UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

SUELY SILVA SANTOS GAMA

RECONHECIMENTO DE CÔNICAS VIA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

SÃO CRISTÓVÃO–SE
2016

SUELY SILVA SANTOS GAMA

RECONHECIMENTO DE CÔNICAS VIA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Matemática PROFMAT da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio dos Santos

SÃO CRISTÓVÃO–SE
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

G184r

Gama, Suely Silva Santos
Reconhecimento de cônicas via diagonalização de matrizes / Suely Silva Santos Gama ; orientador Fábio dos Santos. – São Cristóvão, 2016.
51 f. ; il.

Dissertação (mestrado em Matemática) –Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Cônicas. 2. Reconhecimento das cônicas. 3. Diagonalização das matrizes simétricas. I. Santos, Fábio, orient. II. Título

CDU: 51

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Reconhecimento De Cônicas Via Diagonalização De Matrizes

por

Suely Silva Santos Gama

Aprovada pela Banca Examinadora:

Fábio dos Santos

Prof. Dr. Fabio dos Santos- UFS
Orientadora

Naldisson dos Santos

Prof. Dr. Naldisson dos Santos- UFS
Primeiro Examinador

Filipe Dantas dos Santos

Prof. Dr. Filipe Dantas dos Santos- UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 03 de Maio de 2016.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedicatória

Dedico esta conquista a Deus e a todos aqueles que acompanharam-me nesta jornada: meu marido, meus pais e demais familiares, amigos, colegas da turma Profmat 2014 e professores, em especial, meu orientador Dr. Fábio dos Santos que muito contribuiu para a conclusão deste trabalho. De modo geral, dedico a todas aquelas pessoas que, assim como eu, acreditam e buscam avançar no conhecimento. A caminhada é longa, um tanto quanto árdua, infinita, mas enquanto houver paixão pela aprendizagem, será sempre muito prazerosa. Não poderia deixar de dedicar à minha filha, Sophia, que ainda nem veio ao mundo, mas já é motivo de muita alegria para mim.

Agradecimentos

Agradeço primeiro e especialmente a Deus por todas as graças concedidas, por ter me ensinado a valorizar as minhas conquistas e perseverar por meus ideais. O dedico não só esta vitória, mas toda minha vida. Se fosse detalhar aqui a todos que agradeço, creio que meus agradecimentos ficariam maiores que a minha dissertação em si, por isso, vou agradecer de modo geral às pessoas que fizeram e fazem parte da minha vida, a todos aqueles que acreditaram em mim quando nem eu mesma acreditava: todos meus professores, colegas de turmas, amigos mais próximos, vizinhos e familiares. Cada um com seu papel e grau de influência, mas todos com grande importância para mim. De forma especial, agradeço aos meus pais por tudo o que conquistei. Esses que, apesar da pouca instrução que têm, sempre buscaram incentivar a mim e aos meus irmãos para termos alguma formação, nos ensinando a ser humildes, íntegros e gratos. E por último, não por ser menos importante, pelo contrário, agradeço ao meu amado marido Ronald, que teve um papel importantíssimo nesta minha jornada.O agradeço por nossos momentos de estudo juntos, as informações compartilhadas, as palavras de incentivo e apoio. Enfim, por todo companheirismo e amor que me dedica todos os dias.

Resumo

Nesta dissertação faremos um estudo das cônicas, as quais podem ser definidas como soluções de equações do segundo grau com duas variáveis, tendo como objetivo principal o reconhecimento das mesmas por meio de uma simplificação da forma quadrática associada, cujo procedimento envolve a diagonalização de matrizes simétricas. Ao longo deste trabalho, serão abordados os pré-requisitos necessários para que o leitor, com pouca familiaridade no assunto, possa compreender cada etapa de seu desenvolvimento, como espaços euclidianos e diagonalização de matrizes.

Palavras - chave: Cônicas, Reconhecimento das Cônicas, Diagonalização de Matrizes Simétricas.

Abstract

This thesis will make a study of the conic, which can be defined as quadratic equations solutions with two variables, with the main objective recognition of same through a simplification of the quadratic form associated, whose procedure involves the diagonalization of symmetric matrices. Throughout this work, will address the prerequisites needed for the reader with little familiarity on the subject, can understand each stage of its development, as Euclidean spaces and matrix diagonalization.

Keywords: Conics, Recognition of Conics, Matrix Diagonalization Symmetric.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O estudo das cônicas e de suas propriedades geométricas teve início na Grécia, como parte da busca pela solução do problema da duplicação do cubo, e esse início foi atribuído, por alguns historiadores, ao matemático Menêcmo ($380 - 320$ a.C., aproximadamente), que também foi considerado o primeiro a mostrar que a elipse, a hipérbole, a parábola e a circunferência eram obtidas de cones circulares. Assim Menêcmo tornou-se então, como afirma uma carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu Euergeta, o descobridor das seções cônicas.

As contribuições de Euclides sobre as cônicas, infelizmente perderam-se, talvez porque rapidamente foram ultrapassadas pelo trabalho mais extenso escrito por Apolônio. Apesar de ter pouco avançado nos teoremas específicos das seções cônicas, Euclides instituiu as bases dos maiores desenvolvimentos posteriores sobre o tema, finalizados por Apolônio e Pappus de Alexandria. Alias, Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes que viveu, aproximadamente, entre 287 a.C. e 212 a.C. e, juntamente com Euclides, formam a tríade considerada como sendo a dos maiores matemáticos gregos da antiguidade.

Apolônio foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as seções cônicas na antiguidade. Suas contribuições foram: ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção; ter introduzido os nomes elipse, parábola e hipérbole e ter estudado as retas tangentes e normais a uma cônica. Além do mais, foi dele a obra de nível mais avançado no estudo das cônicas, *O tratado sobre as cônicas*, que substituiu qualquer estudo anterior e, certamente, teve grande influência no desenvolvimento da matemática. Devido, fundamentalmente, a este estudo sobre as cônicas ele era conhecido como o Geômetra Magno.

A importância do estudo de Apolônio sobre as cônicas não pode ser questionada. É inegável sua contribuição e sua influência para estudos de grandes matemáticos, físicos e cientistas, como por exemplo, Kepler e Isac Newton. O primeiro foi o inventor

Figura 1: Euclides de Alexandria (por volta de 325 a.C. - 265 a.C.)

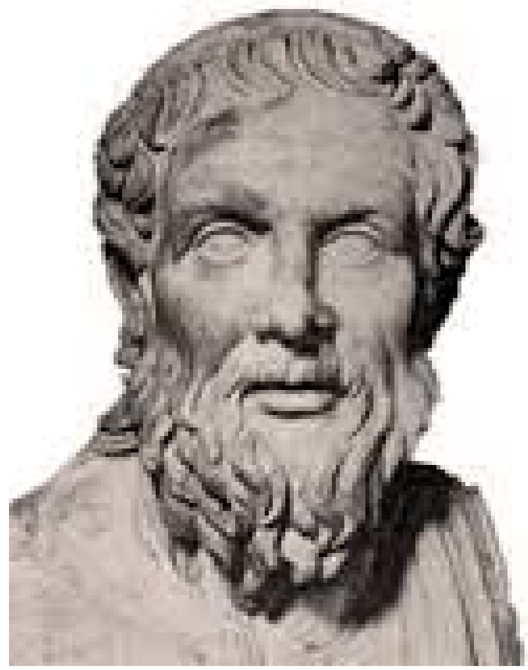

Figura 2: Apolônio de Perga (262 a.C. - 190 a.C.)

da lei da astronomia, para ele a terra se movia em torno do sol; em seus experimentos pode-se perceber a utilização das elipses, onde ele ao estudar os corpos no universo descobriu que os planetas têm forma elíptica. Enquanto isso , o segundo criou a lei da gravitação dando continuidade a lei de Kepler e mostrando que sua tese está certa.

Nos dias de hoje, é fácil perceber o quanto é vasto e importante o aparecimento das cônicas no cotidiano da sociedade. Alguns exemplos podem ser citados, como os objetos em formatos elípticos que estão presentes na área da saúde, mais precisamente, nos consultórios odontológicos e nos aparelhos de radioterapia utilizados no tratamanto contra o câncer; os objetos em formas de parábolas, bastante explorados na engenharia de telecomunicações e automobilística, por exemplo: antenas parabólicas e farois de carros; e por último, equipamentos com formato hiperbólico, dentre os quais se destacam os telescópios.

