UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Álgebra no Ensino Fundamental como Ferramenta de Generalização

André Oliveira dos Santos

Instituto de Matemática

Maceió, Março de 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ANDRÉ OLIVEIRA DOS SANTOS

A ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL COMO FERRAMENTA DE GENERALIZAÇÃO

Maceió - AL
2016

ANDRÉ OLIVEIRA DOS SANTOS

A ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL COMO FERRAMENTA DE GENERALIZAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Flores

Maceió - AL

2016

Catalogação na fonte

Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

S237a Santos, André Oliveira dos.
A Álgebra no Ensino Fundamental como ferramenta de generalização / André Oliveira dos Santos. – 2016.
117 f. : il.

Orientador: André Luiz Flores.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 114-115.
Anexos: f. 116-117.

1. Álgebra – Estudo ensino. 2. Álgebra – História. 3. Sequência didática.

I. Título.

CDU:512

ANDRÉ OLIVEIRA DOS SANTOS

A ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL COMO FERRAMENTA DE GENERALIZAÇÃO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 29 de março de 2016.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. André Luiz Flores (Orientador)

Luis Guillermo Martinez M.
____

Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza

Vinicius Moreira Mello
____

Prof. Dr. Vinicius Moreira Mello

Aos meus pais: Antonio Avelino dos Santos e Sandra Cristina dos Santos, a minha esposa Maria Edivânia de Souza e meu filho André Lucas Souza Santos.

AGRADECIMENTOS

A Deus acima de tudo pelo dom da vida e pela capacidade para realização desse trabalho, que me concedeu a realização deste trabalho;

Aos meus Pais, Antonio Avelino dos Santos e Sandra Cristina dos Santos, a minha esposa Maria Edivânia de Souza e meu filho André Lucas Souza Santos, pelo incentivo e por tudo que sou e também aos meus irmãos que sempre estiveram ao meu lado;

Ao meu orientador Professor, André Luiz Flores, a quem sou muito grato pela paciência e orientação;

Aos meus amigos do mestrado (PROFMAT), Aldo Agustinho, André Carlos, Elielson Magalhães, Elinelson Gomes, Evison Rosalino, Josimar Santos, Leandro, Lindberg, Marcel Cavalcante, Marcelo José e Maria Dayane, que incentivaram e contribuíram com o meu crescimento e aprendizado durante todo o curso.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFAL que me ajudaram e me incentivaram;

Aos professores e amigos Ana Quitéria, Edival Faustino e Jeyzon Alexandre pela revisão gramatical do texto e tradução do resumo para o Inglês.

Aos amigos que sempre me incentivaram e que participaram direta ou indiretamente desse trabalho em especial ao Clayton Pereira, Elinelson Gomes, Maria Dayane e Tiago Marinho.

A todos os professores do programa do PROFMAT por terem contribuído para o meu crescimento.

As diretoras Rosângela Ferreira da Silva e Silvânia Ferreira dos Santos pelo apoio e incentivo durante as vezes em que precisei utilizar o espaço da escola.

Aos alunos que aceitaram participar do projeto e à equipe pedagógica da escola e demais colegas de trabalho da Escola Estadual Fernandina Malta onde a proposta foi desenvolvida.

Ao Coordenador do PROFMAT Prof. Dr. Gregório Silva Neto pelo seu empenho e dedicação ao programa.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida durante o mestrado.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo descrever a aplicação de uma sequência didática para uma abordagem da Álgebra no ensino fundamental, tendo a Generalização como recurso didático. Essa sequência didática foi construída, de acordo com as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Também são apresentados relatos de algumas civilizações e suas metodologias aplicadas à resolução de problemas de caráter algébrico. Fala-se ainda, sobre alguns matemáticos que contribuíram no desenvolvimento do simbolismo algébrico. Logo após, apresenta-se um relato sobre como a Álgebra foi introduzida no Brasil e de que maneira ela está sendo cobrada em exames que servem de parâmetro para análise do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), como Prova Brasil e Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), em seguida passamos ao relato apresentado aos alunos, através de slides e vídeos sobre os Padrões existentes na natureza. Por fim, é apresentada a maneira pela qual os alunos desenvolveram o raciocínio na percepção de padrões em sequências numéricas e de figuras, culminando com a construção de sequências de figuras com a utilização de materiais concretos, atividade executada em grupos, o que proporcionou um elo entre teoria e prática.

Palavras – chave: História. Álgebra. Generalização.

ABSTRACT

This paper aims to describe the application of a didactic sequence for an approach to algebra in elementary school, and the generalization as a teaching resource. This teaching sequence was built according to the recommendations of the National Curriculum Parameters (PCN). Also featured are reports of some civilizations and methodologies applied to solving algebraic character problems. There is talk also about some mathematicians who contributed in the development of algebraic symbolism. Soon after, presents an account of how algebra was introduced in Brazil and how it is being charged in tests that serve as parameter for analysis of the Basic Education Development Index (IDEB), as Exhibit Brazil and International Program student assessment (PISA), then passed to the report presented to the students, through slides and videos on existing patterns in nature. Finally, the manner in which students developed reasoning perception patterns of numerical sequences and figures are presented, culminating in the construction of figures sequences with the use of concrete materials, activity performed in groups, which provided a link between theory and practice.

Key - words: History. Algebra. Generalization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como meta principal, apresentar um modo simples e objetivo de trabalhar a Álgebra no Ensino Fundamental. Basicamente, procuramos apresentar uma proposta de ensino da Álgebra que proporcione uma aprendizagem dinâmica e significativa tendo a Generalização como recurso didático.

A abordagem desse tema é de suma importância para o currículo do aluno do Ensino Fundamental, pois, além de preparar os estudantes para estudos posteriores, amplia as possibilidades de relacionar os conhecimentos matemáticos com o seu cotidiano e o desenvolvimento do seu raciocínio. O tema foi escolhido e desenvolvido com o objetivo de criar condições para docentes e discentes superarem as dificuldades na relação entre os conceitos aprendidos na sala de aula e sua funcionalidade na prática. A Generalização e os procedimentos algébricos trabalhados nas atividades foram baseados no que é proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais. As escolhas feitas foram conduzidas pelos seguintes preceitos: (1) oferecer aos docentes uma maneira dinâmica de abordagem da Álgebra, no aspecto da representação, proporcionando uma aprendizagem significativa; (2) criar ferramentas e meios para que os estudantes desenvolvam o seu intelecto e adquiram atitudes favoráveis, valorizando o conhecimento matemático. Esta dissertação foi estruturada da seguinte forma: no primeiro capítulo é feita uma abordagem histórica da Álgebra no que se refere ao seu surgimento, motivada principalmente pela simbologia matemática. Dentro desse contexto, fala-se sobre o surgimento e desenvolvimento da Álgebra, em lugares como, a Babilônia, Egito, Grécia, Índia, Arábia e suas respectivas formas de trabalhar a linguagem algébrica.

Falaremos um pouco sobre algumas contribuições dadas a Álgebra Moderna por matemáticos como François Viète e René Descartes e finalmente, discutiremos um pouco sobre alguns símbolos utilizados atualmente. No segundo capítulo é feita uma abordagem sobre a introdução do Ensino de Álgebra no Brasil como componente curricular e os desafios encontrados por alunos e professores em sala de aula. Logo após, apresentaremos um estudo da forma como ela está sendo avaliada em exames que servem de referencial para medir o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), a Prova Brasil e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). Já no terceiro capítulo apresentamos algumas atividades desenvolvidas em sala de aula, relacionando assim, a teoria com a prática, bem como uma consideração concernente, por parte dos alunos, a respeito dessas atividades.

1 ÁLGEBRA E A LINGUAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentaremos um breve histórico sobre o surgimento e a evolução da Álgebra, suas aplicações e algumas das civilizações que contribuíram para o seu desenvolvimento. Falaremos também da linguagem simbólica da Matemática e sua utilização como ferramenta na resolução de problemas e em seguida discutiremos sobre a introdução da Álgebra Moderna e alguns símbolos utilizados na atualidade.

1.1 Surgimento da Álgebra

A Álgebra como a conhecemos não surgiu nos tempos atuais. A sua linguagem simbólica e procedimentos utilizados para expressar cálculos matemáticos originou-se no mundo antigo. Gregos, egípcios, babilônios, árabes, entre outros povos, que contribuíram para o avanço da Álgebra ao longo dos tempos. Entretanto, foram os árabes quem se destacaram das demais por conta da sua arte de resolver problemas por meio de equações. Com o passar do tempo e grande abordagem dada as equações, a Álgebra caracterizou-se como o estudo da resolução de equações.

Para Boyer 1974, embora Diofanto, matemático grego da antiguidade seja considerado o “pai” da Álgebra, essa denominação cabe a Al – Khowarizmi, tendo em vista o fato de que a obra de Al – Khowarizmi está expressa inteiramente em palavras, o mesmo não ocorre nas obras de Diofanto que utilizava um estilo denominado de sincopado, com o emprego de símbolos de modo que as abreviações expressassem quantidades e operações.

É imprescindível que seja levado em consideração o fato da Álgebra ser constantemente utilizada na resolução de problemas por meio de equações. Roque 2011, ressalta a importância de uma análise aprofundada do significado da palavra Álgebra antes de uma definição. Segundo ela não se pode conceituar a Álgebra do ponto de vista atual.

> [...] Mas para falar da história de uma disciplina Matemática, como a Álgebra, precisamos, antes de mais nada, caracterizar o que entendemos por “Álgebra”. Os procedimentos associados a este tipo de conhecimento não

> podem ter como base sua definição atual, tida como válida desde sempre. O passo decisivo para a constituição da Álgebra como disciplina pode estar na sua organização em torno da classificação e da resolução de equações, o que teve lugar pela primeira vez no século IX, com os trabalhos de Al-Khowarizmi e de outros matemáticos ligados a ele. (ROQUE, 2011, p. 149)

De acordo com Baumgart 1992, mesmo com o termo Álgebra fazendo menção ao estudo de equações, em dias atuais o seu significado é mais abrangente e uma conceituação apropriada necessitaria de uma perspectiva em duas fases: a Álgebra Antiga e a Álgebra Moderna.

1.2 Notação Algébrica

Como visto anteriormente, a linguagem simbólica na Álgebra representa um mecanismo indispensável à solução de problemas matemáticos. Através dela é feita a transformação simbólica de expressões por outras mais simples de solucionar, mas contendo o mesmo significado. A relação existente entre a Álgebra e os símbolos utilizados é praticamente intrínseca, um vez que para a maioria dos discentes ela consiste no estudo e manipulação de símbolos algébricos.

Segundo Roque 2011, foi entre os séculos XII e XIV que os símbolos começaram a ser utilizados em problemas de natureza algébrica tendo como idealizadores os matemáticos árabes e italianos. Entretanto, o uso da notação algébrica tornou-se mais significativa a partir do século XV através do matemático italiano Girolamo Cardano.

Para Baumgart 1992, o desenvolvimento da notação algébrica avançou ao longo de três estágios: o retórico, o sincopado e o simbólico, sendo que neste último a notação passou por diversas transformações.

> O desenvolvimento da notação algébrica evoluiu ao longo de três estágios: o retórico (ou verbal), o sincopado (no qual eram usadas abreviações de palavras) e o simbólico. No último estágio a notação passou por várias modificações e mudanças, até tornar-se razoavelmente estável ao tempo de Isaac Newton (c. 1700). (Baumgart, 1992, p. 3).

1.3 Álgebra na Babilônia

Acredita-se que a Álgebra tenha surgido na Babilônia. Sua origem coincide com o que hoje conhecemos como a abordagem de problemas , que também é a origem da modelagem matemática. Os babilônios tinham nela o ponto forte de sua Matemática. Os problemas eram expressos retoricamente, em palavras, sem notação simbólica, e se relacionam com situações cotidianas que refletem uma realidade. Isso é ressaltado por Baumgart 1992

"Como a Álgebra provavelmente se originou na Babilônia, parece apropriado ilustrar o estilo retórico com um exemplo daquela região", isso é ressaltado por Baumgart 1992, p.4, outra característica da matemática babilônica é a sua geometria com estilo algébrico, expressada através de problemas comuns em uma linguagem geométrica, mas que na realidade são problemas não triviais.

