa sobrenatural.

M. G. Kendall traduziu essa ideia quando disse: "A Humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos não casuais".

Uma visão matemática sobre o acaso, o azar e risco só começou a ter espaço há pouco mais de 500 anos.

A Teoria das Probabilidades teve origem nas tentativas de quantificação dos **riscos dos seguros** e de avaliar as **chances de se ganhar em jogos de azar**.

1.1 **Seguros:**

A ideia de seguros ocorreu há mais de 5 000 anos entre os comerciantes marítimos mesopotâmicos e fenícios, aplicados à perda de carga de navios (naufrágios ou roubos). A prática teve sequência com os gregos e romanos e acabou chegando ao Mundo Cristão Medieval através dos comerciantes marítimos italianos. Muito pouco chegou até nós acerca das técnicas empregadas pelos seguradores daqueles tempos, mas sabe-se que se baseavam em estimavas empíricas das probabilidades de acidentes para estipularem as taxas e prêmios correspondentes. Com o fim da Idade Média e o crescimento dos centros urbanos, surgiu um novo tipo de seguro: o seguro de vida. É a partir desse momento que surgem os primeiros estudos matemáticos sobre seguros, século XVI. Nessa época houve um enorme aumento nos negócios de seguros marítimos, associados aos preciosos carregamentos oriundos das Américas e das Índias, mas os seguradores continuaram a usar as milenares técnicas empíricas. A mais antiga tentativa de um estudo matemático dos seguros de vida é atribuída a **Cardano**, em 1 570 (em seu *De proportionibus Libri V*). Seu trabalho, contudo, teve mínima repercussão, provavelmente por ter pouca praticidade. O primeiro trabalho prático na área dos seguros de vida é devido a Halley em 1693 (*Degrees of Mortality of Mankind*). Nesse trabalho, Halley mostrou como calcular o valor da anuidade do seguro em termos da expectativa de vida da pessoa e da **probabilidade** de que ela sobreviva por um ou mais anos. Daniel Bernoulli, 1 730, retoma o clássico problema de, a partir de um número dado de recém-nascidos, calcular o número esperado de sobreviventes após n anos. Ele também dá os primeiros passos em direção a novos tipos de seguros calculando, por exemplo, a mortalidade causada pela varíola em pessoas de idade dada. Ao mesmo tempo começaram a aparecer às primeiras grandes companhias de seguros as quais tiveram, assim, condições de se estabelecer com um embasamento científico. De lá para cá, os negócios de seguros ampliaram-se e sofisticaram-se cada vez mais a ponto de, em alguns países europeus, tornarem-se um mercado de trabalho que absorve quase um quarto dos egressos de cursos de Matemática.

No século XVII, na Inglaterra e na Holanda, as coroas empenhavam-se em vender aos seus súditos títulos públicos que asseguravam ao tomador a percepção de uma renda vitalícia. Assim, foi necessário determinar com a maior precisão a importância em dinheiro que deveria ser cobrada em contraprestação ao serviço, para que não houvesse prejuízo à coroa, trabalho destinado aos melhores matemáticos da época.

Desse desafio nasceu na Inglaterra do final da primeira metade do século XIX a ciência atuarial moderna, destinavam-se as áreas de pensão e aposentadoria, basicamente com o objetivo de estudar a mortalidade da população. Isso só foi possível com o advento do cálculo da probabilidade de Pascal, no final da primeira metade do século XIX, na Inglaterra.

Assim, foi-se criando a base para o surgimento da "matemática atuarial". Graunt e Halley, na Inglaterra, e De Witt, na Holanda, a partir dos registros de nascimentos e óbitos, estudaram o problema levando em conta as leis da probabilidade e a expectativa de vida. Os avanços no cálculo de rendas apresentados por James Dodson, lhe valeram também o título de inventor da ciência atuarial.

O título de "primeiro atuário da História", entretanto, é atribuído a Domitius Ulpiames, prefeito de Roma durante o Império Romano, considerado um dos maiores economistas de sua época. Foi ele quem deu os primeiros passos para o desenvolvimento do seguro de vida, pois se interessou pelo assunto e estudou documentos sobre nascimentos e mortes dos romanos. O termo foi "ressuscitado" para batizar a profissão que nascia com a atuação profissional de William Morgan, na *Equitable Life.*

A atuária desenvolveu-se, principalmente à medida que outros matemáticos, economistas e filósofos se interessaram pelo assunto. Cada vez mais, houve a construção e especialização das tábuas de vida, como também o desenvolvimento das comutações, ferramentas fundamentais para o cálculo atuarial em uma época com poucos recursos tecnológicos à disposição. Também aconteceu nesse período o 1º Congresso Internacional de Atuários em Bruxelas, no ano de 1895.

No século XX, a área de seguros expandiu a abrangência do estudo atuarial, e a inserção cada vez mais freqüente das empresas de seguro e pensão no mercado financeiro, fez com que a ciência atuarial se especializasse cada vez mais em campos econômicos e financeiros. A partir de então as empresas seguradoras passaram a oferecer programas de seguro de vida e outras especializações.

1.2 **Jogos de Azar:**

Os jogos de azar são, provavelmente, tão velhos quanto a Humanidade: temos provas arqueológicas da prática do jogo do osso há 40 000 anos. Ademais, jogava-se e joga-se praticamente pelo mundo inteiro, sendo raras as sociedades que não o faziam (polinésios, siberianos, e algumas outras).

Historicamente, os jogos mais praticados foram o do osso (conhecido pelo mundo inteiro) e o de dados (surgiu na Índia e Mesopotâmia c. 3 000 a.C, como evolução do jogo do osso, e daí se difundiu para o mundo grego, romano e cristão).

É também importante lembrar que antigamente jogava-se em apostas bem como para prever o futuro, decidir disputas, dividir heranças, etc.

Os dados mais antigos que se tem conhecimento são em forma de pirâmide e foram descobertos em 1920 em túmulos reais da civilização sumeriana de Ur.

De um período pouco posterior, foram descobertos na tumba do faraó Tutankamon dados em formatos de hastes com as faces numeradas de 1 a 4.

Os sumérios e assírios usavam uma forma antiga de dado de seis faces, feito de osso extraído do calcanhar de animais, denominado astrágalo ou tálus, e que o moldavam para que eles pudessem cair em quatro posições diferentes.

O astrágalo, o osso do "jogo do osso", pode cair sobre quatro de suas faces. Antigamente, essas recebiam os valores 4 e 3 para as faces maiores, e 1 e 6 para as duas menores. Experimentos deram as seguintes probabilidades de ocorrência desses lados:

$$P(4) = 0{,}39,\ P(3) = 0{,}37 \text{ e } P(1) = P(6) = 0{,}12\,.$$

Antigamente, um uso comum do jogo do osso era na previsão do futuro, onde se jogavam cinco ossos de cada vez.

Um exemplo sendo a seguinte adivinhação grega, chamada "o lance do Zeus salvador":

F*oram um 1, dois 3 e dois 4 ...Os deuses te deram um augúrio favorável. Não o tire da cabeça, pois nenhum mal cairá sobre ti*.

A probabilidade de ocorrer esse augúrio favorável é:

$$P = \frac{5!}{2!.2!}.(0{,}12).(0{,}37)^2.(0{,}39)^2 = 0{,}075 = 7{,}5\%\,.$$

Os mais antigos cálculos matemáticos, que se tem conhecimento, sobre jogos de azar resumem-se à mera enumeração das possibilidades de se obter um dado resultado no jogo, não havendo preocupação probabilística explícita.

Em 960 o bispo belga Wibold, da cidade de Cambrai, criou um jogo moral onde a cada um dos 56 resultados possíveis (sem contar as permutações) no jogo de 3 dados, atribuiu uma virtude . Dando assim um passo no caminho da formalização da teoria da probabilidade.

Em várias obras literárias medievais (inclusive na Divina Comédia de Dante) encontramos enumerações das possibilidades de se obter o resultado 2, 3,...,12 ao jogar dois dados, idem de se obter 3,4,...,18 ao jogar três dados, etc.

Os primeiros cálculos de probabilidades em jogos de azar são atribuídos aos italianos quinhentistas. Precisando comparar frequências de ocorrências e estimar ganhos em jogos de azar, eles foram além da mera enumeração de possibilidades. Contudo, se limitaram a resolver problemas concretos, sem enunciar teoremas. Pacioli c. 1 500, em sua famosa Summa, estudou um problema que se tornou famoso como Problema dos Pontos:

Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?

Sua solução, corretamente, faz uma divisão proporcional à probabilidade dos ganhos de cada jogador. Assim foi introduzida, de modo bastante intuitivo, a noção de **esperança matemática**, ou seja, o somatório dos produtos dos ganhos eventuais pelas respectivas probabilidades desses ganhos.

Cardano em 1 526 escreveu um pequeno Manual de Jogos de Azar (*Liber de Ludo Aleae*) onde resolveu vários problemas de enumeração e retomou os problemas abordados por Paccioli.

Cardano foi o primeiro a introduzir técnicas de Combinatória para calcular a quantidade de possibilidades favoráveis em um experimento aleatório e, assim, poder calcular a probabilidade de ocorrência do evento como a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao evento.

No entanto limitou-se a resolver problemas concretos, ou seja, problemas com dados estritamente numéricos.

Tartaglia em 1 556 dedica algumas páginas de seu livro, *General Trattato,* aos problemas de Pacioli.

Galileo, c. 1 590, escreve um manual sobre jogos, o "Considerações", sobre o Jogo de Dados, onde faz uma comparação explícita de frequências de ocorrência. Nesse manual Galileo explica a um amigo porque, embora sejam 6 as somas que permitem fazermos 9 pontos ao jogarmos 3 dados e também 6 as que fazem 10 pontos, a experiência mostra que o 10 é mais comum de ocorrer do que o 9.

François Viète, c. 1 600, com o Cálculo Literal (Logística Speciosa) e com a álgebra desenvolvida por Descartes em sua La Géometrie, c. 1630, usa uma notação mais apurada o que permite o estudo de problemas mais genéricos.

Fermat e Pascal, metade do século XVII, são responsáveis por fornecer as condições para a abordagem de problemas gerais de probabilidades.

Em 1 654, um famoso jogador profissional, Antoine Gombauld, pomposamente autodenominado **o Cavaleiro de Méré**, escreveu uma carta ao famoso matemático francês Blaise Pascal, propondo-lhe resolver alguns problemas matemáticos que tinha encontrado em suas lides com jogos de azar. Entre os problemas propostos por De Méré estava o seguinte:

Jogando com um par de dados honestos, quantos lances são necessários para que tenhamos uma chance favorável (ou seja, de mais de 50%) de obtermos um duplo-seis, ao menos uma vez?

O interesse de De Méré no problema residia no fato de que sua "solução" para o mesmo não funcionava na prática, produzindo-lhe constantes prejuízos.

Com efeito, ele não conseguia ver o que estava errado em seu raciocínio:

"Quando jogamos **apenas um dado**, temos 1/6 de chance de obter um seis, e como 3 x 1/6 = 50% e 4 x 1/6 ≈ 67%, vemos que precisamos jogá-lo 4 vezes para ter chance maior do que 50% de obtermos, ao menos uma vez, um seis. Ora, quando jogamos **um par de dados** temos 36 possibilidades, ou seja 6 vezes mais possibilidades de quando jogamos um único dado, consequentemente, precisaremos jogar o par de dados 6 x 4 = 24 vezes para ter chance maior do que 50% de obtermos, ao menos uma vez, um duplo seis".

Pascal percebeu o erro de De Méré e se dispôs a achar a solução correta. Trocando ideias com o grande matemático Fermat, logo se convenceram que a resolução teria de passar pela enumeração, usando combinatória, das possibilidades de ocorrência do duplo-seis. Procurando uma maneira inteligente de fazer essa trabalhosa enumeração, acabaram dando plena maturidade às técnicas introduzidas por Cardano e Tartaglia:

Fermat redescobriu e aperfeiçoou a técnica de Cardano, baseando o cálculo de probabilidades no cálculo combinatório, bem ao estilo que hoje empregamos rotineiramente.

Pascal seguiu um caminho menos importante, redescobriu e aperfeiçoou a técnica de Tartaglia, que se baseava no uso do que hoje, no Brasil e vários outros lugares, chama-se de triângulo aritmético de Pascal (na Itália, o triângulo aritmético é chamado de triângulo de Tartaglia, mas a verdade é que o triângulo aritmético já era conhecido há séculos pelos indianos, chineses e pelos islamitas)

Dessa maneira, conseguiram mostrar, cada um à sua maneira, que em 24 lances de um par de dados, a probabilidade de ocorrer, ao menos uma vez, um duplo-seis é:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=49{,}1\%.$$

Sendo então, ao contrário do que achava De Méré, "desfavorável" ao jogador.

Em 25 lances de um par de dados, a probabilidade de ocorrer, ao menos uma vez, um duplo-seis é:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25}=50{,}6\%.$$

Que vem a ser "favorável" ao jogador.

Pascal e Fermat são os primeiros a resolverem problemas mais gerais, não numéricos. Por exemplo, Pascal resolveu a seguinte versão genérica do Problema dos Pontos de Pacioli:

"O jogo terminaria quando um jogador fizesse m+n pontos, mas precisou ser interrompido quando um deles tinha m pontos e o outro tinha n pontos; como dividir os prêmios?"

Contudo, nem Pascal e nem Fermat chegaram a tratar de teoremas de probabilidades.

Jakob Bernoulli, século XVIII, se aprofundando nos estudos de Fermat, dá início ao processo de abstração das probabilidades (livrando-as das limitações dos seguros e jogos) e foi além da mera resolução de problemas concretos, produzindo os primeiros teoremas sobre o assunto (como a Lei dos Grandes Números).

Os resultados de Bernoulli foram publicados em seu livro *Ars Conjectandi* de 1713, o qual foi seguido do *Doctrine of Chance* de de Moivre (1716) e do *Laws of Chance* de Simpson (1740).

Finalmente, em 1812, **Laplace** publicou seu tratado *Théorie Analytique des Probabilités* que foi o maior marco dessa etapa clássica da Teoria das Probabilidades. A partir daí, os estudos clássicos de probabilidades aceleraram-se e continuaram ao longo do século passado e início desse século por grandes matemáticos, como Gauss, Poisson, Poincaré, Markov, Borel, etc.

Andrei Kolmogorov, em 1933, iniciou a etapa moderna da Teoria das Probabilidades ao apresentar uma axiomatização rigorosa e abstrata, baseada na Teoria dos Conjuntos e reduzindo a Teoria das Probabilidades à Teoria da Integração.

1.3 **Jogos de cartas e Loterias:**

Os jogos de cartas apareceram por volta do século IX na China e no século XIV na Europa.

Os primeiros registros de uma loteria são os cartões Keno dos chineses da Dinastia Han entre 205 e 187 a.C. Acredita-se que estas loterias ajudaram a financiar projetos governamentais importantes, como a Grande Muralha da China.

As loterias surgiram no século XV na Alemanha, ainda de forma bem elementar incentivaram a promoção de concursos em outros países da Europa, como Inglaterra, Itália (alguns historiadores defendem que a Basílica de São Pedro, em Roma, foi construída com auxílio de dividendos de loterias).

Outros jogos de azar como o pôquer e a roleta apareceram no século XIX.

Nos Estados Unidos, pesquisas apontam para a construção de 50 universidades, dentre elas Harvard e Princeton, e 200 escolas com recursos provenientes de loterias.

No Brasil, a primeira loteria surgiu em 1784, em Vila Rica (atual Ouro Preto), então capital de Minas Gerais, com o objetivo de arrecadar fundos para construção de prédios públicos, como a Câmara dos Vereadores.

A Caixa Econômica Federal assumiu a concessão da loteria federal no país em 1962, com a venda de 40.000 bilhetes em duas séries semanais. Nesse período a Caixa sofria apenas concorrência das loterias estaduais.

Em 1967, o decreto 204, obstrui o desenvolvimento das demais loterias existentes e, simultaneamente, impede a criação de novas loterias. Esse decreto confere a Caixa uma grande oportunidade de expansão de sua loteria, quando passa a vender 56.000 bilhetes em três séries semanais.

Em 19 de abril de 1970 surgem as Loterias Esportivas com a realização uma rodada experimental no estado da Guanabara com prêmio fixo de duzentos mil cruzeiros novos e cem mil bilhetes distribuídos. Para ganhar o prêmio o apostador tinha de acertar os resultados de treze jogos selecionados pela Caixa. Durante essa fase experimental era possível marcar até treze palpites triplos (quando todas as colunas são marcadas em uma linha), no entanto, nenhum apostador fez os treze pontos – as chances matemáticas eram de 1 para 1.594.323. Oito apostadores foram premiados com doze pontos e dividiram o prêmio líquido, com cada um recebendo dez mil cruzeiros novos.