Portanto, induzido pela importância da aplicação dos conhecimentos das Cônicas nas diversas áreas das Ciências e na vida dos alunos, pretendo com o presente trabalho contribuir no sentido de expor uma ferramenta a mais para o estudo da geometria analítica, no tocante ao reconhecimento dos tipos de cônicas. E para tal, utilizarei conceitos fundamentais da álgebra linear, bem como a diagonalização de matrizes simétricas.

Esta dissertação será dividida em três capítulos. No primeiro, trataremos dos conceitos preliminares que servirão de base para que o leitor compreenda os processos seguintes. Aos leitores que já possuam tais conhecimentos básicos, a leitura deste capítulo é facultativa.

No segundo capítulo, veremos os procedimentos necessários para o processo de diagonalização de matrizes simétricas, bem como as vantagens de utilizar esse processo.

Por fim, no terceiro capítulo, faremos o reconhecimento das cônicas por meio da diagonalização de matrizes, que é o objetivo principal deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é destinado às noções preliminares, essenciais à boa compreensão desta dissertação. Nele será abordada a estrutura euclidiana do $\mathbb{R}^2$, assim como as ferramentas necessárias para a mudança de um sistema de coordenadas.

1.1 A estrutura euclidiana do $\mathbb{R}^2$

1.1.1 Espaço vetorial

O $\mathbb{R}^2$ representa o conjunto dos pares de números (x, y), com $x, y \in \mathbb{R}$. No ensino fundamental, este conjunto é visto pela primeira vez, devido sua interpretação geométrica na análise de gráficos de funções. No ensino médio é tratado de uma forma mais independente, novos elementos são associados a ele deixando seu estudo mais interessante, pois motiva o conhecimento de novos temas e também utiliza conhecimentos de outros assuntos como, por exemplo matrizes, determinantes e funções.

No ensino superior o conjunto do $\mathbb{R}^2$ é abordado a partir de uma nova perspectiva, dentro de um outro enfoque, que é o da Álgebra Linear. O conjunto é o mesmo, seus elementos também são os mesmos, mas a forma de interpretação é o que muda. Neste contexto, os elementos de $\mathbb{R}^2$ são chamados de vetores e os números reais são chamados de escalares. A noção comum de vetores, juntamente com as operações de adição e multiplicação por nuḿeros reais forma a ideia básica de espaço vetorial, o objeto principal da Álgebra Linear.

Definição 1.1.1. *Um conjunto V será dito um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, se possui uma operação de adição com as mesmas propriedades da adição de um corpo;*

ou seja,

A1 *A adição é associativa:* $(u+v)+w = u+(v+w)$*, para todos* $u, v, w \in V$*;*

A2 *A adição é comutativa:* $u+v = v+u$*, para todos* $u, v \in V$*;*

A3 *A adição possui elemento neutro: existe* $0 \in V$*, tal que* $v+0 = v$*, para todo* $v \in V$*;*

A4 *A adição possui simétricos: para todo* $v \in V$*, existe* $-v \in V$ *tal que* $v+(-v) = 0$*.*

E além disso, existe uma operação chamada de multiplicação por escalar, que associa a um elemento $a \in \mathbb{K}$ *e a um elemento* $v \in V$*, um elemento* $av \in V$*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

ME1 $a(u+v) = au+av$*, para todos* $a \in \mathbb{K}$*e* $u, v \in V$*;*

ME2 $(a_1+a_2)v = a_1v+a_2v$*, para todos* $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ *e* $v \in V$*;*

ME3 $(a_1a_2)v = a_1(a_2v)$*, para todos* $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ *e* $v \in V$*;*

ME4 $1v = v$*, para todo* $v \in V$*.*

Definidas em $\mathbb{R}^2$ as operações de adição e multiplicação por escalar por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $a(x, y) = (ax, ay)$, para $a \in \mathbb{R}$, segue que $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, onde o elemento neutro da adição é o vetor $(0, 0)$ e o simétrico de (x_1, x_2) é o vetor $-(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$. Assim, o $\mathbb{R}^2$ munido dessas duas operações possui uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

1.1.2 Produto interno

Mostraremos nesta seção que o $\mathbb{R}^2$, além da estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, possui uma estrutura adicional, a qual explicitaremos na continuação.

Definição 1.1.2. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. Um produto interno em* V *é uma função que a cada par de vetores* u *e* w *em* V *associa um número real, denotado por* $\langle u, v\rangle$*, que satisfaz as seguintes condições para quaisquer vetores* u, v *e* w *de* V *e qualquer número real* k*:*

PI 1 $\langle v, v\rangle \geq 0$*;*

PI 2 $\langle v, v\rangle = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$*;*

PI 3 $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$*;*

PI 4 $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$*;*

PI 5 $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$*.*

O produto escalar de $\mathbb{R}^2$ definido por $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ satisfaz os aximomas PI 1, PI 2, PI 3, PI 4 e PI 5, de modo que ele define um produto interno em $\mathbb{R}^2$. De fato, a noção de produto interno generaliza a noção de produto escalar em $\mathbb{R}^2$ e enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permitindo definir vários conceitos geométricos como por exemplo a norma, a distância e o ângulo.

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno é chamado de espaço vetorial euclidiano. Deste modo, o $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial euclidiano.

1.1.3 Características de um espaço euclidiano

Seja V um espaço euclidiano. A norma ou comprimento de um vetor $v \in V$ é definida como o número real não negativo dado por

$$\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Se $\|v\| = 1$, dizemos que v é um vetor unitário. Neste caso, diz-se que o vetor v está normalizado.

Chamamos de distância entre dois vetores u, v em V, o número real representado por $d(u, v)$ definido por: $d(u, v) = \|u - v\|$.

Exemplo 1.1.3. *Sejam* $u = (4, 2)$ *e* $v = (-3, 1)$ *vetores do* $\mathbb{R}^2$*. Vamos determinar a distância entre* u *e* v*. Usando a definição de distância, temos que*

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|(4 + 3, 2 - 1)\|.$$

Donde,

$$d(u, v) = \sqrt{(4 + 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{50}.$$

Sejam u e v vetores não nulos do espaço euclidiano V. O ângulo entre esses vetores é dado por:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Quando $\langle u, v\rangle = 0$, dizemos que os vetores u e v são ortogonais. Isso acontece quando um vetor é nulo ou, quando $\theta = \pi/2$.

Vale destacar que, em geral, não é de muito interesse determinar o ângulo entre dois vetores. Porém, saber se esse ângulo é reto ou não, ou seja, se tais vetores são ortogonais ou não, é de enorme importância para determinar bases de V com certas propriedades, boas para uso na Álgebra Linear.

1.2 Bases ortonormais

Antes de explanarmos o que venha ser uma base ortonormal, serão apresentadas algumas definições necessárias para a compreensão desta seção.

Definição 1.2.1. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $S = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que um vetor qualquer $u \in V$ é combinação linear dos vetores de S, se existem escalares $k_1, k_2, k_3, ..., k_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$u = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + ... + k_nu_n.$$

O conjunto gerado por todas as combinações lineares de $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ em V, é chamado de espaço gerado por S e denotado por $W = G(u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$.

Definição 1.2.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Consideremos a equação vetorial:*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0, \textit{ com } a_1, a_2, ...a_n \textit{ números reais.}$$

$\triangleright$ *Se a equação possuir uma única solução dada por:*

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0,$$

dizemos que $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente independentes.

$\triangleright$ *Se a equação tiver mais que uma solução, dizemos que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente dependentes.*

O termo "linearmente dependente"insinua que os vetores de alguma forma dependem um do outro, como podemos perceber pelo teorema seguinte cuja demostração pode ser encontrada em [3].

Teorema 1.2.3. *Um conjunto finito α com dois ou mais vetores de um espaço vetorial V é linearmente dependente se, somente se, pelo menos um dos vetores de α pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores.*

Definição 1.2.4. *Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial não nulo V.*

Dizemos que α é uma base de V se as seguintes condições são verificadas:

- *α é linearmente independente;*
- *$V = G(\alpha)$.*

Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$, denominada de base canônica.

A prova do teorema a seguir pode ser encontrada em [3].

Teorema 1.2.5.

Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de vetores não nulos $v_1, v_2, ..., v_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores de V é linearmente dependente. (Consequentemente, qualquer conjunto de vetores de V linearmente independente tem, no máximo, n vetores).

Em consequência, temos que todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de elementos.

