UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT

Jailson Santos Santana

O ENSINO DOS MODELOS PROBABILÍSTICOS DISCRETOS NO ENSINO MÉDIO

Itabaiana- SE

Abril de 2016

Jailson Santos Santana

O ENSINO DOS MODELOS PROBABILÍSTICOS DISCRETOSNO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mateus Alegri
Coorientadora: Profª. Drª.Teresa C.Etcheverria

Itabaiana- SE

Abril de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Santana, Jailson Santos
S232e O ensino dos modelos probabilísticos discretos no ensino médio / Jailson Santos Santana ; orientador Mateus Alegri. – São Cristóvão, 2016.
69 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Análise combinatória. 2. Probabilidades. 3. Matemática discreta. 4. Educação básica. I. Alegri, Mateus, orient. II. Título.

CDU: 519.766.4

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

O Ensino dos Modelos Probabilísticos Discretos no Ensino Médio

por

Jailson Santos Santana

Aprovada pela Banca Examinadora:

Mateus Alegri

Prof. Mateus Alegri- UFS
Orientador

Wagner Ferreira Santos

Prof. Wagner Ferreira Santos - UFS
Primeiro Examinador

Antonio G Ca

Prof. Antonio Santos Silva - UFS
Segundo Examinador

Itabaiana, 16 de Abril de 2016.

Cidade Universitária "Prof. José Aloisio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Aos meus pais, a minha esposa e à minha filha Alice.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelas graças recebidas em minha vida, pelos dons que me concedeu, guiando-me para fazer destas qualidades.

À minha família, em especial, aos meus pais, por sempre terem me proporcionado oportunidades, apesar das dificuldades que os mesmos tiveram para conceder uma boa educação aos seus filhos. Sempre serei grato pelo apoio, amor e confiança.

À minha esposa por ter me dado apoio e ter me presenteado com a minha Alice.

Ao professor orientador Dr. Mateus Alegri por toda atenção prestada, e por sempre estar à disposição para contribuir de todas as formas para que alcançasse o meu objetivo.

Agradeço aos amigos Anderson, Djenal (Shynna), Gildo, José Augusto, Paulo Victor, Marcelo, Mônica, Samilly, Simone e Silvanilto, da turma PROFMAT 2014, pela convivência harmoniosa ao longo de quase dois anos; tempo este em que fiz amizades que levarei por toda a minha vida.

Ao amigo Aédson, por ter sido um ponto de apoio nos momentos mais difíceis e por sempre ter se mostrado disposto a ensinar de maneira clara e objetiva. Não posso esquecer-me de mencionar as palavras de incentivo que sempre fizeste. A você, meu muito obrigado.

Ao outro componente da turma, o amigo Emerson, um ser humano simples e abençoado por Deus, com uma generosidade acima do normal, pois foi o cara que passei mais tempo estudando e apresentava-se sempre solícito a ajudar a todos. Meu muito obrigado.

Por fim, não poderia deixar de agradecer ao cara que tenho amizade há quase 20 anos, e que foi o mentor direto dessa minha conquista, pois foi o mesmo que me apresentou o mestrado e de certa forma me cobrava para que o fizesse (chegou até certos momentos a ser enjoado nas cobranças). Não se dando por satisfeito, ele me enviava questões para que estudasse para o exame de acesso e ainda queria discuti-las. Foi quem me informou sobre as minhas aprovações no Exame de Acesso assim como na Qualificação e por fim, ainda me ajudou a concluir esse trabalho. Não sei como retribuir por tamanha consideração! No entanto, a forma que encontrei foi de dedicar esse espaço relatando os acontecimentos e agradecendo de coração aberto ao amigo JOHN WILLIAN.

Jailson Santos Santana

Resumo

Este trabalho tem como objetivo dar suporte ao professor da Educação Básica fornecendo um material detalhado para o ensino da Análise Combinatória, Probabilidade e Modelos Probabilísticos, levando-se em consideração aspectos relacionados ao dia-a-dia, utilizando conceitos matemáticos em situações problemas. Propomos ainda uma sequência didática sobre os temas acima citados para que os professores da Educação Básica possam ampliar e diversificar as suas estratégias de ensino.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Probabilidade. Modelos Probabilísticos. Matemática Discreta. Sequência Didática. Educação Básica.

Abstract

This work aims to support Basic Education teachers by providing a detailed materials for teaching Combinatorial Analysis, Probability and Probabilistic Models, taking into account aspects related to day-to- day using mathematical concepts in problem situations. We also propose a teaching sequence on the topics mentioned above for the Basic Education teachers to broaden and diversify their strategies education.

Keywords: Combinatorial Analysis. Probability. Probabilistic models. Discrete Mathematics. Didactic sequence. Basic education.

Sumário

Introdução

A ação docente é um tanto atribulada por nela existir a necessidade de se renovar ou até mesmo de buscar novos conhecimentos para serem incluídos no processo de ensino-aprendizagem. Por esse motivo, esta dissertação tem como objetivo principal fornecer subsídios que podem contribuir no ensino dos conteúdos de Análise Combinatória, Probabilidade e Modelos Probabilísticos em turmas do Ensino Médio.

A escolha dos temas levou em conta a ausência do aprendizado desses conteúdos enquanto estudante do Ensino Médio. A primeira vez que tive contato com os mesmos foi quando comecei a lecionar aulas particulares de reforço a estudantes do Ensino Médio, momento esse em que precisei estudar por conta própria algo considerado por mim complexo. Até aquele momento, que era o inicio da graduação, acabei encontrando satisfação em tal estudo.

Por ocasião do mestrado, foi me dada a oportunidade de aprofundar conhecimentos nessa área de estudo. A identificação com esses assuntos foi tamanha que não hesitei em escolhê-los para a minha dissertação.

Este trabalho tem caráter expositivo, pois reúne e relaciona material obtido de diferentes fontes, expondo o assunto com fidedignidade e demonstrando habilidade não só de levantamento, mas também de organização.

No primeiro capítulo, apresentamos os conteúdos de Conjuntos, Funções e Análise Combinatória, dando maior ênfase a esse último. Buscamos focar nos tipos de agrupamentos (permutações, arranjos e combinações) com e sem repetição e suas aplicações em problemas. Por fim, abordamos o teorema Multinomial e, em particular, o Binomial.

No segundo capítulo, são abordados Função Probabilidade, Teorema de Bayes, Função Discreta de Probabilidade e Principais Modelos Discretos de Probabilidade e suas aplicações.

Por fim, no terceiro capítulo, propomos uma sequência didática composta por três situações-problema que servirá como medidor da aprendizagem dos alunos, bem como da viabilidade dessa proposta como ferramenta de ensino.

Capítulo 1

Conjuntos, Produto Cartesiano, Relações, Funções e Análise Combinatória.

Abordaremos nesse capítulo algumas notações e definições sobre Conjuntos, Produto Cartesiano, Relações, Funções e Análise Combinatória, sendo que daremos uma maior ênfase a este último, onde apresentamos os dois princípios básicos que serão essenciais para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e os diferentes métodos de contagem, e, além disso, é um dos temas abordados no terceiro capítulo sobre Sequências Didáticas.

1.1 Conjuntos

A noção de conjuntos é bastante simples e fundamental na Matemática, pois a partir dela podem ser expressos todos os conceitos matemáticos.

Definição 1.1.1 *Um conjunto é uma lista, coleção ou classe de objetos bem definidos, podendo ser: números, pessoas, moedas, etc. Esses objetos são chamados elementos ou membros do conjunto.*

Exemplo 1 O conjunto de alguns times brasileiros, *T = {Vasco, São Paulo, Fluminense}*

Considerando A um conjunto e a um elemento ou membro de A, denotamos $a \in A$, ou seja, a pertence a A. Caso um dado elemento b, não seja elemento de um conjunto A escrevemos $b \notin A$.

É claro que se $A \subset B$ e $B \subset A$, todo elemento de A é elemento de B, e analogamente todo elemento de B é elemento de A. Logicamente $A = B$. Este é o chamado *Princípio da Extencionalidade*, princípio este que é descrito utilizando linguagem formal.

$$(t \in A \Leftrightarrow t \in B) \Rightarrow A = B$$

Note também que $\{a, b\} = \{b, a\}$, e que $A \not\subset \{\{A\}, B\}$, mesmo que $A \in \{A\}$ e $\{A\} \subset \{\{A\}, B\}$.

Denotaremos o *Conjunto Universo* por Ω, que é o conjunto de todos os objetos; e o *Conjunto Vazio* por $\emptyset$, que não possui objeto.

1.2 Operações com Conjuntos

i. União de Conjuntos

Definição 1.2.1 *A união de dois conjuntos quaisquer A e B, denotada por $A \cup B$ é o conjunto dos elementos x tais que x pertence a pelo menos um dos dois conjuntos A ou B. Ou seja, $x \in A \cup B$ se, e somente se, $x \in A$ ou $x \in B$.*

Exemplo 2 Fazendo a união dos conjuntos, $A = \{2,4,7\}$ e $B = \{1,3,4\}$, temos: $A \cup B = \{1,2,3,4,7\}$.Também podemos representar a união usando diagramas.

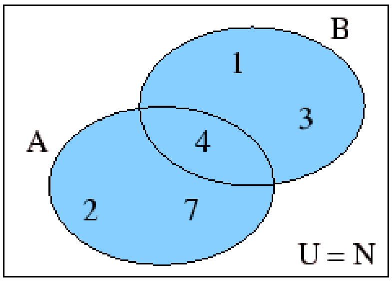


Figura1– Diagrama que representa $A \cup B$

ii. Interseção de Conjuntos

Definição 1.2.2 *Dados dois conjuntos A e B, definimos o conjunto intersecção de A com B como sendo o conjunto contendo todos os elementos que são comuns a A e B, e denotamos este por $A \cap B$.Ou seja, $x \in A \cap B$, se e somente se $x \in A$ e $x \in B$.*

Exemplo 3 Sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais, a interseção dos conjuntos será $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

Exemplo 4 Sejam $L = \{c, a, r, l, o, s\}$ e $V = \{a, e, i, o, u\}$. Logo, $L \cap V = \{a, o\}$.

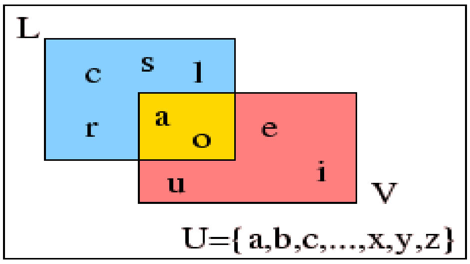


Figura 2 – Diagrama que representa $L \cap V$.

iii. Diferença entre Conjuntos

Definição 1.2.3 *Dados dois conjuntos A e B, definimos a diferença entre A e B como sendo o conjunto de todos os elementos que estão em A, mas não estão em B. Denotamos por $A - B$. Ou ainda, $x \in A - B$ se, e somente se $x \in A$ e $x \notin B$.*

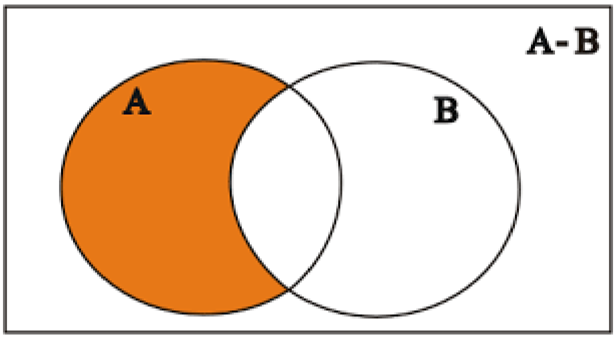


Figura3 – Diagrama que representa a operação $A - B$.

Exemplo 5 Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$, temos que a diferença entre os conjuntos A e B é dada por $A - B = \{a, b\}$.

iv. Complementar de um conjunto

Definição 1.2.4 *Dados os conjuntos A e B, com $B \subset A$, o conjunto complementar de B em relação a A, $C_A B$, é dado por $C_A B = A - B$.*

Exemplo 6 Dados $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, e\}$, em que $B \subset A$, temos que $C_A B = \{b, c, d\}$.

1.3 Produto Cartesiano

Definição 1.3.1 *O par (a, b) é definido como sendo o conjunto* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Como veremos no teorema abaixo, o par (a, b) é de fato ordenado.

Teorema 1.3.1 $(a, b) = (x, y)$, se, e somente se, $a = x$ e $b = y$.

Dem.:

Se $a = x$ e $b = y$, obviamente $(a,b) = (x,y)$. Assumindo $(a,b) = (x,y)$, temos $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\}$. Desde modo $\{a\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$. Se $\{a\} = \{x\}$, obrigatoriamente $b = y$. Mas, se $\{a\} = \{x,y\}$, então, $a = x = y = b$, o que torna válido o teorema.

Assim, dados dois conjuntos A e B, definimos o produto cartesiano de A e B como a coleção de pares ordenados (a,b), em que $a \in A$ e $b \in B$. Veremos, a seguir, sua formalização.

Definição 1.3.2 *O produto cartesiano, $A\ x\ B$ é definido como*:

$$A\ x\ B = \{(a,b)/\ a \in \mathrm{A}\ e\ b \in \mathrm{B}.\}$$

Exemplo 7 Se $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,7,9\}$ o conjunto $A\ X\ B$ é {(1, 3); (1, 7); (1, 9); (2, 3); (2, 7); (2,9)}.

1.4 Relações

Definição 1.4.1 *Dados dois conjuntos A e B uma relação entre A e B é um subconjunto de $A\ x\ B$.*

Exemplo 8 Qualquer reta no plano é uma relação em $\mathbb{R}^2$.

1.5 Funções

Nesta seção estudaremos uma relação específica em $A\ x\ B$, onde A e B são conjuntos não vazios.

Definição 1.5.1 *Uma função f de $A\ x\ B$ é uma relação entre A e B, ou seja, $f \subset A\ x\ B$, tal que para todo $a \in A$, existe um único $b \in B$, tal que o par $(a,b) \in f$.*

Exemplo 9 Vamos tomar a relação R, também podemos representá-la através de uma regra de associação ou lei de formação, para isto tomamos um par ordenado (x,y) de $A\ x\ B$ e através da regra de associação relacionarmos y a x através de uma equação.