Outras rodadas experimentais foram realizadas em 3 de maio, também na Guanabara , e em 17 de maio, em São Paulo, Belo Horizonte e Brasília.

FIGURA 1 - Réplica do volante do primeiro jogo da loteria esportiva.

LOTERIA ESPORTIVA
VOLANTE – CONCURSO TESTE N.º 1
PREÇO DE CADA APOSTA NCR$ 1,00

Nome:

Endereço:

CLUBE 1	EMPATE X	CLUBE 2
1 Flamengo	x	1 Fluminense
2 Bangu	x	2 Bonsucesso
3 Vasco	x	3 América
4 Botafogo	x	4 Fluminense
5 Santos	x	5 Corintians
6 São Paulo	x	6 Portuguêsa
7 Guarani	x	7 Ponte Preta
8 Ferroviária	x	8 Botafogo
9 Esportivo	x	9 Grêmio
10 Tupi	x	10 Tupinambás
11 Ferroviária	x	11 Londrina
12 Benfica	x	12 Varzim
13 Leixões	x	13 Sporting

NÚMERO DE APOSTAS

PREÇO A PAGAR NCR$

1 X 2 PROGNÓSTICO

O JOGO Nº 1

Fonte:(https://www.google.com.br/search?q=imagem+do+volante+do+primeiro+jogo+de+loteria+esportiva+no+brasil&biw=1280&bih=705&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0CBwQsARqFQoTCKHevZ2y8MYCFYHUgAodlGcGgA#imgrc=4ZuRtcnnd6LPaM%3A)
Consulta realizada dia 22/07/2015

1.4 **Aplicações da Teoria das Probabilidades:**

No período que vai dos primeiros estudos matemáticos de probabilidades até a metade do século passado, surgiram varias aplicações da Teoria das Probabilidades, por exemplo:

I. Cálculos atuariais, especialmente os associados aos seguros de vida.

II. Estudos demográficos e, em especial, os estudos de incidência de doenças infecciosas e o efeito da vacinação (exemplo de grande repercussão na época sendo o da varíola).

III. Construção das loterias nacionais e o estudo dos jogos de azar: carteados, roleta, lotos, etc.

IV. Probabilidades na Física:

Problema Fundamental da Teoria dos Erros:

“Se em condições idênticas foram obtidas medidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, para uma grandeza de valor exato x desconhecido, determinar a probabilidade de que o valor de x seja uma quantidade expressa em termos dos x_k, como é o caso da média dessas medidas.”

Esse problema foi exaustivamente estudado por Legendre, Laplace e Gauss, no final do sec. XVIII e início de sec. XIX. O resultado mais fundamental foi estabelecido por Gauss, ao provar que se os erros das medidas têm uma distribuição gaussiana (ou da curva normal) então o valor mais provável de x é a média das medidas x_k.

V. Probabilidades na Estatística:

A História registra censos, para fins de alistamento militar e de coleta de impostos, realizados há mais de 4 000 anos, como é o caso do censo do imperador Yao na China, em 2200 a.C.

A primeira pessoa a atinar em medir/observar apenas uma pequena amostra do universo envolvido e, a partir de análise probabilística, estender os resultados da amostra para o todo do universo ou população foi Adolphe Quételet, c. 1850. A partir deste momento rapidamente surgiu à ideia de dar um embasamento mais rigoroso para o método científico, a partir de uma fundamentação probabilística para as etapas da coleta e da análise indutiva de dados científicos. Essa concepção, hoje essencial no trabalho científico, só atingiu um nível prático no início do sec. XX e desenvolveu-se em três grandes frentes:

Inferência Estatística:

Delineamento dos experimentos científicos;

Correlação entre variáveis.

VI. Probabilidades na Engenharia:

Entre 1941 e 1942 os americanos e os ingleses desenvolveram um grande programa, procurando disseminar a prática do controle de qualidade estatístico na produção militar. Vários manuais foram escritos e divulgados amplamente.

As aplicações mais recentes, na engenharia são:

Teoria das filas;

Teoria da Informação;

Teoria do risco.

2 **TEORIA**

2.1 **Experimentos aleatórios ou não determinísticos.**

Considere um experimento E onde os resultados são imprevisíveis e os possíveis resultados são mutuamente exclusivos, ou seja, em cada repetição desse experimento é impossível prever, com absoluta certeza, qual o resultado que será obtido e, além disso, a ocorrência de um deles exclui a dos demais. Todo experimento que possui esse tipo de característica é denominado ***experimento aleatório ou não determinístico***, e seus possíveis resultados são chamados de ***eventos simples***.

Exemplos:

- E_1 = Lançar um dado e observar o número que está escrito na face que fica voltada para cima.
- E_2 = Lançar uma moeda três vezes e observar a sequência de caras ou coroas obtidas.
- E_3 = Uma urna possui 7 bolas de cor branca, 5 bolas de cor preta e 10 bolas de cor azul, retira-se uma bola e observa-se sua cor.
- E_4 = De um baralho comum, 52 cartas, são retiradas três cartas simultaneamente e verificam-se quais cartas foram obtidas no terno extraído.
- E_5 = A asa de um avião é fixada por um número n, finito, de rebites. Contar o número de rebites defeituosos.
- E_6 = Um míssil é lançado e em um dado instante t verifica-se o módulo das três componentes de sua velocidade.
- E_7 = Um míssil foi lançado e nos instantes t_1, t_2, t_3,... , t_n é medida a altura relativa ao solo em cada um desses instantes.
- E_8 = Uma fábrica produz n peças ao longo de um dia de trabalho, contar o número de peças defeituosas.
- E_9 = Escolher, ao acaso, uma pessoa num grupo e determinar seu tipo sanguíneo;

- E_{10} = Injetar uma dose de insulina em uma pessoa e observar a quantidade de açúcar que diminuiu.
- E_{11} = De uma substância radioativa mede-se o número de partículas emitidas por minuto.
- E_{12} = Tempo de vida de uma pessoa em anos.

Observações:

1. Em cada um dos exemplos acima não é possível determinar o resultado que se irá obter. Os fenômenos aleatórios são caracterizados pela imprevisibilidade (fenômenos não determinísticos) e pela regularidade estatística (observando-se o fenômeno um grande número de vezes, nas mesmas condições, a frequência relativa de cada resultado tende a estabilizar, aproximando-se de um valor constante).
2. Caso um experimento seja repetido em condições semelhantes e conduza a resultados idênticos, o mesmo será classificado como **experimento determinístico**, ou seja, não aleatório ou não determinístico. Por exemplo, considere que um carro percorra uma distância de x km com uma velocidade média de y km/h e determine o tempo gasto nesse percurso.
3. A teoria das probabilidades é o ramo da matemática que desenvolve modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos aleatórios.

2.2 **Espaço Amostral.**

Espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto formado por todos os possíveis resultados deste experimento. Utiliza-se a letra grega Ω (ômega) para representar o espaço amostral.

Exemplos:

- E_1= Lançar um dado e observar o número da face voltada para cima.

$\Omega(E_1) = \{1;2;3;4;5;6\}$.

- E_2 = Lançar uma moeda três vezes e observar a sequência de caras ou coroas obtidas.

Ω (E_2)={(c;c;c);(c;c;k);(c;k;c);(k;c;c);(c;k;k);(k;c;k);(k;k;c);(k;k;k)}, onde c representa coroa e k, cara.

- E_3 =Uma urna possui 7 bolas de cor branca, 5 bolas de cor preta e 10 bolas de cor azul, retira-se uma bola e observa-se sua cor.

Ω (E_3)= {branco; preto; azul}.

- E_4 = Lançar um dado e em seguida uma moeda e observar o par obtido.

Ω (E_4)={(1;c); (2;c); (3;c); (4;c); (5;c); (6;c); (1;k); (2;k); (3;k); (4;k); (5;k); (6;k)}.

- E_5 =Num lote de 20 camisas, contar a quantidade de camisas com defeito.

Ω (E_5)={0;1;2;...;19;20}.

- E_6 =Um casal planeja ter dois filhos. Observa-se a sequência de sexos dos dois filhos.

Ω (E_6)={(H;H); (H;M); (M;H); (M;M)}, onde H representa homem e M, mulher.

- E_7 = Lançar um dado duas vezes e anotar os resultados obtidos.

Pode-se usar uma matriz para representar os resultados obtidos, observe:

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
(1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\
(2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\
(3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\
(4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\
(5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\
(6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6)
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

#(Ω (E_7)) = 6.6 = 36, onde #(Ω (E_7)) representa a cardinalidade do conjunto Ω .

<u>Observações:</u>

1. Nos exemplos acima foi viável escrever os elementos do conjunto Ω. No entanto, existe eventos onde se torna inviável escrever todos os elementos de Ω. No estudo das probabilidades discretas o mais importante em geral é saber determinar a cardinalidade de Ω e para isso usaremos os métodos de contagem estudados em análise combinatória.

2. Quando se observa um experimento podem ocorrer três possibilidades para o espaço amostral, a saber, finito, infinito enumerável ou infinito não enumerável. Nesse TCC ficaremos restritos aos espaços amostrais finitos e infinitos enumeráveis. Abaixo será dado um exemplo de espaço amostral infinito não enumerável apenas a título de curiosidade.

Observe os exemplos abaixo:

- Espaço amostral finito: Jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima;
- Espaço amostral infinito enumerável: Uma moeda é lançada até que o resultado coroa (c) ocorra pela primeira vez. Observa-se em qual lançamento esse fato ocorre.

  $\Omega = \{1;2;3;4;5;...\}$.
- Espaço amostral infinito não enumerável: Dado um triângulo desenhado no plano cartesiano bidimensional, observar um ponto no seu interior ou sobre o triângulo.

2.3 **Eventos.**

Evento é todo subconjunto A do espaço amostral. Utilizam-se letras maiúsculas do alfabeto latino para representar os eventos. Dizemos que um evento A ocorre quando o resultado do experimento aleatório é um elemento de A.

<u>Exemplos:</u>

- Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

Seja Ω = {1;2;3;4;5;6} o espaço amostral deste experimento.

Considere alguns eventos que se pode verificar a partir deste experimento:

A: Ocorrer um número ímpar.

A = {1;3;5}.

B: Ocorrer um número primo.

B = {2;3;5}.

C: Ocorrer um número menor do que 2.

C = {1}.

D: Ocorrer um número menor do que 7.

D = {1;2;3;4;5;6}.

E: Ocorrer um número maior do que 6.

E = $\varnothing$.

- Um casal planeja ter dois filhos. Observa-se a sequência de sexos dos dois filhos.

Seja Ω ={(H;H); (H;M); (M;H); (M;M)} o espaço amostral deste evento.

Considere alguns eventos que se pode ter a partir deste experimento:

A: O primeiro filho ser homem.

A={(H; H); (H; M)}.

B: Ter duas filhas mulheres.

B={(M; M)}.

- Lançar um dado duas vezes e anotar os resultados obtidos.

Como feito anteriormente este espaço amostral será representado por uma matriz.

$$\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ 2 & (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ 3 & (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ 4 & (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ 5 & (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ 6 & (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{bmatrix}$$

Considere alguns eventos que se pode ter a partir deste experimento:

A: O primeiro número é maior que o segundo.

A={(2;1);(3;1);(3;2);(4;1);(4;2);(4;3);(5;1);(5;2);(5;3);(5;4);(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5)}.

Observações:

1. No primeiro exemplo, no evento C (ocorrer um número menor do que 2) verifica-se que #(C) = 1. Todo subconjunto unitário formado a partir do espaço amostral é chamado de ***evento elementar***.

2. No evento D (ocorrer um número menor do que 7) verifica-se que D= Ω. Esse tipo de evento é chamado de ***evento certo.***

3. No evento E (ocorrer um número maior do que 6) verifica-se que #(E) = 0. Esse tipo de evento é chamado de ***evento impossível.***

4. Se # (Ω)=n, então Ω terá 2^n subconjuntos, ou seja, se o espaço amostral de um experimento possuir n elementos pode-se verificar 2^n eventos a partir deste experimento, incluindo o **evento certo** e o **evento impossível**.

5. Se A é um evento, o conjunto complementar de A em Ω (denotado por A^c, $\overline{A}$ ou $C_\Omega A$) é também um evento. O conjunto complementar de A em Ω é definido da seguinte forma:

$$C_\Omega A = \Omega - A = \{x \in \Omega / x \notin A\}\,. \tag{2.1}$$

Observe que $C_\Omega A$ ocorre quando A não ocorre, basta retomar a teoria de conjuntos numéricos.

6. Quando o espaço amostral for um conjunto finito ou infinito enumerável, todo subconjunto poderá ser considerado um evento.

2.4 **Combinação de eventos.**

Utilizando certas operações entre conjuntos (eventos), é possível combinar conjuntos (eventos) para formar novos conjuntos (eventos).

2.4.1 União de eventos.

Sejam A e B eventos de um experimento, o evento $A \cup B$ é definido por:

$$A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ou } x \in B\} \tag{2.2a}$$

De modo mais geral temos:

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$,onde A_i , $1 \le i \le n$, são eventos de Ω . (2.2b)

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ocorrerá se pelo menos um dos eventos A_i ocorrer, com $1 \le i \le n$. Com isso $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é um evento.

2.4.2 Interseção de eventos.

Sejam A e B eventos de um experimento, o evento $A \cap B$ é definido por:

$$A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ e } x \in B\} . \tag{2.3a}$$

De modo mais geral temos:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{, onde } A_i,\ 1 \le i \le n \text{, são eventos de } \Omega. \qquad (2.3b)$$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ocorrerá se todos os eventos A_i, com $1 \le i \le n$, ocorrerem simultaneamente.

Observação:

1. Se a interseção dos eventos for o conjunto vazio, então os eventos são mutuamente excludentes.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \phi. \qquad (2.3c)$$

Exemplo:

- Um dado especial, com a forma de um icosaedro regular (poliedro regular que possui 20 faces triangulares), é lançado e observa-se a face voltada para cima.

Para este experimento temos Ω = {1;2;3;...;19;20}, considere os eventos a seguir:

Evento A_1: Sair um número primo.

A_1= {2;3;5;7;11;13;17;19}.

Evento A_2: Sair um número par.

A_2= {2;4;6;8;10;12;14;16;18;20}.

Evento $A_1 U A_2$: Sair um número primo ou um número par.

$A_1 U A_2$= {2;3;4;5;6;7;8;10;11;12;13;14;16;17;18;19;20}.

Evento $A_1 \cap A_2$: Sair um número primo e par.

$A_1 \cap A_2$= {2}.

Evento $(A_1 U A_2)^C$: Sair um número ímpar que não é primo.

$(A_1 U A_2)^C$= {1; 9; 15}.

Evento $(A_1 \cap A_2)^C$: Não sair um número primo ou não sair um número par.

$(A_1 \cap A_2)^C = \Omega - \{2\}$.

2.5 **Frequência Relativa.**

Considere $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ o espaço amostral de um experimento aleatório repetido α vezes em condições idênticas. Seja n_A o número de vezes que um evento A ocorre.

A ***frequência relativa*** do evento A é dada pela razão:

$$f_A = \frac{n_A}{\alpha}. \tag{2.4}$$

A seguir, vamos apresentar alguns resultados sobre a noção de freqüência relativa.

I. $0 \le f_A \le 1$.

<u>Demonstração:</u>

É imediato o fato de que $n_A \le \alpha$, logo $0 \le f_A \le 1$.

II. Denotando, respectivamente, por f_i a frequência do evento elementar $\{x_i\}$ e por n_i o número de vezes que $\{x_i\}$ ocorre nas α repetições de um experimento aleatório, temos $\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$.

<u>Demonstração:</u>

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = \frac{n_1}{\alpha} + \frac{n_2}{\alpha} + \ldots + \frac{n_k}{\alpha} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1. \tag{2.5}$$

III.Seja A um evento de Ω. Temos $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorrer em todas as α repetições e $f_A = 0$ se, e somente se, A nunca ocorrer nas α repetições.

Demonstração:

Se A ocorre em todas as α repetições é imediato da definição que $f_A = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, por outro lado se o evento A não ocorrer em nenhuma das α repetições verifica-se que $f_A = \frac{0}{\alpha} = 0$.

IV.Considere A e B dois eventos de Ω. Vale $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{A \cap B}$.

Demonstração:

Supondo inicialmente A e B mutuamente excludentes, temos claramente $n_{A \cap B} = 0$ e $n_{A \cup B} = n_A + n_B$ (2.6).