Definição 1.2.6. *O número de elementos de uma base de um espaço vetorial não nulo V de dimensão finita é chamado de Dimensão de V e denotado por $\dim V$.*

Se V for um espaço vetorial euclidiano, então um conjunto de vetores em V é chamado conjunto ortogonal, se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais, ou seja, possuem produto interno igual a zero. Além disso, se todos os vetores desse conjunto ortogonal forem unitrios, ele será chamado *conjunto ortonormal*. Assim podemos concluir que, uma base consistindo de vetores ortogonais é chamada de *base ortogonal* e uma base consistindo de vetores ortonormais é chamada de *base ortonormal*. Trabalhar com esse tipo de base facilita muito o trabalho de decompor um vetor do espaço em termos dos vetores da base. Vale ressaltar que o processo de multiplicar um vetor não nulo pelo inverso de sua norma para obter um vetor de norma 1 é chamado de normalização.

Um exemplo de *base ortonormal* é a base canônica do $\mathbb{R}^2$, denominada referencial padrão do plano, pois as coordenadas de um vetor qualquer $u = (x, y) \in \mathbb{R}$ nesta base, são dadas pelas coordenadas do próprio vetor

$$u = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Em diversas situações se faz necessário representar as coordenadas de um vetor em relação a uma base na forma de matriz. Assim, apresentaremos a definição de matriz coordenada.

Definição 1.2.7. *Sejam* $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^n$ *e* $v \in \mathbb{R}$*, onde* $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$*. Chamamos os números reais* $a_1, a_2, ..., a_n$ *de coordenadas de* v *em relação à base* β *e denotamos por*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

1.3 Mudança de coordenadas

1.3.1 Matriz mudança de base

Para resolver alguns problemas geométricos é necessário usar um segundo sistema de coordenadas, ou seja, um novo referencial que represente de forma mais simples a mesma situação. Por esse motivo, será apresentada a *mudança de base*. Como a noção de base é a generalização para espaços vetoriais arbitrários da noção de sistemas de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, mudar de base é análogo a mudar de eixos coordenados em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Sejam $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e $\alpha = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ duas bases ordenadas de V, onde V é um espaço euclidiano. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n \text{ e } v = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n.$$

Como já foi mostrado, podemos relacionar as coordenadas de v em realação às duas bases.

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [v]_\alpha = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Por se tratarem de bases do $\mathbb{R}^n$ podemos escrever os vetores de uma em relação aos vetores da outra, assim:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n \\ \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n \end{cases}$$

Daí, um modo de explanar o vetor v é o seguinte:

$$\begin{aligned} v &= y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n) + \cdots + y_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n) \\ &= (a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n)u_1 + \cdots + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n)u_n \\ &= x_1u_1 + \cdots + x_nu_n. \end{aligned}$$

Como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Estabelecida a relação entre as coordenadas de β e α, será escrita sua versão matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Denotando:

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Podemos escrever:

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$$

$[I]_{\beta}^{\alpha}$ é a chamada *matriz mudança de base* α para a base β. Para escrever $[v]_{\alpha}$ em função de $[v]_{\beta}$, basta tomar a inversa de $[I]_{\beta}^{\alpha}$, ou seja, $[I]_{\alpha}^{\beta}$.

Portanto, para transformar as coordenadas de um vetor para uma outra base, devemos multiplicar pela *inversa da matriz mudança de base.* É importante ressaltar que, caso as bases β e α sejam ortonormais para V, situação muito natural em diversas aplicações, as matrizes $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}$ serão chamadas de *matrizes ortogonais*, matrizes cuja transposta é igual a sua inversa, além disso, são matrizes que possuem colunas e linha formadas por vetores ortonormais.

Exemplo 1.3.1. *Considerando a base canônica α de $\mathbb{R}^2$ e a outra base $\beta = \{(1,1),(1,2)\}$, temos que:*

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

,

onde a_1, a_2, b_1, b_2 são números reais satisfazendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} (1,0) = a_1(1,1) + a_2(1,2) \\ (0,1) = b_1(1,1) + b_2(1,2) \end{cases}$$

Resolvendo as equações acima, obtemos $a_1 = 2, a_2 = -1, b_1 = -1$ e $b_2 = 1$. Portanto,

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

,

1.3.2 Translação de eixos $\mathbb{R}^2$

Sejam XOY e $X'O'Y'$ dois sistemas de coordenadas cartesianas e seja $O'(h,k)$ a origem do sistema $X'O'Y'$ em relação ao sistema XOY. Dizemos que $X'O'Y'$ é uma translação de XOY quando os seus eixos são paralelos e tem mesma orientação, além disso, h,k não são ambos nulos. Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer no sistema

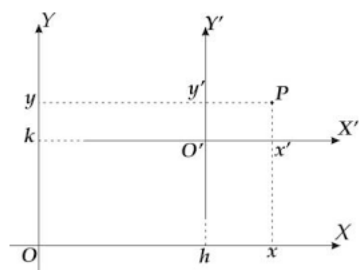

Figura 1.1: Translação de um sistema de coordenadas

primitivo, esse ponto P terá coordenadas (x', y') em relação ao novo sistema. Então, podemos concluir que um ponto P relaciona as coordenadas dos dois sistemas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases} \quad \text{(Relações de translação)}$$

1.3.3 Rotação de eixos no $\mathbb{R}^2$

Na Matemática, particularmente, na Álgebra Linear e na Geometria, rotação de eixos coordenados é uma transformação linear geométrica de um sistema de coordenadas, que consiste em fazer girar os eixos coordenados por um mesmo ângulo θ e num mesmo sentido em torno de sua origem.

No $\mathbb{R}^2$, uma rotação no sentido anti-horário de um sistema de coordenadas, como por exemplo, partir de um sistema XOY para um outro sistema $X'OY'$, resulta numa mudança de coordenadas (x, y) para (x', y'), ou equivalentemente, numa mudança de base entre duas bases ortonormais, β e α, pois trata-se de eixos ortogonais onde seus vetores são todos unitários. Assim, a matriz mudança de base

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Nesse contexto, $[v]_\beta$ será representada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

e $[v]_\alpha$ será representada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

logo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

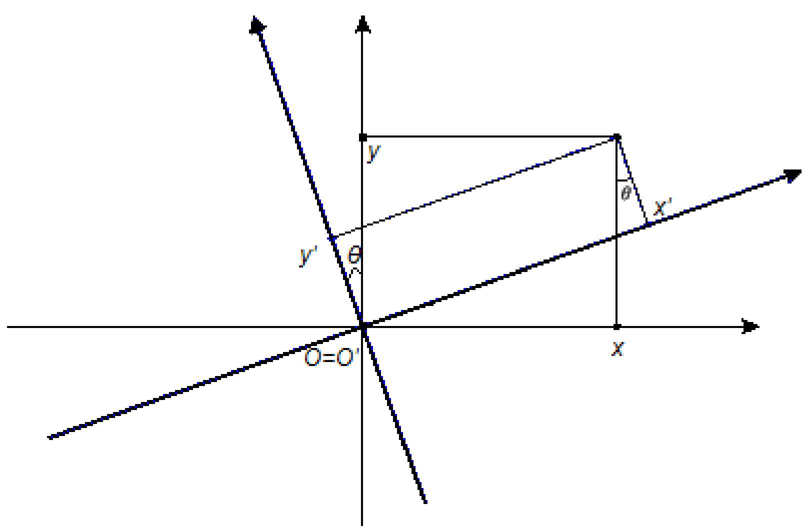

Figura 1.2: Rotação de um sistema de coordenadas

1.4 Formas quadráticas

Nesta seção apresentaremos a definição de formas quadráticas, um conteúdo de destaque em muitos ramos da Matemática e essencial para a compreensão deste trabalho.

Definição 1.4.1. *Uma forma quadrática ou quádrica em* $\mathbb{R}^2$ *é uma função* $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *do tipo*

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

onde a, b *e* c *são constantes reais. Note que todos os termos de* $Q(x, y)$ *são polinomios de grau 2, e o termo* bxy *é denominado de termo cruzado.*

Exemplo 1.4.2. *A função* $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $Q(x, y) = -x^2 + 2xy$ *define uma forma quadrática em* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.4.3. *A função* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $F(x, y) = 3x^2 - 3x + y^2$ *não define uma forma quadrática, pois um dos termos de sua expressão,* $-3x$*, não é de grau 2.*

Uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ pode ser associada a uma matriz, da seguinte maneira: seja $X = (x, y)$ um vetor do $\mathbb{R}^2$ de modo que a matriz coordenada de X em relação à base α, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, pode ser representada por:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Definimos a matriz associada à forma quadrática Q como sendo a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

onde os elementos a_{11} e a_{22}, ou seja, os elementos da diagonal principal, correspondem aos coeficientes dos termos quadrados, e os elementos a_{12} e a_{21} partem do termo cruzado, sendo que $a_{11} + a_{22}$ corresponde ao coeficiente do termo xy, logo existe uma infinidade de possibilidades para representar a_{11} e a_{22}. Porém, o que quase sempre ocorre é igualar esses elementos afim de utilizar matrizes simétricas, pelo fato de tais matrizes propiciar algumas facilidades, que serão vistas mais adiante. Entende-se por matriz simétrica toda matriz coincidente à sua transposta.

