PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática

OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS

Carlos Luiz da Silva Brener

Rio de Janeiro
2013

Carlos Luiz da Silva Brener

OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS

Dissertação apresentada pelo aluno Carlos Luiz da Silva Brener, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, junto ao Programa PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática / Instituto de Matemática Pura e Aplicada, sob a orientação do Professor Doutor Elon Lages Lima.

Rio de Janeiro, 09 de abril de 2013.

A minha mãe e pai (*in memoriam*), que sempre me apoiaram em todos os momentos.

Aos meus filhos que souberam compreender os momentos de ausência nos encontros da família.

Ao meu orientador que me recebeu com uma humildade e paciência que jamais vi em toda a minha vida.

Ao amor da minha vida Ana Paula Leal Brener. Um dos seres humanos mais puros que já conheci e que esteve ao meu lado com palavras de incentivo em todos os momentos.

Agradecimentos

Ao orientador Professor Doutor Elon Lages Lima, que através do seu conhecimento vasto e da simplicidade das suas exposições, me ajudou a encaminhar as ideias e sem a sua paciência e compreensão eu jamais concluiria este trabalho.

A Carolina Celano Lima, esposa do professor Elon Lages Lima, que cedeu parte do seu tempo para me ajudar a encaminhar as minhas observações.

Aos Professores Paulo Cezar P. Carvalho e Ralph Costa Teixeira pelas sugestões na execução do trabalho.

Aos meus amigos João Carlos Cataldo, João Jorge F. Chaves, Armanda Salgado e Edney Dantas que me auxiliaram na busca pelas informações mais pertinentes do meu trabalho.

Aos amigos de turma, todos importantes nesta jornada.

Aos professores e monitores que nos acompanharam.

Aos amigos professores Salvador, Linhares e Armando que sempre contribuíram para o meu aprendizado.

Resumo

O objetivo principal do trabalho é sugerir uma sequência didática no estudo da função logarítmica sob a forma geométrica através da utilização de objetos de aprendizagem com o Geogebra.

Palavras Chaves: Logaritmos, Exponenciais, objetos de aprendizagem e ensino da matemática.

ABSTRACT

The goal of this work of course conclusion is to suggest an instructional sequence for the study of the logarithmic function in the geometric form through the use of learning objects introduced with Geogebra.

Key words: Logarithms, Exponential, learning objects , mathematics education.

Índice

Introdução

"(...)Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional".

Fonte: PCN

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf

Acesso em 10 de fevereiro de 2013

A abordagem de um determinado estudo matemático baseia-se fundamentalmente em três etapas: conceituação, manipulações e aplicações. A conceituação é o conjunto de fundamentações lógicas e estruturadas, isto é, o estabelecimento da teoria utilizada para definir o objeto matemático em questão; as manipulações são representadas pelo conjunto de atividades de natureza algébrica ou geométrica, cujo objetivo é exercitar o que foi definido. As aplicações, como o próprio nome já diz, consistem na aplicação do que foi definido, e devem em situações reais, estimular ou justificar o porquê de se estudar determinado assunto, para tal é necessário dominar as duas anteriores.

As recentes mudanças curriculares no ensino médio revelam a importância dos estudos matemáticos na formação não somente daqueles que buscam atividades profissionais que têm ligação direta com a matemática, como também na formação plena do cidadão. Os estudos de logaritmos e exponenciais têm um lugar especial nessa formação, uma vez que a formação plena do cidadão demanda um conhecimento no campo da Ciência. Porém é observado que esse estudo foi "compartimentalizado" ao longo dos anos, e com o advento das calculadoras, a perda de interesse nos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético foi inevitável. Sendo assim, desenvolver o estudo de logaritmos na forma geométrica é significativo e permite ao aluno elaborar as respostas adequadas às questões modernas, contribuindo para o desenvolvimento mais amplo de suas capacidades de raciocínio, de visualização e de análise crítica.

> *"Os logaritmos foram criados como instrumentos para tornar mais simples cálculos aritméticos complicados. Posteriormente verificou-se que a importância dos logarítmos na Matemática e nas Ciências em geral era bem maior do que se pensava. Com efeito, diversos fatos matemáticos, bem como vários fenômenos naturais e até mesmo sociais, podem ser expressos quantitativamente por meio dos logaritmos".*
> **Lima, Elon Lages, Fundamentos da Matemática Elementar, Logaritmos 1973**

O objetivo principal do trabalho é sugerir uma sequência didática no estudo da função logarítmica sob a forma geométrica e consequentemente da sua inversa mediante a utilização de objetos de aprendizagem com o Geogebra. A abordagem geométrica não só proporciona um modo elegante de chegar às propriedades dos logaritmos como também ajuda o aluno a compreender, efetuar e controlar os processos matemáticos envolvidos na conceituação, manipulação e aplicação do estudo proposto. É fundamental salientar que a utilização da ferramenta computacional não substitui o rigor necessário a validação dos fatos matemáticos.

Esse trabalho foi aplicado em uma turma de ensino médio na revisão do assunto logaritmos e entremeia conceitos de Geometria e Álgebra com o suporte de material [1] digital, que denomino de "Objetos de aprendizagem". Os objetos de aprendizagem disponíveis foram construídos com o Geogebra. Fica como sugestão que as construções possam ser feitas também pelos alunos, pois particularmente houve um ganho significativo na compreensão do estudo proposto quando os alunos manipularam as construções[2].

O texto está escrito de acordo com os conteúdos do ensino básico e com uma linguagem apropriada e de acordo com o rigor necessário a essa etapa escolar.

[1] Todas as construções utilizadas no trabalho estão disponíveis

[2] Consideramos que tanto os alunos quanto o professores dominam os recursos básicos do Geogebra.

Capítulo 1
Análise qualitativa de seis livros de ensino médio

A título de observação, fiz uma breve análise de seis livros didáticos de ensino médio nos capítulos de funções logarítmicas e exponenciais. Nos livros pesquisados foi observado que o foco do estudo de logaritmos não só carrega uma quantidade excessiva de manipulações, em detrimento da conceituação, como também explora aplicações limitadas ou fora do contexto real. Alia-se a isso o fato de que na maioria deles a Função Exponencial e a Função Logaritmica são apresentadas dissociadamente, além de não existir qualquer referência sobre uma delas ser o inverso da outra. Oito ítens foram observados e estão descritos a seguir:

C1: Apresenta as funções exponencial e logarítmica no mesmo estudo.
C2: Apresenta uma das funções como a inversa da outra
C3: Apresenta a definição de logaritmo geometricamente
C4: Caracteriza a função exponencial ou a logarítmica
C5: Motiva o estudo com aplicações
C6: Justifica as propriedades formais da exponenciação
C7: Apresenta atividades que envolvam o recurso computacional
C8: Estudo de logaritmos e de função logarítmica em capítulos diferentes.

A marcação com um (x) indica que o ítem foi encontrado no livro.

Livro	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Matemática Contexto e Aplicaçoes Dante, Luis Roberto Ed.Ática , 2010		x		x	x	x		x
Matemática Temas e Metas Machado, Antonio dos Santos Atual, 1988								x
Matemática Fundamental – Uma nova abordagem.Giovanni, Jose Ruy: FTD, 2007								x
Matemática Ensino Médio Smole, Katia Cristina Stocco Ed.Saraiva, 2006		x			X			x
Matemática Ciências e Aplicações Iezzi, Gelson e outros. Atual (2008)					x			x
Matemática Paiva, Manoel Rodrigues Moderna, 2011		x	X*		x			x

* Há uma parte do capítulo reservada ao cálculo do logaritmo natural definido geometricamente, inclusive o autor identifica o logaritmo natural como logaritmo neperiano.

Os livros cujas edições foram revistas recentemente, normalmente apresentam aplicações, porém são limitadas aos estudos de juros e crescimento populacional. Apenas um livro apresentou de forma coerente as propriedades formais da exponenciação e nenhum livro utilizou o recurso computacional como auxílio no cálculo de logaritmos em suas atividades. O único livro que fez referência ao estudo de logaritmos utilizando a abordagem geométrica, o fez a título de observação quando da abordagem dos logaritmos naturais.

Capítulo 2

Introdução ao estudo de funções através da área sob curvas

Considere no plano um sistema de coordenadas cartesianas. Cada ponto no plano ficará caracterizado por um par ordenado (x,y) de números reais, x sendo a abscissa e y a ordenada. Quando nos referirmos ao ponto de abscissa x e de ordenada y escreveremos simplesmente o ponto (x,y).

Atividade 1: Seja o retângulo limitado pelo eixo das abscissas, pela reta $y = 3$ e pelas retas verticais $x = 1$ e $x = 3$, representado na figura 1. Esse retângulo tem base igual a 2 e altura igual a 3, logo tem área igual 6.

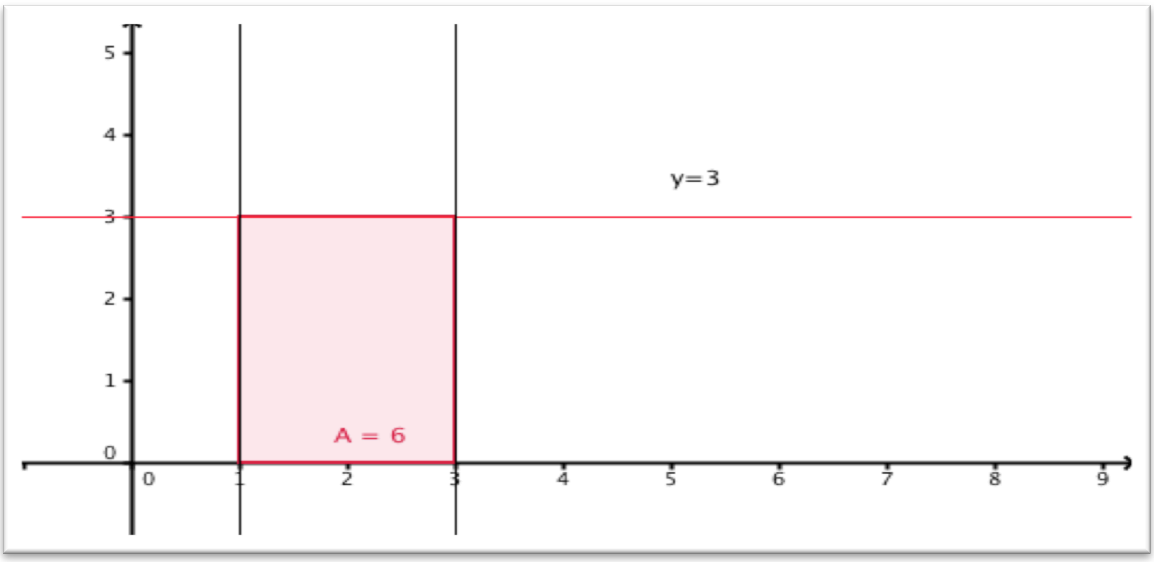


Figura 1

Atividade 2: Considere o retângulo limitado pelo eixo das abscissas, pela reta $y = 3$ e pelas retas verticais levantadas nos pontos de abscissa 1 e x (variável livre), representado na figura 2. Seja A a área desse retângulo, então variando x livremente no conjunto dos números reais, os valores de A dependem dos valores de x. Antes de determinar a lei de correspondência entre a área e os valores de x, é interessante motivar um estudo sobre o tipo de função que representa essa correspondência, tendo em vista que o aluno já foi apresentado à função afim em outra oportunidade. Além disso é importante, durante a atividade, levantar algumas questões[3] tais como:

i) Para todo valor real de x há uma área correspondente? A área é única?

ii) Dado qualquer número real não negativo, existe uma medida de x tal que a área do retângulo seja numericamente igual a esse número real?

iii) Para dois valores diferentes de x, as áreas correspondentes são diferentes? E para duas áreas diferentes os valores de x são diferentes?

iv) Se aumentarmos continuamente o valor de x a área aumenta continuamente?

v) Como a área varia de acordo com os incrementos dados a x?

Resumindo, seja A a área do retângulo limitado pelo eixo das abscissas, pela reta $y = 3$ e pelas retas verticais levantadas nos pontos de abscissa 1 e x (variável livre). A expressão $3(x – 1)$ assume valores iguais a A para $x > 1$, igual a zero para $x =1$ e igual a $– A$ para $x < 1$. O retângulo, cuja área é igual a A, é utilizado para definir uma relação de dependência entre x e y expressa por[4] $Y = 3(x - 1)$ que é uma função afim de reais em reais.

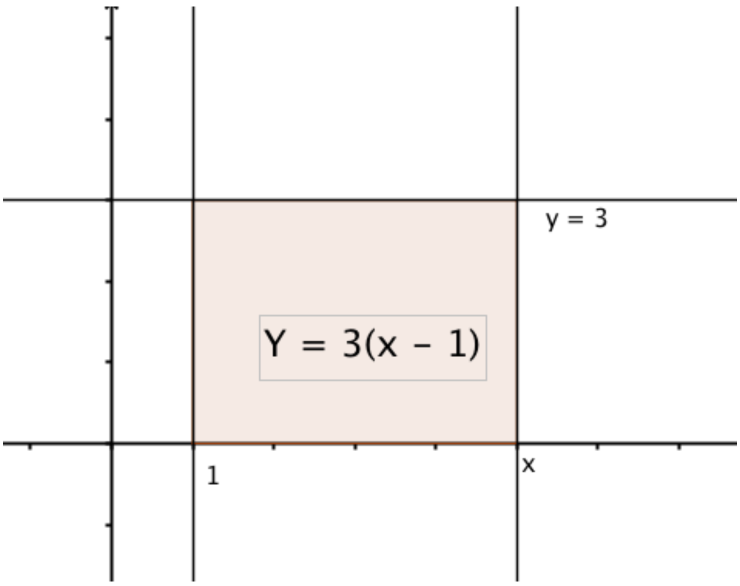


Figura 2

[3] As respostas corretas tem por objetivo sugerir e determinar que o modelo matemático é uma função afim para determinados intervalos do domínio, como por exemplo para $x > 1$. De fato, o acréscimo $Y(x + h) – Y (x)$ depende apenas de h, mas não de x.

[4] Sempre chamaremos a função que estamos obtendo a partir do gráfico de Y, para evitar confusões com a primeira função dada, nesse caso y=3.

Resumindo:

Y = 3(x – 1) = A, para x > 1;

Y = 3(x – 1) = 0, para x = 1;

Y = 3(x – 1) = – A, para x < 1.

A importância da atividade da figura 2 é ficar claro que a partir da área do retângulo, estamos definindo uma função, portanto é muito importante realçar que a expressão Y = 3x – 3 assume valores iguais a área do retângulo , zero e o negativo da área do retângulo, para determinados valores de x. A utilização da reta vertical x = 1 facilitará, mais tarde, a definição da função logarítmica.

O gráfico da função Y = 3x – 3, construído no Geogebra, está representado na figura 3.

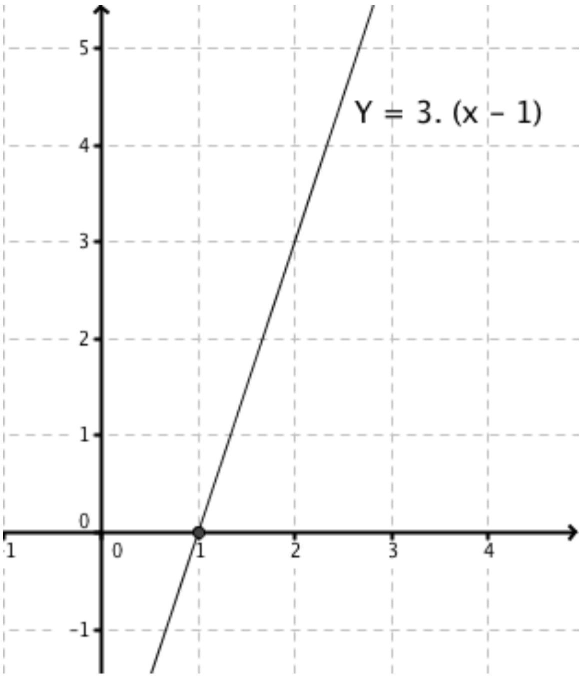


Figura 3

De maneira geral, dados k e t reais, k ≥ 0, a função f(x) = kx – kt está definida. Para tal, utilizamos o retângulo limitado pela reta horizontal y = k, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais levantadas em (t,0) e no ponto (x,0), como representados na figura 4.

Resumindo:

Y = k(x – t) = A, para x > t

Y = k(x – t) = 0, para x = t

Y = k(x – t) = – A, para x < t

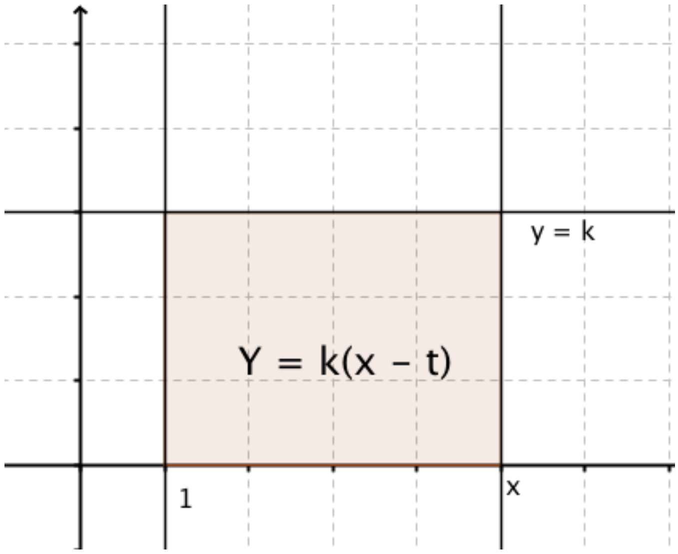


Figura 4

2.1. Cálculo da área sob a reta $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Seja A a área do trapézio limitado pelo eixo das abscissas, pela reta y = 3x + 5 e pelas retas verticais levantadas em (1,0) e (x,0), representado na figura 5. Por simplicidade, somente os valores de x no intervalo $[0,+\infty[$ serão considerados. Assim a expressão $\frac{(3x+13)(x-1)}{2}$ assume o valor igual a A para x > 1, zero para x = 1 e – A para $0 \leq x < 1$. Semelhantemente ao que foi feito anteriormente, define-se a função $Y = \frac{(3x+13)(x-1)}{2}$ utilizando-se a área do trapézio hachurado, isto é, utilizamos o trapézio (Figura 5) para estabelecermos uma correspondência entre x e Y que nesse caso é uma função quadrática.

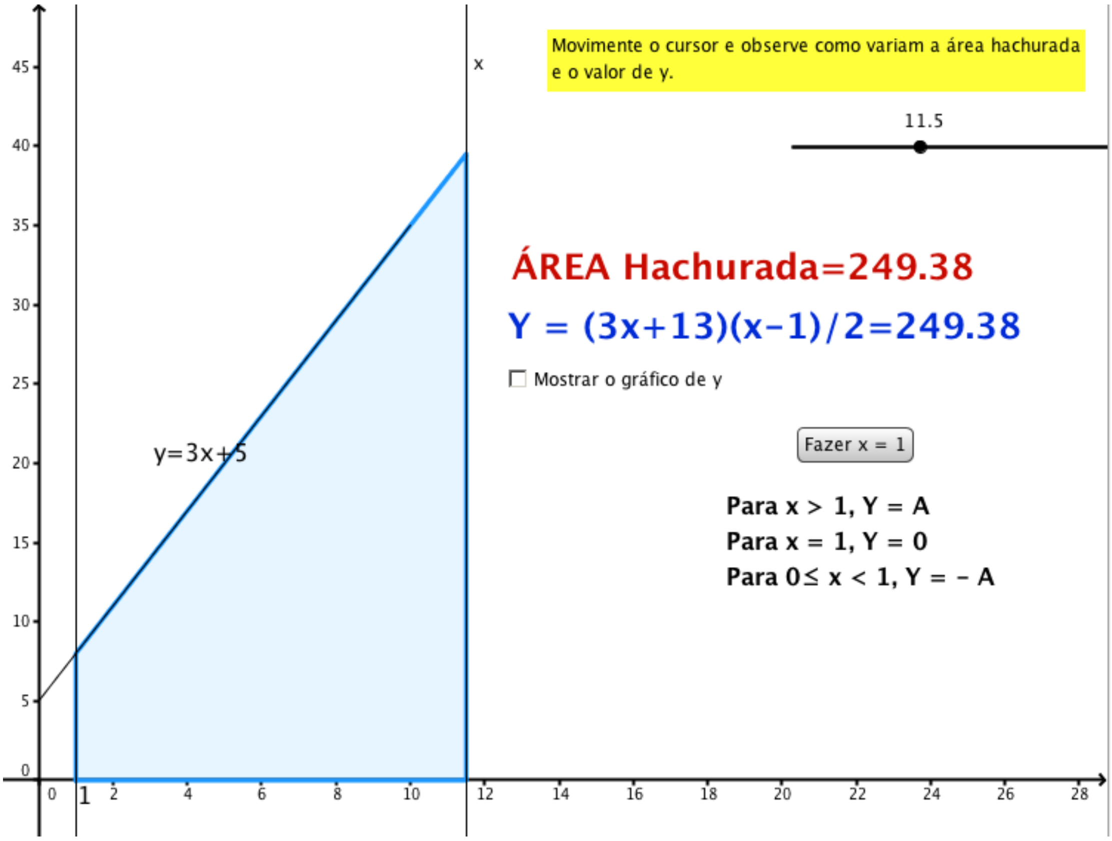


Figura 5

Então:

$Y = A$, para $x > 1$

$Y = 0$, para $x = 1$

$Y = -A$, para $0 \leq x < 1$

A seguir o gráfico da função[5] definida.