Dividindo ambos os membros por α, obtemos $\frac{n_{A \cup B}}{\alpha} = \frac{n_A + n_B}{\alpha}$ implicando na fórmula com as frequências, já que $f_{A \cap B} = 0$.

Agora, supomos A e B dois eventos arbitrários do espaço amostral Ω. Podemos escrever $A \cup B = (A - A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B - A \cap B)$, sendo o lado direito da igualdade uma união disjunta. Consequentemente,

$n(A \cup B) = n(A - A \cap B) + n(A \cap B) + n(B - A \cap B)$ e

$$n(A \cup B) = n(A - A \cap B) + n(A \cap B) + n(B - A \cap B) + n(A \cap B) - n(A \cap B) =$$
$$= n_A + n_B - n_{A \cap B}$$

e a fórmula com as frequências segue quando dividimos os membros da última igualdade por α.

V. A **frequência relativa** de um evento A é dada pela soma das frequências relativas dos eventos elementares que formam o evento A.

Demonstração:

Provaremos por indução matemática sobre o número de elementos de A. Supondo A com dois elementos, digamos $A=\{y_1,y_2\}$, pelo item IV acima, podemos escrever.

$$f_A = f_{\{y_1,y_2\}} = f_{\{y_1\}\cup\{y_2\}} = f_{\{y_1\}} + f_{\{y_2\}}.$$

Supondo que a **frequência relativa** de um evento com m elementos, $2\leq m<k$, é dada pela soma das frequências relativas dos seus eventos elementares, e considerando o evento $A=\{y_1,\dots,y_m,y_{m+1}\}$, temos. Assim, terminamos a prova do item V.

Observação:

1. Considerando f_A como uma função das α repetições do experimento aleatório, f_A irá convergir para um número, que chamaremos futuramente de P(A), com 0≤P(A)≤1 , quando $\alpha\to\infty$.

2. O princípio acima, chamado de estabilidade da frequência relativa, consiste na repetição do experimento um grande número de vezes. Dessa forma a frequência relativa de um evento A tenderá variar cada vez menos à medida que o número das α repetições tornarem-se cada vez maior. Essa característica é também conhecida como estabilidade estatística.

Exemplo:

Conde Buffon(1) lançou uma moeda 4048 vezes e observou que a face cara saiu 2048 vezes, com isso a frequência relativa do evento sair cara neste experimento é $\dfrac{2048}{4048}=0,5059$.

---

(1) [1] Ver apêndice *Georges Louis Leclerc*, Conde de Buffon , página 110.

2.6 **Probabilidade.**

2.6.1 Definição:

Seja ξ um experimento aleatório com espaço amostral finito Ω. Dizemos que uma função real P é uma probabilidade em Ω quando, a cada evento A de Ω associamos um número real P(A), denominado a probabilidade de ocorrência do evento A, satisfazendo:

I. $0 \leq P(A) \leq 1$.

II. $P(\Omega)=1$.

III. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos, dois a dois, mutuamente excludentes, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. (2.7)

Decorrem das condições acima os seguintes teoremas:

Teorema 1*:* $P(\varnothing)=0$, onde $\varnothing$ é o conjunto vazio.

Demonstração:

Seja A um evento qualquer de um experimento aleatório de espaço amostral Ω. Como A e $\varnothing$ são eventos mutuamente excludentes, escrevendo $A = A \cup \varnothing$, pela propriedade III acima, temos:

$$P(A) = P\left(A \cup \varnothing\right) = P(A) + P(\varnothing) \rightarrow P(\varnothing) = 0 . \quad (2.8)$$

Observação:

A recíproca deste teorema não é verdadeira, isto é, se P(A)= 0 não podemos concluir que A=$\varnothing$. Existem situações nas quais atribuímos probabilidade zero a eventos que podem ocorrer.

Teorema 2*:* $P(A) = 1 - P(A^C)$, onde A^C é o evento complementar de A.

<u>Demonstração:</u>

Sendo A e A^C eventos mutuamente excludentes e $AUA^C = \Omega$, pelas propriedades II e III, temos:

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = P(AUA^C) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(A}^C) \to \mathrm{P(A)} = 1 - \mathrm{P(A}^C) \tag{2.9}$$

Teorema 3*:* Sejam A e B dois eventos quaisquer de um espaço amostral Ω, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (2.10a)

Em particular, se $A \cap B = \varnothing$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

<u>Demonstração:</u>

É possível escrever os eventos AUB e B como união de eventos mutuamente excludentes e dessa forma aplicar a propriedade III.

Vejamos:

$$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A}) \text{ e } \mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\,\mathrm{U}(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) \tag{2.10b}$$

Com isso, pela propriedade III temos:

$$\begin{aligned} &i)\, P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \\ &ii)\, P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) \end{aligned} \tag{2.10c}$$

Subtraindo, membro a membro, ii) de i) temos:

$$\mathrm{P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)}. \tag{2.10d}$$

Dessa forma podemos escrever:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2.10e}$$

Teorema 4: Sejam A e B dois eventos quaisquer de um espaço amostral Ω, se $A \subset B$, então $\mathrm{P(A)} \leq \mathrm{P(B)}$.

Demonstração:

Podemos decompor B em dois eventos mutuamente excludentes, a saber: $B = A \cup (B - A)$. Pelo teorema 3,

$$P(B) = P(A) + \mathrm{P}(B - A) \geq P(\mathrm{A}), \text{ pois } \mathrm{P}(B - A) \geq 0. \tag{2.11}$$

Como observamos no fim da seção anterior, quando o número de repetições de um experimento aleatório torna-se grande, a frequência de cada evento elementar de um espaço amostral finito se aproxima cada vez mais de um número no intervalo [0,1] que, se colocado como sendo a probabilidade do evento elementar, dá uma função de probabilidade no espaço amostral chamada de "modelo probabilístico frequencial". Outro modelo probabilístico é o "modelo equiprovável".

2.6.2 Modelo Probabilístico Equiprovável.

Seja $\Omega = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_n\}$ um espaço amostral de um experimento aleatório e P uma probabilidade em Ω. Diremos que Ω é equiprovável se todos os eventos elementares de Ω tiverem a mesma probabilidade, ou seja:

$$\mathrm{P(a_1)} = P(\mathrm{a}_2) = ... = P(\mathrm{a}_n) = \frac{1}{n}. \tag{2.12}$$

Seja $A = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_k\}, 1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$, um evento de Ω. Pelas propriedades II e III, acima apresentadas podemos escrever:

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(a_1)} + P(\mathrm{a}_2) + ... + P(\mathrm{a}_k) = k.\frac{1}{n} = \frac{k}{n}. \qquad (2.13)$$

Em outras palavras podemos definir a probabilidade de ocorrer um evento A de um espaço amostral equiprovável Ω, da seguinte forma:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\textit{Número de elementos do conjunto } A}{\textit{Número de elementos do conjunto } \Omega}. \qquad (2.14)$$

Observação:

Alguns livros costumam usar a seguinte notação:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\textit{Número de casos favoráveis}}{\textit{Número de casos possíveis}}. \qquad (2.15)$$

Exemplos:

- Um dado especial, com a forma de um icosaedro regular (poliedro regular que possui 20 faces triangulares), é lançado e observa-se a face voltada para cima.

Evento A: Sair um número primo.

n(Ω)=20 ; n(A)=8.

$P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Evento B: Não sair um número primo.

Observe que o evento B é o evento complementar de A, logo pelo teorema 2 temos:

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

- De um baralho de 52 cartas, uma carta é escolhida.

Evento A : A carta é de espada.

n(Ω)=52 ; n(A)=13.

$P = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Evento B: A carta é um ás.

n(B)=4.

$$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Evento C: A carta é um ás de espada.

n(C)=1.

$$P = \frac{1}{52}.$$

Evento D: A carta é de espada ou a carta é um ás.

Neste caso temos a probabilidade da união de dois eventos, a saber, os eventos A e B acima descritos. Observando que o evento C é a interseção dos dois eventos temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(C) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

- Em um grupo de n pessoas, qual é a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia?

<u>Solução:</u>

Chamando de Ω o espaço amostral desse evento, temos que n(Ω) = 365^n.

Seja o evento A: Todas as pessoas aniversariam em dias diferentes.

n(A)=365.364.363. ... . (365-n+1), deve-se chamar a atenção que este produto possui n fatores.

$$P(A) = \frac{365.364.363.\ ...\ .\left(366 - n\right)}{365^n}.$$

Dessa forma, a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que aniversariem no mesmo dia é o evento complementar de A, com isso a probabilidade pedida é:

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{365.364.363.\ ...\ .\left(366 - n\right)}{365^n}. \qquad (2.16)$$

TABELA 1 - Probabilidade para alguns valores de n.

N	Probabilidade (Valores aproximados)
5	2,7%
10	11,7%
15	25,3%
20	41,1%
25	56,9%
30	70,6%
35	81,4%
40	89,1%
45	94,1%
50	97%

- Uma moeda, não viciada, é lançada n vezes. Qual é a probabilidade de sair cara exatamente k , k<n, vezes?

Chamando de Ω o espaço amostral desse evento, temos que n(Ω) = 2^n.

Para sair k vezes cara, tem-se obrigatoriamente em (n-k) lançamentos coroa. Com isso a probabilidade pedida é dada por:

$$P(A) = \frac{P_n^{k;(n-k)}}{2^n} = \frac{\dfrac{n!}{k!.(n-k)!}}{2^n} = \frac{n!}{2^n.k!.(n-k)!}. \qquad (2.17)$$

2.7 **Probabilidade Condicional.**

Sejam A e B dois eventos associados a um experimento aleatório que possui um espaço amostral Ω.

A probabilidade de ocorrer o evento A dado que o evento B já ocorreu, representada por $P(A|B)$, é, por definição:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\,,P(B)>0\,. \tag{2.18}$$

<u>Observação:</u>

1. No modelo probabilístico frequencial, encontramos a motivação para a definição acima:

Considere um experimento aleatório repetido α vezes, n(A), n(B) e $n(A\cap B)$ o número de vezes que ocorrem os eventos A, B e $A\cap B$, respectivamente.

A frequência relativa de A naqueles resultados em que B ocorre, representada por $f\,(A|B)$, é $\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$. Ao dividirmos numerador e denominador da fração pelo número de repetições α, temos:

$$f(A|B)=\frac{\frac{\mathrm{n}(A\cap B)}{\alpha}}{\frac{\mathrm{n}(B)}{\alpha}}=\frac{f\,(A\cap B)}{f\,(B)}$$, onde $f(A\cap B)$ e $f(B)$ representam as frequências relativas de $A\cap B$ e B, respectivamente. (2.19)

Quando α se torna cada vez maior, $f(A\cap B)$ tende para $\mathrm{P}(A\cap B)$ assim como $f(B)$ tende para P(B). Dessa forma podemos escrever que $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P(B)>0$.

2. Pode-se calcular $\mathrm{P}(A|B)$ empregando a fórmula acima ou simplesmente calcular P(A) em relação ao espaço amostral de B.

3. Uma consequência imediata da definição de probabilidade condicional é o teorema da multiplicação de probabilidades.

$$\begin{array}{l}\mathrm{P(A}|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P\mathrm{(B)}}\rightarrow P(A\cap B)=\mathrm{P(A}|B).P\mathrm{(B)}\\ \mathrm{P(B}|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P\mathrm{(A)}}\rightarrow P(A\cap B)=\mathrm{P(B}|A).P\mathrm{(A)}\end{array}. \tag{2.20}$$

Exemplos:

- No lançamento de dois dados, determinar a probabilidade de obter soma dos pontos igual a 6, sabendo que o resultado do primeiro dado foi igual a 2.

Solução 1:

Sejam A e B os seguintes eventos:

Evento A: O primeiro dado tem como resultado 2.

Evento B : A soma dos pontos nos dois dados é igual a 6.

O evento $A \cap B$ é obter soma 6 e o primeiro dado ser igual a 2.

Calculando a probabilidade de cada evento tem-se que $P(A) = \frac{6}{36}$, $P(\mathrm{B}) = \frac{5}{36}$ e $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{36}$.

Aplicando a fórmula temos que $\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$.

Solução2:

Representando o espaço amostral por meio de uma matriz tomaremos um novo espaço amostral, que será formado por todos os elementos onde a soma dos pontos é igual a 6.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \;1\; & \;2\; & \;3\; & \;4\; & \;5\; & \;6\; \end{array} \\
\begin{bmatrix}
(1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\
(2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\
(3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\
(4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\
(5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\
(6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6)
\end{bmatrix} \end{array}$$

Observando a matriz temos que o novo espaço amostral é Ω'={(1;5); (2;4); (3;3); (4;2); (5;1)}. Podemos observar que de Ω' apenas um único elemento satisfaz a condição do problema, o primeiro dado apresentar resultado igual a 2. Sendo assim a probabilidade pedida é $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{5}$.

- Em uma cidade onde os homens totalizam 35% da população, verificou-se através de uma pesquisa que 70% dos homens e 40% das mulheres praticam algum tipo de arte marcial. Uma pessoa é selecionada ao acaso e verifica-se que é praticante de algum tipo de arte marcial. Qual a probabilidade que esta pessoa seja uma mulher?

Solução:

Considere inicialmente que se 35% da população é formada por homens, tem-se que 65% da população é formada por mulheres.

Podemos estruturar o problema através dos eventos:

Evento A: Selecionar uma pessoa praticante de algum tipo de arte marcial.

P(A) = 35%.70% + 65%.40% = 50,5%.

Evento B: Selecionar uma mulher.

P(B) = 65%.

Evento $A \cap B$: Selecionar uma mulher praticante de algum tipo de arte marcial.

$P\left(A \cap B\right) = 65\%.40\% = 26\%$.

Calculando $\mathrm{P}(\mathrm{B}|A)$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{26\%}{50,5\%} \approx 51,5\%.$$

- Problema da moeda de Bertrand.

Existem 3 caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma moeda de ouro e outra de prata, e a terceira, duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso.

Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?

Solução:

Responder esse problema é o mesmo que responder o problema: ”Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade que tenha sido escolhida da caixa 1?”

Sejam os eventos:

Evento A: A caixa sorteada é a primeira.

Evento B: A caixa sorteada é a segunda.

Evento C: A caixa sorteada é a terceira.

Evento D: A moeda sorteada é de ouro.

Calculando as probabilidades:

$P\left(A \cap D\right) = \frac{1}{3}.1 = \frac{1}{3}$.

$P\left(D\right) = P(A \cap D) + P(\mathrm{B} \cap D) + P(\mathrm{C} \cap D) = \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(\mathrm{D})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

2.8 **Eventos Independentes.**

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω. A e B serão eventos independentes se a ocorrência de um em nada afeta a ocorrência do outro, ou seja:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|B) = P(A) \text{ e } \mathrm{P}(\mathrm{B}|A) = P(\mathrm{B}). \tag{2.21}$$

Retomando o princípio multiplicativo $\mathrm{P}(\mathrm{A}|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(\mathrm{B})} \rightarrow P(A \cap B) = \mathrm{P}(\mathrm{A}|B).P(\mathrm{B})$ e substituindo a condição de independência temos que $P(A \cap B) = \mathrm{P}(\mathrm{A}).P(\mathrm{B})$. (2.22)

A expressão (2.22) motiva a definição da independência de n eventos, a saber: n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \quad n \geq 2,$ são independentes quando

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\ldots P\left(A_{i_r}\right) \tag{2.23}$$

para qualquer $\{i_1, i_2,\ldots,i_r\} \subset \{1, 2,\ldots,n\}$, ou seja, quando a probabilidade da interseção de quaisquer eventos entre os $A_1, A_2,\ldots, A_n$ é igual ao produto das probabilidades dos eventos entre os $A_1, A_2,\ldots, A_n$ que aparecem na interseção.

Exemplos:

- Um dado é lançado 8 vezes. Qual a probabilidade de que a face "1"apareça pelo menos uma vez?

Solução:

Lembrando que $\mathrm{P(A)} = 1 - \mathrm{P(A^c)}$ e definindo o evento A : O número 1 aparece pelo menos uma vez nos 8 lançamentos, temos o Evento A^c: O número 1 não aparece em nenhum lançamento.

Note que calcular $\mathrm{P(A^c)}$ é bem mais fácil que calcular P(A) diretamente.

Observe ainda que A^c é a interseção de eventos independentes, com isso temos que $\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^8$, logo $\mathrm{P(A)} = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8$.

- Uma moeda, não viciada, é lançada n vezes. Qual a probabilidade de se obter cara nos n lançamentos?

Solução:

Considere os eventos:

A_1: Ocorrer cara no primeiro lançamento;

A_2: Ocorrer cara no segundo lançamento;

A_3: Ocorrer cara no terceiro lançamento;

.