Segundo Eves 2010, foi em meados do ano 2000 a.E.C. que os babilônios desenvolveram métodos para resolver equações lineares e quadráticas com duas incógnitas. Eles também já exploravam a resolução de algumas equações cúbicas e biquadradas nessa época.

> Perto do ano 2000 a.E.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma Álgebra Retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). (EVES, 2010, p. 61-62).

Uma das mais famosas tábulas construídas pelos babilônios para registros de seus problemas é a Plimpton 322 conforme figura 1 a seguir. Segundo Eves, parte da tábula perdeu-se devido a uma rachadura, além do mais a mesma viria ser danificada posteriormente ocasionando a perda de muitos problemas trabalhados pelos matemáticos babilônicos.

Figura 1 - Plimpton 322

Fonte: El mundo de Rafalillo, disponível em: <http://elmundoderafalillo.blogspot.com.br/ 2012_02_ 01_ archive.html>. Acesso em 11 de novembro de 2015.

1.4 Álgebra no Egito

Alguns dos registros mais importantes de toda a Matemática no Egito se encontra nos papiros de Rhind e Moscou, como exibiremos na figura 2 na sequência. Neles consta o registro de mais de uma centena de problemas onde boa parte desses, estão relacionados à utilização de equações lineares que consistia numa estimativa inicial seguida de uma correção final. Esse método ficou conhecido mais tarde pelos europeus como "regra da falsa posição”.

> Muitos dos 110 problemas dos papiros Rhind e Moscou mostram sua origem prática ao lidar com questões sobre o quão substanciosos eram o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domésticas e sobre armazenamento de grãos. Para muitos desses problemas a resolução não exigia mais do que uma equação linear simples e o método empregado fiou conhecido mais tarde na Europa como regra de falsa posição. (EVES, 2010, p.73)

Figura 2 - Papiro de Rhind

Fonte: A Matemática interativa na internet, disponível em: http://www.matematica.br/historia/prhind.html. Acesso em 11 de novembro de 2015.

1.4.1 Regra da Falsa Posição

Considere a equação $ax = b$. Uma maneira de resolvê-la até recentemente, usando somente aritmética, antes dos procedimentos algébricos se tornarem praticamente universais para resolver problemas desse tipo, era a seguinte: Escolha um valor arbitrário x_0 e calcule então o valor de ax_0, que chamaremos de b_0. Na prática, x_0 é escolhido a fim de facilitar as contas. Assim, por exemplo, se a *é* uma fração com denominador 53, é conveniente escolher $x_0 = 53$. Isso eliminará os denominadores, tornando os cálculos mais simples. Considere então a igualdade $ax_0 = b_0$.

Por quanto devo multiplicar os dois membros da igualdade acima para obtermos, do lado direito, b? Claramente por $\frac{b}{b_0}$ **.** Fazendo isso, temos:

$$ax_0 \times \frac{b}{b_0} = b_0 \times \frac{b}{b_0}$$

Ou seja,

$$a \times \left(x_0 \times \frac{b}{b_0}\right) = b_0 \times \frac{b}{b_0} = b.$$

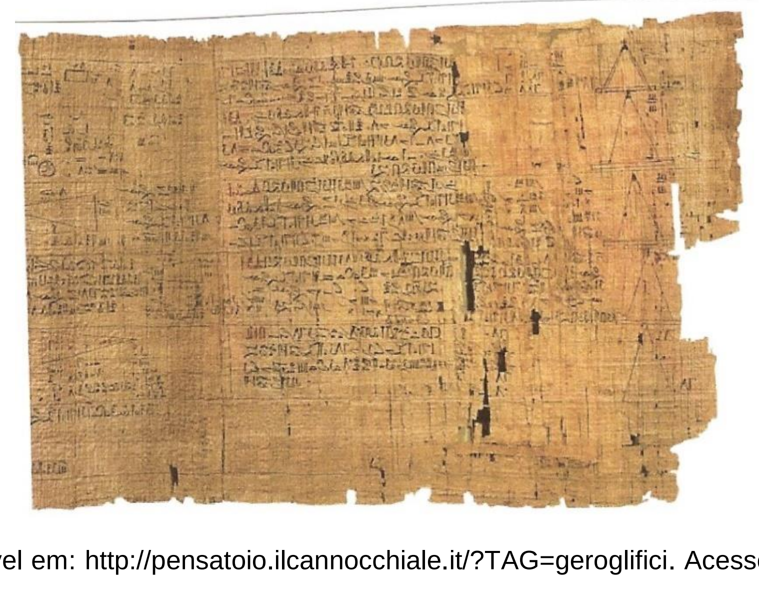
Assim,

$$x_0 \times \left(\frac{b}{b_0}\right)$$

é solução de $ax = b$. O processo descrito acima é conhecido como *regra da falsa posição,* e foi muito usado, ao longo da História, em várias civilizações, até recentemente.

Como os egípcios adoravam resolver problemas com frações unitárias, será apresentado na sequência a resolução de um desses problemas encontrado no papiro de Ahmes, de acordo com a figura 3 abaixo, que fora solucionado através da regra da falsa posição.

Figura 3 - Papiro de Ahmes



Fonte: Pensatoio, disponível em: http://pensatoio.ilcannocchiale.it/?TAG=geroglifici. Acesso em 11 de novembro de 2015.

"Uma quantidade, com 1/7 dela adicionado, torna-se: 19".

Em primeiro lugar, resolvamos o problema como nós o faríamos hoje. O problema se transforma em resolver a equação

$$x + \frac{1}{7}x = 19 \Leftrightarrow \frac{8}{7}x = 19 \Leftrightarrow x = \frac{19 \times 7}{8} = \frac{133}{8}$$

Uma outra solução seria usar a regra de falsa posição, procedendo como segue: Se a quantidade procurada fosse igual a 7, teríamos que ela mais 1/7 dela seria igual a 8. Como a resposta deve ser 19, multiplicaremos os dois membros da igualdade

$$7 + \frac{1}{7} \times 7 = 8$$

por 19/8, obtendo

$$\left(7 \times \frac{19}{8}\right) + \frac{1}{7} \times \left(7 \times \frac{19}{8}\right) = 8 \times \frac{19}{8} = 19$$

Assim,

$$7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$$

é a raiz procurada. (ROQUE, 2010, p.32-33)

Ainda de acordo com Roque, os egípcios usavam bastante a regra da falsa posição para resolver vários problemas, embora em muitos momentos isso até parecesse uma rotina, eles também faziam uso de outros métodos:

> Por vezes é afirmado que os egípcios resolviam problemas com a regra da falsa posição. Essa afirmação pode dar a impressão de que ela era o método que os egípcios usavam sistematicamente para resolver problemas como o discutido acima. Isso não é verdade. Por vezes eles usavam a regra, por vezes utilizavam outros métodos. (ROQUE, 2011, p.35)

1.5 Álgebra Geométrica Grega

De acordo com Eves 2010, a Álgebra dos gregos recebeu a denominação de geométrica pelo fato dos gregos necessitarem de uma representação numérica para determinado comprimento. Para tal procedimento, eles fizeram uso de uma notação algébrica muito criativa em operações algébricas e ainda se deve aos pitagóricos uma parcela considerável do desenvolvimento dessa Álgebra Geométrica que é encontrada nos primeiros trechos da Obra de Euclides, *Os Elementos*.

Para Boyer 1974, a divisão existente entre número e grandeza motivou a criação de uma nova técnica para o tratamento da Álgebra dos babilônios que fora passada para os pitagóricos, nascendo assim uma Álgebra intitulada geométrica.

A seguir apresentaremos algumas das aplicações da Álgebra Geométrica encontrada na obra de Euclides:

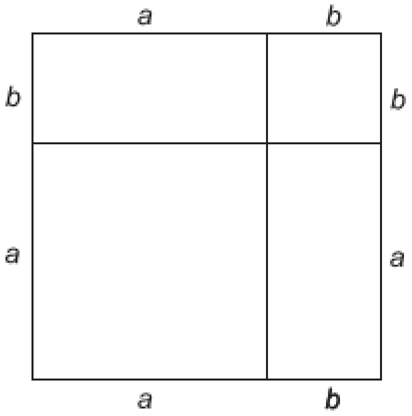
A Proposição 4 do Livro II estabelece geometricamente a identidade

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

decompondo o quadrado de lado *a* + *b* em dois quadrados e dois retângulos de áreas $a^2, b^2, ab \ e \ ba$, como mostra a Figura 4 a seguir. O enunciado de Euclides para essa proposição é:

Dividindo-se uma reta em duas partes, *o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes.* (EVES, 2010, p.108).

Figura 4 - Quadrado de lado a + b



Fonte: Eves, 2010, p. 108

O enunciado da Proposição 5 do Livro II é: Dividindo-se uma reta em partes iguais e em partes desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção, é igual ao quadrado sobre a metade da reta dada. Seja AB o segmento de reta dado e suponhamos que ele esteja dividido igualmente em$P$e desigualmente em Q. Então a proposição diz que

$$(AQ).(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2.$$

Fazendo-se $AQ = 2a$ e $QB = 2b$, obtém-se a identidade algébrica

$$4ab + (a-b)^2 = (a + b)^2,$$

ou, fazendo-se $AB = 2a$ e $PQ = b$, a identidade

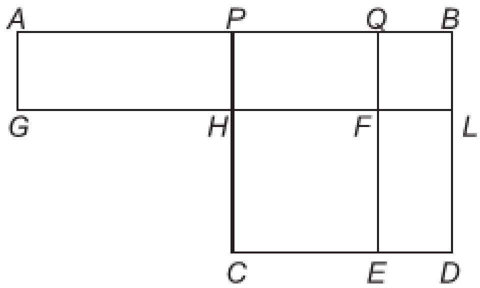
$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2.$$

A decomposição dada nos *Elementos* para estabelecer esse teorema aparece na Figura 5 a seguir. É mais complicada que aquela para a Proposição 4. Nessa figura, PCDB e QFLB são quadrados construídos sobre PB e QB como lados. Então

$$\begin{aligned}(AQ)(QB) + (PQ)^2 &= AGFQ + HCEF \\ &= AGHP + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + FEDL + HCEF = (PB)^2.\end{aligned}$$

(EVES, 2010, p.109).

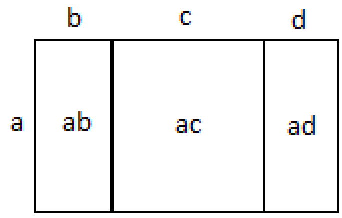
Figura 5 - Quadrados construídos



Fonte: Eves, 2010, p. 109

De acordo com Boyer 1974, quando se faz um paralelo entre a Álgebra Geométrica dos gregos e a atual, as aplicações não parecem ter tanto significado para o leitor de agora. O que no presente pode ser considerado por muitos apenas um conjunto de regras difíceis e cansativas, para os gregos daquele período a sua utilização foi de suma importância. Veja a seguir a figura 6 onde foi aplicada a lei da distributividade.

Figura 6 - Lei da distributividade



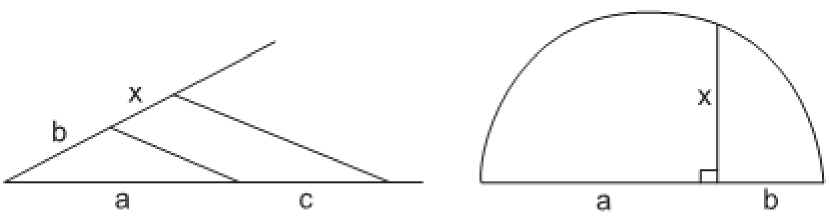
Fonte: Boyer, 1974, p.57

> A Álgebra Geométrica Grega parece ao leitor atual excessivamente artificial e difícil; aos que a usaram e tornaram-se hábeis no tratamento de suas operações, deve ter parecido um instrumento conveniente. A lei distributiva $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ era sem dúvida muito mais evidente para um estudioso grego que para o estudante que se inicia na Álgebra hoje, pois o primeiro podia facilmente representar as áreas dos retângulos nesse teorema, que diz simplesmente que o retângulo sobre a e a soma dos segmentosb, c, d é igual à soma dos retângulos sobre a e cada um dos segmentos b, c, d tomados separadamente. (BOYER, 1974, p.57).