---

[5] É importante que o aluno, após a definição da função quadrática, construa o gráfico da função definida, pois nas turmas em que esta sequência didática foi aplicada, foi comum alguns alunos confundirem o gráfico da reta y = 3x + 5 com o gráfico da função Y, que deduzimos a partir da área sob a reta.

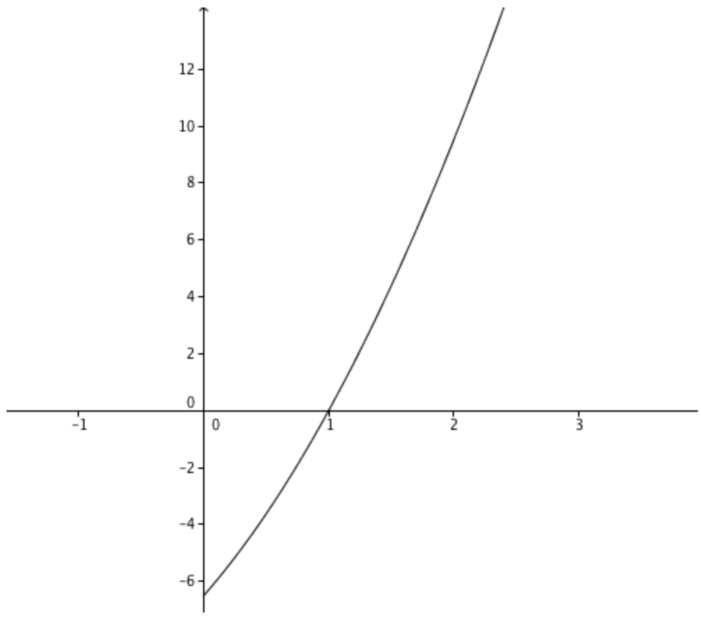


Figura 6

Até aqui, utilizou-se a área sob retas; em uma delas uma função afim foi definida e em outra definimos uma função quadrática. Estas funcões já foram apresentadas aos alunos e muito provavelmente alguns perguntarão se é possível definir outras funções a partir da ideia trabalhada, isto é, se outras funções podem ser obtidas por considerações a respeito do cálculo das áreas sob outras curvas. Algumas destas funções são novas ou pouco conhecidas dos alunos.

Os cálculos de áreas dos polígonos que estão sob retas são bem conhecidos no ensino médio, mas o que fazer para introduzir, no ensino médio, atividades como a do cálculo da área sob uma parábola ou hipérbole? As respostas a estas e outras questões serão trabalhadas nos próximos capítulos.

Capítulo 3

3.1 Definição de área

Atualmente a facilidade de acesso aos recursos tecnológicos como calculadoras científicas e softwares de geometria dinâmica contribui com a abordagem de diversos estudos em matemática, tais como o cálculo da área sob uma curva em um intervalo dado. Além do recurso tecnológico, é fundamental que o estudante seja apresentado à definição geral de área, pois esse estudo será importante não somente para o cálculo da área sob uma faixa de hipérbole como também para compreender e criticar os resultados do cálculo de áreas, apresentados por um software.

O estudo definitivo sobre áreas é feito através do Cálculo Infinitesimal, que atualmente está fora do currículo do ensino médio, todavia merece atenção destacada devido às diversas aplicações que envolvem áreas, inclusive em estudos mais avançados que se baseiam no tratamento elementar dessa grandeza. No livro de Introdução a História da Matemática de Howard Eves encontramos um trecho sobre as origens dos principais conceitos do cálculo:

"(...) Esses conceitos têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles ,dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta."
Eves, Howard. Introdução à História da Matemática.p.417.(1997)

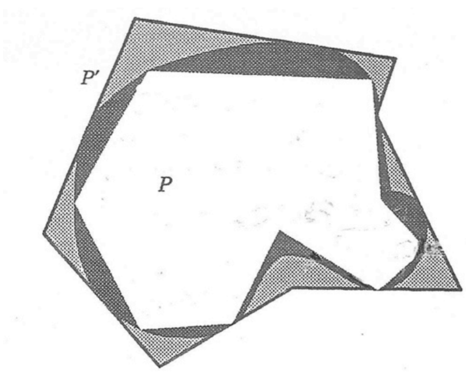
Um desses conceitos é o de cálculo da área sob uma curva e introduzir o estudo do cálculo da área de uma faixa de hipérbole, através do método dos polígonos retangulares é se aproximar das origens do cálculo.

Tendo em vista o objetivo desta sequência didática, para calcular a área sob uma curva, usarei o método dos polígonos retangulares contidos na figura, isto é, o cálculo da área será obtido por aproximações por falta. Além disso as atividades são contempladas pelo uso de ferramentas do Geogebra.

No livro Áreas e Volumes do professor Elon Lages Lima, publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática encontram-se as seguintes definições:

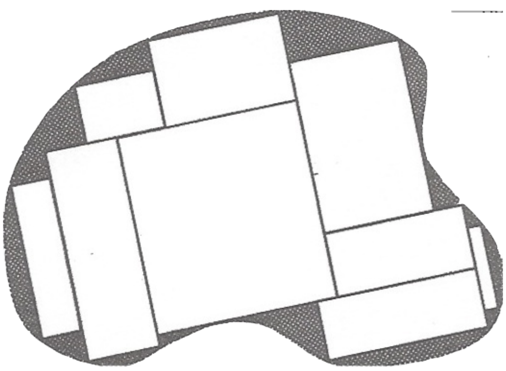
"*A área da figura plana $\mathcal{F}$ deve ser um número real não negativo, que indicaremos com $a(\mathcal{F})$. Ela ficará bem determinada se conhecermos seus valores aproximados, por falta ou por excesso. Os valores de $a(\mathcal{F})$ aproximadas por falta são, por definição, as áreas dos polígonos* P *contidos em $\mathcal{F}$. Os valores de $a(\mathcal{F})$ aproximados por excesso são as áreas dos polígonos* P*' que contém $\mathcal{F}$. Por conseguinte, quaisquer que sejam os polígonos* P *(contido em $\mathcal{F}$) e* P*'(contendo $\mathcal{F}$), o número $a(\mathcal{F})$ satisfaz às desigualdades:*

$a(\mathrm{P}) \leq a(\mathcal{F}) \leq a(\mathrm{P}')$."



Uma figura plana F (parte negra), contida em um polígono P' e contendo um polígono P. A área de P é uma aproximação por falta e a área de P' uma aproximação por excesso para a área de F.

Um polígono retangular é a reunião de vários retângulos justapostos, isto é, dois desses retângulos têm em comum no máximo um lado. A área de um polígono retangular é a soma das áreas dos retângulos que o compõem.



Lima, Elon Lages - *Medida e Forma em Geometria* p.22 (1991).Sociedade Brasileira de Matemática

Apesar da simplicidade e da forma muito intuitiva que é apresentada a definição de área de uma figura plana, sugiro que além da apresentação expositiva, seja feita uma atividade no Geogebra, envolvendo por exemplo, o cálculo sob a área de uma faixa de parábola utilizando tanto o método dos polígonos retangulares como também as ferramentas do Geogebra para o cálculo de áreas.

3.2 Atividade: Cálculo da área sob a curva $y = x^2$ no intervalo [0,1]

Nesta atividade utiliza-se o método dos polígonos retangulares para o cálculo da área e a seguir utiliza-se a ferramenta de cálculo da área do Geogebra. Os valores obtidos "manualmente" e no Geogebra podem ser confrontados com o objetivo de compreender o funcionamento da ferramenta no âmbito computacional.

Na figura 7, o intervalo [0,1] foi decomposto em 4 intervalos justapostos de mesmo comprimento. Em cada intervalo [a,b] da decomposição, onde $a < b$, considera-se o retângulo de altura a^2, cujo vértice superior esquerdo está na parábola.

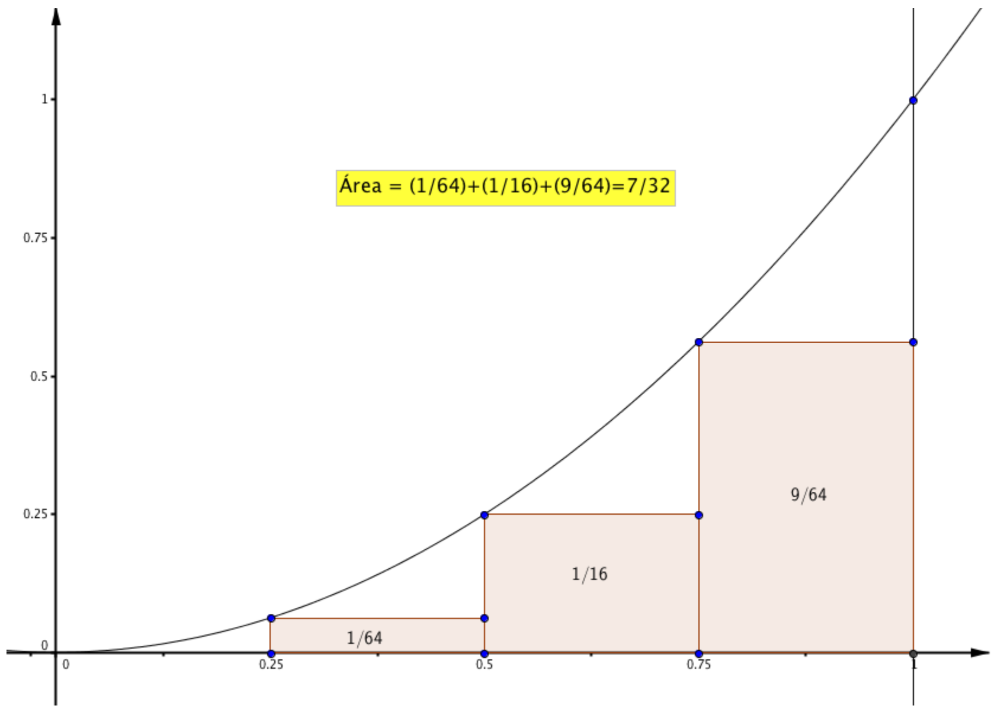


Figura 7

Cada retângulo hachurado chamamos de retângulo inscrito. O objetivo é calcular a área por aproximações por falta da faixa de parábola limitada pelas duas retas verticais x = 0 e x = 1, pelo eixo das abscissas, e pela parábola $y = x^2$. Essa faixa de parábola será denominada de P_0^1.

A reunião dos três retângulos inscritos na faixa de parábola P_0^1 constitui o polígono retangular inscrito nesta faixa. A soma das áreas dos três retângulos, que é representada por $\left(P_0^1\right)$, é igual a área (aproximada por falta) da faixa de parábola. Neste caso encontramos $\left(P_0^1\right) = 0{,}21875$ (figura 7).

Na figura 8, foi feita uma subdivisão mais fina do intervalo [0,1], isto é, dividiu-se o intervalo em um número maior de subintervalos, obtendo um polígono retangular inscrito cuja área calculada é 0,273437. Em geral, quanto mais fina for a subdivisão do intervalo [0,1], menor será a diferença entre o valor da área sob a faixa de parábola e a área do polígono retangular inscrito.

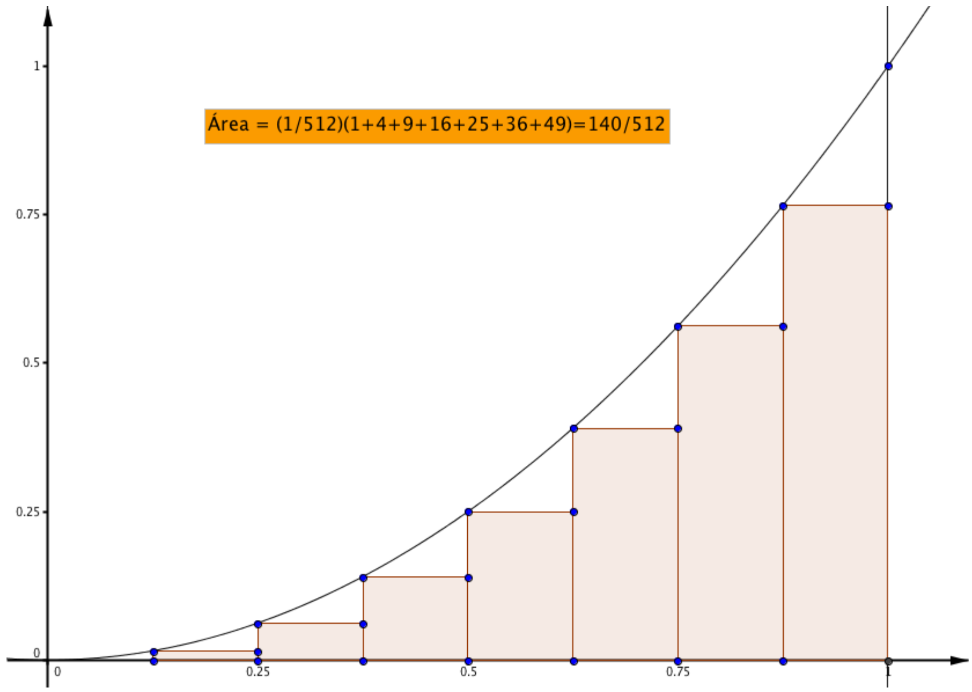


Figura 8

Uma atividade de aprofundamento possível, é provar que a medida que as subdivisões do intervalo [0,1] ficam mais finas, o valor da área da faixa de parábola no intervalo [0,1], aproxima-se do valor 1/3. De fato, se dividirmos esse intervalo em (n+1) intervalos justapostos de mesmo comprimento, o polígono retangular P(n+1) inscrito na faixa de parábola y = x^2 tem área igual a $\frac{1}{(n+1)^3}(1+2^2+3^2+...+n^2)$. Na figura 8 tem-se n = 7.

No curso de ensino médio, não é comum ser apresentado o conceito de integral, porém utilizar o comando "integral" no Geogebra e o cálculo pelos polígonos retangulares[6] é um prelúdio ao Cálculo Integral.

Na figura 9 o Geogebra é utilizado para calcular a área do feixe de parábola do ítem 3.2. O resultado apresentado pelo Geogebra conta com a limitação do número de casas decimais.

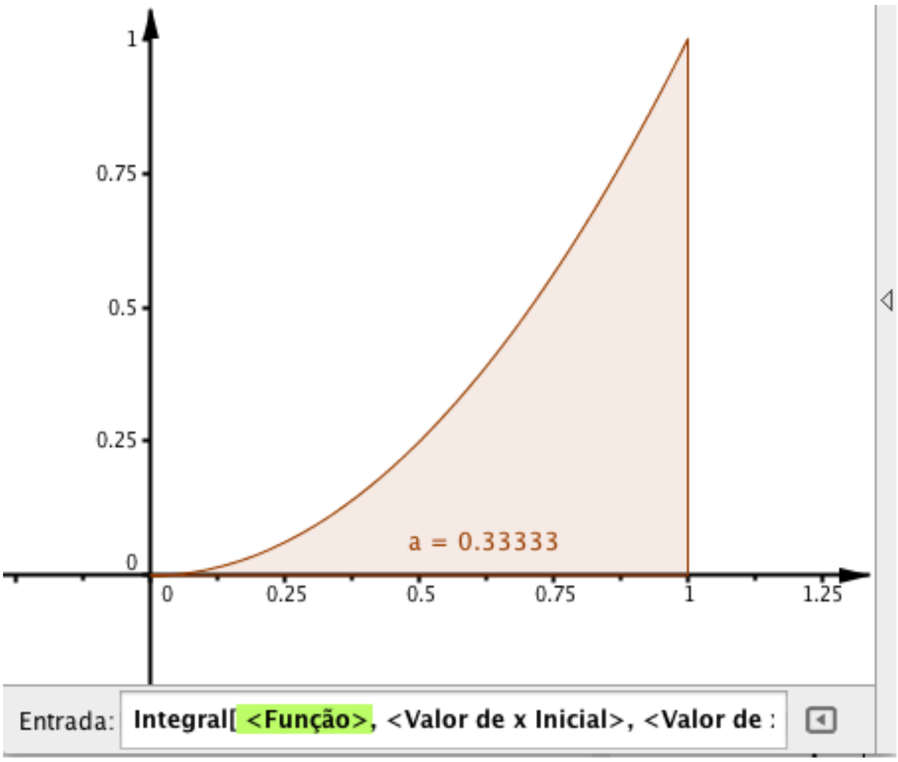


Figura 9

[6] No Geogebra existe a ferramenta "somadeRiemann" que pode ser utilizada para facilitar a compreensão do cálculo da área.

Capítulo 4

Função Logarítmica

No capítulo 2 foram definidas funções a partir do cálculo das áreas de retângulos e de trapézios. O capítulo 3 tratou do cálculo de áreas, utilizando o método de aproximações por falta, o que será útil para a construção da definição da função logarítmica, assunto desse capítulo.

Seja T o ramo positivo do gráfico da função que associa a cada número real positivo x, o número y = k/x, onde k é um número real positivo. Então, T é o subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma (x, k/x), onde x > 0 e k > 0. Assim o gráfico de T está contido no primeiro quadrante, representado na figura 10.

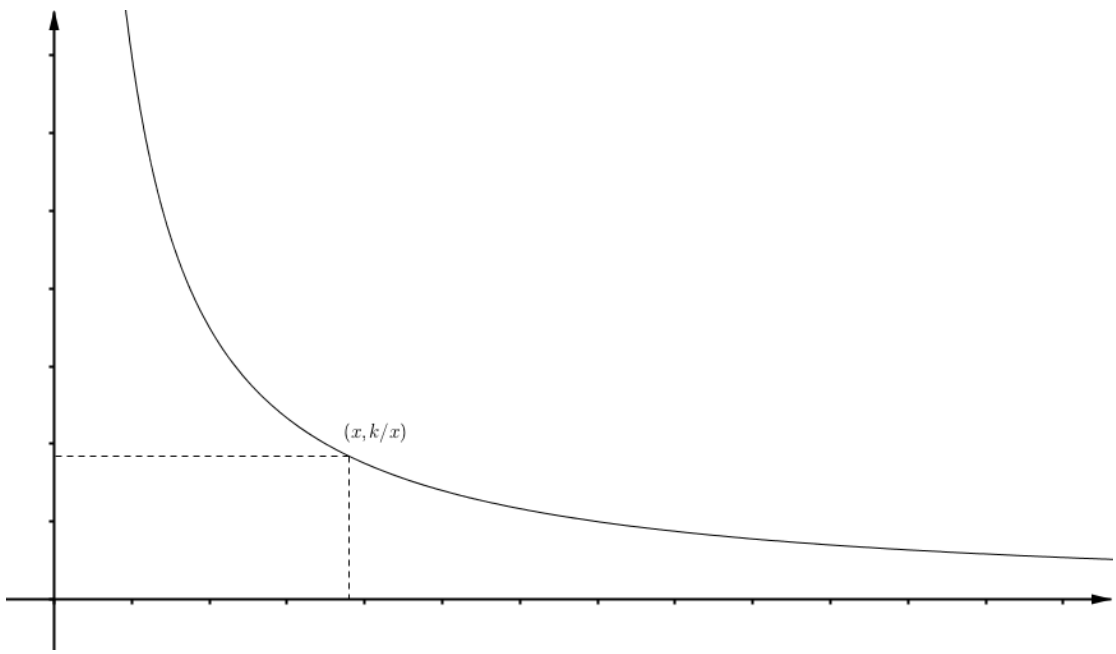


Figura 10

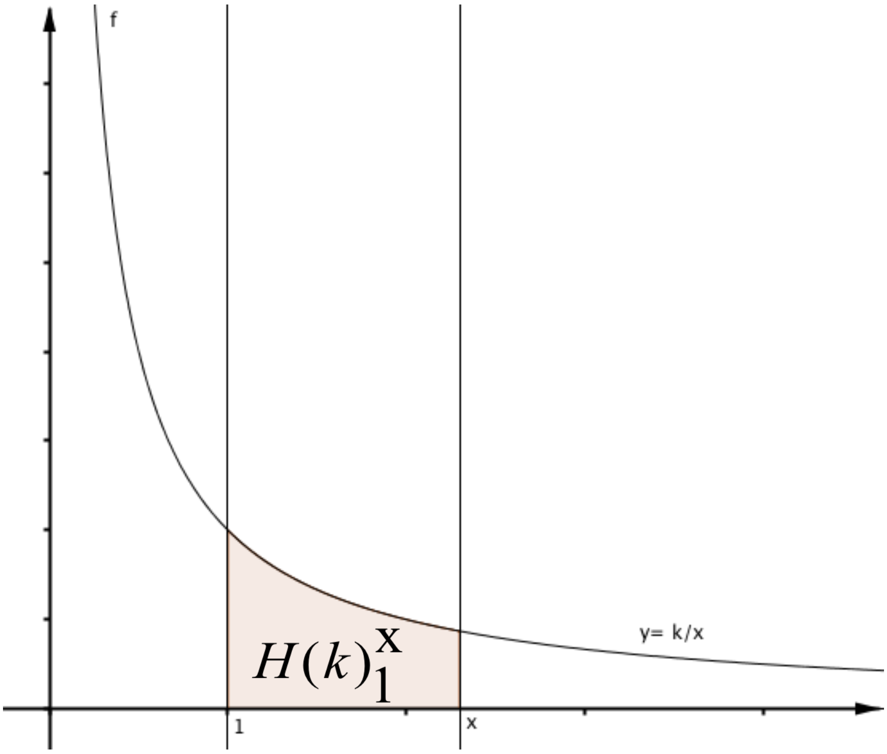


Figura 11

Seja $H(k)_1^x$ a área região limitada pelo eixo das abscissas, pelo ramo positivo da hipérbole y = k/x e pelas duas retas verticais levantadas em x = 1 e no ponto cuja abscissa é x. Semelhantemente ao que foi feito nos capítulos 2 e 3, utilizaremos a área $H(k)_1^x$, para definirmos uma nova função, a qual chamaremos de função logarítmica.