A versão matricial da forma quadrática Q é dada por

$$Q(X) = X^t AX.$$

Exemplo 1.4.4. *Considere a forma quádrica* $Q(x, y) = x^2 - 2y^2 + 5xy$*. Vamos obter a forma matricial equivalente. A matriz associada terá ordem 2, ou seja, será da forma:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Como já foi visto, os elementos da diagonal principal são os elementos dos termos ao quadrado, que nesse caso valem $a_{11} = 1$ *e* $a_{22} = -2$*. Além disso, como* $a_{12} + a_{21} = 5$*, escolhendo* A *simétrica, temos portanto:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & -2 \end{bmatrix}$$

Temos então que a forma matricial de Q *é dada por*

$$Q(X) = X^t A X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Capítulo 2

Diagonalização de Matrizes 2×2

Neste capítulo o enfoque será dado aos passos primordiais para diagonalizar matrizes de segunda ordem, em particular as matrizes simétricas.

2.1 Autovalores e autovetores de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Dizemos que um número real λ é um *autovalor* de A se existir um vetor não nulo v de $\mathbb{R}^n$ tal que $Av = \lambda v$. O vetor v é chamado de *autovetor* de A, correspondente ao autovalor λ.

Ao determinante da matriz $A - \lambda I$ dár-se o nome de polinômio característico da matriz A e, pode ser denotado por $P_A(\lambda)$. Note que $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de A se, somente se, λ uma raiz do polinmio caracterstico da matriz A, ou seja,$P_A(\lambda) = 0$.

Vejamos a seguir alguns exemplos:

Exemplo 2.1.1. *Se A é uma matriz identidade de ordem n, ou seja, $A = I_n$, então o único autovalor é $\lambda = 1$; qualquer vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$ é um autovetor de A associado com o autovalor $\lambda = 1$.*

Exemplo 2.1.2. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Desejamos obter os autovalores de A e seus autovetores associados. Queremos assim achar todos os números reais λ e todos os vetores não nulos

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que satisfaçam $Av = \lambda v$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A equação acima se torna o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = \lambda x \\ -2x + 4y = \lambda y \end{cases}$$

Esse sistema possui uma solução não trivial se, e somente se, o determinante de sua matriz de coeficientes for nulo. De forma equivalente, temos que $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Mas,

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = (\lambda - 3)(\lambda - 2).$$

Portanto, os zeros de $P_A(\lambda)$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, os quais são os autovalores de A.

Uma vez encontrados os autovalores da matriz, para encontrar os autovetores basta resolver o sistema linear homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 2$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Analogamente, para $\lambda = 3$, tem-se:

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas lineares acima, temos que os autovetores associados a λ_1 e λ_2 são, respectivamente (y, y) e $(x, 2x)$ para todo x e $y \in \mathbb{R}$, $x, y \neq 0$.

2.2 Diagonalização de matrizes

A diagonalização de matrizes corresponde ao processo de obtenção de uma matriz diagonal que seja semelhante à matriz original. O principal motivo para a obtenção dessa matriz é, matematicamente, o custo operacional reduzido que ela propicia. Antes porém, faz-se necessário o conhecimento de algumas definições que darão suporte a tal procedimento.

Definição 2.2.1. *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma transformação linear de V em W é uma função $T : V \longrightarrow W$ que possui as seguintes propriedades:*

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, *para quaisquer v_1 e v_2 em V;*
2. $T(av) = aT(v)$, *para quaisquer v em V e a em $\mathbb{R}$*

São portanto funções cujos domínios e contradomínios são espaços vetoriais e que, além disso, preservam as operações de adição e de multiplicação de um vetor por um escalar.

Quando uma transformação linear for de um espaço vetorial V nele mesmo, ela será chamada de *operador linear* em V, caso particular de enorme utilidade para o desenvolvimento do presente trabalho, pois mostraremos como associar matrizes quadradas a esses operadores.

Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, em que $\dim V = n$, $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $\alpha = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ bases de V. Assim $T(v_1), ..., T(v_n)$ podem ser escritos como combinação linear de α e pode-se determinar de modo único números reais a_{ij}, com $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, tais que

$$T(v_i) = a_{1i}w_1 + ... + a_{ji}w_j + ... + a_{ni}wn.$$

Seja A a matriz quadrática de ordem n cujos elementos das colunas são as coordenadas dos $T(v_i)$ para $i = 1, ..., n$, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [T]^{\beta}_{\alpha}$$

O que significa que foi aplicado T aos elementos de β e estes vetores foram escritos como combinação linear dos elementos de α.

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [3].

Teorema 2.2.2. *Um operador linear $T : V \longrightarrow V$ admite uma base β em relação à qual a matriz $[T]_\beta^\beta$ é diagonal se, e somente se, essa base β for formada por autovetores de T.*

Assim fica claro que, supondo $A = [T]_\alpha^\alpha$, com α sendo a base canônica, uma matriz quadrada de ordem n definida pelo operador T, e $D = [T]_\beta^\beta$, com β sendo a base formada pelos autovetores de A, a matriz diagonal, as afirmações seguintes corroboram e complementam o que foi apresentado na seção anterior:

1. As entradas da diagonal principal da matriz diagonal D são dadas pelos autovalores de A.

2. Caso A tenha n autovalores distintos, então A é diagonalizável. Além disso, A é semelhante a matriz diagonal D.

3. A é diagonalizável, se, e somente se, A tem n autovetores linearmente independentes.

Portanto, podemos escrever a seguinte versão matricial do Teorema 2.2.2, cuja demostração pode ser encontrada em [3]

Teorema 2.2.3. *Uma matriz A de ordem n é diagonalizável se, somente se, existe uma matriz P invertível de ordem n tal que $D = P^{-1}AP$, é uma matriz diagonal.*

No Teorema 2.2.3, a matriz P é a *matriz mudança de base*, chamada também por *matriz que diagonaliza A*. E pode ser representada pelos autovetores linearmente independentes da matriz A.

Exemplo 2.2.4. *Verificaremos que a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e encontraremos uma matriz inversível P que diagonaliza A, ou seja, tal que $D = P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

Inicialmente, note que o polinômio característico de A é dado por

$$P_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda),$$

de modo que $P_A(\lambda) = 0$ *para* $\lambda = 1$ *e para* $\lambda = -1$. *Logo estes são os autovalores de* A.

Resolvendo as equações matriciais

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtemos os autoespaços associados aos autovetores 1 *e* -1, *respectivamente. Daí, podemos escolher,* $v_1 = (1, 0)$ *um autovetor associado a* $\lambda = 1$ *e* $v_2 = (1, -1)$ *um autovetor associado a* $\lambda = -1$. *Assim,*

$$D = P^{-1}AP,$$

com

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.3 Diagonalização de matrizes simétricas

Quando o assunto é diagonalização de matrizes, um tipo em particular de matrizes deve ser levado em consideração devido a sua importância, que é a matriz simétrica. Como já foi visto, trabalhar com tal matriz representa uma enorme vantagem, visto que a matriz simétrica propicia uma enorme redução nos cálculos, simplificando sua aplicação em diversas situações como no reconhecimento das cônicas, quádricas e no cálculo de composições de funções, por exemplo.

A diagonalização de matrizes simétricas é também chamada de diagonalização ortogonal, pois a matriz P que diagonaliza uma matriz A, simétrica, é uma matriz ortogonal ($P^t = P^{-1}$), isto é, os vetores que representam as linhas e as colunas de P são ortonormais. A explicação para tal afirmação é dada por um dos principais teoremas da Álgebra Linear, o *Teorema Espectral*.

2.3.1 O Teorema Espectral para matrizes simétricas

Teorema 2.3.1. *Se A é uma matriz simétrica de ordem n, então existe uma matriz ortogonal P de ordem n, tal que $P^{-1}AP = P^tAP$ é diagonal.*

Em outras palavras, o que o teorema 2.3.1 afirma, é que toda matriz simétrica é diagonalizável e, além disso, existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A tal que as colunas da matriz ortogonal P é formada por esses autovetores.

A demonstração do teorema 2.3.1 pode ser encontrada em [3].

Desta forma, para diagonalizar uma matriz simétrica basta seguir os passos abaixo relacionados:

Passo 1: Encontrar uma base formada por autovetores de A.

Passo 2: Obter uma base ortonormal a partir dos autovetores de A.