Segundo Eves 2010, há vestígios de que os gregos, mais precisamente os pitagóricos, utilizavam a Álgebra Geométrica para resolução de equações quadráticas simples. Para tal feito, eram empregados os métodos que são utilizados hoje em dia, o qual chamamos de proporcionalidade e também o método da aplicação de áreas. Vejamos a seguir como isso era feito:

O método das proporções permite a construção (exatamente como fazemos hoje nos cursos de Geometria da escola secundária) de um segmento de reta *x* dado por $a : b = c : x$ ou por $a : x = x : b$, em que a, b, c são segmentos de reta dados. O método das proporções fornece soluções geométricas das equações, de acordo com a figura 7 abaixo.

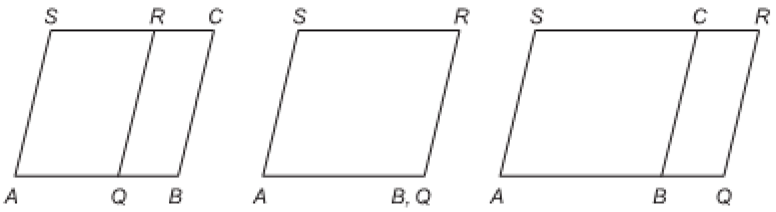
Figura 7 - Construindo com proporções



Fonte: Eves, 2010, p. 110

Para explicar o método de aplicação de áreas conforme figura 8 a seguir, tomemos o segmento de reta AB e um paralelogramo $AQRS$ cujo lado AQ está contido na semirreta $BA.$ Se Q não coincide com B, tome C de modo que $QBCR$ seja um paralelogramo. Quando Q está entre A e B, diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está *aplicado ao segmento* AB, *ficando aquém pelo paralelogramo QBCR*; quando *Q* coincide com *B*, diz-se que o paralelogramo *AQRS* está *aplicado ao segmento AB*; quando *Q* está no prolongamento de *AB*, diz-se que o paralelogramo *AQRS* está *aplicado ao segmento AB*, *excedendo pelo paralelogramo QBCR.*

Figura 8 - Aplicação de áreas



Fonte: Eves, 2010, p. 111

1.6 Notação algébrica sincopada

Acredita-se que a Álgebra de estilo sincopado tenha surgido com Diofanto de Alexandria, uma vez que ele foi o primeiro a utilizar símbolos para representação da incógnita por meio da letra "sigma" do alfabeto grego e ainda contribui para resolução de equações. Isso é reforçado por Baumgart 1992 quando diz;

"Todavia, alguns séculos mais tarde o matemático grego Diofanto deu novo impulso à Álgebra na trilha dos antigos métodos babilônicos. Diofanto introduziu o estilo sincopado de escrever equações". (BAUMGART, 1992, P.9)

Para Eves 2010, é considerável que Diofanto tenha sido o primeiro a utilizar uma notação algébrica. De acordo com o autor, uma das obras mais importantes de Diofanto, a *Aritmética*, da qual restaram seis dos treze livros, é constituída de 130 problemas que levam a equações do primeiro e do segundo graus e ainda, faz uma análise da Teoria dos Números, fato que muito contribuiu para a fama de Diofanto como o fundador da Álgebra. Ainda segundo ele, os métodos e artifícios apresentados por Diofanto era característico para cada problema. Ele, Diofanto, só admitia em suas respostas números racionais positivos e em muitas situações, se contentava com uma única resposta para o problema.

Apresentaremos a seguir alguns problemas encontrados na obra de Diofanto, a *Aritmética*:

Problema 28, Livro II: encontre dois números quadrados tais que seu produto acrescido de um deles resulta um número quadrado. (Resposta de Diofanto: $(3/4)^2$, $(7/24)^2$)

Problema 6, Livro III: encontre três números tais que a soma de todos é um quadrado e a soma de dois quaisquer deles também é um quadrado. (Resposta de Diofanto: 80,320,41.)

Problema 7, Livro III: encontre três números em progressão aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado. (Resposta de Diofanto: 120 1/2, 840 1/2, 1560 1/2.)

Problema 13, Livro III: encontre três números tais que o produto de dois quaisquer deles, acrescido do terceiro, é um quadrado. [Ver exercício 6.16(d).]

Problema 15, Livro III: encontre três números tais que o produto de dois quaisquer deles, acrescido da soma dos mesmos dois, é um quadrado. [Ver exercício 6.16(d).]

Problema 10, Livro IV: encontre dois números tais que sua soma é igual à soma de seus cubos. (Resposta de Diofanto: 5/7 e 8/7.)

Problema 21, Livro IV: encontre três números em progressão geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um número quadrado. (Resposta de Diofanto: 81/7, 144/7 e 256/7.)

Problema 1, Livro VI: encontre um triângulo pitagórico em que a hipotenusa subtraída de cada um dos catetos é um cubo. (Resposta de Diofanto: 40, 96, 104.)

Diofanto tinha uma forma própria de representar incógnitas, as potências das incógnitas nas equações até expoente seis, operações de subtração, igualdade e inversos.

Ainda de acordo com Eves 2010, p.209, é satisfatório considerar que o símbolo que era utilizado por Diofanto para representação da incógnita derivou-se das duas primeiras letras da palavra grega arithmos que significa número, a saber, α e ρ. E com o passar do tempo esse símbolo se aproximou do símbolo grego ς. Mesmo havendo controvérsias, as notações utilizadas para as potências parecem claras. Sendo assim, por exemplo: incógnita ao quadrado era simbolizada por Δ^{Y}, que são as duas primeiras letras da palavra grega dunamis (ΔΥΝΑΜΙΣ), que significa potência. Já incógnita ao cubo era remetida por K^{Y}, as duas primeiras letras da palavra grega kubos (ΚΥΒΟΣ), que significa cubo. Não obstante, é natural a explicação dos símbolos seguintes das incógnita. O símbolo que Diofanto utilizava para a representação do menos era parecido com um invertido com a bissetriz traçada por ele. O motivo apresentado para utilização dessa simbologia era justificado pela composição de $\Lambda\ e\ I$, letras da palavra grega leipis (ΛΕΙΨΙΣ) que significa menos. Os termos negativos de uma expressão eram agrupados e escrevia-se o sinal negativo antes deles.

A adição era dada por composição com o coeficiente da incógnita ou de uma dada potência denotado por um numeral grego imediatamente após o símbolo ao qual se deveria ligar. Entretanto, quando aparecesse uma constante, usava-se M, que é uma abreviação da palavra grega monades (ΜΟΝΑΔΕΣ), que significa unidades, seguido do coeficiente numérico apropriado. Por exemplo,

$x^3 + 13x^2 + 5x\ e\ x^3 - 5x^2 + 8x - 1$, escrevia-se conforme figura 9 abaixo;

Figura 9 - Escrita de expressões algébricas

$K^{Y}\alpha\Delta^{Y}\iota\gamma\varsigma\varepsilon$ e $K^{Y}\alpha\varsigma\eta\pitchfork\ \Delta^{Y}\varepsilon\ \overset{o}{M}\alpha,$

Fonte: Eves, 2010, p. 209

leia-se: incógnita ao cubo 1, incógnita ao quadrado 13, incógnita 5
e (incógnita ao cubo 1, incógnita 8) menos (incógnita ao quadrado 5, unidades 1).
Tudo isso contribuiu para que a Álgebra passasse de retórica para sincopada.

1.7 Álgebra na Índia

A influência de civilizações como gregos, babilônios e chineses sobre a matemática hindu é um pouco controversa. Mas há comprovações de que tal influência foi benéfica do ponto de vista da permuta de conhecimento entre oriente e ocidente.

> O grau de influência da matemática grega, da babilônica e da chinesa sobre a matemática hindu e vice-versa, ainda é uma questão não esclarecida, mas há evidências de que em ambos os sentidos ela foi apreciável. Um dos benefícios claros da Pax Romana foi o intercâmbio de conhecimento entre Oriente e Ocidente, e desde muito cedo a Índia enviou diplomatas para o Ocidente e o extremo Oriente. (EVES, 2010, p.249)

Como já foi relatado, as invasões sofridas pela Índia proporcionaram um intercâmbio de conhecimentos. Para Baumgart 1992, isso fez com que os hindus tivessem acesso as descobertas de gregos e babilônios, o que pode ser evidenciado através da obra de Brahmagupta que utilizava um estilo sincopado, característico da Matemática Babilônica. Vejamos a seguir em um exemplo como Brahmagupta usava seu método sincopado para representar a expressão $5xy + \sqrt{35} - 12$, conforme figura 10 abaixo;

Figura 10 - Sincopando a expressão

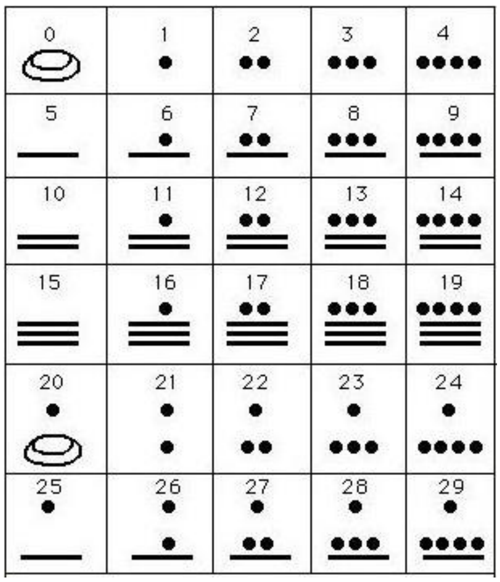
ya	*ka*	5	*bha*	*k*(*a*) 35	*ru*	$\dot{1}2$
x	*y*	5	produto	irracional 35	número "puro"	-12

Fonte: Baumgart, 1992, p. 10

De acordo com Boyer 1974, a primeira alusão intrínseca aos numerais hindus (chamados nove símbolos) fora encontrada em 662 na obra de um bispo da Síria chamado Severus Sebokt. Entretanto, os hindus ainda não tinham uma representação simbólica para o zero. O que levou a crer segundo Boyer, que a passagem para o sistema moderno de numeração faltava ser concluída. Boyer ainda afirma que a História da Matemática está repleta de aberrações e uma delas seria justamente a incontestável aparição do zero, encontrada numa inscrição na Índia em 876, mais de dois séculos depois da referência aos nove símbolos (numerais). Segundo ele, não se pode afirmar que o zero surgiu em conjunto com os nove numerais hindus, mas é provável que o zero tenha surgido na Grécia, muito possivelmente na cidade de Alexandria e foi passado aos hindus logo depois que o sistema decimal posicional já estava estabelecido.

Segundo Boyer 1974, a representação do zero ao longo da história se torna mais delicada quando se observa o hemisfério ocidental com a civilização dos Maias. Os Maias criaram símbolos para seu sistema de numeração que lhes era bem peculiar. Nesse processo as unidades eram representadas por pontos e cincos por barras horizontais. Mas o zero ocupava um lugar de destaque. A sua representação era parecida com um olho meio aberto. O sistema dos Maias, assim como o dos hindus era posicional, como podemos observar na figura 11 abaixo.

Figura 11 - Sistema de numeração maia



Fonte: Secretaria da Educação do Estado do Paraná, disponível em: <http://www.iua.upf.es>. Acesso em 11 de novembro de 2015.

Posteriormente o zero viria a ser utilizado no sistema de numeração hindu sob a forma de um ovo de ganso redondo tornando o sistema de numeração para os inteiros completo. Observe na sequência a evolução da escrita do Sistema de Numeração Hindu, de acordo com a figura 12 abaixo.

Figura 12 - Sistema de numeração hindu

Fonte: Produção virtual UFPB, disponível em: http://producao.virtual.ufpb.br/books/camyle/introducao-a-computacao-livro/livro/livro.chunked/ch03s01.html. Acesso em 11 de novembro de 2015.