4.1 Definição da Função Logarítmica

Em correspondência com a hipérbole y = k/x, existe uma função logarítmica representada por Y = log x, definida para x > 0 tal que :

Se x > 1 então Y = log x = $H(k)_1^x$

Se x = 1, então $H(k)_1^1 = 0$, ou seja, Y = 0

Se 0 < x < 1, Y = log x = $-\ H(k)_1^x$

A figura 12 ilustra um objeto de aprendizagem construído no Geogebra. Movimentando o cursor, faz-se x variar livremente de modo que o valor de log x é igual a área para x > 1, zero para x = 1 ou o negativo da área para 0 < x < 1. Fazendo k variar é possível levantar algumas questões no que diz respeito a relação entre o valor de k e a função logarítmica[7].

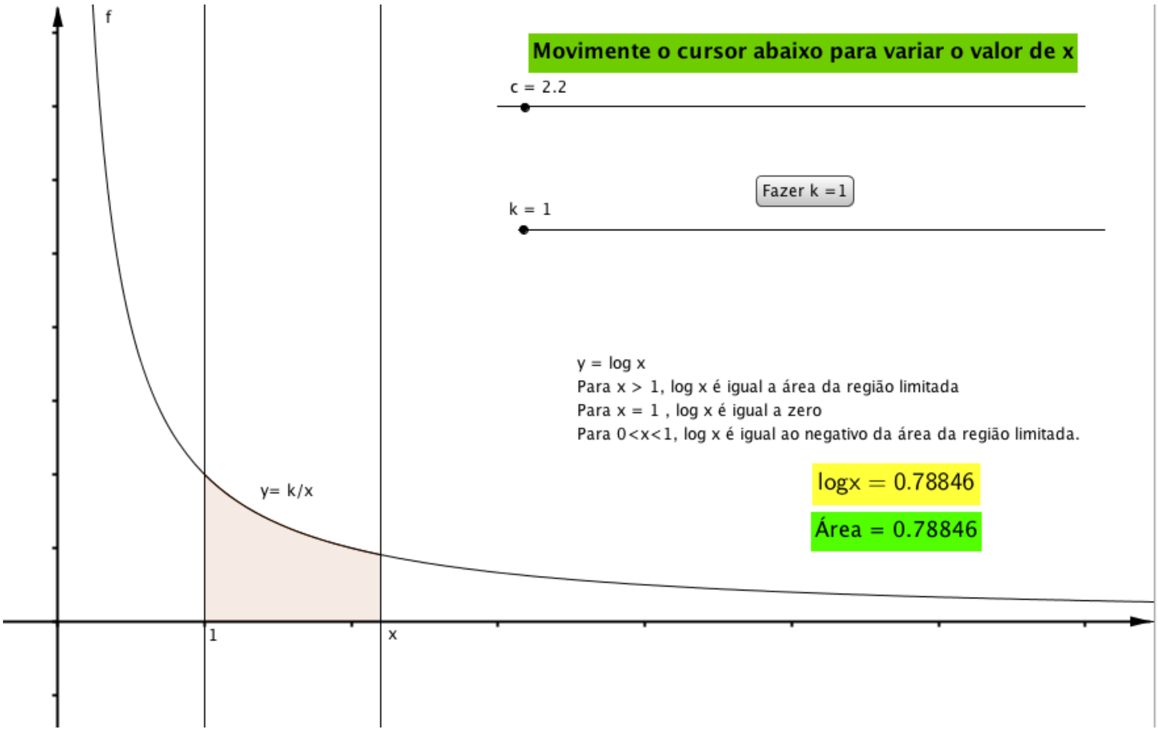


Figura 12

4.2 Gráfico da função logarítmica

A partir da definição da função logarítmica estudaremos o seu gráfico e a utilização de objetos de aprendizagem, construídos dinamicamente no Geogebra, ajudarão a compreender o traçado do gráfico.

Apresentar, em um curso de ensino médio, as demonstrações das proposições seguintes não tem como objetivo tornar o curso mais extenso ou desinteressante, porém recorrer aos objetos de aprendizagem, construídos a partir da definição da função logarítmica, pode auxiliar não só na compreensão das demonstrações como também torná-las "naturais".

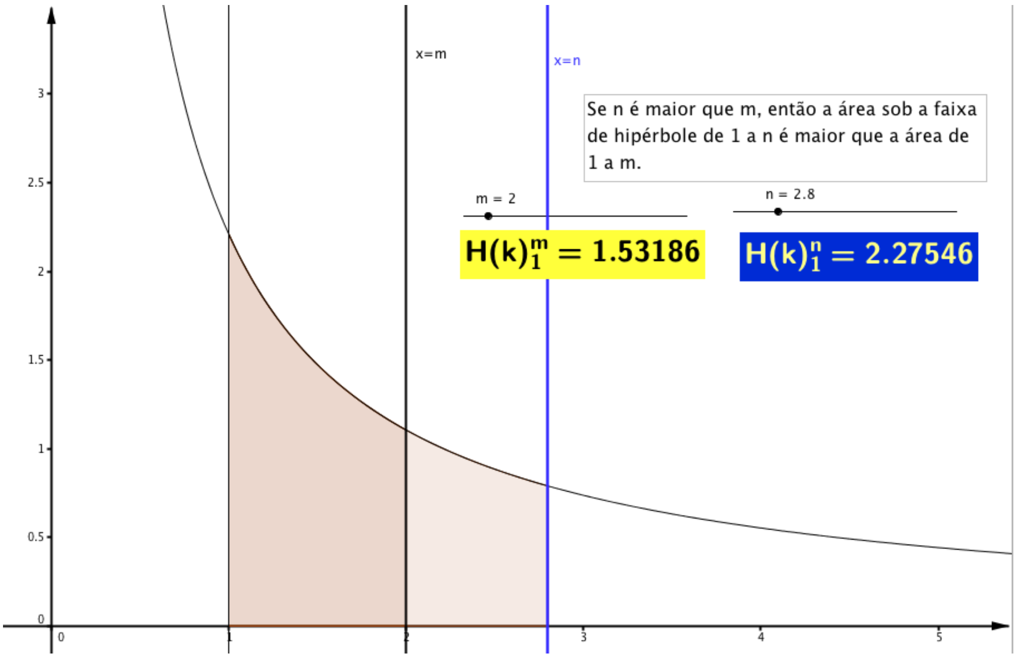
[7] Até aqui não estamos fazendo nenhuma menção à base do logaritmo; esse assunto será tratado posteriormente

Proposição 1 : log m < log n se e somente se 0 < m < n, isto é, a função logarítmica é crescente.

Demonstração : De acordo com a definição dada da função logarítmica vamos separar a demonstração em dois casos:

1º Caso: 1 < m < n

Se 1 < m < n, a área sob a hipérbole y = k/x no intervalo [1,m], representada por $H(k)_1^m$ é menor que a área sob a hipérbole y = k/x no intervalo [1,n], representada por $H(k)_1^n$, facilmente visualizada na figura 12.1. Assim para 1 < m < n temos $H(k)_1^m < H(k)_1^n$ o que significa que log m < log n, de acordo com a definição da função logarítmica.



Figura[8] 12.1

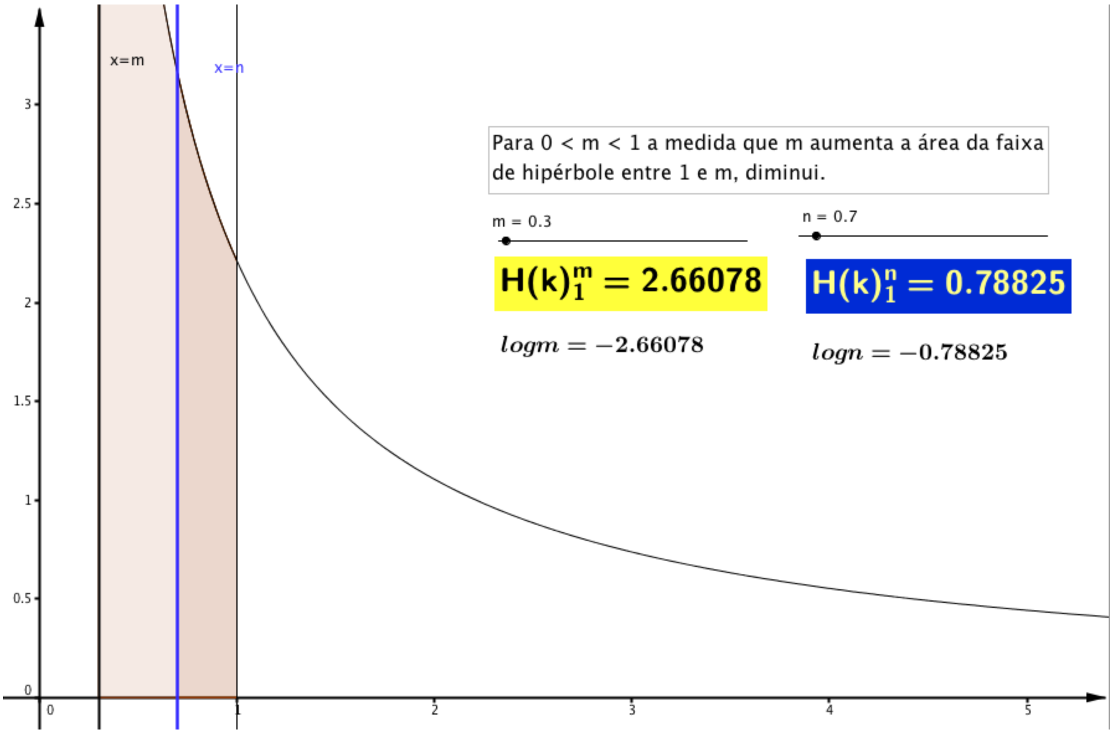
Se log m < log n, pela definição da função logarítmica, temos $H(k)_1^m < H(k)_1^n$ o que implica em m < n.

---

[8] Neste objeto de aprendizagem movimentando o cursor m ou o cursor n é possível comparar as áreas $H(k)_1^m$ e $H(k)_1^n$, para 1 < m < n.

2º Caso: $0 < m < n < 1$

A área sob a hipérbole $y = k/x$ no intervalo $[1,m]$, representada por $H(k)_1^m$ é maior que a área sob a hipérbole $y = k/x$ no intervalo $[1,n]$, representada por $H(k)_1^n$. Nesse caso a medida que m se aproxima de zero, a área $H(k)_1^m$ aumenta e como $-H(k)_1^m = \log m$, o logaritmo diminui.



[9]Figura 12.2

Portanto:

i) Se $0 < m < n < 1$ então $H(k)_1^m > H(k)_1^n \Rightarrow -\log m > -\log n \Rightarrow \log m < \log n$.

ii) Se $\log m < \log n \Rightarrow -\log m > -\log n \Rightarrow H(k)_1^m > H(k)_1^n \Rightarrow m < n$.

Assim $\log m < \log n \Leftrightarrow 0 < m < n$.

[9] No objeto 12.2, variando os valores de m e de n através do movimento dos cursores, é possível comparar os valores de logm com os valores de logn.

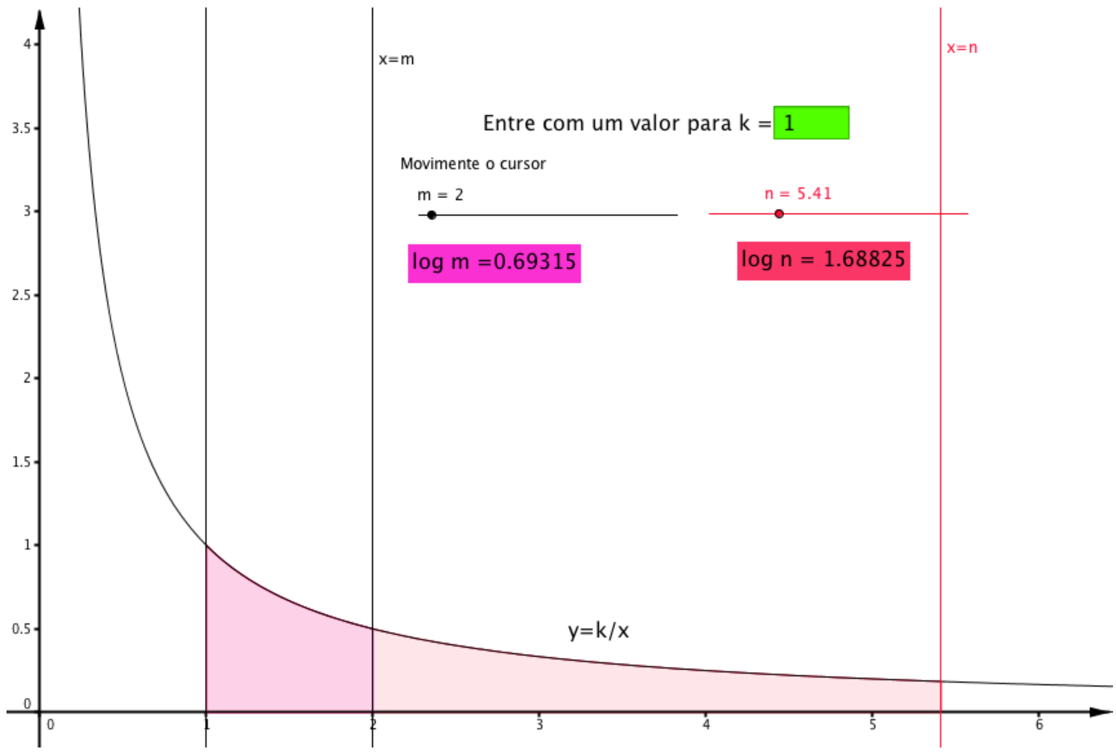


Figura 13

Corolário: A função log x : $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é biunívoca.

Provar o corolário consiste em demonstrar que dados m e n números reais positivos e diferentes, então os seus logaritmos são diferentes. Se m e n são diferentes então $m < n$ ou $m > n$, o que implica pela proposição1, em log m < log n ou log m > log n, respectivamente. Assim log m ≠ log n, e a proposição está demonstrada. Analogamente se os logaritmos de m e n são diferentes, então m e n são diferentes.

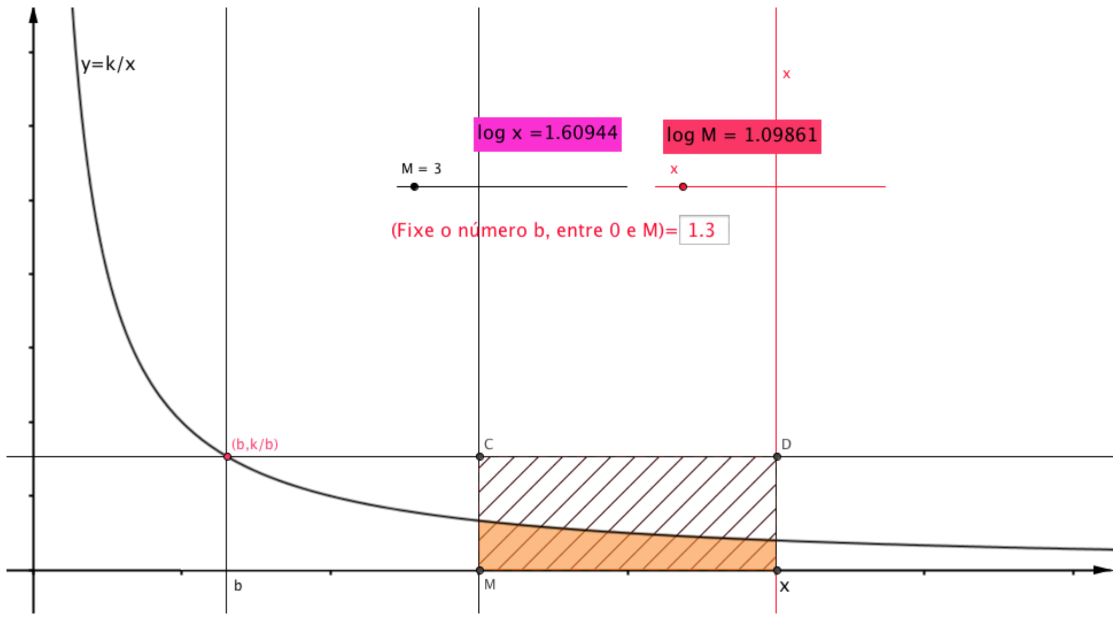
Proposição 2: O gráfico de y = log x é uma curva contínua.

Demonstração:

Para demonstrar que a função log x é contínua no ponto M, é suficiente mostrar que se x tende para M então log x tende para log M, ou ainda, que a diferença log x – log M, pode ser tomada, em valor absoluto, tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de M.

Sabemos que | log x – log M | = $H(k)_x^M$. Fixe um número real entre 0 e M, que denominamos por b (Figura 14). Seja A a área do retângulo que tem como base o segmento [M,x] e altura k/b, ou seja $A = \frac{|x-M| \cdot k}{b}$. A área $H(k)_x^M$ está contida no retângulo de área A, assim podemos afirmar que a área $H(k)_x^M$ é inferior a $A = \frac{|x-M| \cdot k}{b}$, isto é, | log x – log M | < $\frac{|x-M| \cdot k}{b}$. Observe que na desigualdade podemos tomar x tão próximo de M quanto desejarmos, assim a medida que x tende para M o valor de log x tende[10] para log M, o que demonstra que a função logaritmica é contínua.

Para auxiliar na demonstração, utilizamos um objeto de aprendizagem[11] (Figura 14.1) construído no Geogebra.



[12]Figura 14

[10] De fato se nos for dado qualquer número real t > 0, podemos tornar | log x – log M | < t, desde que $|x-M| < \frac{tb}{k}$.

[11] Nos objetos de aprendizagem representados nas figuras 14.1 e 14.2, a medida que o operador diminui o número real α, o valor de x tende a M e o valor de log x tende a log M.

[12] O valor de α diminui e o valor de log x fica mais próximo do valor de log M.