Passo 3: Formar a matriz P cujas colunas são os vetores da base construída no Passo 2; esta matriz diagonaliza A ortogonalmente.

Exemplo 2.3.2. *Diagonalizaremos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Segue do 2.3.1 que é possível diagonalizar essa matriz, uma vez que ela é simétrica.

O polinômio característico de A é dado por

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2),$$

do qual vemos que A tem autovalores $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$.

Encontrando-se os autovetores correspondentes, obtemos, respectivamente:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que v_1 e v_2 são ortogonais. Assim, é possível normalizá-los a fim de obter autovetores unitários.

$$\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{v_1}{||v_1||} \Longrightarrow u_1 = \frac{(1,-2)}{\sqrt{5}} \Longrightarrow u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \\ u_2 = \dfrac{v_2}{||v_2||} \Longrightarrow u_1 = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} \Longrightarrow u_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{array}.$$

Logo, tomando

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

tem-se que $P^{-1}AP = D$.

Note agora que P *é uma matriz ortogonal, pois* $\{u_1, u_2\}$ *é um conjunto ortonormal de vetores. Então,* $P^{-1} = P^t$, *e tem-se* $P^tAP = D$.

Capítulo 3

Reconhecimento das Cônicas

Neste último capítulo, abordaremos as cônicas, cuja representação algébrica é dada como uma solução de uma equação do segundo grau em duas variáveis, culminando com a aplicação da diagonalização de matrizes (formas quadráticas) simétricas para o reconhecimento das cônicas.

3.1 O estudo das cônicas

Definição 3.1.1. *Uma cônica em* $\mathbb{R}^2$ *é um conjunto de pontos* $P = (x, y)$ *cujas coordenadas em relação ao referencial padrão* $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ *satisfazem a equação quadrática* $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ *onde* a, b, c, d, e, f *são números reais com* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *ou* $c \neq 0$.

Uma motivação para o nome cônica vem do fato da mesma ser obtida a partir da interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas, conforme ilustação (Figura 3.1).

As cônicas mais comuns são: *elipses, parábolas e hipérboles.* Na continuação iremos abordar cada uma delas.

3.1.1 Elipse

Definição 3.1.2. *Uma elipse* $\mathcal{E}$ *de focos* F_1 *e* F_2 *é o conjunto dos pontos* P *do plano cuja soma das distâncias a* F_1 *e* F_2 *é igual a uma constante* $2a > 0$, *maior do que a distância entre os focos* $2c \geq 0$, *ou seja, sendo* $0 \leq c < a$ *e* $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\mathcal{E} = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

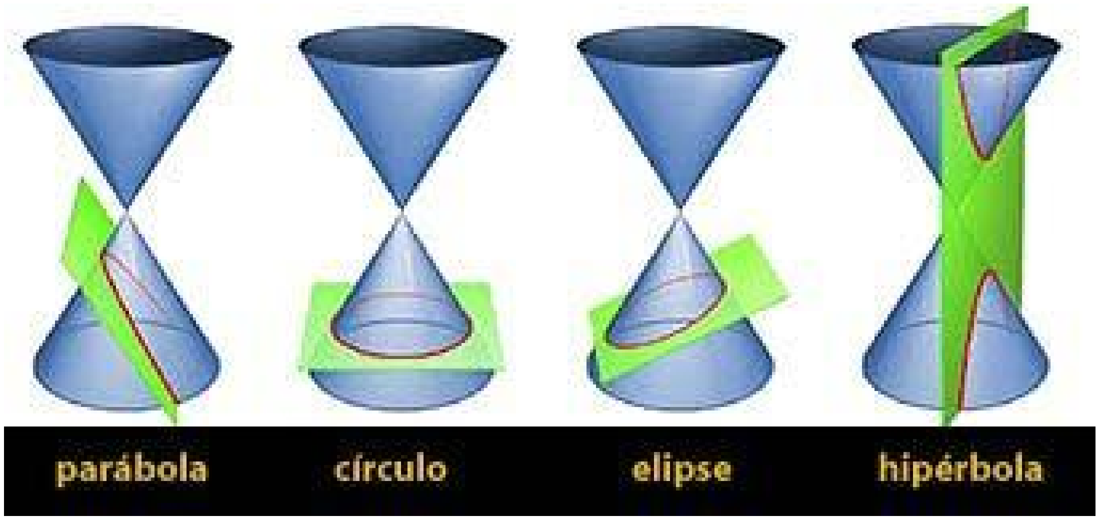

Figura 3.1: Cônicas

Os elementos da elipse são:

- Centro: C
- Focos: F_1 e F_2
- Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2
- Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$
- Distância focal: $2c$
- Medida do eixo maior: $2a$
- Medida do eixo menor: $2b$

Como $0 \leq c < a$, então $0 \leq e < 1$, isto é, quando c se aproxima de a a excentricidade se aproxima de 1, alongando a elipse, pois $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ torna-se pequeno em comparação com a. Já quando c se aproxima de zero, a excentricidade também se aproxima de zero, e nesse caso a elipse torna-se mais arredondada. Se o valor da excentricidade é zero, significa que $c = 0$ e $a = b$, ou seja, um caso particular da elipse conhecido como *circunferência*.

A partir da definição da elipse, obtem-se sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY da seguinte forma:

Supondo, inicialmente que a elipse tem focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, vértices nos pontos $A_1 = (-a, 0), A_2 = (a, 0), B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$, e seja

$a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c < a$ e $a^2 = b^2 + c^2$, temos então que, se o ponto $P = (x, y)$ pertence à elipse:

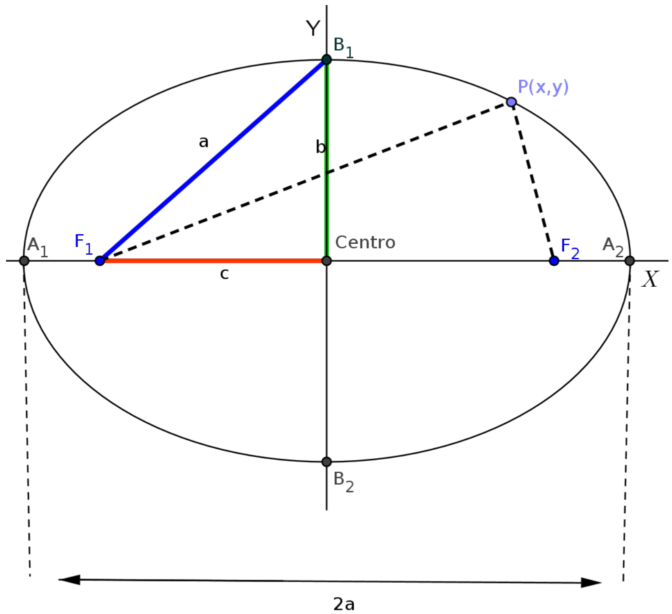

Figura 3.2: Elipse e seus elementos

$$
\begin{aligned}
d(P, F1) + d(P, F2) = 2a \quad &\Longleftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\Longleftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
&\Longleftrightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
&\Longleftrightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\Longleftrightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\Longleftrightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
&\Longleftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
&\Longleftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
&\Longleftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
&\Longleftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}
\end{aligned}
$$

Chegamos assim a equação de uma elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.

Utilizando as relações de translação podemos escrever a forma canônica da elipse transladada da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.}$$

Vale ressaltar que, se a elipse possuir focos $F_1=(0,c)$ e $F_2(0,-c)$, isto é, se os focos da elipse estiverem sobre o eixo OY ou numa reta focal paralela ao eixo OY teremos então, respectivamente:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1,}$$

no qual $C=(x_0,y_0)$ é o centro da elipse.