.

.

A_n: Ocorrer cara no n-ésimo lançamento;

Como os eventos são independente e $\mathrm{P(A_1)} = \mathrm{P(A_2)} = \mathrm{P(A_3)} = \ldots = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \frac{1}{2}$, temos que $P(\mathrm{A_1} \cap \mathrm{A_2} \cap \ldots \cap \mathrm{A}_n) = \mathrm{P(A_1)}.P(\mathrm{A_2}).....P(\mathrm{A}_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- (Vestibular UERJ 2008 – Primeiro exame de Qualificação - Questão 32)

Um RNA sintético foi formado apenas pelas bases citosina e guanina, dispostas ao acaso, num total de 21 bases. O esquema abaixo mostra o RNA mensageiro, formado a partir da introdução dos códons de iniciação AUG e de terminação UAA nas extremidades do RNA original.

AUG. BBB. BBB. BBB. BBB. BBB. BBB. BBB. UAA

Nesse esquema, B representa as bases C ou G. Sabe-se que:

– os códons correspondentes ao aminoácido arginina são: AGA, AGG, CGA, CGC, CGG e CGU;

– o aminoácido metionina correspondente ao códon de iniciação AUG é removido do peptídeo sintetizado pela tradução desse RNA mensageiro. A probabilidade de que a arginina apareça pelo menos uma vez na estrutura final deste peptídeo é de:

(A) $1-\left(\frac{1}{3}\right)^7$ (B) $1-\left(\frac{1}{8}\right)^7$ (C) $1-\left(\frac{3}{4}\right)^7$ (D) $1-\left(\frac{1}{4}\right)^7$

<u>Solução:</u>

Dos sete códons formados com a letra B, espera-se que apareça pelo menos C ou G em alguma dessas letras. Observe que temos as seguintes possibilidades de códons: CCC, CCG, CGC, GCC, GGG, GGC, GCG, CGG. Destes, os que representam o aminoácido arginina são: CGC e CGG. Dessa forma, a probabilidade de sair arginina em um trio é $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ e de não sair é $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Sendo assim, pode-se considerar que a probabilidade de sair pelo menos uma arginina é a probabilidade complementar de não sair nenhuma nos sete trios:

$$P(\text{não sair arginina}) = \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^7.$$

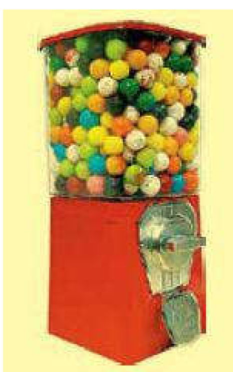
$$P(\overline{\text{não sair arginina}}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^7.$$

Letra C.

- (UERJ Vestibular 2010/2011 – Segundo exame de Qualificação - Questão 33)

Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso.

Observe a ilustração:



Inserindo-se 3 moedas, uma de cada vez, a probabilidade de que a máquina libere 3 bolas, sendo apenas duas delas brancas, é aproximadamente de:

(A) 0,008 (B) 0,025 (C) 0,040 (D) 0,072

<u>Solução:</u>

Inicialmente devemos observar que o espaço amostral deste experimento é equiprovável e os eventos são independentes, com isso temos:

Probabilidade da primeira bola que sair ser de cor branca: $P_{B1} = \frac{10}{100}$.

Probabilidade da segunda bola que sair ser de cor branca: $P_{B2} = \frac{9}{99}$.

Probabilidade da terceira bola que sair ser de uma cor diferente da cor branca dado que as duas anteriores foram brancas: $P_{B3} = \frac{90}{98}$.

No entanto, as bolas podem sair em qualquer uma das três ordens: BBX, BXB, XBB, onde B significa sair bola de cor branca e X sair bola de cor não branca.

Finalmente temos:

$$P = 3.\frac{10}{100}.\frac{9}{99}.\frac{90}{98} \approx 0,025 .$$

Letra B.

Observamos que, no caso de espaços amostrais infinitos, podemos de uma maneira natural associar probabilidades a eventos que satisfaçam a uma dada restrição como no exemplo a seguir: numa região R do plano escolhe-se um ponto ao acaso e observa-se se ele pertence ao subconjunto A de R. É razoável supor que P(A) (probabilidade do ponto escolhido está em A) é proporcional a área de A; ou seja, P(A)=k S(A) sendo S(A) a área de A. Como P(R)=1, concluímos k=1/S(R). Observe que só atribuímos probabilidade aos eventos representados por subconjuntos de R que tem área definida sendo essa a nossa restrição. Assim, se A não tem área definida então não há probabilidade associada a A. Observe também que se A é finito então P(A)=0 já que um conjunto finito tem área zero e, como observamos anteriormente, com espaços amostrais infinitos um evento não vazio pode ter probabilidade zero.

<u>Exemplo:</u>

Dado um quadrado de vértices (0;0) ; (1;0); (0;1); (1;1). Determinar a probabilidade de escolhido um dado ponto P(x;y), ao acaso no quadrado, P satisfazer $0 \leq x+y \leq 1/2$.

Solução:

Para que P satisfaça a condição imposta, basta que pertença a região solução da inequação simultânea 0 $\leq$x+y$\leq$1/2.

$$\begin{aligned} 0 \leq x + y \rightarrow y \geq -x \\ x + y \leq 1/2 \rightarrow y \leq -x + 1/2 \end{aligned}.$$

A região que satisfaz a inequação é o triângulo de vértices (0;0); (1/2;0) e (0;1/2) cuja área é 1/8.

Com isso a probabilidade é dada por:

$$p = \frac{Medida\,da\,área\,do\,triângulo}{Medida\,da\,área\,do\,quadrado} = \frac{1/8}{1} = \frac{1}{8}.$$

3 **LOTERIAS – REGRAS DOS JOGOS**

A Caixa Econômica Federal é a instituição financeira responsável pela gestão e regulamentação dos jogos de lotarias no Brasil. Essa dissertação focará na MEGA – SENA. No entanto, para efeito de informação abordaremos as regras e algumas curiosidades sobre outros jogos, a saber: TIMEMANIA; QUINA; LOTOMANIA; DUPLA SENA; LOTECA; LOTOGOL e LOTOFÁCIL.

A modalidade de jogo conhecida como “Bolão”, jogo onde o apostador adquire uma ou mais cotas de um mesmo jogo, foi regulamentada pela Caixa Econômica em setembro de 2012. Participam de “Bolões” os seguintes produtos oferecidos pela Caixa: MEGA – SENA; QUINA; DUPLA SENA; LOTECA e LOTOFÁCIL (apostas de 16, 17 ou 18 números).

Cada “Bolão” deverá conter apostas referentes a uma única modalidade de jogo por vez e cada cota de um “Bolão” tem a mesma chance de ser contemplada. Dessa forma cada cota custa a mesma quantia.

Apenas os clientes maiores de 18 anos podem organizar diretamente seus próprios bolões ou participar, mediante compra de cotas, de bolões organizados pelas casas lotéricas. Neste último caso, a Casa Lotérica poderá cobrar um valor de até 35% como taxa de administração, denominado taxa de serviço (TS).

O pagamento, em caso de bolão premiado, é realizado de forma individual por recibo de cota.

O pagamento de premiações de Bolões CAIXA será realizado em casas lotéricas quando a premiação total devido ao Bolão for menor ou igual a R$ 1.710,78, ou em Agências da CAIXA quando a premiação total devida ao Bolão for maior do que R$ 1.710,78.

Vamos agora descrever as regras de cada um dos jogos citados acima.

3.1 **MEGA - SENA**

A MEGA - SENA é o jogo de loteria mais popular no Brasil. Toda essa popularidade vem do fato de ser o jogo que paga o maior prêmio, entre todos os jogos, para o acertador. Cabe fazer uma ressalva, é o jogo com menor chance de acerto.

O apostador deve escolher de 6 a 15 números num total de 60 disponíveis e numerados de 1 a 60. Ganha quem acertar os 6 números sorteados. Mas quem acerta 4 ou 5 números também ganha.

O apostador pode deixar que o sistema escolha os números (Surpresinha) e/ou concorrer com a mesma aposta por 2, 4 ou 8 concursos consecutivos (Teimosinha).

No caso da MEGA - SENA, os bolões têm preço mínimo de R$ 10,00, cada cota não pode ser inferior a R$ 4,00, sendo possível realizar um bolão de no mínimo 2 e no máximo 100 cotas.

Os sorteios da MEGA - SENA são realizados duas vezes por semana, as quartas e aos sábados. A aposta mínima, de 6 números, custa R$ 3,50. Quanto mais números marcar, maior o preço da aposta e maiores as chances de faturar o prêmio mais cobiçado do país.

O prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem:

- 35% são distribuídos entre os acertadores dos 6 números sorteados (Sena);
- 19% entre os acertadores de 5 números (Quina);
- 19% entre os acertadores de 4 números (Quadra);
- 22% ficam acumulados e distribuídos aos acertadores dos 6 números nos concursos de final 0 ou 5.
- 5% ficam acumulado para a primeira faixa - sena - do último concurso do ano de final zero ou 5.

Não havendo acertador em qualquer faixa, o valor acumula para o concurso seguinte, na respectiva faixa de premiação.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

3.1.1 Mega da Virada - Concurso Especial de Fim de Ano da MEGA - SENA.

O último concurso da MEGA - SENA de final 0 ou 5 de cada ano civil, que tem a denominação comercial MEGA DA VIRADA e obedece às seguintes regras:

I. Prazo de comercialização:

Durante os meses de novembro e dezembro com captação de apostas independente e concomitante com os demais concursos da modalidade, utilizando-se de volantes específicos (a CAIXA informará com antecedência a data do início das vendas e o número do concurso da MEGA DA VIRADA que será sorteado no dia 31/12).

II. Distribuição do valor destinado ao pagamento dos prêmios:

- 62% - primeira faixa - seis acertos (sena).
- 19% - segunda faixa - cinco acertos (quina).
- 19% - terceira faixa - quatro acertos (quadra).

III. Composição da primeira faixa de premiação (sena):

- 62% do percentual destinado a prêmios, de acordo com a arrecadação do respectivo concurso;
- O total acumulado para o último concurso de final zero ou cinco do ano civil;
- O total acumulado para o concurso de final zero ou cinco;
- O total acumulado na primeira faixa (sena) do concurso anterior, quando houver.

IV. Critério de acumulação:

- Não existindo apostas premiadas com seis números (sena), o prêmio será rateado entre os acertadores de cinco números (quina);

- Não existindo apostas premiadas com seis e cinco números, o prêmio será rateado entre os acertadores de quatro números (quadra);
- Não existindo apostas premiadas em quaisquer faixas de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, nas respectivas faixas.

3.1.2 Curiosidades

TABELA 2 - As dez dezenas mais e menos sorteadas.

Dezenas mais sorteadas	Frequencia Absoluta	Dezenas menos sorteadas	Frequencia Absoluta
05	202	48	156
51	198	14	155
04	195	15	153
33	193	39	153
53	192	25	151
24	190	21	150
42	189	09	149
23	188	55	148
54	188	22	140
17	186	26	140

Fonte:(http://www.guiadaloteria.com.br/estatistica-dezenas-mais-sorteadas-da-mega-sena.html)
Consulta realizada dia 22/07/2015.

Obs.: Os dados da tabela acima podem mudar a cada sorteio.

TABELA 3 - Os 10 maiores prêmios da história da MEGA – SENA.

Valor Total do Prêmio	Data do sorteio e número do concurso	Número de ganhadores
R$244.794.099,16	31/12/2012 – 1455 (Mega da Virada)	3
R$ 224.677.860,08	31/12/2013 – 1560 (Mega da Virada)	4
R$ 194.395.200,04	31/12/2010 – 1245 (Mega da Virada)	4
R$ 177.617.487,60	31/12/2011 – 1350 (Mega da Virada)	5
R$144.901.494,92	31/12/2009 – 1140 (Mega da Virada)	2
R$ 119.142.144,27	06/10/2010 - 1220	1
R$ 111.503.902,49	19/02/2014 - 1575	1
R$ 92.522.954,23	04/09/2010 - 1211	7
R$ 80.499.108,16	06/11/2013 - 1545	1
R$ 73.451.540,26	25/06/2011 - 1295	1

Fonte: (http://g1.globo.com/loterias/noticias/2014/11/mega-sena-sorteia-r-135-mi-neste-sabado-veja-os-dez-meiores-premios.html)

Consulta realizada dia 22/07/2015.

Obs.: Os dados da tabela acima podem mudar a cada sorteio

TABELA 4 - Probabilidade de acerto.

Quantidade de Números Jogados	Valor da Aposta	Probabilidade de acerto (1 em)		
		Sena	Quina	Quadra
6	R$ 3,50	50.063.860	154.518	2.332
7	R$ 24,50	7.151.980	44.981	1.038
8	R$ 98,00	1.787.995	17.192	539
9	R$ 294,00	595.998	7.791	312
10	R$ 735,00	238.399	3.973	195
11	R$ 1.617,00	108.363	2.211	129
12	R$ 3234,00	54.182	1.317	90
13	R$ 6006,00	29.175	828	65
14	R$ 10510,50	16.671	544	48
15	R$ 17517,50	10.003	370	37

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbwMPI0sDBxNXAOMwrzCjA0sjIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wNnUwNHfxcnSwBgIDUyhCvA5EawAjxsKckMjDDI9FQE-F4ca/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015.

TABELA 5 - Quantidade de Prêmios a Receber Acertando 6, 5 ou 4 números.

Apostas	6 Números			5 Números		4 Números
Quantidade de Números Jogados	Sena	Quina	Quadra	Quina	Quadra	Quadra
6	1	0	0	1	0	1
7	1	6	0	2	5	3
8	1	12	15	3	15	6
9	1	18	45	4	30	10
10	1	24	90	5	50	15
11	1	30	150	6	75	21
12	1	36	225	7	105	28
13	1	42	315	8	140	36
14	1	48	420	9	180	45
15	1	54	540	10	225	55

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbwMPI0sDBxNXAOMwrzCjA0sjIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wNnUwNHfxcnSwBgIDUyhCvA5EawAjxsKckMjDDI9FQE-F4ca/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015.

Observação:

Como é feito o cálculo da quantidade de prêmio a receber acertando 6, 5 ou 4 números?

Esses prêmios são pagos em função da quantidade números jogados.

Vejamos alguns exemplos:

Apostando 6 números.

O Jogador concorre com $C_6^6 = 1$ jogo, logo ele receberá uma sena se acertar os seis números, ou uma quina caso acerte cinco números ou então uma quadra se acertar quatro números.

Apostando 7 números.

O jogador concorre com $C_7^6 = 7$ jogos, nesse caso para ficar mais fácil a compreensão montaremos uma tabela.

Suponha sem perda de generalidade que o apostador escolha os números 1,2,3,4,5,6 e 7.

Observe a tabela abaixo, nela estão todos os sete jogos com os quais o jogador concorre.

1	1	1	1	1	1	7
2	2	2	2	2	7	2
3	3	3	3	7	3	3
4	4	4	7	4	4	4
5	5	7	5	5	5	5
6	7	6	6	6	6	6

Acertando seis números:

Se os números sorteados forem 1,2,3,4,5 e 6 o jogador receberá uma sena, seis quinas e nenhuma quadra. A sena está representada na primeira coluna da tabela e as 6 quinas estão representadas nas colunas de 2 a 7. Observe que o número 7 entra na posição de cada um dos números de 1 a 6 gerando as quinas que devem ser premiadas.

Acertando cinco números:

Suponha sem perda de generalidade que os números sorteados sejam 1,2,3,4,5,k, sendo $k \notin \{1,2,3,4,5,6,7\}$,o apostador não receberá nenhuma sena, receberá duas quinas (ver colunas 1 e 2) e cinco quadras (ver colunas 3 a 7).

Acertando quatro números:

Suponha sem perda de generalidade que os números sorteados sejam 1,2,3,4,k,t, sendo $k,t \notin \{1,2,3,4,5,6,7\}$, o apostador não receberá sena nem quinas e receberá três quadras (ver colunas 1,2 e3).

Apostando 8 números.

O jogador concorre com $C_8^6 = 28$ jogos. Vamos supor que o apostador escolha os números 1,2,3,4,5,6,7 e 8.

Acertando seis números:

Suponha sem perda de generalidade que os números sorteados sejam 1,2,3,4,5 e 6, com isso o apostador receberá uma sena, $2.C_6^1 = 2.6 = 12$ quinas e $C_6^2 = 15$ quadras.

No caso da quina, o 7 pode ocupar o lugar de qualquer um dos seis números de 1 a 6 formando assim quinas, o mesmo para o 8.