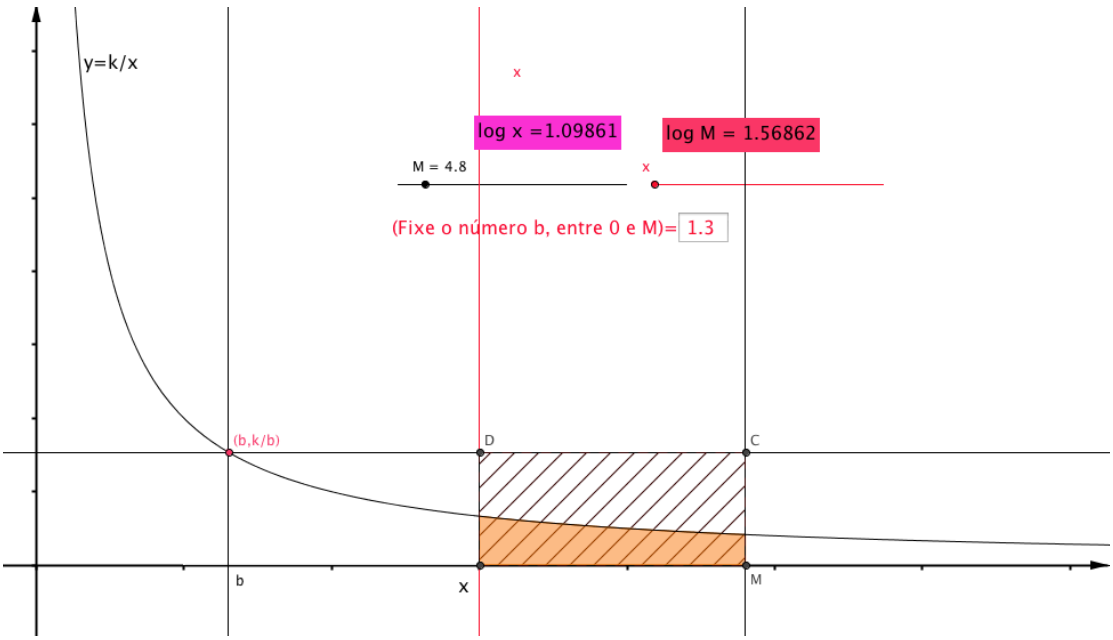


Fig 14.1

[13]Proposição 3:

3.1 Se x tende para $+\infty$, log x tende para $+\infty$

3.2 Se x tende para zero, log x tende para $-\infty$.

Para tornar esta proposição mais clara vamos utilizar a figura 14.2

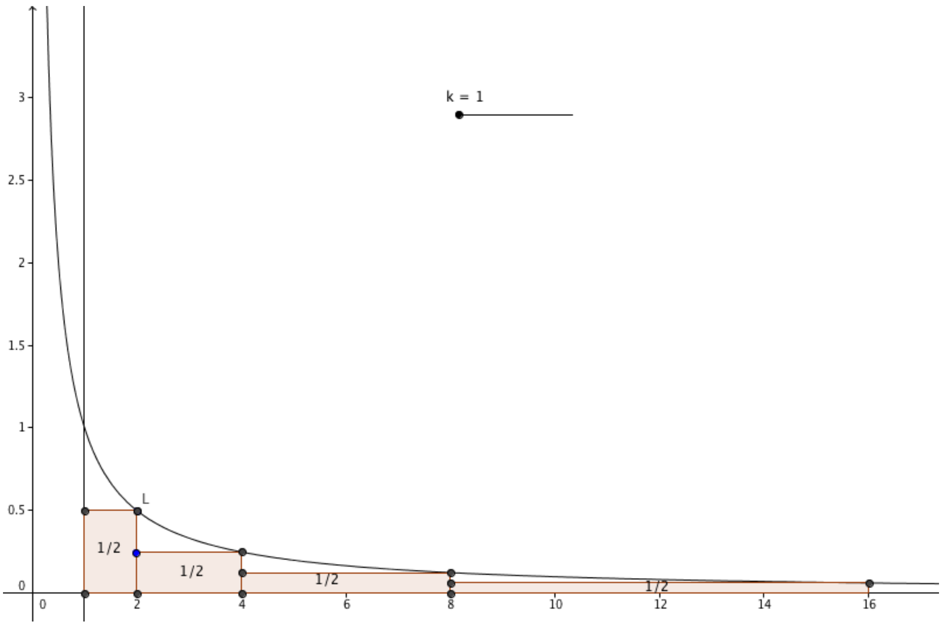


Figura 14.2

[13] A demonstração completa desta proposição é encontrada no livro "Logaritmos" de Elon Lages Lima.

Tomemos os retângulos sob a hipérbole y = 1/x, de maneira que cada retângulo tenha área igual a 1/2. No objeto de aprendizagem observa-se que é sempre possível tomar um polígono retângular de tal maneira que os retângulos inscritos tem como bases os intervalos $(1,2^1),(2^1,2^2),(2^2,2^3),....,(2^a,2^{a+1}),....$. A área de cada retângulo é igual a 0,5 e para **a** muito grande a área continua igual a 0,5, assim o polígono retangular tem área igual a $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$ o que mostra que a área sob a hipérbole aumenta sempre que x aumentar e consequentemente prova 3.1. A demonstração da 3.2 é análoga.

Proposição 4

Todo número real é o logaritmo de um único número real positivo

A proposição é equivalente a afirmar que dado qualquer número real α, existe um, e só um, número real x > 0 tal que $\log x = \alpha$. Se α é positivo[14] então vamos partir da definição que log x = $H(k)_1^x$, assim $H(k)_1^x = \alpha$. Da proposição 3 sempre podemos tornar log x inferior a qualquer número real dado, basta que x seja suficientemente próximo de zero. Em particular, dado y, podemos obter m > 0 tal que log m < y. Analogamente, pela proposição 3, podemos encontrar um número n > m tal que log n > y. Assim log m < y < log n e como a função y = log x é contínua, quando x varia de m até n, então y = log x assume todos os valores intermediários entre log m e log n (este é um teorema sobre funções contínuas que estamos admitindo sem demonstração). Assim seja β um valor intermediário entre log m e log n, existe um número real x, entre m e n, tal que log x = β. O valor de β é único, pois do contrário o corolário da proposição 1 seria falso.

[14] Para α negativo a demonstração é análoga, basta usar a definição log x = - $H(k)_1^x$

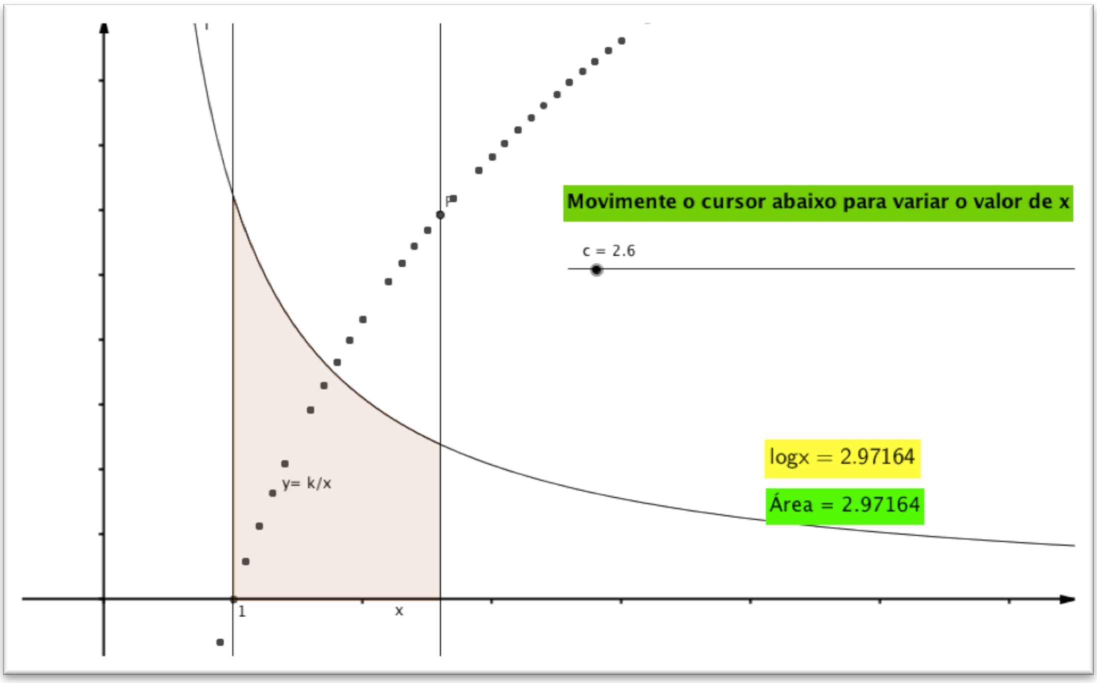
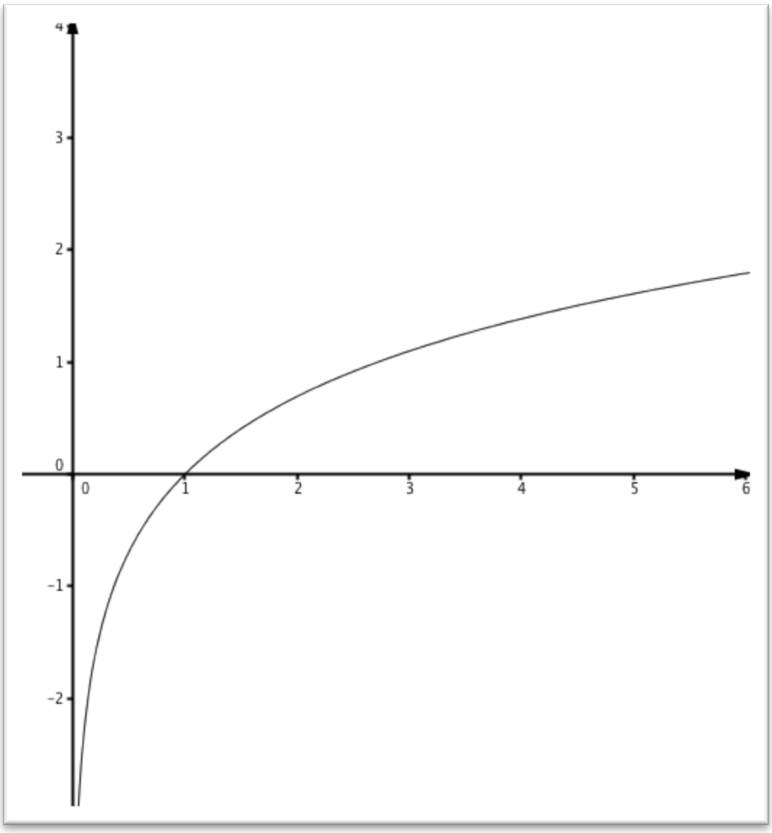


Figura 15

De posse das quatro proposições apresentadas podemos esboçar o gráfico da função Y = log x, tal que x > 0. As características do gráfico da função f(x) = log x até aqui descritas são:

a. O gráfico da função é crescente e aumenta lentamente;
b. O gráfico é uma curva do primeiro e quarto quadrante, que corta o eixo das abscissas no ponto (1,0) e se x varia de zero a $+\infty$ a ordenada correspondente varia de $-\infty$ a $+\infty$. Para x > 1, log x > 0; para x =1 tem-se log x = 0 e para 0 < x < 1 tem-se log x < 0;
c. O gráfico é contínuo;
d. A função logaritmica log x: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é bijetora, pois pela proposição 1 a função é injetora e pela proposição 4 é sobrejetora.

A figura 14 mostra o gráfico de Y = log x : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e para valores de x tendendo ao infinito positivo a função cresce muito lentamente.



[15]Figura 16

[15] Utilizando o objeto de aprendizagem da figura 12.1, é fácil perceber que para aumentos grandes de x, tal que x > 1, o valor da área aumenta lentamente.

Capítulo 5

5.1 Propriedade fundamental

Seja t um número real positivo qualquer. As áreas $H(k)_{at}^{bt}$ e $H(k)_{a}^{b}$ são iguais.

Demonstração:

Na figura 17 o retângulo inscrito cuja base é o segmento [a,b] do eixo das abscissas, tem a mesma área que o retângulo inscrito cuja base é o segmento [at,bt]. De fato a área do primeiro é igual a (b-a)/b e a área do segundo é (bt – at)/bt, como queríamos demonstrar. Então em uma mesma hipérbole, para cada polígono retangular inscrito em $H(k)_{a}^{b}$ existe um inscrito em $H(k)_{at}^{bt}$, qualquer que seja t real positivo, com a mesma área e para cada polígono retangular inscrito em $H(k)_{at}^{bt}$, existe outro de mesma área inscrito em $H(k)_{a}^{b}$, logo $H(k)_{at}^{bt} = H(k)_{a}^{b}$ Esta propriedade é conhecida como propriedade fundamental.

Assim $H(k)_{1}^{b} = H(k)_{a}^{ab}$, isto é, a área sob a curva de uma faixa de hipérbole no intervalo que vai de 1 até b é igual a área sob a curva de uma faixa da mesma hipérbole que vai de a até ab, para todo a real positivo. Na figura 18 a propriedade é ilustrada em um objeto de aprendizagem construído no Geogebra, cuja movimentação dos cursores permite verificar a proprieadade.

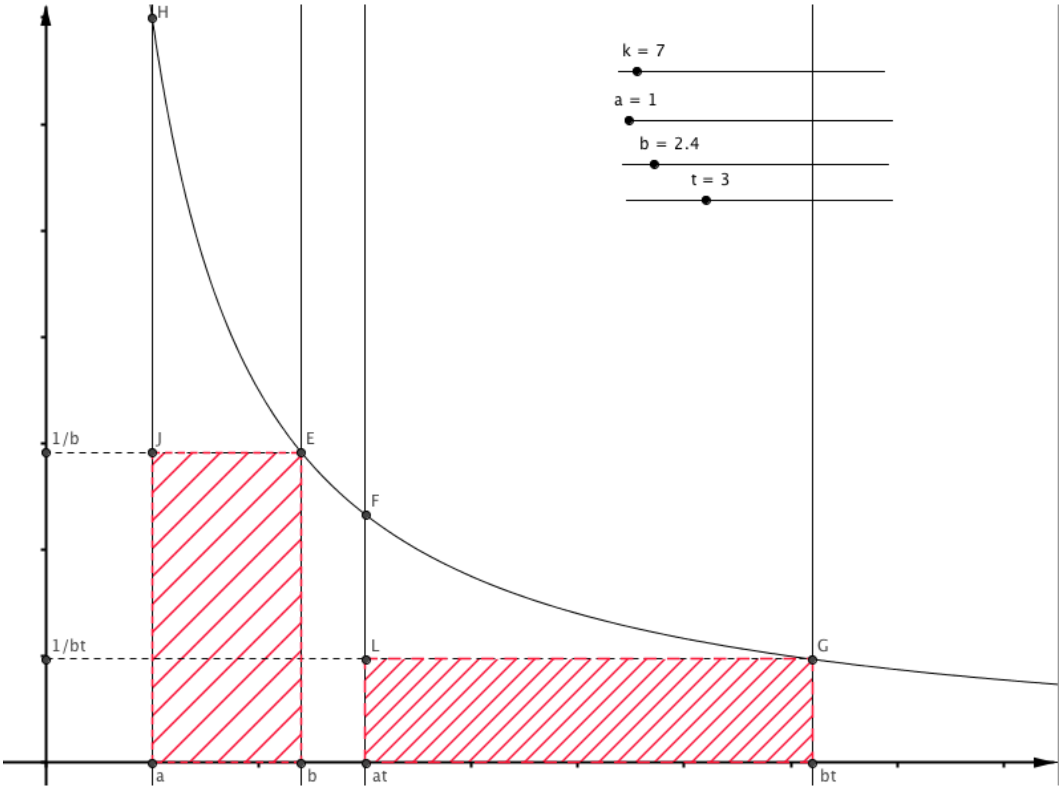


Figura 17

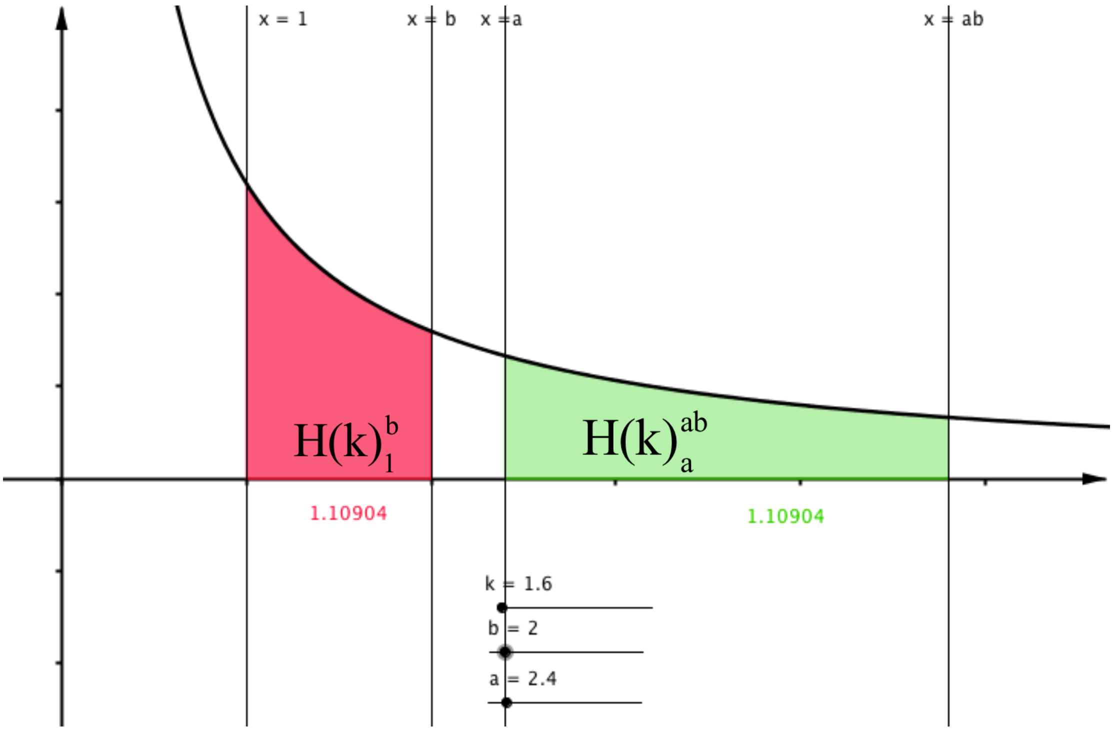


Figura 18

5.2 Propriedades da função y = log x.

Apesar do foco deste trabalho não estabelecer como ponto central as manipulações envolvendo logaritmos, demonstrar as propriedades representa um ótimo exercício para a compreensão efetiva da função logarítmica, além disso a abordagem geométrica torna cada demonstração um processo muito natural.

Propriedade 1: Se $y = \log x$ é a função logarítmica proveniente da hipérbole $y = k/x$, e a e b são dois números reais positivos quaisquer, então $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

Demonstração[16] :

Por definição[17] $\log a = H(k)_1^a$ e $\log b = H(k)_1^b$ para $a > 1$ e $b > 1$. É facil verificar que $H(k)_1^{ab} = H(k)_1^b + H(k)_b^{ab}$ (Figura 19). Como pela propriedade fundamental temos que $H(k)_b^{ab} = H(k)_1^a$, logo $H(k)_1^{ab} = H(k)_1^b + H(k)_1^a \Rightarrow \log(a.b) = \log a + \log b$, como queríamos demonstrar.

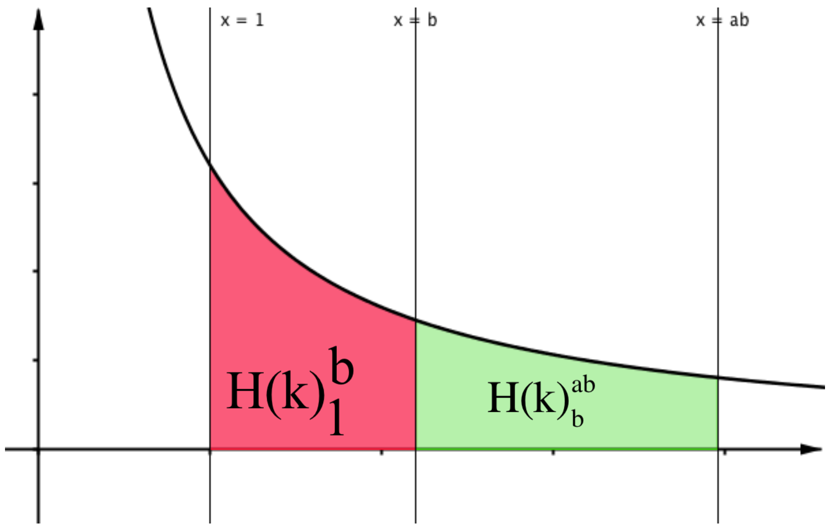


Figura 19

[16] Esta propriedade foi a motivação para a introdução de logaritmos no início do século XVII como instrumento de cálculo.

