UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

VANDERLI DE ARAÚJO ALVES

SOBRE O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

JUAZEIRO DO NORTE
2015

VANDERLI DE ARAÚJO ALVES

SOBRE O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática. Orientador: Prof. Dr. Flávio França Cruz.

JUAZEIRO DO NORTE

2015

VANDERLI DE ARAÚJO ALVES

SOBRE O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 29/ 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Flávio França Cruz (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Maria Silvana A. Cost

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

A minha família de uma forma geral, ao meus colegas do PROFMAT, a todos os professores que contribuíram direto ou indiretamente para a realização deste sonho, em particular todos os meus professores do mestrado e em especial ao professor Flávio França Cruz por ter me orientado neste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A meu irmão Francisco Vanderlan de Araújo Alves que por muitas vezes veio dá-me apoio e assistência técnica ao computador, a minha mãe Antônia Maria de Araújo Alves que sempre me consolou e me incentivou nos momentos difíceis, em especial a meu pai Vicente Alves Sobrinho (In Memorian) que por tantas vezes veio me animar e apoiar quando o trabalho estava apresentando muitos erros e a minha namorada Maria Jéssica dos Santos por ter me apoiado e incentivado nos momentos difíceis desta dissertação.

A meus amigos que sempre me deram força e apoio.

Aos meus colegas de mestrado, em especial: Ezequias Guilherme, Henrique Barreto, Edjan Fernandes e Wecsley Fernandes pelos momentos inesquecíveis onde compartilhamos todas as alegrias e tristezas, sucessos e fracassos, mas com muito esforço conseguimos superar todas as dificuldades encontradas ao longo do curso. Esse quarteto citado acima me ajudou bastante na compreensão de muitas questões relacionadas à conteúdos vistos ao longo de todo o curso.

Aos professores da UFCA, URCA, UECE e IFCE, pelas ótimas aulas que contribuíram demais para aumentar o meu conhecimento e consequentemente melhorar o meu desempenho profissional.

Ao professor, amigo e incentivador Flávio França Cruz pela orientação que me deu neste trabalho de conclusão de curso.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A Deus por me dá paciência e coragem pra encarar mais esse desafio.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) como uma consequência do Princípio de Indução Finita (PIF) e, como aplicação do (PFC), apresentamos a solução de vários problemas envolvendo contagem, arranjos, permutações e combinações. O principal objetivo do trabalho é apresentar o raciocínio lógico-matemático que envolve a noção de contagem evitando dar o protagonismo que costumeiramente é dado as fórmulas matemáticas no ensino básico. Neste intuito, resolvemos vários problemas sem fazer uso de fórmulas matemáticas, priorizando a aplicação direta do PFC.

Palavras-chave: Problemas de contagem; Análise combinatória; Princípio Fundamental da Contagem.

ABSTRACT

We present The Fundamental Principle Count (PFC) as a consequence of the Principle Finite Induction (PIF) and as the application (PFC), we present the resolution of various probelmas involving count, arrangements, combinations and permutations. The main objective of this work is to present the logical-mathematical reasoning that involves counting notion avoiding to give the leadership that is customarily given to mathematical formulas. To this end, we solve various problems without using mathematical formulas, giving priority to direct application of the PFC.

Keywords: Problems count ; Combinatorial analysis ; Fundamental principle Count.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8
2 UM POUCO DA HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA 9
3 O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM 16
4 CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM . . 27
4.1 Permutações simples 27
4.2 Arranjos simples 30
4.3 Combinações simples 33
4.4 Permutações com elementos repetidos 39
4.5 Arranjos com elementos repetidos repetidos 46
4.6 Combinações com elementos repetidos ou combinações completas. 48
4.7 Permutação circular 54
5 RESOLVENDO PROBLEMAS DE CONTAGEM SEM O USO
DE FÓRMULAS 58
6 CONCLUSÃO. 75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS. 76

1. INTRODUÇÃO

Na minha vivência em sala de aula tenho visto frequentemente que alguns estudantes do ensino básico tem uma grande dificuldade para resolver problemas envolvendo contagem. Percebe-se que tais dificuldades surgem, em muitas casos, pela escolha de técnicas e fórmulas matemáticas que são inadequadas para resolver o problema que está sendo abordado. Acredito que essa escolha inadequada ocorre porque as fórmulas matemáticas que são apresentadas em análise combinatória são repassadas sem a justifica adequada.

Portanto, neste trabalho, demonstraremos resultados que irão melhorar a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Esses resultados servirão também para que possamos observar e compreender que todos os casos de arranjos, permutações e combinações vistos no ensino médio são consequências diretas do Princípio Fundamental da Contagem. Então no desenvolvimento deste trabalho iremos provar alguns resultados importantes que vamos utilizar para demonstrar tais fórmulas vistas no ensino médio.

Desta forma, este trabalho tem como objetivo tratar exclusivamente dos problemas de contagem relacionados diretamente com o ensino médio.

Em vários livros didáticos as fórmulas de análise combinatória são apresentadas de forma isolada, assim como os problemas envolvendo cada fórmula. Desta forma, quando tem-se problemas sobre vários temas, o estudante tem dificuldade para escolher a fórmula correta.

Desta maneira, uma boa compreensão do Princípio Fundamental da contagem aliado a uma boa interpretação do problema a ser resolvido dispensa o uso de fórmulas, ou seja, o aluno não precisará ter que escolher qual fórmula utilizará e sim fazer uso apenas do seu raciocínio lógico-matemático. Além disso, há vários problemas cuja solução exigem a aplicação de mais de uma fórmula. Conclui-se que a apresentação de várias fórmulas sem justificativa alguma é um fator que dificulta o aprendizado.

Infelizmente, o protagonismo das fórmulas ainda é incentivado por algumas provas de vestibular, levando o aluno a ter que decorá-las, ao invés de incentivar o raciocínio lógico-matemático do estudante.

2. UM POUCO DA HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

No ensino médio, análise combinatória é um importante conteúdo da matemática, e abrange não só problemas de contagem, mas também problemas relacionados ao Binômio de Newton e suas aplicações, bem como ao triângulo de Pascal, entre outros. A necessidade de contagem vem desde os tempos antigos e se estende até os dias atuais. Os problemas de contagem que estão inseridos na análise combinatória consistem em contar um número finito de elementos de um subconjunto de um determinado conjunto dado.

O objetivo deste capítulo é mostrar um pouco da história referente aos problemas de contagem, e as necessidades que levaram o seu desenvolvimento ao longo do tempo.

A História da Matemática mostra que o desenvolvimento dos problemas de contagem está diretamente relacionado à necessidade do homem em "contar". A primeira técnica matemática aprendida pelas crianças em seu contato inicial com a disciplina é a contagem, inicialmente, contando elementos de um conjunto e, em seguida, aprendendo as operações aritméticas com o mesmo intuito (MORGADO et al., 1991). A análise combinatória seria apenas uma extensão dessa necessidade. Ela estabelece conceitos e técnicas que nos permitem a contagem em situações onde o conjunto de elementos apresenta uma grande quantidade de possibilidades onde é inviável contá-las uma a uma.

O desenvolvimento da análise combinatória surgiu da necessidade que o homem teve de calcular maneiras seguras de ganharem em jogos de azar, tais como, baralho, dados, moedas, dentre outros, ou seja, os problemas de contagem foram desenvolvidos para auxiliar no cálculo da probabilidade de se ganhar determinado jogo. Podemos assim dizer que entre outras aplicações, os problemas de contagem são uma ferramenta na teoria das probabilidades, pois a auxiliam na resolução de muitos problemas, principalmente aqueles mais complexos.

Na verdade fazemos uso de problemas de contagem até mesmo nas probabilidades mais simples, porém de uma forma tão elementar que muitas vezes nem percebemos, como por exemplo o problema abaixo.

Uma urna contém dez bolas iguais e numeradas de 1 a 10. Determine a probabilidade de se retirar ao acaso uma bola dessa urna e obtermos um número ímpar. Para resolver este problema observe inicialmente que o espaço amostral, ou seja, o conjunto formado por todos os elementos possíveis de serem obtidos são os números de 1 a 10. Ao determinamos isso estamos na verdade contando (e aí fazendo uso, mesmo que de forma bem simples, da contagem) todos os resultados possíveis de serem sorteados.

O que se deseja obter é um número ímpar, dessa forma vamos pegar um subconjunto do conjunto formado por todos os números de 1 a 10 e excluir os que são pares, assim sobram os números 1, 3, 5, 7 e 9. Dessa forma fazemos novamente uma contagem de forma bastante simples. Assim a probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{5}{10} \text{ ou } \frac{1}{2} \text{ ou } 0,5.$$

Para que tenhamos uma ideia de como os problemas de contagem não representa nenhuma novidade para a matemática, podemos citar por exemplo, Arquimedes de Siracusa (287 a .C. a 212 a. C.) matemático que já trabalhava com problemas de contagem em sua época, com certeza não tão formalizado quanto hoje, onde já temos fórmulas prontas, mas sim utilizando o raciocínio lógico-matemático para resolver problemas relacionados a contagem.

O famoso triângulo de Pascal, que possui algumas propriedades com aplicações diretas na análise combinatória, já era conhecido por Chu Shih-Chieh, na China por volta do ano 1300 e antes disso pelos hindus e árabes. O matemático hindu Bháskara sabia calcular o número de permutações, arranjos e combinações de n elementos, o mesmo acontecia com o matemático francês Levi Ben Gerson (1288-1344).

Durante muito tempo a Análise Combinatória ou Cálculo Combinatório foi considerado completamente desligado do cálculo aritmético, segundo Rey Pastor (1939).

Há uma poesia infantil que parece ter sobrevivido em várias culturas e que serve para introduzir o campo de problemas combinatórios (Biggs, 1979).

Quando eu estava indo para Santo Ives
Eu encontrei um homem com sete mulheres
Cada mulher tem sete sacos
Cada saco tem sete gatos
Cada gato tem sete caixas
Caixas, gatos, sacos e mulheres
Quantos estavam indo para Santo Ives?

Esta pequena poesia, que na verdade é um problema, pode ter diferentes respostas dependendo da interpretação dada pelo leitor, caracterizando-se como uma famosa ”pegadinha”. Aí é onde está a grande dificuldade de certos problemas de contagem. Podemos fazer interpretações diferentes da situação acima. Sabemos que o narrador estava indo para Santo Ives. Se considerarmos que os demais estavam vindo no sentido oposto a resposta seria nenhum, se não contarmos com o narrador, ou então seria um, se contássemos com ele. Se todos estivessem indo no sentido de Santo Ivo teríamos duas possíveis respostas uma contando com o narrador e outra sem contar com o narrador.

Esta poesia data, pelo menos de 1730 e é usualmente interpretada como uma brincadeira, entretanto, poderia se imaginar que por trás dela existiriam propósitos bem mais sérios, pois existe um problema similar no Líber Abaci, “Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?”Este problema foi escrito por Leonardo de Pisa que dificilmente negaria uma conexão entre este problema e a poesia infantil. As duas citações mostram aspectos artificiais do problema envolvendo a adição e a repetição do número sete, reforçando a memorização do mesmo.

Segundo Wilson (1990), as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas por exemplos absurdos onde era destacada a elusiva propriedade da memorização, como o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que segue: Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos; quantos itens têm ao todo?

A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: Traité du triangle arithmétique (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, Dissertatio de arte combinatória (1666) de Leibniz e Ars magna sciendi sive combinatoria (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos" enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como "o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si".

De acordo com Berge (1971) a definição de combinatória depende de conceitos de "configurações", pois instintivamente os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os métodos para resolvê-los devem ser estudados.

Há, em geral, quatro aspectos da combinatória moderna: listar, contar, estimar e existir – muitos dos quais podem ser ilustrados pelo problema de dispor n distinguíveis objetos em uma fileira.

Para Biggs (1979) há dois princípios de contagem que são a base da maioria da aritmética e que podem também ser considerados como a pedra fundamental da combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação, sendo que o primeiro diz que se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividi-lo isso em duas partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Isso é fato da experiência do dia a dia. Já no segundo princípio temos que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será a multiplicação entre x e y, ou seja, $x \cdot y$.

Na análise combinatória estuda-se formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: arranjos, permutações e combinações, essas três "espécies"subdividem-se podendo ser formados por objetos distintos ou repetidos.

Ainda no início do século XIX não havia significado preciso para o emprego dos termos arranjo e permutação. Leibniz designava as permutações por variações, que é a palavra hoje utilizada por alguns autores para indicar arranjos.

Ao longo do tempo muitos outros matemáticos deram sua contribuição aos problemas de contagem e a análise combinatória como um todo. Podemos citar por exemplo:

• Niccollo Fontana (1499- 1557), matemático italiano mais conhecido como Tartaglia. Nasceu em 1499 em Brescia, Itália, e morreu no dia 13 de dezembro de 1557 em Veneza, também na Itália. Seu apelido, Tartaglia (que significa ”gago”), tem uma história curiosa, que ele mesmo conta no seu livro “Quesiti et inventioni diverse”. Em 1512, quando Brescia foi saqueada pelas tropas francesas comandadas por Gaston de Foix, Nicolo refugiou-se, com a mãe e a irmã, na igreja da cidade, acreditando ser um local seguro. Mas os soldados o encontram e ele foi ferido com golpes no rosto e na cabeça. A mãe, viúva e sem condições de pagar um médico, tratou-lhe das feridas com a sua própria saliva. Nicolo salvou-se, mas ficou sempre com grande dificuldade em falar. Por essa razão, ficou com a alcunha de Tartaglia (”gago”em italiano). Esse nome ficou como lembrança da sua desgraça, e mais adiante ele resolveu adaptá-lo, passando a chamar-se Nicolo Tartaglia. Como matemático sua maior contribuição foi na resolução de equações cúbicas, apesar de ter contribuído para o desenvolvimento da análise combinatória, pois segundo a história Tartaglia era um intelectual jogador, que teve grande interesse em calcular a probabilidade de se obter sucesso em jogos de azar, fazendo uso assim e também contribuindo para o desenvolvimento da análise combinatória, mas precisamente em problemas de contagem.

• Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês, que fundou a teoria das probabilidades juntamente com outro matemático francês, Blaise Pascal com base na análise combinatória, particularmente em problemas referentes a contagem do número de elementos de um subconjunto de um conjunto finito. Segundo a história a teoria das probabilidades foi originada devido à curiosidade de um cavalheiro, o Chavalier de Méré, jogador apaixonado, que em cartas discutiu com Pascal problemas relacionados à probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas. Despertando seu interesse pelo assunto, Pascal correspondeu-se com Fermat sobre o que hoje conhecemos como probabilidades finitas.

• Blaise Pascal (1623-1662), matemático francês, criou o triângulo aritmético ou triângulo de Pascal, no qual certas propriedades desse triângulo são utilizados na análise combinatória e consequentemente com aplicações na teoria das probabilidades. Juntamente com Fermat deu origem a teoria das probabilidades fazendo uso da análise combinatória, mas especificadamente dos problemas de contagem, o que possibilitou a contagem do número de elementos de subconjuntos de conjuntos finitos.

• Percy Alexander MacMahon (1854-1929), matemático inglês que publicou no início do século XX dois trabalhos importantes sobre análise combinatória, Combinatory Analysis, 2 volumes, Cambridge University Press, 1915/1916, Chelsea 1960, Dover 2004, obras estas que ganharam muita notariedade ná época.

• Gian Carlo Rota (1932-1999), matemático italiano que ajudou formalizar o assunto de análise combinatória na segunda metade do século XX.

• Paul Erdos (1913-1996), matemático húngaro que trabalhou com problemas de análise combinatória, como também de outras áreas como por exemplo, teoria dos números. Publicou 1475 artigos, alguns de extrema importância, o que é um número superior a qualquer outro matemático na história, trabalhando com centenas de colaboradores. Trabalhou em problemas de análise combinatória, teoria dos grafos, teoria dos números, teoria dos conjuntos, análise matemática e teoria das probabilidades. As contribuições de Erdos para a Matemática são numerosas e variadas. Mas não era um grande teórico, preferia resolver problemas. Acreditava que as sofisticadas teorias matemáticas não podem cobrir toda a matemática, e que há muitos problemas que não podem ser atacados por meio delas, mas que podem ser resolvidos por métodos elementares.

A análise combinatória vem tendo um crescimento muito grande nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração, ou seja, problemas de contagem tem crescido enormemente devido a teoria dos grafos, em análise de algoritmos dentre outros. Muitos problemas importantes podem ser modelados matematicamente como problemas de teoria dos grafos (problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados nos computadores) e também problemas de matemática pura.

Como já ressaltamos, os problemas de contagem são cada vez mais utilizados e cada vez mais importantes, visto que hoje a necessidade é maior que nos tempos antigos. Daí a importância de alunos e professores saberem resolver tais problemas utilizando um raciocínio lógico-matemático que permita construir uma engenhosidade para resolver determinadas problemas.