Vejamos como fica tal representação da relação $R = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$.

$R = \{(x, y) \in A\, x\, B / \ y = 2x\}$.

Definição 1.5.2 *Uma função $f: A \to B$ é dita injetora se para quaisquer dois elementos distintos de A, suas imagens são distintas. Formalmente, a função f é injetora se $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$ para quaisquer a e b elementos de A.*

Exemplo 10 Um exemplo disto é o caso do garçom que marca na comanda do cliente um traço a cada bebida servida. Este garçom faz uma associação $1 - 1$ (lê-se: um pra um) entre o conjunto de traços e o conjunto de bebidas pedidas pelo cliente.
Observação: Dois traços na comanda representam duas bebidas distintas.

Definição 1.5.3 *Se $f: A \to B$ é uma função tal que $B = Im\, f$, f é dita uma função sobrejetora.*

Exemplo 11 Um exemplo de função sobrejetora é quando o número de bebidas disponíveis para certo cliente é igual ao número de pedidos.

Definição 1.5.4 Se uma função é injetora e sobrejetora, dizemos que ela é bijetora.

Exemplo 12 Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, tendo por lei $f(x) = x^2$, com o contradomínio de f sendo $\mathbb{R}_+\{0\}$, então a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^2$ é sobrejetora. Então essa função é bijetora.

1.6 Conjuntos contáveis e não contáveis

Um conjunto A é finito, com n elementos, se e somente se for equivalente ao subconjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dos números naturais. O conjunto vazio é considerado finito com nenhum elemento. Um conjunto que não é finito é chamado de infinito.

Um conjunto A é enumerável se, e somente se, for equivalente ao subconjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ dos números naturais. Denotando por a_k os elementos de A que correspondem aos números naturais k, para $k = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, o conjunto A pode ser representado por $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, se ele é finito com n elementos, ou como $A =$

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, ...\}$, se ele for infinitamente contável. Um conjunto A é contável se ele for finito ou enumerável. Um conjunto que não é enumerável é denominado de não enumerável.

Exemplo 13 Sabe-se que os conjuntos dos números reais é não enumerável.

Anteriormente vimos às operações envolvendo conjuntos, agora vamos destacar algumas propriedades que serão de suma importância para o nosso principal objetivo que é as aplicações no estudo da probabilidade.

Teorema 1.6.1 Para quaisquer conjuntos A, B e C, as seguintes propriedades da união, interseção e complementar são válidas:

A distributividade da interseção em relação à União e da União em relação à intersecção:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$e$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Teorema 1.6.2 Leis de Morgan

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
e
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Dem.
Considere o elemento $\alpha \in (A \cup B)^C$. Em seguida $\alpha \notin A \cup B$ e, por isso, $\alpha \notin A$ e $\alpha \notin B$. Isso implica que $\alpha \in A^C\ e\ \alpha \in B^C$. Assim $\alpha \in (A^C \cap B^C)$ e $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$. Da mesma forma, podemos mostrar que $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$, de onde$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$. A prova da segunda formula é similar.

Observações As fórmulas de Morgan podem ser estendidas para n subconjuntos:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^C = A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_n^C$$

e

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^C = A_1^C \cup A_2^C \cup \ldots \cup A_n^C$$

Depois de visto algumas propriedades envolvendo operações com conjuntos, vamos agora enunciar algumas ferramentas fundamentais para o estudo da probabilidade.

A Análise Combinatória é a parte da matemática que estuda os métodos de contagem, tais como permutações, arranjos e combinações.

Nesta seção, apresentaremos as principais técnicas de contagem que serão úteis para as demonstrações necessárias nos capítulos seguintes.

1.7 O Princípio aditivo

Dados os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dois a dois disjuntos, em que A_i tem exatamente a_i elementos, então o número de elementos da $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ é dado por $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Proposição 1.7.1 Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, temos que:

$$N\,(A \cup B) = N(A) + N(B)$$

Proposição 1.7.2 Se A e B são conjuntos finitos, temos que:

$$N\,(A - B) = N(A) - N(A \cap B),$$ em particular, para $B \subset A$.

Corolário 1.7.1 Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$, são conjuntos disjuntos e finitos, segue que:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_n)$$

Exemplo 14 Num cesto colocamos 5 laranjas e 4 mexericas. Quantas frutas existem na cesta?

Solução

Denotando por L o conjunto das laranjas e por M o conjunto das mexericas, então representamos esses conjuntos por $L = \{L_1, L_2, L_3, L_4\ e\ L_5\}$e $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$. Como são conjuntos disjuntos, e pelo princípio aditivo, segue que:

$N\,(L) = 5\ e\ N\,(M) = 4$

$\Leftrightarrow N\ (L \cup M) = N(L)\ +\ N(M)$

$\Leftrightarrow N\ (L \cup M)\ =\ 5\ +\ 4$

$\Leftrightarrow N\ (L \cup M)\ =\ 9$

Logo, temos 9 possibilidades distintas.

1.8 Princípio Multiplicativo

O princípio multiplicativo constitui a ferramenta básica para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Se uma decisão A_1 pode ser tomada de a_1 maneiras e se, uma vez tomada à decisão A_1, a decisão A_2 pode ser tomada a_2 maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A_1 e A_2 é $a_1.a_2$. Em linguagem de conjuntos, se A tem a elementos e B tem b elementos, o produto cartesiano possui $a.b$ elementos.

A extensão do princípio multiplicativo para n conjuntos. Se um conjunto A_i, pode ocorrer de a_i maneiras diferentes, para $i = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, então esses n conjuntos podem ocorrer, em sucessão, de $a_1.a_2\ldots a_n$ maneiras distintas. Em linguagem de conjuntos, se o conjunto A_i tem a_i, elementos, para $i = \{1,2,3, \ldots, n\}$, então o produto cartesiano $A_1X\,A_2\ldots XA_n =\ \{\,(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in A_i\ com\ i\ = 1,2,3, \ldots, n\}\ tem\ a_1.a_2\ldots a_n$ elementos.

Observação Se $A_1, A_2\ldots, A_n$ são conjuntos finitos, segue que:

$$N(A_1XA_2X\ldots XA_n)\ =\ N(A_1).N(A_2)\ldots N(A_n)$$

Exemplo 15

Uma prova de concurso é formada por questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. Determine o número de gabaritos distintos?

Solução

Pelo Princípio Multiplicativo, o conjunto de possibilidades de respostas para as 5 primeiras questões, cada uma com 4 alternativas, é 4^5 .

Depois de ter visto os dois princípios que dão suporte para a resolução de problemas na Análise Combinatória. Vamos agora estudar os diferentes tipos de métodos de contagem como os Arranjos, Permutações e as Combinações.

1.9 Permutações Simples

Definição 1.9.1 *Uma* k *– permutação de* W_n $(k \leq n)$ *é uma* k *– upla* $(a_1, a_2, \dots, a_k)$*, onde* $a_i \in W_n, com\ i \in \{1, 2, \dots, k\}, e\ a_i \neq a_j\ se\ i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Exemplo 16 O número de permutações de 2 elementos do conjunto $W_4 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ são (w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_2, w_4), (w_3, w_1), (w_3, w_2), (w_3, w_4), (w_4, w_1), (w_4, w_2), (w_4, w_3).

Observe que o primeiro elemento w_i com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ pode ser selecionado de quatro formas do conjunto W_4, selecionado o primeiro elemento, podemos escolher o segundo elemento do conjunto $W_4 - \{w_i\}$ de 3 formas, assim pelo princípio multiplicativo a permutação de 2 elementos de W_4 possui $4.3 = 12$ elementos.

Caso haja repetição, por exemplo, (a_1, a_1), teremos 4 formas de escolher o primeiro e o segundo elemento do conjunto W_4, logo a permutação terá $4.4 = 16$ elementos.

Teorema 1.9.1 O número de k-permutações de n, $P(n, k)$ é dada por: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Dem.:

Seja $P_K(W_n)$= Conjunto das k permutações de n elementos. Queremos mostrar que $N\big(P_k(W_n)\big) = P(n, k)$

Para $k = n, P(n, n) = n(n-1)(n-2) \dots (n-n+1) = n!$

Considere uma k permutação qualquer $(a_1, a_{2,} \dots, a_k)$ *em* $P_K(W_n)$.

O elemento a_1 pode ser escolhido de n maneiras.

O elemento a_2 pode ser escolhido de $(n-1)$ maneiras.

O elemento a_3 pode ser escolhido de $(n-2)$ maneiras. E assim, sucessivamente, até o último elemento que terá apenas uma maneira.

Note que $P_K(W_n) = A_1 X A_2 X \dots X A_n$, e pelo principio multiplicativo segue que :

$$N(P_K(W_n)) = N(A_1).N(A_1)\dots N(A_1) = n\,(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Corolário 1.9.1 Para $k = n, P(n,n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1) = n!$

Uma *n* permutação de *n* elementos é conhecida simplesmente por uma permutação simples de *n* elementos. E os *Arranjos Simples* são um caso particular de permutação simples quando não permutamos todos os elementos.

OBSERVAÇÃO 1

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

OBSERVAÇÃO 2

O número $P(n,0) = (n)_0, n = 0,1,\dots$ e $P(0) = 0!$, que não tem nenhum significado combinatório, são tomadas por convenção como unidade $P(n,0) = (n)_0 = 1$, $n = 0,1,\dots$ e $P(0) = 0! = 1$.

Exemplo 17 Há 10 pessoas em um local, sendo 3 com camisas verdes, 3 com camisas amarelas, 2 com camisas azuis e 2 com camisas brancas. De quantos modos podemos perfilar todas essas 10 pessoas de modo que os grupos com as camisas de mesma cor fiquem juntas?
Solução:

Temos 4 tipos de camisas, logo podemos permutar esses tipos em $P(4) = 4!$ posições para as equipes. E ao mesmo tempo, podemos permutar dentro de cada equipe os integrantes da seguinte maneira, respectivamente, $P(3) = 3!$ para os de camisas verdes e amarelas e $P(2) = 2!$ para os de camisas azuis e brancas. Logo, pelo princípio multiplicativo segue que teremos $P(4).P(3).P(3).P(2).P(2) = 4!.3!.3!.2!.2! = 3456$ maneiras.

Proposição 1.9.1 O número $P(n,k) = (n)_k$, de k – permutações de n, satisfaz a seguinte relação de recorrência:

$P(n,k) = P(n-1,k) + k\,P(n-1,k-1)$, para $k = 1,2,\ldots,n$, com $n = 1,2,\ldots$, e $P(n,k) = nP(n-1,k-1) = (n-k+1)P(n,k-1)$,para $k = 1,2,\ldots,n$, com $n = 1,2,\ldots$com condição inicial: $P(n,0) = 1$, com $n = 0,1,2,\ldots$, $P(n,k) = 0$, $k > n$.

Dem.:

Seja $P_k\,(W_n)$ o conjunto de k - permutações do conjunto $W_n = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Se Q é conjunto de k – permutações de W_n que não incluem o elemento w_n e S o conjunto de k - permutações de W_n que incluem o elemento w_n, assim $Q \cap S = \emptyset$, e $P_k\,(W_n) = Q \cup S$. Portanto, de acordo com o princípio aditivo temos:

$$N(P_k(W_n\,)) = N(Q) + N(S).$$

Proposição 1.9.2 O número de k – permutações de n com repeticão e sem restrições, denotado por $U(n,k)$ é dado por:

$$U(n,k) = n^k.$$

Dem.:

Note que, em qualquer k – permutação $\left(a_{1\,,}a_{2\,,\ldots}\,a_n\right)$, do conjunto $W_n = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ com repetição, o elemento a_i pode ser escolhido a partir do conjunto $A_i = W_n$ com n elementos, $i = 1,2,\ldots,k$. Portanto, $U_k(W_n) = A_1\,X\,A_2\,X\ldots X\,A_k$ é o conjunto das k – permutações do conjunto W_n com repetição e de acordo com o principio multiplicativo,

$$U(n,k) = N\big(U_K(W_n)\big) = N(A_1\,X\,A_2\,X\ldots X\,A_k) = N(A_1).N(A_2)\ldots N(A_k) = n^k.$$

Com isso a prova do teorema está completa.

Exemplo 18 Encontre o número de diferentes resultados de uma série de k lançamentos de uma moeda.

Solução

Um resultado de uma série de k-lançamentos de uma moeda é representado por uma k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, ordenada de cartas do conjunto $\{h, t\}$, onde a_i denota o resultado do i-ésimo lançamento, $i = 1,2,\ldots,k$, $h\ e\ t$ representam cara e coroa, respectivamente. Assim, o número de diferentes resultados de uma série de jogadas de uma moeda é igual a $U_{(2,k)} = 2^k$.

Exemplo 19 Considere uma série de k lançamentos de um dado ou equivalentemente a um lançamento de k dados distinguíveis. Encontre o número de resultados diferentes.

Solução

Um resultado de uma série de k lançamentos de um dado é representado por uma k-upla $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, ordenada de números a partir do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5,6\}$, em que a_i indica o resultadodo i-ésimo lançamento, $i = 1, 2, \dots, k$. Portanto, o número de diferentes resultados de uma série de k lançamentos de um dado é igual a $U_{(6,k)} = 6^k$.

O número de k-permutações do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5,6\}$, de 6 números (faces de um dado), com repetição. Para $k = 2$, os diferentes resultados são os seguintes:

$$\begin{gathered}(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\\(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\\(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\\(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\\(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\\(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\end{gathered}$$

de acordo com $U_{(6,2)} = 6^2 = 36$.

1.10 Combinações Simples

Definição 1.10.1 *Seja $W_n = \{ w_1, w_2, \dots w_n\}$ um conjunto com n elementos. Uma k-combinação de W_n é um subconjunto de W_n com k elementos.*

Exemplo 20 As combinações de 2 elementos do conjunto W_4=$\{w_1$,w_2,w_3,$w_4\}$, são os seguintes: $\{w_1, w_2\}$, $\{w_1, w_3\}$, $\{w_1, w_4\}$,$\{w_2, w_3\}$, $\{w_2, w_4\}$, $\{w_3, w_4\}$ .Note que, a partir de cada combinação de 2 elementos do conjunto$\{w_1, w_2\}$, de W_4, permutando os seus elementos, as permutações de 2 elementos $\{w_1, w_2\}$ e $\{w_2, w_1\}$,do conjunto W_4 são deduzidos.