Boyer 1974, assevera que anteriormente já havia se suposto que a forma arredonda para o zero teria advinda da letra grega ômicron, mas que posteriormente foi desmentida após investigações.

Para Eves 2010, p.255, os matemáticos hindus eram extremamente talentoso com Aritmética e Álgebra. Assim como os egípcios, eles resolviam muitos problemas utilizando o método da falsa posição.

Segundo Baumgart 1992, os célebres matemáticos hindus daquela época, foram Brahmagupta e Bháskara. Eles solucionavam equações através do método de completar quadrados. Também já trabalhavam com números negativos e raízes irracionais. Além do mais tinham compreensão de que uma equação quadrática com raízes reais tinha duas raízes.

O método aplicado pelos hindus para solucionar equações indeterminadas superou o trabalho de Diofanto, uma vez que, os hindus se preocupavam em determinar todas as soluções inteiras.

De acordo com Boyer 1974, Brahmagupta deu uma enorme contribuição à Álgebra através de suas regras de mensuração, proporcionando assim acharmos soluções gerais de equação quadráticas, incluindo aquelas que apresentam uma das raízes negativas.

A Álgebra dos hindus também era sincopada, assim como a utilizada por Diofanto. Aliás, no que diz respeito aos procedimentos utilizados na resolução de problemas, ela muito se assemelha ao trabalho de Diofanto. Podemos comprovar isso nas palavras de Eves;

> Os hindus sincoparam sua Álgebra. Como Diofanto, indicavam a adição por justaposição. A subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo-se bha (primeira sílaba da palavra bhavita, “produto”) depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se ka (da palavra karana, “irracional”) antes da quantidade. Brahmagupta denota a incógnita por yā (de yāvattāvat, “tanto quanto”). Os inteiros conhecidos eram antecedidos de rū (de rūpa, “número puro”). As incógnitas adicionais eram indicadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores. Assim, uma segunda incógnita poderia ser denotada por kā (de Kālaka, “preto”) e $8xy + \sqrt{10} - 7$poderia ser escrita como
>
> yā kā 8 bha ka 10 rū 7.
>
> Os hindus consubstanciaram os métodos algébricos de resolução de equações quadráticas por intermédio do conhecido método de completar quadrados e que posteriormente recebeu a denominação de método hindu. Os hindus aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais. Eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método familiar de completamento de quadrados. Esse método é hoje muitas vezes conhecido como método hindu. Bháskara deu as duas seguintes identidades notáveis:
>
> $$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)/2 \pm \sqrt{\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)/2}}$$
>
> (EVES, 2010, p.256).

Bháskara foi o último matemático do período medieval de renome na Índia. Em sua obra denominada *Lilavati* em homenagem a sua filha estão contemplados vários problemas de Brahmagupta.

De acordo com Roque 2011, os matemáticos indianos de um modo especial Bháskara não foram criadores da fórmula para resolver equações quadráticas que aqui no Brasil é conhecida como Fórmula Resolutiva de Bháskara. Segundo ela, apesar dos indianos conhecerem regras para solucionar problemas que no mundo atual seriam traduzidos para uma equação do segundo grau, e utilizarem símbolos para representar as medidas desconhecidas e as respectivas operações, não se pode afirmar que eles tenham inventado uma fórmula para determinar as soluções dessas equações, ficando portanto, sem sentido o questionamento sobre quem fora o verdadeiro descobridor de tal façanha.

> Começaremos pelos matemáticos indianos, em particular Bháskara, que não é o inventor da fórmula que ganhou seu nome no Brasil. Apesar de conhecerem regras para resolver problemas que seriam hoje traduzidos por equações do segundo grau, e usarem alguns símbolos para representar as quantidades desconhecidas e as operações, não se pode dizer que os indianos possuíssem uma fórmula de resolução dessas equações. Usaremos este exemplo para mostrar o quanto é inadequada a pergunta “quem foi o verdadeiro inventor desta fórmula?” (ROQUE, 2011, p.149).

1.8 Álgebra na Arábia

Segundo Roque 2011, no que diz respeito a utilização de símbolos na resolução de problemas de natureza algébrica, os feitos dos matemáticos árabes e italianos entre os séculos XII e XIV merecem grande destaque. Entretanto, foi no século XV que houve uma aplicação mais organizada da notação algébrica. Além disso, as práticas utilizadas nas resoluções de equações de grau 3 constituiu um feito notável para a história da Álgebra, transmitindo-se através do árabe Omar Khayam, pelos matemáticos italianos e chegando a François Viète apreciado como pioneiro na Álgebra Moderna. Baseado nesse pressuposto, o surgimento da Álgebra pode estar ligado a inclusão do simbolismo.

Para Eves 2010, o uso de simbolismo lacônico adotado pelos árabes surgiu em decorrência, em parte, do imediato gerenciamento de territórios conquistados. Em determinados momentos era utilizado o sistema de numeração local e em outros utilizava-se um sistema de numeração sinóptico.

De acordo com Roque 2011, com o início dos trabalhos do matemático italiano Girolamo Cardano a Álgebra ganha um novo significado, mudando as concepções que temos sobre ela.

Segundo Eves 2010, a álgebra fora conceituada como ciência da reunião e da oposição ou em um conceito menos formal como ciência da transposição e do cancelamento e posteriormente, ou seja, em meados do século XIX o termo álgebra teve a sua definição ampliada. Todavia, ao ser introduzida na Europa, mais particularmente na Espanha a palavra al-jabr ganhou um significado no mínimo curioso. Lá as pessoas que trabalhavam consertando ossos eram denominadas de algebristas assim como os barbeiros que também se intitulavam de algebristas.

O nome de Mohammed ibu-Musa Al-Khowarizmi ganhou grande destaque por conta de sua aritmética e principalmente por conta de sua obra mais importante intitulada *Al-jabr wa'l muqäbalah.* Foi desta obra que surgiu o termo Álgebra e que posteriormente fora difundida na Europa. Isso é reforçado nas palavras de Boyer:

> Através de sua artitmética, o nome Al-Khowarizmi tornou-se uma palavra vernácula; através do título de seu livro mais importante, *Al-jabr wa'l muqäbalah* ele nos deu uma palavra ainda mais familiar. Desse título veio o termo Álgebra pois foi por esse livro que mais tarde a Europa aprendeu o ramo da matemática que tem esse nome. (BOYER, 1974, p.166-167).

De acordo com Eves 2010, a álgebra praticada por Al-Khowarizmi demonstra fragilidade no que tange ao original. Nela podem ser encontrados problemas envolvendo operações elementares, resolução de equações lineares e quadráticas e exercícios contendo mensuração geométrica e problemas relacionados a herança.

Segundo Sessa 2009, ao analisarmos a obra de Al-khowarizmi considerando apenas os números positivos ela está apresentada nas formas canônicas em cinco casos distintos de equações quadráticas e uma equação linear, Segue abaixo a tradução do texto para a simbologia atual;

Tesouros e raízes iguais a números	$x^2 + bx = c$
Raízes e números iguais a tesouros	$x^2 = bx + c$
Tesouros e números iguais a raízes	$x^2 + c = bx$
Raízes iguais a tesouros	$x^2 = bx$
Tesouros iguais a números	$x^2 = c$
Raízes iguais a números	$bx = c$

Ainda de acordo com ela, a obra de Al-Khowarizmi mostra como solucionar cada uma dessas formas tomando como base um exemplo numérico, reduzindo o problema a apresentação de uma delas.

Entretanto, Diofanto muitas vezes fora citado como pai da Álgebra, mas essa denominação coube a Al-Khowarizmi devido ao seu trabalho no estudos das equações, é o que afirma Roque:

> Diofanto, pelas razões expostas no capítulo anterior, é algumas vezes citado como o pai da álgebra. Mas para falar da história de uma disciplina Matemática, como a álgebra, precisamos, antes de mais nada, caracterizar o que entendemos por "álgebra". Os procedimentos associados a este tipo de conhecimento não podem ter como base sua definição atual, tida como válida desde sempre. O passo decisivo para a constituição da álgebra como disciplina pode ser estar na sua organização em torno da classificação e da resolução de equações, o que teve lugar pela primeira vez no século IX, com os trabalhos de Al-Khowarizmi e de outros matemáticos ligados a ele. (ROQUE, 2010, p.149).

Para Boyer 1974, a alcunha de "pai da Álgebra" alude mais a Al-Khowarizmi do que Diofanto, mesmo a obra de Al-Khowarizmi sendo considerada mais elementar e expressa inteiramente em palavras sem nada de sincopação característica marcante da obra de Diofanto. Por isso a Álgebra dos árabes era considerada retórica.

> Diofanto é às vezes chamado de o "pai da Álgebra", mas esse título pertence mais a Al-Khowarizmi. É verdade que em dois aspectos a obra de Al-Khowarizmi representa um retrocesso com relação à de Diofanto. Primeiro é de nível mais elementar que o que se encontra na obra de Diofanto e, segundo, a Álgebra de Al-Khowarizmi é inteiramente expressa em palavras, sem nada de sincopação que se encontra na Aritmética do grego ou na obra de Brahmagupta. Mesmo os números são escritos em palavras em vez de símbolos! (BOYER, 1974, p.167).

Ainda de acordo com Boyer 1974, na obra de Al-Khowarizmi, até mesmo os números eram representados por palavras. Todavia, é provável que ele tenha conhecido, ao menos, partes de Astronomia e Computação de Brahmagupta. Boyer ainda afirma que nem Al-Khowarizmi nem os outros pesquisadores árabes utilizaram sincopação ou ainda números negativos. Para ele o trabalho de Al-Khowarizmi, o *Al-*

jabr chegou ao nosso conhecimento em duas versões. Entretanto, a versão latina está incompleta. Não se sabe ao certo qual o significado das palavras *Al-jabr* e *muqäbalah*. Acredita-se que a expressão *Al-jabr* significa “restauração” fazendo alusão a transposição de termos de uma equação e a palavra *muqäbalah*, faz menção ao equilíbrio, isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

Segundo Eves 2010, dentre os grandes feitos realizados pelos matemáticos árabes está o estudo da Álgebra Geométrica, o que pode ser percebido na obra de Omar khayyam com a resolução geométrica de equações cúbicas, consequência da análise constante de problemas geométricos como a construção de um heptágono regular.

1.9 Notação algébrica simbólica

Uma Álgebra inovadora começou a surgir em torno de 1500. Acompanhada de uma diversidade de símbolos, a Álgebra ganhou formalidade e padrão. Novas notações e representações simbólicas começaram a despontar, dando início a uma nova fase da Álgebra denominada de Álgebra Moderna. (Baumgart, 1992). A seguir será apresentado um comparativo entre a Álgebra Antiga e a Moderna, conforme figura 13 a seguir.

Figura 13 - Comparativo entre símbolos

Cardano (1545):	cubus $\bar{p}$ 6 rebus aequalis 20. $x^3 + 6x = 20$
Bombelli (1572):	$\overset{6}{\text{I}} \cdot \text{p} \cdot \overset{3}{8}$ · Eguale à 20. $x^6 + 8x^3 = 20$
Viète (1591):	I QC − 15 QQ + 85 C − 225 Q + 274 N aequatur 120. $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$
Harriot (1631):	aaa − 3bba ═══ + 2 · ccc. $x^3 - 3b^2x = 2c^3$
Descartes (1637):	$x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0.$
Wallis (1693):	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0.$

Fonte: Baumgart, 1992, p. 12

1.9.1 François Viète, René Descartes e o simbolismo algébrico

De acordo com Sessa 2009, ao final do século XVI o uso de letras para expressar quantidades desconhecidas em geral passa a ser introduzido na França pelo francês François Viète, embora nessa época já era comum designar a incógnita por um símbolo.