No caso da quadra, o 7 e o 8 devem ocupar o lugar de dois dos seis números de 1 a 6, formando assim as quadras.

Acertando cinco números:

Suponha sem perda de generalidade que os números sorteados sejam 1,2,3,4,5,k, sendo $k \notin \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, o apostador não receberá nenhuma sena, receberá três quinas [(1,2,3,4,5,k);(1,2,3,4,5,7);(1,2,3,4,5,8)] e $3.C_5^1 = 3.5 = 15$ quadras.

No caso da quadra, o 6 pode ocupar o lugar de qualquer um dos cincos números de 1 a 5, formando assim quadras, o mesmo ocorre para o 7 e o 8.

Acertando quatro números:

Suponha sem perda de generalidade que os números sorteados sejam 1,2,3,4,k,t, sendo $k \notin \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, o jogador não receberá senas e quinas e receberá 2.3=6 quadras, isso é justificado pelo fato de 6 poder ocupar a posição ocupada pelo número k ou pelo número t, o mesmo ocorre para os números 7 e 8.

Para as demais apostas, de 9 a 15 números, pode-se usar o mesmo raciocínio utilizado para a aposta de 8 números.

FIGURA 2- Réplica do volante da MEGA – SENA.

Fonte:(https://www.google.com.br/search?q=volante+da+mega+sena&biw=1280&bih=705&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&sqi=2&ved=0CBwQsARqFQoTCK6o8NDL78YCFQOfgAodTisMxw#imgrc=aK41BkbnIng4NM%3A)

Consulta realizada dia 22/07/2015

3.2 **TIMEMANIA**

Num total de 80 números e 80 times de futebol o apostador deve escolher 10 números e um time de coração. O apostador pode deixar que o sistema faça a escolha por ele (Surpresinha) e/ ou continuar com seu jogo por 2 ou 4 concursos consecutivos (Teimosinha). Os sorteios da TIMEMANIA são realizados às terças, quintas e sábados, a partir das 20:00h.

O apostador ganha se tiver de três a sete acertos dos 7 números sorteados ou se acertar o Time do Coração. O valor da aposta é R$ 2,00 e o prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação. Dessa porcentagem, será deduzido o pagamento dos prêmios com valores fixos:

- R$ 5,00 para as apostas com o Time do Coração sorteado.
- R$ 2,00 para as apostas com 3 números sorteados;
- R$ 6,00 para as apostas com 4 números sorteados;

Somente após a apuração dos ganhadores dos prêmios com valores fixos, os valores restantes do total destinado à premiação serão distribuídos para as demais faixas de prêmio com os seguintes percentuais:

- 50% para os acertadores dos sete números;
- 20% entre os acertadores dos seis números;
- 20% para os acertadores de cinco números;
- 10% restantes são acumulados e distribuídos aos acertadores dos 7 números nos concursos de final 0 ou 5.

Não havendo acertador, o prêmio acumula para o concurso seguinte, na faixa de prêmios com 7 acertos.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

TABELA 6 – Probabilidade de acertos.

Faixas	Quantidade de placares acertados	Probabilidade de acerto (1 em)
	7	26.472.637
	6	216.103
	5	5.220
	4	276
	3	29
Time do coração	Um clube de futebol	80

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/timemania/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA1MzIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VASrq9qk!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

3.2.1 Curiosidade

TABELA 7 – Colocação dos Times – Acumulado até o concurso 750 – 14/07/2015.

Colocação	Clube	UF	Total	%Total
1º	FLAMENGO	Rj	4.105.794	5,21%
2 º	CORINTHIANS	SP	3.617.822	4,59%
3 º	SANTOS	SP	2.763.285	3,51%
4 º	SAO PAULO	SP	2.715.271	3,45%
5 º	PALMEIRAS	SP	2.529.435	3,21%
6 º	GREMIO	RS	2.402.657	3,05%
7 º	VASCO DA GAMA	RJ	2.199.505	2,79%
8 º	INTERNACIONAL	RS	2.097.190	2,66%
9 º	CRUZEIRO	MG	1.943.180	2,47%
10 º	BOTAFOGO	RJ	1.940.515	2,46%
11 º	ATLETICO	MG	1.778.511	2,26%
12 º	BAHIA	BA	1.733.597	2,20%
13 º	FLUMINENSE	RJ	1.716.968	2,18%
14 º	FORTALEZA	CE	1.513.361	1,92%
15 º	GOIAS	GO	1.311.236	1,66%
16 º	VITORIA	BA	1.137.462	1,44%
17 º	CEARA	CE	1.059.063	1,34%
18 º	ATLETICO	PR	1.054.859	1,34%
19 º	ABC	RN	1.043.649	1,32%
20 º	SANTA CRUZ	PE	1.023.868	1,30%
21 º	AVAI	SC	991.008	1,26%
22 º	CORITIBA	PR	918.580	1,17%
23 º	TREZE	PB	907.739	1,15%

24 º	SPORT	PE	901.961	1,14%
25 º	LONDRINA	PR	861.522	1,09%
26 º	ATLETICO	GO	849.061	1,08%
27 º	GUARANI	SP	845.367	1,07%
28 º	JOINVILLE	SC	828.809	1,05%
29 º	REMO	PA	807.625	1,02%
30 º	GAMA	DF	805.003	1,02%
31 º	ITUANO	SP	799.193	1,01%
32 º	RIVER	PI	775.213	0,98%
33 º	IPATINGA	MG	769.937	0,98%
34 º	JUVENTUDE	RS	762.202	0,97%
35 º	BANGU	RJ	741.776	0,94%
36 º	NAUTICO	PE	724.887	0,92%
37 º	MIXTO	MT	715.289	0,91%
38 º	AMERICA	RJ	710.695	0,90%
39 º	BOTAFOGO	PB	709.153	0,90%
40 º	AMERICA	MG	708.558	0,90%
41 º	MOTO CLUBE	MA	702.351	0,89%
42 º	PONTE PRETA	SP	698.508	0,89%
43 º	MARILIA	SP	693.631	0,88%
44 º	INTER LIMEIRA	SP	692.218	0,88%
45 º	PORT DESPORT	SP	690.651	0,88%
46 º	AMERICA	RN	689.580	0,88%
47 º	PAYSANDU	PA	665.068	0,84%
48 º	SAO CAETANO	SP	662.674	0,84%
49 º	SAMP CORREA	MA	654.109	0,83%
50 º	FIGUEIRENSE	SC	649.971	0,82%
51 º	PALMAS	TO	649.830	0,82%
52 º	JUVENTUS	SP	636.216	0,81%
53 º	JI-PARANA	RO	634.913	0,81%
54 º	SANTO ANDRE	SP	631.551	0,80%
55 º	PARANA	PR	625.066	0,79%

56 º	BRAGANTINO	SP	620.941	0,79%
57 º	VILA NOVA	GO	619.014	0,79%
58 º	BRASILIENSE	DF	615.924	0,78%
59 º	BARUERI	SP	595.316	0,76%
60 º	SERGIPE	SE	592.366	0,75%
61 º	CRICIUMA	SC	579.496	0,74%
62 º	AMERICANO	RJ	578.550	0,73%
63 º	CRB	AL	567.832	0,72%
64 º	RIO BRANCO	ES	541.798	0,69%
65 º	OLARIA	RJ	533.062	0,68%
66 º	S RAIMUNDO	AM	532.489	0,68%
67 º	TUNA LUSO	PA	528.444	0,67%
68 º	NACIONAL	AM	528.262	0,67%
69 º	YPIRANGA	AP	519.530	0,66%
70 º	RIO BRANCO	AC	509.936	0,65%
71 º	UBERLANDIA	MG	507.350	0,64%
72 º	RORAIMA	RR	502.107	0,64%
73 º	CSA	AL	500.520	0,64%
74 º	OPERARIO	MS	482.280	0,61%
75 º	UNIAO S JOAO	SP	459.731	0,58%
76 º	XV PIRACICABA	SP	445.475	0,57%
77 º	DESPORTIVA	ES	435.246	0,55%
78 º	PAULISTA	SP	423.668	0,54%
79 º	VILLA NOVA	MG	398.901	0,51%
80 º	U BARBARENSE	SP	379.016	0,48%

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/timemania/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA1MzIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VASrq9qk!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

FIGURA 3- Réplica do volante do TIME MANIA.

3.3 **QUINA**

O apostador aposta em 5, 6 ou 7 números, entre os 80 disponíveis. São 6 sorteios semanais: de segunda-feira a sábado, às 20h, ganha quem acertar 3, 4 ou 5 números. O apostador pode optar por deixar o sistema escolhe os números (Surpresinha), e/ou também pode concorrer com a mesma aposta por

3, 6, 12, 18 ou 24 concursos consecutivos (Teimosinha). Importante observar que na Quina, em cada aposta premiada, será pago apenas uma faixa de premiação, ou seja, a de maior quantidade de acerto.

O Bolão CAIXA é a possibilidade que o apostador tem de realizar apostas e dividir com seus amigos ou familiares em várias cotas/frações, bastando preencher o campo próprio no volante ou solicitar diretamente ao atendente da lotérica.

No caso da QUINA, os bolões têm preço mínimo de R$ 10,00, cada cota não pode ser inferior a R$ 3,00, sendo possível realizar um bolão de no mínimo 2 e no máximo 25 cotas.

O apostador também pode comprar cotas de bolões organizados pelas Unidades Lotéricas. Neste caso poderá ser cobrada uma Tarifa de Serviço adicional de até 35% do valor da cota.

O preço da aposta com 5 números é de R$ 1,50, mas o apostador pode pagar R$ 7,50 e concorrer com 6 números ou pagar R$ 20,00 e concorrer com 7 números.

O valor destinado ao pagamento dos prêmios de concursos regulares tem a seguinte distribuição:

- 35% rateados entre as apostas que contiverem 5 prognósticos certos - quina;
- 25% rateados entre as apostas que contiverem 4 prognósticos certos - quadra;
- 25% rateados entre as apostas que contiverem 3 prognósticos certos - terno.
- 15% ficam acumulados para a 1ª faixa - quina - do concurso especial do dia 24 de junho de cada ano.

O valor destinado ao pagamento dos prêmios do concurso especial do dia 24 de junho, de cada ano, chamado de Quina de São João, tem a seguinte distribuição:

- 50% rateados entre as apostas que contiverem 5 prognósticos certos - quina;
- 25% rateados entre as apostas que contiverem 4 prognósticos certos - quadra;

- 25% rateados entre as apostas que contiverem 3 prognósticos certos - terno.

1ª faixa de premiação - quina - no concurso especial, tem a seguinte composição:

- 50% do valor destinado a prêmios;
- Total acumulado para o concurso especial do dia 24 de junho;
- Total acumulado do concurso anterior, quando houver.

Não existindo aposta premiada, em concurso regular, na 1ª, 2ª ou 3ª faixa(s), o(s) valor(es) acumula(m) para o concurso seguinte, na 1ª faixa de premiação.

No concurso especial do dia 24 de junho de cada ano, a regra de acumulação segue o seguinte critério:

- Não existindo aposta premiada na 1ª faixa - quina, este valor será somado ao valor da 2ª faixa e rateado entre as apostas que contiverem 4 prognósticos certos - quadra;
- Não existindo apostas premiadas na 1ª faixa - quina e na 2ª faixa - quadra, os valores destinados a prêmios para estas faixas serão somados ao valor da 3ª faixa, e rateados entre as apostas que contiverem 3 prognósticos certos - terno;
- Não existindo apostas premiadas em quaisquer faixas de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, na 1ª faixa de premiação.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

TABELA 8: Probabilidade de acerto.

Quantidade de números jogados	Valor da aposta	Probabilidade de acerto (1 em) Quina	Quadra	Terno
5	R$ 1,50	24.040.016	64.106	866
6	R$ 7,50	4.006.669	21.657	445
7	R$ 20,00	1.144.762	9.409	261

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/quina/!ut/p/a1/jc69DoIwAATgZ_EJepS2wFgoaUswsojYxXQyTfgbjM9vNS4Oordd8I1yxJGBuNnfw9XfwjL78dmduIikhYFGA0tzSFZ3tG_6FCmP4BxBpaVhWQuA5RRWIUZIxR6w4r89vkTi1_5E3CfRXcUhD6osEAHA32Dr4gtsfFin44Bgdw9WWSwj/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

3.3.1 Concurso Especial

O Concurso Especial da QUINA tem a denominação comercial QUINA DE SÃO JOÃO e é realizado sempre dia 24 de junho de cada ano civil, exceto quando a data cair no domingo.

O Concurso Especial da QUINA obedecerá às seguintes regras:

✓ Distribuição do valor destinado ao pagamento dos prêmios:

- 1ª faixa - 50% rateados entre as apostas que contiverem 5 prognósticos certos - quina;
- 2ª faixa - 25% rateados entre as apostas que contiverem 4 prognósticos certos - quadra;
- 3ª faixa - 25% rateados entre as apostas que contiverem 3 prognósticos certos - terno.

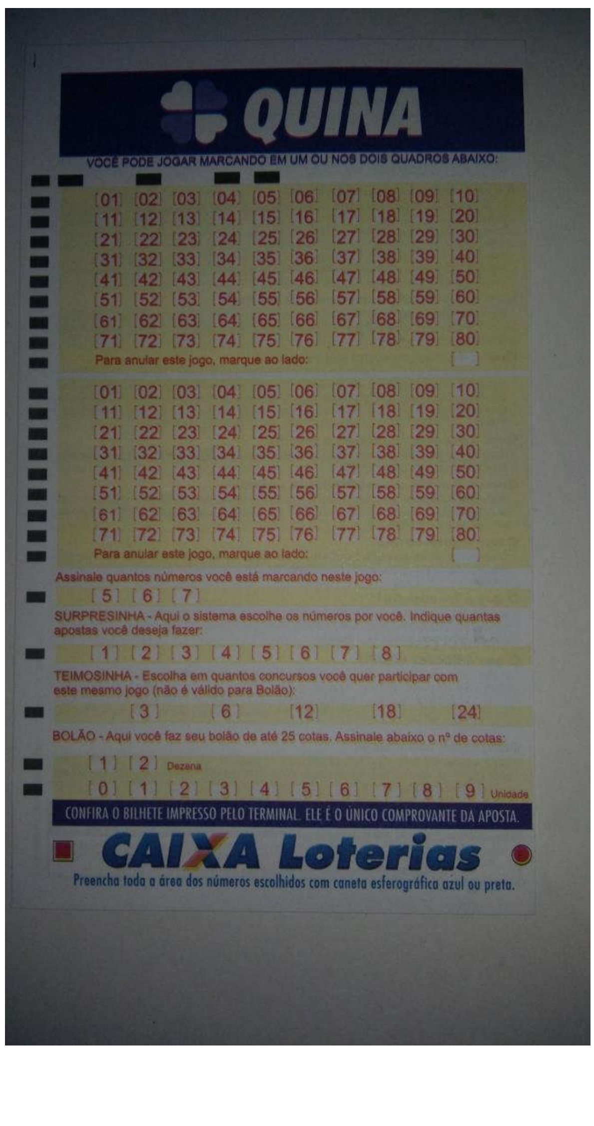
✓ Composição da primeira faixa de premiação:

- 50% do valor destinado a prêmios;
- Total acumulado para o concurso especial do dia 24 de junho;
- Total acumulado do concurso anterior, quando houver.

✓ Critério de acumulação:

- Não existindo aposta premiada na 1ª faixa - quina, este valor será somado ao valor da 2ª faixa e rateado entre as apostas que contiverem 4 prognósticos certos - quadra.
- Não existindo apostas premiadas na 1ª faixa - quina e na 2ª faixa - quadra, os valores destinados a prêmios para estas faixas serão somados ao valor da 3ª faixa, e rateados entre as apostas que contiverem 3 prognósticos certos - terno.
- Não existindo apostas premiadas nas três faixas de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, na 1ª faixa de premiação.

FIGURA 4- Réplica do volante da QUINA.



3.4 **LOTOMANIA**

O apostador escolhe 50 números **e ganha se acertar 16, 17, 18, 19, 20 ou nenhum número.** Além de marcar no volante, o apostador conta com outras formas de jogar, a saber: apostar uma quantidade inferior a 50 números e deixar que o sistema complete o jogo; não marcar nada e deixar que o sistema escolha todos os números (Surpresinha) e/ou concorrer com a mesma aposta por 2, 4 ou 8 concursos consecutivos (Teimosinha).

O apostador pode ainda efetuar uma nova aposta com o sistema selecionando os outros 50 números não registrados no jogo original (Aposta-Espelho).

O preço da aposta é único e custa apenas R$ 1,50. Os sorteios são realizados às quartas-feiras e aos sábados, às 20h. O prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte.