3. O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Neste capítulo apresentaremos o Princípio Fundamental da Contagem. No que segue, vamos denotar por $\#A$ a cardinalidade de um conjunto não vazio e finito A, ou seja, $\#A$ denotará a quantidade de elementos do conjunto A. Vamos utilizar também o termo r-uplas para nos referirmos a uma sequência ordenada formada por elementos de um ou mais conjuntos. Além disso, assumiremos o Princípio de Indução Finita, que pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1 *(Princípio de Indução Matemática) Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$, tal que satisfaz as seguintes condições:*
i) $1 \in X$, e
ii) se $n \in X$ e o número $n + 1 \in X$, então $X = \mathbb{N}$

O princípio básico de contagem, também chamado de Princípio da Adição, pode ser enunciado da seguinte forma:

Definição 1 *(Princípio Aditivo) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, (ou seja $A \cap B = \emptyset$) com p e q elementos respectivamente, então o número de elementos de $A \cup B$ é $p + q$.*

Vejamos o exemplo.

Exemplo 1: Supondo que existam cinemas e teatros em sua cidade e que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro diferentes para passarem no próximo sábado. Supondo que você tenha dinheiro para assistir apenas a um destes cinco eventos. Quantos são os programas que você pode fazer neste sábado?

Solução: Vamos supor que cada programa custe apenas 1 real, e que você só tenha 1 real. Como você tem dinheiro para apenas um evento (programa), então ou você assiste ao filme 1 ou ao filme 2 ou ao filme 3 ou à peça de teatro 1 ou à peça de teatro 2. Caso eu escolha ver um filme, terei 3 opções ou caso eu escolher ver uma peça de teatro, terei 2 opções. Como você pode observar os elementos de um conjunto não pertencem à outro, pois são distintos, logo eles são disjuntos. (a interseção é vazia).

Logo pelo principio aditivo teremos:

Se A e B são dois conjuntos disjuntos com respectivamente, p e q elementos, então

$A \cup B$ possui $p + q$ elementos. Sejam $A = \{f \mid f$ é um filme$\}$, ou seja, $A = \{f_1, f_2, f_3\}$ e $B = \{t \mid t$ é uma peça de teatro$\}$, ou seja, $B = \{t_1, t_2\}$. Logo $A \cup B = \{f_1, f_2, f_3, t_1, t_2\}$. Assim ao todo são $3 + 2 = 5$ programas.

O Principio Fundamental da Contagem, como já foi dito antes é uma ferramenta poderosíssima para a resolução de problemas de contagem sem o uso das fórmulas vistas no ensino médio. Na verdade, veremos mais adiante como determinar as tradicionais fórmulas já conhecidas, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, mas ainda, veremos que elas são consequências diretas do Princípio Fundamental da Enumeração ou Princípio Fundamental da contagem ou ainda Princípio da Multiplicação.

O Princípio Fundamental da Contagem pode ser enunciado da seguinte forma:

Definição 2 *(Princípio Fundamental da Contagem) Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$.*

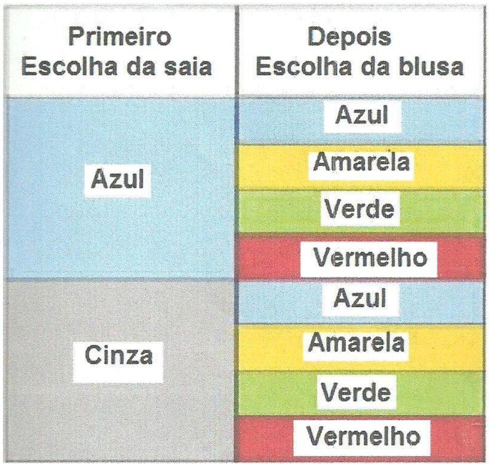
Abaixo vamos mostrar dois exemplos onde utilizaremos a definição do Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo 2: Maria tem 2 saias de cores diferentes, sendo elas azul e cinza. Ela tem também 4 blusas de cores diferentes, que são azul, amarelo, verde e vermelho. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir utilizando uma de suas sais e uma de suas blusas?

Solução: Sem perda de generalidade chamaremos de d_1 a decisão de escolher a saia, assim o número de escolha para d_1 é 2, pois são apenas 2 saias. Chamaremos de d_2 a decisão de escolher a blusa assim, o número de escolha para d_2 é 4, pois são 4 blusas. De acordo com o princípio multiplicativo, uma vez tomada a decisão d_1, o número de maneiras diferentes de se tomar as decisões d_1 e d_2 é $2 \cdot 4 = 8$. Portanto são 8 formas diferentes de Maria se vestir fazendo uso de uma saia e uma blusa.

Podemos ver o resultado de acordo com o conjunto abaixo, formado por pares onde o primeiro elemento representa a cor da saia e o segundo a cor da blusa. O conjunto é o seguinte: $\{S_1B_1, S_1B_2, S_1B_3, S_1B_4, S_2B_1, S_2B_2, S_2B_3, S_2B_4\}$. A figura abaixo ilustra a resolução deste problema.

Figura 1: Ilustração da resolução do problema



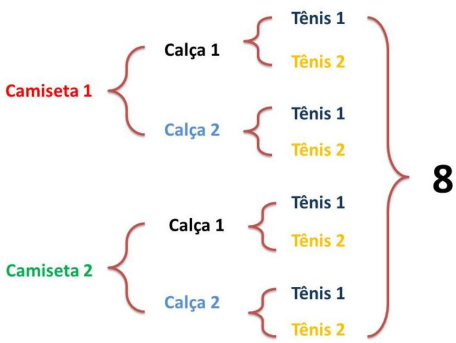
Primeiro Escolha da saia	Depois Escolha da blusa
Azul	Azul
	Amarela
	Verde
	Vermelho
Cinza	Azul
	Amarela
	Verde
	Vermelho

Elaborada pelo autor

Exemplo 3: Carlos tem 2 camisetas diferentes, 2 calças diferentes e 2 pares de tênis diferentes. De quantas maneiras distintas Carlos pode arrumar-se vestindo uma camiseta, uma calça e calçando um par de tênis?

Solução: Sem perda de generalidade, vamos chamar de d_1 a decisão de escolher a camiseta, assim o número de escolhas para d_1 é 2. Chamaremos de d_2 a decisão de escolher a calça, desta forma o número de escolhas de d_2 também é 2. Por fim d_3 será a escolha do par de tênis, assim o número de d_3 também é 2. Então de acordo com o princípio multiplicativo uma vez tomada as decisões d_1 e d_2, o número de formas de tomar as decisões d_1, d_2 e d_3 será: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Podemos ver o resultado na figura abaixo.

Figura 2: Ilustração da resolução do exemplo 3



Elaborada pelo autor

Observe que no exemplo acima o Princípio Multiplicativo não se limita apenas a duas decisões no caso d_1 e d_2, mas pode se estender para n decisões. Nem sempre é viável ilustrar a solução do problema. Nos exemplos acima temos apenas 2 decisões a serem tomadas (Exemplo 2) e 3 decisões a serem tomadas (Exemplo 3). No caso em que o número de decisões a serem tomadas é maior, ou mesmo em casos onde o número de decisões a serem tomadas é a mesma dos exemplos acima, porém cada decisão tem um número elevado de possibilidades, fica inviável representar a ilustração da solução do problema, e a ilustração muitas vezes ajuda na compreensão do resultado.

Agora iremos demonstrar alguns resultados sobre o Princípio Fundamental da Contagem, que servirão de base para a demonstração das fórmulas de arranjos, permutações e combinações vistas no ensino médio e que iremos trabalhar no próximo capítulo.

Lema 1 *Considere os conjuntos* $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ *e* $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots b_n\}$*. O conjunto* $C = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ *possui* $m \cdot n$ *elementos.*

Demonstração: Sem perda de generalidade fixemos em cada linha o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo. Assim teremos:

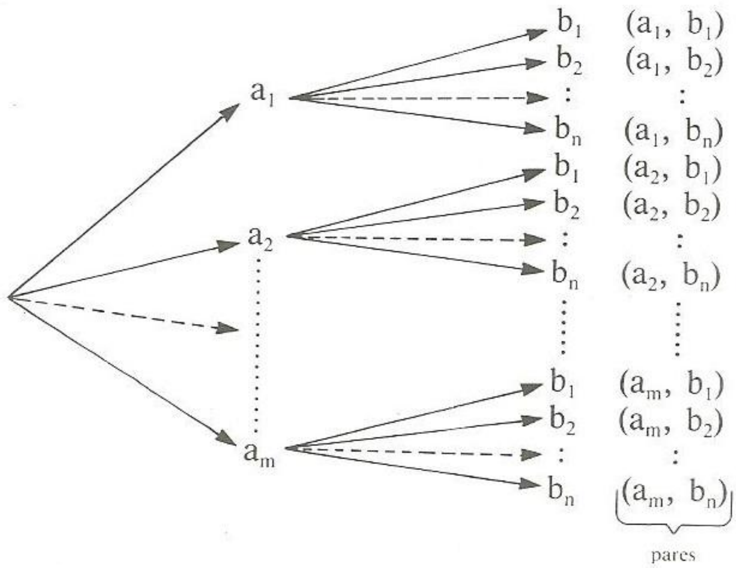
$$\begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \ldots, (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \ldots, (a_2, b_n) \\ (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), \ldots, (a_3, b_n) \\ \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), (a_m, b_3), \ldots, (a_m, b_n) \end{cases}$$

Temos portanto m linhas com n pares ordenados. Como número de pares ordenados é igual a n em todas as m linhas, o total de pares ordenados é a igual a soma $n+n+n+\ldots+n$ com m parcelas. Portanto o número total de pares ordenados é $m \cdot n$ como queríamos demonstrar.

$\square$

Podemos visualizar a demonstração acima através do diagrama da árvore representado pela figura abaixo.

Figura 3: Diagrama da árvore representando o lema 1



Fonte: Hazzan[2]

Vamos usar dois exemplos a seguir para facilitar a compreensão do lema 1.

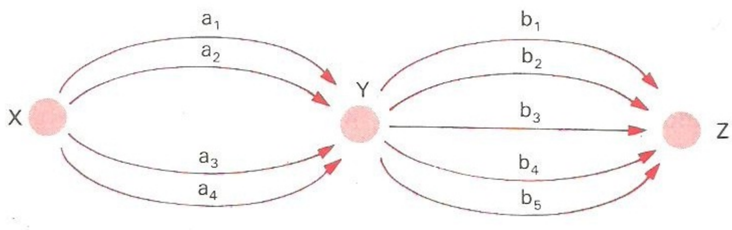
Exemplo 1: Temos três cidades X, Y e Z. Existem quatro rodovias que ligam X com Y e cinco que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas diferentes podemos chegar até Z?

Solução: Sejam A o conjunto das rodovias que ligam X com Y e B o conjunto das rodovias que ligam Y com Z assim temos $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Cada modo de efetuar a viagem de X até Z pode ser considerado como uma par de estradas (a_i, b_j) em que cada $a_i \in A$ e cada $b_j \in B$.

Logo o número de pares ordenados (ou modos de viajar de X até Z passando por Y) será $4 \cdot 5 = 20$.

Vejamos a figura abaixo que ilustra a solução deste problema.

Figura 4: Ilustração da resolução do exemplo 1



Fonte: Hazzan[2]

Exemplo 2: Quantos números de dois algarismos distintos ou não podem ser formados, usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8?

Solução: cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b) em que $a \in A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $b \in B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Portanto o resultado para este exemplo é $8 \cdot 8 = 64$.

Observação: Os exemplos 1 e 2 são apenas uma maneira de mostrar como utilizar o Lema 1, mas poderiam ser resolvido usando-se apenas um raciocínio ligado a contagem diretamente, este vem apenas para fortalecer e justificar a teoria.

No caso do Exemplo 1 poderíamos pensar da seguinte forma: São 4 rodovias que ligam X à Y e outras 5 que ligam Y à Z. Portanto para ir de X à Z passando por Y, o número de maneiras diferentes é $4 \cdot 5 = 20$, que é exatamente o que nos diz a definição do Princípio Fundamental da Contagem.

No caso do Exemplo 2 poderíamos proceder da seguinte forma: A classe das unidades pode ser ocupada por 8 algarismos diferentes e a classe das dezenas também, assim teríamos $8 \cdot 8 = 64$. Desta forma os dois exemplos poderiam ser resolvidos sem se fazer uso do lema acima, apenas usando o raciocínio lógico e o enunciado do Princípio Fundamental da Contagem.

Lema 2 *Considere o conjunto* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. *O número de pares ordenados* (a_i, a_j) *tais que* $a_i, a_j \in A$ *e* $a_i \neq a_j$ *se* $i \neq j$, *é* $m \cdot (m - 1)$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos fixar o primeiro elemento do par, e fazer variar o segundo, assim teremos:

$$\begin{cases} (a_1, a_2),\ (a_1, a_3), \ldots, (a_1, a_m) \text{ assim teremos (m - 1) pares.} \\ (a_2, a_1),\ (a_2, a_3), \ldots,\ (a_2, a_m) \text{ assim teremos (m - 1) pares.} \\ (a_3, a_1),\ (a_3, a_2), \ldots, (a_3, a_m) \text{ assim teremos (m - 1) pares.} \\ \vdots \\ (a_m, a_1),\ (a_m, a_2),\ \ldots,\ (a_m, a_{m-1}) \text{ assim teremos (m - 1) pares.} \end{cases}$$

Desta forma o número de pares ordenados será $(m-1) + (m-1) + (m-1) + \ldots + (m-1)$ com m parcelas, ou seja, será $m \cdot (m - 1)$, como queríamos demonstrar.

□

Vejamos alguns exemplos para facilitar a compreensão do lema 2.

Exemplo 1: Quantos números com dois algarismos *distintos* podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8?

Solução: Cada número pode ser considerado um par ordenado (a, b) em que a e $b \in A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $a \neq b$. Pelo Lema 3.2, provado acima temos que o resultado é $m \cdot (m - 1)$, ou seja, $8 \cdot 7 = 56$.

Exemplo 2: José deve pintar uma bandeira usando para isso duas cores diferentes. Ele dispõe das seguintes cores: azul, vermelha, verde, amarela, branca e cinza. De quantas maneiras distintas José pode pintar essa bandeira?

Solução: Cada uma das formas de pintar podem ser consideradas como um par ordenado de cores (a, b) em que $a \neq b$, onde a e $b \in A = \{azul, vermelha, verde, amarela, branca, cinza\}$.

Desta forma o conjunto A possui 6 elementos.

De acordo com o lema 2, o número de formas distintas pra se pintar a bandeira é $m \cdot (m - 1)$, ou seja, $6 \cdot 5 = 30$.

Observação: Os exemplos 1 e 2 são apenas casos particulares, uma maneira de mostrar como utilizar o lema 2, que é o caso geral.

Estes exemplos poderiam ser resolvido também usando-se apenas um raciocínio diretamente ligado a contagem.

No caso do primeiro exemplo poderíamos raciocinar da seguinte forma: Para ocupar o algarismos das unidades temos 8 possibilidades (8 algarismos), uma vez escolhido o algarismo das unidades, temos 7 possibilidades para o algarismos das dezenas, pois um algarismo já foi escolhido para as unidades. Desta forma pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $8 \cdot 7 = 56$.

Já no segundo exemplo poderíamos pensar da seguinte forma: Para pintar a primeira parte da bandeira José pode escolher entre as cores azul, vermelha, verde, amarela, branca ou cinza, ou seja, ele tem 6 opções. Uma vez escolhida a primeira cor ele terá apenas 5 opções para escolher a segunda cor, pois deveremos ter cores distintas e a primeira já foi escolhida, assim pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $6 \cdot 5 = 30$ maneiras diferentes de colorir a bandeira. Podemos concluir assim que os dois exemplos poderiam ser resolvidos apenas com a definição dada para o Princípio Fundamental da Contagem.

Vamos utilizar os Lemas apresentados acima para demonstrar um resultado muito mais forte, que é o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Este resultado tem como consequências direta o que conhecemos como arranjos e permutações conforme veremos mais adiante, além de ajudar a demonstrar (justificar) as fórmulas de combinações. Vamos apresentar o PFC em duas versões..

Teorema 2 (*PFC I*) *Sejam* $A_1, \ldots, A_r$ *conjuntos não-vazios e finitos. Seja* $\#A_i = n_i$ *a cardinalidade do conjunto* A_i, *para* $i = 1, \ldots, r$. *O conjunto*

$$A = \{(a_1, \ldots, a_r) : a_i \in A_i\}$$

tem cardinalidade $\#A = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$.