[17] Para 0 < a < 1 e 0 < b < 1 a demonstração é análoga

Propriedade 2: Se y = log x é a função logarítmica proveniente da hipérbole y = k/x, e a e b são dois números reais positivos quaisquer, então $\log\left(\frac{b}{a}\right) = \log b - \log a$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, tome b > a. Da definição da função logarítmica e da propriedade fundamental segue que: $H(k)_a^b = H(k)_1^{b/a} = \log(b/a)$.

$H(k)_a^b = H(k)_1^b - H(k)_1^a \Rightarrow H(k)_1^{b/a} = H(k)_1^b - H(k)_1^a \Rightarrow \log\left(\frac{b}{a}\right) = \log b - \log a$, como ilustrado na figura 20.

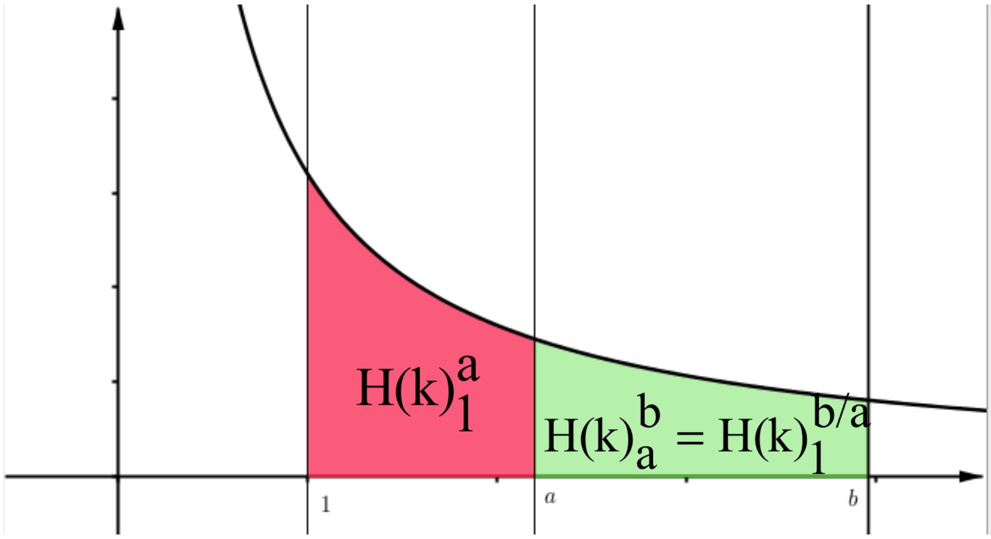


Figura 20

Corolário: Seja a um número real ($a > 1$)[18], para todo racional p, temos $\log a^p = p \cdot \log a$.

Para p inteiro e $a > 1$, o intervalo $[1, a^p]$ pode ser subdividido nos intervalos $[1,a],[a,a^2],[a^2,a^3],....,[a^{p-1},a^p]$ que, pela propriedade fundamental, determinam faixas de hipérbole de mesma área (Figura 21). Assim $H(k)_1^a + H(k)_a^{a^2} + ... + H(k)_{a^{p-1}}^{a^p} = H(k)_1^{a^p} = p \cdot H(k)_1^a$, uma vez que todas as p parcelas são iguaias a $H(k)_1^a$. Em particular se $p = 0$, o corolário continua válido, uma vez que $H(k)_1^1 = 0$, que é o mesmo que log 1 = 0.

[18] Para 0 < a < 1 e 0 < b < 1 a demonstração é análoga, uma vez $\log x = -H(k)_1^x, 0 < x < 1$

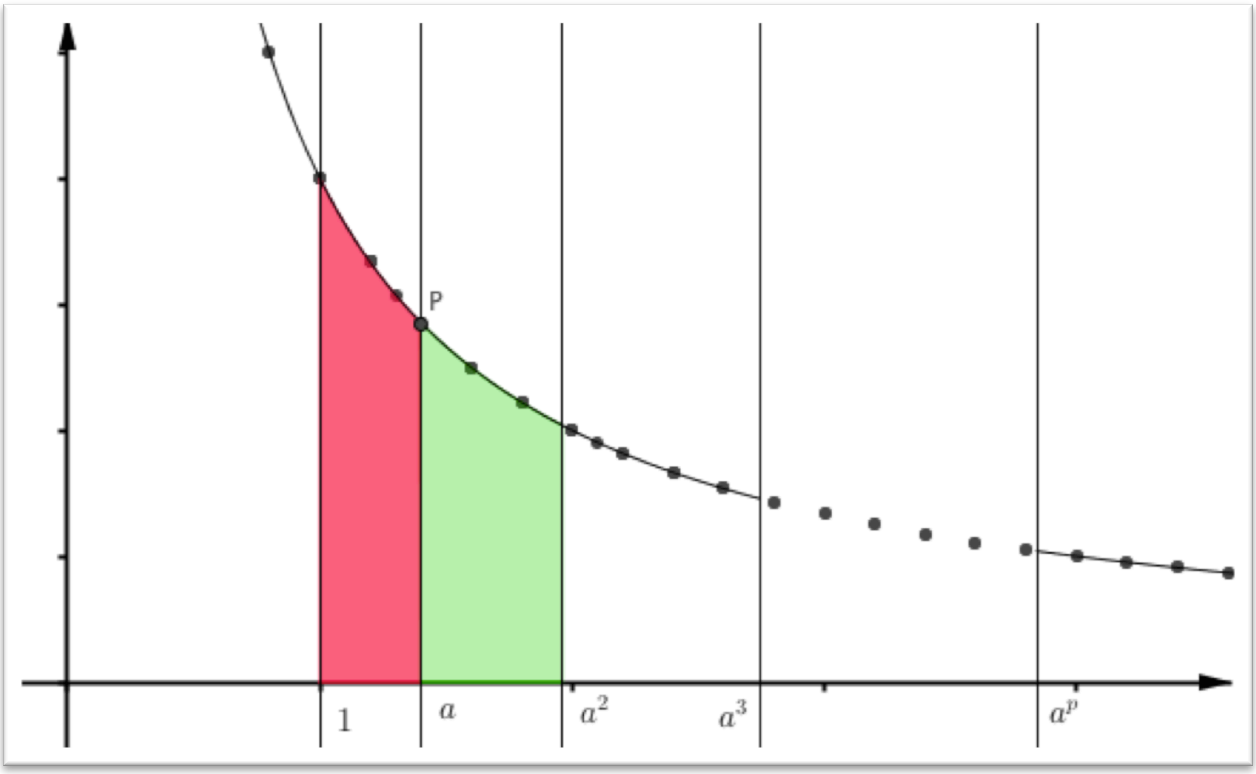


Figura 21

No caso de p ser um número inteiro negativo, o corolário continua válido. De fato pela propriedade fundamental[19], as faixas de hipérbole determinadas nos intervalos $[1,a^n]$ e $[a^{-n},1]$ têm a mesma área , uma vez que $a^n \cdot a^{-n} = 1$, assim pela definição da função logarítmica para 0 < x < 1 e n inteiro positivo, tem-se:

$\log x = - H(k)_1^x$ e $H(k)_1^{a^n} = n \cdot H(k)_1^a$

$H(k)_1^{a^{-n}} = H(k)_1^{a^n} = n \cdot H(k)_1^a \Rightarrow -\log a^{-n} = \log a^n = n \log a \Rightarrow \log a^{-n} = -n \cdot \log a$

---

[19] $H(k)_{at}^{bt} = H(k)_a^b$ para quaisquer a,b e t reais e positivos.

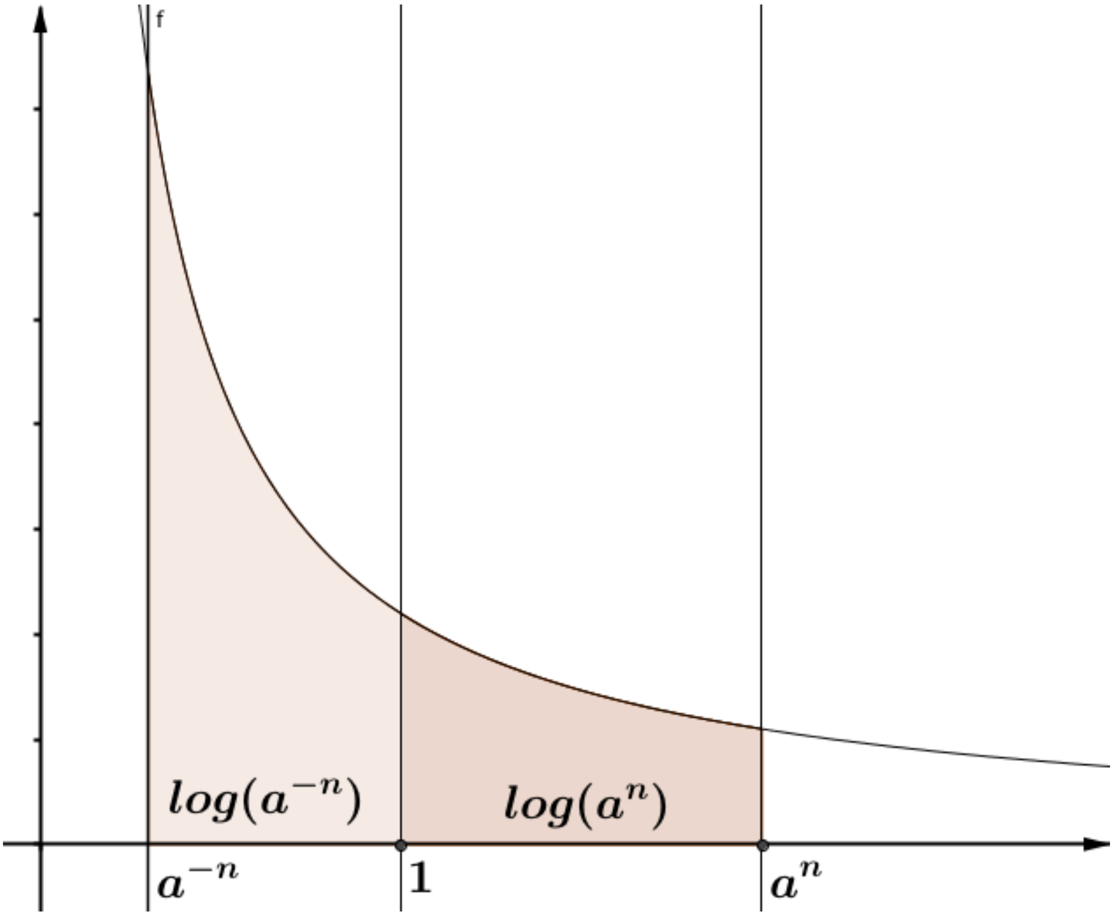


Figura 22

Provaremos que para o número racional, $n = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q > 0$ o corolário continua válido. Para todo $a > 0$, temos $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n} = a^{m}$, então:

(1) $H(k)_{1}^{a^m} = H(k)_{1}^{\left(a^{m/n}\right)^{n}} = nH(k)_{1}^{a^{m/n}}$

(2) $H(k)_{1}^{a^m} = m \cdot H(k)_{1}^{a}$

De (1) e (2) tem-se:

$$n \cdot H(k)_{1}^{a^{m/n}} = m \cdot H(k)_{1}^{a} \Rightarrow H(k)_{1}^{a^{m/n}} = \frac{m}{n} \cdot H(k)_{1}^{a} \Rightarrow \log a^{m/n} = \frac{m}{n} \cdot \log a$$

Capítulo 6
Sistema de Logaritmos

No capítulo 4, definimos a função logarítmica e para cada valor de k escolhido na hipérbole y = k/x, k > 0, temos um novo sistema de logaritmos. Duas entre as funções logarítmicas são particularmente importantes na Matemática e nas aplicações em outras áreas do conhecimento: o logaritmo natural quando k =1, e o logaritmo decimal para uma particular escolha de k, que surge tendo em vista a facilitação dos cálculos numéricos uma vez que o nosso sistema de numeração é o de base 10.

A escolha mais natural é k =1, por isso chamaremos de logaritmos naturais aqueles obtidos através das faixas da hipérbole y = 1/x. Além disso a notação para k=1 será simplificada para $H(1)_1^b = H_1^b$ e em vez de escrevermos log x escreveremos ln x, que se lê "logaritmo natural de x". Os teoremas já demonstrados continuam válidos uma vez que foram demonstradas para todo k > 0. Assim a função logarítmica natural[20] goza de todas as propriedades da função logarítmica, tais como ser uma função crescente.

Uma construção no Geogebra da função y = k/x que possibilite k variar nos reais é uma boa ilustração sobre a relação entre o valor de k e a função logarítmica, de acordo com a definição utlizada aqui. Na figura 23 está representada uma dessas construções onde são traçadas as hipérboles y = 2/x e y = 1/x e utilizando o comando "integral" do Geogebra é possível comparar as áreas das faixas de hipérboles em um mesmo intervalo do domínio e verificar que $H(2)_1^x = 2 \cdot H(1)_1^x$. Essa construção pode ser utilizada para levantar a seguinte questão: Para os valores reais e positivos de k qual a relação entre as funções logarítmicas correspondentes? Para responder a essa questão é preciso determinar a relação que existe entre $H(k)_a^b$ e H_a^b, o que faremos a seguir.

---

[20] Nos diversos estudos que envolvem logaritmos, sem sombra de dúvida, o logaritmo natural é o mais importante de todos, pois tem lugar de destaque nos estudos científicos.

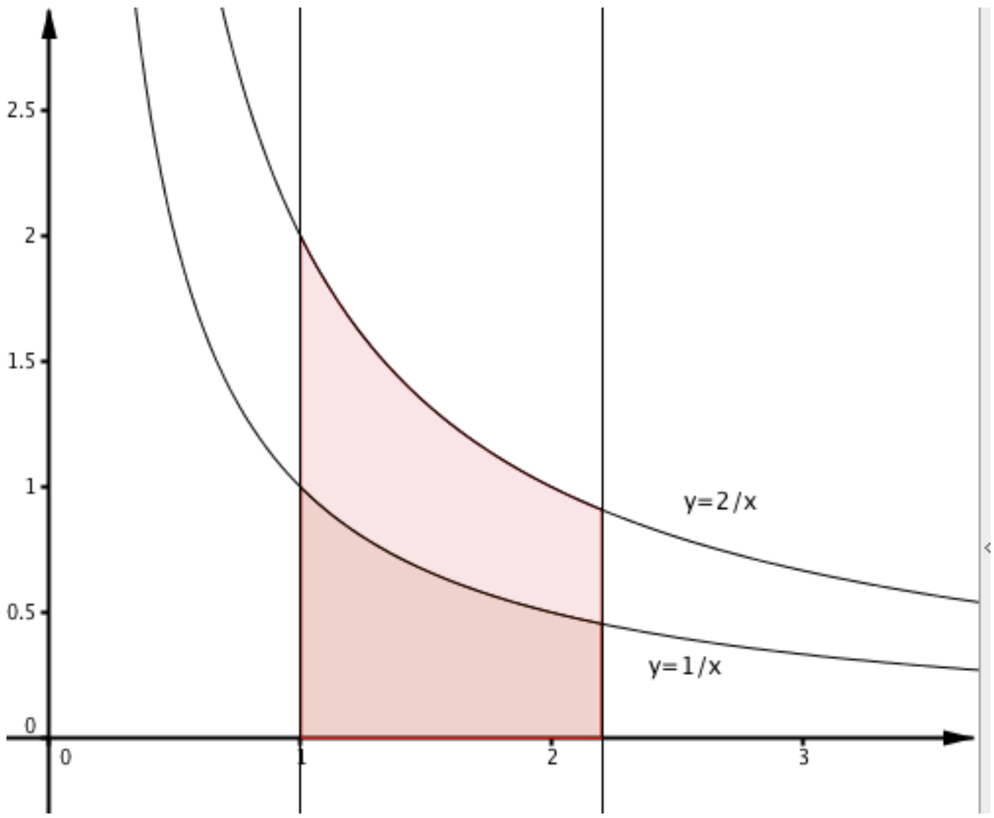


Figura 23

No capítulo 3 para calcular a área $H(k)_a^b$, dividimos o intervalo $[a,b]$ em subintervalos utilizando polígonos retangulares. Pois bem, tome um determinado segmento [c,d] contido em [a,b] (Figura 24). O retângulo de base [c,d], inscrito na hipérbole y = k/x tem área igual a k vezes a área do retângulo de mesma base inscrito na hipérbole y = 1/x, isto é, $H(k)_c^d = k \cdot H_c^d$. Da definição da função logarítmica podemos escrever log x = k ln x, x > 0 . Essa é uma importante relação entre os sistemas de logaritmos, pois ela implica que todos os sistemas de logaritmos podem ser resumidos ao logaritmo natural a menos de uma constante. Assim, se b for um número positivo qualquer, diferente de um, então a razão $\frac{\log x}{\log b} = \frac{k \ln x}{k \ln b} = \frac{\ln x}{\ln b}$ é independente do valor de k utilizado para definir a função logarítmica.

Na figura 24 o objeto de aprendizagem construído ajuda a verificar esta propriedade.

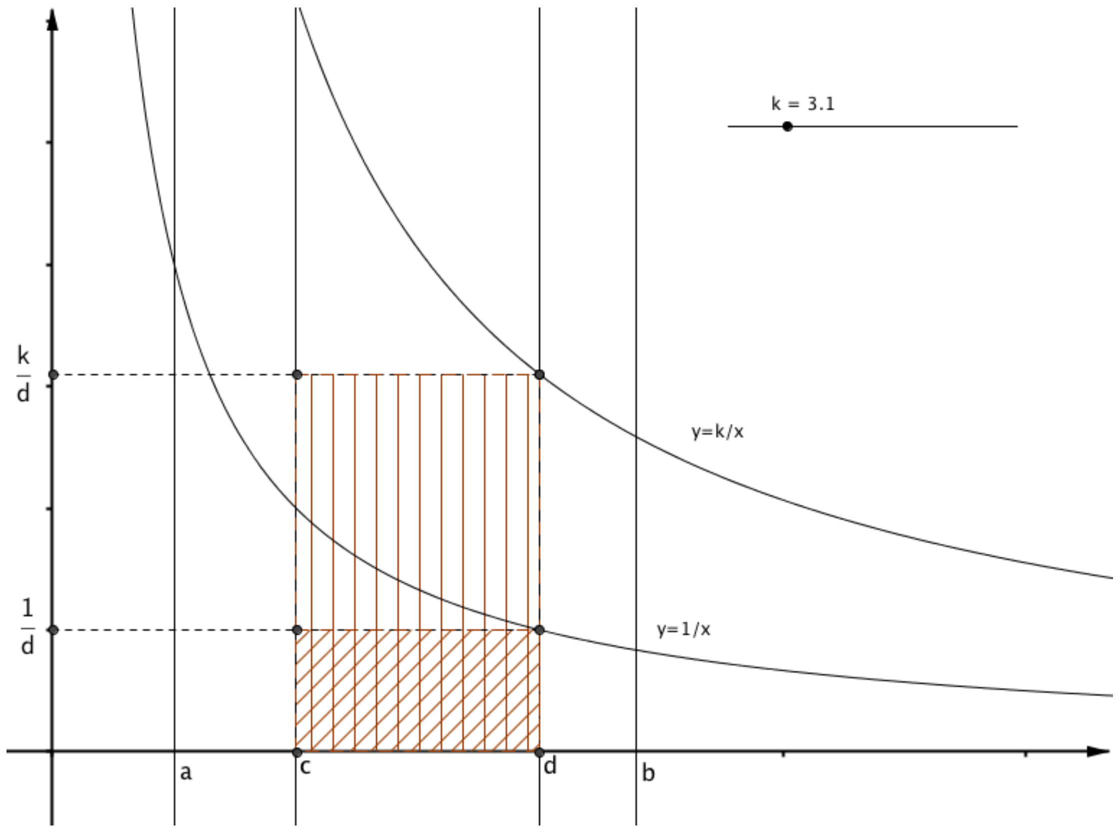


Figura 24

6.1 Base do Sistema de Logaritmos

Definição: A base do sistema de logaritmos é definida como sendo o número $a > 1$ tal que $H(k)_1^a = 1$ o que equivale a escrever $\log a = 1$.

Tomando a relação log x = k ln x, x > 0, para x = a temos $\log a = 1$, o que caracteriza a base pela relação 1 = k ln a , ou seja, k = 1/(ln a).

