Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciência
Instituto de Matemática e Estatística

Gabriela Baptista Maretti

A prática de iniciação científica em escolas de Ensino Médio: um relato de experiência na Escola SESC de Ensino Médio

Rio de Janeiro
2015

Gabriela Baptista Maretti

A prática de iniciação científica em escolas de Ensino Médio: um relato de experiência na Escola SESC de Ensino Médio

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Autorizo a apresentação

Orientador: Profª. Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

D979 Maretti, Gabriela Baptista
A prática de iniciação científica em escolas de Ensino Médio: um relato de experiência na Escola SESC de Ensino Médio / Gabriela Baptista Maretti. – Rio de Janeiro, 2015-
65 f.

Orientador: Prof^{a}. Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística
, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Iniciação Científica.. 2. Matemática.. 3. Música.. I. Prof^{a}. Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Instituto de Matemática e Estatística
. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Gabriela Baptista Maretti

A prática de iniciação científica em escolas de Ensino Médio: um relato de experiência na Escola SESC de Ensino Médio

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 28 de Agosto de 2015.
Banca Examinadora:

Profª. Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Profª. Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. José Flávio Silveira Feiteira
Polo Universitário de Volta Redonda - UFF

Rio de Janeiro
2015

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Márcia e Julio, que me inspiram a viver.

À minha irmã, Giselle, que me enche de orgulho com tantas conquistas.

Ao meu “píncipe”e afilhado, Eduardo, que me faz sentir um amor de doer o peito.

Aos amigos, Clarissa e Luciano Melo, Marcos Assumpção, Wesley Machado, Felipe Ferreira e João Carlos Cunha, que me incentivaram nessa nova etapa de minha formação profissional e fizeram com que esses anos fossem divertidos e prazerosos, a pesar dos pesares.

À equipe de professores das UERJ que assumiram o desafio da implantação do mestrado profissional na universidade.

À querida professora Jeanne Barros, que, muito pacientemente, me orientou para a elaboração e conclusão deste trabalho.

A Deus, pelas oportunidades privilegiadas já vividas por mim, na companhia das pessoas a quem agradeço neste trabalho e de muitas outras que não foram citadas, mas de grande importância na minha caminhada pessoal e profissional.

A música é o prazer que a alma humana experimenta
quando conta sem perceber que está contando.
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

RESUMO

MARETTI, Gabriela Baptista. *A prática de iniciação científica em escolas de Ensino Médio:*
um relato de experiência na Escola SESC de Ensino Médio. 2015. 65 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística
, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Este trabalho apresenta uma proposta, a partir do relato de experiência, de iniciação científica na escola básica. Primeiramente propõe-se uma reflexão sobre os desafios para o ensino da Matemática, e a busca de estratégias para despertar o interesse dos alunos pela disciplina. Na sequência discute-se a importância da prática de iniciação científica na escola e dos ganhos pessoais e profissionais que a mesma poderá trazer aos alunos nos anos subsequentes de estudo. Posteriormente a autora apresenta a proposta de iniciação científica em Matemática e Música que realizou na Escola SESC de Ensino Médio, bem como as atividades que desenvolveu com o grupo de pesquisa que orientou. A articulação entre Matemática e Música perpassa o estudo das duas artes, e conecta-se com outras tantas áreas do conhecimento promovendo a interdisciplinaridade entre as ciências.

Palavras-chave: Iniciação Científica. Matemática. Música.

ABSTRACT

MARETTI, Gabriela Baptista. *Practice scientific initiation in High Schools : an experience report in the School SESC High School*. 2015. 65 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística
, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

This paper presents a proposal, based on accounts of experience, scientific research in basic school. First it proposes a reflection on the challenges to the teaching of mathematics , and the search for strategies to arouse the interest of students by discipline. Following discusses the importance of scientific research practice at school and personal and professional gains that it can bring students in subsequent years of study. Later the author presents a proposal for scientific research in Mathematics and Music who performed at the School of SESC high school, as well as the activities undertaken with the research group that guided . The relationship between mathematics and music permeates the study of the two arts, and connects with many other areas of knowledge promoting interdisciplinary sciences .

Keywords: Undergraduate Research. Mathematics. Music.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É frequente no cotidiano escolar deparar-se com alunos que desafiam seus professores a proporcioná-los aulas mais dinâmicas, interativas e com aplicabilidade evidente. Fato é que a busca do professor por aulas mais atrativas não promove por si só a aprendizagem, cabe ao aluno o protagonismo do ato de aprender. Segundo Morin (2000) existem sete saberes necessários à educação quando se tem o olhar voltado ao futuro. O primeiro deles diz respeito ao conhecimento porque

> [...]o conhecimento nunca é um reflexo ou espelho da realidade. O conhecimento é sempre uma tradução, seguida de uma reconstrução [...] temos percepções, ou seja, reconstruções, traduções da realidade, e toda tradução comporta o risco de erro . (**??**)

Algumas das perguntas mais ouvidas nas salas de aula são: "para que tenho que aprender isso?", "para que isso serve?", ou ainda "de que forma aprender isso vai interferir na minha vida?". Para muitos conteúdos, das mais diversas ciências, as respostas para os questionamentos apresentados anteriormente parecem óbvias. Basta um olhar pouco mais atencioso para o mundo que nos cerca para perceber que: o encosto de cabeça dos bancos dos carros nos protegem por conta de um fenômeno físico; a comida que ingerimos é submetida em nosso organismo a uma série de transformações químicas para que possamos absorver seus nutrientes; a escolha por um determinado plano para pagamento de uma mercadoria numa loja exige algum conhecimento matemático; a compreensão e o uso de linguagens nos dá oportunidade de dialogar com o mundo; o entendimento da história e a capacidade de análise crítica desse conhecimento faz com que possamos atuar politicamente na sociedade. Isto é, muitas vezes, o sentido das coisas não está nas coisas. O olhar distanciado entre as disciplinas, quando praticado, sugere, segundo Morin (1999), uma "fronteira disciplinar"onde "sua linguagem e seus conceitos próprios isolam a disciplina das outras e dos problemas que a recobrem"(**??**). Esse é um dos riscos da "hiperdisciplinaridade"em detrimento da "interdisciplinaridade". Enfim, se faz necessário encontrar significado prático para o ato de conhecer e transformá-lo em saber. Essa não é, necessariamente, uma tarefa fácil, porém é imprescindível a quem se presta a ensinar algo à alguém.

Na área das ciências exatas, em especial na Matemática, esse cenário não é diferente. É consenso que somar, subtrair, multiplicar e dividir são operações que estão presentes no cotidiano de qualquer indivíduo. Sendo assim, justificar a aprendizagem das quatro operações básicas é fácil. Ou melhor, não é muito difícil convencer meninos e meninas de que tais operações com números inteiros podem dar a eles um traquejo matemático mínimo para lidar com situações rotineiras. Por outro lado, como convencer a esses mesmos alunos - agora já mais velhos - que o estudo das funções trigonométricas, por exemplo, tem igual valia às quatro operações? Pode não parecer tão evidente quanto operar, mas de uma forma não muito imediata, esse conteúdo está associado a imagem gráfica de um som, ou ruído. E os sons sim, estão intensamente presentes no dia a dia de um ser humano ouvinte ou não, logo, saber um pouco mais sobre essas funções é conhecer mais especificamente um fenômeno corriqueiro.

Nesse contexto, percebe-se que, mais importante do que saber um conteúdo, é compreender para que ele serve e experimentá-lo, numa ação muito mais concreta do que abstrata. Na mesma linha Abdounur cita Freinet em um de seus capítulos: "Uma experiência, um experimento, qualquer que seja, deixa marcas indeléveis com as quais a criança constrói seu conhecimento." Podemos ainda nos aproximar mais uma vez de Morin quando afirma, em seu segundo saber, que:

> [...]nós seguimos em primeiro lugar, um mundo formado pelo ensino disciplinar e é evidente que as disciplinas de toda ordem que ajudaram o avanço do conhecimento são insubstituíveis, o que existe entre as disciplinas é invisível e as conexões entre elas também são invisíveis, isto não significa que seja necessário conhecer somente uma parte da realidade, é preciso ter uma visão que possa situar o conjunto. (**??**)

O todo é complexo e muito mais que a soma de todas as partes, logo um desafio matemático.

Tendo como referência as teorias de aprendizagem que propõe a construção do conhecimento, e não transferência de conteúdos, está a pesquisa científica, que, ao contrário do que muitos pensam e praticam, pode e deve ter início na escola, desde os primeiros anos de escolaridade do ensino básico. Contudo, é no Ensino Médio que se espera encontrar indivíduos pesquisadores mais maduros e aptos a trilhar um caminho de descobertas, pela prática da investigação. Nessa etapa de formação, o aluno já é, ou deveria ser, capaz de analisar e julgar a informação. Construir e desconstruir ideias. Verificar e aprimorar inferências. De maneira racional, busca "por que" e "como" as coisas acontecem. Ainda que, em alguns momentos, de forma inconsciente, exercite criatividade e criticidade, se desenvolve como indivíduo e parte de um coletivo, onde o conhecimento pode, e deve, ser partilhado e resignificado, socializando-o.

Surge então a seguinte questão: como fazer com que os alunos se sintam atraídos pela Matemática a ponto de se desenvolverem pessoal e intelectualmente?

Nesse contexto, algumas atividades foram propostas com o objetivo de despertar o interesse dos alunos pela disciplina, através da abordagem de uma série de conteúdos específicos da Matemática, e outros tantos interdisciplinares, como da Arte Plástica, da Música, da Física, da Filosofia. Outro aspecto relevante nas propostas aqui apresentada diz respeito a desenvolver a autonomia intelectual no educando, característica fundamental do indivíduo, tanto na vida profissional, ou mesmo social, quanto acadêmica.

DEPOIMENTO

Os caminhos que me trazem até aqui me fazem refletir sobre a real importância da formação continuada do professor para a tarefa de docência.

Meu sonho de criança dizia que meu futuro estava na Medicina, salvar vidas. Meu desempenho escolar me mostrava que seria necessário um esforço maior, nada que eu não pudesse empreender se assim o desejasse, mas desejava?

Durante o Ensino Fundamental ficava sempre para a prova final em Matemática. Tive muita dificuldade com a matéria que me fez professora. Tudo parecia sem sentido. Hora profundo demais, hora imediato demais. Foram anos difíceis até compreender, com a ajuda de Rita de Cássia Cicero de Sá e Ida Garcia Cassiano, minhas professoras da antiga 8ª série do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio, respectivamente, que a Matemática não era um "bicho de sete cabeças" como todos insistiam em adjetivar. A partir daquele momento meu desafio seria desestigmatizar a disciplina e fazer com que outros pudessem enxergar suas belezas.

Vida que segue ...

Estou agora do outro lado da sala de aula, sou eu quem responde a alguns questionamentos que um dia também foram meus.

Leciono formalmente desde fevereiro de 2007, e com o passar dos anos pude perceber os sentimentos despertados pela Matemática nos estudantes. São relatos de amor e ódio, predominantemente o último. Aos que declaram alguma afeição pela disciplina, não por acaso, encontram-se aqueles que tem facilidade não somente em Matemática, mas também em outras matérias ditas "exatas". Já a falta de apreço pela disciplina pode ser observada mais frequentemente em indivíduos com inclinação para área de humanas, em especial nas artes. Nesses casos, noto que a falta de respostas para seus "por que" e "como" agrava o desinteresse pela matéria. Mas não será também a Matemática fonte de criatividade?

Esse texto não se preocupa em validar ou desqualificar minhas impressões, e sim fazer uma constatação, declarar um desconforto, ou até mesmo sugerir aos leitores uma interrogação que me fiz por algumas vezes nesses poucos anos de carreira. Talvez esse tema já tenha sido tratado anteriormente, ou ainda precise ser detalhado, compreendido, refletido por cada professor ao longo de sua carreira. Contudo, essa não é a intenção deste trabalho, mas acreditando em minha intuição e na capacidade de refletir criticamente, eu me propus desenvolver uma atividade de pesquisa bibliográfica e de campo em que o pano de fundo fosse a Matemática, mas que *a priori* as Artes, ou, em particular, alguma expressão dela, fosse objeto de trabalho. A proposta de intervenção teria um viés interdisciplinar[1] uma vez que busco nessa perspectiva estabelecer, ou recuperar, as ligações e solidariedades entre os objetos das diferentes disciplinas. Nesse sentido, vale o alerta de Morin (1999) sobre o risco do "espírito hiperdisciplinar" blindar as disciplinas.

Em março de 2012 iniciou-se mais uma etapa de minha formação. Uma vez aprovada, dei início ao curso de Mestrado Profissional - PROFMAT -, chancelado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Acreditando em minha intuição, a partir de trabalhos já desenvolvidos por colegas de mestrado e profissão, pensei em elaborar uma atividade de investigação em que Matemática e Arte estivessem organicamente relacionadas. Em uma pesquisa bibliográfica inicial surgiram algumas possibilidades de interação entre minha disciplina e as artes, mas a associação da Matemática à Música foi a que mais me chamou atenção. Sou uma leiga apreciadora de música e a possibilidade de aprender algo novo junto com meus alunos me encantou. A proposta de relacionar as duas ciências seria um desafio para mim que tive uma formação profissional disciplinar por excelência. Sem dúvida todo processo de pesquisa-ação [2] estaria norteado pela compreensão do desafio apontado por Novoa de transformar meu arcabouço intelectual em práticas pedagógicas consistentes e eficazes no processo de ensino-aprendizagem.

A curiosidade já estava aguçada, mas precisava estabelecer onde esse trabalho aconteceria. O início do ano letivo de 2013 me traria essa resposta.

Desde 2011 leciono a disciplina de Matemática na ESCOLA SESC DE ENSINO MÉDIO, escola residência localizada na zona oeste do Rio de Janeiro. Com um perfil inovador, de missão ambiciosa, a escola abriga estudantes de 14 a 18 anos, oriundos de todo o Brasil, durante os três anos do Ensino Médio. Nos primeiros dois anos ministrei aulas de Geometria Plana em turmas de primeiro ano do Ensino Médio. Em 2013 fui remanejada para a terceira série, mas permaneci responsável pelo ensino de Geometria, que na ocasião era predominantemente espacial. Em 2014 retornei a primeira série do Ensino Médio, porém encarregada dos conteúdos de Aritmética e Álgebra. Esse ano (2015) com o fim da fragmentação dos conteúdos da disciplina, estou a frente de 3 turmas de primeira série e juntos fazemos um passeio por tópicos de Álgebra, Aritmética e Geometria Plana. Digo passeio pois nossa única preocupação no momento de planejamento é fazer com que os conteúdos se conectem por afinidades.

Tendo a pesquisa como um princípio pedagógico, iniciou-se na escola, em 2012, o

[1] A interdisciplinaridade não dilui as disciplinas, ao contrário, mantém sua individualidade. Mas integra as disciplinas a partir da compreensão das múltiplas causas ou fatores que intervêm sobre a realidade e trabalha todas as linguagens necessárias para a constituição de conhecimentos, comunicação e negociação de significados e registro sistemático dos resultados. (BRASIL, 1999, p. 89)

[2] A pesquisa-ação pressupõe uma participação planejada do pesquisador na situação problemática a ser investigada. O processo de pesquisa recorre a uma metodologia sistemática, no sentido de transformar as realidades observadas, a partir de sua compreensão, conhecimento e compromisso para a ação dos elementos envolvidos na pesquisa. (**??**)

Projeto de Iniciação Científica (PIC), obrigatório para alunos da segunda série do Ensino Médio. Em 2013, esse mesmo projeto foi revisitado, porém com a participação dos alunos de primeira e segunda séries. No primeiro ano, somente os professores da série deveriam propor suas linhas de pesquisa.

Em 2012 eu trabalhava exclusivamente com a primeira série, logo não participei do projeto na oportunidade de sua implantação. No ano seguinte, todos os professores da instituição foram convocados a participar desse movimento de incentivo à pesquisa. Foi nesse cenário que propus meu trabalho. Inscreveram-se para o PIC três alunos músicos. Qualifico-os assim pois todos tocam, pelo menos, um instrumento musical. Para corroborar, ou contrariar, minha expectativa, os três tinham desempenho excelente em Matemática.