Demonstração: Aplicaremos o Princípio de Indução Finita sobre r para fazer a demonstração. Para $r = 2$, teremos, pelo Lema 1, que o número de r-uplas ordenadas é $n_1 \cdot n_2$, isto é, $\#A = n_1 \cdot n_2$, isto prova a nossa base de indução.

Suponha agora que tenhamos $(r-1)$ conjuntos não-vazios e finitos, $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$. Por hipótese de indução $\#A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1})\}$ é $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1}$. Vamos provar agora que o resultado é valido para r conjuntos $r \geq 2$. Tomemos as sequências de $(r-1)$ elementos, $(a_1, , \ldots, a_{r-1})$, onde todo $a_i \in A_i$ para $i = 1, \ldots, r-1$. Observamos agora que cada r-upla $(a_1, \ldots, a_r)$ consiste de um par formado por uma $(r-1)$-upla $(a_1, , \ldots, a_{r-1})$ e um elemento a_r pertencente ao conjunto A_r. Logo, de acordo com o Lema 1, o número de sequências do tipo $(a_1, , \ldots, a_r)$ será $(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1}) \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1} \cdot n_r$, como queríamos demonstrar.

□

Como aplicações mostraremos algumas situações abaixo.

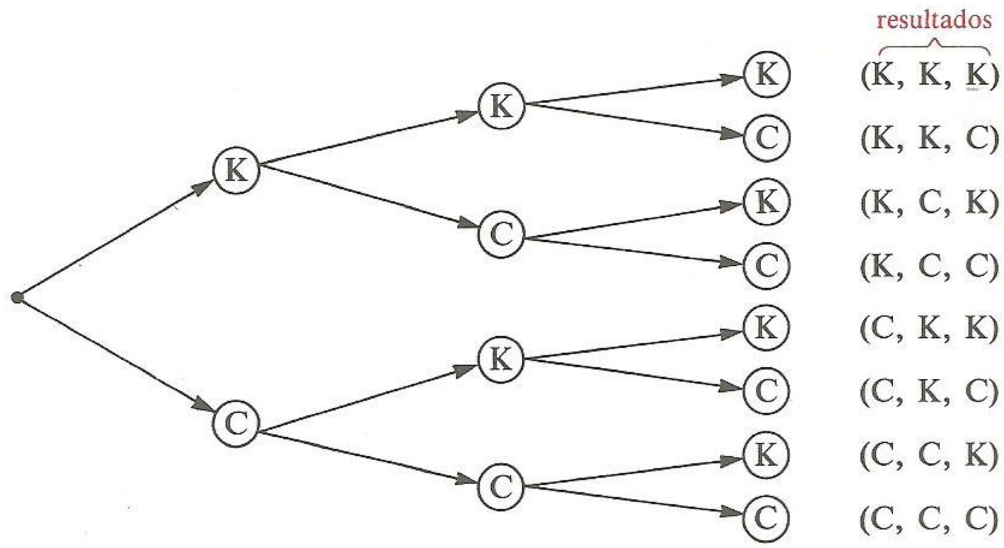
Exemplo 1: Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

Solução: Indiquemos por K o resultado cara e por C o resultado coroa. Queremos determinar o número de triplas ordenadas (a, b, c) em que $a \in A_1 = \{K, C\}$, $b \in A_2 = \{K, C\}$, e $c \in A_3 = \{K, C\}$,

Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Podemos visualizar a resolução deste problema pelo diagrama da árvore conforme a figura a seguir:

Figura 5: Ilustração da resolução do exemplo 1 acima.



Fonte: Hazzan[2]

Exemplo 2: Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, podemos formar quantos números diferentes com 3 algarismos?

Solução: Queremos determinar a quantidade de triplas ordenadas do tipo (a, b, c) onde $a \in A = \{1,2,3,4,5\}$, $b \in B = \{1,2,3,4,5\}$ e $c \in C = \{1,2,3,4,5\}$. Portanto temos que $n_A = 5$, $n_B = 5$ e $n_C = 5$. Pelo resultado demonstrado acima a quantidade de números que podem ser formados é: $n_A \cdot n_B \cdot n_C = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Portanto podemos formar 125 números diferentes de 3 algarismos distintos ou não com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5.

Teorema 3 (*PFC II*) *Seja A um conjunto não-vazio e finito com n elementos,* $(n \geq 2)$. *O conjunto*

$$X = \{(a_1, \ldots, a_r) : a_i \in A \, e \, a_i \neq a_j \, se \, i \neq j, \; onde \; 1 \leq i, j \leq r\}$$

tem cardinalidade $\#X = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(r-1)]$.

Demonstração: Aplicaremos o Princípio de Indução Finita sobre r para fazermos a demonstração. Para o caso em que $r = 2$, temos pelo Lema 2 que o número de r-uplas ordenadas será $n \cdot (n-1)$, ou seja $2 \cdot 1 = 2$. O que prova a base de indução. Agora vamos assumir que o resultado vale para r e vamos demonstrar que vale para $r + 1$. Segue da hipótese de indução que o conjunto

$$X^* = \{(a_1, \dots, a_r) : a_i \in A \text{ e } a_i \neq a_j \text{ se } i \neq j\}$$

tem cardinalidade $\#X^* = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(r-1)]$. Observamos agora que cada $(r+1)$-upla $(a_1, \dots, a_{r+1})$ consiste de um par ordenado formado por uma r-upla $(a_1, , \dots, a_r) \in X^*$ e um elemento a_{r+1} pertencente ao conjunto A. Logo, de acordo com o Lema 1, o número de $(r+1)$-uplas do tipo $(a_1, , \dots, a_{r+1})$ será:
$\#X^* = \#A \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(r-1)]$ e portanto

$$\#X^* = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(r-1)],$$

como queríamos demonstrar.

□

Vamos apresentar situações onde o teorema 3 é utilizado.

Exemplo 1: Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1º, 2º e 3º lugares?

Solução: Cada resultado consta de uma tripla ordenada (a, b, c), em que a representa o atleta que chegou em 1º lugar, b representa o atleta que chegou em 2º lugar e c o que chegou em terceiro. Assim a, b e c pertencem ao conjunto dos 4 atletas e $a \neq b \neq c$. Logo pelo resultado demonstrado acima a resposta para esse problema será $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

É importante perceber que o exemplo acima pode ser resolvido usando apenas lógica sem se prender a qualquer resultado já demonstrado antes. Neste caso teríamos o seguinte: Qualquer um dos 4 atletas poderia chegar na primeira posição, depois que o primeiro atleta vencer, qualquer um dos outros 3 poderia chegar na segunda colocação, depois que os dois primeiros chegarem qualquer um dos outros 2 que sobraram podem chegar na terceira posição. Logo pelo Princípio Fundamental da contagem teremos como resultado $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Exemplo 2: Quantos números diferentes com dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 3, 5, 8 e 9?

Solução: Cada número de dois algarismos consta de um par ordenado (a, b), com $a \neq b$, onde $a, b \in A = \{1, 3, 5, 8, 9\}$. Logo pelo resultado acima podemos formar $n \cdot (n-1)$ números, ou seja, $5 \cdot 4 = 20$ números.

O mesmo problema poderia ser resolvido da seguinte forma: Para ocupar o algarismo das unidades temos 5 dígitos. Escolhido um dentre os 5, sobrarão 4 dígitos que podem ocupar o algarismo das dezenas. Logo pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $5 \cdot 4 = 20$.

4. CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Os resultados demonstrados referentes ao Princípio Fundamental da Contagem tem consequências diretas em fórmulas matemáticas que conhecemos como arranjos, permutações e com um pouco mais de raciocínio em combinações. Entretanto o objetivo aqui é mostrar como resolver problemas sem fazer o uso das fórmulas, porém generalizando as mesmas para que possamos mostrar o porquê das fórmulas conhecidas do ensino médio, pois neste nível de ensino os problemas de contagem são ensinados dando protagonismo as fórmulas já prontas sem nenhuma justificativa. Alguns autores consideram dois desses três conteúdos (arranjos e permutações) inexistentes, pois de fato são consequência diretas do Princípio Fundamental da Contagem. No entanto como já vimos há alguns problemas que exigem tão somente o conhecimento da fórmula e os cálculos algébricos não dando prioridade a construção do raciocínio lógico-matemático.

Como iremos falar de arranjos, combinações e permutações deveremos logicamente definir o que vem a ser o fatorial de um número natural. Isto não terá tanta importância enquanto estivermos trabalhando com casos particulares, mas com certeza é de importância fundamental quando estivermos generalizando as principais fórmulas da análise combinatória que são ensinadas no ensino médio.

Uma definição bem simples para o fatorial de um número natural é a seguinte:

Definição 3 (*Fatorial de um número natural*) *Seja n um número natural. Chamamos de n fatorial a expressão matemática $n!$, onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$, em outras palavras o $n!$ é o produto de todos os números naturais de 1 até n.*

Por convenção temos que $1! = 1$ e que $0! = 1$.

Exemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

4.1 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Definição 4 (*Permutação Simples*) *Seja A um conjunto finito com n elementos distintos. Qualquer agrupamento com todos os n elementos desse conjunto recebe o nome de permutação simples.*

Assim sendo, podemos dizer que calcular o número de permutações simples consiste apenas em contar de quantas formas diferentes os n elementos distintos de um conjunto podem ser dispostos ou organizados. Vamos denotar por P_n a quantidade de permutações simples com os n elementos de um conjunto.

Poderíamos fazer então a seguinte pergunta: Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots a_n$ de quantos modos é possível ordená-los? A resposta à essa pergunta é exatamente o número total das permutações simples dos n elementos. Mas como calcular P_n? Vamos partir de casos particulares para que possamos generalizar um resultado para calcular o número total de permutações simples de n elementos, ou seja P_n.

Exemplo 1: Com os dígitos 1, 2, 3 quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

Solução: Como temos poucos elementos (apenas três), podemos escrever todos os esses números. Isso só é viável para uma quantidade muito pequena de elementos. Se tivermos uma grande quantidade de elementos a tarefa de escrever todos os agrupamentos se torna bastante complicada. Os números de 3 algarismos distintos são portanto: 123, 132, 213, 231, 312 e 321, portanto são 6 números. Notemos que o problema consiste na verdade em fazer todas as permutações possíveis sem repetir elementos com os números 1, 2 e 3, ou seja trata-se de uma permutação simples.

Poderíamos pensar no problema da seguinte forma: Para ocupar o algarismo das centenas temos 3 possibilidades (qualquer um dos 3 algarismos), uma vez escolhido um desses algarismos, quando formos ocupar a ordem das dezenas sobrarão apenas 2 possibilidades, depois que escolhermos o algarismo da dezena restará apenas 1 algarismo para ocupar a ordem das unidades. Então pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. É fácil perceber que neste caso particular, $P_3 = 3!$.

A seguir vamos utilizar a mesma lógica deste exemplo para generalizar o resultado, ou seja, vamos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem para demonstrar como calcular a permutação de n elementos distintos.

Proposição 1 *O número total de permutações simples dos n elementos de um conjunto A é dado por :*

$$P_n = n!$$

Demonstração: De acordo com a definição de permutação simples, temos que calcular

o número de agrupamentos envolvendo todos os n elementos de um conjunto A. Para ocupar o primeiro lugar na ordenação podemos escolher n elementos. Para ocupar o segundo lugar temos $(n-1)$ elementos (pois já temos um elemento ocupando o primeiro lugar). Para ocupar o terceiro lugar temos $(n-2)$ elementos (pois dois elementos já ocupam os dois primeiros lugares). Repetindo o processo até que seja ocupado a n-ésima posição teremos para esta $[n-(n-1)]$. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o número total de permutações é:
$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(n-1)] = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1,$ portanto temos que $P_n = n!,$ como queríamos demonstrar.

□

Vamos exemplificar o caso de permutações simples, no entanto usaremos a fórmula demonstrada para resolver apenas o exemplo 2, sendo que o exemplo 3 segue o mesmo raciocínio e portanto não faremos uso da fórmula $P_n = n!$ para resolvê-lo.
Exemplo 2: Quantos são os anagramas da palavra Brasil?
Solução: inicialmente vamos resolver o problema utilizando a fórmula demonstrada. O Problema consiste na verdade em calcular todas as permutações simples dos elementos do conjunto $X = \{B, R, A, S, I, L\}$. Assim $\#X = 6$. De acordo com a fórmula demonstrada temos:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Resolvendo o mesmo problema sem fazer uso da fórmula temos que $\#X = 6$. Para isso basta pensar da seguinte maneira:

Para ocupar a primeira posição teremos 6 elementos, para a segunda posição teremos 5 elementos, para a terceira 4 elementos, para a quarta 3 elementos, para a quinta 2 elementos e por fim para a sexta posição apenas o elemento que restou, ou seja, 1 elemento. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o número de anagramas será:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Exemplo 3: Quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 3, 6, 8 e 9?

Solução: O problema consiste em calcular todas permutações simples dos elementos do conjunto $A = \{1, 3, 6, 8, 9\}$. Assim devemos calcular a permutação dos 5 elementos do conjunto A, ou seja P_5.

Desta forma temos a seguinte situação: Para ocupar a ordem das dezenas de milhar temos 5 algarismos, a ordem das unidades de milhar temos 4 algarismos (pois um já foi escolhido para a ordem das dezenas de milhar), para ocupar a ordem das centenas 3 algarismos, para ocupar a ordem das dezenas 2 algarismos e por fim para ocupar a ordem das unidades apenas 1 algarismo. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Este exemplo 3 retrata um erro cometido com certa frequência por alunos do ensino médio. Na maioria das vezes eles veem as fórmulas sem nenhuma justificativa e acabam cometendo erros simples. É comum ouvir alunos deste nível de ensino dizer: Usa-se Permutação quando a quantidade de elementos é igual a quantidade de posições a serem ocupadas. Devemos ter um pouco de cuidado com essa definição que muitas vezes é dada de maneira informal aos alunos. Sabemos que essa afirmação feita pelos alunos ela não é verdadeira. Suponhamos que no exemplo 3 retirássemos do enunciado a palavra "distintos". A quantidade de elementos seria igual a quantidade de posições a serem ocupadas, porém a resposta seria diferente, neste caso teríamos:

Para ocupar a ordem das dezenas de milhar 5 algarismos, como não tem a palavra "distintos"então podemos ter algarismos repetidos assim todas as outras ordens podem ser ocupadas por qualquer um dos 5 algarismos. Como ao todo são 5 ordens, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3125.$$

4.2 ARRANJOS SIMPLES

Conforme iremos observar na definição de arranjos simples, a permutação simples é um caso particular desse tipo de agrupamento e ambos são consequência direta do Princípio Fundamental da Contagem. Assim sendo vamos mostrar a fórmula para arranjos simples já ressaltando que problemas ligados a esse tipo de agrupamento podem ser resolvidos sem a referida fórmula matemática, para isso basta fazer uso do Princípio Fundamental da Contagem. Vamos escrever abaixo a definição para arranjos simples, ou simplesmente arranjos como alguns autores trazem.

Definição 5 (*Arranjos Simples*) *Seja M um conjunto finito com n elementos, isto é,* $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Chamaremos de arranjo simples, ou simplesmente arranjo dos n elementos de M tomados r a r $(1 \leq r \leq n)$, a qualquer r-upla (sequência de r elementos) formada com elementos de M, todos distintos.*

No caso em que $n = r$ teremos uma permutação simples conforme veremos mais adiante. Vamos denotar por $A_{n,r}$ o número total de arranjos simples.

Dada a definição vamos mostrar um exemplo (caso particular) de arranjo simples para que em seguida possamos demonstrar ou justificar o porquê da fórmula que utilizamos frequentemente no ensino médio.

Exemplo 1: Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Solução: Para este caso particular o conjunto M tem 4 elementos, ou seja, $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Como são números de 2 algarismos distintos temos então um arranjo dos 4 elementos de M tomados 2 a 2 (pois a ordem dos algarismos modifica o número). Escrevendo todos os números teríamos: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43 ou seja, 12 números.

Sem ter que escrever todos os números (o que nem sempre é possível, pois há casos em que a quantidade de números é muito grande) e sem ter que fazer a resolução recorrendo a fórmula, o que é o objetivo deste trabalho poderíamos, pensar no problema da seguinte maneira: Para ocupar a ordem das dezenas temos 4 algarismos, como os números devem ser formados por algarismos distintos teremos para ocupar a ordem das unidades apenas 3 algarismos, pois um já estará sendo utilizado na ordem das dezenas. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o resultado é $4 \cdot 3 = 12$ números de 2 algarismos distintos formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4.

Este exemplo é um caso particular de arranjos simples onde temos 4 elementos tomados 2 a 2. No entanto precisamos generalizar uma fórmula para o caso de n elementos tomados r a r.