A seguir são apresentados dois exemplos:

1) A hipérbole a ser traçada para desenvolver o sistema de logaritmos na base 2, é y = 1/(x.ln 2), uma vez que k = 1/(ln 2). Além disso a área da faixa dessa hipérbole compreendida entre 1 e x é o logaritmo de base 2 de x.

2) Se a área da faixa de uma hipérbole é $H(k)_1^5 = 1$, então a base do sistema de logaritmos associada a essa hipérbole é igual a 5.

6.2 Função Logarítmica em outras bases.

Na seção 6.1 vimos que a relação que caracteriza a base a é $k=\frac{1}{\ln a}$. Desta forma o logaritmo na base a de um número x, está associado a hipérbole $y=\frac{1}{x\ln a}$.Vamos adotar a notação $\log_a x$ para um logaritmo de base a de um número real x, tal que $x>0$. Assim, podemos definir a função[21] $y=\log_a x$ como fizemos para definir a função $y=\log x$. Para a > 1, $y=\log_a x$ é igual a $H\left(\frac{1}{\ln a}\right)_1^x$ para $x>1$, igual a zero para $x=1$ e igual a $-H\left(\frac{1}{\ln a}\right)_1^x$,para $0<x<1$ (Figura 25.1). A partir daí é possível verificar que todas as propriedades da função $y=\log x$ continuam válidas, tais como: a função é crescente $(a>1)$,contínua e ilimitada superiormente e inferiormente.

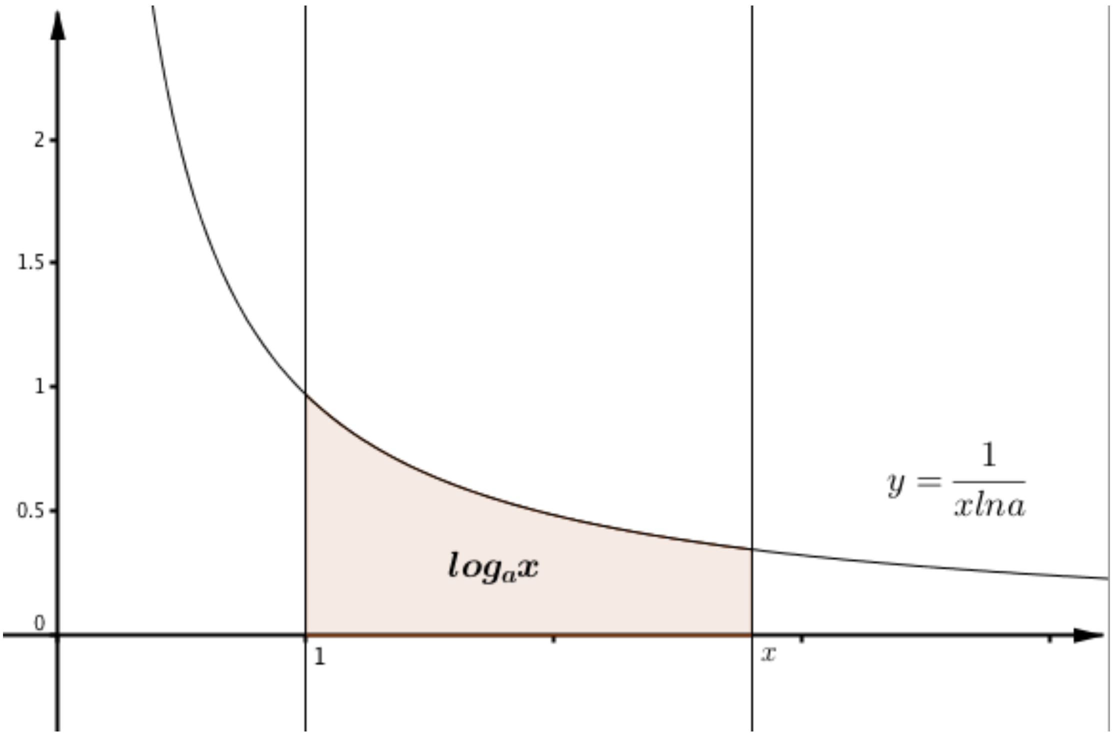


Figura 25.1

---

[21] Vale ressaltar que para k > 0 estamos considerando apenas bases maiores que 1, porém não há nenhum problema em fazer assim, uma vez que basta tomar uma base, $b=\frac{1}{a}$ e $\log_a x=-\log_b x$

Então:

$$y = \log_a x = \begin{cases} H(1/_{x\ln a}), x > 1 \\ 0, x = 1 \\ -H(1/_{x\ln a}), 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{,para todo } a > 1$$

De acordo com a definição geométrica dada função logarítmica de base a , podemos afirmar que $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, para $a > 1, x > 0$. Para provarmos a relação considere o retângulo da figura 25.2, inscrito na hipérbole $y = \frac{1}{x\ln a}$, que tem como base o segmento [1,d] é igual a $\frac{1}{\ln a}$ vezes a área do retângulo inscrito na hipérbole $y = \frac{1}{x}$ que tem a mesma base[22]. Assim $\log_a x = \ln x \ . \ \frac{1}{\ln a}$ para $a > 0$, caracterizada por $\log_a a = 1$.

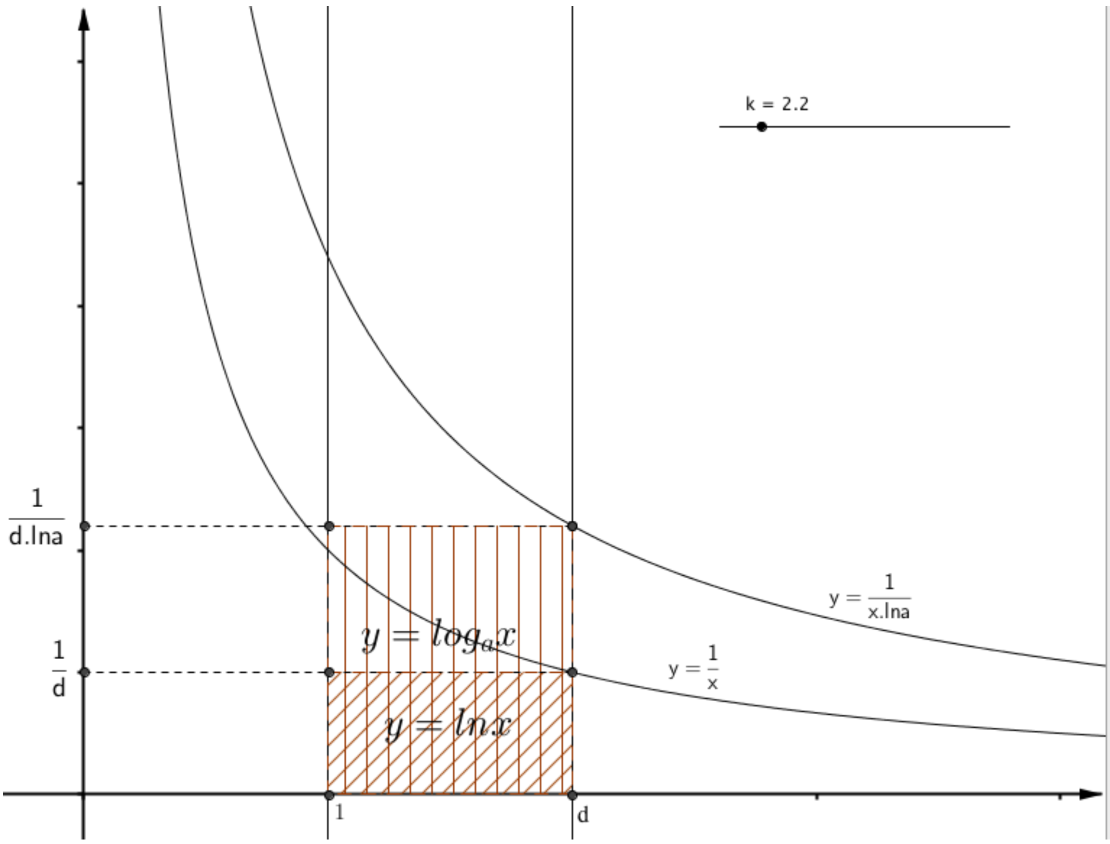


Figura 25.2

[22] Na figura 25, tomamos 0 < $\ln a$ < 1 porém para $\ln a$ > 1 o desenvolvimento é análogo.

Na figura 26 o objeto de aprendizagem, construído no Geogebra, tem como objetivo ilustrar o estudo de $y = \log_a x$. Nesse objeto o aluno entra com a base e o valor de x, e a partir daí os elementos são reposicionados dinamicamente.

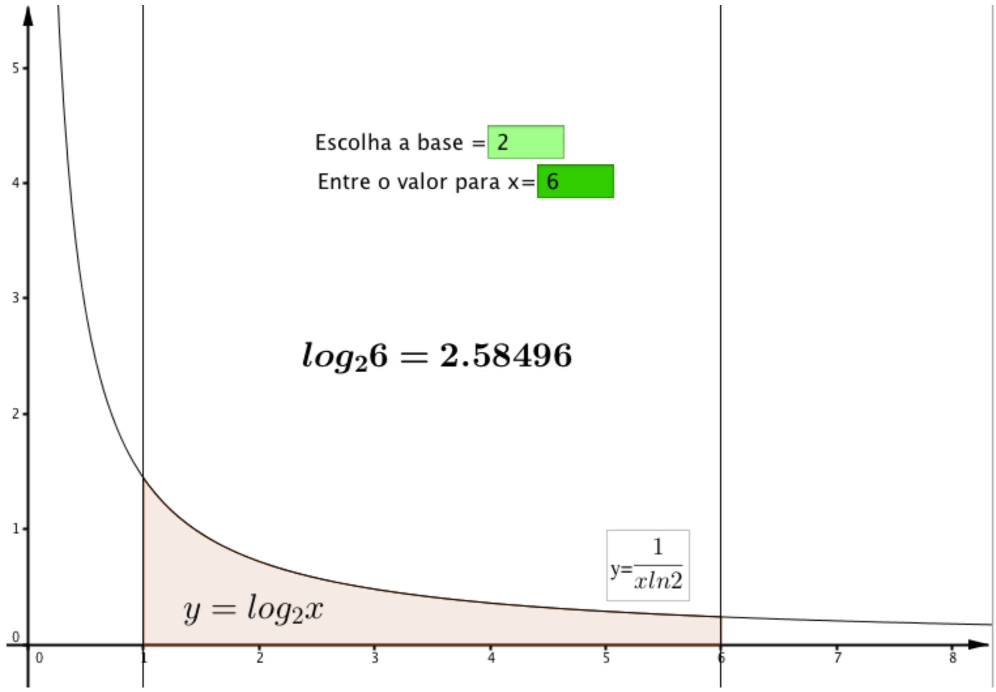


Figura 26

Nota: A definição de base, da maneira como foi definida, não contempla bases entre 0 e 1, porém esse estudo pode ser ampliado, podendo ser utilizado para tal, o objeto de aprendizagem da figura 26. Todavia a aplicação da sequência em sala de aula, mostrou que isso gerou uma confusão quando os alunos se deparavam com notações em que a base estava entre zero e um. Uma saída foi a partir da relação $\frac{\log x}{\log b} = \frac{k \ln x}{k \ln b} = \frac{\ln x}{\ln b}$, demonstrada no capítulo 6, definir a função logarítmica de base real positiva e diferente de 1, como a seguir:

Se a for um número positivo qualquer, diferente de um, então a razão $\frac{\log x}{\log a} = \frac{k \ln x}{k \ln a} = \frac{\ln x}{\ln a}$,só depende dos valores de x e de a, isto é, não depende do valor de k. Portanto podemos definir a função $\log_a x$: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ para cada a real positivo diferente de um, tal que $\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a} e \log_a a = 1$. Para $0 < a < 1$, a função $\log_a x$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é decrescente. De fato para $0 < a < 1$ o denominador da razão $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ é negativo e podemos escrever $\log_a x = -\frac{\ln x}{|\ln a|}$, assim temos que para valores crescentes de x os valores de $\log_a x$ são decrescentes para $0 < a < 1$.

6.3 Mudança de base

Na seção anterior promovemos mudanças de base, por exemplo quando provamos a relação $\frac{\log x}{\log b} = \frac{k \ln x}{k \ln b} = \frac{\ln x}{\ln b}$ que está associada a um determinado valor de k, e chegamos na relação $\log_a \mathrm{x} = \frac{\ln \mathrm{x}}{\ln a}$.

Vamos provar que podemos escrever um logaritmo de base a em qualquer outra base b, ou seja, $\log_a \mathrm{x} = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

De fato, $\log_a \mathrm{x} = \frac{\ln \mathrm{x}}{\ln a}$, $\log_{\mathrm{b}} \mathrm{x} = \frac{\ln \mathrm{x}}{\ln \mathrm{b}}$ e $\log_{\mathrm{b}} \mathrm{a} = \frac{\ln \mathrm{a}}{\ln \mathrm{b}}$. Dividindo a segunda equação pela terceira temos $\frac{\log_{\mathrm{b}} \mathrm{x}}{\log_{\mathrm{b}} \mathrm{a}} = \frac{\ln \mathrm{x}}{\ln \mathrm{b}} \cdot \frac{\ln \mathrm{b}}{\ln \mathrm{a}} = \frac{\ln \mathrm{x}}{\ln \mathrm{a}} = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{x}$. Assim fica demonstrada a relação que realiza a mudança de base.

Uma observação importante a respeito do gráficos de $y = \log_a \mathrm{x}$ e de $y = \log_b \mathrm{x}$ é que dados a e b positivos um é obtido do outro multiplicando todas as ordenadas por uma constante. De fato, das relações $\log_a \mathrm{x} = \frac{\ln x}{\ln a}$ e $\log_b \mathrm{x} = \frac{\ln x}{\ln b}$ temos que $\log_a \mathrm{x} = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \log_b \mathrm{x}$.

Vale ressaltar que algumas questões são difíceis de responder quando o logaritmo é tratado como expoente, tais como “Qual o valor do logaritmo na base 10 de 3 ?”

Na abordagem geométrica, são tratadas naturalmente, uma vez que, geometricamente, consiste em descobrir a hipérbole associada a base 10. Vimos que o valor de k tal que log 10 = 1 é igual a $k=\dfrac{1}{\ln 10}$. Traça-se no Geogebra a hipérbole $y=\dfrac{1}{x\ln 10}$ e calcula-se a área $H\left(\frac{1}{\ln 10}\right)_1^3$, assim $\log_{10} 3 = 0{,}47712$ representada na figura 27.

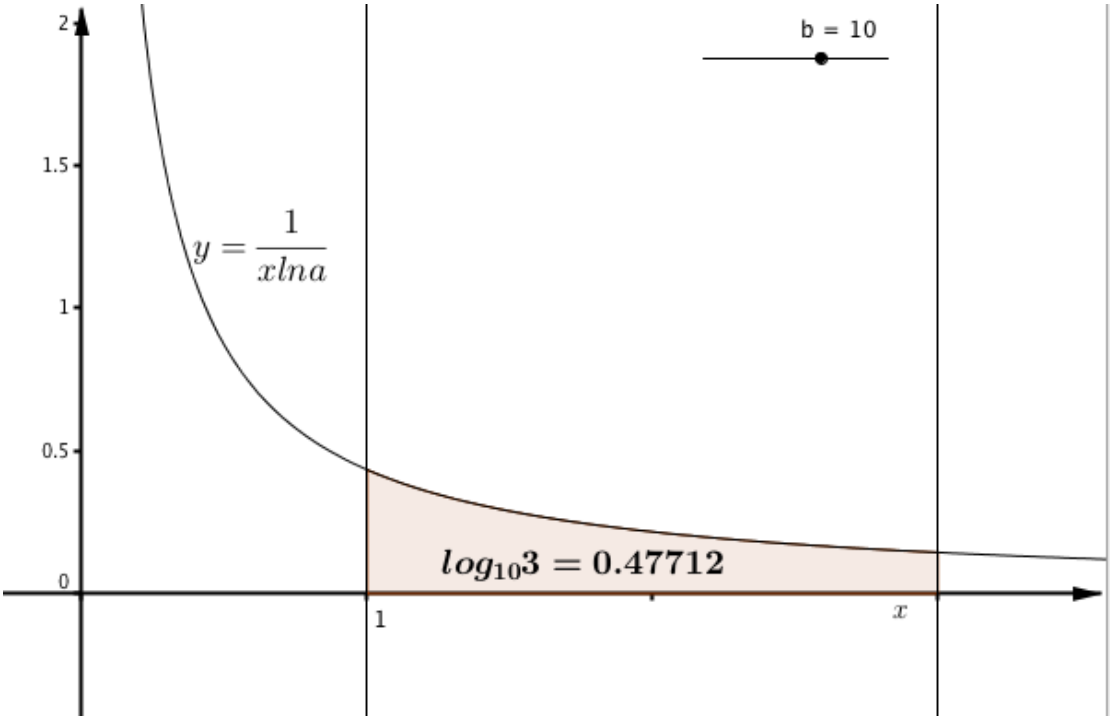


Figura 27

6.3 Base do logaritmo natural: o número “e”.

Definimos que a função logarítmica associada a hipérbole y = 1/x é a função logarítmica natural, que representamos por y = ln x, x > 0.

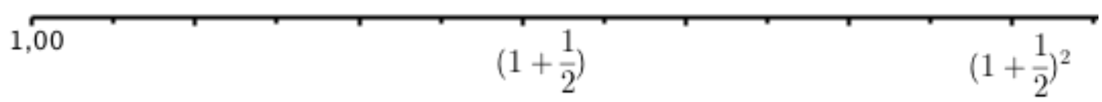
De acordo com a definição de base do sistema de logaritmos, a base do logaritmo natural é um número maior que um tal que $H_1^e = 1$. Denominaremos essa base pela letra “e”, então podemos escrever $\log_e x = \ln x$. Esse “e” é um número único, pois pela proposição 3 do capítulo 4, existe um único número real positivo tal que $H_1^e = 1$. Desta forma as afirmações ln x = 1 , $H_1^e = 1$ e x = e são equivalentes. O que faz o número “e” tão importante ? Segundo o professor Elon Lages Lima, a resposta mais concisa repousa no fato que este número é importante porque é inevitável. O número "e" aparece de forma natural em fenômenos da natureza que envolvem grandezas cuja variação é proporcional ao valor da grandeza naquele instante, tais como decaimento radioativo, crescimento populacional e cálculo de juros.

Uma aplicação do número "e" que pode ser utilizada em sala de aula para disparar o interesse por esse número é a evolução de um capital que é aplicado em um fundo de investimento, no qual um capital é investido a uma taxa de juros fixada e escolhe uma capitalização dentre algumas opções. A capitalização é a frequência com que as taxas de juros serão aplicadas. Por exemplo para uma taxa de juros igual a 12% ao ano, com capitalização mensal, significa que a taxa usada na operação é a taxa mensal que lhe é proporcional, ou seja, 1% ao mês e poderá ser aplicada 12 vezes no ano. Assim como 24% ao ano com capitalização trimestral significa 6% ao trimestre e poderá ser aplicada 4 vezes no ano.

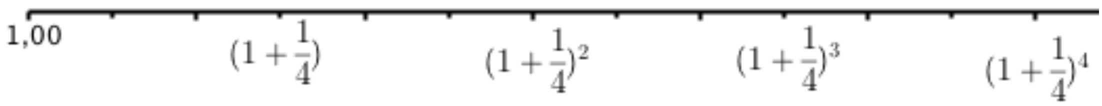
Seja o capital de R$ 1,00 que é aplicado a juros de 100% ao ano. Ao final de um ano o capital investido resulta em um montante de R$ 2,00 se a capitalização for anual.

O esquema abaixo representa o acréscimo de capital ao final de um ano

Suponha que a capitalização seja semestral, o capital inicial sofrerá duas aplicações uma no final do primeiro semestre e outra no final do segundo semestre. No final do primeiro semestre o montante, nesse caso, é igual a $\left(1+\frac{1}{2}\right)$ e partindo desse montante para os próximos seis meses resulta em $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$ reais. O esquema abaixo representa esta situação.



Se a capitalização for trimestral, a taxa de juros proporcional será igual a 25%, isto é, $\frac{1}{4}$ uma vez que o ano foi dividido em 4 trimestres. O montante ao final de um ano será igual $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$ como representado no esquema abaixo.