Dessa porcentagem são distribuídos:

- 28% entre os acertadores dos 20 números sorteados - 1ª faixa;
- 16% entre os acertadores de 19 dos 20 números sorteados - 2ª faixa;
- 16% entre os acertadores de 18 dos 20 números sorteados - 3ª faixa;
- 7% entre os acertadores de 17 dos 20 números sorteados - 4ª faixa;
- 7% entre os acertadores de 16 dos 20 números sorteados - 5ª faixa;
- 8% entre os acertadores de nenhum dos 20 números sorteados - 6ª faixa;
- 18% ficam acumulados para a primeira faixa (20 acertos) do concurso especial da LOTOMANIA de Páscoa.

Não existindo aposta premiada na 6ª faixa (0 acerto), o prêmio acumula para o concurso subseqüente, na 1ª faixa de premiação (20 acertos). Nas demais faixas, o prêmio acumula na respectiva faixa de premiação.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao Tesouro Nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

O valor destinado ao pagamento dos prêmios do concurso especial da LOTOMANIA de Páscoa tem a seguinte distribuição:

- 1ª faixa - 46% rateados entre as apostas que contiverem 20 prognósticos certos;
- 2ª faixa - 16% rateados entre as apostas que contiverem 19 prognósticos certos;
- 3ª faixa - 16% rateados entre as apostas que contiverem 18 prognósticos certos;
- 4ª faixa - 7% rateados entre as apostas que contiverem 17 prognósticos certos;
- 5ª faixa - 7% rateados entre as apostas que contiverem 16 prognósticos certos;
- 6ª faixa - 8% rateados entre as apostas que não contiverem nenhum dos 20 números sorteados.

A 1ª faixa de premiação no concurso especial da LOTOMANIA de Páscoa tem a seguinte composição:

- 46% do percentual destinado a prêmios, de acordo com a arrecadação do respectivo concurso;
- Total acumulado para o Concurso Especial;
- O prêmio acumulado da sexta faixa do concurso anterior (0 acerto), quando houver;
- O total acumulado do concurso anterior da primeira faixa (20 acertos), quando houver.

O resultado dos sorteios é divulgado no site da CAIXA na internet, e nas casas lotéricas de todo o território nacional.

TABELA 9: Probabilidade de acerto.

Faixas	Probabilidade (1 em)
20 números	11.372.635
19 números	352.551
18 números	24.235
17 números	2.776
16 números	472
00 números	11.372.635

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotomania/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA38jYEKloEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAajYsZo!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

3.4.1.Concurso Especial

O concurso Especial realizado no sábado, véspera do domingo de Páscoa de cada ano civil, que tem a denominação comercial - LOTOMANIA DE PÁSCOA - obedecerá às seguintes regras:

✓ Prazo de comercialização:

Durante 30 dias com captação de apostas independente e concomitante com os demais concursos da modalidade, utilizando-se de volantes específicos (a CAIXA informará com antecedência a data do início das vendas e o número do concurso Especial).

✓ Distribuição do valor destinado ao pagamento dos prêmios:

- 46% - primeira faixa - 20 acertos;
- 16% - segunda faixa - 19 acertos;
- 16% - terceira faixa - 18 acertos;
- 7% - quarta faixa - 17 acertos;
- 7% - quinta faixa - 16 acertos;
- 8% - sexta faixa - 0 acerto.

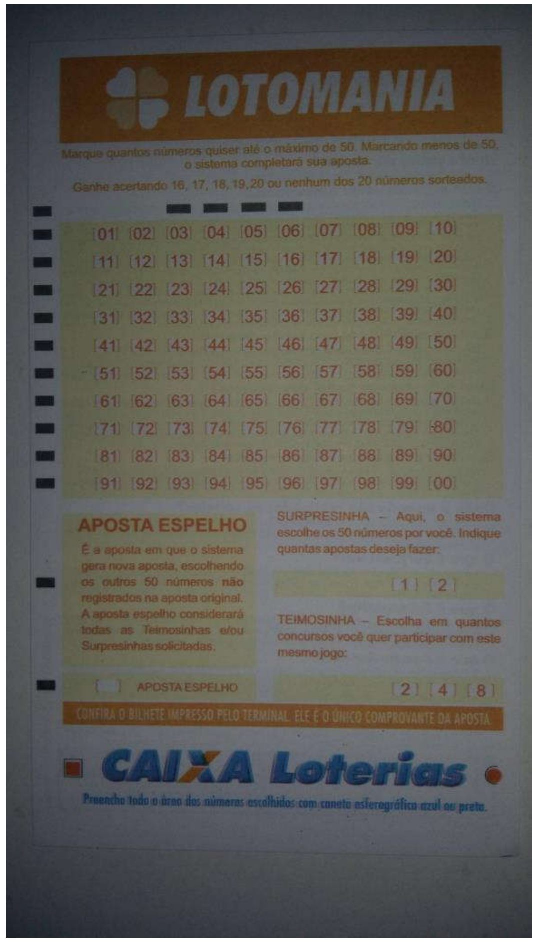
✓ Composição da primeira faixa de premiação (20 acertos):

- 46% do percentual destinado a prêmios, de acordo com a arrecadação do respectivo concurso;
- O total acumulado para o Concurso Especial;
- O prêmio acumulado da sexta faixa do concurso anterior (0 acerto), quando houver;
- O total acumulado do concurso anterior da primeira faixa (20 acertos), quando houver.

✓ Critério de acumulação:

- Não existindo apostas premiadas na 1ª faixa (20 acertos), o valor destinado a prêmio para esta faixa será somado ao valor da 2ª faixa (19 acertos);
- Não existindo apostas premiadas nas duas primeiras faixas (20 e 19 acertos), os valores destinados aos prêmios para estas faixas serão somados ao valor da 3ª faixa e rateados entre as apostas que contiverem 18 prognósticos certos, e assim sucessivamente, até a 5ª faixa (16 acertos).
- Não existindo apostas premiadas em nenhuma faixa de premiação, os valores acumulam nas respectivas faixas, à exceção de nenhum acerto, que acumula para a primeira faixa, no próximo sorteio.

FIGURA 5- Réplica do volante da LOTOMANIA.



3.5 **DUPLA SENA**

Na DUPLA SENA, com o mesmo bilhete, o apostador tem 2 chances de ganhar. Escolhe-se de 6 a 15 números, entre os 50 disponíveis no volante, e participa de 2 sorteios por concurso. Ganha se acertar 4, 5 ou 6 números no primeiro ou no segundo sorteio.

O apostador pode deixar, ainda, que o sistema escolha os números (Surpresinha) e/ou concorrer com a mesma aposta por 2, 4 ou 8 concursos consecutivos (Teimosinha).

O apostador pode optar ainda pelo Bolão CAIXA que possuem um preço mínimo de R$ 10,00. Cada cota não pode ser inferior a R$ 2,00 e ainda é possível realizar um bolão de no mínino 2 e no máximo 50 cotas.

O apostador pode comprar cotas de bolões organizados pelas Unidades Lotéricas. Neste caso poderá ser cobrada uma Tarifa de Serviço adicional de até 35% do valor da cota.

A aposta mínima, em 6 números, custa apenas R$ 2,00.

A DUPLA SENA é sorteada às terças e sextas, sempre às 20h.

O prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem, são distribuídos:

- 30% entre os acertadores dos 6 números sorteados (Sena) no primeiro sorteio;
- 15% entre os acertadores de 5 números (Quina) no primeiro sorteio;
- 10% entre os acertadores de 4 números (Quadra) no primeiro sorteio;
- 20% entre os acertadores de 6 números sorteados (Sena) no segundo sorteio;
- 15% entre os acertadores de 5 números (Quina) no segundo sorteio;
- 10% entre os acertadores de 4 números (Quadra) no segundo sorteio.

Não havendo acertador em qualquer faixa de premiação, o valor acumula para o concurso seguinte, na primeira faixa do primeiro sorteio. Não deixe de conferir o seu bilhete de aposta.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

TABELA 10: Probabilidade de acerto.

Quantidade de números jogados	Apostas feitas	Valor de aposta	Probabilidade Sena	de acerto Quina	(1 em) Quadra
6	1	R$ 2,00	15.890.700	60.192	1.120
7	7	R$ 14,00	2.270.100	17.597	502
8	28	R$ 56,00	576.525	6.756	263
9	84	R$168,00	189.175	3.076	153
10	210	R$420,00	75.670	1.576	97
11	462	R$924,00	34.395	881	64
12	924	R$1.848,00	17.197	528	45
13	1.716	R$3.432,00	9.260	333	33
14	3.003	R$6.006,00	5.291	220	25
15	5.005	R$10.010,00	3.174	151	19

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/duplasena/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbwMPI0sDBxNXAOMwrzCjA2cDIAKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wNnUwNHfxcnSwBgIDUyhCvA5EawAjxsKckMjDDI9FQGgnyPS/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

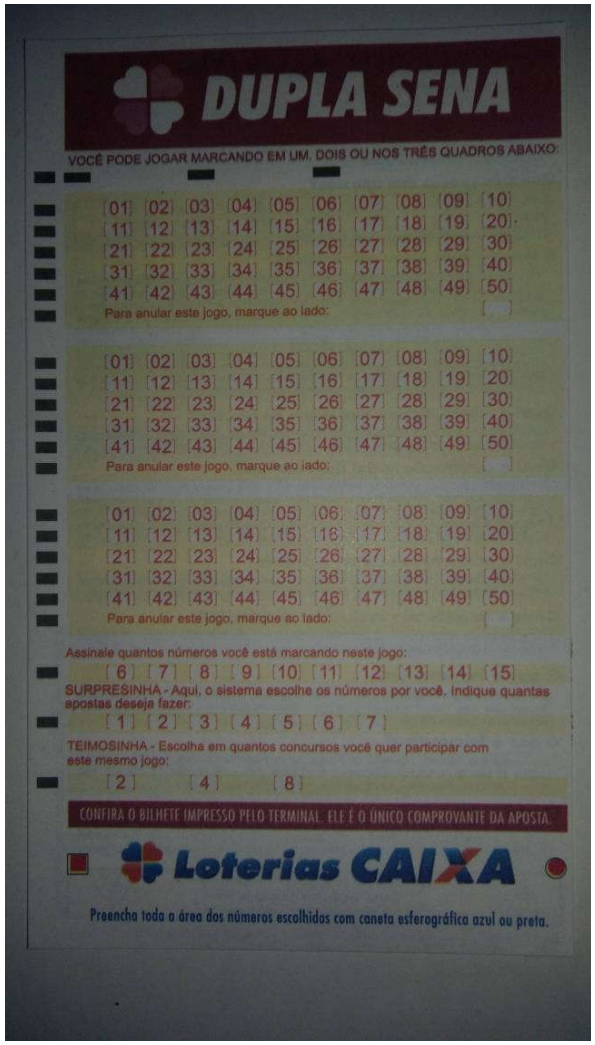
TABELA 11: Quantidade de prêmios a receber.

Apostas		1º ou 2º Sorteio					
		6 números			5 números		4 números
Quantidade de números jogados	Apostas feitas	Sena	Quina	Quadra	Quina	Quadra	Quadra
6	1	1	0	0	1	0	1
7	7	1	6	0	2	5	3
8	28	1	12	15	3	15	6
9	84	1	18	45	4	30	10
10	210	1	24	90	5	50	15
11	462	1	30	150	6	75	21
12	924	1	36	225	7	105	28
13	1716	1	42	315	8	140	36
14	3003	1	48	420	9	180	45
15	5005	1	54	540	10	225	55

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/duplasena/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbwMPI0sDBxNXAOMwrzCjA2cDIAKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wNnUwNHfxcnSwBgIDUyhCvA5EawAjxsKckMjDDI9FQGgnyPS/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

FIGURA 6- Réplica do volante da DUPLA SENA.



3.6 **LOTECA**

Para apostar, o apostador deve marcar o seu palpite para cada um dos 14 jogos do concurso, assinalando uma das três colunas, duas delas (duplo) ou três (triplo). Os clubes participantes estão impressos nos bilhetes emitidos pelo terminal.

A aposta mínima é de R$ 2,00 e dá direito a um duplo.

Na modalidade de bolão existe um preço mínimo de R$ 10,00, cada cota não pode ser inferior a R$ 2,00 sendo possível realizar um bolão de no mínimo

2 e no máximo 50 cotas. Todas as regras descritas anteriormente são válidas para a Loteca.

O prêmio bruto corresponde a 40% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem:

- 70% vão para os acertadores dos 14 jogos;
- 15%, para os acertadores dos 13 jogos;
- Os 15% restantes são distribuídos entre os acertadores dos 14 jogos nos concursos de final 0 ou 5.

Não havendo acertador em qualquer faixa de premiação, o valor acumula para o concurso seguinte, na primeira faixa de premiação. O apostador tem até 90 dias para buscar o seu prêmio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

Os concursos da LOTECA são realizados semanalmente e os resultados, divulgados no início de cada semana. Se algum jogo não for realizado no período programado, por motivo de antecipação, adiamento ou cancelamento, o resultado da partida (para fins do concurso da Loteca) será definido por sorteio.

TABELA 12 - Valor das apostas.

Triplos	Duplos	Número de Apostas	Valor em R$
0	1	2	2,00
0	2	4	4,00
0	3	8	8,00
0	4	16	16,00
0	5	32	32,00
0	6	64	64,00
0	7	128	128,00
0	8	256	256,00
0	9	512	512,00
1	0	3	3,00
1	1	6	6,00
1	2	12	12,00
1	3	24	24,00
1	4	48	48,00
1	5	96	96,00
1	6	192	192,00
1	7	384	384,00
1	8	768	768,00
2	0	9	9,00
2	1	18	18,00
2	2	36	36,00
2	3	72	72,00
2	4	144	144,00
2	5	288	288,00
2	6	576	576,00
3	0	27	27,00
3	1	54	54,00
3	2	108	108,00
3	3	216	216,00

3	4	432	432,00
3	5	864	864,00
4	0	81	81,00
4	1	162	162,00
4	2	324	324,00
4	3	648	648,00
5	0	243	243,00
5	1	486	486,00
6	0	729	729,00

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/loteca/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA3cDYEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAbNnwlU!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

TABELA 13: Quantidade de prêmios a receber acertando 14 pontos.

Triplos	Duplos no acerto	Duplos no erro	14 pontos	13 pontos
0	1	0	1	1
0	2	0	1	2
0	3	0	1	3
0	4	0	1	4
1	0	0	1	2
1	1	0	1	3
2	0	0	1	4
2	1	0	1	5
2	2	0	1	6
3	0	0	1	6
3	1	0	1	7
3	3	0	1	9
4	0	0	1	8
4	1	0	1	9

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/loteca/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA3cDYEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAbNnwIU!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

TABELA 14: Quantidade de prêmios a receber acertando 13 pontos.

Triplos	Duplos no acerto	Duplos no erro	14 pontos	13 pontos
0	0	1	0	2
0	1	1	0	2
0	2	1	0	2
0	3	1	0	2
1	1	1	0	2
1	2	1	0	2
1	3	1	0	2
2	0	0	0	1
2	0	1	0	2
2	1	1	0	2
3	0	1	0	2
3	1	1	0	2
3	2	1	0	2

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/loteca/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA3cDYEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAbNnwIU!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

TABELA 15 : Probabilidade de acerto com aposta mínima (R$ 2,00 – um duplo)

Faixas	Quantidade de jogos acertados	Probabilidade de acerto (1 em...)
1	14	2.391.485
2	13	85.415

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/loteca/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA3cDYEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAbNnwIU!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

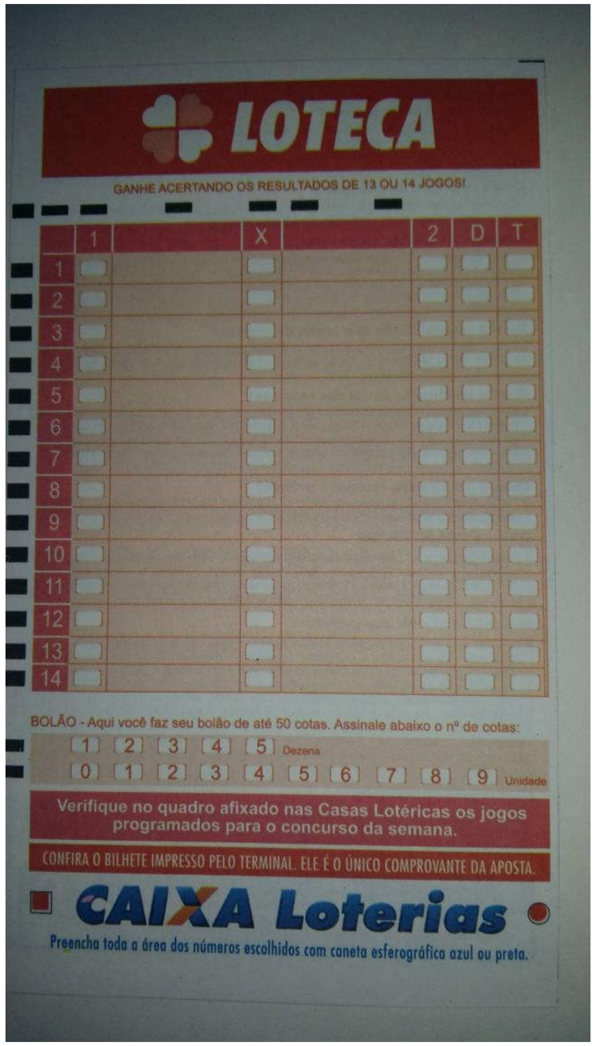
TABELA 16: Probabilidade de acerto com aposta máxima (3 triplos e 5 duplos = 864 apostas).