Assim, o número de 2 combinações de 4 elementos é igual ao número de permutações de 4 dividido pelo númerode permutações de 2, que é $\frac{12}{2} = 6$.

Proposição 1.10.1 O número de k-combinação de n elementos, $C(n,k)$, onde $k \leq n$, é dado por:

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Dem.:

Considere $W_n = \{w_1, w_2, \ldots w_n\}$ um conjunto com n elementos. Uma k-combinação de W_n é um subconjunto de W_n do tipo $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Sabemos que há $P(n,k)$ k-uplas do tipo $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ de elementos de W_n. Para cada conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$, há $k!$ K-uplas de elementos de $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$, logo $k!\,C(n,k) = P(n,k)$, assim $C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Exemplo 21 Para a copa de 2010 na África do Sul, o técnico da seleção brasileira, convocou 23 jogadores, sendo 3 goleiros,4 defensores, 4 alas, 8 jogadores do meio e 4 atacantes. Dunga, técnico da seleção brasileira, deverá usar o esquema 4-4-2, ou seja, 1 goleiro, 2 defensores, 2 alas, 4 meias e 2 atacantes, sendo 5 titulares absolutos, Júlio César(Goleiro), Maicon(ala), Lúcio(Defensor), Kaká(meia) e Luís Fabiano(atacante). Dessa forma o número de maneiras possíveis que Dunga terá para escalar a seleção será?

Solução

Das 11 vagas possíveis para os titulares, 6 ainda não estão preenchidas podendo ser formada da seguinte forma:

Para as alas, defesa e ataque, dispomos de apenas 3 jogadores respectivamente para apenas uma vaga para cada posição. Logo $C(3,1) = \frac{3!}{(3-1)1!}$ = 3 maneiras

Para o meio de campo, dispomos de 7 jogadores para 3 vagas possíveis, sendo assim $C(7,3) = \frac{7!}{(7-3)3!} = \frac{7!}{4!.3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.3!} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$ maneiras.

Pelo Princípio multiplicativo, segue que Dunga terá $C(3,1)^3.C(7,3) = 27.35 = 945$ maneiras diferentes de escalar a seleção brasileira.

Observação

Define-se $C(n,k) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!k!}, \text{para } k \leq n \\ 0 \text{ , para os demais casos por motivos óbvios} \end{cases}$

Proposição 1.10.2 Combinações Complementares $C(n,k) = C(n,n-k)$.

Dem.:

Para cada k-subconjunto de n elementos de W_n, há um complementar em relação à W_n, deste conjunto com $(n-k)$ elementos. Logo $C(n,k) = C(n,n-k)$.

Exemplo 22 Prove a identidade $k.C(n,k) = n.C(n-1,k-1)$

Solução:

Como $C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, então

$$k.\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{k.n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{k.n.(n-1)!}{k.(k-1)!\,(n-k)!} = n.\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} =$$
$$= n.C(n-1,k-1)$$

Teorema 1.10.1 Triângulo de Pascal

O número $C(n,k) = \binom{n}{k}$, de k-combinações de n, satisfaz a relação de recorrência triangular.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $k = 1, 2, 3 \ldots n$, $n = 1, 2, \ldots$, com as condições iniciais $\binom{n}{0} = 1$, $n = 0, 1, \ldots$, $\binom{n}{k} = 0$, $k > n$.

Dem.:

Seja $C_k\ (W_n)$ o conjunto de k – combinações do conjunto $W_n = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Se A é um conjunto das k – combinações de W_n que não incluem o elemento w_n e B o conjunto das k – combinações de W_n que incluem o elemento w_n, então $A \cap B = \emptyset$ e $C_k\ (W_n) = A \cup B$. Consequentemente, de acordo com o princípio aditivo temos $N(C_k\ (W_n)) = N(A) + N(B)$.

Aparentemente, $A = C_k\ (W_{n-1})$ e $N(A) = N(C_k\ (W_{n-1}))$. Além disso, um dos k elementos da k – combinação $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$ pertence ao conjunto B, é o elemento w_n e uma vez que a ordem dos elementos não importa, pode - se supor que $a_k = w_n$ e $a_r \in W_{n-1}$,

$r = 1, 2, \ldots, k - 1$. Assim cada k-combinação $\{a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, w_n\}$ pertence a B corresponde a uma e somente uma k-combinação $\{a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, a_{k-1}\}$ pertence a $C_{k-1}(W_{n-1})$ e inversamente. Portanto:

$$N(B) = N(C_{k-1}(W_{n-1}))$$

e

$$N(C_k(W_n)) = N(C_k(W_{n-1})) + N(C_{k-1}(W_{n-1}))$$

Daí implica:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

A seguir, veremos algumas generalizações e aplicações de permutações e combinações.

1.11 Permutações com Repetições

Definição 1.11.1 *Seja W_n uma coleção com n objetos, não necessariamente distintos. Suponha que há k tipos distintos de objetos, e para cada objeto w_i exista n_i cópias deste $(1 \leq i \leq k)$). Uma permutação generalizada destes n objetos é uma forma de dispor estes objetos em que cada tipo apareça em blocos.*

Exemplo 23 De quantas maneiras podemos colocar cinco livros de matemática, três de física e dois de química e dois de geografia em uma prateleira, de modo que os livros de mesmo assunto não sejam separados.

Solução

Temos 4 tipos de livros, logo podemos permutar esses tipos em $P(4) = 4!$ posições ao mesmo tempo. Também Podemos permutar dentro de cada tipo, os livros da seguinte maneira, respectivamente: $P(5) = 5!$, para os de Matemática e $P(3) = 3!$ para os de Física e $P(2) = 2!$ para os livros de Química e Geografia. Logo, pelo princípio multiplicativo segue que teremos $P(4).P(5).P(3).P(2).P(2) = 4!.5!.3!.2!.2! = 69120$ maneiras.

Proposição 1.11.1 *O número de n-permutações generalizadas com k tipos de objetos, cada com n elementos indistinguíveis* $(1 \leq i \leq k)$ *é dado por:*

$$P(n, n_{1,} n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

Dem.:

Sabemos que se permutarmos os n objetos, e considerando cada um como distinguível, temos $n!$ permutações possíveis. Como há n_1 objetos do mesmo tipo e, retirando as permutações idênticas, temos $\frac{n_!}{n_1!}$ permutações. Pensando desta maneira até o objeto n_k, temos:

$$P(n, n_{1,} n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

Voltando ao exemplo 23, vamos considerar agora os livros das mesmas disciplinas iguais e podendo aparecer livros intercalados. Sendo assim, vamos resolver o mesmo utilizando a fórmula acima demonstrada.

Temos ao todo 12 livros, $(n = 12)$. Agora vamos encontrar os valores para n_1, n_2, n_3 *e* n_4 que são respectivamente iguais a $5, 3, 2$ *e* 2. Portanto, temos que:

$$P(12, 5, 3, 2,2) = \frac{12!}{5!\,3!\,2!\,2!} = \frac{12.11.10.9.8.7.6.5!}{5!.3.2.1.2.1.2.1} = \frac{3991680}{24} = 166320.$$

.

1.12 Combinações com Repetições

Definição 1.12.1 *Seja W_n uma coleção de n objetos, em k grupos, cada grupo contendo n_i elementos iguais* $(1 \leq i \leq k)$, *uma n - combinação generalizada de W_n é uma subcoleção de $W_{n,}$ onde cada grupo fica agrupado.*

O número $C(n, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ é definido por:

$C(n, n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1) . C(n - n_1, n_2) \ldots . C(n - n_1 - n_2 - \ldots n_{k-1}, n_k)$ que é chamado de de n-combinações generalizadas do tipo $n_1, n_2, \ldots n_k$.

Veremos a seguir que $P(n, n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Proposição 1.12.1 $P(n, n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1, n_2, \ldots, n_k)$

Dem.:

$$C(n, n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1) . C(n - n_1, n_2) \ldots . C(n - n_1 - n_2 - \ldots n_{k-1}, n_k)$$

$$C(n, n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,(n - n_1)!} . \frac{(n - n_1)!}{n_2!\,(n - n_1 - n_2)!} \cdots \frac{(n - n_1 - \cdots - n_{k-1})!}{n_3!\,(n - \cdots n_{k-1} - n_k)!}$$

$$C(n, n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!\, 0!} = P(n, n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

1.13 O Teorema Multinomial

Nesta seção vamos discutir a expansão de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$

Teorema 1.13.1

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_n C(n, n_1, n_2, \ldots, n_k)\, x_1^{n_1} . x_2^{n_2} . \ldots . x_k^{n_k}$$

Com $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Dem.:

Note que na expansão de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ os expoentes de $x_1^{n_1} . x_2^{n_2} . \ldots . x_k^{n_k}$ são tais que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, então:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) . (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \ldots (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}_{n \text{ vezes}}.$$

Assim, há n_i objetos do tipo x_i $(1 \leq i \leq k)$ nesta expansão. O coeficiente de $x_1^{n_1} . x_2^{n_2} . \ldots . x_k^{n_k}$ é $C(n, n_1, n_2, \ldots, n_k)$

Exemplo 24 O coeficiente de $a^3b^2c^6d^4$ na expansão de $(a+b+c+d)^{15}$ é $\frac{15!}{3!2!\,6!\,4!}$.

Corolário 1.13.1 O Teorema Multinomial para k = 2 é conhecido como Teorema Binomial.

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^k . {x_2}^{n-k}$$

Capítulo 2

Probabilidade e Modelos Probabilísticos.

O interesse do homem em estudar os fenômenos que envolviam determinadas possibilidades fez surgir a Probabilidade. Alguns indícios alegam que o surgimento da teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar disseminados na Idade Média. Esse tipo de jogo é comumente praticado através de apostas, na ocasião também era utilizado no intuito de antecipar o futuro.

O desenvolvimento das teorias da probabilidade e os avanços dos cálculos probabilísticos devem ser atribuídos a vários matemáticos. Atribui-se aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc. XVI) as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas.

Atualmente, os estudos relacionados às probabilidades são utilizados em diversas situações, pois possuem axiomas, teoremas e definições bem contundentes. Sua principal aplicação diz respeito ao estudo da equidade dos jogos e dos respectivos prêmios, sendo sua principal aplicação destinada à Estatística Indutiva, na acepção de amostra, extensão dos resultados à população e na previsão de acontecimentos futuro.

Após um breve contexto histórico, na sequência iremos citar alguns termos usais para o entendimento do estudo da probabilidade que são: experimento aleatório, espaço amostral e eventos.

Experimento aleatório é todo experimento que, quando repetido sob as mesmas condições várias vezes, produz resultados imprevisíveis. É o caso do lançamento de dois dados, que antes de serem jogados, não é possível afirmar com exatidão o valor da soma das faces encontradas.

Como já vimos no primeiro capítulo alguns conceitos sobre teoria dos conjuntos, apresentamos agora o ***espaço amostral*** e definimos como todos os resultados possíveis de certo fenômeno aleatório e só vamos considerar aqui o caso do mesmo ser finito ou infinito enumerável. Ele será representado pela letra grega Ω (ômega).

Eventos são os subconjuntos do espaço amostral e são representados pelas letras latinas maiúsculas $A, B, \ldots. O$ conjunto vazio, como já visto anteriormente, será denotada por $\emptyset$.

2.1 Probabilidade

Definição 2.1.1- *Uma função* $P: \Omega \to [0,1]$ *é uma função probabilidade se:*

i) $P(\Omega) = 1$;

$$ii) P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\text{, com os } A_{js} \text{ disjuntos}$$

Vamos utilizar a função probabilidade em eventos que possuem a mesma chance de ocorrer, que são denominados de ***eventos equiprováveis***.

Lançando-se uma moeda para cima e verificando a face, podemos inferir que a probabilidade de sair cara é a mesma que a coroa, sendo assim Ω = {cara, coroa}, logo concluímos que as condições i e ii são satisfeitas.

Definição 2.1.2- *Seja* Ω *um espaço amostral finito e não vazio; e seja* A *um evento desse espaço. Chama-se "***Probabilidade*** de A", e indica-se por* $P(A)$*, o número* $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$*, onde* $n(A)$ *e* $n(\Omega)$ *indicam os números de elementos de A e* **Ω***, respectivamente. Isto é:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo 25 Lançaram-se dois dados numerados de 1 a 6. Determine:

a) O espaço amostral da soma das faces.

b) A probabilidade da soma das faces ser igual a 6.

c) A probabilidade da soma das faces ser igual a zero.

d) A probabilidade da soma das faces ser maior ou igual a 7.

Solução

a) Vamos representar o espaço amostral das somas das faces construindo uma tabela e a partir da mesma, determinamos que o número de eventos do espaço amostral é 36, cuja representação dar-se-á por $n(\Omega) = 36$.

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

b) Chamando de A, o evento em que a soma das faces são iguais a 6, temos as seguintes possibilidades $A = \{(1{,}5);\ (2{,}4);\ (3{,}3);\ (4{,}2);\ (5{,}1)\}$. Portanto $n(A) = 5$. A seguir, vamos determinar $P(A)$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

c) Chamando de B, o evento em que a soma das faces são iguais a 0, temos que $B = \{\ \} = \emptyset$. Portanto $n(B) = 0$. A seguir, vamos determinar $P(B)$.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{0}{36} = 0.$$

d) Chamando de C, o evento em que a soma das faces são iguais ou maiores do que 7, temos as seguintes possibilidades : C= {(1,6); (2,5); (2,6); (3,4); (3,5); (3,6); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6)}. Portanto $n(C) = 21$. A seguir, vamos determinar $P(C)$.

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

2.2 Adição de probabilidades

A união de dois eventos A e B, denotada por $A \cup B$, representa a ocorrência de, pelo menos, um dos eventos A ou B.

Observação 1 *Seja Ω um espaço amostral finito e não vazio. Para quaisquer eventos A e B de Ω, tem-se que:*

$$P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (A \cap B)$$

Observação 2 *Os eventos A e B são chamados de mutuamente exclusivos se, e somente se,* $A \cap B = \varnothing$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo 26 Determine entre os números de 1001 e 10000, a probabilidade de obtermos um número que seja múltiplo de 5 ou de 7?