As atividades propostas aos três alunos fazem parte desse texto, bem como, às conclusões a que cheguei durante a execução do trabalho. Antecipo que não foi uma tarefa fácil, dada a falta de domínio de teoria musical nas etapas iniciais do trabalho, mas garanto que perceber o envolvimento dos jovens na pesquisa fez com que todo sacrifício e esforço valessem a pena.

1 A INICIAÇÃO CIENTÍFICA NA ESCOLA

A mudança é um processo inerente à vontade humana. A adaptação à ela sim depende de quão predisposto está o indivíduo a reconhecê-la e incorporá-la na sua rotina. No Brasil, muito se diz em demérito ao jovem de hoje[3]. Não faltam reclamações sobre sua postura em sala de aula e seu desinteresse pelas disciplinas curriculares que lhes são apresentadas. E a escola de hoje? Será que ela soube acompanhar as mudanças e demandas da sociedade ao longo do tempo?

É imperativo na educação uma mudança de atitude no que diz respeito às estratégias do processo de ensino-aprendizagem. A prática investigativa, a contextualização e a interdisciplinaridade são pontos nevrálgicos desse movimento de repensar a educação.

No artigo intitulado "Ciência e Cidadania", publicado pela revista Scientific American Brasil (ed.59, abr.2007), Miguel Nicolelis alerta que "O Brasil está caindo num fosso educacional e se não mudarmos de atitude, não haverá mais volta. Sem investir no potencial humano, é melhor esquecer a ideia de fazer o Brasil crescer". Poucos anos antes, no ano de 2004, Miguel Nicodelis foi eleito pela mesma revista um dos 20 líderes mundiais em pesquisa científica.

A Iniciação Científica (IC) no Ensino Básico é uma das possíveis estratégias de desenvolvimento do potencial humano. Essa já é uma prática comum nas universidades, porém inovadora no ambiente escolar cujas contribuições extrapolam o campo profissional.

1.1 Por que fazer?

As universidades tem como característica marcante o incentivo ao desenvolvimento científico. Vários pesquisadores observam no ensino superior, em particular Neuenfeldt *et al* (2008), que na pesquisa "predomina a tendência à reprodução do conhecimento", fenômeno que foge totalmente o espírito da iniciação científica, onde a curiosidade e a criatividade devem nortear o trabalho. Faustino *et al* conjuntamente acredita que a IC na Escola Básica, além de promover ações que objetivam a familiarização dos indivíduos com os processos de construção do conhecimento, desconstrói o conceito equivocado de pesquisa que muitos trazem do ensino básico para a graduação. Embora a pesquisa na Educação Básica seja diferente da pesquisa no Ensino Superior (FAUSTINO; NASCIMENTO; SILVEIRA, 2013), o que deve orientar um Projeto de Iniciação Científica ou

[3] A autora entende por jovem de hoje como a geração atual de meninos e meninas que se encontram em idade escolar.

PIC, como é chamado em várias instituições de Ensino Básico, é motivo de discussão.

Devemos refletir por qual motivo isso ocorre. Seria a falta de bases teóricas no EM ou ainda a forma com que as disciplinas são lecionadas? Neuenfedt (2011) afirma:

> O fazer e refazer-se na e pela pesquisa é o que melhor distingue a educação escolar de outros tipos e espaços educativos, tais como: a família, a roda de amigos, o ambiente de trabalho etc.

O autor conclui, a partir de pesquisa realizada com orientadores de IC da UNIVATES, que os jovens recém chagados à universidade não compreendem o sentido de pesquisa. Tal resultado nos permite crer que cabe à Educação Básica a familiarização dos futuros universitários com os mecanismos de construção do conhecimento científico.

A IC na escola tem como principal objetivo desenvolver habilidades como motivação e interação social, dois dos três pilares do nobel economista americano Heckman [4], em artigo publicado pela Folha de São Paulo, em 17 de outubro de 2011, para a qualidade da educação. A pesquisa científica, propriamente dita, no Ensino Básico, ou simplesmente uma iniciação a ela, geralmente não busca hipervalorizar os resultados, mas valorar o processo pelo qual o cientista teve que passar para validar, ou negar, uma teoria. Para isso, é fundamental que os jovens acreditem que, segundo Martins (2006, p.2), "a ciência não brota pronta, na cabeça de "grandes gênios".".

A iniciação científica precoce, isto é, antes mesmo que o indivíduo ingresse no Ensino Superior, desperta o interesse dos jovens pela ciência e evidencia quais deles se identificam com a rotina trabalho do pesquisador científico. Tais contribuições são de grande valia para os adolescentes, que terminam o Ensino Médio incertos de quais escolhas profissionais devem ou não fazer.

1.2 Como fazer?

No Brasil, a IC de estudantes de Ensino Médio ainda é uma prática recente. Frequentemente, na escola a pesquisa é relacionada à metodologia de projetos. Os projetos ditos de aprendizagem melhor caracterizam o que se pratica nas escolas atualmente, pois proporcionam a elaboração de novas teorias, não obrigatoriamente para a ciência, mas para os alunos. A iniciativa e a permanência dos jovens num projeto de aprendizagem exige, primordialmente, engajamento dos participantes. É necessário que o aluno se interesse pelo assunto a ser estudado. Os indivíduos devem trabalhar em equipe, experimentando suas impressões e partilhando com a comunidade escolar suas conclusões.

[4] Nascido em Chicago, Illinois, EUA, Heckman licenciou-se em Matemática no Colorado College, passando por Princeton University, onde se doutorou em Economia em 1971. Foi laureado com o Prémio de Ciências Económicas em Memória de Alfred Nobel de 2000.

Nessa dinâmica, transformam um conjunto de informações aparentemente aleatórias em conhecimento.

A metodologia de projeto permite ao aluno a construção e significação do conhecimento. Para além de desenvolvimento intelectual individual, o discente experimenta a socialização através da partilha de informações dentro e fora dos grupos de pesquisa, aprimora sua autonomia e exercita sua criticidade.

Segundo Ovigli, em relação às disciplinas, a prática de projetos:

> [...] implica ensino globalizado. Não se pensa em disciplinas isoladas, mas em um problema real a ser modelado e equacionado (...), no qual as relações entre os conteúdos e as áreas de conhecimento serão utilizadas para resolver problemas apresentados pelo processo de aprendizagem. (OVIGLI, 2014, p.5)

Não desmerecendo os projetos de aprendizagem desenvolvidos nas escolas, deve-se diferenciá-los dos projetos de pesquisa frequentemente vistos nas universidades e entendê-los como ferramentas capazes de despertar o interesse de futuros pesquisadores científicos. No exercício da pesquisa escolar os alunos exercitam o "aprender a aprender" e desenvolvem autonomia intelectual.

Nesse contexto, existem diversas formas de motivar a pesquisa científica. Em alguns casos, dá-se início ao processo de iniciação científica através de abordagens históricas, que muitas das vezes, desempenham papel fundamental na aquisição de requisitos mínimos à pesquisa. Tal tendência corrobora com Martins quando o mesmo diz que:

> [...] o estudo adequado de alguns episódios históricos também permite perceber o processo social (coletivo) e gradativo de construção do conhecimento, permitindo formar uma visão mais concreta e correta da real natureza da ciência, seus procedimentos e suas limitações – o que contribui para a formação de um espírito crítico e desmitificação do conhecimento científico, sem no entanto negar seu valor. (MARTINS, 2006, p.1)

Outra possibilidade de inserção da prática de pesquisa científica na educação básica é o estudo de tipos de conhecimento, metodologias de pesquisa e análise de resultados. Nesse caso, o professor pesquisador, que por muitas vezes atua de forma empírica, deve buscar subsídios teóricos para a implementação da pesquisa no exercício da profissão, ao contrário do que hora possa ter experimentado na academia com o objetivo esvaziado de enriquecimento de currículo profissional individual.

Acreditando na importância da iniciação científica no ensino médio, e reconhecendo as trilhas pelas quais ela caminha, é preciso finalmente admitir o papel fundamental do professor orientador e os pré requisitos para o desempenho de tal função. Segundo Lüdke (2005) "o tema "professsor pesquisador"tem ganhado espaço no cenário de discussão acadêmica"(p.86), desde a década de 90, em repercussão à publicação do artigo *TheReflectivePractitioner*, em 1983, de Schön. Reflexão e pesquisa se aproximam na prática de um professor pesquisador, mas a autora afirma que:

> [...] reflexão não é sinônimo de pesquisa e o professor que reflete sobre a sua prática pode produzir conhecimento sem necessariamente, ser um pesquisador. Quando ele avança, indo ainda além da reflexão, do ato de debruçar-se outra vez para entender o fenômeno, encurta a distância que o separa do trabalho de pesquisar, que apresenta, entretanto, outras exigências, entre as quais a análise à luz da teoria. (LÜDKE, 2005, p.90)

Refletir é tarefa profissional de um educador, porém não é incomum ouvirmos relatos de professores que se sentem despreparados para, a partir do que introjetaram, reverberar suas ideias e orientar seus alunos numa pesquisa científica. O que se percebe em algumas universidades públicas do país é um incentivo à pesquisa nos cursos de bacharelado, e pouco, ou até mesmo nenhum, investimento no desenvolvimento de pesquisadores nos cursos de licenciatura. A formação de professores, ainda hoje, desconecta a teoria da prática. A capacitação dos professores orientadores, por sua vez, deve ser uma das primeiras, se não a primeira, etapa pela qual a escola que deseja proporcionar a iniciação científica de seus alunos deve passar. Essa capacitação deve contemplar não somente habilidades técnicas da pesquisa, mas também práticas como a busca por investimento financeiro junto às instituições como o CNPq. Uma "boa" orientação, isto é, a presença de um orientador bem preparado para a tarefa de encaminhar os jovens no processo investigativo, não lhes impedem de serem criativos. Nesse exercício de tentativa e erro, conclui-se que "a investigação científica é uma "arte prática". Como afirma Ziman (1979), não se aprende nos livros e sim através da imitação e da experiência.".

Muitos de nós professores somos inexperientes no exercício da IC. A autora, por exemplo, teve contato com o que podemos chamar de pesquisa no preparo das duas monografias ao longo de sua carreira acadêmica e profissional. Ambos os trabalhos se desenvolveram a partir de suas experiências em sala de aula, e não da prática de pesquisa científica. Comumente, professores participam de projetos de pesquisa, mas só a realização "(...) com regularidade e autonomia pode conduzir ao *status* de pesquisador (...)"(Lüdke, 2005). Nas escolas, quando iniciamos um projeto de IC quase sempre estamos voltados para a aprendizagem dos conceitos da disciplina, o que não necessariamente está vinculado a alguma atividade considerada pesquisa na academia.

A luz das últimas reflexões, deve-se considerar que há, segundo Beillerot, em Lüdke, diferença entre "estar em pesquisa", "fazer pesquisa"e "ser pesquisador". Muito provavelmente, os professores "estão em pesquisa". "fazer pesquisa"e "ser pesquisador", entendendo que a segunda é consequência imediata da regularidade do exercício da primeira, exige dedicação incompatível com a rotina de um professor atuante em sala de aula.

1.3 Iniciativas públicas de incentivo à IC

Uma das formas de se "investir no potencial humano"é garantir aos cidadãos o direito à educação. Os Parâmetros Curriculares Nacionais, publicados em 2000, definem que um dos princípios da educação está na "liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber".

Atento a esse anseio por mudanças nas práticas educacionais e, atendendo à demanda sinalizada por Miguel Nicodelis, em 9 de outubro 2009, o Governo Federal instituiu, pela Portaria nº 971, o Programa Ensino Médio Inovador – ProEMI. O texto é parte do documento que estabelece as ações do Plano de Desenvolvimento da Educação - PDE, e visa:

> [...] apoiar e fortalecer o desenvolvimento de propostas curriculares inovadoras nas escolas de ensino médio, ampliando o tempo dos estudantes na escola e buscando garantir a formação integral com a inserção de atividades que tornem o currículo mais dinâmico, atendendo também as expectativas dos estudantes do Ensino Médio e às demandas da sociedade contemporânea.

A fim de proporcionar o que o documento chama de "formação integral", o ProEMI sugere a reestruturação do currículo de modo que "trabalho, ciência, cultura e tecnologia"sejam contemplados em 8 macrocampos do conhecimento, onde um deles é a Iniciação Científica e Pesquisa. De acordo com o documento a adesão ao Ensino Médio Inovador deve ser promovida pelas secretarias estaduais e distritais de educação, enquanto o apoio técnico e financeiro é de responsabilidade do Programa Dinheiro Direto na Escola - PDDE.

Muito antes do alerta de Miguel Nicodelis e da Portaria nº 971, em 1951, o CNPq - Centro Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - dava início às suas atividades. Desde então, essa agência do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação - MCTI - vem sendo um dos principais órgãos fomentadores de pesquisa científica e tecnológica no Brasil, acreditando que :

> [...] é necessário estimular os jovens a se tornarem profissionais da ciência e da tecnologia, para avançarmos no conhecimento existente. Assim, é preciso que desde os primeiros anos da educação formal os(as) estudantes sejam postos em contato com a cultura científica, ou seja, com a maneira científica de produzir conhecimento e com as principais atividades humanas que têm moldado o meio ambiente e a vida humana ao longo da história. Acima de tudo, é preciso permitir que sejam criativos e inovadores. E capazes de sonhar! Esses são os principais ingredientes da ciência.

Destinados a alunos de Ensino Médio e Superior, os programas de estímulo à pesquisa promovidos pelo CNPq, em parceria com Institutos, Universidades e Fundações, oferecem bolsas e subsídios práticos para que os estudantes possam aprofundar seus estudos. Atendem ao Ensino Médio três dos sete projetos desenvolvidos pela instituição, são eles: Programa de Iniciação Científica da Olimpíada Brasileira de Matemática das

Escolas Públicas - PIC-OBMEP, Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica para o Ensino Médio - PIBIC- EM e Programa de Iniciação Científica Júnior - ICJ.

1.4 IC em ação

Não é de hoje que se aposta na pesquisa como um princípio educativo. Inicialmente essa ideia estava diretamente ligada ao professor como pesquisador. Já no início do século XX, segundo Moura *et al*, com a vivência da chamada "escola nova", surge no cenário educacional a figura do "aluno pesquisador". Consequentemente, desdobram-se algumas ações, umas mais discretas que outras, de implantação de pesquisa científica em ambientes escolares. O projeto Miguel Nicodelis, já citado no presente texto, a implantação da disciplina de Metodologia de Pesquisa no Ensino Médio em um colégio paulista e as feiras de ciências são iniciativas pontuais de valorização e incentivo à formação científica destacadas por Moura *et al.*

Um dos primeiros registros, em uma ação de grande porte, de IC para além dos muros da universidade, segundo Ferreira (2003), deu-se com a implantação do Programa de Vocação Científica da Fundação Oswaldo Cruz - Provoc, em 1986. De acordo com a autora, os alunos de ensino médio da fundação, que em sua maioria ainda não definiram suas expectativas profissionais, tem a oportunidade de conviver e receber orientação acadêmica de pesquisadores atuantes em instituições científicas de destaque.

Os jovens que participam do Provoc submergem num ambiente real de pesquisa, pois tem a chance de executar seus estudos em laboratórios e apresentam seus trabalhos em eventos científicos de pequeno e grande porte. Nessa dinâmica, desenvolvem características fundamentais aos que pretendem seguir carreira científica.

A rotina de pesquisas do Provoc, segundo Filipecki, promove o encontro entre estudantes de Ensino Médio e Superior o que permite a implementação da estratégia de orientação chamada de "filosofia do irmão mais velho". Dessa forma, os pós-graduandos orientam os graduandos, que por sua vez o fazem com os estudantes do Ensino Médio.

Filipecki qualifica as atividades de IC do Provoc como sistemáticas e disciplinadoras na medida que os instrumentos de seleção e avaliação contemplam habilidades como planejamento, execução, interpretação e comunicação da pesquisa e de seus resultados.