Proposição 2 *Seja* $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ *um conjunto com n elementos, o número total de ar-*

ranjos simples é dado por :

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}, \text{ com } (1 \leq r \leq n).$$

Demonstração: Imaginemos n elementos tomados r a r, onde $n > r$, e seja $A_{n,r}$ o número total de arranjos. Dessa forma o primeiro elemento pode ocupar n posições, o segundo elemento pode ocupar $(n-1)$ posições, o terceiro $(n-2)$ e o n-ésimo elemento pode ocupar $[n-(r-1)]$ posições. Assim pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$A_{n,r} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(r-1)].$$

Observe que a multiplicação se repete por r fatores. Temos então:
$A_{n,r} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$. Multiplicando a expressão pela fração $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$, obtemos $A_{n,r} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r)!}$. Desta forma temos :

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!},$$

como queríamos demonstrar.

□

Vejamos alguns casos particulares.

• Para o caso em que $n = r$ temos: $A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$, que é a permutação de n elementos tomados n a n.

• Para o caso particular em que $r = 1$, é fácil perceber que $A_{n,1} = n$, pois teremos $A_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$.

É importante lembrar que tanto na definição como na proposição 2 que traz a fórmula, temos necessariamente $1 \leq r \leq n$.

A seguir vamos exemplificar e resolver o exemplo com o uso da fórmula demonstrada e em seguida sem o uso da mesma, para verificarmos que os resultados são iguais.

Exemplo 2: De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas é possível de se obter?

Solução: Inicialmente vamos resolver utilizando a fórmula demonstrada. Neste caso temos uma tripla ordenada, ou seja, devemos escolher 3 elementos distintos dentre os 52 existentes. Assim temos um arranjo de 52 elementos tomados 3 a 3. Pela fórmula demonstrada temos:

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} = A_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49!}{49!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$$

Agora resolvendo o problema sem utilizar a fórmula devemos notar que cada resultado é uma tripla ordenada de cartas (x, y, z), em que x é a primeira carta, y a segunda e z a terceira. Vamos observar também que x, y e z são todas distintas, pois as cartas serão retiradas sem reposição.

Podemos imaginar a solução deste problema da seguinte maneira: Quando formos retirar a primeira carta temos 52 possibilidades diferentes, para a segunda carta temos apenas 51 (pois uma carta já foi retirada) e por fim para a retirada da terceira carta temos apenas 50 possibilidades. Logo pelo Princípio Fundamental da Contagem o resultado para o problema será: $52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$.

4.3 COMBINAÇÕES SIMPLES

O que percebemos no ensino médio é uma grande quantidade de alunos que se confundem quanto à resolução de problemas de contagem no caso em que temos n elementos para serem tomados r a r. A confusão é feita na escolha da fórmula surgindo com muita frequência a pergunta:"É arranjo ou combinação"? Uma forma de evitar isso é dá uma definição consistente para esses dois tipos distintos de agrupamentos. Daremos a definição de combinação simples, bem como exemplos de casos particulares e a partir do Princípio Fundamental da Contagem generalizar a fórmula.

Definição 6 (*Combições Simples*) *Seja M um conjunto com n elementos, isto é,* $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Chamamos de combinações dos n elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos.*

Vamos denotar o número de combinações por $C_{n,r}$ ou $\binom{n}{r}$.

O exemplo abaixo irá ajudar na compreensão e diferenciação de arranjo simples e combinação simples.

Exemplo 1: Quantas são as combinações simples dos 5 elementos, tomados 3 a 3 do conjunto M = $\{a, b, c, d, e\}$?

Solução: O problema consiste em determinar a quantidade de subconjuntos do conjunto M que contenham 3 elementos distintos. Neste caso podemos escrever todos os esses subconjuntos uma vez que a quantidade é pequena. Dessa forma todos os subconjuntos são: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, d, e\}$, portanto temos 10 subconjuntos diferentes formados com 3 elementos distintos do conjunto $M = \{a, b, c, d, e\}$.

Neste caso temos uma quantidade pequena de combinações simples sendo portanto viável escrever todas elas, entretanto quando a quantidade de combinações simples de um determinado conjunto é muito grande essa tarefa torna-se trabalhosa. Desta forma vamos partir de um caso particular relativamente simples como o exemplo acima e generalizar a fórmula conhecida no ensino médio para combinações simples. No entanto vamos mostrar também que os problemas podem ser resolvidos sem a fórmula independente de terem como resultado um número grande ou pequeno de combinações simples.

Observemos aqui que os subconjuntos $\{a, b, c\}$, $\{b, a, c\}$, $\{c, b, a\}$ por exemplo são todos iguais, pois conforme a definição estamos trabalhando com conjuntos e desta forma a ordem dos elementos não diferencia um conjunto de outro.

É importante notar a diferença entre uma combinação (conjunto) e uma sequência, pois numa combinação não importa a ordem dos elementos, ao passo que numa sequência a ordem dos elementos diferencia a sequência. Para evitar confusão na hora de resolver determinados problemas de contagem é importante ter muita atenção no enunciado do problema, pois a partir daí saberemos se os agrupamentos a serem formados dependem ou não da ordem em que figuram os elementos.

No exemplo 1 já resolvido é importante perceber que cada combinação formada com três elementos do conjunto M pode ser escrita de 6 formas diferentes, ou seja 3!. Como exemplo podemos observar que o subconjunto $\{a, b, c\}$ pode ser escrito de 6 maneiras diferentes. Vamos analisar cada um dos subconjuntos de acordo com a tabela abaixo:

Combinações	Permutações possíveis
{a,b,c}	{a,b,c}, {a,c,b}, {b,a,c}, {b,c,a}, {c,a,b}, {c,b,a}
{a,b,d}	{a,b,d}, {a,d,b}, {b,a,d}, {b,d,a}, {d,a,b}, {d,b,a}
{a,b,e}	{a,b,e}, {a,e,b}, {b,a,e}, {b,e,a}, {e,a,b}, {e,b,a}
{a,c,d}	{a,c,d}, {a,d,c}, {c,a,d}, {c,d,a}, {d,a,c}, {d,c,a}
{a,c,e}	{a,c,e}, {a,e,c}, {c,a,e}, {c,e,a}, {e,a,c}, {e,c,a}
{a,d,e}	{a,d,e}, {a,e,d}, {d,a,e}, {d,e,a}, {e,a,d}, {e,d,a}
{b,c,d}	{b,c,d}, {b,d,c}, {c,b,d}, {c,d,b}, {d,c,b}, {d,b,c}
{b,c,e}	{b,c,e}, {b,e,c}, {c,b,e}, {c,e,b}, {e,b,c}, {e,c,b}
{b,d,e}	{b,d,e}, {b,e,d}, {d,b,e}, {d,e,b}, {e,b,d}, {e,d,b}
{c,d,e}	{c,d,e}, {c,e,d}, {d,c,e}, {d,e,c}, {e,c,d}, {e,d,c}

Podemos perceber que neste caso particular o número de arranjos simples é igual ao número de combinações simples multiplicado por 3!. Desta forma temos que:

$$A_{5,3} = 3! \cdot C_{5,3}, \text{ ou seja, } C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!}.$$

$$\text{Assim concluímos que } C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$$

Para este caso particular, ou seja, para uma Combinação simples de 5 elementos tomados 3 a 3 podemos calcular da seguinte maneira $C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!}$. Agora vamos generalizar a fórmula que conhecemos do ensino médio.

Proposição 3 *Seja $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ um conjunto finito com n elementos. O número total de combinações simples para os n elementos de M tomados r a r é dado por :*

$$C_{n,r} \text{ ou } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}, \text{ com } r \leq n.$$

Demonstração: Inicialmente assumiremos $r < n$. Tomemos uma combinação, digamos que esta seja: $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r\}$. Se permutarmos todos os elementos de E_1, encontraremos $r!$ arranjos.

Vamos tomar agora outra combinação, digamos $E_2 = \{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{r+1}\}$. Novamente se permutarmos todos os elementos de E_2, vamos obter $r!$ arranjos.

De forma análoga vamos continuar o processo, ou seja, vamos obter outras combinações, E_3, E_4, e assim sucessivamente lembrando que temos um número finito para essas combinações.

Vamos chamar de x o número total de combinações dos n elementos de M tomados r a r, isto é, $x = C_{n,r}$ e vamos supor que todas as combinações dos n elementos de M tomados r a r são elas: $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_x$.

Sabemos que cada combinação E_i dos n elementos de M tomados r a r dá origem a $r!$ arranjos. Chamemos de F_i o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de E_i. Temos então a seguinte correspondência:

$$\begin{cases} E_1 \longrightarrow F_1. \\ E_2 \longrightarrow F_2. \\ \vdots \\ E_x \longrightarrow F_x. \end{cases}$$

Verifiquemos que:

(1) $F_i \cap F_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$.

(2) $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$, em que F é o número de arranjos dos n elementos de M tomados r a r.

Vamos provar os dois itens:

Primeiro item: $F_i \cap F_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$.

Vamos supor que $F_i \cap F_j$ seja diferente do conjunto vazio para todo $i \neq j$. Neste caso existiria pelo menos um arranjo que pertenceria simultaneamente a F_i e F_j, com $i \neq j$. Tomando todos os elementos desse arranjo iríamos obter que coincidiria E_i e E_j e, portanto, $E_i = E_j$. Este fato nos leva a um absurdo, pois quando construímos todas as combinações obtivemos $E_i \neq E_j$ para todo $i \neq j$. Portanto temos que: $F_i \cap F_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$.

Segundo item: $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$, em que F é o número de arranjos dos n elementos de M tomados r a r.

Para provarmos esse item basta provar que

(I) $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x \subset F$ e

(II) $F \subset F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x$.

Vamos provar o item I. Seja a um arranjo pertencente a $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x$, então $a \in F_i$ (para algum i variando de 1 a x) e evidentemente $a \in F$, logo $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x \subset F$.

Vamos provar a agora o item II. Seja agora a um arranjo tal que $a \in F$. Se tomarmos os elementos desse arranjo a, obteremos uma das combinações E_i. Mas sabemos que E_i gera o conjunto dos arranjos F_i, então dessa forma $a \in F_i$ e, portanto, $a \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x$. Assim concluímos que: $F \subset F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x$.

De (I) e (II) resulta que $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$, em que F é o número de arranjos dos n elementos de M tomados r a r.

Sabemos ainda que, se x conjuntos são disjuntos dois a dois, o número de elementos da união deles é a soma do número de elementos de cada um deles. isto é:
$\#(F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x) = \#F.$
$\#F_1 + \#F_2 + \#F_3 + \ldots + \#F_X = \#F.$

Assim temos: $r! + r! + ... + r! = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, mas a soma $r! + r! + ... + r!$ se repete x vezes que é o número total de combinações, desta forma segue que:
$x \cdot r! = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, multiplicando ambos os lados da igualdade por $\dfrac{1}{r!}$ temos: $x = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$. Como x indica $C_{n,r}$ ou $\binom{n}{r}$, temos portanto a fórmula do número de combinações é: $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ para todo n e r pertencentes aos naturais com $r \leq n$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Dessa forma temos alguns casos particulares:

1º Caso: n e r pertencem ao conjunto dos números naturais e $n = r$. Desta forma temos: $C_{n,n} = \dfrac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$. Ou seja, se temos um conjunto M não vazio só temos uma única combinação envolvendo todos os elementos do conjunto M, que é justamente quando o escrevemos. Isso justifica também o caso da proposição 3 onde $r \leq n$

2º Caso: n é um número natural não nulo e $r = 0$.
$C_{n,0} = \dfrac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = 1$. Concluímos assim que o único subconjunto com zero elementos é o conjunto vazio.

3º Caso: $n = r = 0$
$C_{0,0} = \dfrac{0!}{0! \cdot (0-0)!} = 1$. Dessa forma concluímos que o único subconjunto do conjunto vazio é o próprio vazio.

Em virtude dos casos particulares concluímos que a formula $C_{n,r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ é válida para todo n e r pertencentes ao conjunto dos números naturais com $r \leq n$.

Apresentaremos dois exemplos, o primeiro exemplo será resolvido com o uso da fórmula e também sem o uso da mesma. O segundo exemplo será resolvido apenas utilizando o raciocínio lógico-matemático e o Princípio Fundamental da Contagem, visto que sua resolução por meio da fórmula é análoga ao primeiro exemplo.

Exemplo 2: Uma prova de matemática de determinada escola é composta por 10 questões. De quantas maneiras diferentes um aluno pode escolher 7 dentre essas 10 questões para resolver?

Solução: Seja M o conjunto das 10 questões e suponhamos portanto temos que: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. O aluno deverá escolher 7 dessas 10 questões. Observemos aqui o seguinte fato: Se o aluno escolher por exemplo o subconjunto que contenha as questões $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ é a mesma coisa que ele optar por exemplo pelo o subconjunto $\{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$, ou seja, a ordem dos elementos não interfere na decisão a ser tomada. Dessa forma temos uma combinação dos 10 elementos de M tomados 7 a 7.

De acordo com a fórmula demonstrada temos:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{10!}{7! \cdot (10-7)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$$

Resolvendo o mesmo problema sem o uso da fórmula poderíamos ter o seguinte raciocínio: Para escolher a primeira questão à ser resolvida o aluno tem 10 possibilidades uma vez que são 10 questões. Para escolher à segunda questão o aluno tem 9 possibilidades e assim sucessivamente, ou seja, para escolher a terceira questão são 8 possibilidades, a quarta teremos 7 possibilidades, a quinta 6 possibilidades, a sexta 5 possibilidades e finalmente a sétima questão teríamos 4 possibilidades. Pelo Princípio Fundamental da Contagem teríamos: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ formas diferentes de escolher as 7 questões. Entretanto uma vez feita a escolha das 7 questões, elas podem se ordenarem entre si de $7!$ formas diferentes sem modificar as questões escolhidas, ou seja, cada grupo de 7 questões escolhidas está sendo contada $7!$ vezes. Assim devemos dividir o resultado por $7!$.

Daí teremos que o número de formas que o aluno pode escolher 7 dentre as 10 questões para resolver é:

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{7!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{720}{6}=120.$$

Exemplo 3: Um grupo tem 5 pessoas. De quantas maneiras diferentes podemos formar uma comissão contendo 3 pessoas?

Solução: Seja M o conjunto que contém as 5 pessoas, assim $M = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$. Observemos que um grupo formado pelas P_1, P_2 e P_3 é o mesmo que um grupo formado pelas pessoas P_3, P_2 e P_1, ou seja, não importa a ordem em que as pessoas são colocadas o grupo continua sendo o mesmo. Desta forma temos uma combinação de 5 elementos tomados 3 a 3. Podemos resolver o problema da seguinte forma: Para ocupar a primeira vaga da comissão temos 5 pessoas, a segunda vaga 4 pessoas e a última vaga apenas 3 pessoas. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $5\cdot 4\cdot 3 = 60$. Entretanto uma vez escolhida as 3 pessoas elas podem permutar de 3! formas diferentes, portanto, cada grupo escolhido está sendo multiplicado por $3! = 6$. Assim o resultado deve ser divido por 6. Dessa forma teremos:

$$\frac{60}{6}=10.$$

4.4 PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

Definição 7 (*Permutações com Elementos Repetidos*) *Permutação com elementos repetidos é um caso particular de permutação dos n elementos de um conjunto finito M, onde nem todos os elementos são distintos, ou seja, podemos ter um ou mais elementos repetidos.*

Neste caso devemos ter cuidado pois a permutação com elementos repetidos dará um resultado menor que a permutação simples, mesmo que a quantidade de elementos à serem permutados seja a mesma.

Consideremos aqui a palavra ANA e vamos determinar seus anagramas. Como já vimos anteriormente se não tivéssemos elementos repetidos teríamos exatamente $3! = 6$ anagramas. Neste caso vamos diferenciar a letra A escrevendo na mesma um índice. Dessa forma teremos a palavra: A_1NA_2. Fazendo todas as permutações possíveis teremos:

$$A_1NA_2,\ A_1A_2N,\ A_2A_1N,\ A_2NA_1,\ NA1A_2,\ NA_2A_1.$$

Notemos que se retirarmos os índices as palavras A_1NA_2 e A_2NA_1 são iguais, assim também são iguais as palavras A_1A_2N e A_2A_1N, e NA_1A_2 e NA_2A_1. Dessa forma temos apenas 3 permutações que são elas AAN, ANA e NAA e não 6 permutações (3!).

Essa diminuição no número de permutações ocorreu do fato de termos duas letras iguais A e A, no conjunto das letras a serem permutadas. É importante perceber de forma intuitiva que quando temos elementos repetidos o número de permutações diminui em relação ao fato que se todos os elementos fossem distintos.

Vamos mostrar aqui nesse tópico a fórmula para calcular o número de permutações quando temos alguns elementos repetidos e depois, através de exemplos mostrar que é possível fazer esse cálculo sem utilizar a conhecida fórmula do ensino médio e sim fazendo uso apenas do Princípio Fundamental da Contagem. Para isso vamos dividir em casos, e em seguida demonstrar uma preposição que traz a fórmula para o cálculo do número de permutações com elementos repetidos.