Solução:

Primeiro, vamos determinar a quantidade de números compreendidos entre 1001 e 10000, que formam o espaço amostral (Ω). Sabemos que esses números formam uma P.A de $r = 1$, primeiro termo $a_1 = 1001$ e último termo $a_n = 10000$. Sendo assim, temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$\Leftrightarrow 10000 = 1001 + (n-1).1$$
$$\Leftrightarrow 8999 = n - 1$$
$$\Leftrightarrow n = 9000$$

Portanto, o espaço amostral $n(\Omega) = 9000$ números.

Em seguida, vamos denotar por A o conjunto dos múltiplos de 5 e por B o conjunto dos múltiplos de 7. A seguir, determinaremos a quantidade de elementos que compõe os conjuntos acima citados.

O conjunto A forma uma P.A de razão $r = 5$, primeiro termo $a_1 = 1005$ e último termo $a_n = 10000$. Sendo assim, temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$\Leftrightarrow 10000 = 1005 + (n-1).5$$
$$\Leftrightarrow 8995 = 5n - 5$$
$$\Leftrightarrow 5n = 9000$$
$$\Leftrightarrow n = 1800.$$

Portanto, o evento A tem $n(A) = 1800$ números.

O conjunto B forma uma P.A de razão $r = 7$, primeiro termo $a_1 = 1001$ e último termo $a_n = 9996$. Sendo assim, temos que:

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$\Leftrightarrow 9996 = 1001 + (n-1).7$

$\Leftrightarrow 8995 = 7n - 7$

$\Leftrightarrow 7n = 9002$

$\Leftrightarrow n = 1286.$

Portanto, o evento B tem $n(B) = 1286$ números.

Como os eventos A e B não são mutuamente exclusivos, vamos determinar a quantidade de elementos que fazem parte da intersecção $(A \cap B)$. O conjunto $(A \cap B)$ forma uma P.A de razão $r = 35$, primeiro termo $a_1 = 1015$ e último termo $a_n = 9975$. Sendo assim, temos que:

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$\Leftrightarrow 9975 = 1015 + (n-1).35$

$\Leftrightarrow 8960 = 35n - 35$

$\Leftrightarrow 35n = 8995$

$\Leftrightarrow n = 257.$

Portanto, o evento $(A \cap B)$ tem $n(A \cap B) = 257$ números.

Depois de ter determinado a quantidade de elementos que compõe cada conjunto, vamos a seguir determinar a probabilidade de ocorrência de cada um deles.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1800}{9000}$$

$$P(B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1296}{9000}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{257}{9000}$$

A probabilidade de obtermos um número que seja múltiplo de 5 ou 7, e que esteja compreendido ente 1001 e 10000 será representado por $P(A \cup B)$, logo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1800}{9000} + \frac{1296}{9000} - \frac{257}{9000}.$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{2839}{9000}.$$

Definição 2.2.1 - Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de Ω. Chama-se "**evento complementar** de A", que indica por A^C, o evento que satisfaz as seguintes condições*:*

$i)$ $P(A \cup A^C) = P(\Omega) = 1.$
$ii)$ $P(A \cap A^C) = P(\emptyset).$

Proposição 2.2.1 Como consequência da regra da adição, obtemos que, para qualquer evento $A \subset \Omega$ $P(A) = 1 - P(A)^C$, que pode ser verificada aplicando a regra da adição com A^C no lugar de B,temos,

$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) - P(A \cap A^C)$$
$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) - P(\emptyset)$$
$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) - 0.$$

Como $P(A \cup A^C) = P(\Omega) = 1$, segue imediatamente a igualdade desejada.

Exemplo 27 Dois processadores tipos A e B são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de $\frac{1}{30}$, no tipo B, $\frac{1}{80}$ e, em ambos, $\frac{1}{1000}$. Qual a probabilidade de que:

a) Pelo menos um dos processadores tenha apresentado erro?

b) Nenhum processador tenha apresentado erro?

c) Apenas o processador A tenha apresentado erro?

Solução

a) A probabilidade de pelo menos um dos processadores tenha apresentado erro é representado por $P(A \cup B)$, sendo assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{30} + \frac{1}{80} - \frac{1}{1000}.$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{80000 + 30000 + 2400}{2400000}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{281}{6000}.$$

b) A probabilidade de nenhum processador tenha apresentado erro é representado por $P(A^C \cap B^C)$, e pela Lei de Morgan visto no primeiro capítulo, temos que:

$$P(A^C \cap B^C) = P[(A \cup B)^C]$$

$$\Leftrightarrow P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow P(A^C \cap B^C) = 1 - \frac{281}{6000}$$

$$\Leftrightarrow P(A^C \cap B^C) = \frac{6000 - 281}{6000}$$

$$\Leftrightarrow P(A^C \cap B^C) = \frac{5719}{6000}.$$

c) A probabilidade de apenas o processador A tenha apresentado erro é representado por $P(A \cap B^C)$, logo:

$$\Leftrightarrow P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B^C) = \frac{1}{30} - \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B^C) = \frac{100 + 3}{3000}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B^C) = \frac{103}{3000}$$

2.3 Probabilidade Condicional

Definição 2.3.1- *Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é representada por $P(A|B)$ é dada por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ , } se\ P(B) > 0$$

Indicamos essa probabilidade por $P(A|B)$ (lê-se “probabilidade de A, dado B”).

Exemplo 28 A tabela abaixo dá a distribuição dos alunos de uma turma, por sexo e por time de futebol.

	Masculino	Feminino
Vasco	15	5
São Paulo	3	7

Determine:

a) A probabilidade de ser Vascaíno sendo do sexo masculino.

b) A probabilidade de ser São Paulino sendo do sexo feminino.

Solução:

Utilizaremos as seguintes notações:

SP= torcedor do São Paulo. M= sexo masculino.

V= torcedor do Vasco. F= sexo feminino.

a) Vamos determinar a probabilidade de esse aluno ser vascaíno sabendo que é do sexo masculino, onde: $n(M) = 18$ e $n(V \cap M) = 15$, logo:

$$P(V|M) = \frac{n(V \cap M)}{n(M)}$$

$$\Leftrightarrow P(V|M) = \frac{15}{18}$$

$$\Leftrightarrow P(V|M) = \frac{5}{6}$$

b) Vamos determinar a probabilidade de esse aluno ser São Paulino sabendo que é do sexo feminino, onde: $n(F) = 12$ e $n(SP \cap F) = 7$, logo:

$$P(SP|F) = \frac{n(SP \cap F)}{n(F)}$$

$$\Leftrightarrow P(SP|F) = \frac{7}{12}$$

Exemplo 29 (Enem -2010) Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o teste não é totalmente eficaz, podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultados negativo. Sabe-se ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo. Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. Qual a probabilidade de esse rato ser saudável?

Solução:

Vamos representar os ratos da seguinte maneira:

DP = rato doente com resultado positivo;

DN= rato doente com resultado negativo;

SP = rato saudável com resultado positivo;

SN= rato saudável com resultado negativo. `

Sabe-se que 100 ratos são doentes e dentre esses, 40 são doentes com resultado negativo, então concluímos que 60 ratos são doentes com resultado positivo.

A seguir, determinaremos o total de ratos saudáveis cujo resultado do teste deu negativo. Sabemos que foi aplicado esse teste em 500 ratos, então:

$$Total = DP + DN + SP + SN$$

$\Leftrightarrow$ 50**0**= 60 + 40 + 20 + SN

$\Leftrightarrow$SN = 380.

	Resultado Positivo	Resultado Negativo
Ratos Doentes	60	40
Ratos Saudáveis	20	380

Agora vamos determinar a probabilidade de esse rato ser saudável sabendo que o resultado deu negativo, onde: $n(N) = 420$ e $n(S \cap N) = 380$, logo:

$$P(S|N) = \frac{n(S \cap N)}{n(N)}$$

$$\Leftrightarrow P(S|N) = \frac{380}{420}$$

$$\Leftrightarrow P(S|N) = \frac{19}{21}$$

Exemplo 30 (PROFMAT-AV2- MA 12-2014)

Duas máquinas A *e* B produzem 5000 peças por dia. A máquina A produz 3000 peças, das quais 2% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000 das quais 1% são defeituosas.

a) Se uma peça for escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ser defeituosa?

b) Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina A?

Solução

a) Sabe-se que a máquina A produz por dia 3000 peças das quais 2% delas são defeituosas, portanto, isso equivale a 60 peças. De forma análoga, determinaremos a quantidade de peças produzidas pela máquina B, donde as 2000 peças produzidas, 1% são defeituosas, sendo assim, isso equivale a 20 peças. A seguir, faremos uma tabela para representar as peças perfeitas e as defeituosas produzidas por cada máquina.

	Peça Perfeita	Peça Defeituosa
Máquina A	2940	60
Máquina B	1980	20

Chamando de D as peças defeituosas, vamos calcular a probabilidade de escolher ao acaso uma peça desse tipo, onde $n(D) = 80$ e $n(\Omega) = 5000$, logo:

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow P(D) = \frac{80}{5000}$$

$$\Leftrightarrow P(D) = 0{,}016.$$

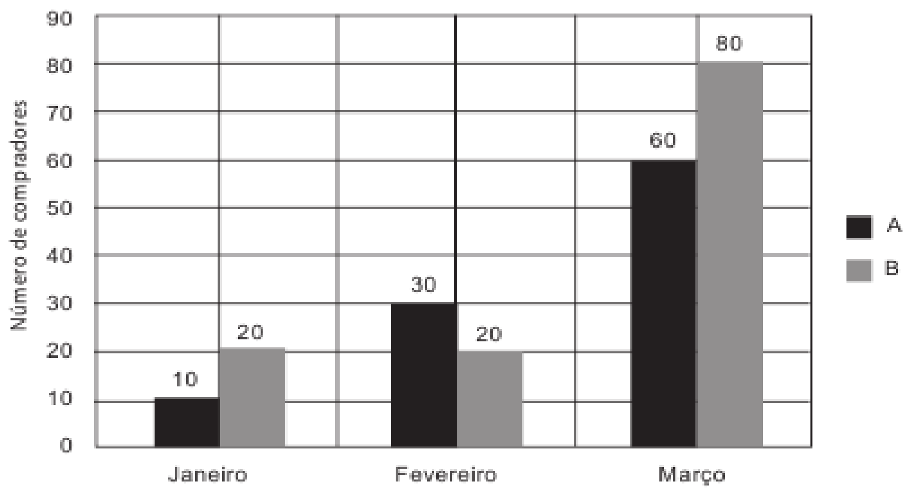
b) Vamos determinar a probabilidade de essa peça ser defeituosa sabendo que a mesma foi fabricada pela máquina a, onde: $n(D) = 80$ e $n(A \cap D) = 60$, logo:

$$P(A|D) = \frac{n(A \cap D)}{n(D)}$$
$$\Leftrightarrow P(A|D) = \frac{60}{80}$$
$$\Leftrightarrow P(A|D) = 0{,}75.$$

Definição 2.3.2- *Dois eventos A e B são independentes, se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade da ocorrência de A. Isto é:*

$$\begin{cases} P(A|B) = P(A), P(B) > 0. \\ \text{ou} \\ P(A \cap B) = P(A).P(B) \end{cases}$$

Exemplo 31 (Enem -2013) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

Solução

Note que a escolha do sorteado que comprou o produto A, não influenciará na escolha do sorteado do produto B, ou seja, a ocorrência ou não de B não altera a probabilidade da ocorrência de A, assim como a ocorrência de A também não altera a de B. Vamos agora determinar a probabilidade dos sorteados terem comprados os produtos no mês de fevereiro e depois utilizaremos a regra do produto de probabilidades.

Chamando de A o sorteado no mês de fevereiro do produto A, vamos calcular a probabilidade do mesmo, onde $n(A) = 30$ e $n(\Omega) = 100$, logo.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{30}{100}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{10}$$

Agora denominamos de B o sorteado no mês de fevereiro do produto B, vamos calcular a probabilidade do mesmo, onde $n(B) = 20$ e $n(\Omega) = 120$, logo.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{20}{120}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

Então, aplicando o produto de probabilidades, encontraremos a probabilidade dos sorteados terem comprado os produtos no mês de fevereiro, logo:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{10}.\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{60}$$

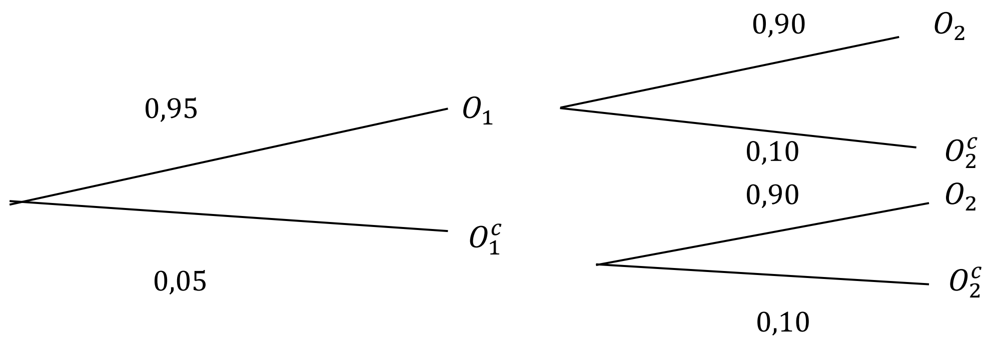
$$\Leftrightarrow \ P(A \cap B) = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Exemplo 32 Uma empresa produz peças em duas máquinas $I \ e \ II$, que podem apresentar desajustes com probabilidade $0{,}05 \ e \ 0{,}10$; respectivamente. No inicio do dia de operação o teste é realizado e, caso a máquina esteja fora de ajuste, ela ficará sem operar nesse dia passando por revisão técnica. Para cumprir o nível de produção pelo menos uma das maquinas deve operar. Existe a possibilidade da empresa não cumprir com as metas estabelecidas?