A implementação e manutenção até os dias atuais do Provoc sinaliza para o fato de que a pesquisa nos moldes acadêmicos vem invadindo algumas escolas de ensino médio. O conteúdo estanque, ofertado aos alunos, deixou de ser uma prática frequente nas salas de aula. A necessidade de contextualização e o desejo de desenvolver a capacidade de raciocínio dos jovens vem reforçando a ideia de que a IC é de fato um princípio básico da educação.

2 INICIAÇÃO CIENTÍFICA NA ESCOLA SESC DE ENSINO MÉDIO

O presente capítulo inicialmente faz uma breve descrição da estrutura física da instituição, situa o leitor em relação à época em que o projeto foi implementado e relata o funcionamento do PIC desenvolvido pela Escola SESC de Ensino Médio. Posteriormente, apresenta alguns dos argumentos que justificaram tal prática no Ensino Médio.

2.1 Onde, quando e como

Em 19 de fevereiro de 2008 a Escola SESC de Ensino Médio deu início às suas atividades num modelo inovador para os moldes brasileiros de educação. Localizada no bairro de Jacarepaguá, no Rio de Janeiro, em aproximadamente 130 mil metros quadrados de área, a escola é residência para a totalidade de seus alunos, e também para grande parte de seus educadores, entre docentes e gestores.

O acesso à escola se dá inicialmente por uma prova de seleção que ocorre nas 27 Unidades da Federação do Brasil. Não há pré-requisito para a inscrição, porém as vagas são destinadas preferencialmente aos dependentes de comerciários, aos que possuam renda inferior à cinco salários mínimos ou tenham estudado por pelo menos dois terços do Ensino Fundamental em escolas do SESC ou públicas ou particulares na condição de bolsista, nessa ordem. O preenchimento desses critérios garante até 700 pontos aos candidatos. Porém essa pontuação só é atribuída àqueles que forem considerados aprovados na primeira etapa, onde todos os candidatos são submetidos à uma prova objetiva e à confecção de uma redação. A fase final de seleção é marcada por uma entrevista com os candidatos. A classificação é feita em ordem decrescente, e os melhores colocados são convocados ao preenchimento das vagas disponíveis para cada unidade federativa.

Já na escola, os alunos aprovados, classificados e matriculados, passam a residir em prédios de três andares, organizados por gênero e série. Em cada quarto moram 3 estudantes. Um educador reside em cada andar, são os chamados RD's (residentes de dormitório). Essa é a estrutura residencial vivenciada na escola. Academicamente os alunos ficam distribuídos em turmas de 15 alunos. Durante o dia participam de aulas dos currículos regular e diversificado, e, recuperações.

Dentre todas as atividades obrigatórias que esses jovens experimentam na escola esteve, durante os anos de 2012, 2013 e 2014, o PIC. Iniciado em 2012 apenas para os estudantes da segunda série, no ano seguinte o projeto abrangeu a totalidade dos docentes e os discentes de primeira e segunda séries, com participação opcional dos estudantes de terceira série. A instituição, considerando a pesquisa como um princípio pedagógico, convocou àqueles descritos anteriormente ao trabalho e garantiu na carga horária um encontro semanal entre orientadores e orientandos, com duração de 50 minutos. Os grupos, obrigatoriamente, não se repetiam de um ano para o outro. Nesse ambiente investigativo, professor e alunos fomentaram a prática científica formulando questões e partindo em busca de respostas.

Para a inscrição nos grupos de pesquisa cada aluno listou em ordem de preferência cinco frentes de pesquisa e coube às orientadoras educacionais[5] distribuí-los nas equipes de trabalho. Os temas sugeridos deveriam enquadrar-se em cinco linhas de pesquisa, a saber:

1. Linguagens e representações sociais;
2. Ciência, tecnologia e sociedade;
3. Meio ambiente e responsabilidade social;
4. Juventude, educação e cultura;
5. Trabalho, identidade e relações de poder.

Dessa forma, cada professor orientador escolheu uma linha de pesquisa, sugeriu um tema afim à essa linha e os estudantes se inscreveram de acordo com seus desejos e anseios de investigação. Durante aproximadamente 6 meses, cada grupo definiu o objeto de estudo através de um recorte da linha de pesquisa na qual foi destinado, buscou informações bibliográficas e práticas, e, apresentou à comunidade escolar suas conclusões num evento anual intitulado "Escola Aberta". Na ocasião, todas as produções do ano vigente foram expostas não somente aos docentes e discentes da instituição, mas também àqueles que visitam a escola nesse período.

No ano de 2013 a autora foi convocada à orientar pela primeira vez um desses grupos de pesquisa, e sugeriu então o tema "Matemática e Música". Se inscreveram para a pesquisa três alunos que cursavam na ocasião a segunda série do Ensino Médio: Dhanilo Brelaz (aluno P), Gabriel Rossetto (aluno I) e Lincoln Junior (aluno C). Não por acaso, acredita a autora, todos tocavam algum instrumento e tinham boas notas em Matemática. O grupo iniciou a pesquisa em meados de abril daquele ano. Todas as quartas-feiras letivas, exceto raras exceções por conta de algum compromisso extraordinário, às 14 horas, as equipes de trabalho se encontravam na sala da autora por um período de 50 minutos. Durante aproximadamente 6 meses daquele ano, o grupo, num exercício de orientação e pesquisa, buscou tecer relações entre a Matemática e a Música. Começou então um movimento semelhante ao de Pitágoras, que por volta do século VI a. C., deu seus

[5] Funcionárias da Escola SESC de Ensino Médio com formação em Pedagogia e especialização em Orientação Educional, no total duas, destinadas ao trabalho de orientação de aproximadamente 500 alunos.

primeiros passos no estudo integrado das duas áreas, porém ganhou-se tempo com a herança de alguns conhecimentos já formalizados como o estudo das ondas sonoras na Física, e das funções trigonométricas na Matemática.

2.2 Por que

O termo "professor pesquisador"não é novo na literatura pedagógica. A pesquisa como um princípio educativo, criando o personagem do "aluno pesquisador", é que vem ganhando força com a implantação de metodologias de ensino inovadoras. Inovadoras na prática, mas já previstas em lei como se observa na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (lei 9394/96) onde lê-se que é princípio e fim da educação nacional a "liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber". Nesse contexto pressupõe-se o incentivo às atividades de pesquisa com o objetivo de desenvolver o raciocínio autônomo, tendo em vista que ofertar conhecimentos estanques não é, nem de longe, a tarefa de um educador. Em sala de aula, ou fora dela, entendendo que não há limites espacias para a educação, o educando deve ser estimulado a pensar e refletir sobre os fenômenos que o cercam. Tendo um objeto de estudo em pauta, o aluno deve buscar nas ciências, exercitando a interdisciplinaridade, explicações para seus questionamentos. Não necessariamente deve produzir conhecimento novo para a ciência, mas algo que para si seja de fato novo. Nesse exercício de pesquisa, a informação se transforma em conhecimento e o indivíduo adquire estratégias para o "aprender a aprender".

Porém a implantação de um projeto de iniciação científica demanda inicialmente uma desconstrução do que se entende na escola por pesquisa. Uma pesquisa de fato em nada se parece com o exercício de copiar e colar textos oriundos da internet como muito jovens acreditam e vem praticando. Para se fazer pesquisa inicialmente é preciso tomar consciência de um problema, observar sob quais condições ele ocorre, buscar nas ciências subsídios para possíveis respostas e verificar os resultados fornecidos pelo processo, sejam eles positivos ou não.

A Escola SESC de Ensino Médio reafirma seu perfil inovador quando convoca toda comunidade escolar à iniciação científica. Entendendo a pesquisa como uma atividade criativa, estimulante e inventiva, o PIC traz à instituição uma ferramenta de aprendizagem alternativa às aulas regulares, frequentemente expositivas. Ou seja, concentra nos estudantes a responsabilidade de produzir conhecimento, não necessariamente inédito, a partir da curiosidade e da busca pelo novo. Nesse exercício, estudantes e professores, não somente constroem conhecimento, mas também intervêm e reconstroem o objeto de pesquisa. Numa perspectiva mais ampla, pode-se dizer que a fomentação à pesquisa no Ensino Médio promove de forma muito natural a contextualização e a interdisciplinaridade dos conteúdos curriculares, dois grandes desafios para professores que experimentaram na graduação uma formação essencialmente disciplinar.

3 REQUISITOS MÍNIMOS

Associar a Matemática à Música não é algo recente. A Música de Orfeu na mitologia grega e a Matemática usada nas estratégias de contagem são evidências encontradas desde a Antiguidade. Na época, as áreas ainda eram vistas em separado. Posteriormente na Grécia Antiga, mais especificamente na escola pitagórica, por volta do século VI a.C., faz-se o primeiro registro de relação entre as duas áreas. A partir de um instrumento chamado monocórdio, que muito provavelmente foi inventado por Pitágoras, a música passa ser considerada o quarto ramo da matemática[6]. Um dos experimentos da escola pitagórica mostrou que a altura musical do som emitido pela corda quando tocada estaria relacionada com o comprimento da mesma. Conforme Abdounur:

> Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda em relação a sua extremidade - o que equivale a reduzi-la a $\frac{3}{4}$ de seu tamanho original - e tocando-a a seguir ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Analogamente, exercida a pressão a $\frac{2}{3}$ do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a $\frac{1}{2}$ obtinha-se a oitava do som original. (ABDOUNUR, 2006)

A partir daí matemática e música se estruturaram, e se relacionaram, no tempo e no espaço. Atualmente existem diversos estudos que demonstram a interação entre ambas, porém o objetivo deste trabalho não é oferecer mais do mesmo e por esse motivo foi omitido todo desenrolar histórico das duas grandes áreas citadas.

Este capítulo tem por finalidade oferecer subsídio teórico interdisciplinar para que as atividades propostas em sequência sejam desenvolvidas.

3.1 Introdução ao Estudo do Som

O que se entende por som?

Segundo (BISTAFA, 2011) "o som é a sensação produzida no sistema auditivo; (...) Sons são vibrações das partículas de ar que se propagam a partir de estruturas vibrantes.". Muitos dos seres vivos são capazes não somente de ouvir o som, mas também senti-lo. Porém nem todo som é audível aos ouvidos dos seres humanos. Numa faixa de áudio que varia de 20Hz[7] a 20000Hz somos capazes de ouvir determinado som. Frequências menores

[6] Os outros três ramos da Matemática eram aritmética, geometria e astronomia.

[7] Hertz(Hz) é a unidade de medida utilizada para frequência. Expressa em ciclos por segundo a frequência de um evento periódico.

que 20Hz, os chamados infrassons, ou maiores que 20000Hz, os ditos ultrassons, não são audíveis ao ser humano. Bistafa (2011, p.18) diz ainda que “o som pode ser definido como uma variação da pressão ambiente detectável pelo sistema auditivo.”.

Existem diversas formas de se obter som a partir da vibração de uma estrutura. Tais estruturas movimentam de forma cíclica as partículas contidas no ar ao seu redor provocando de tempos em tempos concentração e rarefação das mesmas, proporcionando consequentemente aumento e redução da pressão ambiente local. Essa variação de pressão é responsável pela emissão de som.

A propagação do som nos meios materiais (sólido, líquido ou gasoso) se dá através de ondas sonoras. Em Halliday (2011, p.146) tem-se que “as ondas sonoras (...) são de natureza mecânica, o que significa que se propagam devido às forças mecânicas (elásticas) atuantes sobre as partículas do meio.”Por uma demanda desse texto em particular, serão consideradas apenas ondas sonoras propagadas no ar, logo ondas mecânicas longitudinais.

Frequentemente pode-se observar duas ou mais ondas se propagando simultaneamente, porém de forma independente, por uma única região do espaço. Esse fenômeno exemplifica o chamado princípio da superposição, observado por exemplo numa apresentação orquestral. Quando tal princípio é válido pode-se analisar um complexo movimento de ondas através da combinação de ondas mais simples, as chamadas ondas harmônicas. Ondas harmônicas podem ser representadas pelas funções seno e cosseno. J. Fourier (1768-1830)[8], matemático francês, demonstrou segundo Halliday (2011, p.129) que “cada movimento periódico de uma partícula poderia ser representado pela combinação de movimentos harmônicos simples.”. Dessa forma se considerarmos y(x), num dado instante de tempo, a representação da onda de uma fonte de ondas de comprimento λ teremos:

$$y(x) = A_0+A_1 \operatorname{sen}(kx)+A_2 \operatorname{sen}(2kx)+A_3 \operatorname{sen}(3kx)+...+B_1 \cos(kx)+B_2 \cos(2kx)+B_3 \cos(3kx)+... \tag{1}$$

, onde $k = 2\pi/\lambda$. Além disso, A_n e B_n são definidos em particular para cada movimento periódico.

A expressão 1 é denominada série de Fourier.

Conclui Halliday:

> Assim, qualquer movimento de uma fonte de onda pode ser representado em termos de uma superposição de movimentos harmônicos simples e qualquer forma de onda gerada dessa forma pode ser analisada como uma

[8] Precursor da Física-Matemática, em seus últimos anos de estudo desenvolveu uma série, diferente do método de Taylor, por empregar funções periódicas em vez de potências.

> combinação de componentes que são individualmente ondas harmônicas simples também. (HALLIDAY, 2011, p.129)

Para que uma função real, definida em um intervalo $[-L, L[$, seja representada por uma série de Fourier é necessário que as condições do Teorema de Fourier, para a função e sua derivada, sejam satisfeitas.

Teorema de Fourier Suponhamos que f e f' sejam seccionalmente contínuas no intervalo $-L \leq x < L$. Além disso, suponhamos que f seja definida fora do intervalo $-L \leq x < L$, de modo a ser periódica com período $2L$. Então f tem uma série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right). \tag{2}$$

cujos coeficientes são dados pelas Eqs. 3 e 4.

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx, m = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx, m = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

A série de Fourier converge par $f(x)$ em todos os pontos onde f for contínua, e para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em todos os pontos onde f for descontínua.

A definição de função seccionalmente contínua e as fórmulas de Euler-Fourier estão detalhadas no Anexo A, texto oriundo de (BOYCE; DIPRIMA, 1999).

Basicamente, para que haja som, seja ele produzido pela voz ou por algum instrumento musical, é necessário que um sistema vibrante transmita pelo ar uma onda. Sem perda de generalidade, consideremos o som gerado pela manipulação de instrumentos de cordas dedilháveis (monocórdio, violão, etc).

Quando uma corda fixa por suas extremidades é tocada vibrações transversais são irradiadas por toda sua extensão e um padrão de onda é formado. Tais vibrações promovem ondas longitudinais de ar em torno da mesma chegando aos ouvidos como um som musical. Uma corda de comprimento L, dotada das características anteriormente descritas, pode atingir frequências determinadas pela equação:

$$f_n = n\frac{v}{2L}, n = 1, 2, 3, ... \tag{5}$$

, onde v é a velocidade das ondas transversais que se propagam na corda e n é a quantidade de antinós[9] de deslocamento.

Quanto maior a frequência de um tom, mais agudo, ou alto, ele será. Da mesma forma, um tom grave, ou baixo, tem frequências menores.

As ondas sonoras que chegam aos ouvidos humanos em forma de som quase nunca são puras[10]. O que se escuta é sempre uma combinação de tons puros em diversas frequências, daí a dificuldade de se obter o período e, consequentemente, a frequência para sons do cotidiano. Uma solução para esse problema é a submissão da onda à chamada transformada direta de Fourier. A aplicação dessa operação matemática tem como resultado um gráfico denominado espectro sonoro. Segundo Bistafa (2011, p.33) "o espectro sonoro fornece o valor eficaz da pressão sonora para cada frequência presente no som".

Quando, num espectro sonoro, coexistem uma determinada frequência menor, e uma família de frequências mais elevadas múltiplas dela, tem-se uma fundamental e seus harmônicos, respectivamente. A esse conjunto dá-se o nome de série harmônica. A oitava, a quinta, a quarta e a terça maior, correspondem ao dobro, triplo, quádruplo e quíntuplo da frequência fundamental, respectivamente. Isto é, a série é uma progressão aritmética. Em contrapartida, as frequências estão em progressão geométrica. Instrumentos musicais de corda produzem sons harmônicos.