1º Caso

Consideremos n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1 e os demais são todos distintos entre si e também diferentes de a_1.

Indiquemos por $P_n^{n_1}$ o número de permutações nessas condições e calculemos esse número. Cada permutação dos n elementos é uma n-upla ordenada de elementos que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1 e o restante dos $(n-n_1)$ elementos distintos.

Façamos agora o seguinte raciocínio. Das n posições que existem na permutação, vamos escolher $(n-n_1)$ posições, para colocar os elementos todos distintos de a_1. Dessa forma existem $\binom{n}{n-n_1}$ modos de escolher essas posições.

Para cada escolha de $(n-n_1)$ posições, existem $(n-n_1)!$ modos em que os $(n-n_1)$ elementos podem ser permutados. Logo existem ao todo

$$\binom{n}{n-n_1}\cdot(n-n_1)! = \frac{n!}{(n-n_1)!\cdot(n-n+n_1)!}\cdot(n-n_1)! = \frac{n!}{n_1!}.$$

formas diferentes de dispormos os elementos distintos de a_1, na permutação.

Uma vez colocados esses elementos distintos, a posição dos elementos repetidos a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes.

Dessa forma, existem $\dfrac{n!}{n_1}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1, isto é: $P_{n!}^{n_1!} = \dfrac{n!}{n_1!}$.

Vamos exemplificar o 1º caso, porém resolveremos o exemplo usando apenas o Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo 1: Quantos anagramas tem a palavra BARATA?

Solução: Temos o seguinte caso:

$$\begin{cases} A,\ A,\ A \text{ são os elementos repetidos (Aparecem 3 vezes na palavra).} \\ B,\ R\ e\ T \text{ são todos distintos dois a dois e também são distintos de A.} \end{cases}$$

Neste caso temos n = 6. Para este caso podemos pensar no problema da seguinte maneira: Temos 6 letras para serem permutadas, portanto a primeira letra pode ocupar qualquer uma das 6 posições, a segunda letra pode ocupar qualquer das 5 posições restantes, a terceira letra apenas 4 posições, a quarta letra apenas uma das 3 posições, a quinta letra só tem 2 posições para ocupar e a sexta e última letra apenas 1 posição. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos o seguinte resultado: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. No entanto há 3 letras iguais, e estas podem permutarem de 3! formas diferentes que teremos a mesma palavra visto que como as letras são iguais se as trocarmos de lugar a palavra continua a mesma, ou seja devemos então dividir o resultado da permutação simples por 3! que é igual a 6. Dessa forma temos que o número total de anagramas da palavra BATATA é:

$$\frac{720}{6} = 120.$$

Dando continuidade a generalização da fórmula para o cálculo do número total de permutações com elementos repetidos temos o 2º caso que iremos trabalhá-lo agora.

2º Caso

Vamos considerar agora n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2 e o restante são todos distintos entre si e também distintos de a_1 e a_2. Nessas condições indiquemos por $P_n^{n_1,n_2}$ o número de elementos nessas condições.

Cada permutação dos n-elementos é uma n-upla ordenada de elementos em que deve figurar n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e os $(n - n_1 - n_2)$ elementos restantes.

Raciocinemos da seguinte forma: Das n posições que existem na permutação, vamos escolher $(n - n_2)$ lugares para colocar todos os elementos, com exceção daqueles que são iguais a a_2. Dessa forma existem $\binom{n}{n-n_2}$ modos de escolher esses lugares. Para cada uma dessas escolhas irão existir $P_{n-n_2}^{n_1}$ modos em que os $(n - n_2)$ elementos podem ser permutados (é importante ressaltar que, dos elementos a serem permutados agora, existem também n_1 que são iguais a a_1. Dessa forma ao todo existirão:

$$\binom{n}{n-n_2} \cdot P_{n-n_2}^{n_1} = \frac{n!}{(n-n_2)! \cdot n_2!} \cdot \frac{(n-n_2)!}{n_1!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$$

formas de arranjar na permutação todos os elementos, com exceção de a_2.

Depois que esses elementos já estiverem arranjados na permutação, as posições dos elementos repetidos a_2 ficam determinados (e de uma única forma) pelos lugares restantes. Logo existirão $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1 e n_2 elementos iguais a a_2, isto é:

$$P_n^{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}.$$

Vamos exemplificar o 2º caso e novamente optaremos por solucioná-lo usando apenas o raciocínio lógico-matemático e o Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo 2: Determine a quantidade de anagramas da palavra BATATA.

Solução: Temos o seguinte caso:

$$\begin{cases} A,\ A,\ A \text{ são os elementos repetidos (Aparecem 3 vezes na palavra).} \\ T,\ T \text{ são também elementos repetidos, porém diferentes de A.} \\ B \text{ é um elemento distinto dos demais e que portanto aparece uma única vez.} \end{cases}$$

Neste caso temos uma palavra de 6 letras das quais 1 aparece uma única vez, outra aparece 2 vezes e a última se repete 3 vezes, ou seja, uma permutação com elementos repetidos.

Vamos mostrar como resolver esse problema usando apenas o Princípio Fundamental da Contagem, para isso vamos raciocinar da seguinte maneira: A palavra BATATA possui 6 letras, vamos supor que todas elas sejam distintas umas das outras, dessa maneira para formar uma palavra de 6 letras teríamos a seguinte situação: Para ocupar o espaço da primeira letra temos 6 possibilidades diferentes, para ocupar o espaço da segunda letra apenas 5 possibilidades, continuando o mesmo raciocínio para ocupar o espaço da terceira letra temos 4 possibilidades, da quarta letra somente 3 possibilidades, da quinta letra 2 possibilidades e da última letra apenas 1 possibilidade.

Portanto pelo Princípio Fundamental da Contagem temos o seguinte resultado: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ anagramas diferentes com as letras da palavra BATATA.

Entretanto algumas dessas palavras são iguais (repetidas) pois temos letras que se repetem, assim devemos calcular a quantidade de formas que podemos permutar as letras (os elementos) que se repetem. A letra A se repete 3 vezes portanto temos 3! formas diferentes de permutá-la, ou seja 6 formas diferentes. A letra T por sua vez se repete 2 vezes, assim temos 2! formas diferentes de permutá-la, ou seja 2 formas diferentes. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $6 \cdot 2 = 12$ formas diferentes de fazer a permutação das letras A e T simultaneamente de modo que a palavra não se modificará, ou seja, cada anagrama escolhido pode ser escrito de 12 formas diferentes. Dessa forma o número de anagramas da palavra BATATA é:

$$\frac{720}{12} = 60.$$

Assim sendo podemos fazer o cálculo usando apenas o Princípio Fundamental da Contagem sem usar fórmulas vistas no ensino médio as quais acabamos de demonstrarmos.

Até agora nos dois primeiros casos, trabalhamos apenas casos particulares. Seguindo o mesmo raciocínio dos casos anteriores vamos generalizar a fórmula para calcular o número total de permutações com elementos repetidos e em seguida, usar o mesmo raciocínio para mostrar também que é possível efetuar esse cálculo sem fazer o uso da fórmula.

Proposição 4 *Consideremos um conjunto M com n elementos, dos quais :*

$$\begin{gathered} n_1 \text{ são iguais a } a_1 \\ n_2 \text{ são iguais a } a_2 \\ \vdots \\ n_r \text{ são iguais a } a_r \end{gathered}$$

Então o número total de permutações com $n_1, n_2, \ldots, n_r$ elementos repetidos, ou seja, a fórmula geral para o cálculo de permutações com uma quantidade de elementos qualquer repetidos é :

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot, \ldots, \cdot n_r!}.$$

Onde $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_r$ é a quantidade de vezes que cada elemento de repete e $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, é o número total de elementos repetidos ou não.

Demonstração: Usando um raciocínio igual ao 1º e o 2º casos e como já foi definindo $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ o número total de permutações com elementos repetidos nas condições dispostas acima temos:

$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \binom{n}{n-n_r} \cdot P_{n-n_r}^{n_1,n_2,\ldots,n_{r-1}}$.

$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \dfrac{n!}{(n-n_r)! \cdot (n-n+n_r)!} \cdot \dfrac{(n-n_r)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_{r-1}!}$, desta forma teremos:

$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \dfrac{n!}{(n-n_r)! \cdot n_r!} \cdot \dfrac{(n-n_r)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_{r-1}!}$. Eliminando o termo comum $(n-n_r)!$ que aparece nas duas frações (uma como numerador e outra como denominador) temos:

$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \dfrac{n!}{n_r! \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_{r-1}!}$, ou $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_{r-1}! \cdot n_r}$, assim a fórmula para o cálculo do número total de permutações com elementos repetidos é:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!},$$

como queríamos demonstrar.

□

No caso particular em que $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_r = 1$, temos o caso de permutação simples e portanto:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = n!.$$

Vamos agora ver dois exemplos. O primeiro exemplo será resolvido utilizando apenas o Princípio Fundamental da Contagem e o raciocínio lógico-matemático, enquanto que o segundo exemplo será resolvido de duas formas distintas, uma usando a fórmula de permutações com elementos repetidos e a outra sem fazer o uso da referida fórmula.

Exemplo 3: Quantos números de 7 algarismos existem nos quais comparecem uma só vez os algarismos 3, 4, 5 e quatro vezes o algarismo 9?

Solução: Temos que formar números com 7 algarismos e para isso podemos utilizar apenas 4 dígitos que são eles: 3, 4, 5 e 9. Devemos observar que o algarismo 9 deverá se repetir 4 vezes e os demais irão aparecer uma única vez.

Sem utilizar a fórmula podemos pensar na solução do problema da seguinte maneira: Temos que fazer a permutação de 7 elementos portanto temos 7! formas de fazermos isso. No entanto há 4 elementos que se repetem, e estes quando são permutados não altera o agrupamento formado, ou seja, cada um dos 7! agrupamentos pode ser escrito de 4! = 24 formas diferentes. Desta forma o resultado da permutação dos 7 elementos deve ser dividido por 4!, assim o resultado para o problema seria:

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

.

Exemplo 4: O Mississippi é um dos cinquenta estados que compõem os Estados Unidos da América. Quantos anagramas podemos formar com as letras que formam a palavra Mississippi?

Solução: A palavra Mississippi tem 11 letras, porém algumas delas se repetem, sendo assim um caso de permutação com elementos repetidos. A letra M aparece 1 vez apenas, a letra I aparece 4 vezes na palavra, a letra S também se repete 4 vezes e finalmente a letra P que aparece 2 vezes na palavra.

De acordo com a fórmula de permutação com elementos repetidos temos:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,nr} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} = P_{11}^{1,4,4,2} = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{1 \cdot 4! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1663200}{48} = 34650.$$

Resolvendo o problema sem usar a fórmula poderíamos ter o seguinte raciocínio: Temos 11 letras para permutar, portanto temos 11! formas diferentes de fazer isso. Observemos que algumas letras são iguais e devido a esse fato se elas forem permutadas entre si não altera a palavra formada. A letra I aparece 4 vezes e portanto podemos permutá-la 4! formas diferentes sem alterar a palavra formada, a letra S também se repete 4 vezes portanto temos 4! formas diferentes de permutá-la sem que a palavra formada se altere. Por fim a letra P aparece 2 vezes e portanto temos 2! formas diferentes de permutar essa letra sem que haja modificação na palavra formada. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $4! \cdot 4! \cdot 2!$ formas diferentes de permutar essas 3 letras simultaneamente sem que haja nenhuma alteração na palavra formada. Dessa forma podemos concluir que cada palavra formada pode ser escrita de $4! \cdot 4! \cdot 2!$ formas diferentes. Assim devemos dividir 11! pela quantidade de vezes que as permutações das 3 letras ocorrem mas não alteram a palavra, portanto o resultado para este problema é:

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39916800}{24 \cdot 24 \cdot 2} = \frac{39916800}{1152} = 34650.$$

4.5 ARRANJOS COM ELEMENTOS REPETIDOS

Definição 8 (*Arranjos com Elementos Repetidos*) *Seja M um conjunto com n elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Chamamos arranjo com repetição dos n elementos de M, tomados r a r, toda r-upla ordenada (sequência de tamanho r formada com elementos de M não necessariamente distintos.*

Vamos denotar por $(AR)_n$ o número de arranjos com repetições dos n elementos do conjunto M.

Inicialmente mostraremos um caso particular e em seguida vamos generalizar a fórmula que nos permita calcular o número de arranjos com elementos repetidos e também resolver problemas sem utilizar essa fórmula e sim apenas o Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo 1: Uma urna contém 4 bolas numeradas de 1 a 4. Uma bola é extraída da urna, observa-se o número que essa bola contém e em seguida ela é reposta na urna. Depois retira-se outra bola da mesma urna. Quantas são as possíveis sequências ordenadas de números?

Solução: As sequências ordenadas de números são: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), e (4,4). Portanto são 16 sequências ordenadas de números que podem ser formadas na situação descrita pelo enunciado do problema. Como temos uma quantidade pequena de pares não foi difícil de representar todos, no entanto essa tarefa torna-se muito difícil quando a quantidade é grande. Portanto devemos procurar meios menos trabalhoso de chegar a resposta.

Esse problema poderia ser respondido da seguinte maneira: Cada sequência é um par ordenado de números (x, y) onde x e y são elementos do conjunto $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Para escolher o primeiro elemento do par ordenado temos 4 possibilidades e para escolher o segundo elemento do par ordenado também temos outras 4 possibilidades. Dessa forma pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $4 \cdot 4 = 16$, que é exatamente o número de pares ordenados que podemos formar com os números 1, 2 , 3 e 4.

Este é apenas um caso particular de arranjo com elementos repetidos, vamos mostrar a partir do Princípio Fundamental da Contagem o caso geral.

Proposição 5 *Seja* $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *um conjunto finito com* n *elementos. O número de arranjos com repetição dos* n *elementos de* M *tomados* r *a* r *é dado por* :

$$(AR)_n = n^r$$

Demonstração: Cada arranjo com repetição é uma sequência de r elementos em que cada elemento pertence a M. Para ocupar a primeira posição na sequência teremos n possibilidades, como podemos repetir elementos para ocupar a segunda posição também teremos n possibilidades. Seguindo o mesmo raciocínio para ocupar a r-ésima posição também teremos n possibilidades pois para qualquer que seja a posição podemos repetir elementos. Dessa forma pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $(AR)_n = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ repetidos por r-parcelas, assim sendo:

$$(AR)_n = n^r,$$

como queríamos demonstrar.

□

Vamos mostrar um exemplo para a proposição 5, resolvendo-o de duas maneiras. A primeira solução será feita utilizando a fórmula já demonstrada e a segunda usando apenas o raciocínio lógico-matemático e o Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo 2: Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5?

Solução: Como o problema não fala em algarismos distintos no seu enunciado, então pode haver repetição. Temos portanto um caso de arranjo com elementos repetidos. Neste caso o nosso conjunto é $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e devemos tomar 3 a 3 todos os elementos de M.

De acordo com a fórmula que acabamos de demonstrar teremos:

$$(AR)_n = n^r = (AR)_n = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

Resolvendo o mesmo problema sem utilizar a fórmula basta que tenhamos o seguinte raciocínio: Para a ordem das centenas podemos escolher qualquer um dos 5 algarismos, para a ordem das dezenas também podemos escolher qualquer um dos 5 algarismos (visto que não há nenhuma restrição quanto a repetição de elementos) e finalmente para a ordem das unidades também podemos escolher qualquer um dos 5 algarismos. Pelo Princípio Fundamental da Contagem teremos:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125,$$

que é o número de 3 algarismos distintos ou não que podemos formar usando apenas oa dígitos 1, 2, 3, 4 e 5.

4.6 COMBINAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS OU COMBINAÇÕES COMPLETAS

Aqui temos um caso de agrupamento que raramente é visto ou sequer os livros de ensino médio, comumente usado nas escolas, o trazem. Trata-se de um tipo de contagem um pouco mais complexo de ser demonstrado através do Princípio Fundamental da Contagem. Porém partindo de um caso particular e seguindo o mesmo raciocínio podemos chegar a uma fórmula generalizada para este tipo de agrupamento. Vamos então iniciar o estudo sobre esse tipo de agrupamento. Inicialmente o definiremos.

Definição 9 (*Combinações com Elementos Repetidos*) *Seja M um conjunto com n*

elementos tal que $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Uma combinação completa é o número de subconjuntos de dimensão r que se podem formar de um conjunto de dimensão* n, *com possibilidade de existirem elementos repetidos, ou seja, é o número de modos de escolher* r *objetos distintos ou não entre os* n *elementos distintos dados.*

A representação de uma combinação completa será dada por $(CR)_n^r$.

Vamos começar com casos particulares até a generalização da fórmula.