Segundo Eves 2010, foi através de sua obra mais importante intitulada de *In artem*, que Viète deu sua maior contribuição para o simbolismo algébrico. Nesse trabalho ele fez uso de vogais para representação de incógnitas e consoantes para representação de constantes. Entretanto, mais tarde Descartes viria a utilizar as últimas para indicar as incógnitas e as primeiras para denotar as constantes. Eves ainda reforça dizendo que antes Viète eram utilizados símbolos diferentes para as potências. Todavia, Viète empregava a mesma letra para representar as potências;

"[...] Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada; assim, o que hoje se indica por x, x^2, x^3 ele expressava por *A*, *A quadratum*, *A cubum*; mais tarde alguns escritores abreviaram essa notação para *A*, *Aq*, *Ac".* (EVES, 2010, p. 309).

Segundo Sessa 2009, a obra de Viète se assemelhava ao trabalho de Euclides, onde o mesmo utilizava a Álgebra para demonstração de seus teoremas em Geometria. Nessa época na França ainda não havia sido descoberta uma relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação, pois só os números positivos eram considerados nesse período, fato que dificultou o trabalho de Viète em encontrar tal relação. A obra de Viète foi de fundamental importância para a história da Álgebra contribuindo principalmente para o desenvolvimento da escrita. Ainda segundo ela, as afinidades existentes na Álgebra entre abstração, escrita simbólica e generalização são bem complexas. A autora afirma que a história não deve basear-se num crescimento contínuo, e cita como exemplo, o trabalho de Al-Khowarizmi que está à frente da obra de Diofanto e sua escrita sincopada, mas tem um ganho imensurável em generalidade e outros aspectos.

De acordo com Boyer 1974, o trabalho de Descartes era descrito simplesmente como a aplicação da Álgebra à Geometria. Não obstante, a mesma poderia caracterizar-se sem perda de generalidade, como a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. Na primeira seção de sua obra denominada *La géométrie*, os cálculos de Aritmética se relacionavam com operações de Geometria. Na segunda seção, é feita uma descrição de métodos utilizados no cálculo de operações de multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas. Nessa etapa Descartes fornecia um correspondente geométrico para as operações algébricas. A álgebra formal vinha em constante avanço desde o período da Renascença, e atingiu o seu ápice através da *La géométrie* de Descartes, um texto de relativa facilidade de compreensão quanto a notação. Praticamente o único símbolo antigo encontrado no livro é o uso de x ao invés de = para representar igualdade. A notação de Descartes muito se assemelha a nossa, havendo uma diferença na forma de abordagem dos parâmetros e incógnitas. É o que afirma Boyer quando diz;

> [...] O uso de letras do começo do alfabeto para parâmetros e das do fim como incógnitas, a adaptação da notação exponencial a essas, e o uso dos símbolos germânicos + e -, tudo isso fez com que a notação de Descartes se assemelhasse à nossa, pois naturalmente tiramos a nossa dele. Havia porém uma diferença importante na maneira de ver as coisas, pois ao passo que pensamos em parâmetros e incógnitas como números, Descartes pensava neles como segmentos. (BOYER, 1974, p. 248).

1.9.2 Alguns símbolos utilizados na atualidade

A Matemática atual faz uso de diversos símbolos. Ao longo da história muitos desses símbolos se destacaram, uns pela grande aplicabilidade e outros por sua aplicação no mínimo inusitada.

De acordo com Eves 2010, a obra de Record *The Whetstone of Witte*, publicada em 1557 se destacou por conta da utilização do símbolo de igualdade pela primeira vez.

> [...] Historicamente, tem interesse particular a álgebra de Recorde, *The Whetstone of Witte*, publicada em 1557, pois foi nela que se fez uso pela primeira vez do moderno símbolo de igualdade. Recorde justificou a adoção de um par de segmentos de reta paralelos como símbolo de igualdade alegando que “não pode haver duas coisas mais iguais”. (EVES, 2010, p. 301).

Ainda segundo o autor, nesse mesmo século um outro símbolo também ganharia destaque, um símbolo algébrico moderno, o conhecido radical [adotado talvez porque lembra um *r* (de raiz) minúsculo] foi introduzido em 1525 por Christoff Rudolff em seu livro de álgebra intitulado *Die Coss.* Todavia, mais tarde uma publicação melhorada da obra *Die Coss* por Michel Stifel (1483-1567) em 1553 teve grande influência na Alemanha. Entretanto Stifel se destacou por uma outra obra denominada *Arithmetica integra,* publicada em 1544.

1.9.3 William Oughtred e o simbolismo nas operações

De acordo com Eves 2010, Oughtred contribuiu com mais de 150 símbolos para a Matemática. Entretanto, apenas três chegaram ao nosso conhecimento, o de multiplicação (x), os quatro pontos (::) das proporções e o de diferença (≠), ainda usado. O símbolo de multiplicação encontrou certa resistência por assemelhar-se com o x incógnita que era empregado por Leibniz, embora Oughtred tivesse pretensão de utilizar o símbolo (.) para indicar a multiplicação, o seu uso viria a ser adotado posteriormente por Leibniz. O símbolo da divisão também surgiu no século XVII, tendo sido impresso pela primeira vez em 1659, na obra do suíço Johann Heinrich Rahn (1622-1676).

2 ENSINO DE ÁLGEBRA NO BRASIL

Neste capítulo discutiremos sobre como a Álgebra foi introduzida no Brasil fazendo um paralelo entre a fase antiga e a atual. Falaremos também da sua abordagem em sala de aula como disciplina na educação básica e das principais dificuldades encontradas por docentes e discentes. Apresentaremos também um estudo da maneira como ela está sendo cobrada em alguns dos mais importantes instrumentos de avaliação da educação básica, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), medido através da Prova Brasil e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).

2.1 Surgimento da Álgebra no Brasil

Segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1992), a Carta Régia de 19 de agosto de 1799 foi o marco inicial para a introdução da Álgebra no Brasil em modelo de aulas separadas paralelo a outras disciplinas já existentes como Geometria e Trigonometria.

No decorrer do século XIX o ensino de Matemática no Brasil encontrava-se estagnado por conta da metodologia trabalhada nas escolas. Um método de repetição era utilizado nos procedimentos didáticos e havia ainda uma fragmentação das disciplinas. Não se lecionava Matemática como acontece em dias atuais, mas se ensinava: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Nessa vertente eram utilizados prospectos e docentes diferentes o que no final de tudo causava uma certa confusão quanto as metas a serem alcançadas. É o que afirma Gomes 2013:

> No Brasil, durante o século XIX e até nas três primeiras décadas do século XX, as disciplinas matemáticas eram ensinadas separada e sucessivamente na escola secundária, na seguinte ordem: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, com programas, livros e professores diferentes. Não havia clareza em relação aos objetivos do ensino da matemática e tudo era considerado importante. (GOMES, 2013, p.32)

Para Fiorentini, Miguel e Miorim 1992, nesse período é possível perceber o descaso com o ensino de Álgebra. Havia na época uma corrente de pensamento voltada para a Aritmética e Geometria. Até pesquisadores não apresentavam entusiasmo na área, fato evidenciado nas Universidades aonde de 1972 a 1990 das mais de 150 teses apresentadas no Brasil tendo como objeto de pesquisa a educação matemática, nenhuma era na área de Álgebra, atingindo até mesmo os programas educacionais dessa época. No entanto, tudo viria a mudar após a Reforma Francisco Campos em 1931, que de acordo com Gomes 2013, teve a finalidade de estabelecer o que ficou conhecida como a primeira Reforma Educacional Brasileira; nela, a legislação passou a considerar apenas uma única disciplina denominada Matemática. A partir daí, os livros didáticos de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria foram deixando progressivamente de serem editados.

Segundo Gomes 2013, os tópicos que eram lecionados antes e após a reforma Francisco Campos eram os seguintes.

> Nesse período, os tópicos ensinados na parte referente à Álgebra, tanto antes quanto depois da Reforma Francisco Campos, eram: cálculo algébrico (inclusive operações com polinômios), razões e proporções, equações e inequações do 1º grau, sistemas de equações, radicais (operações e propriedades), equações do 2º grau, trinômio do 2º grau, equações redutíveis ao 2º grau, problemas do 2º grau, sistemas de equações do 2º grau. (GOMES, 2013, p.33).

A metodologia utilizada nesse período não proporcionava uma relação de afinidade entre Aritmética e Álgebra. Todavia, em virtude de possuir uma forte capacidade de generalização e enorme aplicabilidade na solução de problemas, a Álgebra era considerada mais eficiente que a Aritmética. É o que afirma Gomes 2013.

> A abordagem utilizada era mecânica e automatizada, e considerava-se haver uma relação de complementaridade entre Aritmética e Álgebra: a Álgebra, devido ao seu poder de generalização, era encarada como ferramenta mais potente que a Aritmética, pelas suas possibilidades na resolução de problemas. (GOMES, 2013, p. 34).

Do ponto de vista da educação algébrica durante os séculos XIX e XX além do Brasil, em outros países também predominava a doutrina de que os procedimentos utilizados para obtenção de expressões algébricas análogas eram suficientes para que os alunos da época adquirissem a habilidade para solucionar os problemas que eram abordados segundo um conjunto de regras, finalizando com o uso de equações. Isso é reforçado nas palavras de Gomes 2013;

> Na primeira concepção de educação algébrica, que foi praticamente hegemônica durante todo o século XIX e a primeira metade do século XX, tanto no Brasil como em outros países, prevalecia a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo transformismo algébrico (entendido como o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes entre si mediante o emprego de regras e propriedades válidas) seria necessária e suficiente para que o aluno alcançasse a capacidade de resolver problemas. Considerava-se que a realização de manipulações algébricas de modo independente de objetos concretos ou ilustrações era uma condição necessária a uma Álgebra “aplicada”, ou seja, à resolução de problemas. A sequência de tópicos era estabelecida do seguinte modo: primeiramente, fazia-se o estudo das expressões algébricas; em seguida, abordavam-se as operações com essas mesmas expressões chegando, então, às equações; finalmente, as equações eram utilizadas na resolução de problemas. (GOMES, 2013, p. 34).

Há países em que o ensino da Álgebra é considerado de suma importância. Fiorentini, Miguel e Miorim 1992, afirmam que para as crianças em países como Estados Unidos e Inglaterra, a Álgebra é introduzida como disciplina nas séries iniciais, permitindo que elas consigam transformar facilmente as informações de um problema em equação algébrica.

De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim 1992, para os estudantes da primeira metade do século XX nos livros didáticos a Matemática aparentava ser um monstro de duas cabeças, uma delas, a Geometria, que é exclusivamente racional demonstrando para eles todas as afirmações, com o intuito de enaltecer o seu entendimento, ainda que lhe fosse difícil alcançar essa compreensão. A outra era a Álgebra, que enumerava regras e fórmulas, que frequentemente eram aceitas sem provas, com o objetivo de resolver problemas na grande maioria hipotéticos. Essa visão dualística advém do fato de a Geometria ter sido organizada desde o século III a.E.C. inspirada nos *Elementos* de Euclides, onde esta se apresenta na forma axiomático-dedutiva. Entretanto, a Álgebra só viria a ser organizada sistematicamente apenas no final do século XIX. Esse dualismo tem sua origem no pensamento grego platônico que supervalorizava a Geometria, dando a mesma um caráter nobre. A figura 14 abaixo expressa a forma de como era trabalhada, por exemplo, as operações entre polinômios naquela época.

Figura 14 - Ensino da Álgebra, produto de expressões algébricas

1.º caso. *Para multiplicar um monomio por outro, multiplicam-se os coefficientes e, em continuação, escrevem-se as letras, affectando cada uma de um expoente egual á somma dos expoentes que a mesma letra tem nos monomios, e ao producto obtido dá-se o signal que lhe corresponde, segundo a regra dos signaes.*

Exemplos:

$$(3a^2b)(4ab^2c) = 12a^3b^3c;\ (-7xy)(5x^2z) = -35x^3yz;$$
$$(5m^2n^4p^6)(-5mn^3p^5r^4s) = -25m^3n^7p^{11}r^4s;$$
$$(-3a^3b^4c)(-2a^4b^2c^2d) = 6a^7b^6c^3d.$$

34. 2.º caso. Regra. — *Para multiplicar um polynomio por um monomio, multiplica-se, pela regra do primeiro caso, cada um dos termos do polynomio pelo monomio, e sommam-se os productos parciaes.*

E' a mesma regra da multiplicação de uma somma e de uma differença indicada por um numero, já demonstrada em arithmetica.