Porém dois instrumentos musicais diferentes, tocando uma mesma nota, produzem impressões distintas. A forma de vibrar própria que cada instrumento possui imprime no som uma marca própria. A essa marca dá-se o nome de timbre. Observe na Fig. 1 o espectro sonoro de uma nota tocada em diferentes fontes sonoras.

Desde 1954, o conceito de timbre vem sendo amplamente estudado. Hajda atribui à Helmholtz o início das pesquisas que tem definido e caracterizado, segundo a acústica, o timbre de diversos instrumentos musicais, não percussivos em sua maioria.

Por definição:

> O timbre é determinado pelo número e intensidade das harmônicas que acompanham o som fundamental emitido pelo instrumento. O nível da pressão sonora das harmônicas é em geral diferente do nível de pressão sonora do fundamental. O número de harmônicas e os níveis de pressão sonora a elas associados é que dão ao som o seu timbre característico. (BISTAFA, 2011, p.34)

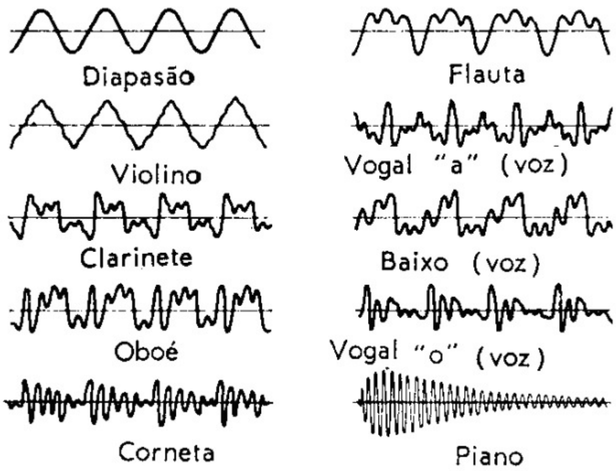
Intuitivamente, o timbre é a característica única do som que nos permite distinguir as fontes sonoras quando, por exemplo, dois instrumentos de sopro distintos emitem uma mesma nota. Ou ainda a distinção entre vozes masculinas e femininas. Resumindo, é o elemento da percepção auditiva que possibilita ao ouvinte a distinção entre dois sons

---

[9] Pontos localizados entre dois nós onde os deslocamentos oscilam com amplitude máxima.

[10] Sons numa única frequência. (Bistafa, 2011, p.33).

Figura 1 - Diferentes fontes sonoras correspondem diferentes timbres



Fonte: Disponível em https://raquellima16.wordpress.com/2011/01/27/caracteristicas-do-som-frequencia-amplitude-e-timbre/. Acessado em 13 de julho de 2015.

semelhantes. O número, a amplitude e o espaçamento das linhas espectrais são atributos da noção de timbre.

Por suas inúmeras particularidades, e características tão individualmente perceptíveis, o timbre também é chamado de "a cor do som".

Segundo Carl Seashore[11], o timbre é uma das mais importantes, porém também mais complexas, variáveis do som. Contudo, graças aos avanços da tecnologia computacional, a definição e o controle de tais variáveis acústicas tem se tornado cada dia mais acessíveis.

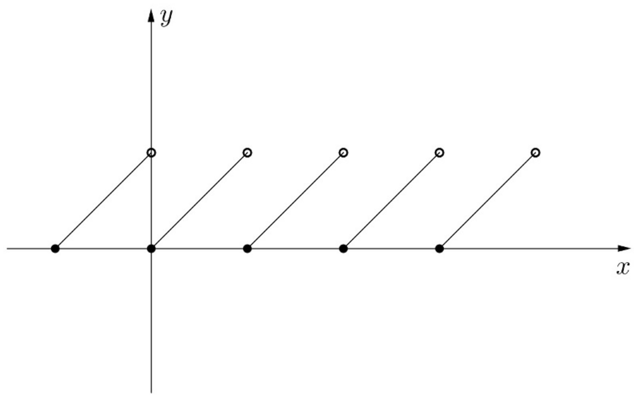
3.2 Introdução às Funções Trigonométricas: seno

3.2.1 Funções Periódicas

Iezzi (1985) define que uma função f, de domínio A e contradomínio B, é dita periódica se existe um número p>0 que satisfaça a condição de f(x+p) = f(x) para todo elemento x que pertença ao conjunto A. Chama-se período de f o menor valor de p

[11] Famoso psicólogo particularmente interessado em psicologia da música.

Figura 2 - Gráfico de uma função periódica



Fonte: Elaborada pela autora.

que satisfaça essa condição. O gráfico de uma função periódica, por sua vez, tem como característica principal o comportamento repetitivo da curva. Um exemplo gráfico de função periódica pode ser observado na Fig. 2.

3.2.2 Função Seno

Aproximando-se novamente de Iezzi tem-se que:

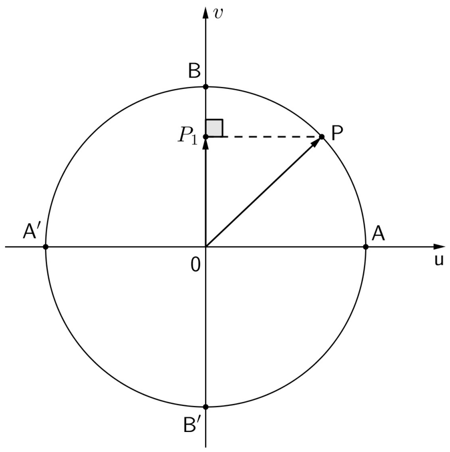
> Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos por sen x) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função seno a função $f :\rightarrow$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = senx$, isto é: $f(x) = senx$. (IEZZI, 1985)

A Fig. 3 sugere geometricamente a definição de Iezzi.

Consequentemente, pode-se concluir que o conjunto imagem da função seno é o intervalo [-1,1]; se x pertence ao primeiro ou segundo quadrante, então $senx>0$; se x pertence ao terceiro ou quarto quadrante, então $senx<0$; se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então os valores de $\overline{OP_1}$ aumentam, fazendo a função seno ser crescente nesses dois intervalos; se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então os valores de $\overline{OP_1}$ diminuem, fazendo a função seno ser decrescente nesse intervalo; a função seno é periódica de período 2π.

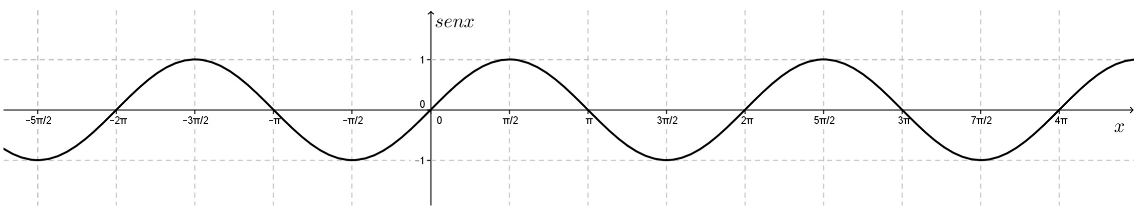
O gráfico da função é uma curva chamada senóide, conforme Fig. 4.

Figura 3 - Ciclo trigonométrico



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 4 - Gráfico da função seno



Fonte: Elaborada pela autora.

4 ATIVIDADES

Não é de hoje que matemáticos se interessam por música, e músicos pela matemática. Porém poucos se arriscam a associá-las por acreditarem que isso seria uma iniciativa ousada e de implicações complicadas demais para alunos de ensino fundamental e médio. Um bom começo para o desbravamento do desconhecido é a curiosidade e um conjunto de ações à procura daquilo que se deseja significar e apropriar.

Acreditando que, para desenvolver um projeto de pesquisa que associa a Matemática à Música, não é primordial que o professor seja perito em ambas as ciências, este capítulo objetiva descrever algumas atividades que foram propostas aos estudantes da Escola SESC de Ensino Médio, no ano de 2013, durante o período do Programa de Iniciação Científica - PIC. Com isso deseja-se despertar o interesse de alunos músicos pela matemática, estimular professores não músicos ao exercício de uma atividade relacionada à Música, inspirar a implementação dessas e de outras práticas, assim como enriquecer essa experiência investigativa.

4.1 Realizadas

Para além dos objetivos da IC já citados nesse texto, são alguns dos objetivos específicos das disciplinas envolvidas: correlacionar Matemática e Música, estudar a função periódica seno com auxílio do *softwareGeoGebra*, ter noções iniciais práticas acerca da Série de Fourier, identificar os harmônicos e relacioná-los à diferenciação dos timbres.

A realização das atividades de pesquisa desenvolvidas pela autora tem como principal requisito a necessidade de computadores com acesso à internet. O grupo deverá contar com pelo menos um integrante músico preferencialmente, mas não obrigatoriamente,

A Tabela 1 a seguir resume, e adianta aos leitores, o conteúdo das atividades relatadas nas sessões que seguem. Devido ao curto espaço de tempo semanal, 50 minutos, destinado à pesquisa, à dificuldade dos alunos executarem as tarefas solicitadas fora da sala de aula e a inexperiência da autora na realização de IC, o prazo sugerido para a execução das tarefas na prática não se realizou.

Tabela 1 - Tabela de atividades realizadas.

	Tarefa	Orientacao	Prazo Sugerido
1ª	Pesquisa bibliográfica orientada sobre possíveis associações entre Matemática e Música.	O orientador deverá sugerir aos orientandos textos diversos sobre o assunto para leitura.	2 semanas
2ª	Construção de um monocórdio.	Os orientandos deverão construir um monocórdio para estudo.	2 semanas
3ª	Manipulação do monocórdio.	Os orientandos deverão se familiarizar com o monocórdio.	1 semana
4ª	Estudo do som: ondas sonoras.	O orientador deverá sugerir aos orientandos que pesquisem em livros de Física, de Ensino Médio e Superior, informações que caracterizem as ondas sonoras.	2 semanas
5ª	Instalação e familiarização com o *software GeoGebra*.	O orientador deverá sugerir a instalação do aplicativo nos computadores dos orientandos e praticar a manipulação de suas ferramentas.	2 semanas
6ª	Estudo da função seno.	O orientador deverá sugerir a construção gráfica da função seno utilizando o *GeoGebra*.	2 semanas
7ª	Percepção sonora da função seno e suas variações.	O orientador deverá sugerir aos orientandos que executem em seus computadores o aplicativo *FourierSeriesApplet*.	2 semanas

Legenda: Orientações para as atividades.

Fonte: A autora, 2015.

4.1.1 Um pouco de Música

O primeiro encontro do grupo de pesquisa ocorreu numa quarta-feira em meados do mês de abril. Por 50 minutos discutimos sobre o que havia motivado os estudantes na escolha do tema "Matemática e Música". Quando todos já haviam se expressado, foi pedido que tentassem associar os dois temas a partir de seus conhecimentos prévios. Entendo essa etapa da pesquisa como algo particular de cada grupo, não há como pressupor ou orientar os encaminhamentos pedagógicos para a condução do debate.

Ainda no primeiro encontro, para dar início ao projeto de iniciação científica foi sugerido aos alunos que se familiarizassem com os relatos dos primeiros registros de interação entre Matemática e Música. A indicação de leitura prioritária foi de fragmentos do livro "Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados"de ABDOUNUR (2006), mas todos estavam livres para procurar em outras fontes informações que os ajudassem a ilustrar o cenário onde essa interlocução se originou.

Nas semanas seguintes , a partir do que descobriram sobre o despertar do olhar de Pitágoras para a percepção da matemática presente na música, foi pedido aos alunos que confeccionassem um monocórdio[12]. Como não havia mão de obra e material hábil para tal, a alternativa foi recorrer à um ex-aluno da escola, atualmente aluno do Curso Superior de Tecnologia em Luteria da UFPR, chamado Lucan Costa. Com o instrumento em mãos, conforme a Fig. 5, os alunos puderam perceber o som produzido pela vibração da corda solta e as variações do mesmo quando na sequência a corda era pressionada e tensionada a 1/2 (a oitava), 2/3 (a quinta) e 3/4 (a quarta) de seu comprimento inicial. Usando um aplicativo de celular, o "Afinador Cifra Club"[13] comercializado pela empresa Studio Sol, os alunos aferiram a frequência aproximada do som emitido pela corda solta, e pelas demais partições da mesma. Uma das primeiras vivências de Pitágoras na compreensão da Matemática presente na Música, foi também essa a primeira experiência realizada pelos alunos o que despertou interesse dos mesmos pelos próximos passos dessa viagem de descoberta.

Os alunos P, I e C, que participavam do grupo de pesquisa, eram músicos e por isso, já reconheciam que as partições da corda do monocórdio produziriam variações sobre o som original. Porém estava ali instaurada uma questão: será que essa era toda a Matemática contida na Música?

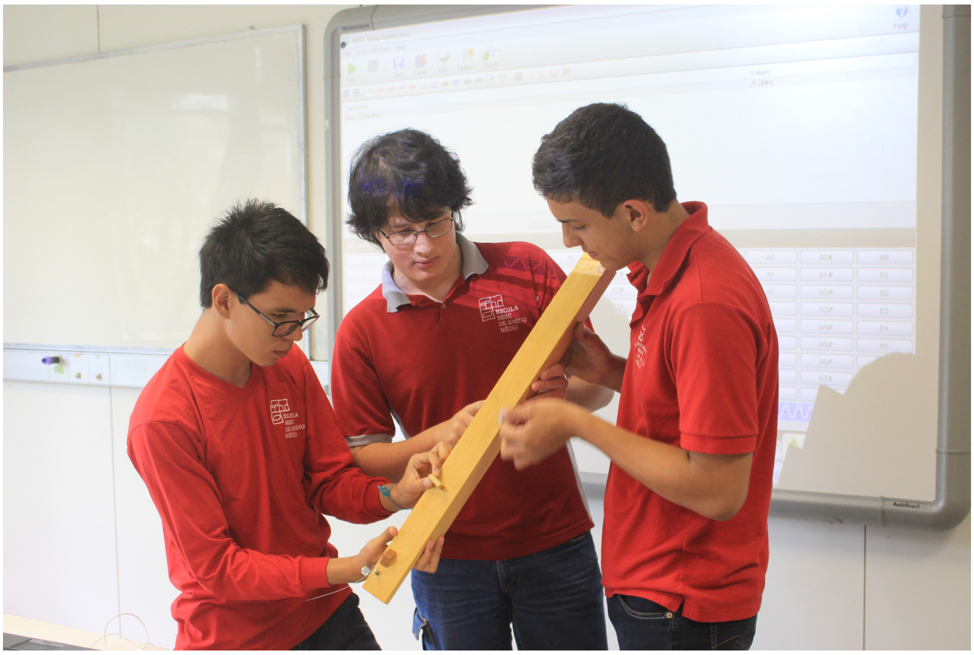
Observando a movimentação da corda tracionada por efeito do dedilhar, a partir

---

[12] Instrumento que tanto serve para treino, quanto laboratório, é constituído por uma caixa de ressonância, frequentemente de madeira, sobre a qual é fixada uma única corda através de dois cavaletes móveis.

[13] Existem diversos aplicativos como esse, para os mais populares sistemas operacionais (IOS e ANDROID) e de custo zero.

Figura 5 - Aluno P, aluno I e aluno C manipulando o monocórdio



Fonte: Imagem capturada pela autora.