Exemplo 1: Quantos subconjuntos de 3 elementos distintos ou não podemos formar com os elementos do conjunto $M = \{a, b, c, d\}$?

Solução: Observemos no enunciado que trata-se de subconjuntos e que portanto a ordem não importa, porém neste exemplo podemos ter elementos distintos ou não. Como a quantidade de elementos do conjunto M é pequena podemos escrever todos os subconjuntos pedidos, são eles então:

{a,a,a}, {a,a,b}, {a,a,c}, {a,a,d}, {a,b,c},
{a,b,d}, {a,c,d}, {a,b,b}, {a,c,c}, {a,d,d},
{b,b,b}, {b,c,d}, {b,b,c}, {b,b,d}, {b,c,c},
{b,d,d}, {c,c,c}, {c,c,d}, {c,d,d}, {d,d,d}.

Portanto temos 20 subconjuntos que podemos formar com os elementos do conjunto $M = \{a, b, c, d\}$ tomados 3 a 3 todos distintos ou não. Assim temos $(CR)_4^3 = 20$.

Vamos partir de um exemplo no qual sua solução nos levará a um caso particular de combinação com elementos repetidos para em seguida mostrarmos através do Princípio Fundamental da Contagem a generalização da fórmula que nos permite calcular o número de elementos de uma combinação completa.

Exemplo 2: De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que as oferece em 7 sabores diferentes?

Solução: Como já foi citado recentemente, raramente se ver em livros direcionados ao ensino médio, o conteúdo de Combinações completas. Dessa forma, com certeza, os alunos responderiam esse problema como uma Combinação simples, no entanto a pergunta não fala em 4 bolas de sorvete distintas mas apenas 4 bolas de sorvete. Dessa maneira não temos uma combinação simples e sim uma combinação com elementos repetidos, pois podemos repetir o sabor das bolas de sorvete. Isso significa que a resposta para esse problema não seria $C_{7,4} = 35$.

Assim, temos que a resposta correta para essa pergunta é $(CR)_7^4$, que é o número de combinações completas de classe 4 de 7 objetos. Portanto $(CR)_7^4$ é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 objetos distintos, podendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez. Vamos partir desse caso particular para generalizar uma fórmula que nos permita calcular o número de combinações completas.

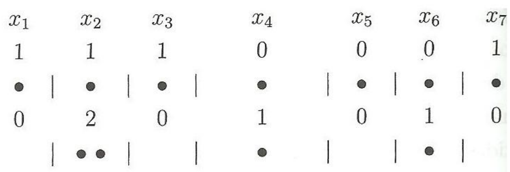
Sabemos que podemos escolher 4 bolas de sorvetes com sabores distintos ou não. Dessa forma vamos usar: x_1 para representar a quantidade de bolas de sorvete que vamos escolher como primeira opção, x_2 a quantidade de bolas de sorvete que podemos escolher como segunda opção, x_3 a quantidade de bolas de sorvete que vamos usar para representar a quantidade de bolas escolhidas na terceira opção e assim sucessivamente até chegarmos a x_7 como sendo a quantidade de bolas de sorvete escolhidas como a sétima opção. Como os x_n indicam a quantidade de bolas de sorvete que podemos escolher para cada n-posição, então cada x_n é um número inteiro não negativo. Determinar a solução desse problema consiste em determinar a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação linear

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4.$$

Para determinarmos de quantos modos podemos comprar 4 bolas de sorvete distintas ou não, dentre as 7 escolhidas, devemos obter o número de soluções da equação acima, que será o mesmo que calcular $(CR)_7^4$.

Para responder a pergunta inicialmente feita vamos ilustrar através da figura abaixo o esquema bola-traço (cada bola representa uma unidade no valor da incógnita e cada traço é usado para separar duas incógnitas). Observemos então a figura:

Figura 6: Esquema bola-traço



Fonte: Morgado [3]

Para formar uma representação devemos arrumar em fila 4 bolas (pois em cada solução o total de unidades é 4 já que devemos ter $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$) e o número de traços é 6 (Pois são usados 6 traços para separar as 7 incógnitas). Temos portanto uma permutação com elementos repetidos onde o número total de elementos n é igual a soma do número de traços (nesse caso é 6) com o número de bolas (nesse caso é 4) ou seja, temos $4 + 6 = 10$. Desta forma temos 10 elementos para permutarem entre si. Os 10 elementos podem se permutarem de 10! formas diferentes. Uma vez escolhida uma dessas permutações temos que o número de bolas podem permutar entre si de 4! formas diferentes sem alterar o agrupamento escolhido, e que o número de traços podem permutar 6! formas diferentes entre si também sem alterar o agrupamento escolhido. Desta forma pelo Princípio Fundamental da Contagem, tomado um agrupamento o número de formas diferentes para que ele seja representado é $4! \cdot 6!$. Assim a quantidade de modos possíveis para se comprar 4 bolas de sorvetes dentre as 7 oferecidas é: $\dfrac{10!}{4! \cdot 6} = C_{10,6}$.

$$\text{Logo: } (CR)_7^4 = C_{10,4} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Portanto podemos escolher de 210 maneiras diferentes 4 bolas com sabores distintos ou não dentre as 7 oferecidas.

Vamos agora generalizar a fórmula geral para o cálculo das combinações completas ou simplesmente combinações com elementos repetidos.

Proposição 6 *Seja M um conjunto finito com n elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. O número de combinações com elementos repetidos ou simplesmente combinações completas dos n elementos de M tomados r a r, com $r \leq n$, é dada por :*

$$(CR)_n^r = \frac{(r + n - 1)!}{r! \cdot (n - 1)!} = C_{(r+n-1),r}$$

Demonstração: Seguindo o mesmo raciocínio do caso particular acima temos que determinar a quantidade de soluções inteiras e não-negativas da seguinte equação: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = r$, onde r é um número inteiro não-negativo, e os x_i com i variando de 1 até n, representam números inteiros não-negativos. Dessa forma temos que permutar os r elementos e os $(n - 1)$ traços que separam esses elementos que representam as incógnitas da equação acima, logo o número de elementos a serem permutados é: $r+n-1$. Já tomada uma dessas decisões e como estamos trabalhando com subconjuntos, devemos observar que a ordem dos elementos não muda o subconjunto formado. Assim uma vez feita a escolha de uma das permutações, podemos escrever os r elementos de $r!$ formas diferentes sem modificar o agrupamento escolhido e podemos permutar também os $(n-1)$ traços de $(n-1)!$ maneiras diferentes sem também modificar o agrupamento escolhido, assim pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de permutações que podemos fazer com um subconjunto já escolhido é :

$$r! \cdot (n-1)!.$$

Desta forma cada (r + n - 1)! formas de escolhas podem ser escritas de $r! \cdot (n-1)!$ formas diferentes sem alterar o subconjunto formado, portanto o resultado (r + n - 1)! será dividido por $r! \cdot (n-1)!$. Assim temos que o número de combinações completas com os n elementos do conjunto M, tomados r a r é:

$$(CR)_n^r = \frac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!} = C_{(r+n-1),r}.$$

Portanto temos que: $(CR)_n^r = C_{(r+n-1),r}$, como queríamos demonstrar.

□

A seguir vamos exemplificar, mas sem utilizar a fórmula demonstrada na proposição para solucionar, mas apenas o Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo 3: De quantos modos podemos comprar 3 salgados em uma lanchonete que oferece 5 tipos de salgados?

Solução: Primeiramente devemos observar que a ordem em que os 3 sabores serão escolhidos não vai mudar a escolha. Temos portanto uma combinação. Segundo devemos observar que o problema não fala em seu enunciado em salgados distintos, neste caso podem ser distintos ou não.

Podemos resolver esse problema sem o uso da fórmula, usando apenas o Princípio Fundamental da Contagem e seguindo apenas o raciocínio para a dedução da fórmula. Temos que escolher 3 salgados distintos ou não dentre os 5 disponíveis. Temos que determinar a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$, onde todos os x_i com i variando de 1 até 5 são números inteiros não negativos. Logo temos 4 sinais separando as incógnitas, e os 3 tipos de salgados para permutar, ou seja, um total de 7 elementos para permutar o que podemos fazer de 7! formas diferentes. Observemos que, uma vez feita a escolha, o número de salgados pode permutar de 3! formas diferentes sem alterar o agrupamento formado e o número de sinais pode permutar de 4! formas diferentes sem também alterar o agrupamento formado. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, feita uma das 7! escolhas elas podem ordenarem-se de $4! \cdot 3!$ formas diferentes sem modificar a escolha já feita. Assim cada uma das escolhas das 7! permutações está sendo repetida $4! \cdot 3!$ vezes, portanto o resultado será dividido por $4! \cdot 3!$. Logo temos que:

$$(CR)_5^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = \frac{210}{6} = 35$$

formas diferentes de se escolher 3 salgados dentre os 5 disponíveis em uma lanchonete.
Exemplo 4: Quantas são as soluções inteiras da equação x + y + z = 5?
Solução: Vamos pensar da seguinte maneira: Suponhamos que tenhamos um dos valores iguais a 5 e os demais iguais a zero, portanto o conjunto $\{0, 0, 5\}$ é uma solução da equação acima. Se mudarmos a ordem dos elementos, por exemplo $\{0, 5, 0\}$ a solução continua a mesma, portanto temos uma combinação. Por outro lado temos apenas 3 incógnitas que podem ser variadas entre os valores de 1 a 5, inclusive repetindo valores como por exemplo o conjunto $\{1, 2, 2\}$ que é o mesmo que $\{2, 1, 2\}$, portanto temos uma combinação com elementos repetidos. São 5 unidades tomadas 3 a 3, com repetição ou não.

Sem usar a fórmula podemos pensar no problema da seguinte maneira: Temos um total de 5 unidades, pois $x+y+z = 5$. Temos 2 sinais de adição que separam as incógnitas, portanto temos uma total de 5 + 2 = 7 elementos a serem permutados. Portanto temos 7! formas diferentes de fazer essa permutação. Devemos observar que os sinais podem permutar 2! formas diferentes entre si sem alterar o agrupamento formado, da mesma forma o as 5 unidades podem permutar de 5! formas diferentes entre si sem também alterar o agrupamento. Uma vez escolhido um dos 7! agrupamentos possíveis, temos pelo Princípio Fundamental da Contagem $5! \cdot 2!$ formas diferentes de agrupá-los. Dessa maneira cada um dos $7!$ agrupamentos podem ser escritos de $5! \cdot 2!$. Dessa forma o resultado deve ser divido por $5! \cdot 2!$. Assim temos:

$$(CR)_3^5 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Portanto a equação x + y + z = 5 possui 21 soluções inteiras não negativas.

4.7 PERMUTAÇÃO CIRCULAR

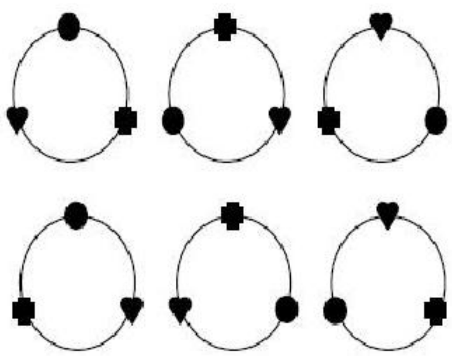
Definição 10 (*Permutações Circulares*) *Seja M um conjunto finito com n elementos, isto é,* $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Uma permutação circular de n objetos distintos, é toda arrumação desses objetos, em torno de um círculo, de modo que os objetos estejam dispostos em exatamente n lugares, igualmente espaçados.*

Vamos indicar o número total de permutações circulares de n objetos distintos por $(PC)_n$.

Definição 11 (*Permutações idênticas*) *Duas permutações circulares são ditas idênticas quando a posição relativa de cada objeto em relação aos demais é a mesma em ambas as permutações, ou seja, se uma das permutações sofrer uma rotação de um ângulo convenientemente determinado e seu sentido fizer com que ambas coincidam, diz-se que essas permutações são equivalentes.*

Para ilustrar permutações circulares idênticas vamos ver a figura que mostra três elementos distintos dispostos em um círculo.

Figura 7: Ilustração de permutações idênticas



Fonte: Morgado [3]

Observemos que na primeira linha, as três primeiras formas em que os elementos estão dispostos são idênticas por rotação. Observemos também que o mesmo ocorre na segunda linha. Desta forma $(PC)_3 = 2$.

É fácil perceber que há uma diferença entre permutações simples e permutações circulares, pois nas permutações simples importa os lugares que os objetos ocupam, enquanto nas permutações circulares o que importa é a posição relativa que os objetos ocupam entre si.

Partindo das definições que temos e do caso particular acima, vamos generalizar uma fórmula que nos permita calcular o número de permutações circulares.

Proposição 7 *Seja M um conjunto finito com n elementos, tal que, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de permutações circulares com todos os n elementos de M é dado por* :

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Demonstração: Para permutar os n elementos do conjunto M podemos fazer isso de n! formas diferentes (conforme visto em permutações simples - Proposição 3.1). Como temos uma permutação circular, o círculo terá n espaços para serem ocupados pelos n elementos. Uma vez escolhida qualquer uma das $n!$ permutações dos elementos de M podemos fazer com esta n rotações pelo círculo obtendo apenas permutações idênticas. Dessa forma cada uma das n! permutações pode ser colocada de n formas diferentes, assim temos:

$$n \cdot (PC)_n = n!, \text{daí } (PC)_n = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!.$$

Portanto $(PC)_n = (n-1)!$, como queríamos demonstrar.

□

Vamos mostrar dois exemplos, porém como nos casos anteriores não usaremos fórmula para resolver, somente o Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo 1: De quantas formas diferentes 6 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular?

Solução: A situação nos dá uma permutação circular de 6 elementos.

O problema pode ser resolvido da seguinte maneira sem recorremos as fórmulas: São 6 pessoas em torno de uma mesa circular. Portanto a primeira pessoa pode sentar-se em 6 lugares diferentes, a segunda pessoa em 5 lugares diferentes, a terceira pessoa em 4 lugares diferentes e assim sucessivamente até que a sexta e última pessoa só terá 1 opção para sentar-se à mesa. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas de eles se sentarem à mesa. Uma vez escolhida qualquer uma das 720 formas podemos fazer 6 rotações que iremos obter permutações idênticas, ou seja, cada uma das 720 escolhas está sendo multiplicada por 6. Desta forma o número de 6 pessoas sentarem-se numa mesa circular é:

$$\frac{720}{6} = 120.$$

Exemplo 2: Temos m meninos e m meninas. De quantas formas diferentes eles podem formar uma roda, de modo que os meninos e as meninas se alternem?

Solução: Esse problema pode ser resolvido sem o uso de qualquer fórmula apenas com o Princípio Fundamental da Contagem, para isso basta que tenhamos o seguinte raciocínio: São m meninos e m meninas. Para formar um casal vamos fixar sem perda de generalidade um menino qualquer dos m dispostos. Então a primeira maneira de formar um casal pode ser com qualquer uma das m meninas, o segundo casal com qualquer uma das $(m-1)$ meninas, o terceiro casal com qualquer uma das $(m-2)$ meninas e o último casal com a última menina. Pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de casais que podem ser formados é: $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot 1 = m!$. A roda a ser formada tem m espaços a serem ocupados. Os $m!$ casais podem ocupar a roda de $m!$ formas diferentes e podem fazer m rotações ordenadas sem mudar o agrupamento formado de acordo com a definição de permutações idênticas. Portanto temos uma permutação circular dos m! casais. Assim temos $m \cdot (PC)_m = m!$, então a quantidade de formas de eles se agruparem na roda é $\frac{m!}{m} = (m-1)!$. Assim temos $m!$ maneiras de formar os casais e $(m-1)!$ formas destes se agruparem na roda. Pelo Princípio Fundamental da Contagem o número total de m meninos e m meninas se agruparem na situação descrita pelo problema é:

$$m! \cdot (m-1)!.$$

5. RESOLVENDO PROBLEMAS DE CONTAGEM SEM O USO DE FÓRMULAS

A grande maioria dos livros de ensino médio trazem os problemas de agrupamentos de forma isolada. As fórmulas são "jogadas" ao acaso, sem nenhuma justifica e o Princípio Fundamental da Contagem que é a base de todas as fórmulas do ensino médio é pouco explorado. Da forma que a maioria dos livros de ensino médio tratam os problemas de contagem, facilita uma aprendizagem falsa ao mesmo tempo que dificulta uma verdadeira aprendizagem, pois inibe o raciocínio lógico matemático, ao mesmo tempo que obriga o aluno a decorar fórmulas.