O ano poderia ser dividido em um número n de partes iguais e transcorrido o primeiro período $\frac{1}{n}$ do ano, o montante seria igual a $\left(1+\frac{1}{n}\right)$. No fim do segundo período de $\frac{1}{n}$ do ano, o montante seria igual a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, e assim por diante. No fim do ano o montante seria igual a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. O valor de n pode ser tão grande quanto se deseje, por exemplo, imagine que a capitalização possa ser diária, o montante seria igual a $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$ em um ano, ou a cada hora o que resultaria em $\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$ em um ano, ou até mesmo a cada segundo cujo montante seria igual a $\left(1+\frac{1}{31536000}\right)^{31536000}$. Observe a sequência de montantes de acordo com o período de capitalização obtido na tabela com o uso do Geogebra na figura 28.1. A primeira impressão é que a sequência de montantes é crescente e a diferença entre os termos consecutivos decresce. Assim cabe a pergunta se essa sequência "explode", isto é, será possível que o montante cresça infinitamente a medida que o valor de n aumenta e consequentemente uma aplicação de R$1,00 possa fazer alguém rico nas condições propostas inicialmente?

Para responder a esta pergunta vamos sugerir um estudo do limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tender ao infinito.

Considere a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e seu gráfico representado abaixo, para x > 0.

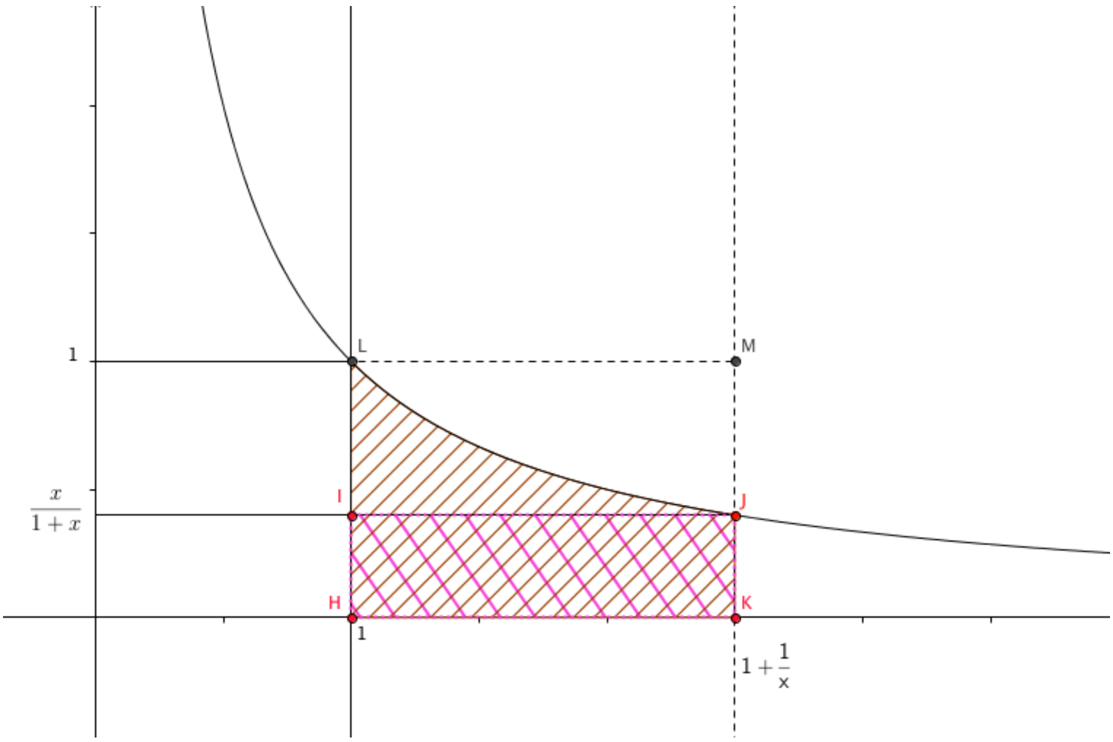


Figura 28.2

A área $H_1^{1+\frac{1}{x}}$ é igual a $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ e está contida em um retângulo de base $\frac{1}{x}$ e altura 1. Logo podemos escrever $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$, que multiplicando ambos os membros pelo número positivo x, obtemos $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$, assim $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 1$. Sabendo que $H_1^e = 1$, podemos afirmar que o número $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$, quando x > 0. (*)

O retângulo IJKH que tem base igual $\frac{1}{x}$ e altura $\frac{x}{x+1}$ está contido na faixa $H_1^{1+\frac{1}{x}}$, então podemos escrever $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$ e multiplicando ambos os membros pelo número positivo x, obtemos $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{x}{x+1}$ o que implica $H_1^{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} > H_1^{e^{x/(x+1)}}$

uma vez que a área $H_1^{e^x} = x$. Assim podemos escrever $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > e^{1/(1+x)}$. (**)

De (*) e (**) , escrevemos: $e > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > e^{x/(1+x)}$, para todo x > 0.

Fazendo x tender para infinito, podemos verificar que a expressão $\frac{x}{x+1}$ tende para 1,

de fato $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ e quando x (x > 0) tende para o infinito o valor de $\frac{1}{x}$ tende para

zero. Assim fazendo x tender para o infinito o valor de $e^{x/(1+x)}$ tende para o número e . Como $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ está mais próximo do número **e** do que $e^{x/(1+x)}$, concluímos que o limite de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ quando x tender para o infinito é igual ao número **e**, se x > 0.

Retornando ao problema anterior, mesmo que n cresça continuamente o montante terá como limite um valor igual ao número **e**.

Para x < 0, a demonstração é análoga e pode ser encontrada no livro Logaritmos do professor Elon Lages Lima.

Utilizando um objeto de aprendizagem construído no Geogebra, é possível estimar o valor do número **e**, como representado na figura 28.1. O Geogebra nos indica que o valor do número "e" é aproximadamente igual a 2,7183, porém este número é um número irracional[23], isto é, não pode ser obtido como quociente de dois inteiros.

[23] Podemos ir mais adiante, pois este número é um irracional transcendente. Um número transcendente (ou transcendental) é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial a coeficientes racionais.

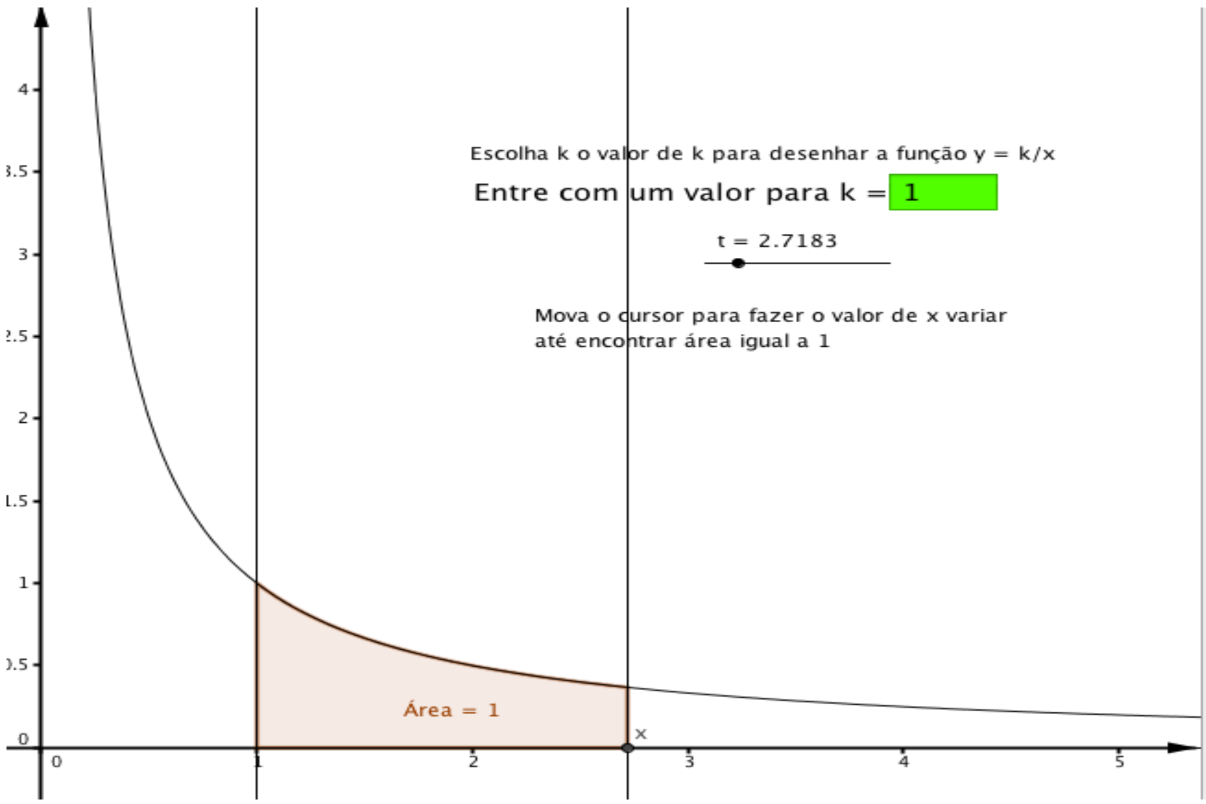


Figura 28.1

Um outro objeto de aprendizagem que pode ser utilizado para trabalhar o significado e aplicação do número "e" consiste em uma planilha, construída no Geogebra, cujo objetivo é estudar o valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para valores crescentes de n, como na figura 28.1. [24]

Ajuste o Geogebra para o arredondamento de 15 casas decimais e construa as células A1 com os valores para n e A2 para $\left(1+\frac{1}{A1}\right)$^A1. A partir daí crie uma lista de números e trabalhe o "crescimento" de n e da expressão "e".

[24] É importante que além da apresentação os alunos construam a planilha.

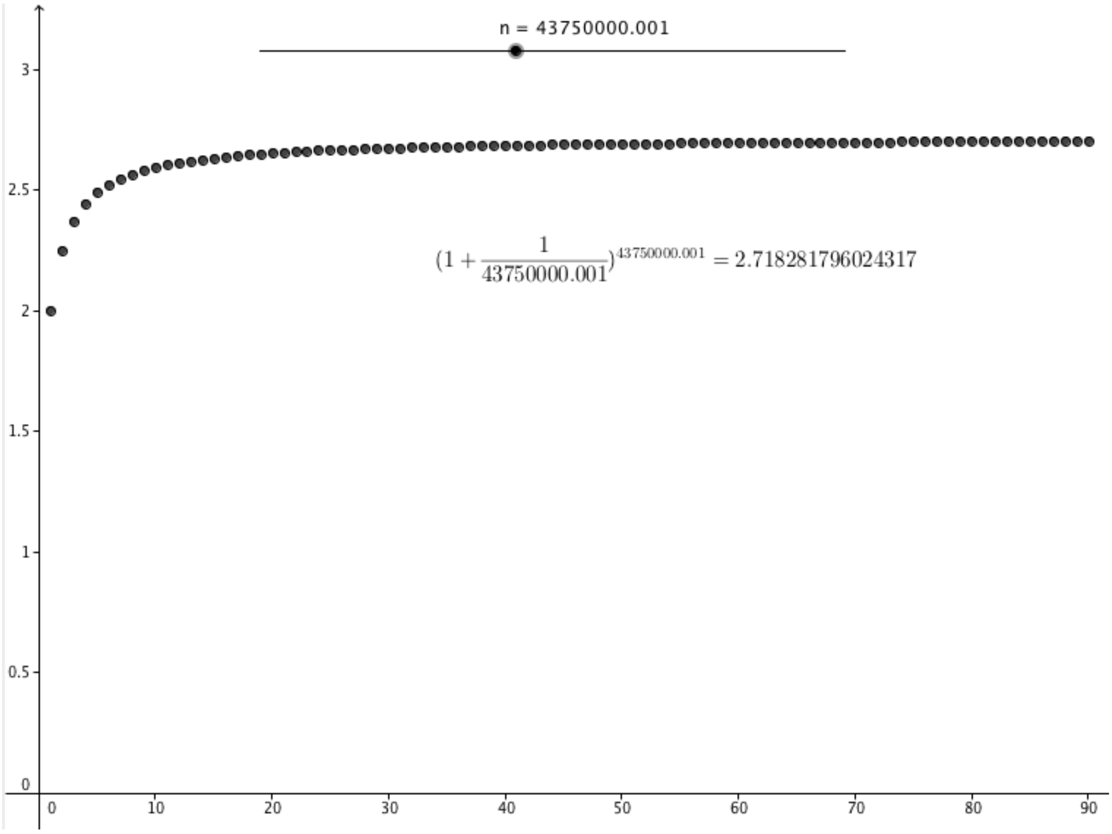

n = 43750000.001
$(1+\frac{1}{43750000.001})^{43750000.001} = 2.718281796024317$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90

Figura 28.1

Capítulo 7

Funções Exponenciais

7.1

Definição da potência a^x para x racional.

Antes de definir a potência a^x para x real, vamos utilizar a "fonte inspiradora" para a desenvolver esta definição.

Proposição 4: Seja $r=\dfrac{p}{q}$ um número racional , vamos provar que $y=a^r$ se e somente se $\log_a y=r$.

Demonstração: Se $y=a^r$ então $\log_a a^r = r\cdot\log_a a = r$, uma vez que $\log_a a=1$

Reciprocamente, se $y>0$ e $\log_a y=r$ e $\log_a a^r=r$, então pela proposição[25] quatro, concluímos que $y=a^r$, como queríamos demonstrar.

7.2 Definição da potência a^x para x real.

Até agora nos limitamos a operar com potências a^x, onde x é racional, isto é, não respondemos as questões que tinham como objetivo estimar o valor de potências do tipo $3^{\sqrt{2}}$.

Definição: Dado o número real x, a^x é o único número positivo cujo logaritmo de base a é igual a x.

De fato, pela proposição quatro , podemos garantir que a^x existe e é única. Na figura 29 é possível visualizar que geometricamente,

a^x é a abscissa que devemos tomar para que a faixa da hipérbole $y=\dfrac{1}{x\ln a}$ de 1 até a^x tenha área igual a x.

---

[25] Todo número real é o logaritmo de um único número real positivo.

Assim temos uma definição para a^x quando x é um número real qualquer, ao passo que até o momento só podíamos trabalhar com valores de x racionais.

Então, a equivalência $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$ é a definição de a^x para todo x real. Observe que até então, a propriedade $log_a b^m = m \cdot log_a b$ era restrita a valores racionais de m, e agora é extendida a valores reais de m.

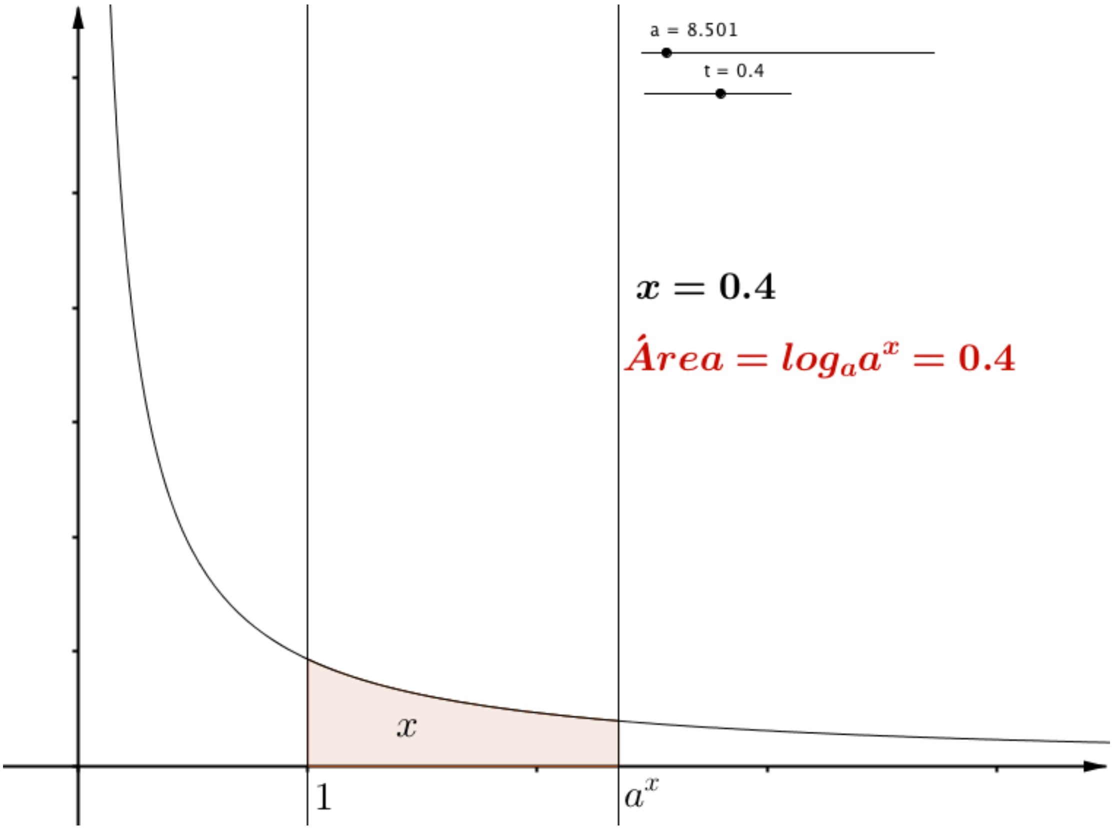


Figura 29

Assim o significado de potências com expoentes irracionais, pela primeira vez nesse trabalho, podem ser abordadas. Por exemplo, calcular o valor de $3^{\sqrt{2}}$ passa a ter significado, uma vez que é o número x > 0 tal que a área sob a hipérbole $y = \dfrac{1}{x \ln 3}$ de 1 a x , vale $\sqrt{2}$ (Figura 30), isto é, $\log_3 3^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Observando o objeto de aprendizagem da figura 30, é possível estimar que o número procurado está entre 4 e 5 e tendo em vista que estamos inseridos em um ambiente tecnológico onde é possível utilizar as ferramentas do Geogebra para descobrir com maior precisão esse valor, estimar o valor de $3^{\sqrt{2}}$ deixa de ser um problema, como pode ser visto em uma atividade contruída no Geogebra na figura 31.