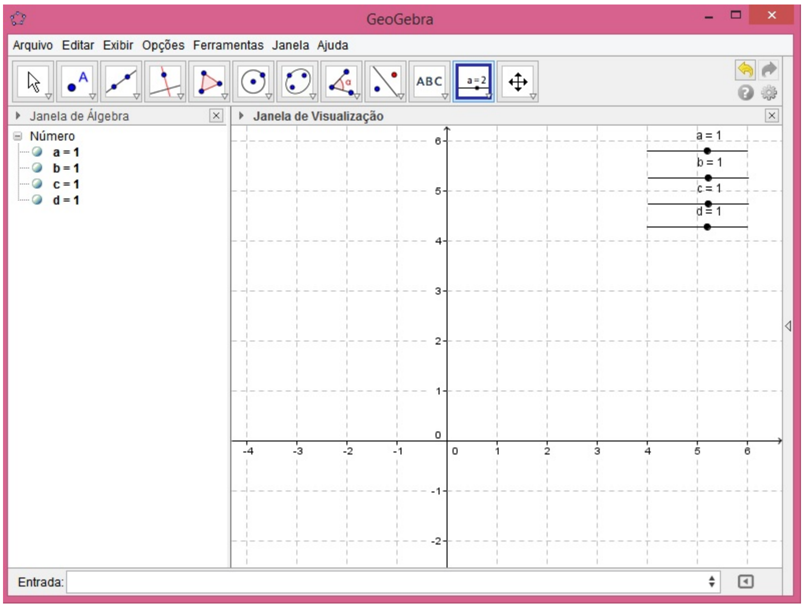
de seus conhecimentos prévios de Física, associaram a emissão do som à propagação de uma onda mecânica. Foi proposto então que aprofundassem seus conhecimentos sobre as ondas sonoras e que trouxessem algo que representasse graficamente esse fenômeno. Feito um pedido intencional, os alunos responderam a solicitação apresentando gráficos de comportamento periódico e a partir daí foi dado início ao estudo das funções matemáticas com tal comportamento, mais especificamente da função seno.

4.1.2 Um pouco de Matemática

Dando continuidade à pesquisa, foi pedido e orientado aos alunos que instalassem em seus computadores o *software* *GeoGebra*. Como os meninos cursavam naquele ano a 2ª série do Ensino Médio, era fato que tinham alguma bagagem quanto ao estudo de função, mas o faziam apenas com lápis e papel. A proposta seguinte foi de construção, com o uso do *software*, de alguns dos mais diversos tipos de gráficos de função, tais como afim, quadrática, exponencial e logarítmica. As orientações para a familiarização dos alunos com o *software* encontram-se no Apêndice do presente trabalho.

Já íntimos com as ferramentas básicas para a construção de gráficos no *GeoGebra*, os alunos tiveram a oportunidade de construir e observar o comportamento da função

Figura 6 - Definição e formatação de parâmetros para construção do gráfico da função seno no *GeoGebra*



Fonte: Elaborada pela autora.

seno.

Manipular virtualmente a função, fez com que os alunos percebessem uma conexão entre os gráficos das funções trigonométricas e as imagens que obtiveram no estudo físico das ondas sonoras.

A subsessão a seguir descreve o passo a passo para construção do gráfico da função seno.

4.1.3 Função Seno

Defina quatro parâmetros, a, b, c e d, de acordo com a Fig. 6.

No campo "ENTRADA", conforme na Fig. 7, na parte inferior da janela aberta, digite:

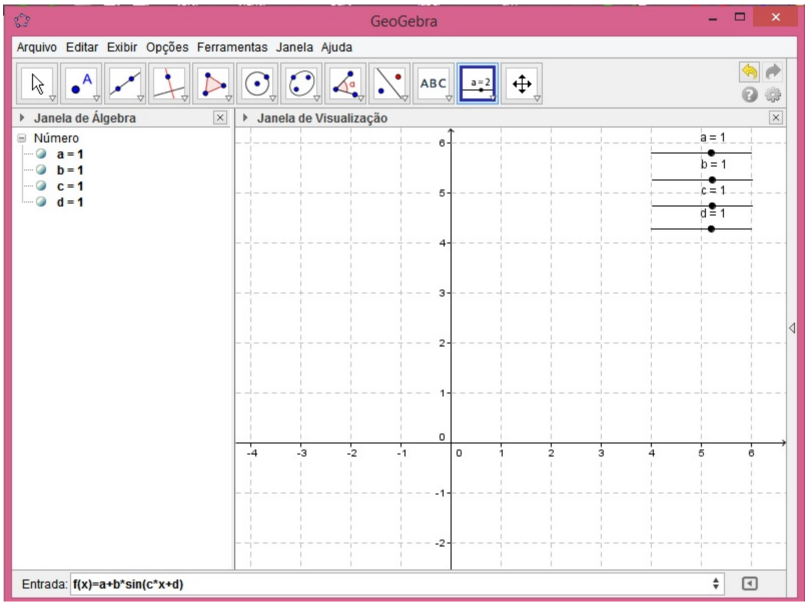
f(x)=a+b*sin(c*x+d)

A seguir, pressione a tecla "ENTER".

O *software* projetará o gráfico da função $f(x) = 1 + sen(x + 1)$, de acordo com o que aparece na Fig. 8.

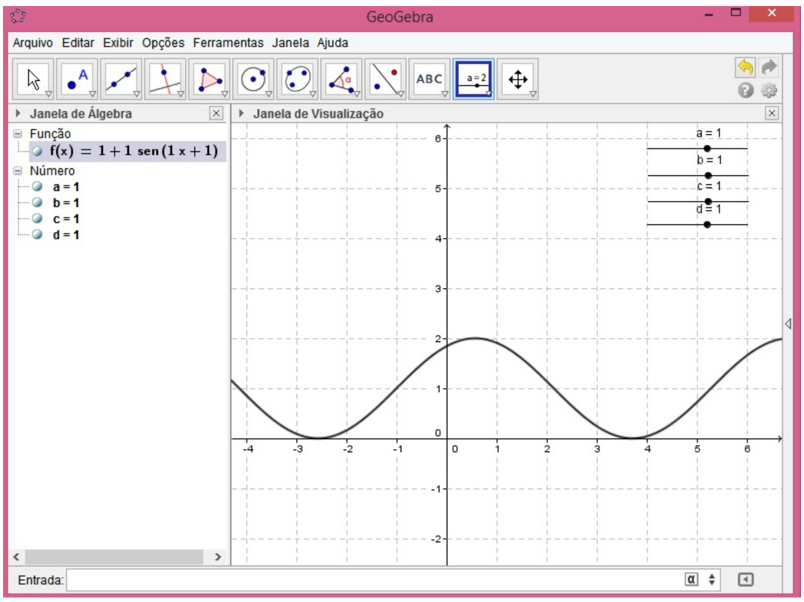
Usando o mouse, deslize o ponto pertencente a cada parâmetro ao longo do segmento no qual ele está contido e verifique matematicamente o que cada alteração propor-

Figura 7 - Definição da função seno no *GeoGebra*



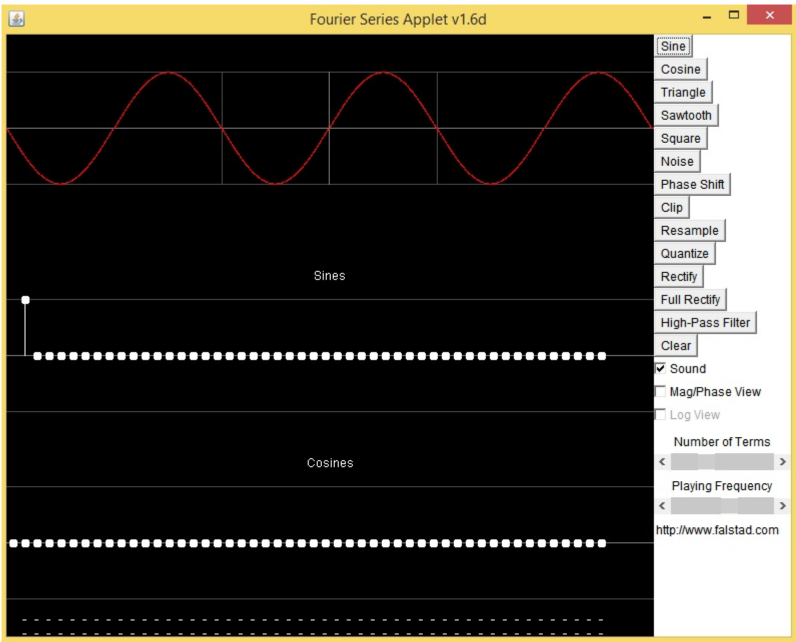
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 8 - Gráfico da função seno $f(x) = 1 + sen(x + 1)$



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 9 - Tela do aplicativo *FourierSeriesApplet*



Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

ciona no gráfico da função seno.

4.1.4 Fazendo Música com a Matemática

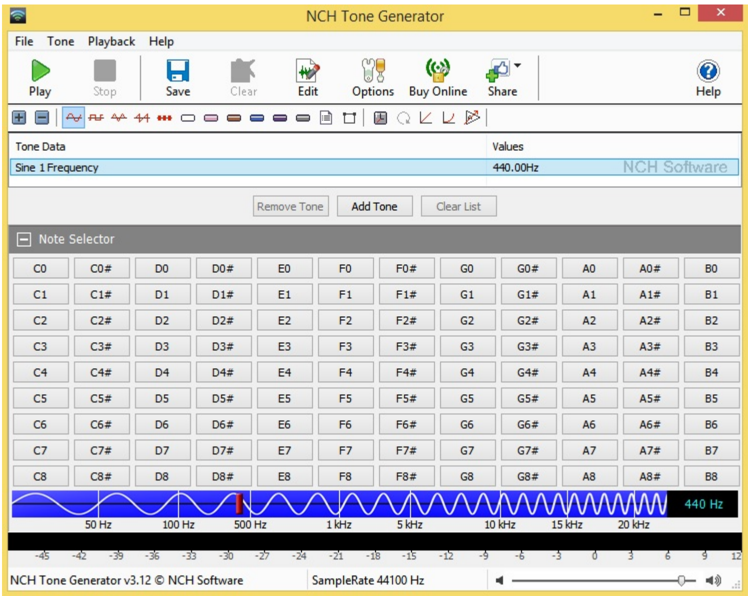
Com o objetivo de fazer música, ou simplesmente produzir som, com a matemática, foi proposto aos alunos a manipulação do aplicativo *FourierSeriesApplet* [14]. A aplicação demonstra a série de Fourier, método capaz de expressar funções periódicas arbitrárias usando uma soma de senos e cossenos, conforme a Fig. 9. Dessa forma os alunos puderam ouvir o som emitido pela função seno e por tantas outras composições feitas a partir da mesma.

A partir dessa experiência os alunos se sentiram estimulados a descobrir ferramentas semelhantes, e nessa mesma linha de funcionalidade trouxeram o *software NCH Tone Generator* [15], cuja tela inicial pode ser observada na Fig. 9. Inspirados pela atividade anterior, e de maneira espontânea, pesquisaram, analisaram e o apresentaram como uma alternativa à geração de som a partir de onda senoidal. Assim como no aplicativo inici-

[14] Dsiponível em http://www.falstad.com/fourier/.

[15] Disponível em http://www.nch.com.au/tonegen/.

Figura 10 - Tela principal do aplicativo *NCHToneGenerator*



Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

almente apresentado, o *software* não se restringe a gerar ondas senoidais, mas para dar objetividade a pesquisa esse foi o único recurso explorado em ambos os casos.

As semanas seguintes foram importantes para a conclusão das análises e a confecção de uma apresentação em *PowerPoint* do trabalho desenvolvido pelo grupo.

4.2 Sugerida

O estudo dos harmônicos é parte fundamental dessa prática de IC em Matemática e Música. Porém existem ondas, não senoidais, que não foram tratadas pelas atividades realizadas pela autora. A título de complemento, a atual sessão descreve uma atividade para a construção de ondas triangular, quadrada e dente de serra.

4.2.1 Ondas triangular, quadrada e dente de serra

Com o intuito de motivar o estudo de três tipos de ondas sonoras não senoidais, a autora sugere a exibição do vídeo "Músico captura vibração das cordas do violão com câmera do iPhone", disponível em *www.youtube.com*. Nele, pode-se observar o comportamento das cordas de um violão quando o mesmo é tocado. As Figs. 11, 12, 13, 14, 15

Figura 11 - Dedilhar da corda E(MI) do violão

Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

e 16 ilustram o momento em que as seis cordas do violão são tocadas, uma a uma e em conjunto.

Assistir ao vídeo proposto deverá sugerir aos orientandos a existência de ondas sonoras não senoidais, diferente daquelas manipuladas no aplicativo *FourierSeriesApplet* em atividade descrita anteriormente. Porém não se deve descartar a utilização do mesmo num segundo momento, a fim de que possam escutar diferentes sons produzidos por ondas triangulares, quadradas e dente de serra.

Recomenda-se, para a construção dos três tipos de ondas já citados, o *software GeoGebra*. As tabelas 2, 3 e 4 a seguir descrevem que funções deverão ser projetadas, uma a uma.

As Figs. 17, 18 e 19 representam a tela final de construção, com edição de cor e espessura dos gráficos a fim de dar ênfase às curvas em questão.

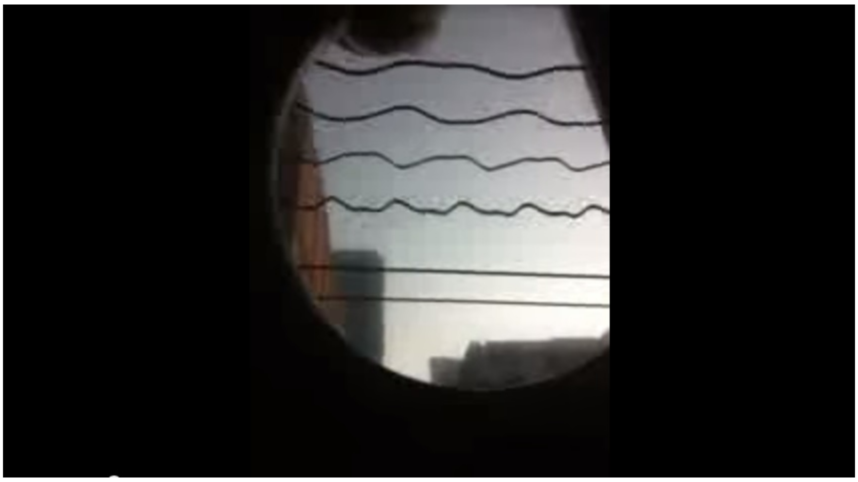
Figura 12 - Dedilhar das cordas E(MI) e A(LÁ) do violão

Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Figura 13 - Dedilhar das cordas E(MI), A(LÁ) e D(RÉ) do violão

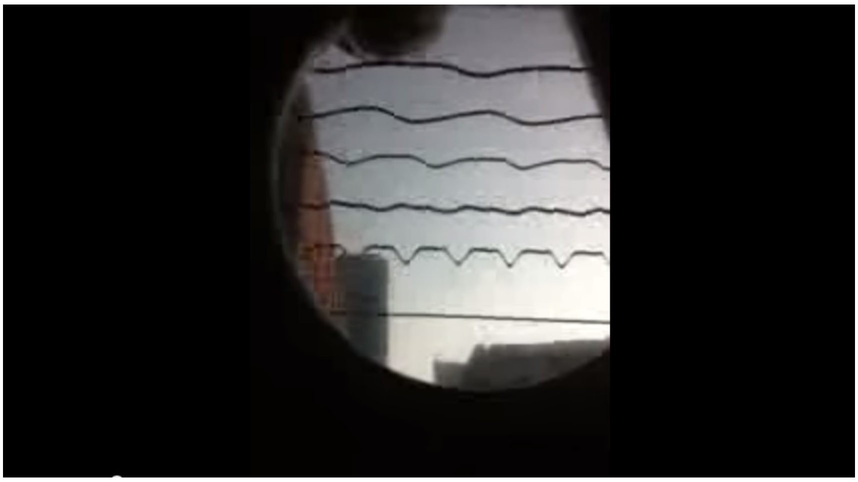
Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Figura 14 - Dedilhar das cordas E(MI), A(LÁ), D(RÉ) e G(SOL) do violão



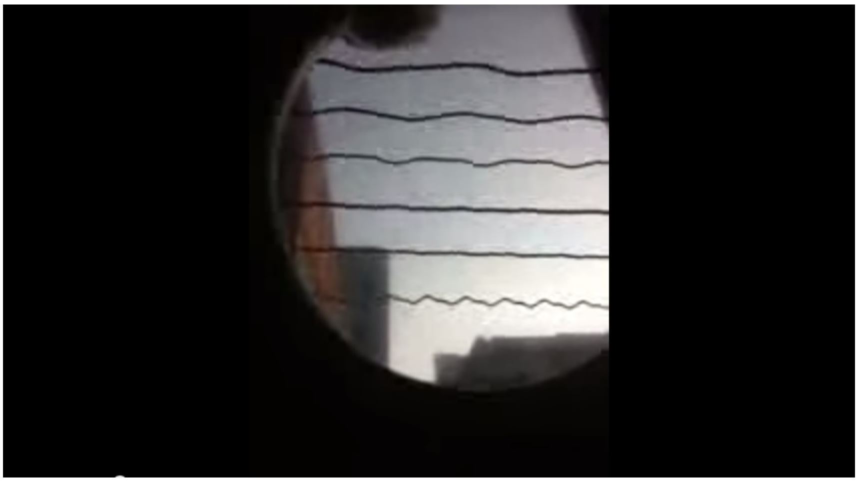
Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Figura 15 - Dedilhar das cordas E(MI), A(LÁ), D(RÉ), G(SOL) e B(SI) do violão



Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Figura 16 - Dedilhar das cordas E(MI), A(LÁ), D(RÉ), G(SOL), B(SI) e E(MI) do violão



Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Tabela 2 - Tabela de orientação para construção de onda triangular.