O livro vem dividido em tópicos. O tópico que quase sempre é pouco explorado deveria ser o mais trabalhado que é o Princípio Fundamental da Contagem. Normalmente, costuma-se dizer que basta multiplicar as possibilidades, o que de fato não é uma mentira, mas devemos saber o que multiplicar e também quando devemos somar ao invés de multiplicar. Dessa forma quando estamos na seção do Princípio Fundamental da Contagem, todos os problemas são elaborados para serem resolvidos com esse método. Quando estamos na seção de arranjos simples todos os problemas são elaborados para resolvermos com a tradicional fórmula de arranjo simples. Quando estamos na parte de combinação simples os problemas são preparados para serem resolvidos com a fórmula destinada à esse tipo de agrupamento. Esse método deve ser estratégico para simular uma falsa aprendizagem, sem falar que há autores que não trazem todos os tipos de agrupamentos que deveriam ser vistos no ensino médio, como por exemplo, combinações completas ou combinações com elementos repetidos, arranjos com repetição e permutação circular.

A grande dúvida de alguns professores e principalmente muitos alunos é quando temos problemas envolvendo os vários tipos de agrupamento sem se referir a qual tipo de problema de contagem que está sendo trabalhado. Aí quase sempre surgem perguntas desse tipo: "É pra usar arranjo ou combinação?" ou "Pode repetir elementos ou não?" Perguntas iguais a essa são muito comuns, porém se usássemos apenas o Princípio Fundamental da Contagem para resolver os problemas de agrupamentos a primeira pergunta não se faria necessária. A questão de termos elementos repetidos ou não, vai depender muito da compreensão do enunciado do problema. A partir de uma boa leitura e uma boa compreensão é que saberemos a natureza do problema, se os elementos são repetidos ou não e como atacar o problema da melhor forma para que este seja solucionado corretamente.

Um problema de contagem pode ser resolvido por mais de uma maneira diferente usando-se apenas o Princípio Fundamental da Contagem, no entanto dependendo da forma pela qual atacamos o problema, podemos ter nossa tarefa facilitada ou dificultada. A verdade é que problemas de contagem necessitam sempre de muita atenção, praticidade e o uso dos métodos adequados, para não serem solucionados de maneira incorreta. Como disse o Professor Augusto César Morgado em uma das suas vídeo aulas: "Só há duas formas de resolver um problema de contagem de maneira errada, contando mais ou menos agrupamentos que o correto".

Dessa forma neste trabalho vamos resolver alguns problemas de contagem envolvendo os mais variados tipos de agrupamentos sem utilizar qualquer fórmula, mostrando assim que um bom raciocínio, uma boa compreensão do enunciado, a escolha correta de como atacar o problema e claro usando o Princípio Fundamental da Contagem (que é a base de todas as fórmulas conhecidas do ensino médio) são as ferramentas necessárias e suficientes para solucionar problemas de análise combinatória referentes à contagem. Assim sendo vamos escrever alguns problemas e logo abaixo suas respectivas soluções.

Problema 01: Um cesto contém 16 maçãs diferentes e 13 bananas diferentes. De quantas maneiras distintas Severino pode escolher uma maçã *ou* uma banana? E de quantas maneiras ele pode escolher uma maçã *e* uma banana?

Solução: Observemos que temos duas perguntas a responder no mesmo problema. A primeira pergunta é de quantos modos diferentes ele pode escolher uma banana ou uma maçã. Ele pode escolher uma maçã de 16 formas diferentes e pode escolher uma banana de 13 maneiras diferentes. Então ele pode escolher uma ou outra de $16 + 13 = 29$ formas diferentes.

A segunda pergunta é: De quantas maneiras ele pode escolher uma maçã e uma banana. Para escolher uma maçã ele pode fazer isso de 16 maneiras diferentes. Uma vez já tendo escolhido a maçã ele pode escolher uma banana de 13 formas diferentes. Então pelo Princípio Fundamental da Contagem, para escolher uma maçã e uma banana ele pode fazer isso de $16 \cdot 13 = 208$ maneiras diferentes.

Observação: É importante ler com atenção as perguntas, pois a interpretação pode mudar a resposta correta. Neste caso particular as perguntas são bem parecidas só diferenciam entre si pelos conectivos "*e*" e "*ou*".

Problema 02: Maria tem 7 livros diferentes e Alberto tem 9 livros diferentes. De quantas maneiras Maria e Alberto podem trocar 3 livros entre si?

Solução: Maria precisa escolher 3 livros dos 9 que Alberto tem e Alberto escolher 3 livros dentre os 7 que Alberto tem. Vamos dividir o problema em duas partes. Inicialmente vejamos de quantas formas Maria pode escolher os livros de Alberto e em seguida de quantas formas Alberto pode escolher os livros de Maria.

Primeira parte: Maria tem que escolher 3 livros dentre os 9 que Alberto possui. O primeiro livro ela pode escolher de 9 formas diferentes, o segundo livro de 8 formas diferentes e o terceiro livro de 7 formas. Pelo Princípio Fundamental da Contagem ela pode fazer isso de $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ formas diferentes. Observe que se Maria escolher os livros A, B e C, é a mesma coisa de escolher por exemplo os livros A, C e B. Portanto cada uma das escolhas pode ser escrita de 3! formas diferentes. Assim Maria pode escolher 3 livros de Alberto de $\frac{504}{6} = 84$ maneiras.

Segunda parte: Alberto tem que escolher 3 livros dentre os 7 que Maria possui. O primeiro livro ele pode escolher de 7 maneiras diferentes, o segundo de 6 maneiras diferentes e o terceiro de 5 maneiras diferentes. Então pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ formas diferentes. Entretanto uma vez feita a escolha, cada uma delas pode ser escrita de 3! formas diferentes, conforme visto no primeiro caso. Dessa forma o número de maneiras de Alberto escolher 3 dentre os 7 livros de Maria é: $\frac{210}{6} = 35$ maneiras.

Então pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de formas de Maria e Alberto trocarem 3 livros entre si é:

$$84 \cdot 35 = 2940.$$

Problema 03: Um coro possui 10 membros. De quantas maneiras se pode selecionar 3 grupos distintos de 6 membros cada, por ocasião para 3 eventos distintos?

Solução: Vamos inicialmente selecionar 6 membros dos 10 existentes. O primeiro membro pode ser escolhido de 10 maneiras distintas, o segundo membro de 9, o terceiro membro de 8, o quarto membro de 7 maneiras diferentes, o quinto membro de 6 maneiras e o sexto de 5 maneiras diferentes. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$. Entretanto escolhido os 6 membros eles podem permutarem entre si de 6! maneiras diferentes sem modificar o grupo, ou seja, cada grupo pode se organizar de 720 formas diferentes. Portanto o número de formas de escolher um grupo é: $\dfrac{151200}{720} = 210$. Assim o primeiro grupo pode ser escolhido de 210 formas diferentes, o segundo grupo de 209 formas diferentes e o terceiro grupo de 208 formas diferentes. Logo pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9129120$ para selecionar 3 grupos diferentes de 6 pessoas dentre as 10 existentes.

Problema 04: Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questões?

Solução: Para a primeira questão temos 5 alternativas, para a segunda questão também temos 5 alternativas e assim sucessivamente até a décima questão onde também temos 5 alternativas. Assim pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{10} = 9765625.$$

Problema 05: De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?

Solução: A primeira pessoa pode se sentar em qualquer uma das 5 cadeiras, a segunda pessoa pode se sentar em qualquer uma das outras 4 cadeiras que sobrarem e por fim a terceira pessoa pode se sentar em qualquer uma das 3 cadeiras que sobrarem.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ modos diferentes de 3 pessoas se sentarem em 5 cadeiras em fila.}$$

Problema 06: De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

Solução: Em cada banco deve sentar-se um casal. Dessa forma vamos determinar a quantidade de casais que podemos formar com 5 homens e 5 mulheres. Sem perda de generalidade vamos fixar um dos homens, este pode fazer um casal com qualquer uma das 5 mulheres, o segundo homem pode formar um casal com qualquer uma das outras 4 mulheres, o terceiro homem com qualquer uma das outras 3 mulheres, o quarto homem com qualquer uma das outras 2 mulheres e o quinto homem com apenas 1 mulher. Pelo Princípio Fundamental da Contagem podemos formar $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ casais diferentes.

Uma vez formado os casais o primeiro casal pode ocupar qualquer um dos 5 bancos, o segundo casal qualquer um dos outros 4 bancos, o terceiro casal qualquer um dos outros 3 bancos, o quarto casal qualquer um dos outros 2 bancos e o último casal tem apenas 1 banco para ocupar. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ maneiras diferentes dos casais ocuparem os bancos.

Entretanto o banco tem 2 lugares então cada casal pode ocupar um banco de 2 formas diferentes, ou seja, o primeiro banco pode ser ocupado de duas maneiras, o segundo banco também de 2 maneiras, repetindo-se até o quinto banco que pode ser ocupado também de 2 maneiras. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Dessa maneira pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$120 \cdot 120 \cdot 32 = 460800.$$

Problema 07: Quantos são os anagramas da palavra ESTRELADA?

Solução: Calcular o número de anagramas é o mesmo que calcular todas as trocas de posições possíveis das 9 letras que formam a palavra. Assim para a primeira posição teríamos 9 letras, para a segunda posição 8 letras e assim sucessivamente, até a nona posição onde teríamos 1 letra apenas. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$.

Entretanto há letras (elementos) que se repetem. A letra E se repete 2 vezes, e a letra A também se repete 2 vezes. Pelo Princípio Fundamental da Contagem essas letras podem mudar de lugar $2! \cdot 2!$ vezes sem alterar a palavra formada, ou seja, podemos escrever um anagrama de 4 formas sem alterar a palavra. Dessa forma o número de anagramas da palavra ESTRELADA é:

$$\frac{362880}{4} = 90720.$$

Problema 08: De quantos modos podemos formar uma mesa de buraco com 4 jogadores?

Solução: Os 4 jogadores ficarão em círculo na mesa. Dessa forma temos: o primeiro jogador pode ocupar qualquer uma das 4 posições, o segundo jogador pode ocupar cada uma das outras 3 posições restantes, o terceiro jogador pode ocupar qualquer uma das outras 2 posições restantes e o último jogador só pode ocupar 1 posição (a que restou). pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Entretanto, uma vez escolhida as posições de cada um eles podem girar ordenadamente sem que haja alteração no agrupamento formado (de acordo com a definição de permutações idênticas) e podem fazer isso de 4 formas, ou seja cada agrupamento escolhido pode ser disposto de 4 formas diferentes. Portanto cada agrupamento está sendo multiplicado por 4. Desta forma o número de formas diferentes que 4 jogadores pode sentarem em uma mesa de buraco é:

$$\frac{24}{4} = 6.$$

Problema 09: De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

Solução: Se pessoas do mesmo sexo não devem ficar juntas então devemos formar casais. então vamos resolver essa primeira parte. Sem perda de generalidade vamos fixar um menino, este pode formar par com qualquer uma das 5 meninas, o segundo menino pode formar par com qualquer uma das 4 meninas restantes, o terceiro menino pode formar par com qualquer uma das 3 meninas restantes, o quarto menino pode formar par com qualquer uma das 2 meninas restantes e o último menino pode formar par com a única menina que restou. Assim pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de casais que podem ser formados é: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Agora vamos supor que cada casal ocupe apenas um lugar na roda de ciranda. Assim o primeiro lugar pode ser ocupado por qualquer um dos 5 casais, o segundo lugar pode ser ocupado por qualquer um dos 4 casais, o terceiro lugar por qualquer um dos 3 casais, o quarto lugar por qualquer um dos 2 casais e o quinto lugar pelo último casal. Assim pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o número de lugares a serem ocupados pelos casais na roda de ciranda é: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Entretanto escolhida as posições, cada uma delas pode fazer 5 rotações ordenadas sem modificar a roda de ciranda, ou seja, cada escolha pode ser colocada de 5 formas diferentes. Assim o número de maneiras de dispormos os 5 casais na roda de ciranda é: $\frac{120}{5} = 24$.

Assim podemos formar 120 casais que podem ser dispostos em uma roda de ciranda de 24 maneiras diferentes, portanto pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de maneiras diferentes de formar uma roda de ciranda com 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas é:

$$120 \cdot 24 = 2880.$$

Problema 10: Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da equação $x + y + z = 7$?

Solução: Temos um total de 7 unidades, pois $x + y + z = 7$. Temos 2 sinais de adição que separam as incógnitas, portanto temos uma total de $7 + 2 = 9$ elementos a serem permutados. Portanto o primeiro espaço pode ser ocupado de 9 formas diferentes, o segundo de 8 formas diferentes e assim sucessivamente até que o nono espaço tenha apenas 1 forma para ser ocupada, assim pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$. Devemos observar que os sinais podem permutar $2!$ formas diferentes entre si sem alterar o agrupamento formado. Da mesma forma as 7 unidades podem permutar de $7!$ formas diferentes entre si sem também alterar o agrupamento. Uma vez escolhido um dos 362880 agrupamentos possíveis, temos pelo Princípio Fundamental da Contagem $7! \cdot 2!$ formas diferentes de agrupá-los. Dessa maneira cada um dos 362880 agrupamentos está sendo multiplicado por $7! \cdot 2!$.

Dessa forma o resultado deve ser divido por $7! \cdot 2!$, assim temos:

$$\frac{362880}{7! \cdot 2!} = \frac{362880}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{362880}{10080} = 36.$$

Portanto a equação $x + y + z = 7$, tem 36 soluções inteiras não negativas.

Problema 11: De quantas formas podemos responder a 12 perguntas de um questionário, cujas respostas para cada pergunta são: *sim* ou *não*?

Solução: Para responder a primeira questão temos 2 opções, *sim* ou *não*. Para responder a segunda questão também temos 2 opções *sim* ou *não*, e assim sucessivamente até respondermos a décima segunda questão a qual teremos também 2 opções, *sim* ou *não*. Dessa forma pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de formas diferentes de responder 12 questões com 2 opções cada uma é:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12} = 4096.$$

Problema 12: De quantas maneiras diferentes um professor poderá escolher um ou mais estudantes de um grupo de 6 estudantes?

Solução: Este problema requer um pouco mais de atenção, pois quando se fala "um ou mais", pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 alunos. Então vamos calcular cada caso isoladamente e em seguida somar os resultados. Aqui é um caso onde usaremos o princípio multiplicativo e o princípio aditivo para chegar a solução definitiva.

Para escolher 1 aluno apenas o professor tem 6 maneiras pois são 6 alunos.

Para escolher 2 alunos temos a seguinte situação: Para escolher o primeiro aluno o professor tem 6 possibilidades e para escolher o segundo aluno ele tem apenas 5 possibilidades. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $6 \cdot 5 = 30$. Entretanto escolhido os 2 alunos eles podem permutarem de 2! formas diferentes entre si, sem modificar a escolha feita pelo professor, portanto o número de escolhas está sendo multiplicado por 2. Dessa forma temos que o número de escolhas é: $\dfrac{30}{2} = 15$.

Para escolher 3 alunos temos a seguinte situação: O primeiro aluno pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes, o segundo aluno pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes e o terceiro aluno pode ser escolhido de 4 formas diferentes. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Entretanto uma vez escolhido um grupo de 3 alunos, eles podem se organizarem entre si de 3! formas diferentes, ou seja, cada escolha está sendo multiplicada por 6. Assim o número de formas de se formar um grupo com 3 alunos dentre os 6 existentes é: $\dfrac{120}{6} = 20$.

Para escolher 4 alunos temos a seguinte situação: O primeiro aluno pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes, o segundo aluno pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes, o terceiro alunos de 4 maneiras diferentes, e o quarto e último aluno de 3 formas diferentes. Assim pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. No entanto uma vez escolhido um grupo com 4 alunos eles podem se organizarem entre si de 4! formas diferentes, ou seja, cada grupo pode se organizar de 24 formas diferentes. Dessa forma o número maneiras de se escolher 4 alunos dentre 6 é: $\dfrac{360}{24} = 15$.

Para escolher 5 alunos temos a seguinte situação: O primeiro aluno pode ser escolhido de 6 formas diferentes, o segundo aluno pode ser escolhido de 5 formas diferentes, o terceiro aluno pode ser escolhido de 4 formas diferentes, o quarto aluno pode ser escolhido de 3 formas diferentes e o quinto aluno pode ser escolhido de apenas 2 formas diferentes. Assim pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$. Entretanto, escolhido o grupo de 5 alunos eles podem organizarem-se de 5! formas diferentes, ou seja, há 120 formas de um grupo de 5 aluno se organizar sem modificar o grupo formado. Assim o número de formas de se formar um grupo de 5 alunos entre os 6 existentes é: $\frac{720}{120} = 6$.

Finalmente para escolher um grupo de 6 alunos dentre os 6 existentes só tem 1 forma, visto que a forma como eles se organizam entre si não altera o grupo formado.

Assim contando todas as possibilidades (fazendo uso do Princípio aditivo) chegamos ao resultado final que é:

$$6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63.$$

Problema 13: Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 7, 8?