Solução

Seja O_i o evento da máquina i estar operando, $i \in \{1,2\}$. Sabemos que $P(O_1) = 0{,}95$ e $P(O_2) = 0{,}90$. Também podemos inferir das informações acima que $P(O_1^C) = 0{,}05 \ e \ P(O_2^C) = 0{,}10$. Como os eventos O_1e O_2 são independentes, pois a eventual falha de uma máquina não interfere no comportamento da outra.

Na figura a seguir, apresentamos um diagrama conhecido como árvore de probabilidades. Cada caminho da árvore indica uma possível ocorrência.



Faremos uma tabela que resume as ocorrências e suas respectivas probabilidades.

Eventos	Probabilidade
O_1O_2	$0{,}95x0{,}90 = 0{,}855$
$O_1O_2^c$	$0{,}95x0{,}10 = 0{,}095$
$O_1^cO_2$	$0{,}05x0{,}90 = 0{,}045$
$O_1^c \ O_2^c$	$0{,}05x0{,}10 = 0{,}005$

Para obter o nível mínimo de produção diária, precisamos ter pelo menos uma máquina operando. Isto corresponde à ocorrência do evento $O_1O_2 \cup O_1O_2^c \cup O_1^cO_2$.

Temos,

$$\Leftrightarrow P(O_1O_2 \cup O_1O_2^c \cup O_1^cO_2) = P(O_1O_2) + P(O_1O_2^c) + P(O_1^cO_2)$$

$$\Leftrightarrow P(O_1O_2 \cup O_1O_2^c \cup O_1^cO_2) = 0{,}855 + 0{,}095 + 0{,}045$$

$$\Leftrightarrow P(O_1O_2 \cup O_1O_2^c \cup O_1^cO_2) = 0{,}995$$

Dessa forma, concluímos que a probabilidade de manter o nível mínimo de produção é 0,995.

Definição 2.3.4- *Os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formam uma partição do espaço amostral, se eles não têm intersecção entre si e se sua união é igual ao espaço amostral. Isto é:*

$i)\ C_i \cap C_j = \emptyset \ para\ i \neq j.$

ii) $\bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Omega.$

A figura 5 apresenta um exemplo de uma partição com 6 eventos.

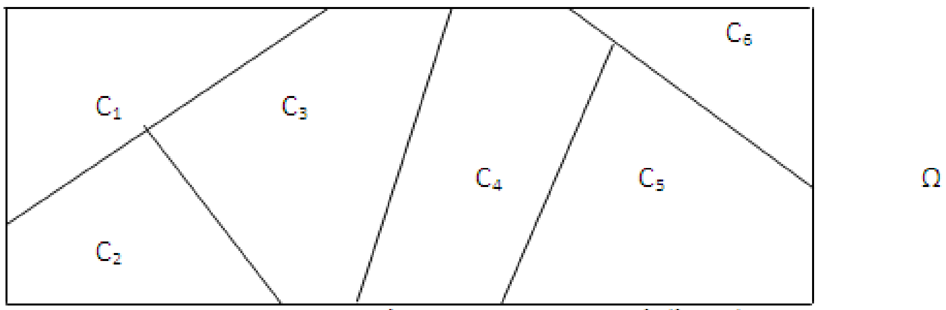
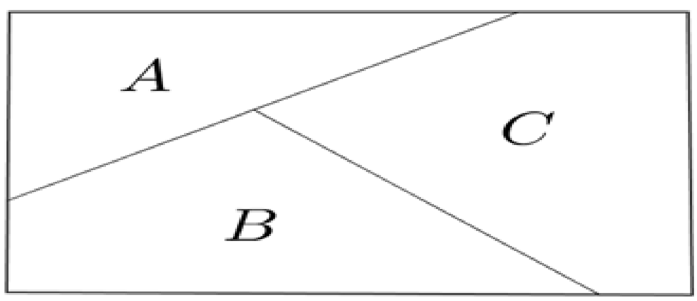


Figura 5 – Partição do espaço amostral (k= 6)

Considere o espaço amostral obtido pelos números das faces no lançamento de um dado e sejam esses os eventos: $A = \{1\}, B = \{2,3\}\ e\ C = \{4,5,6\}$.

Então se pode verificar facilmente que, os eventos acima formam uma partição do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5,6\}$. Desta forma, o evento Ω pode ser escrito em termos de intersecções de Ω com os eventos $A, B\ e\ C$, conforme ilustra a figura abaixo.



$$\Omega = (\Omega \cap A) \cup (\Omega \cap B) \cup (\Omega \cap C)$$

Exemplo 33 O time do Vasco da Gama tem 90% de chance de ganhar um jogo, quando este se realiza sob chuva. Caso não chova durante a partida, as suas chances de vencer aumentam para 95%. Se o serviço de metereologia estimar em 25% a probabilidade de que chova durante a partida, qual a probabilidade do Vasco ganhar o jogo?

Solução

Denominamos os eventos da seguinte maneira:

G: Ganhar; C: Chovendo; NC= Não chovendo.

Pelas informações acima, temos que:

$P(G|C) = 90\% = 0{,}9;$ $P(C) = 25\% = 0{,}25.$

$P(G|NC)) = 95\% = 0{,}95;$ $P(NC) = 75\% = 0{,}75.$

Queremos a probabilidade de ganhar com ou sem chuva, logo:

$P(G) = P(G \cap C) + P(G \cap NC)$

$\Leftrightarrow P(G) = P(G|C)P(C) + P(G|NC)P(C)$

$\Leftrightarrow P\ (G) = 0{,}9.0{,}25 + 0{,}95.O,75$

$\Leftrightarrow P\ (G) = 0{,}9375$.

Concluímos que a probabilidade do Vasco ganhar uma partida é de $93{,}75\%$.

Exemplo 34 As máquinas $A, B\ e\ C$ são responsáveis por $60\%, 30\%\ e\ 10\%$, respectivamente, da produção de uma empresa. A máquina A produz 2% de peças defeituosas, a máquina B 4% de peças defeituosas e a máquina C 5% de peças defeituosas. Calcule o percentual de peças defeituosas na produção desta empresa.

Solução

Denominamos os eventos da seguinte maneira:

A: Peça produzida pela máquina A;

B: Peça produzida pela máquina B;

C: Peça produzida pela máquina C;

D: Peça defeituosa.

Pelas informações acima, temos que:

$P(D|A) = 2\% = 0{,}02.$ $P(A) = 60\% = 0{,}6.$

$P(D|B) = 4\% = 0{,}04.$ $P(B) = 30\% = 0{,}3.$

$P(D|C) = 5\% = 0{,}05.$ $P(C) = 10\% = 0{,}1.$

Queremos o percentual de peças defeituosas na produção desta empresa, logo:

$P\ (D) = P\ (D \cap A) + P\ (D \cap B) + P\ (D \cap C).$

$\Leftrightarrow\ P\ (D) = P(D|A).P(A) + P(D|B).P\ (B) + P(D|C).P(C)$

$\Leftrightarrow\ P\ (D) = 0{,}02.\,0{,}6 + 0{,}04.\,0{,}3 + 0{,}05.\,0{,}1$

$\Leftrightarrow P\ (D) = 0{,}012 + 0{,}012 + 0{,}005$

$\Leftrightarrow\ P\ (D) = 0{,}029$

Concluímos que o percentual de peças defeituosas na produção desta empresa é de 2,9%.

Teorema 2.3.1- ***Teorema de Bayes****: Suponha que os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formem uma partição do espaço amostral e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento A, se conheçam as probabilidades $P(A|C_i)$ para todo $i = 1,2,\ldots,k$. Então, para qualquer j,*

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j).P(C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i).P(C_i)},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Dem.:

Da definição de probabilidade condicional temos:

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)}$$

O numerador dessa expressão pode ser reescrito pela regra do produto, condicionado à C_j, isto é,

$$P(C_j \cap A) = P(A \cap C_j) = P(A|C_j).P(C_j)$$

Para completar a demonstração note que

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)$$

Exemplo 35 Uma clíinica especializada trata apenas de três tipos de doentes: dos que sofrem de problemas cardíacos, dos que tem cálculo renal e dos hipertensos. 50% dos pacientes que procuram a clínica são cardíacos, 40% são portadores de cálculo renal e apenas 10% são hipertensos. Os problemas cardíacos são curados em 80% das vezes; os problemas de cálculo renal em 90% das vezes e os hipertensos em 95% das vezes. Um enfermo saiu curado da clínica. Qual a probabilidade de que ele sofresse de cálculo renal?

Solução:

Denominamos os eventos da seguinte maneira:

A: Problemas cardíacos;

R: Cálculo renal;

H: Hipertensos.

C: Curado;

Pelas informações acima, temos que:

$P(C|A) = 80\% = 0{,}80.$ $\quad$ $P(A) = 50\% = 0{,}5.$

$P(C|R) = 90\% = 0{,}90.$ $\quad$ $P(R) = 40\% = 0{,}4.$

$P(C|H) = 95\% = 0{,}95.$ $\quad$ $P(H) = 10\% = 0{,}1.$

Queremos obter $P(R|C) = \frac{P(R\cap C)}{P(C)}$

Pelo teorema de Bayes temos que:

$$P(R|C) = \frac{P(C|R).P(R)}{P(C|A).P(A) + P(C|R).P(R) + P(C|H).P(H)}$$

$$\Leftrightarrow P(R|C) = \frac{0{,}9.0{,}4}{0{,}8.0{,}5 + 0{,}9.0{,}4 + 0{,}95.0{,}1}$$

$$\Leftrightarrow P(R|C) = \frac{0{,}36}{0{,}855}$$

$$\Leftrightarrow P(R|C) = 0{,}421$$

Exemplo 36 (PROFMAT-ENQ-2012-2) Em uma caixa há três dados aparentemente idênticos. Entretanto, apenas dois deles são normais, enquanto o terceiro tem três faces 1 e três faces 6. Um dado é retirado ao acaso da caixa e lançado duas vezes. Se a soma dos resultados obtidos for igual a 7, qual é a probabilidade condicional de que o dado sorteado tenha sido um dos dados normais?

Solução

Vamos denotar por N o dado normal, por A o dado anormal e por 7 a soma das faces iguais a 7.Queremos obter $P(N|7) = \frac{P(N \cap 7)}{P(7)}$.

Pelas informações acima, podemos inferir que:

$P(7|N) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ e $P(N) = \frac{2}{3}$

$P(7|A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ e $P(A) = \frac{1}{3}$

Queremos obter $P(N|7) = \frac{P(N \cap 7)}{P(7)}$

Pelo teorema de Bayes temos que:

$$P(N|7) = \frac{P(7|N)P(N)}{P(7|N)P(N) + P(7|A)P(A)}$$

$$\Leftrightarrow P(N|7) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow P(N|7) = \frac{2}{5}$$

2.4 Variáveis Aleatórias.

Uma *variável aleatória* é uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios. Uma quantidade X, associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada de *variável aleatória discreta*, se assume valores num conjunto enumerável, com certa probabilidade. Um exemplo de variável aleatória discreta é o número de alunos de uma turma, já o tempo de reação a certo medicamento é contínua.

Definição 2.4.1 ***Função discreta de probabilidade****: A função que atribui a cada valor da variável aleatória sua probabilidade é denominada de* ***função discreta de probabilidade*** *ou, simplesmente,* ***função de probabilidade****.* A notação a ser utilizada é:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i \, , i = 1,2, \ldots$$

ou ainda,

X	x_1	x_2	x_3	.	.	.
p_i	p_1	p_2	p_3	.	.	.

Uma função de probabilidade satisfaz $0 \leq p_i \leq 1 \; e \; \sum_i p_i = 1$.

Exemplo 37 Dois dados são lançados e observa-se o par obtido. O espaço amostral é formado por 36 resultados equiprováveis. Seja X uma variável aleatória definida como a soma do par obtido. Determine a função probabilidade para X.

Solução:

Tem-se que:

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Para X tem-se:

$$P(X = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}.$$

$$P(X = 3) = P(\{(1,2)\}; \{(2,1)\}) = \frac{2}{36}.$$

$$P(X = 4) = P(\{(1,3)\}; \{(2,2)\}; \{(1,3)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 5) = P(\{(1,4)\}; \{(2,3)\}; \{(3,2)\}; \{(3,2)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 6) = P(\{(1,5)\}; \{(2,4)\}; \{(3,3)\}; \{(4,2)\}; \{(5,1)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = P(\{(1,6)\}; \{(2,5)\}; \{(3,4)\}; \{(4,3)\}; \{(5,2)\}; \{(1,6)\}) = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 8) = P(\{(2,6)\}; \{(3,5)\}; \{(4,4)\}; \{(5,3)\}; \{(6,2)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 9) = P(\{(3,6)\}; \{(4,5)\}; \{(5,4)\}; \{(6,3)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 10) = P(\{(4,6)\}; \{(5,5)\}; \{(6,4)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 11) = P(\{(5,6)\}; \{(6,5)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 12) = P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$$

A função de probabilidade da variável aleatória soma do par obtido fica sendo:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Em várias situações é útil calcular a probabilidade acumulada até certo valor. A definição a seguir apresenta esse conceito.

Definição 2.4.2-*Função de distribuição de probabilidade*: *A função de distribuição ou **função acumulada de probabilidade** de uma variável aleatória discreta X é definida, para qualquer número real x, pela seguinte expressão:*

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Exemplo 38 Um caminho para chegar a uma festa pode ser dividido em três etapas. Sem enganos o trajeto é feito em 1 hora. Se enganos acontecem na primeira etapa, acrescente 10 minutos ao tempo do trajeto. Para enganos na segunda etapa, o acréscimo é de 20 e, para terceira, 30 minutos. Admita que a probabilidade de engano é $0{,}1;\ 0{,}2\ e\ 0{,}3$ para a primeira, segunda e terceira etapas, respectivamente. Determine a probabilidade de haver atraso e o atraso não passar de 40 minutos.

Solução:

Seja X a variável aleatória atraso em minutos. Vamos denotar os eventos da seguinte maneira:

A= Evento com atraso de 10 minutos e $P(A) = 0.1$

B= Evento com atraso de 20 minutos e $P(B)\ = 0{,}2$

C= Evento com atraso de 30 minutos e $P(C) = 0{,}3$

Tem-se que:

$X = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60\}$.