3.1.2 Hipérbole

Definição 3.1.3. *Uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a>0$.*

$$\mathcal{H}=\{P|\mid d(P,F_1)-d(P,F_2)\mid=2a\}\,,\ \ 0<a<c,\ \ d(F_1,F_2)=2c.$$

Os elementos da hipérbole são:

- Centro: C
- Focos: F_1 e F_2
- Vértices: A_1,A_2,B_1 e B_2
- Excentricidade: $e=\dfrac{c}{a}$, $e>1$, pois $c>a$
- Distância focal: $2c$
- Medida do eixo real: $2a$
- Medida do eixo imaginário: $2b$
- Assíntotas: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

Da mesma forma que a elipse, obtém-se a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais XOY utizando sua definição, conforme segue. Supondo que a hipérbole tem focos nos pontos $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$ tal que $0<a<c$, com $a\in\mathbb{R}$. Se $P=(x,y)$ é um ponto qualquer da hipérbole, então

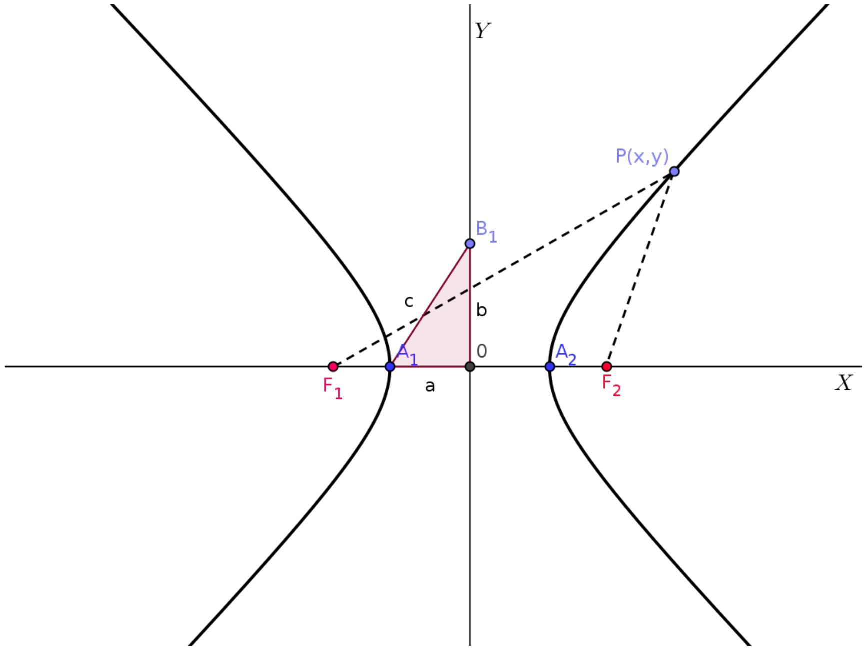

Figura 3.3: hipérbole e seus elementos

$$\begin{cases} d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a \text{ (ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \qquad\qquad ou \\ d(P,F_1) - d(P,F_2) = -2a \text{ (ramo esquerdo de } \mathcal{H}). \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \text{ (ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \qquad\qquad ou \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = -2a \text{ (ramo esquerdo de } \mathcal{H}). \end{cases}$$

Lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$ e desenvolvendo analogamente ao caso da elipse, concluimos que:

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in \mathcal{H} &\iff (c^2 - a^2)x^2 - ay^2 = a^2(c^2 - a^2) \\ &\iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \end{aligned}$$

Temos assim a equação de uma Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.

As assíntotas de $\mathcal{H}$ são as retas que passam pela origem e têm inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação ao eixo OX.

Utilizando as relações de translação pode-se escrever a forma canônica da Hipérbole transladada da seguinte maneira:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.}$$

Se os focos da hipérbole estiverem sobre o eixo OY ou numa reta focal paralela ao eixo OY teremos então, respectivamente:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1,}$$

no qual $C = (x_0, y_0)$ é o centro da hipérbole.

3.1.3 Parábola

Definição 3.1.4. *Seja d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d. A parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz d é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a d.*

$$\mathcal{P} = \{P \mid d(P, F) = d(P, d)\}.$$

Os elementos da parábola são:

- Diretriz: d
- Foco: F
- Vértices: V
- Parâmetro: $2c = d(F, d)$. Assim não é difícil perceber que $d(V, F) = c$
- Excentricidade: como $d(P, F) = d(P, d)$, temos que a excentricidade é igual a 1

Utilizando a definição obtém-se a equação da parábola, mas antes cabe uma ressalva: apresentaremos neste trabalho apenas o caso em que o foco F está à direita da diretriz d da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX. Os outros casos são encontrados de forma análoga.

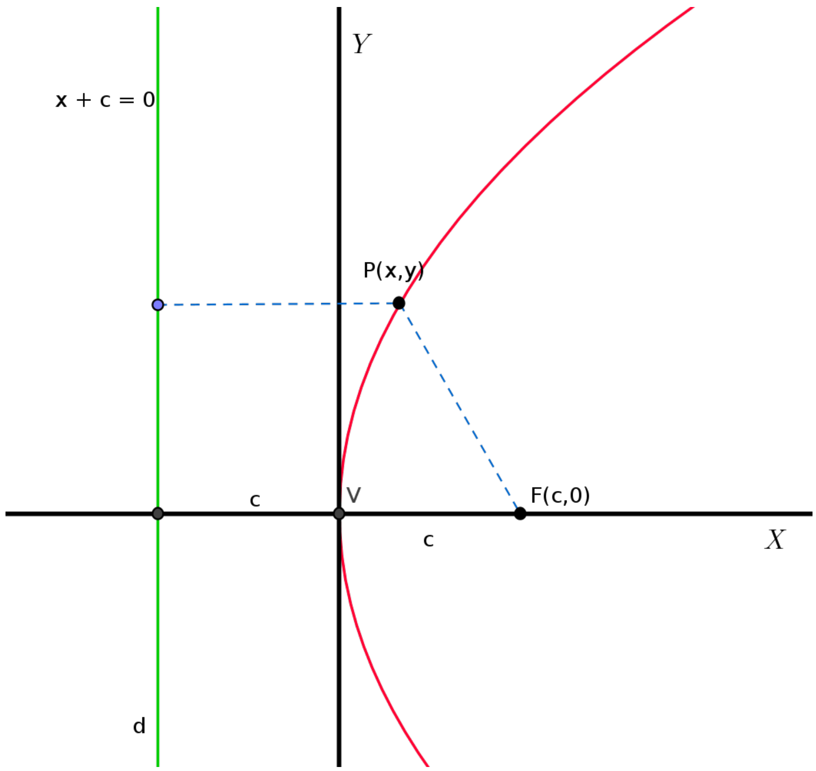

Figura 3.4: parábola e seus elementos

Por definição, se $P = (x, y)$ é um ponto da parábola com foco $F = (c, 0)$ e a diretriz d é a reta $x = -c$, então vale a equação

$$\begin{aligned} d(P,F) = d(P,d) \quad &\Longleftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x+c| \\ &\Longleftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 \\ &\Longleftrightarrow -2cx + y^2 = 2cx \\ &\Longleftrightarrow \boxed{y^2 = 4cx.} \end{aligned}$$

Utilizando as relações de translação podemos escrever a forma canônica da parábola transladada da seguinte forma:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0).}$$

3.1.4 Cônicas degeneradas

Além das cônicas apresentadas acima, podemos encontrar também suas formas degeneradas, que ocorrem quando o plano da cônica passa pelo vértice do cone interceptando-o ao longo de duas retas que formam o cone, sendo tangente a ele ou, ao longo de duas retas que formam o cone e que se interceptam no vértice.

Assim, podemos classificá-las da seguinte maneira:

- **Ponto:** é a intersecção do cone com um plano que é oblíquo ao seu eixo e não paralelo a nenhuma de suas geratrizes, passando pelo seu vértice. Neste caso, o plano terá em comum com o cone apenas o vértice V. Trata-se de uma **elipse degenerada**.

- **Reta:** é a intersecção do cone com um plano que é paralelo a uma de suas geratrizes e passa pelo seu vértice. Neste caso, o plano contém o vértice e uma geratriz do cone, sendo tangente a ele.

  Num caso particular, obtém-se **duas retas paralelas** quando da interceção de uma superfície cilíndrica circular (considerada uma superfície cônica de vértice impróprio) por um plano paralelo ao eixo. Se o plano tangenciar a superfície cilíndrica obter-se-á uma reta.

  Em ambos os casos, trata-se de uma **parábola degenerada**.

- **Par de retas concorrentes:** é a intersecção do cone com um plano que contém o seu eixo. Neste caso, o plano contém o vértice e duas geratrizes do cone. Trata-se, então de uma **hipérbole degenerada**.

  Além destes casos apresentados, a equação das cônicas pode encontrar-se num lugar geométrico representado pelo **conjunto vazio**. Este caso pode representar uma **elipse ou uma parábola degenerada**.

Como uma cônica é, por definição, uma solução de uma equação do segundo grau em duas variáveis, notamos que estes casos são possíveis, por exemplo as soluções das equações $x^2 + y^2 = 0$, $(x - y)^2 = 0$, $(x - y)^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = -1$ são respectivamentes, um ponto, uma reta, um par de retas concorrentes e o conjunto vazio.