Faixas	Quantidade de jogos acertados	Probabilidade de acerto (1 em...)
1	14	5.536
2	13	197

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/loteca/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA3cDYEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAbNnwlU!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 22/07/2015

FIGURA 7- Réplica do volante da LOTECA.



3.7 **LOTOGOL**

Para apostar, o apostador deve marcar no volante o número de gols de cada time de futebol participante dos 5 jogos do concurso. Pode-se assinalar 0, 1, 2, 3 ou mais gols (essa opção está representada pelo sinal +). Os clubes participantes estão impressos nos bilhetes emitidos pelo terminal.

O preço da aposta é de R$ 1,00, mas o apostador pode pagar R$ 2,00 e concorrer com 2 apostas iguais ou pagar R$ 4,00 e concorrer com 4 apostas iguais.

O prêmio bruto corresponde a 40% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem, são distribuídos:

- 40% entre os acertadores dos placares dos 5 jogos;
- 30% entre os acertadores de 4 placares;
- 30% entre os acertadores de 3 placares.

Não havendo acertador em qualquer faixa de premiação, o valor acumula para o concurso seguinte, na respectiva faixa de premiação.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

Os concursos do LOTOGOL são realizados semanalmente e os resultados, divulgados no início de cada semana. Se algum jogo não for realizado no período programado, por motivo de antecipação, adiamento ou cancelamento, o resultado da partida (para fins do concurso do Lotogol) será definido por sorteio.

TABELA 17: Probabilidade de acerto.

Faixas	Quantidade de placares acertados	Probabilidade de acerto
1	5	9.765.625
2	4	81.380
3	3	1.625

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotogol/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbwMPI0sDBxNXAOMwrzCjE18zYAKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wNnUwNHfxcnSwBgIDUyhCvA5EawAjxsKckMjDDI9FQFTuNFd/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 23/07/2015

FIGURA 8- Réplica do volante da Lotogol.

3.8 **LOTOFÁCIL**

O apostador marca entre 15 e 18 números, dentre os 25 disponíveis no volante, e fatura o prêmio se acertar 11, 12, 13, 14 ou 15 números. Pode ainda deixar que o sistema escolha os números por meio da Surpresinha, ou concorrer com a mesma aposta por 3, 6, 9 ou 12 concursos consecutivos através da Teimosinha.

A aposta mínima, de 15 números, custa R$ 2,00.

Os sorteios são realizados às segundas, quartas e sextas-feiras, sempre às 20h.

O prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem, será deduzido o pagamento dos prêmios com valores fixos:

- R$ 4,00 para as apostas com 11 prognósticos certos entre os 15 sorteados;
- R$ 8,00 para as apostas com 12 prognósticos certos entre os 15 sorteados;
- R$ 20,00 para as apostas com 13 prognósticos certos entre os 15 sorteados.

Após a apuração dos ganhadores dos prêmios com valores fixos, o valor restante do total destinado à premiação será distribuído para as demais faixas de prêmios nos seguintes percentuais:

- 65% entre os acertadores de 15 números;
- 20% entre os acertadores de 14 números entre os 15 sorteados.
- 15% ficam acumulados para a primeira faixa (15 acertos) do concurso especial realizado em setembro de cada ano.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao Tesouro Nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

Não havendo ganhador em qualquer faixa de premiação, o valor acumula para o concurso seguinte, na faixa de prêmio com 15 acertos.

TABELA 18 – Valor das Apostas.

Quantidade de números	Valor em R$
15	2,00
16	32,00
17	272,00
18	1.632,00

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotofacil/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA0sTIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAcySpRM!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 23/07/2015

TABELA 19 – Probabilidade de acertos (1 em).

Faixas de premiação	Apostas simples			
Acertos	15 Números (1 aposta)	16 Números (16 apostas)	17 Números (136 apostas)	18 Números (816 apostas)
15	3.268.760	204.297	24.035	4.005
14	21.791	3.026	600	152
13	691	162	49	18
12	59	21	9,4	5
11	11	5,9	3,7	2,9
Preço a pagar	R$ 2,00	R$ 32,00	R$ 272,00	R$ 1.632,00

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotofacil/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA0sTIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAcySpRM!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 23/07/2015

TABELA 20 : Quantidade de prêmios a receber acertando 15 números.

Quantidade de números jogados	Quantidade de jogos	1ª Faixa	2ª Faixa	3ª Faixa	4ª Faixa
15	1	1	0	0	0
16	16	1	15	0	0
17	136	1	30	105	0
18	816	1	45	315	455

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotofacil/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA0sTIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAcySpRM!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 23/07/2015

TABELA 21 : Quantidade de prêmios a receber acertando 14 e 13 números.

14 Números				13 Números		
2ª Faixa	3ª Faixa	4ª Faixa	5ª Faixa	3ª Faixa	4ª Faixa	5ª Faixa
1	0	0	0	1	0	0
2	14	0	0	3	13	0
3	42	91	0	6	52	78
4	84	364	364	10	130	390

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotofacil/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA0sTIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAcySpRM!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 23/07/2015

TABELA 22 : Quantidade de prêmios a receber acertando 12 e 11 números.

12 Números		11 Números
4ª Faixa	5ª Faixa	5ª Faixa
1	0	1
4	12	5
10	60	15
20	180	35

Fonte:(http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotofacil/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA0sTIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAcySpRM!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)

Consulta realizada dia 23/07/2015

3.8.1 Concurso Especial

O concurso Especial realizado em setembro da cada ano civil, que tem a denominação comercial: LOTOFÁCIL DA INDEPENDÊNCIA e obedece as seguintes regras:

✓ Prazo de comercialização:

Durante 30 dias com captação de apostas independente e concomitante com os demais concursos da modalidade utilizando-se de volantes específicos (a CAIXA informará com antecedência a data do início das vendas e o número do concurso Especial).

✓ Distribuição do valor destinado ao pagamento dos prêmios com valores variáveis (após dedução das faixas de prêmios fixos):

- 80% - primeira faixa - quinze acertos.
- 20% - segunda faixa - quatorze acertos.

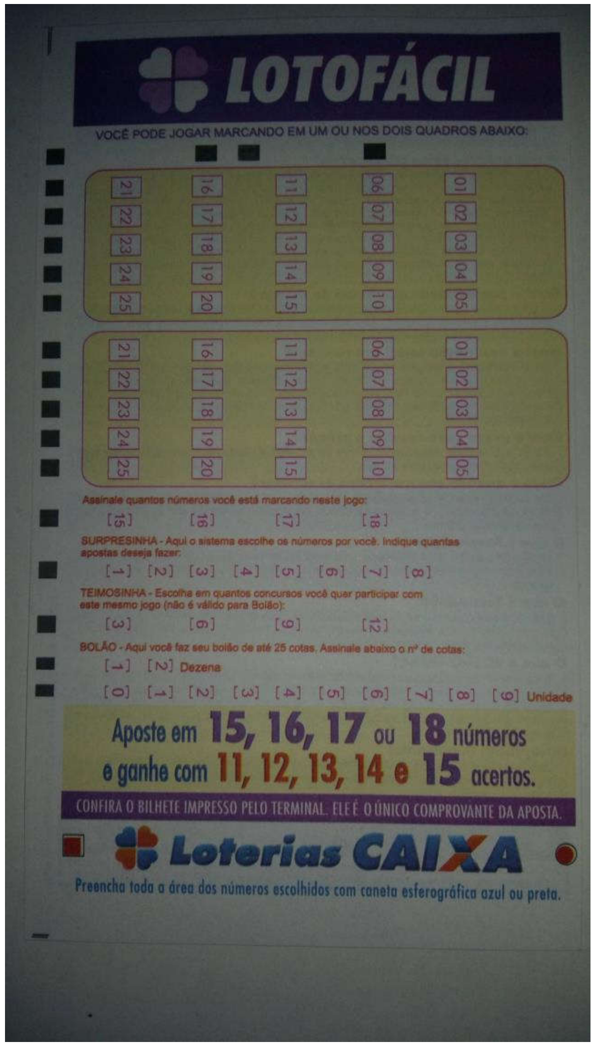
Composição da primeira faixa de premiação (quinze acertos):

- 80% do percentual destinado a prêmios, de acordo com a arrecadação do respectivo concurso;
- O total acumulado para o concurso Especial;
- O total acumulado do concurso anterior, quando houver.

✓ Critérios de Acumulação:

- Não existindo apostas premiadas com quinze números, o prêmio será rateado entre os acertadores de quatorze números;
- Não existindo apostas premiadas com quinze e quatorze números, o prêmio será rateado entre os acertadores de treze números e assim sucessivamente, até a 5ª faixa de premiação;
- Não existindo apostas premiadas em quaisquer faixas de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, na primeira faixa de premiação (15 acertos).

FIGURA 9- Réplica do volante da LOTOFÁCIL.



4 **CALCULANDO AS CHANCES DE FICAR MILIONÁRIO**

Sabe-se, pelo menos intuitivamente, que as chances de acertar os seis números da mega sena é quase nula. Neste capítulo iremos calcular as chances de acertar na Mega - Sena, além de calcularmos as chances para quina e quadra.

4.1 **MEGA - SENA**

Para o cálculo dessa probabilidade deve-se levar em consideração que o apostador pode escolher de seis a quinze números dentre os sessenta disponíveis. Com isso, devem-se levar em consideração todas essas possibilidades.

Para calcular a cardinalidade do espaço amostral (casos possíveis) deste experimento, deve-se chamar atenção para o fato de que a ordem na qual os números são sorteados é irrelevante. Com isso, o número de elementos do espaço amostral deste experimento é $C_{60}^{6} = \dfrac{60!}{6!.(60-6)!} = 50063860$.

O número de elementos do conjunto evento (casos favoráveis) deste experimento é dado por $C_{n}^{6} = \dfrac{\text{n!}}{6!.(\text{n}-6)!}$, onde $n \in \{6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$.

Na tabela abaixo disponibilizaremos o cálculo da probabilidade para cada valor possível de n, assim como a quantidade de jogos com os quais se concorre e o preço pago por esses jogos.

TABELA 23 – Probabilidade de acerto.

N	C_n^6; **(Quantidade de jogos)**	**Valor a ser pago (Quantidade de jogos vezes R$ 2,50)**	**Probabilidade de acerto (Valores aproximados)** $P = \frac{C_n^6}{C_{60}^6} x100$
6	1	R$ 2,50	0,000002%
7	7	R$ 17,50	0,000014%
8	28	R$ 70,00	0,000056%
9	84	R$ 210,00	0,00017%
10	210	R$ 525,00	0,00042%
11	462	R$ 1155,00	0,00092%
12	924	R$ 2310,00	0,0018%
13	1716	R$ 4290,00	0,0034%
14	3003	R$ 7507,50	0,006%
15	5005	R$ 12512,50	0,001%

Jogando na MEGA - SENA o apostador pode ganhar a quina ou quadra, montaremos tabelas semelhantes à exposta acima para cada caso.

4.2 **Quina**

Devemos chamar atenção para o cálculo da cardinalidade deste evento. Para ganhar a quina o apostador deve acertar exatamente cinco dos seis números escolhidos, isso no caso de uma aposta simples (seis números). Como o espaço amostral não se altera, temos que o número de elementos do conjunto evento é dado por $C_n^5 . C_{(60-n)}^1$, onde $n \in \{6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$.

Na tabela abaixo colocaremos apenas o valor de n e a probabilidade, visto que o número de jogos e o valor da aposta é o mesmo.

TABELA 24 – Probabilidade de acerto.

N	**Probabilidade de acerto (Valores aproximados)** $\frac{C_n^5 . C_{(60-n)}^1}{C_{60}^6} x100$
6	0,00065%
7	0,0022%
8	0,0058%
9	0,013%
10	0,025%
11	0,045%
12	0,076%
13	0,12%
14	0,18%
15	0,27%

4.3 **Quadra**

O apostador que quiser ganhar na quadra deve acertar exatamente quatro dos seis números escolhidos em uma aposta simples (seis números). Levando em consideração que o apostador montar um jogo de seis a quinze números tem-se que o número de elementos do conjunto evento é dado por $C_n^4 . C_{(60-n)}^2$, onde $n \in \{6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$.

TABELA 25 - .Probabilidade de acerto.

N	**Probabilidade de acerto (Valores aproximados)** $\frac{C_n^4 . C_{(60-n)}^2}{C_{60}^6} x100$
6	0,043%
7	0,096%
8	0,19%
9	0,32%
10	0,51%
11	0,78%
12	1,12%
13	1,54%
14	2,07%
15	2,7%

5 PROPOSTAS PEDAGÓGICAS

Este capítulo propõe algumas atividades para auxiliar o ensino de probabilidade.

5.1 Atividade 1:

Etapa 1:

Dividir a turma em grupos, distribuir baralhos de 52 cartas e pedir que os alunos separem as cartas de acordo com um critério que eles irão definir. O professor pode sugerir alguns exemplos.

Sugestões: dividir em cartas pretas e vermelhas, em naipes, em figuras e números, apenas os reis, apenas as damas, ...

Etapa 2:

Cada grupo deve expor sua divisão e o professor como mediador deve comparar (quanto a quantidade e elementos) os grupos obtidos.

Etapa 3:

Calcular a divisão entre o número de cartas escolhidas por cada grupo e o total de cartas do baralho. Em seguida ordenar em ordem crescente ou decrescente.

Etapa 4:

Responder o questionário:

1) Existem frações iguais? Em caso negativo, você acha que pode acontecer de aparecer frações iguais?

2) Existe alguma fração igual a zero?

3) Existe alguma fração igual a 1?

4) Pode alguma fração ser maior que 1? Justifique sua resposta matematicamente.

5.2 Atividade 2:

Etapa 1:

Construir um hexágono regular usando régua e compasso.

Etapa 2:

Traçar todas as diagonais do hexágono. Segmentos de comprimentos iguais devem ser coloridos com a mesma cor, assim como segmentos de cores distintas devem ser coloridos como cores distintas.

Etapa 3:

Responder o questionário:

1) Quantos foram os segmentos (diagonais e lados) traçados?
2) Quantos são os segmentos de cada cor?
3) Quantos são os segmentos que passam pelo centro da circunferência? Eles possuem a mesma cor? Retirei a terceira Pergunta.
4) Quantos são os segmentos que não passam pelo centro? Eles possuem a mesma cor? Todos são diagonais?
5) Escolhido um segmento ao acaso, quais as "chances" desse segmento ser uma diagonal?
6) Escolhido um segmento ao acaso, quais as "chances" desse segmento passar pelo centro do polígono?
7) Escolhido um segmento ao acaso, quais as "chances" desse segmento não passar pelo centro do polígono? Existe outro raciocínio, que leve ao mesmo resultado, para responder esse item?

5.3 Atividade 3:

Etapa 1:

Dividir a turma em grupos, no mínimo 5 grupos, e distribuir uma moeda para cada grupo.

Supondo que sejam 5 grupos, cada grupo deve lançar sua moeda e anotar a sequência de aparecimento de cara e coroa, assim como a quantidade de vezes que cada um apareceu.

O grupo 1 deve lançar a moeda 5 vezes, o grupo 2 - 10 vezes, o grupo 3 – 15 vezes, o grupo 4 – 20 vezes e o grupo 5 – 25 vezes. Diminui a quantidade de lançamentos.

Etapa 2:

Cada grupo deve expor as sequências obtidas para 1, 2 e 3 lançamento(s). Comparar as sequências obtidas.

Etapa 3:

Comparar a frequência de aparecimento de cara e coroa em cada grupo para todos os lançamentos.