Para X tem-se:

$P(X = 0\ ) = P\ (A^C \cap\ B^C \cap\ C^C) = P\ (A^C). P\ (B^C). P\ (C^C) = 0{,}9. 0{,}8. 0{,}7 = 0{,}504.$

$P(X = 10) = P\ (A \cap\ B^C \cap\ C^C) = P\ (A). P\ (B^C). P\ (C^C) = 0{,}1. 0{,}8. 0{,}7 = 0{,}056.$

$P(X = 20) = P\ (A^C \cap\ B \cap\ C^C) = P\ (A^C). P\ (B). P(C^C) = 0{,}9. 0{,}2. 0{,}7 = 0{,}126.$

$P(X = 30) = P\ (A \cap\ B \cap\ C^C) = P\ (A). P\ (B). P\ (C^C)\ =\ 0{,}1. 0{,}2. 0{,}7 =\ 0{,}014.$

$P(X=30) = P\ (A^C \cap\ B^C \cap\ C)\ =\ P\ (A^C).P\ (B^C).P\ (C)\ =\ 0{,}9.\,0{,}8.\,0{,}3 =\ 0{,}216.$
$P(X=40) = P\ (A \cap\ B^C \cap\ C)\ =\ P(A).P(B^C).P(C)\ =\ 0{,}1.\,0{,}8.\,0{,}3 =\ 0{,}024.$
$P(X=50) = P\ (A^C \cap\ B \cap\ C)\ =\ P(A^C).P(B).P(C)\ =\ 0{,}9.\,0{,}2.\,0{,}3 =\ 0{,}054.$
$P(X=60) = P\ (A \cap\ B \cap\ C)\ =\ P(A).P(B).P(C)\ =\ 0{,}1.\,0{,}2.\,0{,}3 =\ 0{,}006.$

Determinamos acima todas as possibilidades possíveis para se chegar à festa. E encontramos que a probabilidade de chegar a mesma sem atraso é $0{,}504$. Sendo assim, concluímos que a probabilidade de chegar a ela com atraso é o seu complementar, logo a probabilidade é $0{,}496$. A seguir, vamos determinar a probabilidade do atraso não passar de 40 minutos, então:

$$P(0 <\ X \leq 40) = P(10)\ + P(20) + P(30) + P(40)$$
$$\Leftrightarrow P(0 <\ X\ \leq 40)\ =\ 0{,}056\ +\ 0{,}126\ +\ 0{,}23\ +\ 0{,}024$$
$$\Leftrightarrow P(0 <\ X\ \leq 40) = 0{,}436.$$

Após ter definido uma função discreta de probabilidade, vamos agora estudar alguns modelos discretos de probabilidade.

2.5 Modelos Probabilísticos.

Modelos probabilísticos são formas mais compactas de escrever a função de probabilidade de tal maneira que existirá uma lei para atribuir as probabilidades. A seguir, veremos o Modelo Uniforme Discreto, Modelo Bernoulli, Modelo Binomial, Modelo Geométrico e o Modelo Poisson. Sendo que o foco principal dar-se-á no Modelo Binomial, haja vista que esse é estudado no ensino médio com maior ênfase.

i) Modelo Uniforme Discreto.

Definição 2.5.1- *Seja X uma variável aleatória assumindo valores de* $1, 2, 3, \ldots, k$. *Dizemos que X segue o* ***Modelo Uniforme Discreto*** *se atribui a mesma probabilidade* $\frac{1}{k}$ *a cada um desses k valores. Ou seja, a sua função de probabilidade é dada por:*

$$P(\ X = j) =\ \frac{1}{k}, j = 1{,}2, \ldots, k.$$

A notação que irá representar a variável aleatória X no Modelo Uniforme Discreto com valores no intervalo $[1, k]$ será $X \sim U_D[1, k]$. O Modelo Uniforme tem esse nome, porque todos os seus valores ocorrem com a mesma probabilidade.

Exemplo 39 Um usuário de transporte coletivo chega pontualmente às 8 horas para pegar o seu ônibus. Devido ao trânsito caótico, a demora pode ser qualquer tempo entre 1 e 20 minutos (admita que o relógio "pule" de minuto em minuto).Determine:

a) Qual a probabilidade de demorar mais de 10 minutos?

b) Qual a probabilidade de demorar pelo menos 5 mas não mais de 10 minutos?

c) Qual a probabilidade de a demora não chegar a 5 minutos?

Solução

a) Como cada minuto tem a mesma probabilidade de ocorrência, com $\frac{1}{20}$ para cada um. A variável aleatória em questão, demorar mais do que 10 minutos, segue o modelo Uniforme e, agora basta determinar $P(X > 10)$, logo:

$$P(X > 10) = P(X = 11) + P(X = 12) + \ldots + P(X = 20)$$

$$\Leftrightarrow P(X > 10) = \underbrace{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{20}}_{10\ vezes}$$

$$\Leftrightarrow P(X > 10) = \frac{10}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(X > 10) = 0{,}5$$

b) Agora a variável aleatória é demorar mais do que 5 mas não mais de 10 minutos, então vamos determinar $P(5 \leq X \leq 10)$, logo:

$$P(5 \leq X \leq 10) = P(X = 5) + P(X = 6) + \cdots + P(X = 10)$$

$$\Leftrightarrow P(5 \leq X \leq 10) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(5 \leq X \leq 10) = \frac{6}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(5 \leq X \leq 10) = 0{,}3.$$

c) Nesse item, a variável aleatória é a demora não chegar a 5 minutos, então vamos determinar $P(X < 5)$, logo:

$$P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$\Leftrightarrow P(X < 5) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(X < 5) = \frac{4}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(X < 5) = 0{,}2.$$

ii) Modelo Bernoulli.

Definição 2.5.2- *Dizemos que uma variável* X *segue o* ***Modelo de Bernoulli*** *se atribui* 0 *ou* 1 *à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente. Com* p *representando a probabilidade de sucesso,* $0 \leq p \leq 1$,*sua função discreta de probabilidade é dada por*

X	0	1
p_i	$1 - p$	p

ou de modo resumido, $P(X = x) = p^x \, (1 - p)^{1-x}$.

Exemplo 40 Alguns exemplos que ocorre sucesso ou fracasso. (Modelo de Bernoulli).

- O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo.
- O aluno passa ou não no Enem.
- No lançamento de um dado ocorre ou não a face 2.
- No lançamento de uma moeda ocorre cara ou coroa.

iii) Modelo Binomial

Definição 2.5.3- *Considere a repetição de* n *ensaios de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso* p. *A variável aleatória que conta o número total de sucessos é denominada* ***Modelo Binomial*** *com parâmetros* n *e* p *e sua função de probabilidade é dada por:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \, (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Usaremos a notação $X \sim b\,(n, p)$ para indicar que a variável aleatória X segue o modelo Binomial com parâmetros n e p.

Exemplo 41 (PROFMAT-ENQ-2012-2): Uma moeda com probabilidade 0,6 de dar cara, é lançada 3 vezes.Qual a probabilidade de que sejam observadas duas caras e uma coroa, em qualquer ordem?

Solução:

Seja X o número de lançamentos da moeda.

p: probabilidade de dar cara em um lançamento; $p = 0{,}6$.

$X \sim b\ (3;\ 0{,}6)$, ou seja, a variável aleatória X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 3\ e\ p = 0{,}6$. Como queremos determinar duas caras e uma coroa, então $k = 2$ e com função de probabilidade dada por:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} . 0{,}6^2 . 0{,}4^{3-2}$$

$$\Leftrightarrow P(X = 2) = 3 . 0{,}36 . 0{,}4$$

$$\Leftrightarrow P(X = 2) = 0{,}432.$$

Exemplo 42 Um jogador de xadrez tem 0,7 de probabilidade de vitória quando joga. Na realização de cinco partidas, determinar a probabilidade de esse jogador vencer:

a) duas partidas.

b) mais que a metade das partidas.

Solução:

a)Seja X o número de realizações de partidas.

p: probabilidade de vencer uma partida de xadrez; $p = 0{,}7$.

$X \sim b(5;\ 0{,}7)$, ou seja, a variável aleatória X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 5\ e\ p = 0{,}7$.Como queremos determinar a probabilidade de vencer duas partidas, então $k = 2$ e com função de probabilidade dada por:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} . 0{,}7^2 . 0{,}3^{5-2}$$

$$\Leftrightarrow P(X = 2) = 10 . 0{,}49 . 0{,}027$$

$$\Leftrightarrow P(X = 2) = 0{,}1323.$$

b) Como queremos determinar a probabilidade de vencer mais que a metade das partidas, temos que $P(X \geq 3)$, então:

$$P(X \ \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 3) = \binom{5}{3}.0{,}7^3.0{,}3^{5-3} + \binom{5}{4}.0{,}7^4.0{,}3^{5-4} + \binom{5}{5}.0{,}7^5.0{,}3^{5-5}$$

$$\Leftrightarrow \ P(X \ \geq 3) = 10.0{,}343.0{,}09 + 5.0{,}2401 . 0{,}3 + 1.0{,}16807.1$$

$$\Leftrightarrow P(X \ \geq 3) = 0{,}3087 + 0{,}36015 \ + 0{,}16807$$

$$\Leftrightarrow \ P(X \geq 3) = 0{,}83692.$$

Exemplo 43 Certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 4 pacientes de que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

a) Todos serem curados?

b) Pelo menos dois não serem curados?

c) Ao menos 3 ficarem livres da doença?

Solução:

a)Para que tenhamos todos curados, k será 4. Então:

$$P(X = 4) = \binom{4}{4}.0{,}8^4.0{,}2^{4-4}$$

$$\Leftrightarrow P(X = 4) = 1.0{,}4096.1$$

$$\Leftrightarrow P(X = 4) = 0{,}4096.$$

b) Para que tenhamos pelo menos dois não curados, significa dizer que é o mesmo que no máximo 2 não curados, ou seja, determinaremos $P(X \leq 2)$, então k assumirá $0, 1 \ e$ 2. Logo:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$\Leftrightarrow P(X \leq 2) = \binom{4}{0}.0{,}8^0.0{,}2^{4-0} + \binom{4}{1}.0{,}8^1.0{,}2^{4-1} + \binom{4}{2}.0{,}8^2.0{,}2^{4-2}$$

$$\Leftrightarrow P(X \leq 4) = 1.1.0{,}0016 + 4.0{,}8.0{,}008 + 6 . 0{,}64 . 0{,}04$$

$$\Leftrightarrow P(X \leq 4) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536$$

$$\Leftrightarrow \ P(X \leq 2) = 0{,}1536$$

c) Para que ao menos 3 fiquem livres da doença, determinaremos $P(X \geq 3)$, então k assumirá $3 \ e \ $ 4.Logo:

$$P(X \ \geq 3) \ = P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 2) = \binom{4}{3}.0{,}8^3.0{,}2^{4-3} + \binom{4}{4}.0{,}8^4.0{,}2^{4-4}$$

$$\Leftrightarrow\ P(X \geq 3) = 4.0{,}512.0{,}2 + 1.0{,}4096.1$$

$$\Leftrightarrow\ P(X \geq 3)\ = 0{,}4096 + 0{,}4096$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 3) = 0{,}8192.$$

iv) Modelo Geométrico

Definição 2.5.4 *Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição Geométrica de parâmetro p, se sua função de probabilidade tem a forma*

$$P(X = k) = p.(1-p)^k,\ 0 \leq\ p \leq\ 1\ e\ k = 0{,}1{,}2, \ldots.$$

Nesse caso, usaremos a notação $X \sim G(p)$.

Notar que o experimento encerra quando ocorre o primeiro sucesso.

Exemplo 44 Joga-se um dado equilibrado. Qual é a probabilidade de serem necessários 9 lançamentos até a primeira ocorrência de um múltiplo de 3?

Solução

Nesse caso, o sucesso é a ocorrência da face ser um múltiplo de 3. Logo, $p\ =\ \frac{1}{3}$. Seja X = número de lançamentos até o primeiro múltiplo de 3. Então, $X \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$ e como queremos determinar a probabilidade da ocorrência de um múltiplo de 3 até o oitavo lançamento, isso significa que $k = 8$. Portanto

$$P(X = 8) = \frac{1}{3}.\left(1 - \frac{1}{3}\right)^8$$

$$\Leftrightarrow\ P(X = 8) = \frac{1}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^8$$

$$\Leftrightarrow P(X = 8) = \frac{1}{3}.\left(\frac{256}{6561}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ P(X = 8) = \frac{256}{19683}$$

$$\Leftrightarrow\ P(X = 8) = 0{,}013$$

v) Modelo Poisson

Definição 2.5.5- Uma variável aleatória X que tem distribuição de Poisson é caracterizada apenas pelo parâmetro $\lambda > 0$**.** Onde λ é a taxa de ocorrência dos eventos no intervalo de tempo. A notação utilizada será $X \sim Po(\lambda)$.

A função de probabilidade da distribuição de Poisson é:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Onde: e é uma constante (base do logaritmo neperiano) valendo aproximadamente $2{,}718\ldots$

λ é o número esperado de sucessos no intervalo considerado

k é o número de sucessos ($x = 0, 1, 2, \ldots, \infty.$)

Observações:

1. A probabilidade de observar apenas um sucesso no intervalo é estável.
2. A probabilidade de observar mais que um sucesso no intervalo é zero.
3. A ocorrência de um sucesso em qualquer intervalo é independente da ocorrência de sucesso em qualquer outro intervalo.

Exemplo 45 Um laboratório estuda a emissão de partículas de certo material radioativo. Seja *N: número de partículas emitidas em* 1 *minuto.* O laboratório admite que N tem função de probabilidade Poisson com parâmetro 5, isto é,

$$P(X = k) = \frac{e^{-5}5^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Calcule a probabilidade de que em um minuto não haja emissões de partículas.

b) Determine a probabilidade de que pelo menos uma partícula seja emitida em um minuto.

c) Qual a probabilidade que, em um minuto, o número de partículas emitidas esteja entre 2 e 5 (inclusive)?