Exemplos:

$$(3a^3 - 4a^2b - 6ab^2 + 2b^3)\,2a^2b = 6a^5b - 8a^4b^2 - 12a^3b^3 + 4a^2b^4.$$
$$(5x^3y - 2x^2y^2 + 9xy^3 - 4y^4)(-3xy^2) = -15x^4y^3 + 6x^3y^4 -$$
$$-27x^2y^5 + 12xy^6.$$

Fonte: Fiorentini, Miguel e Miorim, 1992, Vol. 3 N° 1, p. 43

2.2 O Ensino de Álgebra no Movimento da Matemática Moderna no Brasil

De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim 1992, na década de 60 surge o Movimento da Matemática Moderna tendo como principal objetivo unificar o ensino da Matemática pela introdução de elementos unificadores como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que constituíam a base para a construção lógica desse edifício matemático. O progresso alcançado pela Matemática nos dois últimos séculos conferiu a Álgebra um lugar de grande importância em virtude do processo de algebrização da Matemática Clássica, tornando-a mais precisa, abstrata e rigorosa. Nesse sentido, (Fiorentini, Miguel e Miorim, 1992, pp. 45-46) afirmam que, “o estudo do cálculo algébrico e o das equações não poderiam mais efetivar-se sem referir-se a um campo numérico e as suas propriedades estruturais indispensáveis nas transformações de equivalência”.

Para exemplificar a metodologia aplicada no transformismo algébrico através das propriedades estruturais dos conjuntos numéricos apresentaremos a seguir um exemplo que adere fortemente a esse ideal modernista. Observe a tabela 1 abaixo.

Tabela 1 - Simplificando a expressão (a .b)÷ a

Transformações	Propriedades
$(a.b): a =$	
$(b.a): a =$	Comutativa
$= (b\ .a).\ 1/a =$	Definição do divisor em R^*
$= b.\ (a.1/a) =$	Associativa
$= b.1 =$	Produto de elementos inversos
$= b$	Elemento neutro

Fonte: Álgebra e Funções na Educação Básica, 2013, p. 36.

O aumento da preocupação necessária com o rigor no ensino de Matemática é constatado por intermédio da comparação das seguintes definições de equação, a primeira faz referência a metodologia utilizada no ensino antigo da Álgebra e a segunda refere-se ao ensino moderno.

“Equação é toda igualdade que exprime uma relação entre as quantidades conhecidas e desconhecidas de um problema sendo as quantidades conhecidas, os dados do problema ou da equação e as quantidades desconhecidas as incógnitas”. (Pérez y Marín, 1928; p. 15 a*pud* Fiorentini, Miguel e Miorim, 1992, p. 47).

> A toda sentença aberta, que encerra a relação de igualdade e que se torna verdadeira para determinados valores das variáveis, dá-se o nome de equação. Para que as sentenças se tornem verdadeiras é necessário que se dê às variáveis valores que pertençam a um determinado conjunto universo. (Zambuzzi, 1965; p. 14 a*pud* Fiorentini, Miguel e Miorim, 1992, p. 47).

2.3 Os Desafios no Ensino de Álgebra Hoje no Brasil

Do ponto de vista das metodologias adotadas por professores e alunos na resolução de problemas em dias atuais, é possível perceber uma discrepância no que diz respeito aos objetivos a serem alcançados. De um lado estão os professores tentando fazer com que seus alunos aprendam Álgebra por meio de um conjunto de regras e fórmulas. Em contrapartida, do outro lado estão os alunos que a consideram como algo difícil e extremamente incompreensível. É o que afirma Sessa 2009 quando fala

> Se considerarmos em conjunto o sistema professores e alunos, encontraremos nos dias atuais uma forte tensão. Para os professores, de um lado, a álgebra representa a ferramenta matemática por excelência; poder-se-ia dizer que eles se formam numa matemática algebrizada. Os alunos, de outro lado, veem a álgebra como fonte infinita de incompreensão e de dificuldades operacionais insuperáveis. (SESSA, 2009, p.6)

Ainda de acordo com Sessa 2009, os professores estão perdidos nesse abismo que separa o aluno do aprendizado da álgebra e seus esforços para tentar sanar essas dificuldades são quase sempre inúteis.

Nessa linha de pensamento Sadovsky 2010, afirma que o estudante hoje é “forçado” a ir a um lugar que não o interessa, que não lhe proporciona satisfação, o que deixa a maioria dos docentes decepcionados. Todavia, se fizermos um paralelo a partir do surgimento da Álgebra até os dias atuais, veremos uma Álgebra mais aplicada e significativa. No entanto essa evolução no ensino de Álgebra em dias atuais no Brasil não se reflete na aprendizagem do aluno. Quando se fala em equação por exemplo, os alunos já demonstram insatisfação quanto ao conteúdo sem mesmo tê-lo visto. Essa é apenas uma das conjunturas que evidenciam o grande desafio que é ensinar Álgebra na atualidade.

Sessa 2009, afirma que o entendimento de Álgebra hoje depende de uma abordagem de práticas associadas a problemas formulados através de conceitos e de suas propriedades que permitem organizar a realidade, interpretá-la e predizê-la. Para ela, todo esse conjunto de propriedades, leis de conversão das expressões, técnicas de resolução, etc., fazem parte da estruturação das atividades algébricas. Ela defende o pensamento de que o aluno por meio dessas abordagens tem plena capacidade de adquirir autonomia no pensamento algébrico possibilitando a obtenção de ferramentas de comando fundamentais no aprendizado da Álgebra.

De acordo com os Parâmetro Curriculares Nacionais (PCN), o estudo de alguns aspectos algébricos são realizados já nas séries iniciais, mas é somente nas séries finais do ensino fundamental que esses aspectos são mais abrangentes.

> Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação.
>
> Esse encaminhamento dado a Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função [...]. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. (PCN, 1998, pp. 50-51).

2.4 O Ensino de Álgebra e as Generalizações

O ensino da Álgebra confere aos alunos ferramentas indispensáveis para solucionar problemas. Seguindo essa linha de raciocínio, a Álgebra se destaca também por ser um poderoso mecanismo para generalização de problemas e suas representações. Como já fora visto anteriormente, os gregos a utilizavam nas demonstrações de seus teoremas, o que ficou conhecido posteriormente como Álgebra Geométrica. Entretanto, a sua abrangência quanto à generalização não se restringe apenas ao campo da Geometria, mas a outros campos da Matemática, como por exemplo, a Aritmética. Nesse sentido os PCN afirmam que;

"[...] A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra." (PCN, 1998, p.68).

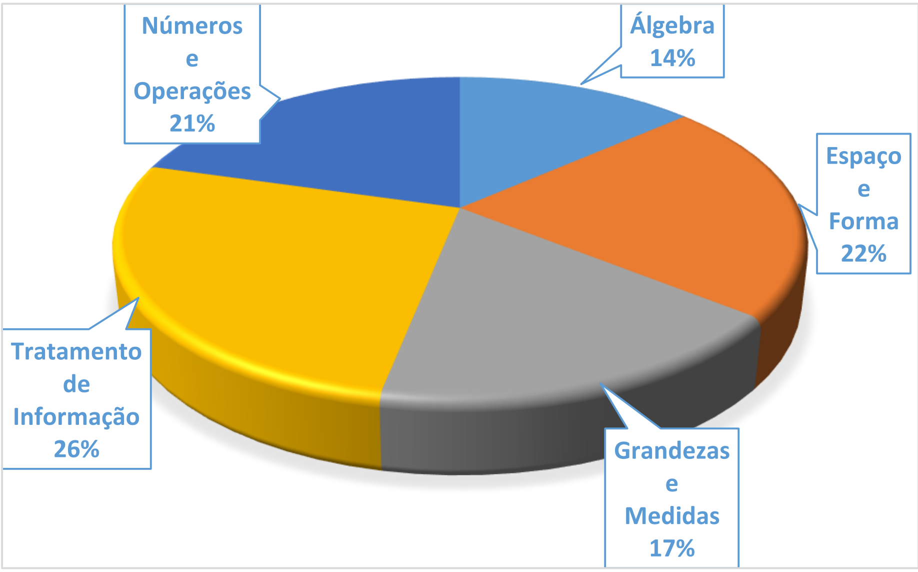
Seguindo essa linha de pensamento, Sessa 2009 afirma que;

"[...] A inter-relação entre a atividade modeladora da Álgebra e o aprendizado das técnicas, bem como seu uso, constitui um ponto chave no domínio da Álgebra. (SESSA, 2009, p. 7).

De acordo com os PCN 1998, embora os professores tenham valorizado bastante o ensino da Álgebra, a aprendizagem significativa por parte dos alunos não está garantida. Isso pode ser evidenciado através de dados extraídos do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) medido através da Prova Brasil. Ainda segundo eles, as questões referentes à Álgebra raramente atingem 40% de acertos em diversas regiões do país.

Os gráficos 1 e 2 que serão apresentados na sequência foram obtidos através de pesquisa realizada junto à Secretaria de Educação do Estado de Alagoas com a finalidade de mostrar a frequência de questões referentes à Álgebra e o respectivo desempenho dos alunos acerca das competências e habilidades exigidas na Prova Brasil, fazendo um comparativo com a média nacional.

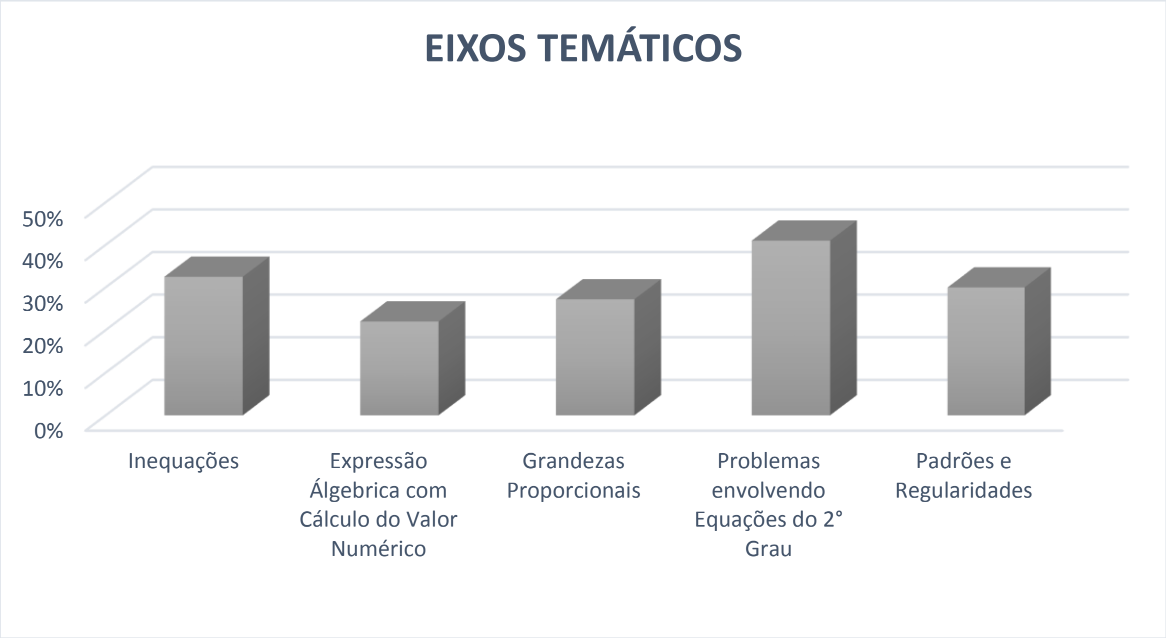
Gráfico 1 - Eixos Temáticos – Prova Brasil



Fonte: Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2015

Do exposto acima, percebe-se a presença discreta de questões relacionadas a Álgebra na Prova Brasil. Dentre os conteúdos exigidos na prova temos, Equações do 1° e 2° Graus, Sistemas de Equações Inequações, Grandezas Proporcionais e Cálculo do Valor Numérico de Expressões Algébricas. Entretanto, quando o assunto é a quantidade de acertos nas questões que necessitem dos conhecimentos desses conteúdos, o resultado não é nem um pouco satisfatório.