Efetuar a divisão entre o número de vezes que saiu cara e o total de lançamentos e comparar os resultados entre os grupos. Fazer o mesmo para coroa.

Etapa 4:

Responder o questionário:

1) Quais as possíveis sequências de aparecimento de cara e coroa para apenas três lançamentos?

2) Em quantas das sequências acima se tem pelo menos uma cara? E pelo menos duas caras?

3) Quantas seriam as sequências para 4, 5, 6, 10, 50 e n lançamentos? (Não precisa efetuar os cálculos).

4) No caso de 4 lançamentos, quantas são as sequências nas quais aparecem coroa exatamente duas vezes? E pelo menos duas vezes?

5.4 Atividade 4:

Etapa 1:

Dividir a turma em grupos de quatro pessoas.

Cada grupo deve construir e recortar, em número de 4, os seguintes polígonos regulares:

Triângulos, quadrados, hexágonos, octógonos e dodecágonos.

Em seguida deve pintar os 4 triângulos, cada um com uma cor diferente dos demais. Usando as mesmas cores, repetir o processo para os demais polígonos.

Observe que teremos 4 triângulos eqüiláteros, sendo um de cada cor. O mesmo ocorre para os demais polígonos.

Etapa 2:

Supondo que as cores escolhidas sejam: azul, amarelo, verde e branco, distribuir as 20 figuras entre os membros do grupo de modo que todos recebam a mesma quantidade de polígonos.

O jogo consiste em cada participante colocar uma figura sobre a mesa com a cor voltada para baixo. Viram-se as figuras e se observa a cor de cada uma.

Estabelecer uma ordem entre as cores, por exemplo, azul >amarelo>verde>branco, ou seja, a cor azul "ganha" de todas as outras cores, assim como a cor amarela "ganha" da cor verde e da cor branca e assim por diante. Independente do número de lados que a figura tiver.

Quanto à quantidade de lados, o polígono com a maior quantidade de lados ganha dos demais, exceto pela cor. Por exemplo: o dodecágono azul ganha de todas as demais "cartas" e o triângulo azul ganha do dodecágono amarelo.

Ganha o jogo o participante que somar mais pontos, sendo que o triângulo vale 3 pontos, o quadrado 4 e assim por diante.

Etapa 3:

Responder o questionário.

1) Pode um jogador receber os cinco polígonos com a mesma cor?

2) Sabendo que todos os participantes receberam os cinco polígonos e todos com a mesma cor, qual a probabilidade de um aluno X receber todos os azuis?

3) Sabendo que em uma rodada todos os participantes jogaram seus triângulos, qual a probabilidade de um aluno Y ganhar essa rodada?

5.5 Atividade 5:

Considere uma loteria com 20 números, o vencedor será quem acertar 3 (três) números sorteados dentre os 20 possíveis.

Dividir a turma em 6 grupos. Podem ser feitas apostas assinalando de 3 a 8 números em um mesmo cartão, com valores diferenciados, evidentemente. São distribuídos cartões semelhantes ao mostrado abaixo:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Cada grupo irá assinalar as dezenas de sua preferência, seguindo os seguintes procedimentos:

Grupo 1: apostará 6 cartões, todos com 3 números marcados.

Grupo 2: apostará 5 cartões, todos com 4 números marcados.

Grupo 3: apostará 4 cartões, todos com 5 números marcados.

Grupo 4: apostará 3 cartões, todos com 6 números marcados.

Grupo 5: apostará 2 cartões, ambos com 7 números marcados.

Grupo 6: apostará apenas 1 cartão com 8 números marcados.

Além disso, cada número só poderá ser assinalado em apenas um cartão. Por exemplo, se o grupo 4 assinalou o número 3 em um cartão, este não poderá ser assinalado em outro cartão desse mesmo grupo.

Fazemos o sorteio e verificamos qual grupo foi o vencedor.

Responder o questionário abaixo:

1) Supondo que o valor de uma aposta simples (3 números) custe R$ 2,00, complete a tabela abaixo.

2)

APOSTAS	PREÇO
4	R$
5	R$
6	R$
7	R$
8	R$

2) Todos os grupos possuem a mesma chance de vencer o sorteio? Em caso negativo, qual dos grupos possui a maior chance de ser o vencedor?

3) Suponha que, também, seja possível ganhar com 2 números. Sabendo que um aluno escolheu 3 números, qual a probabilidade desse aluno ganhar com exatamente 2 números?

5.6 Atividade 6:

Para essa atividade o aluno deve possuir uma calculadora científica ou então o professor pode realizá-la em um laboratório de informática.

Etapa 1:

Propor uma loteria onde será sorteado um único número de um total de 80 números.

Para apostar, cada pessoa deve comprar um bilhete que tem um único número. Ganha quem possuir o bilhete com o número sorteado.

Etapa 2:

Responder as perguntas

a) André compra 8 bilhetes para um único sorteio, enquanto Maria Eduarda compra 1 bilhete para cada sorteio, em um total de 8 sorteios.

Quem tem a maior chance de ganhar algum prêmio: André ou Maria Eduarda?

b) Generalizando, em um sorteio com N números, é melhor comprar “p” bilhetes para um único sorteio ou 1 bilhetes por sorteio, durante “p” sorteios?

O objetivo desta atividade é mostrar aos alunos que, em determinadas questões, o cálculo da probabilidade da ocorrência do complementar do evento é mais fácil do que o próprio evento. Neste caso, devemos relembrar com os alunos a negação de proposições lógicas, que será importante neste tipo de exercício.

6 **CONCLUSÃO**

Espera-se que este TCC seja uma alternativa útil para o ensino de probabilidade. As atividades aqui propostas foram pensadas para que o aluno seja o protagonista e construa o conhecimento. O professor, atento às questões que certamente surgirão ao longo do processo, deverá explorar as dúvidas e equívocos dos alunos construindo o conhecimento de forma horizontal, fugindo assim das aulas tradicionais onde o professor expõe o conteúdo e os alunos tornam-se aplicadores de fórmulas, muitas das vezes sem entender de fato o porquê de usar uma fórmula ou outra.

O docente pode ainda utilizar a parte histórica deste TCC a fim de enriquecer sua aula e servir de apresentação do novo conteúdo que será exposto.

Gostaria de ressaltar que este TCC não vem a ser um manual de jogo onde o leitor irá obter uma fórmula ou um roteiro para ganhar na mega sena. A ideia de explorar o jogo da mega sena e alguns outros jogos de loterias é trazer uma pratica do cotidiano para a sala de aula, mostrando assim a utilidade da matemática. Alguns alunos atualmente, a cada tópico que é ensinado perguntam: "Por que eu tenho que aprender isso? " Naturalmente, alguns alunos perguntam porque estão curiosos, e nesse caso devemos saciar a curiosidade de nossos alunos. É claro que, para alguns tópicos que ensinamos, fica difícil trazer uma aplicação real, mas sempre que possível essa " ponte" deve ser feita e não devemos nunca desencorajar a curiosidade de nossos alunos, mesmo que a pergunta acima seja feita para desestabilizar a aula. Acredito que ao respondermos com seriedade e mostrar um porquê para o ensino de um tópico específico, ou simplesmente responder que não há uma aplicação prática ou no cotidiano do aluno, estamos satisfazendo boa parte da turma.

REFERÊNCIAS

FERNANDEZ, P.J. *Publicações Matemáticas: Introdução à Teoria das Probabilidades.* Rio de Janeiro: IMPA. 1971. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/pm/PM_18.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2014.

HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar – Combinatória e Probabilidade. Volume 5*. 5. ed. São Paulo: Ed. Atual, [198-].

LEBENSZTAYN, E.; COLLETI, C.F. *Probabilidade: Teoria e exercícios.* São Paulo: Programa de pós-graduação em estatística. Departamento de estatística. Universidade de São Paulo. 2008. 136 p. Notas de aula.
<http://hostel.ufabc.edu.br/~cristian.coletti/arquivos/Livro.pdf>
Consulta realizada dia 11/07/2014.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2.* 5. ed.. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 1998. (Coleção do Professor de Matemática).

MACHADO, A. S. *Matemática: Temas e Metas, Volume 3 – Sistemas Lineares e Combinatória*. São Paulo: Ed. Atual. 1986.

MEYER, P. L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística.* 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora. 1984.

XAVIER, T. M. B. S.; XAVIER, A. F. S. *Probabilidade*. Coleção Universitária de Problemas. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro – GB/1974.

RESVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (R.P.M): *Nota histórica sobre Buffon e o problema dos ladrilhos.* nº 48. 1º quadrimestre de 2002, págs. 19-20.

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Paradoxo_de_S%C3%A3o_Petersburgo>
Consulta realizada dia 11/07/2014.

<http://www1.caixa.gov.br/loterias/loterias/megasena/como_jogar.asp>
Consulta realizada dia 20/07/2014.

<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa6a.html>
Consulta realizada dia 9/11/2014

<https://www.google.com.br/search?q=imagem+do+volante+do+primeiro+jogo+de+loteria+esportiva+no+brasil&biw=1280&bih=705&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0CBwQsARqFQoTCKHevZ2y8MYCFYHUgAodlGcGgA#imgrc=4ZuRtcnnd6LPaM%3A>
Consulta realizada dia 22/07/2015

<http://www.guiadaloteria.com.br/estatistica-dezenas-mais-sorteadas-da-mega-sena.html>
Consulta realizada dia 22/07/2015.

<http://g1.globo.com/loterias/noticias/2014/11/mega-sena-sorteia-r-135-mi-neste-sabado-veja-os-dez-meiores-premios.html>
Consulta realizada dia 22/07/2015.

<http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbwMPI0sDBxNXAOMwrzCjA0sjIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wNnUwNHfxcnSwBgIDUyhCvA5EawAjxsKckMjDDI9FQE-F4ca/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/>
Consulta realizada dia 22/07/2015.

<https://www.google.com.br/search?q=volante+da+mega+sena&biw=1280&bih=705&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&sqi=2&ved=0CBwQsARqFQoTCK6o8NDL78YCFQOfgAodTisMxw#imgrc=aK41BkbnIng4NM%3A>
Consulta realizada dia 22/07/2015

<http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/timemania/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA1MzIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VASrq9qk!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/>
Consulta realizada dia 22/07/2015

<http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/quina/!ut/p/a1/jc69DoIwAATgZ_EJepS2wFgoaUswsojYxXQyTfgbjM9vNS4Oordd8l1yxJGBuNnfw9XfwjL78dmduIikhYFGA0tzSFZ3tG_6FCmP4BxBpaVhWQuA5RRWIUZlxR6w4r89vkTi1_5E3CfRXcUhD6osEAHA32Dr4gtsfFin44Bgdw9WWSwj/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/>
Consulta realizada dia 22/07/2015

<http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotomania/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA38jYEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAajYsZo!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/>
Consulta realizada dia 22/07/2015

<http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/duplasena/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbwMPI0sDBxNXAOMwrzCjA2cDIAKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wNnUwNHfxcnSwBgIDUyhCvA5EawAjxsKckMjDDI9FQGgnyPS/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/>
Consulta realizada dia 22/07/2015

<http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/loteca/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA3cDYEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAbNnwlU!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/>
Consulta realizada dia 22/07/2015

<http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotogol/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbwMPI0sDBxNXAOMwrzCjE18zYAKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wNnUwNHfxcnSwBgIDUyhCvA5EawAjxsKckMjDDI9FQFTuNFd/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/>
Consulta realizada dia 23/07/2015

<http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotofacil/!ut/p/a1/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOLNDH0MPAzcDbz8vTxNDRy9_Y2NQ13CDA0sTIEKIoEKnN0dPUzMfQwMDEwsjAw8XZw8XMwtfQ0MPM2I02-AAzgaENIfrh-FqsQ9wBmoxN_FydLAGAgNTKEK8DkRrACPGwpyQyMMMj0VAcySpRM!/dl5/d5/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/>
Consulta realizada dia 23/07/2015

APÊNDICE

- Resposta do Jogo da Balla.

Solução:

As possibilidades de término do jogo, com vitória de A, são:

1. Mais uma única jogada – A vence : ½
2. Mais duas jogadas – A perde e A vence : ½ . ½ = ¼
3. Mais três jogadas – A perde e A perde e A vence: ½ . ½ . ½ = 1/8

Com isso as chances de A vencer o jogo é:

½ + ¼ + 1/8 = 7/8 .

Pode-se pensar também que para B vencer o jogo existe uma única possibilidade, a saber:

A perde e A perde e A perde : ½ . ½ ½ = 1/8.

Dessa forma as apostas devem ser divididas de modo que A ganhe sete vezes o prêmio de B.

- Paradoxo de São Petersburgo

O Paradoxo de São Petersburgo é um dos mais famosos paradoxos em teoria das probabilidades. Foi publicado pela primeira vez em 1738 em um artigo pelo matemático Daniel Bernoulli, embora tenha sido introduzido pelo seu primo Nicolau Bernoulli em 1713.

O problema é o seguinte: suponhamos que Pedro e Paulo concordam em jogar um jogo de cara ou coroa. Se o primeiro lance der cara, Paulo dará duas moedas a Pedro; se o primeiro lance der coroa e o segundo der cara, Paulo dará a Pedro quatro moedas. Se cara só aparece no terceiro lance, Pedro receberá oito moedas. Em resumo, se só aparecer cara no n-ésimo lance, Pedro receberá 2 elevado a n moedas. Então, quanto deve Pedro pagar a Paulo pelo privilégio de jogar tal jogo?

O senso comum sugere uma soma finita muito modesta, mas a inacreditável resposta para esta pergunta é que Pedro pode pagar a Paulo qualquer quantia, digamos um milhão de moedas, por cada jogo e ainda esperar sair como vencedor. Em qualquer jogo simples, a probabilidade de Pedro ganhar duas moeda é 1/2, de ganhar 4 moedas é 1/4, de ganhar 8 moedas é 1/8 e assim por diante. Então, o total que Pedro pode esperar ganhar é dado pela série que tem soma infinita. Ou seja, não importa qual quantia (finita) Pedro pague a Paulo por cada jogo, ele sempre ganhará se for realizado um número suficiente de jogos. Para tanto estamos assumindo que o capital de Paulo e o número de jogos que os dois podem jogar são ilimitados. Quando Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon fez um teste empírico do caso, achou que em 2084 jogos Paulo teria pago a Pedro 10057 moedas. Isso indica que em qualquer jogo a esperança de Paulo, em vez de ser infinita, na verdade é algo inferior a 5 moedas, já que 5 x 2084 = 10420.

Diversas explicações foram dadas para o paradoxo durante o século XVIII, embora algumas pessoas tenham preferido como solução, observar que o problema é inerentemente impossível, pois a fortuna de Paulo é necessariamente finita; portanto, ele não poderia pagar as somas ilimitadas que poderiam ser necessárias no caso de uma longa demora no aparecimento de cara.

- Conde Buffon

Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, nasceu em 7 de setembro de 1707, em Montbard, na França, e morreu em 16 de abril de 1788, em Paris.

Nascido na aristocracia estudou Medicina e Direito, seu interesse pela Matemática o levou a descobrir sozinho a fórmula do Binômio. Manteve correspondência com Cramer sobre Mecânica, Geometria, Probabilidade, Teoria dos Números e Cálculo Diferencial e Integral, mas era a natureza a sua verdadeira paixão. Dedicou-se principalmente à História Natural, tendo sido o maior responsável pelo crescimento do interesse pela História Natural na Europa, no século XVIII.

O 4º volume do *Suplemento à História Natural*, publicado em 1777, tem 3 de suas 35 seções dedicadas ao Cálculo das Probabilidades. Uma delas é *Sur le jeu de franc-carreau (Sobre o jogo do ladrilho)*, na qual Buffon discute o jogo do ladrilho e apresenta o Problema da Agulha (abordado na **RPM** 09, pág. 10, e **RPM** 20, pág. 20). Foi o primeiro escrito sobre o que hoje se conhece por Probabilidade Geométrica.

O jogo do ladrilho

Bastante jogado pelas crianças francesas no século XVIII, o jogo consistia em jogar uma pequena moeda de raio r ao acaso em um chão coberto por ladrilhos quadrados de lado L, sendo L > 2r. As crianças apostavam que a moeda cairia inteiramente dentro de um ladrilho ou que a moeda cairia atravessando o lado de algum ladrilho.

Buffon notou que a probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho era a probabilidade de o centro da moeda cair dentro de um quadrado de lado $L-2r$.

Essa probabilidade é a razão entre as áreas do quadrado e do ladrilho, pois a probabilidade de o centro da moeda cair em uma região é proporcional à área dessa região. Portanto a probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho é

$$\frac{(L-2r)^2}{L^2}=\left(1-\frac{2r}{L}\right)^2.$$