Solução

a)Para que não haja emissões de partículas, k será igual a zero, logo:

$$\mathrm{P(N = k)} = \frac{e^{-5}5^k}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{P(N = 0)} = \frac{(2{,}718)^{-5}.5^0}{0!}$$

$\Leftrightarrow$ P($N = 0$)= 0,0067

b) Para determinarmos a probabilidade de que pelo menos uma partícula seja emitida em um minuto, isso é a mesma coisa que o complementar de que não haja emissões de partícula, sendo assim, temos que:

$P(N = 0) + P(N \geq 1) = 1$

$\Leftrightarrow 0{,}0067 + P(N \geq 1) = 1$

$\Leftrightarrow P(N \geq 1) = 1 - 0{,}0067$

$\Leftrightarrow P(N \geq 1) = 0{,}9933.$

c) Vamos determinar a probabilidade que, em um minuto, o número de partículas emitidas esteja entre 2 e 5, então $P(2 < N < 5)$, para isso, k assumirá como seus valores o 3 e 4, logo:

$P(2 < N < 5) = P(3) + P(4)$

$\Leftrightarrow P(2 < N < 5) = \frac{(2{,}718)^{-5}.5^3}{3!} + \frac{(2{,}718)^{-4}.5^3}{4!}$

$\Leftrightarrow P(2 < N < 5) = 0{,}14 + 0{,}176$

$\Leftrightarrow P(2 < N < 5) = 0{,}316.$

Capítulo 3

Proposta de Ensino

É notório que a aprendizagem da matemática é desafiadora por parte da grande maioria dos discentes por ser uma ciência que necessita do raciocínio abstrato e isso acontece com maior frequência a partir do Ensino Fundamental maior (6º ao 9º ano) e no Ensino Médio. No Ensino Médio, alguns conteúdos assustam com maior intensidade os discentes e, ao citar alguns desses, não podemos esquecer a Análise Combinatória e a Probabilidade.

Vários fatores dificultam o ensino, dentre eles podemos citar as péssimas condições das escolas, o número crescente de atos de indisciplina e a má formação dos docentes. Este último tem uma grande parcela de responsabilidade nesse contexto, haja vista que principalmente em relação aos conteúdos citados, exige-se além da metodologia tradicional comumente utilizada em aulas de matemática (definição, exemplos e exercícios), um raciocínio mais apurado para compreender os mecanismos que levarão aos objetivos propostos.

Também, não podemos deixar de mencionar a falta de motivação tanto por parte dos docentes como dos discentes. A motivação tem uma importância fundamental durante o processo de aprendizagem e esta tem o poder de influenciar de forma positiva as relações desenvolvidas neste processo.

> A motivação refere-se a forças que energizam, dirigem e sustentam os esforços de uma pessoa. Todo comportamento, exceto reflexos involuntários como o piscar de olhos (que geralmente tem pouco a ver com administração), é motivado. (BATEMAN & SNELL, 1998, p. 360)

No processo ensino-aprendizagem, o aluno precisa estar motivado para aprender, contudo o professor não é o único responsável por essa motivação. Outros fatores influenciam decisivamente nesse processo, tais como a estrutura do estabelecimento de ensino, o acesso aos materiais didáticos e recursos multimídias.

A motivação tem a função de conduzir os atores desse processo à ação e impulsionar docentes e discentes a desempenharem seus papéis de forma satisfatória, conduzindo-os respectivamente a transmissão eficiente dos conteúdos e assimilação concreta dos mesmos.

Schwartz (2006) se apoia nas ideias de Freire (1987) para afirmar que a motivação nos processos de ensino e de aprendizagem precisa fazer parte da ação, ou seja, o sujeito se motiva/é motivado enquanto está atuando, ensinando/ aprendendo. Um professor com ações motivadoras na sala de aula terá mais facilidade de instigar o discente a sentir-se motivado a desenvolver ações que o conduzam a assimilar conteúdos, obter e produzir conhecimento. Assim, professor e aluno são motivados enquanto desempenham seus papeis durante a transmissão e assimilação de conhecimentos.

Da mesma forma, Schwartz (2006) reafirma as ideias de Schor (1987) ao concordar que a motivação precisa estar imbricada no reconhecimento da importância que o conhecimento tem. A motivação é relevante para o entendimento do indivíduo enquanto ser atuante no processo de aprendizagem, levando em consideração suas vivências uma vez que as dificuldades encontradas ao longo da vida se dão também pela falta de motivação do indivíduo, e trabalhar este aspecto na vida do aluno pode resultar em grandes mudanças, tanto no âmbito educacional, quanto pessoal.

Diante de uma realidade cada vez mais cruel, o ensino da matemática se torna algo mais desestimulante para aqueles que estão inseridos nesse contexto, e para o professor, será necessário cada vez mais encontrar metodologias para expor as suas aulas de uma forma que venha a atrair o seu alunado.

Com base nesse contexto, neste capítulo, elaboramos uma proposta de sequência didática sobre Análise Combinatória, Probabilidade e Modelos Probabilísticos para aplicação na Educação Básica, com o intuito de sugerir aos docentes do Ensino Médio uma abordagem do conhecimento matemático referente a esses assuntos.

Na sequência abordamos alguns conceitos da didática matemática que norteiam a discussão sobre sequência didática e que integram a base teórica para o objeto de destaque neste capítulo.

3.1 Sequência Didática

A palavra didática do grego *didaktikos* e *didaktós* significa próprio para instruir, que se pode ou é preciso ensinar. No campo da práxis a didática é um recurso pedagógico intrinsicamente relacionado ao processo de ensino-aprendizagem em que o docente desenvolve métodos de ensino para formação do discente. Porém, a elaboração do método, a partir de objetivos que se pretende alcançar, deve levar em consideração os aspectos socais, políticos e culturais nos quais o discente está inserido:

> A relação entre professor e alunos está voltada basicamente à formação intelectual, implica aspectos gnosiológicos, psíquicos e socioculturais mas envolve sempre uma relação social, seja entre professor e alunos, seja na dinâmica de relações internas

> que ocorre na escola em suas práticas organizativas, seja nas relações com a comunidade e sociedade. (LIBÂNEO, 2009, p.14).

A didática da matemática é uma das tendências da grande área da Educação Matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. É a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem do discente no processo ensino-aprendizagem.

Nesse contexto, surge uma proposta de ensino que tem por base as sequências didáticas. Estas têm como objetivo criar situações que possibilitem ao professor perceber os comportamentos cognitivos dos alunos, quando os mesmos estão envolvidos em fenômenos que não estão habituados, levando-os a serem agentes ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Brousseau (1986, p.8),

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educacional (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos.

Assim, uma situação didática é formada pelas relações pedagógicas determinadas em sala de aula entre o professor, os alunos e o conhecimento matemático, com o propósito de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico.

A situação didática, formada por atividades que podem ser definidas como sendo “os meios” usados pelo professor para instigar o aluno a vivenciar as experiências necessárias que contribuam para o desenvolvimento de competências e habilidades. Assim, o aluno teria participação ativa no processo de ensino-aprendizagem, e não seria apenas receptor de informações, o mesmo estaria assimilando e produzindo conhecimento durante a sequência didática aplicada pelo professor.

Nesse processo um recurso que permite aflorar tais capacidades é a metodologia de resolução de problemas, pois favorece ao aluno maneiras de expressar diferentes estratégias para encontrar respostas aos desafios propostos e ainda, possibilidade de manifestar verbalmente ou por outras representações o que está elaborando em uma situação de desafio.

Na resolução de um problema o conhecimento é assimilado com uma série de adaptações que o aluno realiza sob a influência de situações que ele vivencia na escola e na vida cotidiana, tais como contar pessoas, comprar balas, fazer compras em um supermercado.

Assim, situações de desafios propostas pelo professor contribuem para valorizar a investigação, a integração e a cooperação, incentivando a ação do aluno. É o estímulo à cooperação entre o grupo (alunos e professor), que conduz à assimilação, troca e produção de conhecimento no decorrer das situações didáticas. FREITAS (2002) se remete a teoria das situações didáticas de Brousseau para fazer uma análise do processo de ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula, propondo alcançar uma educação mais significativa para o aluno, de forma que o conhecimento esteja realmente atrelado aos conhecimentos prévios do discente. Esta teoria reflete sobre a forma com que podemos idealizar e expor ao aluno o conteúdo matemático, considerando um desafio, tendo em vista a especificidade do saber matemático.

Na situação didática o professor é o mediador do conhecimento, portanto não o transfere ao aluno, mas desafia o mesmo a buscar a resolução do problema, para tal é necessário que haja previamente uma intenção pedagógica com objetivos e metas: “Existirá uma situação didática sempre que ficar caracterizada a intenção do professor, de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo”. (FREITAS, 2002, p.80)

Deste modo, uma das questões primordiais do vínculo da apresentação do conteúdo com a realidade do aluno é a forma de apresentação do conhecimento num contexto que proporcione ao aluno um verdadeiro sentido, pois, quando este conteúdo é apresentado de forma aleatória, torna-se desprovido da verdadeira finalidade do processo de ensino e de aprendizagem.

Freitas (2002) retoma os conceitos de Brousseau sobre os tipos de aprendizagem para elucidar que o aspecto formal do ensino da matemática não deve representar a essência do conhecimento.

> A aprendizagem por adaptação na qual o aluno se defronta com a necessidade de adequar o seu conhecimento a um determinado problema que lhe foi colocado no quadro de uma situação didática. Por contraposição a esta adaptação está a ‘aprendizagem formal’ que procura sobrepor a memorização, a técnica e os processos de automatismo à compreensão verdadeira das ideias matemáticas (FREITAS, 2002, p.86).

Com o propósito de proporcionar ao aluno um contexto que revele a intenção de ensinar matemática surgem as situações adidáticas, desvelando aspectos que ocorrem durante a resolução de problemas e a elaboração de conceitos pelos alunos. Na situação adidática o aluno trabalha de forma independente e não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor em relação ao conteúdo, o aluno se apropria da situação e busca resolver o problema, o professor controla o andamento da situação e não o saber. (FREITAS, 2002, p.84).

A resolução de problemas, por ser uma situação didática, é fundamental no ensino aprendizagem da matemática devido à especificidade desta disciplina, pois quase todo o trabalho de educação matemática envolve algum tipo de problema. Assim, no processo de construção do conhecimento matemático é importante não só o encontro de “boas respostas”, mas também a elaboração de “boas questões” no processo de aprendizagem, assim segundo Freitas (2002 p.90), “se o aluno consegue uma boa resolução de problema, pode-se concluir que ele possui um determinado conhecimento; caso contrário é sinal que ele precisa evoluir e atender às expectativas do contexto”.

Os documentos oficiais, como os PCN (BRASIL, 1998), reiteram a necessidade do desenvolvimento de diversas competências, dentre as quais aponta a resolução de problemas, que deve estimular o conhecimento procedimental, de modo a intensificar o conhecimento conceitual. “Aprender Matemática [...] deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemático e de um saber pensar matemático” (BRASIL, 1998, p. 41).

Neste texto, entendemos por problema uma situação nova, diferente, difícil ou surpreendente, que se constitui em obstáculo entre a proposição e a solução, de modo que o indivíduo busque caminhos, procedimentos alternativos, o que favorece a busca de uma diversidade de soluções e exige o trabalho de investigação e tomada de decisão. A situação didática com a qual o professor apresenta os problemas ao aluno influencia fortemente o significado do saber escolar matemático que este terá.

Neste sentido, fazemos uso de problemas nas atividades que propomos na sequência didática. De acordo com Zabala (2007, p. 18) sequências didáticas são “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim, conhecido tanto pelos professores como pelos alunos”. São as estratégias e intervenções que o professor utiliza ao elaborar o planejamento, é necessário que essas sequências sejam elaboradas de acordo com o objetivo que o professor pretende alcançar para aprendizagem do aluno:

> Uma sequência didática é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas. Devidamente estruturadas, essas situações têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, sem esgotar o assunto trabalhado. Desse modo, uma sequência didática não pode, *a priori*, ter seu tempo de duração estipulado de acordo com o programado, pois o seu cumprimento leva em conta as necessidades e as dificuldades dos alunos durante o processo. (TEXEIRA e PASSOS, 2013, p.162.)

Ao elaborar uma sequência didática no campo da matemática, é necessário levar em consideração a forma de abordagem do conteúdo que conduzirá o aluno a uma situação didática, de modo que este participe ativamente interagindo na construção do conhecimento ao invés de ser um receptor de informações.

3.2 Níveis Sugeridos para aplicação

- Segundo ano do ensino médio;
- Terceiro ano do ensino médio;
- Cursos preparatórios para Olimpíadas de matemática;

3.3 Duração estimada

- No Ensino Médio, de 12 a 15 aulas;
- Em cursos preparatórios para Olimpíadas de Matemática, sendo visto no curso de Matemática Discreta com duração de 60 horas para aprofundamento e utilização de materiais selecionados pelo professor.

3.4 Desenvolvimento

A seguir, propomos uma sequência didática envolvendo três problemas, sendo que, na primeira apresentamos um problema de Análise Combinatória mais especificamente a Combinação. No segundo um problema de Probabilidade envolvendo combinações, e por fim, no terceiro apresentamos um problema sobre Modelos Probabilísticos, mais especificamente o Modelo Binomial.

Nesta sequência, apresentamos problemas que envolvem em suas resoluções o aparato teórico fundamental visto nos seus respectivos capítulos, bem como exemplos, exercícios e situações-problemas e aspectos desses conteúdos que podem gerar dúvidas.

Através de definições, proposições, teoremas, exercícios-chave e aplicações que se propõe a um estudo progressivo e dinâmico dos conteúdos tratados, elucidando ao estudante diversos pontos que podem ajudá-los a resolver problemas dos mais variados tipos, inclusive questões relacionadas ao cotidiano, numa abordagem interdisciplinar.

Na escolha dos problemas levou-se em conta a abordagem mais ampla dos conteúdos apresentados nos dois primeiros capítulos deste trabalho e a busca por uma situação de fácil ligação com o cotidiano do alunado.

Apresentamos as soluções para os problemas utilizando linguagens que são mais proposta nos livros didáticos. Nelas, usa-se uma linguagem coerente com a linguagem matemática proposta para alunos do Ensino Médio e se baseia nos conteúdos expostos nos dois primeiros capítulos desta dissertação.