Solução: Os números devem ter 3 algarismos, portanto 3 ordens que são unidades, dezenas e centenas. Para ocupar a ordem das unidades dispomos de 5 algarismos, como pode haver repetição, para ocupar a ordem das dezenas temos também 5 algarismos e por fim para ocupar a ordem das centenas temos também 5 algarismos. Portanto pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

Problema 14: Temos um conjunto de 10 nomes e outro de 20 sobrenomes. Quantas pessoas podem receber um nome e um sobrenome com esses elementos?

Solução: Para escolhermos o nome temos 10 opções, para escolher o sobrenome temos 20 opções. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$10 \cdot 20 = 200.$$

Problema 15: Em um campeonato de futebol participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

Solução: Para chegar em primeiro lugar temos 20 times (qualquer 1 dos 20 pode chegar na primeira colocação), para chegar em segundo lugar temos 19 times e por fim para chegar em terceiro lugar temos 18 times. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

Problema 16: Em um torneio de dois turnos do qual participam seis times, quantos jogos são disputados?
Solução: Um único time vai enfrentar os outros 5 participantes 2 vezes (porque são 2 turnos). Como são 6 times teremos 3 jogos por rodada. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o número de jogos disputados será:

$$5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$$

Problema 17: Uma bandeira é formada de 7 listras, que devem ser pintadas de 3 cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?
Solução: A primeira listra pode ser pintada por qualquer uma das 3 cores disponíveis. A cor escolhida para a primeira listra não pode se repetir para a segunda, assim a segunda listra pode ser pintada de 2 cores diferentes. O mesmo ocorre com as demais listras, ou seja, a terceira listra de 2 cores diferentes, a quarta listra de 2 cores diferentes, a quinta listra de 2 cores diferentes, a sexta e a sétima listras também de 2 cores diferentes. Pelo Princípio Fundamental da Contagem a bandeira pode ser pintada de :

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192 \text{ formas diferentes.}$$

Problema 18: Qual é o número de funções injetoras definidas em $A = \{1, 2, 3\}$ com valores em $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$?
Solução: Para que uma função $f : A \to B$ seja injetora é necessário que cada elemento do conjunto B seja imagem de um único elemento do conjunto A. Dessa forma temos: O primeiro elemento do conjunto A pode ter 5 imagens no conjunto B, o segundo elemento do conjunto A poderá ter 4 imagens no conjunto B, e por fim o terceiro e último elemento do conjunto A poderá ter 3 imagens no conjunto B. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de Função injetoras de A em B, onde $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ é:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Problema 19: Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar?
Solução: Para que o número seja par ele deve terminar em 2, 4 ou 6. Assim para a ordem das unidades temos 3 possibilidades. Como deve ser algarismos distintos para a ordem das dezenas temos 5 possibilidades (visto que um algarismo já foi escolhido para a ordem das unidades), e para a ordem das centenas temos 4 possibilidades. Dessa forma pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60.$$

Problema 20: Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de 4 algarismos distintos. Dentre eles quantos são divisíveis por 5?
Solução: Com os dígitos que dispomos, a única forma do número ser divisível por 5 é se ele terminar com o dígito 5. Dessa forma para a ordem das unidades tem 1 possibilidade apenas, para a ordem das dezenas temos 5 possibilidades (visto que o algarismo 5 já foi escolhido para a ordem das unidades), para a ordem das centenas temos 4 possibilidades (pois devemos ter algarismos distintos), para a ordem das unidades de milhar temos 3 possibilidades apenas. Dessa forma pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Problema 21: Temos 5 meninos e 5 meninas. De quantas formas eles podem ficar em fila se meninos e meninas ficam em posições alternadas?
Solução: Como os meninos e as meninas devem ficar em posições alternadas, então devemos formar casais. Sem perda de generalidade vamos fixar o primeiro menino, este poderá formar par com qualquer uma das 5 meninas. O segundo menino poderá formar par com qualquer uma das 4 meninas. O terceiro menino poderá formar par com qualquer uma das outras 3 meninas. O quarto menino poderá formar par com qualquer uma das 2 meninas que sobraram. O quinto menino terá apenas 1 menina para formar par. Dessa forma pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o número de casais que podemos formar é: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Uma vez formado os casais, agora vamos calcular de quantas formas eles podem se organizarem em fila. O primeiro lugar da fila pode ser ocupado por qualquer um dos 5 casais, o segundo lugar

pode ser ocupado por qualquer um dos outros 4 casais, o terceiro lugar por qualquer um dos outros 3 casais restantes, o quarto lugar por qualquer um dos outros 2 casais restantes e o último lugar pelo casal que sobrou. Assim novamente pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. É importante perceber que a ordem dos casais pode ocorrer de 2 formas distintas (menino e menina ou menina e menino). Então pelo Princípio Fundamental da Contagem a resposta pra o problema acima é:

$$120 \cdot 120 \cdot 2 = 28800.$$

Problema 22: De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

Solução: Vamos supor que os lugares na roda sejam numerados de 1 a 12. Assim para ocupar o primeiro lugar temos 12 crianças, para ocupar o segundo lugar temos 11 crianças, para ocupar o terceiro lugar temos 10 crianças e assim sucessivamente até que para ocupar o décimo segundo lugar temos apenas 1 criança. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479001600$. Entretanto tomado uma formação qualquer podemos fazer 12 rotações sem modificar a roda, ou seja, cada formação distinta está sendo multiplicada por 12. Dessa forma o número de maneiras de 12 crianças formarem uma roda é:

$$\frac{479001600}{12} = 39916800.$$

Problema 23: Quantos são os anagramas da palavra PERNAMBUCO?

Solução: Temos 10 elementos distintos para ocupar 10 posições. Dessa forma a primeira posição pode ser ocupada por qualquer um dos 10 elementos, a segunda posição pode ser ocupada por qualquer um dos 9 elementos, a terceira posição pode ser ocupada por qualquer um dos 8 elementos e assim sucessivamente, até que a décima posição pode ser ocupada por apenas 1 elemento. Pelo Princípio Fundamental da Contagem o números de anagramas da palavra PERNAMBUCO é:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

Problema 24: Quantos números de 4 algarismos podemos escrever com os algarismos 2, 4, 6 e 8? E se forem 4 algarismos distintos?

Solução: O problema consta de duas partes. A primeira se refere a algarismos distintos ou não, enquanto que a segunda parte se refere apenas a algarismos distintos. Assim vamos resolver cada uma das partes.

A primeira parte podemos resolver da seguinte maneira: Temos que escrever números de 4 algarismos distintos ou não. Assim para a ordem das unidades temos 4 possibilidades, para a ordem das dezenas temos também 4 possibilidades (pois pode haver repetição de algarismos), para a ordem das centenas temos também 4 possibilidades e finalmente para a classe das unidades de milhar também temos 4 possibilidades. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256 \text{ números de 4 algarismos distintos ou não com os dígitos 2, 4, 6 e 8.}$$

A segunda parte podemos resolver da seguinte maneira: Temos que escrever números de 4 algarismos *distintos*. Assim para a ordem das unidades temos 4 possibilidades, para a ordem das dezenas apenas 3 possibilidades (visto que um algarismos já foi escolhido para a classe das unidades), para a ordem das centenas apenas 2 possibilidades e para a ordem das unidades de milhar uma única possibilidade. Dessa forma pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ números distintos com os algarismos 2, 4, 6 e 8.}$$

Problema 25: Quantos são os anagramas da palavra ARARAQUARA?

Solução: A palavra consta de 10 letras. O que devemos é fazer todas as trocas possíveis entre as letras da palavra. Dessa forma para ocupar a primeira posição temos 10 letras, para ocupar a segunda posição temos 9 letras, para a terceira posição apenas 8 letras e assim sucessivamente até que para a décima posição vamos ter apenas 1 letra. Logo pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.

Devemos observar que algumas letras (elementos) se repetem, que são elas: a letra A se repete 5 vezes e a letra R que se repete 3 vezes. Assim podemos mudar a letra A de posição $5!$ vezes que a palavra não se altera. Da mesma forma podemos mudar a letra R $3!$ vezes de lugar que a palavra não se altera. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem podemos mudar de lugar simultaneamente as letras A e R $5! \cdot 3!$ vezes sem modificar a palavra. Dessa forma escolhido um anagrama qualquer, ele pode ser escrito de $5! \cdot 3!$ formas diferentes. Dessa forma o número de anagramas da palavra

ARARAQUARA é:

$$\frac{3628800}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3628800}{720} = 5040.$$

Problema 26: Uma associação tem uma diretoria formada por 10 pessoas: 6 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras podemos formar uma comissão dessa diretoria que tenha 3 homens e 2 mulheres?

Solução: Vamos dividir o problema em duas partes. Primeira parte escolher os 3 homens dentre os 6 existentes. Segunda parte escolher as 2 mulheres dentre as 4 existentes.

Para solucionar a primeira parte temos o seguinte: São 6 homens para escolher 3. O primeiro homem pode ser escolhido de 6 formas diferentes, o segundo homem de 5 formas diferentes e o terceiro homem de 4 formas diferentes. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Entretanto escolhido um grupo de 3 homens eles podem permutarem entre si de 3! formas sem modificar o grupo, ou seja, cada grupo pode ser arrumado de 6 formas diferentes. Portanto o número de formas que podemos escolher os 3 homens dentre os 6 existentes é: $\frac{120}{6} = 20$.

A segunda parte deve ser solucionada da seguinte maneira: São 4 mulheres para escolhermos 2. Assim a primeira mulher pode ser escolhida de 4 formas diferentes e a segunda mulher de 3 formas diferentes. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $4 \cdot 3 = 12$. Devemos observar que uma vez escolhida uma comissão com 2 mulheres elas podem se organizar de 2 formas diferentes entre si, ou seja cada comissão escolhida pode ser escrita de 2 formas diferentes. Assim o número de formas que podemos escolher 2 mulheres dentre as 4 existentes é: $\frac{12}{2} = 6$.

Assim temos 20 maneiras de selecionar um grupo de 3 homens dentre os 6 existentes e 6 maneiras de selecionar 2 mulheres dentre as 4 existentes, logo pelo Princípio Fundamental da Contagem podemos formar:

$$20 \cdot 6 = 120 \text{ comissões diferentes nas condições descritas acima.}$$

Problema 27: Existem 10 jogadores de futsal, entre eles João, que por sinal é o único que joga como goleiro. Nessas condições, quantos times de 5 pessoas podem ser escalados?

Solução: Temos 10 jogadores para escolher 5. Entretanto João deve está presente em qualquer uma das possíveis formações. Assim restam 9 jogadores para ocuparem 4 vagas. Assim sendo, a primeira vaga pode ser ocupada por 9 jogadores, a segunda vaga por 8 jogadores, a terceira vaga por 7 jogadores e a quarta e última vaga por 6 jogadores. Dessa forma pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6 = 3024$. Devemos observar que uma vez escolhido os 4 jogadores eles podem se organizarem de 4! formas diferentes sem modificar o quarteto, ou seja, cada formação com 4 jogadores pode ser escrita de 24 formas diferentes. Assim o número de formas de escolher 4 jogadores dentre 9 possíveis é:

$$\frac{3024}{24} = 126.$$ Portanto pode ser escalado 126 times diferentes.

Problema 28: A diretoria de uma firma é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses. Quantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podem ser formadas?

Solução: Vamos dividir a solução deste problema em duas partes. Primeiro vamos calcular a quantidade de comissões que podemos formar com os brasileiros e depois vamos calcular a quantidade de comissões que podemos formar com os japoneses.

A primeira parte pode ser interpretada da seguinte maneira: Devemos escolher 3 brasileiros dentre os 7 existentes. O primeiro brasileiro pode ser escolhido de 7 formas diferentes, o segundo brasileiro de 6 formas diferentes e o terceiro de 5 formas diferentes. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Entretanto escolhido uma comissão com 3 brasileiros eles podem se organizar de 3! formas diferentes, ou seja, cada um dos possíveis grupos pode se organizar de 6 formas diferentes. Assim o número de comissões envolvendo os brasileiros é: $\frac{210}{6} = 35$.

Na segunda parte temos que escolher 3 dentre os 4 japoneses. Dessa forma o primeiro japonês pode ser escolhido de 4 formas diferentes, o segundo japonês de 3 formas diferentes e o terceiro de apenas 2 formas diferentes. Assim pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Devemos observar que uma vez escolhido os 3 japoneses eles podem se agruparem entre si de 3! formas diferentes, ou seja, cada comissão pode ser escrita de 6 formas diferentes. Dessa forma o número de comissões envolvendo os japoneses é: $\frac{24}{6} = 4$.

Portanto com os 7 brasileiros podemos formar 35 comissões contendo 3 deles e com os 4 japoneses podemos formar 4 comissões contendo 3 deles. pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$35 \cdot 4 = 140.$$

Problema 29: Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 3$?
Solução: Temos 3 sinais (de adição) e 3 unidades, num total de 6 elementos para permutarem entre si. Desta forma o primeiro espaço pode ser ocupado por qualquer um dos 6 elementos, o segundo espaço por qualquer um dos 5 elementos e assim sucessivamente, até que o sexto espaço só poderá ser ocupado por 1 único elemento. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Devemos observar que os 3 sinais podem permutarem entre si 3! formas diferentes que não muda o agrupamento formado, da mesma forma as 3 unidades podem permutar 3! formas diferentes entre si que não muda o agrupamento. Assim pelo Princípio Fundamental da contagem, cada um dos 3 sinais e cada uma das 3 unidades podem permutarem simultaneamente $3! \cdot 3!$ formas diferentes sem alterar o agrupamento, ou seja cada um dos 720 agrupamentos podem ser escritos de 36 formas diferentes $(3! \cdot 3!)$. Portanto o número de soluções é:

$$\frac{720}{36} = 20.$$

Problema 30: De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma loja onde há 5 tipos de refrigerantes?
Solução: Chamando um refrigerante de x, outro de y e o outro de z, precisamos determinar a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação:

$$x + y + z = 5.$$

Temos 2 sinais (de adição) e 5 unidades, num total de 7 elementos para permutarem entre si. Desta forma o primeiro espaço pode ser ocupado por qualquer um dos 7 elementos, o segundo espaço por qualquer um dos 6 elementos e assim sucessivamente, até que o sétimo espaço só poderá ser ocupado por 1 único elemento. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. Devemos observar que os 2 sinais podem permutarem entre si 2! formas diferentes que não muda o agrupamento formado, da mesma forma as 5 unidades podem permutar 5! formas diferentes entre si que não muda o agrupamento. Assim pelo Princípio Fundamental da contagem, cada um dos 2 sinais e cada uma das 5 unidades podem permutarem simultaneamente $2! \cdot 5!$ formas diferentes sem alterar o agrupamento, ou seja cada um dos 5040 agrupamentos podem ser escritos de 240 formas diferentes $(2! \cdot 5!)$. Portanto o número de soluções é:

$$\frac{5040}{240} = 21.$$

Portanto podemos comprar de 21 formas diferentes 3 refrigerantes (distintos ou não) dentre os 5 disponíveis por uma loja.

6. CONCLUSÃO

Dessa forma, mostramos que é possível resolver problemas envolvendo variados tipos de agrupamentos vistos no ensino médio sem utilizar qualquer uma das fórmulas que nos são repassadas nessa modalidade de ensino.

Vimos também que as principais fórmulas da análise combinatória vistas no ensino médio, utilizadas para trabalhar com os problemas de contagem são consequências diretas do Princípio Fundamental da Contagem. Sendo assim, um bom entendimento e uma boa engenhosidade na construção da solução do problema, dispensa o uso das tradicionais fórmulas.

Assim estaremos dando importância ao raciocínio lógico-matemático e tirando o protagonismo que é dado as fórmulas que os estudantes na maioria das vezes precisam decorar.

É importante ressaltar também que questões de contagem são muito utilizadas como problemas de raciocínio lógico em concursos, além de serem cobradas em avaliações externas tais como: o SPAECE que é o caso aqui no estado do Ceará, e o ENEM que é hoje a grande porta de entrada para o Ensino Superior tanto em universidades públicas (caso do SISU), como em universidades privadas (caso do PROUNI).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, Carl Boyer. **História da matemática,** 3ª edição. São Paulo: Blucher, 2010.

[2] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar,** Volume 5, 6ª edição, 2ª reimpressão. São Paulo: Atual, 1993.

[3] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade,** 9ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[4] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática,** Volume 3, 1ª edição. São Paulo: Ática, 2006.

[5] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar.**A Matemática do Ensino Médio,** Volume 2, 6ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] SANTOS, José Plínio de Oliveira; ESTRADA, Eduardo Luís. **Problemas Resolvidos de Combinatória**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2007.

[7] HEFEZ, Abramo. **Apostila Indução Matemática.** Niterói: OBMEP, 2007.