Gráfico 2 - Frequência de acertos – Prova Brasil



Fonte: Autor, 2015

Como fora falado anteriormente, a Álgebra apresenta o pior desempenho de todos os eixos temáticos exibidos até agora. No gráfico 3 mostraremos na sequência, a situação tende a se agravar. Nesse gráfico, a análise dos eixos temáticos terá como fundamento os descritores da prova Brasil de Matemática para Álgebra do 9º ano do ensino fundamental.

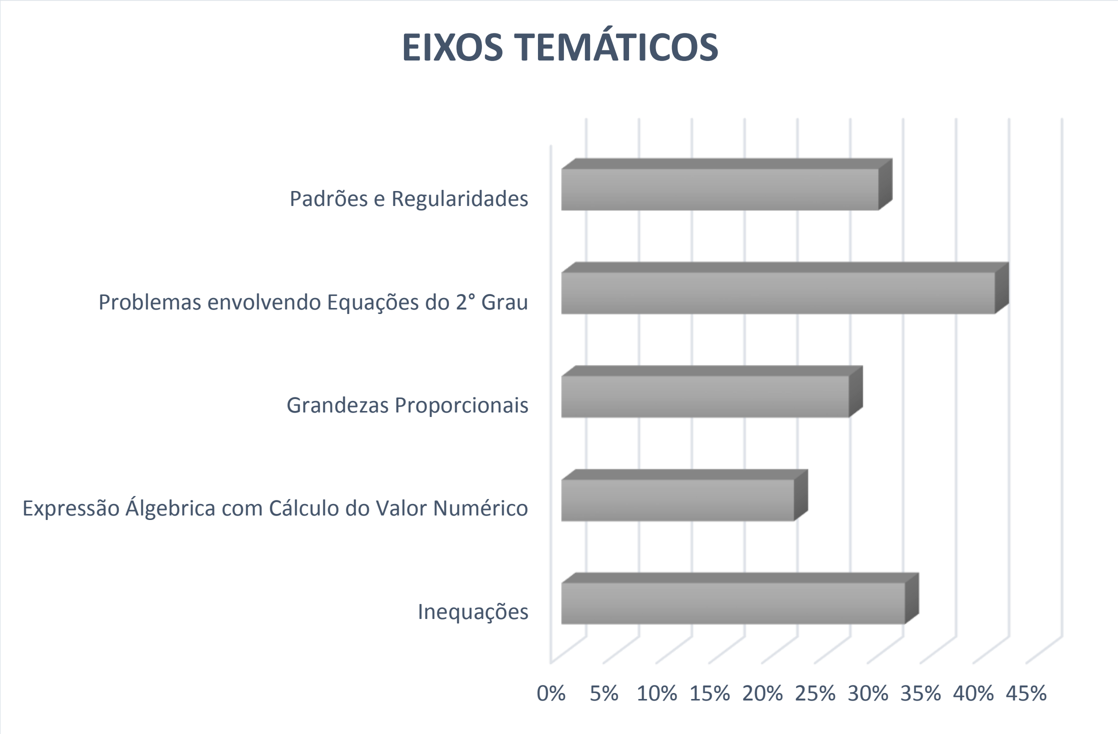
D30 – Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
D31 – Resolver problema que envolva equação de segundo grau.
D32 – Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).

D33 – Identificar uma equação ou uma inequação de primeiro grau que expressa um problema.

D34 – Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema.

D35 – Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações de primeiro grau. O gráfico 3 abaixo apresenta os eixos temáticos da Prova Brasil baseando-se nos descritores para Álgebra do 9º ano do ensino fundamental.

Gráfico 3 - Descritores da Prova Brasil (%)



Fonte: Autor, 2015

De acordo com o gráfico 3 acima os alunos não apresentaram as competências e habilidades necessárias para se ter uma boa compreensão da Álgebra. O descritor 32 (Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões)), mostrou como os alunos têm dificuldade em trabalhar com expressões algébricas e principalmente, determinar e reconhecer padrões e regularidades em sequências de números e figuras. Na sequência apresentaremos as tabelas 2, 3, 4, 5 e 6 contendo a escala de proficiência da Prova Brasil de Matemática do 9º ano do ensino fundamental.

Tabela 2 - Escala de Proficiência (Nível 1)

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Nível*	**Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:**
Nível 1: 200-225	**Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer o maior ou o menor número em uma coleção de números racionais, representados na forma decimal. **Tratamento de informações** • Interpretar dados apresentados em tabela e gráfico de colunas.

Fonte: Inep

Tabela 3 - Escala de Proficiência (Nível 2 a 4)

Nível 2: 225-250	**Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas. • Associar um número racional que representa uma quantia monetária, escrito por extenso, à sua representação decimal. • Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por três. **Tratamento de informações** • Interpretar dados apresentados em um gráfico de linha simples. • Associar dados apresentados em gráfico de colunas a uma tabela.
Nível 3: 250-275	**Espaço e forma** • Reconhecer o ângulo de giro que representa a mudança de direção na movimentação de pessoas/objetos. • Reconhecer a planificação de um sólido simples, dado através de um desenho em perspectiva. • Localizar um objeto em representação gráfica do tipo planta baixa, utilizando dois critérios: estar mais longe de um referencial e mais perto de outro. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete. • Determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros em situações-problema. • Localizar o valor que representa um número inteiro positivo associado a um ponto indicado em uma reta numérica. • Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros. **Tratamento de informações** • Associar dados apresentados em tabela a gráfico de setores. • Analisar dados dispostos em uma tabela simples. • Analisar dados apresentados em um gráfico de linha com mais de uma grandeza representada.
Nível 4: 275-300	**Espaço e forma** • Localizar um ponto em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada, a partir de suas coordenadas. • Reconhecer as coordenadas de um ponto dado em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada. • Interpretar a movimentação de um objeto utilizando referencial diferente do seu. **Grandezas e medidas** • Converter unidades de medidas de comprimento, de metros para centímetros, na resolução de situação-problema. • Reconhecer que a medida do perímetro de um retângulo, em uma malha quadriculada, dobra ou se reduz à metade quando os lados dobram ou são reduzidos à metade. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar a soma de números racionais em contextos de sistema monetário. • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 1º grau envolvendo números naturais, em situação-problema. • Localizar números inteiros negativos na reta numérica. • Localizar números racionais em sua representação decimal. **Tratamento de informações** • Analisar dados dispostos em uma tabela de dupla entrada.

Fonte: Inep

Tabela 4 - Escala de Proficiência (Nível 5 e 6)

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Nível*	**Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:**
Nível 5: 300-325	**Espaço e forma** • Reconhecer que o ângulo não se altera em figuras obtidas por ampliação/redução. • Localizar dois ou mais pontos em um sistema de coordenadas. **Grandezas e medidas** • Determinar o perímetro de uma região retangular, com o apoio de figura, na resolução de uma situação-problema. • Determinar o volume através da contagem de blocos. **Números e operações; álgebra e funções** • Associar uma fração com denominador 10 à sua representação decimal. • Associar uma situação-problema à sua linguagem algébrica, por meio de equações do 1º grau ou sistemas lineares. • Determinar, em situação-problema, a adição e a multiplicação entre números racionais, envolvendo divisão por números inteiros. • Determinar a porcentagem envolvendo números inteiros. • Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números racionais na forma decimal.
Nível 6: 325-350	**Espaço e forma** • Reconhecer a medida do ângulo determinado entre dois deslocamentos, descritos por meio de orientações dadas por pontos cardeais. • Reconhecer as coordenadas de pontos representados no primeiro quadrante de um plano cartesiano. • Reconhecer a relação entre as medidas de raio e diâmetro de uma circunferência com o apoio de figura. • Reconhecer a corda de uma circunferência, as faces opostas de um cubo, a partir de uma de suas planificações. • Comparar as medidas dos lados de um triângulo a partir das medidas de seus respectivos ângulos opostos. • Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida da hipotenusa, dadas as medidas dos catetos. **Grandezas e medidas** • Converter unidades de medida de massa, de quilograma para grama, na resolução de situação-problema. • Resolver problema fazendo uso de semelhança de triângulos. **Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer frações equivalentes. • Associar um número racional, escrito por extenso, à sua representação decimal, e vice-versa. • Estimar o valor da raiz quadrada de um número inteiro aproximando-o de um número racional em sua representação decimal. • Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais com constante de proporcionalidade não inteira.

Fonte: Inep

Tabela 5 - Escala de Proficiência (Nível 6 e 7)

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Nível*	**Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:**
Nível 6: 325-350 (cont.)	• Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica que contenha parênteses, envolvendo números naturais. • Determinar um valor monetário obtido por meio de um desconto ou um acréscimo percentual. • Determinar o valor de uma expressão numérica, com números irracionais, fazendo uso de uma aproximação racional fornecida. **Tratamento de informações** • Resolver problemas que requerem a comparação de dois gráficos de colunas.
Nível 7: 350-375	**Espaço e forma** • Reconhecer ângulos agudos, retos ou obtusos de acordo com sua medida em graus. • Reconhecer as coordenadas de pontos representados num plano cartesiano localizados em quadrantes diferentes do primeiro. • Determinar a posição final de um objeto, após a realização de rotações em torno de um ponto, de diferentes ângulos, em sentido horário e anti-horário. • Resolver problemas envolvendo ângulos, inclusive utilizando a Lei Angular de Tales sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. • Resolver problemas envolvendo as propriedades de ângulos internos e externos de triângulos e quadriláteros, com ou sem justaposição ou sobreposição de figuras. • Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e de um de seus catetos. **Grandezas e medidas** • Determinar o perímetro de uma região retangular, obtida pela justaposição de dois retângulos, descritos sem o apoio de figuras. • Determinar a área de um retângulo em situações-problema. • Determinar a área de regiões poligonais desenhadas em malhas quadriculadas. • Determinar o volume de um cubo ou de um paralelepípedo retângulo sem o apoio de figura. • Converter unidades de medida de volume, de m^3 para litro, em situações-problema. • Reconhecer a relação entre as áreas de figuras semelhantes. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar o quociente entre números racionais, representados na forma decimal ou fracionária, em situações-problema. • Determinar a soma de números racionais dados na forma fracionária e com denominadores diferentes. • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 2º grau, com coeficientes naturais, envolvendo números inteiros. • Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração, multiplicação e/ou potenciação entre números inteiros. • Determinar o valor de uma expressão numérica com números inteiros positivos e negativos. • Determinar o valor de uma expressão numérica com números racionais. • Comparar números racionais com diferentes números de casas decimais, usando arredondamento.

Fonte: Inep

Tabela 6 - Escala de Proficiência (Nível 7 a 9)

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Nível*	**Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:**
Nível 7: 350-375 (cont.)	• Localizar na reta numérica um número racional, representado na forma de uma fração imprópria. • Associar uma fração à sua representação na forma decimal. • Associar uma situação-problema à sua linguagem algébrica, por meio de inequações do 1º grau. • Associar a representação gráfica de duas retas no plano cartesiano a um sistema de duas equações lineares, e vice-versa. • Resolver problemas envolvendo equação do 2º grau. **Tratamento de informações** • Determinar a média aritmética de um conjunto de valores. • Estimar quantidades em gráficos de setores. • Analisar dados dispostos em uma tabela de três ou mais entradas. • Interpretar dados fornecidos em gráficos envolvendo regiões do plano cartesiano. • Interpretar gráficos de linhas com duas sequências de valores.
Nível 8: 375-400	**Espaço e forma** • Resolver problemas utilizando as propriedades das cevianas (altura, mediana e bissetriz) de um triângulo isósceles com o apoio de figura. **Grandezas e medidas** • Converter unidades de medida de capacidade, de mililitro para litro, em situações-problema. • Reconhecer que a área de um retângulo quadruplica quando seus lados dobram. • Determinar a área de figuras simples (triângulo, paralelogramo, trapézio), inclusive utilizando composição/decomposição. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica do 1º grau, com coeficientes racionais, representados na forma decimal. • Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração e potenciação entre números racionais, representados na forma decimal. • Resolver problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais.
Nível 9: 400-425	**Espaço e forma** • Resolver problemas utilizando a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. **Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer a expressão algébrica que expressa uma regularidade existente em uma sequência de números ou de figuras geométricas.