Propósito e Justificação do Problema 1

Sabe-se que a maior dificuldade apresentada pela maioria dos estudantes é a escolha do tipo de ferramenta de contagem que terão que usar para modelar o problema, distinção essa que requer ou não a consideração da ordem de um conjunto de elementos. Por esse motivo, temos como objetivo discutir o ensino de problemas em que a ordem não é importante (combinações) e admitimos que os mesmos já tenham estudado o método de contagem em que a ordem interessa (permutações). Por exemplo, situação do tipo: "*Entre 6 alunos , escolha 3 para ir a um passeio realizado pela escola*".

Desenvolvimento das Atividades.

Problema 1 - *Entre os 11 jogadores titulares do Vasco da Gama, teremos que escolher 3 para cobrar os pênaltis. Quantos grupos diferentes poderiam ser formados?*

Depois de permitir que os alunos façam as suas próprias investidas para resolver esse problema, consideramos apropriado que o professor solicite aos alunos que façam o registro num quadro, como demonstrado abaixo, em que cada linha terá que colocar todos os grupos de 3 jogadores que vão agora ser contados apenas uma vez.

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
...					

Justificamos esse procedimento com base em nossa experiência ao ensinar este conteúdo, que nos revelou que muitos não conseguem chegar à resposta correta e os que conseguem fazem por meio do registro de todas as possibilidades.

Usamos as letras para representar cada um dos jogadores. Certamente não é necessário para os alunos completarem totalmente a tabela, mas apenas algumas linhas para entenderem a sua resolução.

Após a representação dos alunos em forma de tabela, o professor poderá fazer algumas indagações do tipo:

- Como calcular a quantidade total de elementos que têm esta tabela?
- Como calcular o número de elementos de cada linha da tabela?
- Como usar esses dois valores calculados anteriormente e a estrutura da tabela para obter o resultado?

Como já estudaram as permutações, encontrarão um total de 11 x 10 x 9 = 990 agrupamentos em que a ordem interessa. Como em cada linha eles encontraram 6 grupos e apenas 1 dentre esses 6 representam o mesmo subconjunto, por isso, faz-se necessário a divisão de 990 por 6, ou seja 990 por 3! que equivale a 165 grupos.

Inicialmente, propomos que o professor informe que qualquer jogador escolhido, só poderá bater um pênalti e depois disso, ele mostrará que a ordem de escolha de certo jogador no mesmo grupo não influenciará, ou seja, pela definição 1.10.1 vista no primeiro capítulo, é uma Combinação Simples.

Depois de ter identificado a técnica de contagem que modela o problema, sugerimos que, juntamente com os estudantes, seja realizado o cálculo de modos possíveis de se determinar a solução.

Solução

Pelo enunciado, temos que $n = 11$ e $k = 3$, logo:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C(11,3) = \frac{11!}{3!\,(11-3)!} = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{11.10.9.8!}{3.2.1.8!} = 165\ grupos.$$

Observação 3.4.1 Alunos do Ensino Médio costumam resolver esta questão listando todas as combinações possíveis, mas vale a ressalva que, para valores considerados relativamente “pequenos”, isso não seria algo que geraria certo desgaste, porém quando trabalhassem com situações que a solução tenha um grande número de possibilidades, os mesmo não conseguiriam chegar a solução.

Por esse motivo, também consideramos necessária a discussão de situações em que é quase que impossível a listagem de todas as combinações, como exemplificado na situação-problema 1.

Situação-Problema 1 *Temos que escolher 5 pessoas dentre 20 para receber presentes iguais. Quantos grupos poderão ser formados?*

Solução

Percebe-se que esta Situação-Problema tem uma modelagem matemática muito parecida com o exemplo anterior, ou seja, podemos inferir que o mesmo é um problema relacionado à combinação, sendo assim, temos que:

Pelo enunciado, temos que $n = 20$ e $k = 5$, logo:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C(20,5) = \frac{20!}{5!\,(20-5)!} = \frac{20!}{5!\,15!} = \frac{20.19.18.17.16.15!}{5.4.3.2.1.15!} = 15504\ grupos$$

Chegamos à conclusão que teremos 15504 grupos.

De fato, mostramos que de alguma forma que for utilizada pelo aluno, o mesmo muito que provavelmente não chegaria à resolução desse problema sem a utilização da ferramenta matemática.

A seguir, apresentamos um problema de Probabilidade, utilizando os conceitos de Permutações e combinações.

Propósito e Justificação do Problema 2

É sabido que a maior dificuldade apresentada pelos estudantes do Ensino Médio em relação ao estudo da Probabilidade é em definir o Espaço Amostral e o Evento escolhido quando este vem relacionado à Análise Combinatória. Por esse motivo, temos como objetivo discutir o ensino de problemas em que se faz necessário definir o Espaço Amostral e o Evento que se pede através de algum método de contagem. Por exemplo, situação do tipo: "*Doze pessoas são divididas em três grupos de 4. Qual a probabilidade de duas dessas pessoas ficarem no mesmo grupo?*"

Desenvolvimento das Atividades.

Problema 2 *Em um grupo de 4 pessoas, qual é a probabilidade de não haver alguma coincidência de signos do zodiácos?*

Novamente, deixaremos que os alunos façam as suas próprias investidas usando os seus conhecimentos para solucionar esse problema. Como os mesmos já viram os métodos de contagem seria interresante que o professor orientasse para se atentarem a utilizar algum desses. Caso algum aluno não consiga visualizar o método a ser aplicado, mais uma vez ele poderá listar as possibilidades.

Após a confecção da tabela, alguns questionamentos podem ser feitos pelo professor, como os que seguem abaixo:

- Qual a possibilidade de signo para cada pessoa?
- Qual a possibilidade de signo para cada grupo de 4 pessoas?
- Qual a possibiladade do grupo de 4 pessoas terem signos diferentes?
- A partir dos questionamentos acima, poderíamos determinar os grupos de 4 pessoas que não tem todos os signos iguais?

Depois de uma breve discussão entre o professor e os alunos sobre os resultados obtidos e a forma com que conseguiram chegar à solução, então mostraremos uma solução para esse problema.

Solução

Primeiramente vamos determinar o número de elementos do espaço amostral (Ω), que é formado pelos grupos de 4 pessoas que engloba todas as possibilidades, sendo assim, temos uma permutação de 4 elementos de um total de 12 com repetições e sem restrições, e de acordo com a proposição 1.9.2 deste trabalho, é denotada por $U(n, k) = n^k$, onde $n = 12$ e $k = 4$.

$n(\Omega) = U(n, k) = n^k.$

$\Leftrightarrow n(\Omega) = U(n, k) = 12^4$

$\Leftrightarrow n(\Omega) = U(n, k) = 12^4 = 20736\, possibilidades.$

Em seguida, vamos determinar o número de eventos possíveis que é ter grupos de 4 pessoas em que não haja coincidência dos signos dos zodiácos, e vamos denotar pela letra latina maiuscula (A). Percebe-se que agora não poderá haver repetição, portanto pela definição 1.9.1 teremos uma permutação simples em que $n = 12 \; e \; k = 4$, logo:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\Leftrightarrow P(12,4) = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{12.11.10.9.8!}{8!} = 11880 \; possibilidades.$$

Depois de determinados o Espaço Amostral e o Evento solicitado no problema 2, seguiremos aplicando a definição 2.1.2 e determinaremos a probabilidade $P(A)$. Portanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{11880}{20736} = \frac{55}{96} \cong 0,57 \; ou \; 57\%.$$

Observação 3.4.2 Vale a pena comentar mais uma vez com os discentes que é quase que impossível listar todas as possibilidades para determinar o número de elementos do espaço amostral, assim como o número de elementos do evento, e enfatizaria a importância de saber identificar o tipo de ferramenta de contagem que será utilizada.

Neste último exemplo, discutiremos os eventos independentes e mostraremos a importância do uso do Modelo Binomial para facilitar na solução dos problemas.

Propósito e Justificação do Problema 3

O conceito de eventos independentes tem uma importância fundamental para que possamos trabalhar com problemas que necessitem de várias repetições. Por esse motivo, temos como objetivo discutir o ensino de problemas em que se faz necessário identificar se os eventos são independentes e que tipo de Modelo Probabilístico poderá ser aplicado. Por exemplo, situação do tipo; "*Um dado é lançado 30 vezes, qual a probabilidade de ocorrer 10 vezes um número divisível por 3".*

Desenvolvimento das Atividades.

Problema 3 *Uma moeda, com probabilidade 0,6 de dar cara , é lançada 3 vezes. Qual a probabilidade de que sejam observadas duas caras e uma coroa, em qualquer ordem?*

Novamente, deixaremos que os alunos façam as suas próprias investidas usando os seus conhecimentos para solucionar esse problema. Estamos admitindo que eles já tenham visto a definição de eventos independentes e a partir daí, possam identificar essa situação e aplicar. O professor pode fazer alguns questionamentos do tipo:

- Os eventos são independentes?
- A definição de uma ordem de lançamento influenciará no resultado?
- Para um grande número de lançamentos, eles conseguiriam representar de alguma maneira?

O professor pode também orientá-los a tentar representar os eventos que poderiam ocorrer onde C representa coroa e K cara. As possibilidades poderiam ser KKC; KCK ou CKK e através do produto de probabilidades os discentes encontriam a resposta.

Depois de uma breve discussão entre o professor e os alunos sobre os resultados obtidos e a forma com que conseguiram chegar à solução, então mostraremos uma solução para esse problema através de um Modelo Probabislístico discreto.

Solução

Percebe-se que esse problema é do tipo Binomial, porque tem mais de um ensaio e a ocorrência de um evento é do tipo sucesso ou fracasso com parâmetros $X \sim b\ (3; 0{,}6)$ e além disso, $k = 2$.

De acordo com a definição 2.5.3, temos que:

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow P(X = 2) = \binom{3}{2}\ (0{,}6)^2\ (1-0{,}6)^{3-2}$$

$$\Leftrightarrow P(X = 2) = 3.\,0{,}36.\,0{,}4$$

$$\Leftrightarrow P(X = 2) = 0{,}432$$

Observação 3.4.3 Novamente o comentário sobre a representação de todas as possibilidades é válida para este exemplo. Os alunos gostam de fazer o comentário que fazer este tipo de exemplo, listando as possibilidades e aplicando o produto de probabilidades é mais fácil por não usar uma linguagem matemática mais avançada. Vale mais uma vez o comentário do professor que nem sempre isso será possível e em seguida mostrar uma situação-problema que faça com que esse comentário tenha uma sustentação.

Situação-Problema 2 *Uma moeda, com probabilidade 0,7 de dar cara , é lançada 25 vezes.Qual a probabilidade de que sejam observadas 18 caras e 7coroas, em qualquer ordem?*

Solução

Assim como o problema 3, Percebe-se que esse problema é do tipo Binomial, porque tem mais de um ensaio e a ocorrência de um evento é do tipo sucesso ou fracasso com parâmetros $X \sim b\ (25; 0{,}7)$ e além disso, $k = 18$.

De acordo com a definição 2.5.3, temos que:

$P(X = k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1 - p)^{n-k}$

$\Leftrightarrow P(X = 18) = \binom{25}{18}\ (0{,}7)^{18}\ (1 - 0{,}7)^{25-18}$

$\Leftrightarrow P(X = 18) = 480700.\, 0{,}0016.\, 0{,}00021$

$\Leftrightarrow P(X = 18) \cong 0{,}17$

Assim como na situação-problema 1, mostramos que os dados presentes neste problema dificultam a sua resolução pelo método que envolve o registro de todas as possibilidades e, por esse motivo se faz necessário a utilização da ferramenta matemática que utilizamos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEGRI, Mateus. *Notas de aula de Estruturas Algébricas.* Itabaiana: 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* Brasília: SEMT/MEC. 1998.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Reacherches em Didactique des Mathématiques, Grenoble, v.7, n.2, p. 33-116, 1986

BUJALENCE, E., BUJALENCE, J.A., COSTA, A.F., MARTÍNEZ, E., Elementos de Matemática Discreta, Sanz Torres, Madrid, 1993.

CHARALAMBOS. A. Charalambides, Enumerative Combinatorics, Chapman Hall/ CRC, 2002.

D'AMORE, Bruno. Trad. Maria Cristina Bonomi. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

Educação Matemática: uma (nova) introdução/ Anna Franchi,..., et al; org. Silvia Dias Alcântara Machado- 3ª ed. revisada, 2 reimpr. – São Paulo: EDUC, 2012.

FRANCHI, Anna. et al. Org. Silvia Dias Alcântara Machado. *Educação Matemática:* uma (Nova) introdução. 3.ed. São Paulo: EDUC, 2012.

GARCÍA, F., Matemática Discreta, Thomson, Madrid, 2005.

http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/docs/Exames/QUALIF_2012_2_1.pdf. Acesso em 12/12/2015

http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_azul.pdf. Acesso em 05/01/2016

http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_2014/MA12_AV2_2014.pdf. Acesso em 12/01/2016

http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/AZUL_quinta-feira_GAB.pdf. Acesso em 20/01/2016

http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV2015/ENQ_2015_2_Gabarito_para_correo.pdf. Acesso em 05/02/2016

http://www.profmat-sbm.org.br/provas/AV2_MA12_2011.pdf. Acesso em 10/02/2016

LIBÂNEO, José Carlos. *Conteúdos, formação de competências cognitivas e ensino com pesquisa:* unindo ensinos e modos de investigação. São Paulo: Cadernos de pedagogia universitária USP, 2009.

MACHADO, Claúdia Rejane. *Teorias de pesquisa em educação matemática:* a influência dos franceses. Disponível em: < http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/pesquisa/CLAUDIA_FRANCESES.DOC.pdf > Acesso em: 20 jan de 2016.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento; Lima, Antonio Pedroso de. *Noções de Probabilidade e Estatística.* 7.ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

PEREIRA, Isidoro S. J. *Dicionário grego-português e português – grego*. Lisboa: Apostolado da imprensa,1976.

SANTOS, José Plínio O; MELLO, Margarida P; MURARI, Idani T. C. *Introdução à Analise Combinatória.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

TEXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio César Manso. Zetetiké – FE/ Unicamp – v. 21, n. 39 – jan/ jun 2013. Acesso em: 20 jan, 2016.

ZABALA, A. *A prática educativa*. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 2007.