Tipo de Onda	Comandos no *GeoGebra*
Triangular	$a(x) = 8/\pi^2 sin(\pi/2) sin(x)$ $b(x) = 8/\pi^2 sin(3\pi/2) sin(3x)/9$ $c(x) = 8/\pi^2 sin(5\pi/2) sin(5x)/25$ $d(x) = 8/\pi^2 sin(7\pi/2) sin(7x)/49$ $e(x) = 8/\pi^2 sin(9\pi/2) sin(9x)/81$ $f(x) = 8/\pi^2 sin(11\pi/2) sin(11x)/121$ $g(x) = 8/\pi^2 sin(13\pi/2) sin(13x)/169$ $h(x) = 8/\pi^2 sin(15\pi/2) sin(15x)/225$ $i(x) = 8/\pi^2 sin(17\pi/2) sin(17x)/289$ $j(x) = 8/\pi^2 sin(19\pi/2) sin(19x)/361$ $k(x) = a(x) + b(x) + c(x) + d(x) + e(x) + f(x) + g(x) +$ $h(x) + i(x) + j(x)$

Legenda: Orientações para as atividades.

Fonte: A autora, 2015.

Tabela 3 - Tabela de orientação para construção de onda quadrada.

Tipo de Onda	Comandos no *GeoGebra*
Quadrada	$a(x) = (4/\pi)sin(x)$ $b(x) = (4/\pi)(sin(3x))/3$ $c(x) = (4/\pi)(sin(5x))/5$ $d(x) = (4/\pi)(sin(7x))/7$ $e(x) = (4/\pi)(sin(9x))/9$ $f(x) = (4/\pi)(sin(11x))/11$ $g(x) = (4/\pi)(sin(13x))/13$ $h(x) = (4/\pi)(sin(15x))/15$ $i(x) = (4/\pi)(sin(17x))/17$ $j(x) = (4/\pi)(sin(19x))/19$ $k(x) = a(x) + b(x) + c(x) + d(x) + e(x) + f(x) + g(x) +$ $h(x) + i(x) + j(x)$

Legenda: Orientações para as atividades.

Fonte: A autora, 2015.

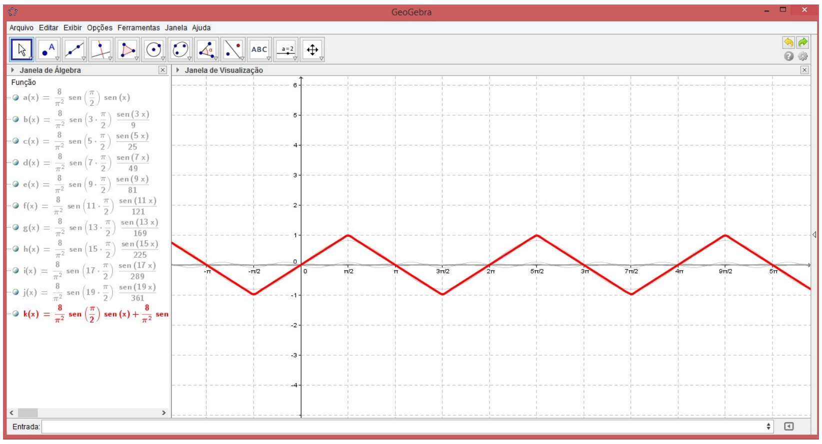
Tabela 4 - Tabela de orientação para construção de onda dente de serra.

Tipo de Onda	Comandos no *GeoGebra*
Dente de serra	$a(x) = (-1)/(\pi)sin(x)$ $b(x) = (-1)/(2\pi)sin(2x)$ $c(x) = (-1)/(3\pi)sin(3x)$ $d(x) = (-1)/(4\pi)sin(4x)$ $e(x) = (-1)/(5\pi)sin(5x)$ $f(x) = (-1)/(6\pi)sin(6x)$ $g(x) = (-1)/(7\pi)sin(7x)$ $h(x) = (-1)/(8\pi)sin(8x)$ $i(x) = (-1)/(9\pi)sin(9x)$ $j(x) = (-1)/(10\pi)sin(10x)$ $k(x) = a(x) + b(x) + c(x) + d(x) + e(x) + f(x) + g(x) +$ $h(x) + i(x) + j(x)$

Legenda: Orientações para as atividades.

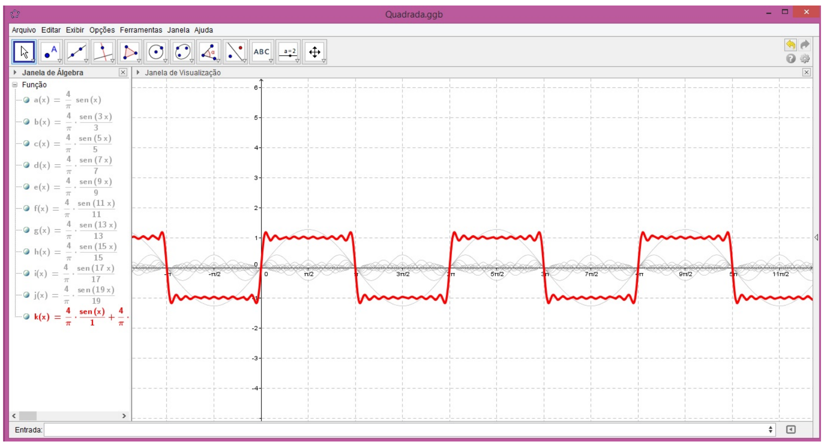
Fonte: A autora, 2015.

Figura 17 - Gráfico de onda triangular



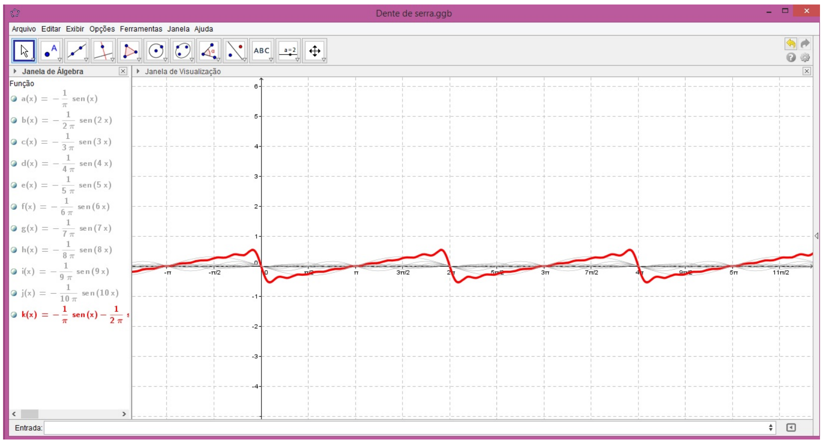
Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Figura 18 - Gráfico de onda quadrada



Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Figura 19 - Gráfico de onda dente de serra



Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

CONCLUSÃO

É fato que a escola de hoje clama por inovação. Vive-se num mundo onde as informações são descartadas na mesma velocidade com que chegam aos indivíduos. Transformar essa carga de dados em conhecimento é tarefa árdua. Ao professor cabe lidar com esse aluno que muito ouve falar e pouco sabe articular sobre tudo.

Tendo como objetivo principal a transformação de informação em formação, a IC mostra-se uma possível estratégia de desenvolvimento pessoal e intelectual. Essa prática, muito frequente nas universidade, vem invadindo gradualmente escolas públicas e privadas do estado do Rio de Janeiro. Seja de pequeno ou de grande porte, essa iniciativa antecipa aos alunos de Ensino Básico experiências de construção de conhecimento a partir do exercício da pesquisa científica.

Porém, para que se tenha uma IC de fato é necessário muito mais do que a vontade de fazer pesquisa. O engajamento dos grupos de pesquisa, por exemplo, é fator determinante para que os jovens se mantenham dispostos ao trabalho. Isto é, o tema da IC deve ser de interesse dos alunos, e não a participação dos mesmos nos projetos de pesquisa ser desejo dos professores orientadores.

Outro fator relevante para um encaminhamento produtivo da IC é a adequação do ambiente de trabalho. Adequado à pesquisa é todo e qualquer espaço que contenha ferramentas suficientes, sejam elas livros, computadores, e etc., para o seu desenvolvimento. O respaldo físico aumenta a confiabilidade dos resultados devido às

E finalmente, porém não menos importante, é fundamental que os orientadores estejam bem preparados para que os frutos do trabalho transcendam as paredes das escolas. Muitos dos professores nunca, em sua formação, tiveram contato com a dinâmica de pesquisa da IC e o despreparo pode colocar todo tempo e empenho a perder.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. *Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo: Escrituras Editora, 2006. 333 p.

BISTAFA, Sylvio R. *Acústica aplicada ao controle de ruídos*. São Paulo: Blucher, 2011. 380 p.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 6. ed. Rio de Janeiro: JC Editora, 1999.

FAUSTINO, Aline de Lima; NASCIMENTO, Nilton Ronni Cândido do; SILVEIRA, Alessandro Frederico da. Curso de iniciação científica e pesquisa no ensino médio: um relato de experiência. *III ENID/UEPB*, Editora Realize, Paraíba, 2013. Disponível em: ⟨http://www.editorarealize.com.br/revistas/eniduepb/trabalhos/Modalidade_6datahora_04_10_2013_10_11_35_idinscrito_184_6b5d38ea22fdff888c8b26e1689c4f96.pdf⟩.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*: Trigonometria. 6. ed. São Paulo: Atual, 1985. 237 p.

ANEXO A – Fórmulas de Euler-Fourier

As fórmulas de Euler-Fourier. Suponhamos que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right)$$

seja convergente, e chamemos $f(x)$ a sua soma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right). \tag{6}$$

Os coeficientes a_m e b_m podem ser relacionados de maneira bastante simples a $f(x)$ em virtude das condições de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0, \text{ m} \neq \text{n}, \\ \text{L, m} = \text{n}; \end{cases} \tag{7}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = 0, quaisquer m, n; \tag{8}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0, \text{ m} \neq \text{n}, \\ \text{L, m} = \text{n}. \end{cases} \tag{9}$$

Multiplique a equação 6 por $\cos(n\pi x/L)$, onde n é um inteiro positivo *fixo* (n > 0), e integremos em relação a x, de $-L$ a L. Admitindo que seja legítimo efetuar a integração termo a termo, obteremos

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{10}$$

Lembrando que n é fixo, enquanto m cobre o domínio dos inteiros positivos, deduz-se das relações de ortogonalidade 7 e 8 que o único termo não-nulo no segundo membro da Eq.

10 é aquele no qual $m = n$ no primeiro somatório. Portanto,

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = La_n, n = 1, 2, ... \tag{11}$$

A fim de detreminar a_0, podemos integrar a Eq. 6 de $-L$ a L e obter

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = La_0, \tag{12}$$

uma vez que todas as integrais que envolvem função trigonométricas são nulas. Portanto

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

Escrevendo-se o termo constante na Eq. 6 como $a_0/2$, é possível calcular todos os a_n pela Eq. 13. Se não for assim, é necessária uma fórmula separada para o cálculo de a_0.

Expressão semelhante para os b_n pode ser conseguida pela multiplicação da Eq. 6 por $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$, seguida pela integração da série termo a termo, de $-L$ a L, tendo-se em conta as relações de ortogonalidade 8 e 9; assim, encontra-se

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, n = 0, 1, 2, ... \tag{14}$$

As Eqs. 13 e 14 são conhecidas como as fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier. Portanto, se a série 6 for convergente para $f(x)$, se a série puder ser integrada termo a termo, então os coeficientes têm que *serdados* pelas Eqs. 13 e 14.

ANEXO B – Funções seccionalmente contínuas

Uma função f é **seccionalmente contínua** em um intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo puder ser dividido por um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de modo que:

1. f seja contínua em cada subintervalo aberto $x_(i-1) < x < x_i$.
2. $f$tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo, quando estas extremidades forem aproximadas por dentro do intervalo.

APÊNDICE A – Instalação e familiarização com o *software GeoGebra*

A.1 Instalando o Geogebra

O *GeoGebra* é um *software* gratuito de matemática dinâmica. De fácil utilização, o programa se propõe a fazer construções algébricas e geométricas de maneira muito semelhante à manual.

O *download* do *software* está disponível em http://www.geogebra.org/.

Lá é possível encontrar o link para a instalação do aplicativo. Clique em "BAIXE AGORA".

Há três opções de *download*, mas a sugestão é de instalação em *Desktop*. Desça a tela e selecione a opção "*GeoGebra* para Desktop"de acordo com o sistema operacional da máquina.

Siga todas as instruções seguintes para a instalação completa do *software*.

A.2 Construindo alguns gráficos de funções usando *GeoGebra*

Incie o *software* localizando o atalho criado pelo programa na "Área de Trabalho". Com o botão esquerdo do mouse dê dois cliques ou um único clique seguido da tecla "ENTER".

Para melhor análise gráfica, sugiro que "Eixo"e "Malha"estejam visíveis. Verifique e altere essa configuração clicando com o botão direito sobre qualquer ponto da "Janela de Visualização". Na listagem apresentada, "Eixo"e "Malha"deverão está destacados em azul. Um clique simples sobre uma das palavras mostra ou esconde os objetos.

A construção dos gráficos das funções e suas possíveis variações pressupõe a alterações de coeficientes em suas leis de formação. Determine, inicialmente, quantos parâmetros deseja ter. Defina-os selecionando o comando "Controle Deslizante"na barra de ferramentas superior. Dentro da "Janela de Visualização", clique uma única vez o botão direito sobre qualquer área branca. Será aberta uma nova janela para formatação do "Controle Deslizante". Nomeie o parâmetro e defina em qual intervalo ele variará. Faça isso tantas vezes quantos forem os parâmetros da lei de formação da função que se deseja esboçar.

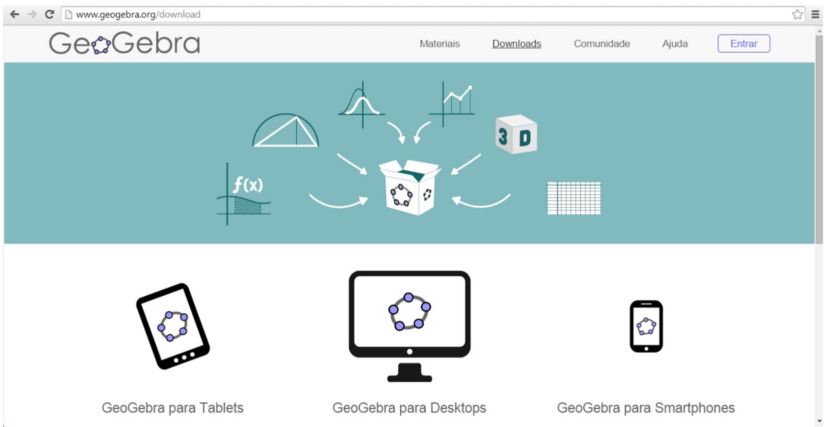
A.2.0.1 Função Afim

Defina dois parâmetros, a e b, de acordo com as orientações acima.