3.2 Reconhecimento das cônicas via diagonalização de matrizes

Considere a equação geral do segundo grau nas duas variveis x e y:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

onde a, b, c, d, e, f são números reais dados com a, b ou c distinto de zero. Como já foi dito anteriormente, as soluções desta equação são, por definição, uma cônica, podendo ser não degenerada (elipse, hipérbole e parábola) ou degenerada (uma reta , um par de retas paralelas, duas retas, um ponto ou representar o vazio). Assim, para identificar o lugar geométrico de uma determinada equação do segundo grau em duas variáveis, em especial reconhecer uma cônica, é preciso reduzir a equação dada a uma das equações mais simples, ou seja, devemos escolher uma base ortonormal conveniente do $\mathbb{R}^2$ de modo que no novo sistema de coordenadas, a equação resultante seja de fácil identificação.

Para facilitar a compreensão é possível dividir em dois casos:

Caso 1: Quando o coeficiente $b = 0$, ou seja, o termo cruzado xy não existe. Neste caso, basta usar o processo de completar quadrados, que é equivalente a escolher um sistema de coordenadas dado pela translação do sistema original. Em casos assim, a cônica em questão está alinhada aos eixos cartesianos, seja com centro ou vértice na origem e reta focal coincidindo com um dos eixos, ou quando há uma translação dos eixos coordenados.

Exemplo 3.2.1. *Determinaremos o lugar geométrico da seguinte equação:*

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$

Note que essa equação é equivalente à equação

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4.$$

Completando os quadrados obtemos

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36,$$

ou seja,

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1,$$

que é a equação reduzida de uma elipse de centro $(1, 2)$ *e eixos maior e menor medindo* 6 *e* 4*, respectivamente.*

Exemplo 3.2.2. *Verificaremos o tipo de cônica representada pela equação*

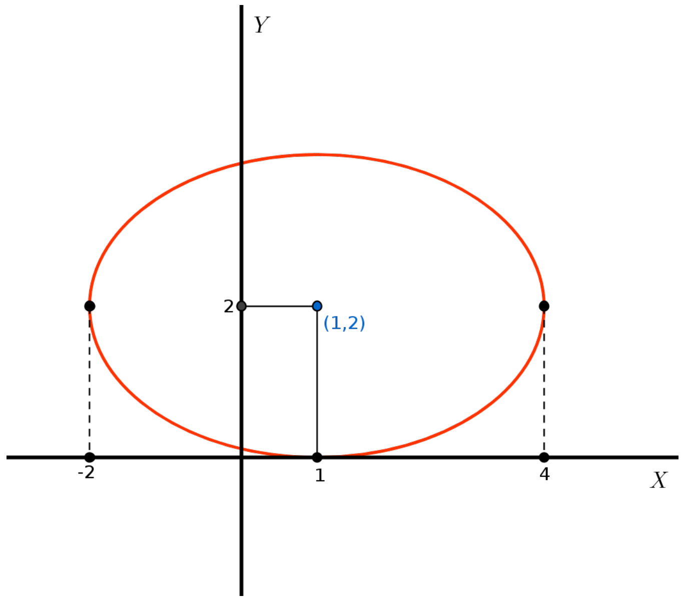

Figura 3.5: A elipse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 4 = 0.$$

Completando o quadrado temos

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = -4 + 1 + 1,$$

ou seja,

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = -2,$$

Uma vez que soma de termos quadrados não pode ser negativa, segue que a equação referida representa uma forma degenerada da elipse, o vazio.

Caso 2: Há casos em que o termo cruzado aparece, ou seja, $b \neq 0$, dificultando o reconhecimento da cônica, pois está associado a uma rotação do sistema de coordenadas. Assim é preferível eliminá-lo, o que é posível, a partir de uma mudança de coordenadas (x, y) para (x', y'), ou equivalentemente, uma mudança de base entre duas bases ortonormais, β e α. Numa linguagem mais simples, significa sair da base ortonormal canônica para uma base ortonormal formada por autovetores, conforme mostraremos atrávez da generalização e de exemplos.

Seja dada a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

onde a, b, c, d, e, f são números reais com $b \neq 0$. Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0].$$

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^2$ formada de autovetores de A. Assim, se λ_1 e λ_2 são autovalores de A (pode ser que $\lambda_1 = \lambda_2$), existem autovetores v_1 e v_2 associados a λ_1 e λ_2, respectivamente, tais que $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. A matriz ortogonal $P = [I]_\alpha^\beta$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, diagonaliza A ortogonalmente, já que

$$D = P^{-1}AP$$

é a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

com $P^{-1} = P^t$. Portanto,

$$A = PDP^t.$$

Substituindo a igualdade acima na equação matricial, obtemos

$$\left(\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P\right) D \left(P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0].$$

O produto matricial $P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é a matriz das coordenadas de um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação à base β, pois

$$P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha.$$

Chamando $[v]_\beta$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0].$$

Se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, temos então

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

equivalente à equação

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 x'^2 + (dx_1 + ey_1)x' + (dx_2 + ey_2)y' + f = 0.$$

Obeservamos que o termo cruzado $x'y'$ não está presente, dessa forma, resduzimos este caso ao primeiro, ou seja, é suficiente completar quadrados para determinar o lugar geométrico em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.2.3. *Identificaremos a cônica no plano dada pela equação quadrática*

$$7x^2 - 8xy + y^2 - 17\sqrt{5}x + 11\sqrt{5}y + 41 = 0.$$

Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [41] = [0].$$

Como a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

é uma simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de A são $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = -1$, e os vetores unitários

$$v_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \text{ e } v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

são, respectivamente, autovetores correspondentes. Assim, $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de A. Seja $P = [I]_\alpha^\beta$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Chame $D = P^{-1}AP$. Dessa forma

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $A = PDP^t$, já que $P^{-1} = P^t$, segue que

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [41] = [0].$$

Chamando $[v]_\beta$ *de* $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, *obtemos*

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [41] = [0].$$

ou seja,

$$9x'^2 - y'^2 + 45x' + 5y' + 41 = 0$$

que é equivalente à equação

$$9(x' + \tfrac{5}{2})^2 - (y' - \tfrac{5}{2})^2 = 9$$

ou seja,

$$\boxed{(x' + \tfrac{5}{2})^2 - \frac{(y' - \frac{5}{2})^2}{9} = 1}$$

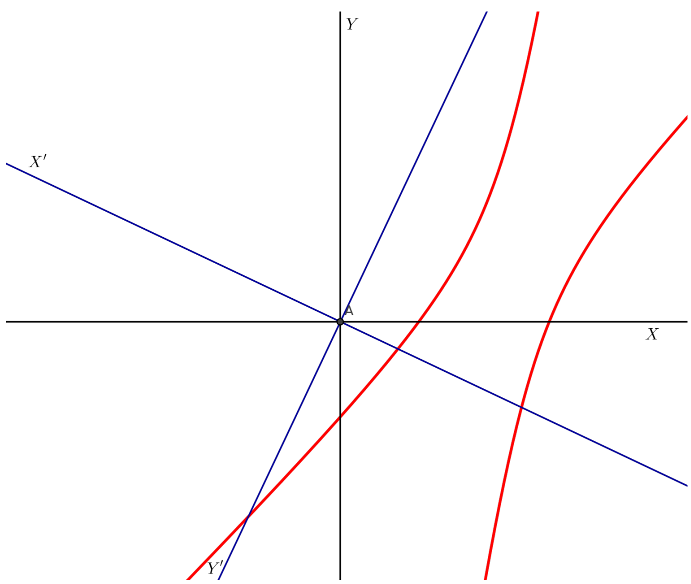

Figura 3.6: hipérbole

Portanto, a equação representa uma hipérbole. Para esboçar seu gráfrico (Figura 3.6*) é necessário considerar as novas coordenadas* x' *e* y'*, de modo que seu centro é dado por* $(\frac{-5}{2}, \frac{5}{2})$*, semi-eixo real medindo* 1 *e semi-eixo imaginário medindo* 3.