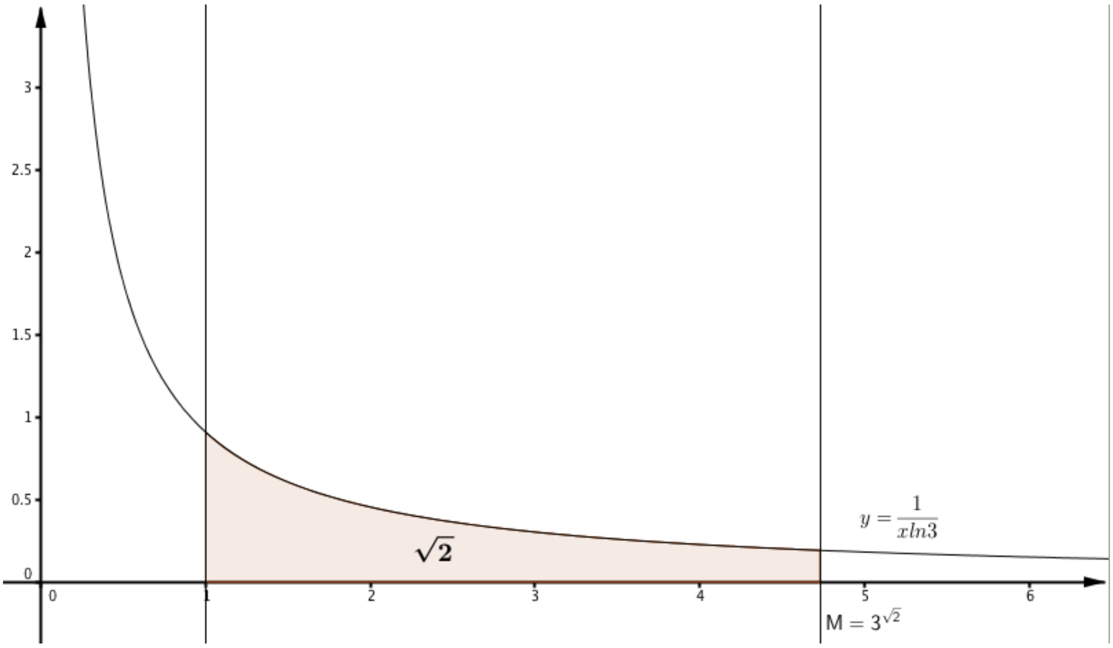


Figura 30

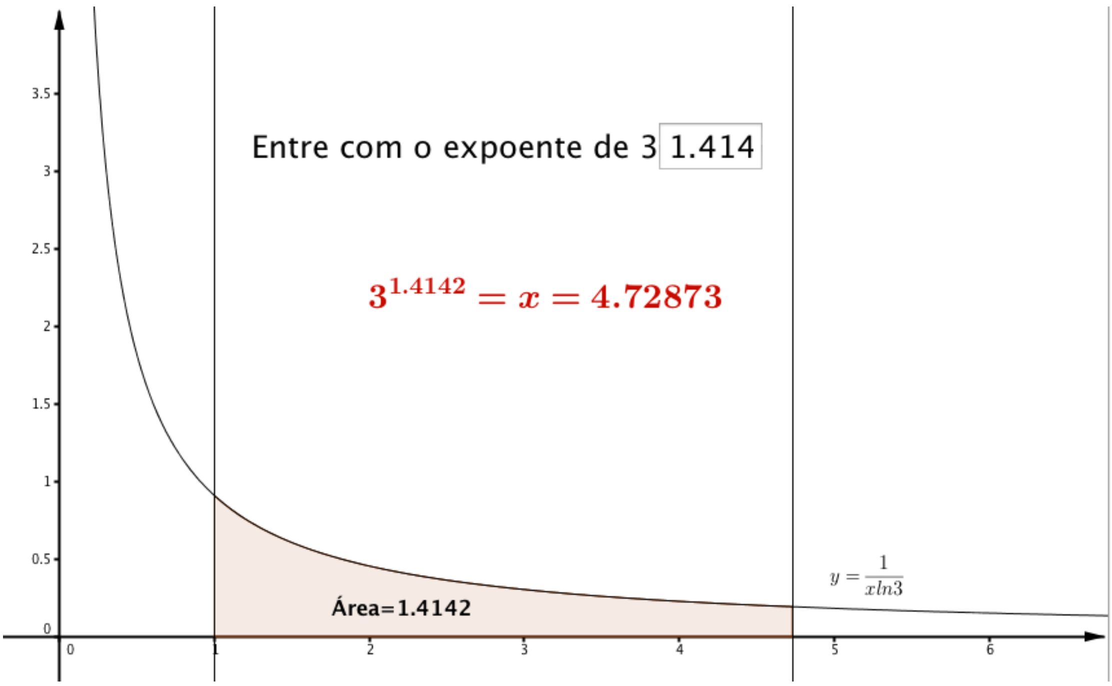


Figura 31

7.3 Função Exponencial como inversa da Função Logarítmica

Na seção (6.2) definimos a função logarítmica $\log_a x$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, para todo número real positivo $a \neq 1$, crescente, se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Vimos na seção (7.2) que, dado um número real x, a^x é o único número positivo cujo logaritmo de base a é igual a x. Assim, a correspondência entre x e $y = a^x$ define uma função cujo domínio contém todos os números reais e contradomínio todos os reais positivos, denominada função exponencial de base a ($a > 0$ e $a \neq 1$).

A função exponencial é a função inversa[26] da função logarítmica

Demonstração: Seja $I_a(x)$ a função inversa da função logarítmica, definida por $I_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$. Pela definição de função inversa, temos que:

(i) $I_a(\log_a t) = t$, assim $\log_a t$ é solução única de $I_a(x) = t$ para todo t real positivo

(ii) $\log(I_a(u)) = u$, assim $I_a(u)$ é solução única de $\log_a x = u$ para todo u real.

A proposição quatro assegura em (ii) que dado o número real u, então $I_a(u)$ é único, e definimos anteriormente que $\log_a a^x = x$ para todo x real, assim $I_a(u) = a^u$, e particularmente temos $I_a(0) = 1$ e $I_a(1) = a$ o que em (i) ocorre para t = 1 e t = a respectivamente. Assim $I_a(x) = a^x$ é uma notação permanente para a função inversa da função logarítmica, o que significa resumidamente que $\log_a(a^x) = x; a^{\log_a x} = x$.

Geometricamente estes dois últimos fatos podem ser obtidos naturalmente, o primeiro já foi representado na figura 29 quando da definição de a^x, quanto a segunda observe nas figuras 32 e 33 que a área sob a hipérbole $y = \dfrac{1}{x \ln a}$ nos intervalo $[1, a^{\log_a x}]$ e

[26] Diz-se que uma função $g : Y \to X$ é a inversa da função $f : X \to Y$ se $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

[1,x] são iguais. Assim pela proposição 3, podemos concluir que $a^{\log_a x} = x$, para todo x > 0.

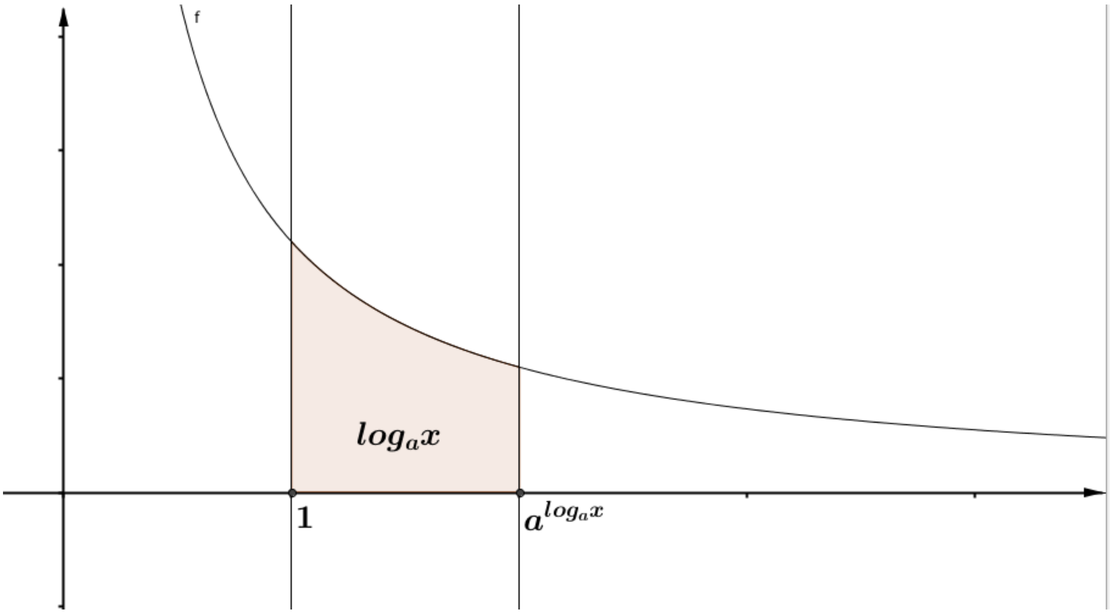


Figura 32

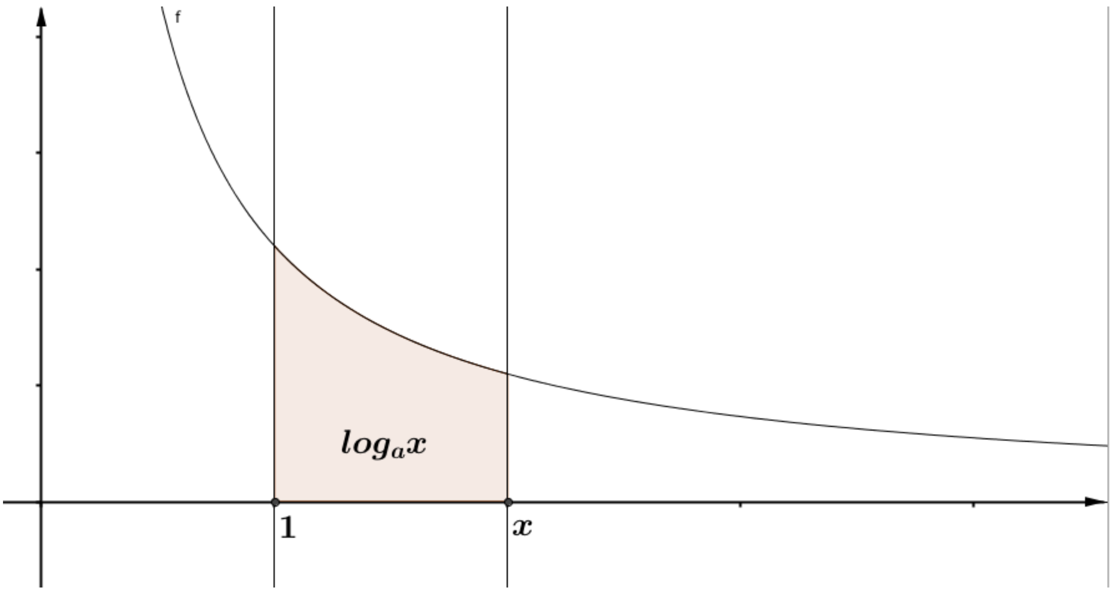


Figura 33

Observe que estas últimas considerações proporcionam a liberdade de tratar as propriedades da potenciação cujos expoentes são números reais. Assim, desde que

$a > 0$ e $a \neq 1$, as propriedades abaixo continuam válidas para quaisquer expoentes reais.

$1) a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
$2) (a^x)^y = a^{xy}$
$3) (ab)^x = a^x \cdot b^x$
$4) a^0 = 1$
$5) a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Farei apenas a demonstração de (1), as outras seguem a mesma linha de desenvolvimento.

Demonstração (1): Seja a um número real positivo e x e y reais quaisquer.

$$\log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a a^x + \log_a a^y$$
$$\log_a(a^x \cdot a^y) = x \cdot \log_a a + y \cdot \log_a a = x + y$$

Provamos que a^{x+y} é o único número real tal que $\log_a a^{x+y} = x + y$, assim $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ como queríamos demonstrar.

7.4 Gráfico da Função Exponencial

Sendo a função exponencial o inverso da função logarítmica, podemos obter o gráfico da função exponencial a partir do gráfico da função logarítmica.

As funções inversas apresentam a propriedade de que seus gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$. Utilizando o Geogebra (Figura 34) é fácil obter o gráfico de uma função exponencial, basta traçar o gráfico de uma função logarítmica qualquer como por exemplo a função logarítmica de base 2 , $y = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$ e utilizar as ferramentas[27] do Geogebra para "desenhar" a reflexão em torno da reta $y = x$.

---

[27] Utilizar as ferramentas do Geogebra para verificar algumas propriedades da função inversa é uma atividade que otimiza o traçado de inversas.

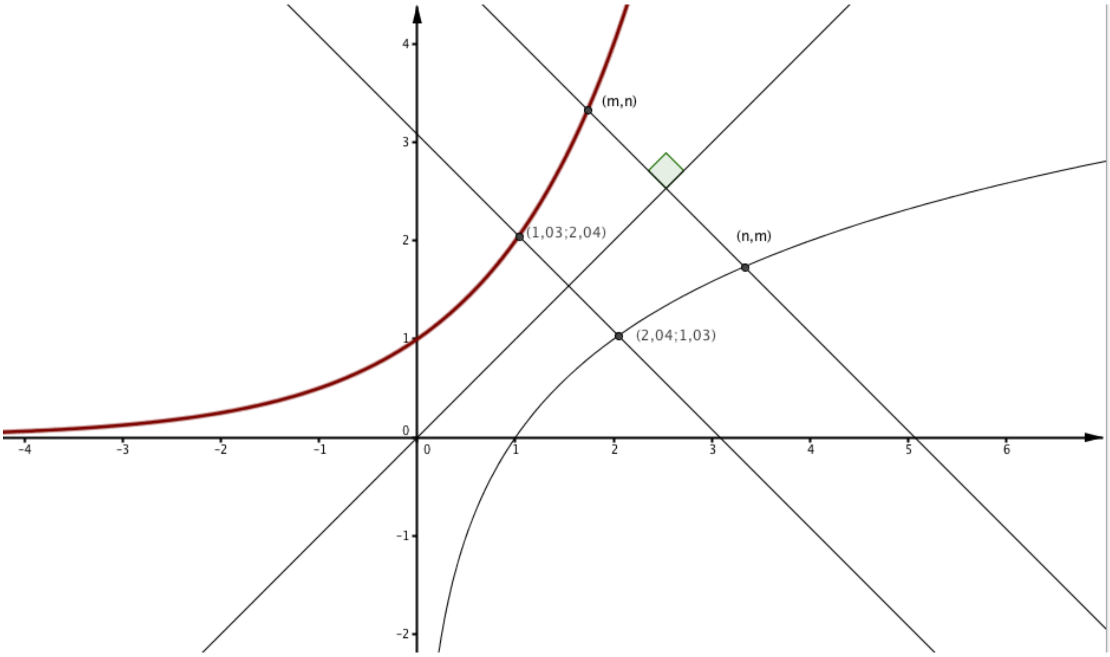


Figura 34

Nesta atividade é uma ótima oportunidade para descrever algumas características da função exponencial como inversa da função logarítmica, tais como:

i) monótona e injetiva[28]
ii) ilimitada superiormente
iii) contínua
iv) a exponencial cresce "rapidamente" , enquanto a logarítmica cresce "lentamente".
v) o eixo x é uma assíntota do gráfico

[28] As equações exponenciais são resolvidas com base na injetividade da função exponencial e as inequações com base na monotonicidade.

Capítulo 8

8.1.Caracterização da Função Logarítmica

Um dos modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares, é o modelo exponencial, caracterizado pela função exponencial e consequentemente da sua inversa, a função logarítmica. A aplicação de um determinado modelo matemático tem que vir acompanhado da explicação que justifica esse modelo em detrimento de outro. Para tal é fundamental que sejam conhecidas os elementos matemáticos que o caracterizam.

Nos capítulos anteriores, provamos que a função logarítmica $y = log_a x$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente $(a > 1)$ e transforma produtos em somas, uma vez que $log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$, para quaisquer m e $n \in \mathbb{R}^+$, porém existe outra função que seja monotônica e transforme produtos em somas? Para responder a essa questão, reporoduzo a demonstração do teorema da caracterização[29].

Teorema da Caracterização das funções logarítmicas: *Seja* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou descrescente) tal que* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$. *Então existe* $a > 0$ *tal que* $f(x) = log_a x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração: Seja f uma função crescente, o outro caso é tratado da mesma maneira, tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$. Temos $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$, e como f é crescente devemos ter $f(2) = b > 0$.

[29] O teorema da caracterização pode ser encontrado no livro "A Matemática do Ensino Médio, Volume1" de Elon Lages Lima e outros (p.194, 1998) publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

Seja $g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ uma nova função tal que $g(x)=\dfrac{f(x)}{b}$, crescente, que transforma produtos em somas. Temos:

i) $g(2)=\dfrac{f(2)}{b}=1$

ii) $Para\ \ todo\ \ m\in\mathbb{N},\ g(2^{m})=g(2\cdot 2\cdot 2\ldots\cdot 2)=g(2)+g(2)+\ldots+g(2)=m$

$g(1)=g(2^{m}\cdot 2^{-m})=g(2^{m})+g(2^{-m})=0\Rightarrow g(2^{-m})=-m$

iii) Se $r=\dfrac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}^{*}$ então $m=r\cdot n$.

$$m=g(2^{m})=g(2^{rn})=g\left(\left(2^{r}\right)^{n}\right)=n\cdot g\left(2^{r}\right)\Rightarrow g\left(2^{r}\right)=\frac{m}{n}$$

iv) Se $x\in\mathbb{R}$ é irracional então, para r,s racionais tem-se:

$r<x<s\Rightarrow 2^{r}<2^{x}<2^{s}\Rightarrow g(2^{r})<g(2^{x})<g(2^{s})\Rightarrow r<g(2^{x})<s$

Assim todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $g(2^{x})$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $g(2^{x})$. Segue-se que $g(2^{x})=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Portanto $g(y)=\log_{2}y$ para todo $y>0$. Então para $x>0$, temos:

$x=2^{g(x)}=2^{\frac{f(x)}{b}}=\left(2^{1/b}\right)^{f(x)}=a^{f(x)}$, com $a=2^{1/b}$, logo $f(x)=\log_{a}x$.

8.2.Caracterização da Função Exponencial

Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ uma função monótona injetiva, tal que $g(x+y)=g(x)\cdot g(y)$ para $x,y\in\mathbb{R}$. Então, ou g é identicamente nula ou assume apenas valores positivos. Seja $a=g(1)$. Se g é crescente, então $a>1$ e $g(x)=a^{x}$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Se g é decrescente, tem-se ainda $g(x)=a^{x}$ para todo x real, mas agora $0<a<1$.

Demonstração: Esta caracterização é um corolário do teorema anterior, assim basta aplicar o teorema da caracterização da função logarítmica em $g^{-1}:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$, uma vez que a função exponencial é a inversa da função logarítmica. De fato, a função crescente f, é tal que $f(xy)=f(x)+f(y)$, isto é, leva produtos em somas. A sua inversa f^{-1} leva soma em produtos, $f^{-1}(f(x)+f(y))=xy=f^{-1}(f(x))\cdot f^{-1}(f(y))$, o que demonstra o corolário. oNo livro “A Matemática do Ensino Médio, Volume 1, Lima (2011) e outros" encontramos o seguinte Teorema da Caracterização das funções exponenciais.

" A função $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ *é do tipo exponencial quando se tem* $g(x)=ba^{x}$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$*, onde* a *e* b *são constantes positivas. Se* $a>1$*, a função é crescente e se* $0<a<1$*, a função é decrescente.*

Se a função $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ *é de tipo exponencial então, para quaisquer* $x,h\in\mathbb{R}$*, os quocientes abaixo dependem apenas de* h*, mas não de* x*.*

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}=a^{h}-1 \quad e \quad \frac{g(x+h)}{g(x)}=a^{h}$$

A recíproca segue: Seja $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para* $x,h\in\mathbb{R}$ *quaisquer, o acréscimo relativo* $[g(x+h)-g(x)]/g(x)$ *dependa apenas de* h*, mas não de* x*. Então, se* $b=g(0)$ *e* $a=g(1)/g(0)$*, tem-se* $g(x)=ba^{x}$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$*.*

Demonstração: Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que $\phi(h)=g(x+h)/g(x)$ *independe de* x*. Substituindo, se necessário,* $g(x)$ *por* $f(x)=g(x)/b$*, onde* $b=g(0)$*,* f *continua monótona injetiva, com* $f(x+h)/f(x)$ *independente de* x *e, agora, com* $f(0)=1$*. Então, pondo* $x=0$ *na relação* $\phi(h)=\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$*, obtemos* $\phi(h)=f(h)$ *para todo* $h\in\mathbb{R}$*. Vemos assim que a função monótona injetiva* f *cumpre* $f(x+h)=f(x)\cdot f(h)$*, ou seja* $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ *para quaisquer* $x,y\in\mathbb{R}$*. Segue-se então que a função* g *é uma função exponencial".*

O teorema da caracterização das funções exponenciais e consequentemente da sua inversa fornece um critério simples para identificar modelos na resolução de problemas elementares, tais como: Decaimento radioativo, capital a juros fixos, concentração de soluções, lei de resfriamento de Newton e outros. Assim dado um problema que pode ser modelado por uma função f, a tarefa é identificar se $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ é constante, isto é, o valor de $f(x+h)$ é proporcional ao valor de $f(x)$ e o coeficiente de proporcinalidade depende apenas de h, mas não de x. Assim a função exponencial descreve grandezas cuja taxa de variação é proporcional ao valor daquela grandeza naquele momento.

Capítulo 9
Considerações Finais

O texto desenvolvido nesta sequência didática tem como foco a utilização dos objetos de aprendizagem , desenvolvidos com o Geogebra, para justificar e auxiliar o estudo da abordagem geométrica de logaritmos. A “resposta” obtida, através de testes posteriores a abordagem, foi positiva o que mostra, neste grupo particular, que a abordagem geométrica associada à utilização dos objetos de aprendizagem pode ser viável no ensino médio. É bem verdade que na resolução de problemas envolvendo exponenciais as manipulações que tratavam o logaritmo como expoente não ficaram de fora, porém a oportunidade de compreender o modelo geométrico relevou pontos que de outra maneira ficariam esquecidos ou não seriam trabalhados no nível médio, como a definição de área e a área sob uma curva.

Todas as construções utilizadas nesse trabalho estão disponíveis no formato de arquivos no Geogebratube cujos nomes podem ser encontrados no formato tccbr_(numero_do_capítulo).

Bibliografia

[1]Lima, E. L. (1998). *A Matemática do Ensino Médio* (3a Edição ed., Vol. 1). (S. B. Matemática, Ed.) Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil: Sociedade Brasileira de Matemática.

[2]Lima, E. L. (1973). *Logaritmos.* Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Livro Tecnico S.A.

[3]Lima, E. L. (2012). *Meu Professor de Matemática* (6.ed. ed.). Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática.

[4]Lima, E. L., Morgado, A. C. & Al, e. (2001). *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.* Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Elon Lages Lima.