Figura 20 - Tela Inicial do site http://www.geogebra.org/

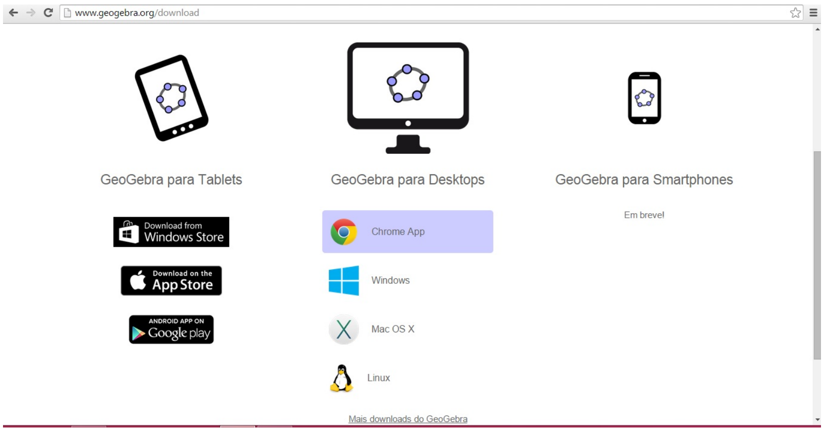
Fonte: Disponível em <http://www.geogebra.org/>

Figura 21 - Tela seguinte à seleção de "BAIXE AGORA"



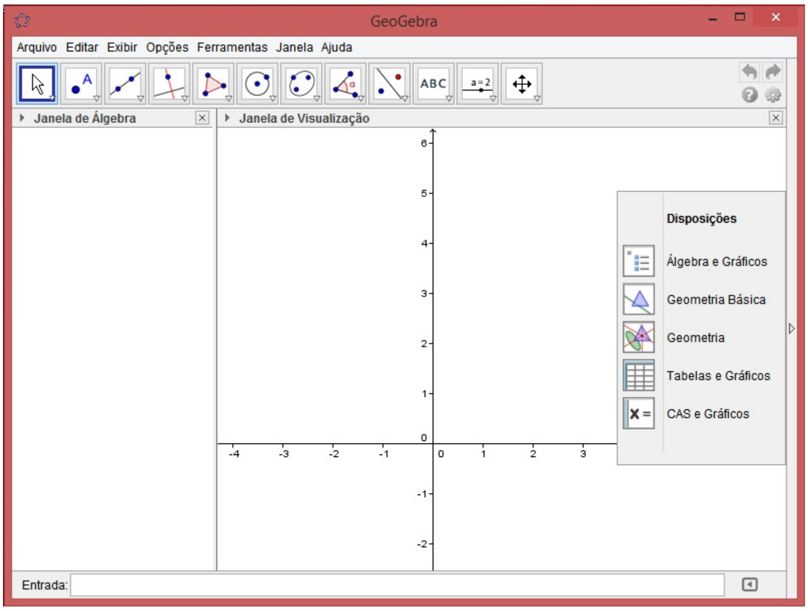
Fonte: Disponível em
<http://www.geogebra.org/download>

Figura 22 - Tela de escolha do sistema operacional compatível com o *desktop* em que o programa será instalado



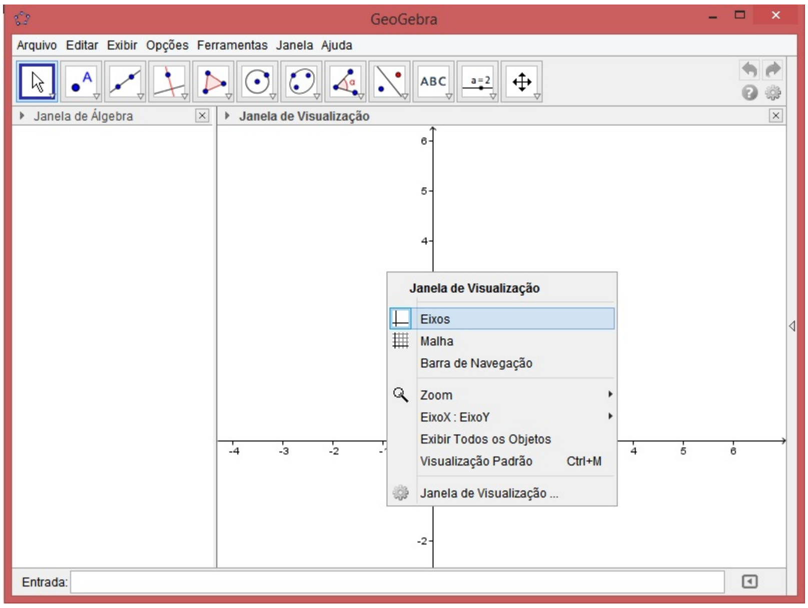
Fonte: Disponível em <http://www.geogebra.org/download>

Figura 23 - Tela inicial do *GeoGebra*



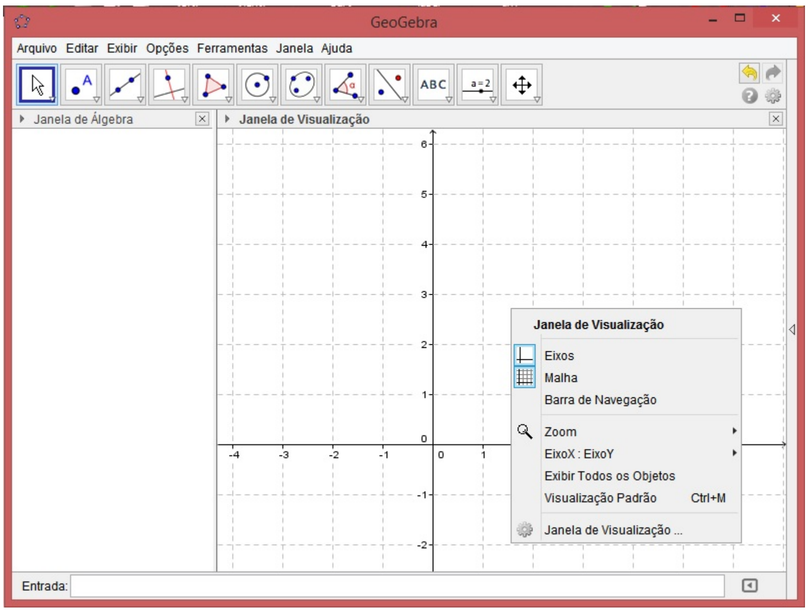
Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Figura 24 - Definição de eixos no *GeoGebra*



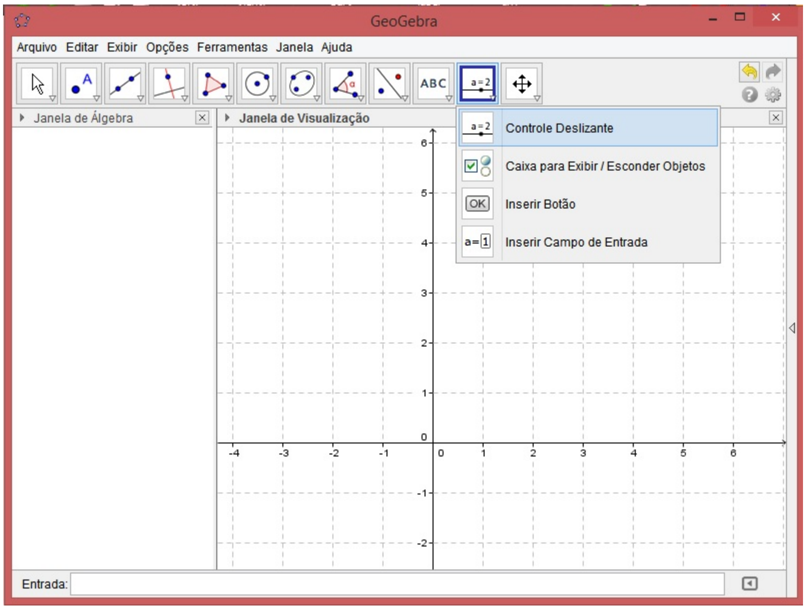
Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Figura 25 - Definição de malha no *GeoGebra*



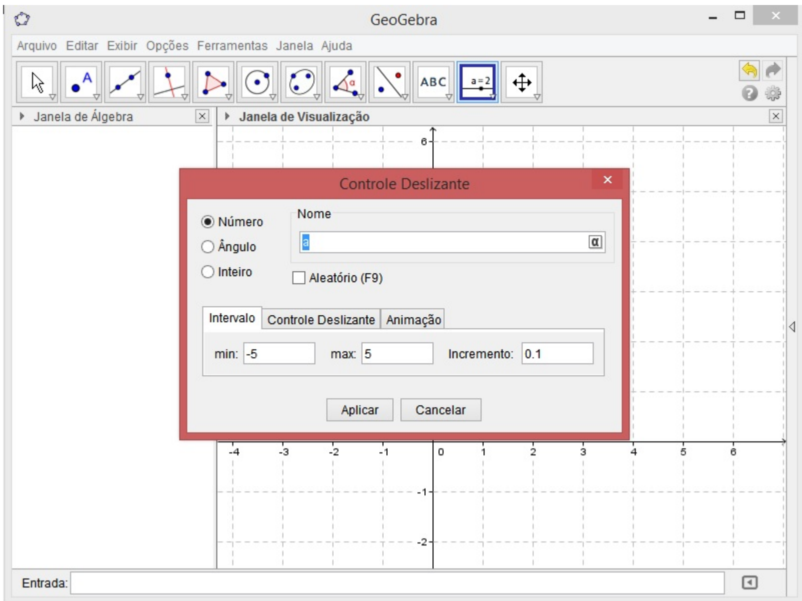
Fonte: *print screen* no sistema operacional *Windows 8*.

Figura 26 - Definição de parâmetros no *GeoGebra*



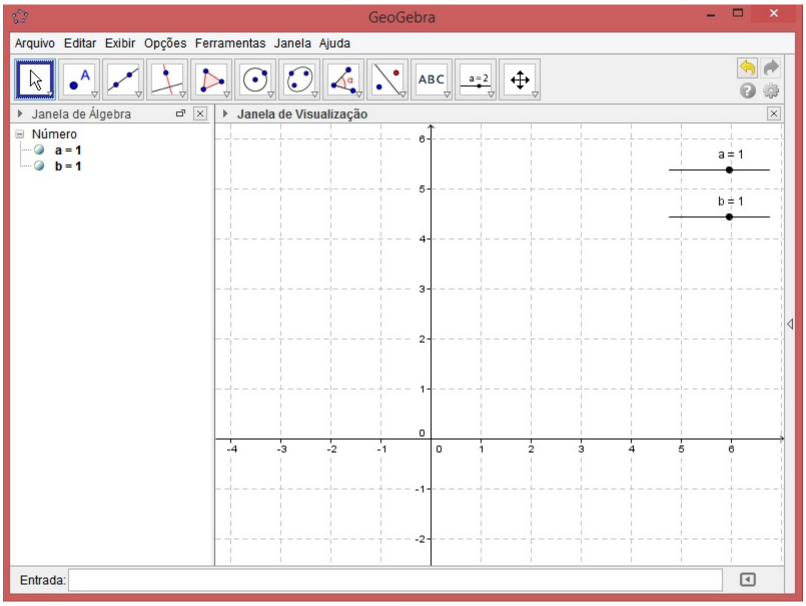
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 27 - Formatação de parâmetros no *GeoGebra*



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 28 - Definição e formatação de parâmetros para construção do gráfico da função afim no *GeoGebra*



Fonte: Elaborada pela autora.

No campo "ENTRADA", na parte inferior da janela aberta, digite:

f(x)=a*x+b

A seguir, pressione a tecla "ENTER".

O *software* projetará o gráfico da função $f(x) = x + 1$.

Usando o mouse, deslize o ponto pertencente a cada parâmetro ao longo do segmento no qual ele está contido e verifique matematicamente o que cada alteração proporciona no gráfico da função afim.

A.2.0.2 Função Quadrática

Defina três parâmetros, a, b e c, de acordo com as orientações iniciais.

No campo "ENTRADA", na parte inferior da janela aberta, digite:

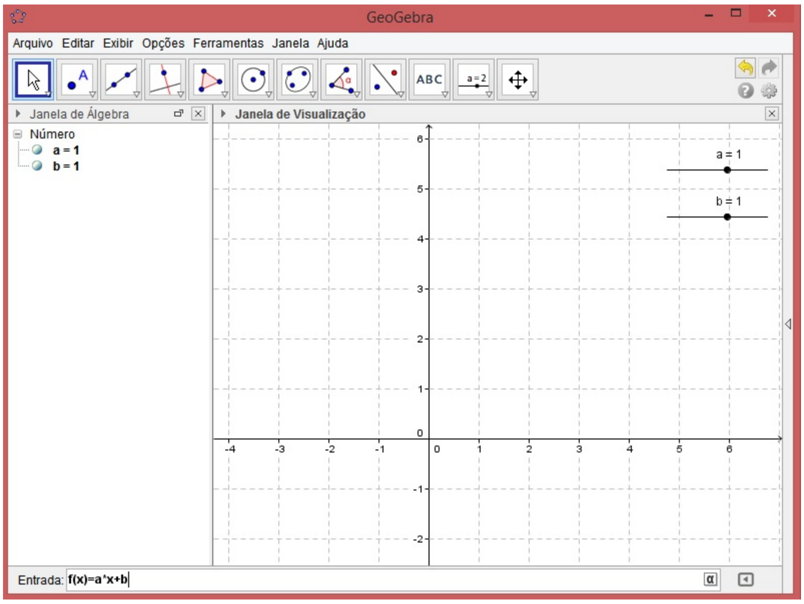
f(x)=a*x∧2+b*x+c

A seguir, pressione a tecla "ENTER".

O *software* projetará o gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 1$.

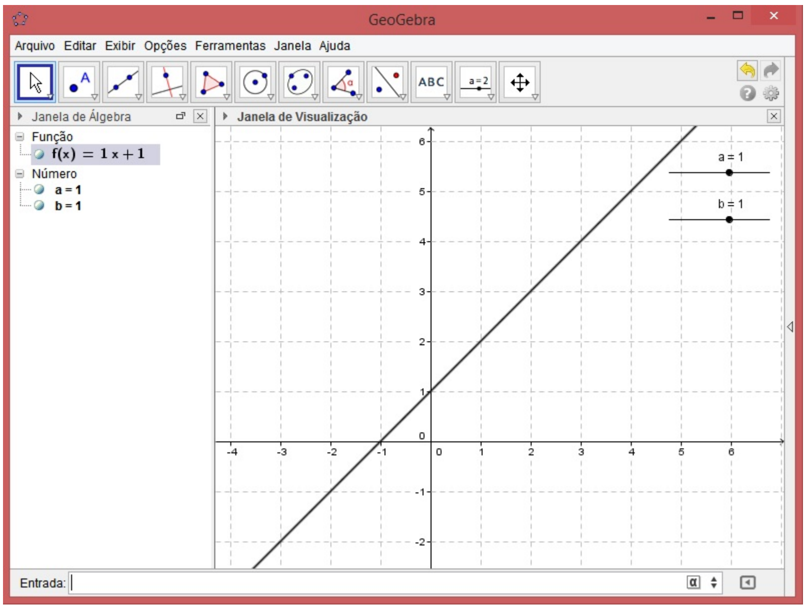
Usando o mouse, deslize o ponto pertencente a cada parâmetro ao longo do segmento no qual ele está contido e verifique matematicamente o que cada alteração proporciona no gráfico da função quadrática.