Exemplo 3.2.4. *Faremos o reconhecimento da cônica no plano dada pela equação quadrática*

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 15x - 20y + 50 = 0.$$

Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [50] = [0].$$

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}.$$

Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 25$. O vetor unitário $v_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e o vetor unitário $v_2 = (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$ são autovetores de λ_1 e λ_2, respectivamente. Assim, $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de A. Seja $P = [I]_\alpha^\beta$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Chamemos $D = P^{-1}AP$. Dessa forma

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Como $A = PDP^t$, já que $P^{-1} = P^t$, segue que

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [50] = [0].$$

Chamando $[v]_\beta$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$25y'^2 - 25x' + 50 = 0$$

equivalente à equação

$$y'^2 - x' = -2$$

ou seja,

$$\boxed{x' = y'^2 + 2}$$

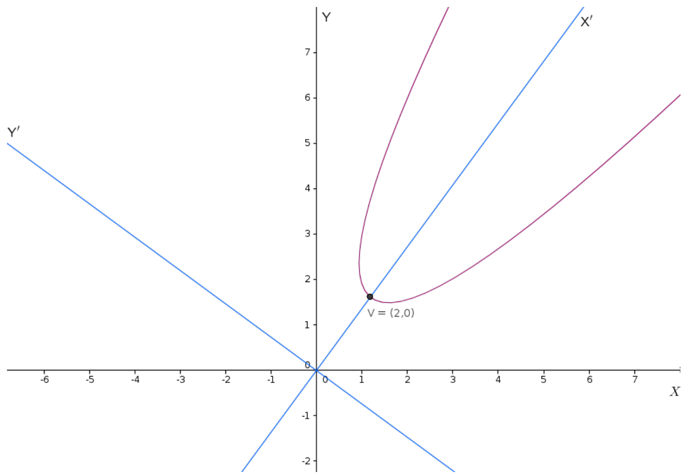

Figura 3.7: parábola

Portanto, a equação representa uma parábola. Para esboçar o gráfrico dessa parábola (Figura 3.7) é necessário considerar as novas coordenadas x' e y'. Assim, nesse sistema de coordenadas, a parábola tem vértice $V = (2, 0)$, parâmetro $2c = \frac{1}{2}$, foco $F = (\frac{9}{4}, 0)$ e diretriz $d : x = \frac{7}{4}$.

Exemplo 3.2.5. *Agora identificaremos a cônica no plano dada pela equação quadrática:*

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$$

Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - [12] = [0].$$

Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de A são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$. O vetor unitário $v_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ e o vetor unitário $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$ são autovetores de λ_1 e λ_2, respectivamente. Assim, $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de A. Dessa forma

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A = PDP^t$, já que $P^{-1} = P^t$, segue que

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - [12] = [0].$$

Chamando $[v]_\beta$ *de* $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, *obtemos*

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$6x'^2 + y'^2 - 12 = 0$$

equivalente à equação

$$6x'^2 + y'^2 = 12$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{12} = 1}$$

Portanto, a equação representa uma elipse. Para esboçar o gráfrico dessa elipse (Figura 3.8*) é necessário considerar as novas coordenadas* x' *e* y'. *Assim, nesse sistema de coordenadas, a elipse tem centro* $C = (0,0)$, *vértices* $B_1 = (-\sqrt{2}, 0)$, $B_2 = (\sqrt{2}, 0)$, $A_1 = (0, -\sqrt{12})$ *e* $A_2 = (0, \sqrt{12})$ *e excentricidade* $e = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Exemplo 3.2.6. *Iremos agora determinar o lugar geométrico representado pela equação:*

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 7\sqrt{2x} + 5\sqrt{2y} + 10 = 0$$

Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [10] = [0].$$

Como a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

é uma simétrica, pelo Teorema Espectral, A *é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de* A *são* $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = 1$, *e os vetores unitários*

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ e } v_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

são, respectivamente, autovetores correspondentes. Assim, $\beta = \{v_1, v_2\}$ *é uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^2$ *formada por autovetores de* A. *Seja* $P = [I]_\alpha^\beta$, *onde* α *é a base canônica de* $\mathbb{R}^2$. *Chame* $D = P^{-1}AP$. *Dessa forma*

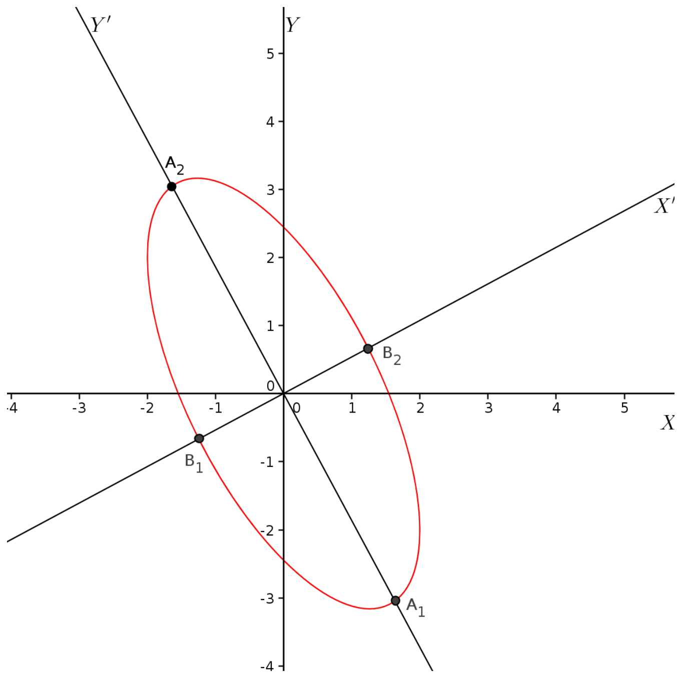

Figura 3.8: elipse

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \; e \; D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A = PDP^t$, *já que* $P^{-1} = P^t$, *segue que*

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [10] = [0].$$

Chamando $[v]_\beta$ *de* $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, *obtemos*

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [10] = [0]\,.$$

ou seja,

$$3x'^2 + y'^2 + 12x' - 2y' + 10 = 0$$

que é equivalente à equação

$$3(x' + 2)^2 + (y' - 1)^2 = 3$$

ou seja,

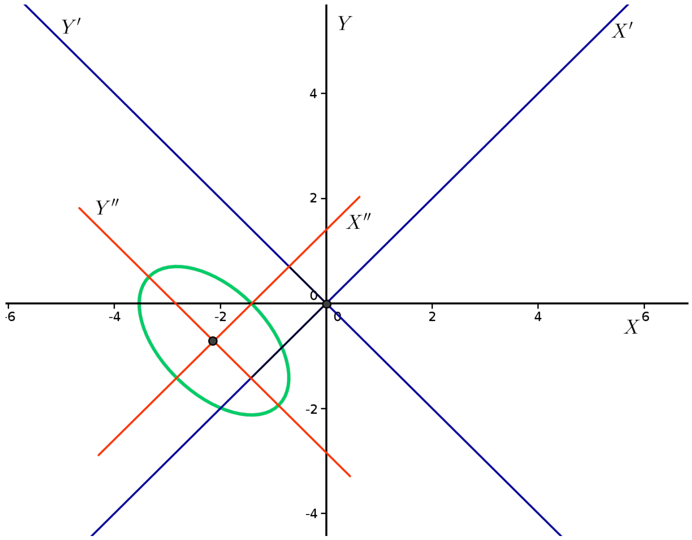

Figura 3.9: elipse

$$\boxed{(x'+2)^2 + \frac{(y'-1)^2}{3} = 1}$$

Portanto, a equação representa uma elipse. Para esboçar seu gráfrico (Figura 3.9*) é necessário considerar as novas coordenadas x' e y', de modo que seu centro é dado por $(-2, 1)$, semi-eixo menor medindo 1 e semi-eixo maior medindo $\sqrt{3}$, sendo este semi-eixo paralelo ao eixo Y'.*

Podemos ainda obter mais uma mudança de coordenada, correspondente a uma translação do tipo:

$$\begin{cases} x'' = x' + 2 \\ y'' = y' - 1 \end{cases}$$

Consequentemente, teremos a equação reduzida:

$$\boxed{x''^2 + \frac{y''^2}{3} = 1.}$$

Referências Bibliográficas

[1] DELGADO, J; FRENSEL, K; GRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

[2] GASPAR, A.S. *As Cônicas, Quádricas e suas Aplicações*.2014. 75 f. Dissertação (Mestrado em Matemática).UNB. Brasília, 2014.

[3] HEFEZ, A; FERNANDEZ, C.S. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM , 2012. 328 p.(Coleção PROFMAT,01).

[4] PEREZ, E.S. *Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica*. 2014. 95 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). UNIRIO. Rio de Janeiro, 2014.

[5] REIS, G.L; SILVA, V.V. *Geometria Analítica*. 2^a ed. Rio de Janeiro : LTC, 2000.

[6] STEINBRUCH, A; WINTERLE,P. *Geometria Analítica*. 2^a ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

[7] <http://www.mat.ufmg.br/rodney/notas-de-aula/diagonalizacao.pdf> Acesso em 10/03/2016.

[8] <http://www.mat.ufmg.br/rodney/notas-de-aula/espacos-euclidianos.pdf>. Acesso em 20/02/2016.

[9] <http://www.sedis.ufrn.br/bibliotecadigital/site/pdf/TICS/AlgII-ECT-Livro-Z-WEB.pdf>. Acesso em 03/03/2016.

[10] <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume3/o-r2-como-modelo-de-espaco-vetorial.pdf>. Acesso em 17/02/2016.