Figura 29 - Definição da função afim no *GeoGebra*



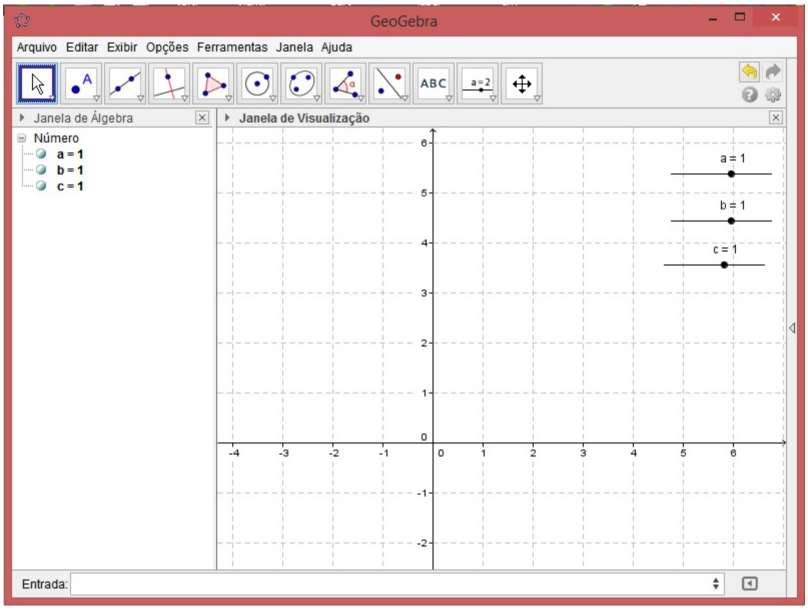
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 30 - Gráfico da função afim $f(x) = x + 1$



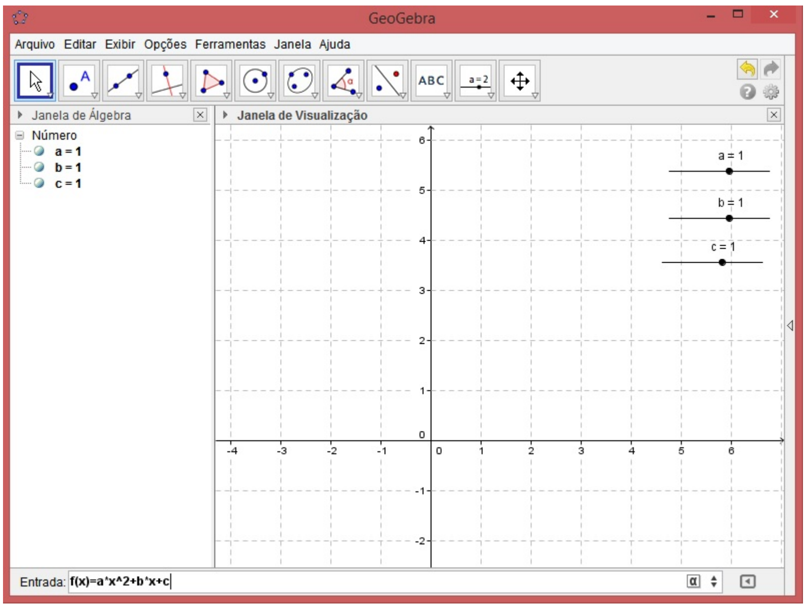
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 31 - Definição e formatação de parâmetros para construção do gráfico da função quadrática no *GeoGebra*



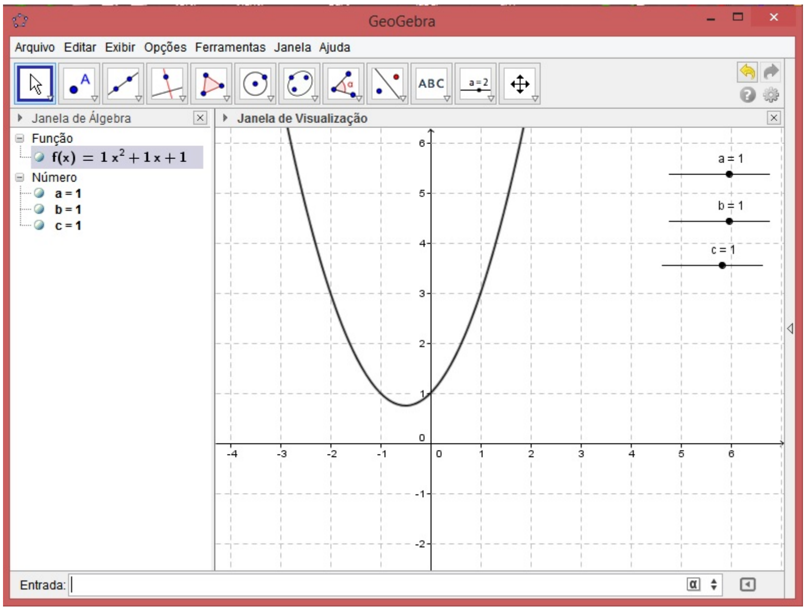
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 32 - Definição da função quadrática no *GeoGebra*



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 33 - Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + x + 1$



Fonte: Elaborada pela autora.

A.2.1 Função Exponencial

Defina cinco parâmetros, a, b, c, d e e, de acordo com as orientações iniciais. Porém assegure-se de que o intervalo de variação de c seja tal que c>0 e c≠1.

No campo "ENTRADA", na parte inferior da janela aberta, digite:

f(x)=a+b*c∧(d*x+e)

A seguir, pressione a tecla "ENTER".

O *software* projetará o gráfico da função $f(x) = 1 + 2^{x+1}$.

Usando o mouse, deslize o ponto pertencente a cada parâmetro ao longo do segmento no qual ele está contido e verifique matematicamente o que cada alteração proporciona no gráfico da função exponencial.

A.2.2 Função Logarítmica

Defina cinco parâmetros, a, b, c, d e e, de acordo com as orientações iniciais. Porém assegure-se de que o intervalo de variação de c seja tal que c>0 e c≠1.

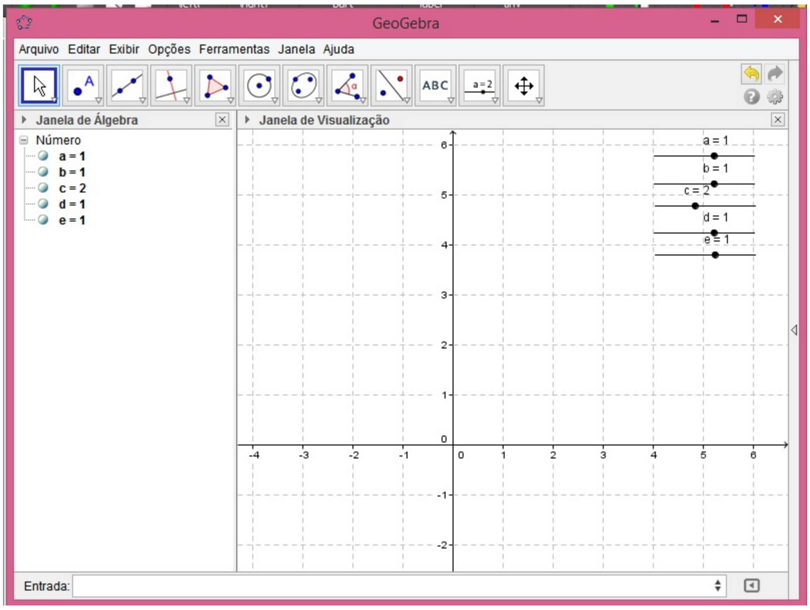
No campo "ENTRADA", na parte inferior da janela aberta, digite:

f(x) = a + b*log(c, d*x + e)

A seguir, pressione a tecla "ENTER".

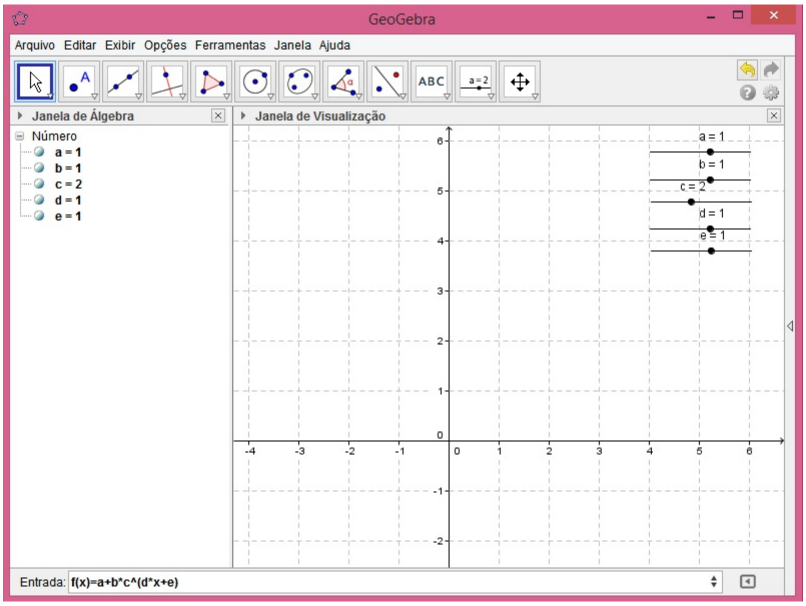
O *software* projetará o gráfico da função $f(x) = 1 + \log_2(x + 1)$.

Figura 34 - Definição e formatação de parâmetros para construção do gráfico da função exponencial no *GeoGebra*



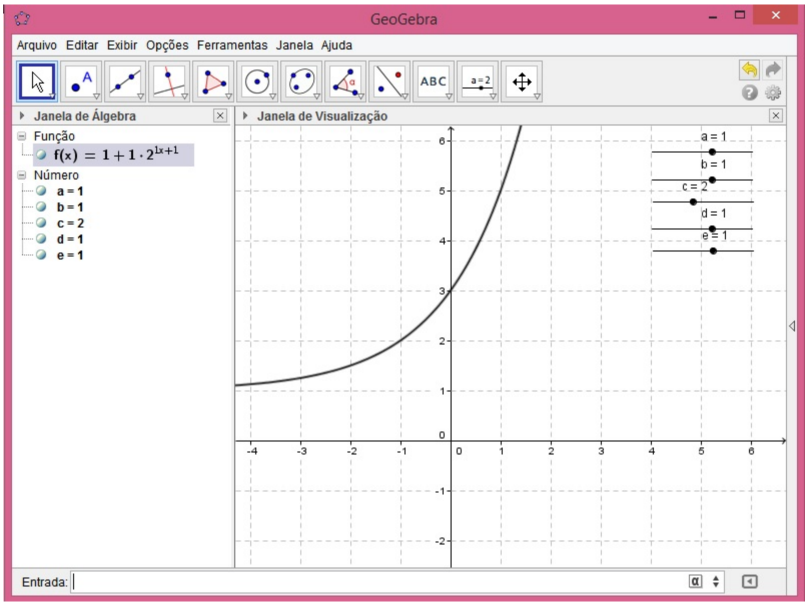
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 35 - Definição da função exponencial no *GeoGebra*



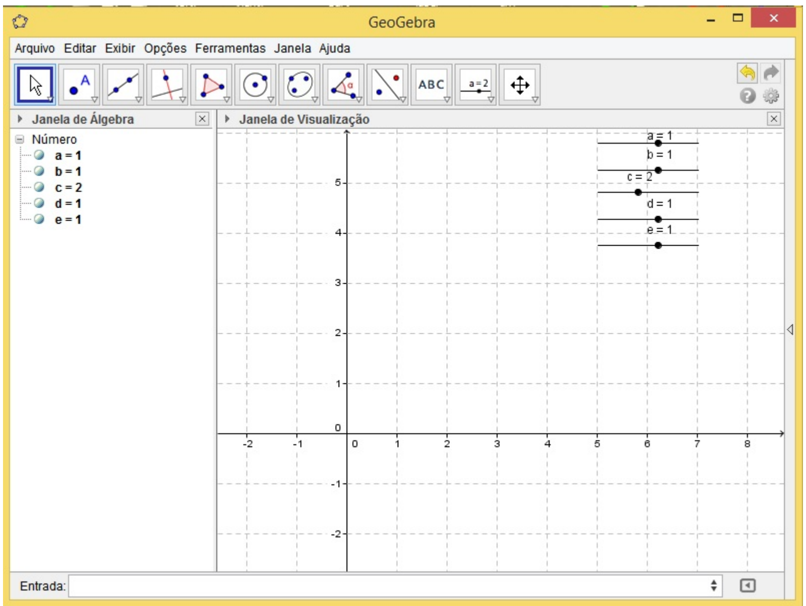
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 36 - Gráfico da função exponecial $f(x) = 1 + 2^{x+1}$



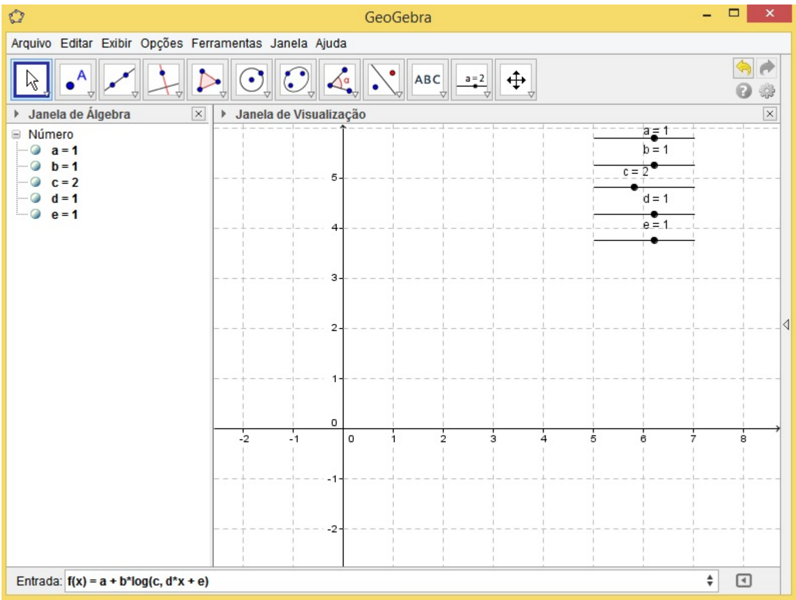
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 37 - Definição e formatação de parâmetros para construção do gráfico da função logarítmica no *GeoGebra*



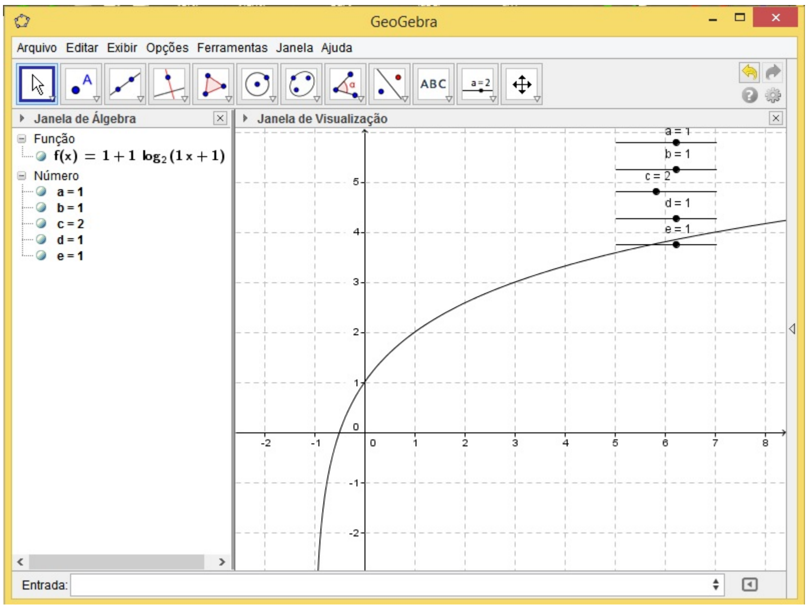
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 38 - Definição da função logarítmica no *GeoGebra*



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 39 - Gráfico da função logarítmica
$f(x) = 1 + \log_2(x+1)$



Fonte: Elaborada pela autora.

Usando o mouse, deslize o ponto pertencente a cada parâmetro ao longo do segmento no qual ele está contido e verifique matematicamente o que cada alteração proporciona no gráfico da função logarítmica.