* O intervalo do nível inclui o primeiro ponto e exclui o último.

Fonte: Inep

Analisando as tabelas mostradas acima, percebe-se que o nível 9 da escala de proficiência é o que apresenta a pontuação mais elevada. Nesse quesito, os alunos têm que ser capazes de reconhecer padrões em sequências de números ou figuras geométricas representando-os através de expressões algébricas. Entretanto, como veremos em algumas questões aplicadas em exames anteriores da Prova Brasil de acordo com as figuras 15, 16, 17 e 18 a seguir, esse nível não está sendo cobrado com tanta regularidade.

Figura 15 - (Prova Brasil 2011) Valor numérico de uma expressão algébrica

Dada a expressão: $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

Sendo a = 1, b = -7 e c = 10, o valor numérico de x é

(A) -5. (B) -2. (C) 2. **(D) 5**

Fonte: Inep

Nessa questão está sendo avaliado o descritor 30 (Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica) e o nível 8 da escala de proficiência. Espera-se do aluno que ele tenha adquirido a capacidade de operar com valor numérico de uma expressão algébrica, além de trabalhar também as operações básicas da Matemática.

Figura 16 - (Prova Brasil 2011) A conta do restaurante

João e Pedro foram a um restaurante almoçar e a conta deles foi de R$ 28,00. A conta de Pedro foi o triplo do valor de seu amigo.

O sistema de equações do 1º grau que melhor traduz o problema é

(A) $\begin{cases} x + y = 28 \\ x - y = 7 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x + 3y = 28 \\ x = y \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x + y = 28 \\ x = 3y \end{cases}$

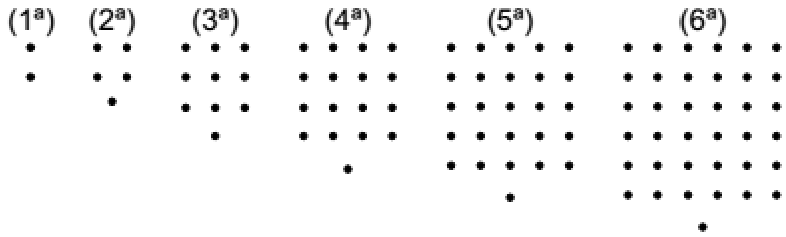
(D) $\begin{cases} x + y = 28 \\ x = y + 3 \end{cases}$

Fonte: Inep

Na questão acima esta sendo avaliado o descritor 34 (Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema) e o nível 5 da escala de proficiência. O referido problema exige do aluno a habilidade de formular um sistemas de equações do 1° grau com duas equações e duas incógnitas.

Figura 17 – (Prova Brasil 2011) Sequência de Pontos

As figuras mostradas a seguir estão organizadas dentro de um padrão que se repete.



Mantendo essa disposição, a expressão algébrica que representa o total de pontos T em função da ordem n (n = 1, 2, 3, ...), é

(A) $T = 2n - 1$.
(B) $T = 2n + 1$.
(C) $T = n^2 - 1$.
(D) $\mathbf{T = n^2 + 1}$.

Fonte: Inep

Nessa questão está sendo avaliado o descritor 32 (Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões)) e o nível 9 da escala de proficiência. A questão acima exige do aluno dentre outras competências a habilidade de generalizar sequências, percebendo um padrão e determinando a expressão algébrica que generaliza o problema.

Figura 18 – (Prova Brasil 2013) Preço de venda

Paulo é dono de uma fábrica de móveis. Para calcular o preço V de venda de cada móvel que fabrica, ele usa a seguinte fórmula V = 1,5 C + R$ 10,00, sendo C o preço de custo desse móvel. Considere que o preço de custo de um móvel que Paulo fabrica é R$ 100,00. Então, ele vende esse móvel por

(A) R$ 110,00.
(B) R$ 150,00.
(C) R$ 160,00.
(D) R$ 210,00.

Fonte: Inep

Nessa questão novamente está sendo avaliado o descritor 30 (Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica) e na escala de proficiência está sendo aferido o nível 8. Nesse nível espera-se do aluno que ele tenha desenvolvido a capacidade de efetuar operações com expressões algébricas calculando o seu valor numérico.

Acompanhando esse modelo e com base no que foi exposto anteriormente, temos um outro programa de avaliação de desempenho dos alunos, o PISA que visa analisar o desempenho dos estudantes brasileiros a nível nacional e internacional acarretando numa discussão sobre indicadores de resultados educacionais que venham a se adequar a nossa realidade. De acordo com o PISA;

> [...] não há uma simples classificação em alunos “letrados” e “não-letrados”. Para cada área avaliada, existe uma escala contínua, em que os níveis de desempenho dos alunos e suas distribuições estão representados pelo número de pontos alcançados. (PISA, 2000, p. 20).

De acordo com o PISA, os níveis aos quais os alunos são avaliados, são descritos como letramentos que significam;

> [..] a capacidade de ir além da simples aquisição de conhecimentos, demonstrando competência para aplicar esses conhecimentos em situações do dia-a-dia. Ou seja, o PISA procura ir além do conhecimento escolar, examinando a capacidade dos alunos de analisar, raciocinar e refletir ativamente sobre seus conhecimentos e experiências, enfocando competências que serão relevantes para suas vidas futuras. (PISA, 2006, p. 33).

Ainda segundo o PISA, o letramento de Matemática refere-se;

> [...] a capacidade individual de identificar e compreender o papel da Matemática no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de se envolver com a Matemática de maneira a atender às suas necessidades atuais e futuras como um cidadão construtivo, consciente e reflexivo. (PISA, 2000, p. 21).

Apresentaremos a seguir a tabela 7 com o quadro de proficiência de Matemática.

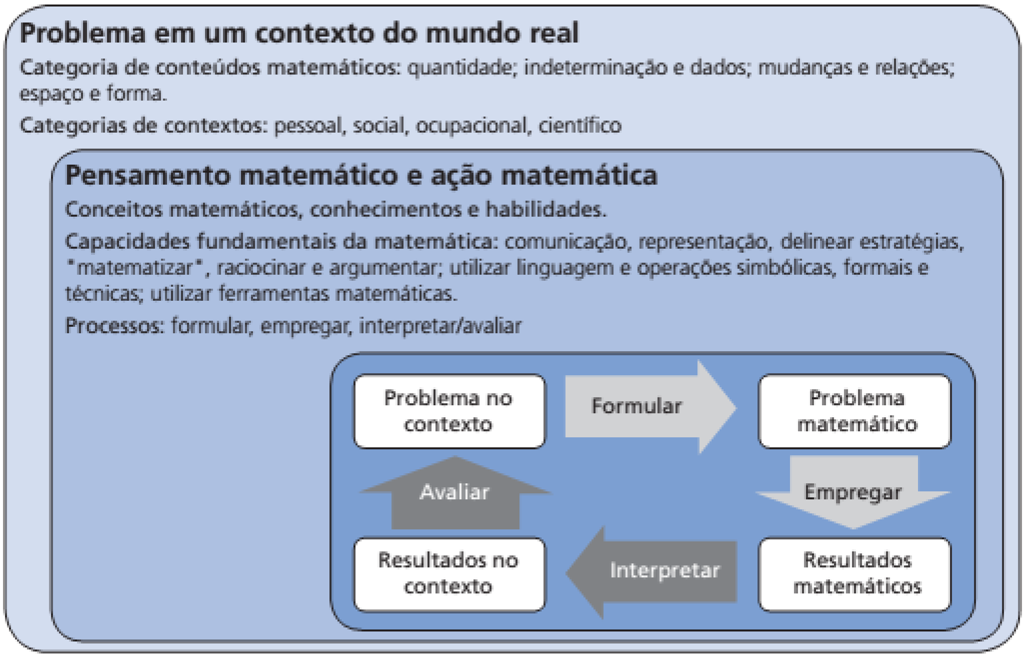
Tabela 7 - Escala de Proficiência em Matemática – PISA

Nível	Limite inferior de pontos	Características das atividades
6	669,3	No Nível 6, os estudantes são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e em modelagem de situações-problema complexas. Conseguem estabelecer ligações entre diferentes fontes de informação e representações, e de transitar entre elas com flexibilidade. Os estudantes situados neste nível utilizam pensamento e raciocínio matemáticos avançados. São capazes de associar sua percepção e sua compreensão a um domínio de operações e relações matemáticas simbólicas e formais, de modo a desenvolver novas abordagens e estratégias para enfrentar novas situações. Os estudantes situados neste nível são capazes de formular e comunicar com precisão suas ações e reflexões relacionadas a constatações, interpretações e argumentos, bem como de adequá-las às situações originais.
5	607,0	No Nível 5, os estudantes são capazes de desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. Conseguem selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. Os estudantes situados neste nível são capazes de trabalhar estrategicamente, utilizando habilidades de pensamento e raciocínio abrangentes e bem desenvolvidas, representações conectadas de maneira adequada, caracterizações simbólicas e formais, e percepção relativa a essas situações. São capazes de refletir sobre suas ações e de formular e comunicar suas interpretações e seu raciocínio.
4	544,74	No Nível 4, os estudantes conseguem trabalhar de maneira eficaz com modelos explícitos para situações concretas complexas, que podem envolver restrições ou exigir formulação de hipóteses. São capazes de selecionar e integrar diferentes representações, inclusive representações simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real. Nesses contextos, os estudantes situados neste nível são capazes de utilizar habilidades desenvolvidas e raciocínio, com flexibilidade e alguma percepção. São capazes de construir e comunicar explicações e argumentos com base em interpretações, argumentos e ações.
3	482,4	No Nível 3, os estudantes são capazes de executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. Conseguem selecionar e aplicar estratégias simples de resolução de problemas. Os estudantes situados neste nível são capazes de interpretar e utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação e de raciocinar diretamente a partir delas. Conseguem desenvolver comunicações curtas que relatam interpretações, resultados e raciocínio.
2	420,1	No Nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferência direta. São capazes de extrair informações relevantes de uma única fonte e de utilizar um modo simples de representação. Os estudantes situados neste nível conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções de nível básico. São capazes de raciocinar diretamente e de fazer interpretações literais dos resultados.
1	357,8	No Nível 1, os estudantes são capazes de responder a questões definidas com clareza, que envolvem contextos conhecidos, nas quais todas as informações relevantes estão presentes. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros de acordo com instruções diretas em situações explícitas. São capazes de executar ações óbvias e dar continuidade imediata ao estímulo dado.
Abaixo de 1		A OCDE não especifica as habilidades desenvolvidas

Fonte: PISA 2012

Observa-se da tabela acima que o nível 6 é o mais alto da escala de proficiência do PISA requer do aluno a capacidade de generalização e modelagem de problemas complexos. Ou seja, os alunos devem apresentar um raciocínio matemático avançado nesse quesito que é o alicerce da avaliação de Matemática do PISA desde a edição de 2003, conforme figura 19 abaixo.

Figura 19 - Modelo de letramento em Matemática



Fonte: PISA, 2006

Para o PISA o indivíduo ativa sua capacidade matemática simultânea e sucessivamente quando trabalha um problema em sua forma contextualizada utilizando uma linguagem e operações simbólicas.

> Quando trabalha na solução de um problema contextualizado, o indivíduo ativa suas capacidades fundamentais em matemática simultaneamente e sucessivamente, recorrendo a conteúdos matemáticos até encontrar a solução. Nesse caso, deve utilizaras capacidades fundamentais da matemática, conforme estabelecidas pelo PISA: comunicação; "matematização"; representação; razão e argumentação; delineamento de estratégias para resolver problemas; utilização de linguagem e operações simbólicas, formal e técnica; e utilização de ferramentas matemáticas. (PISA, 2012, p. 19).

A tabela 8 a seguir, apresenta a escala percentual por nível de proficiência do Brasil comparado a outros países e a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

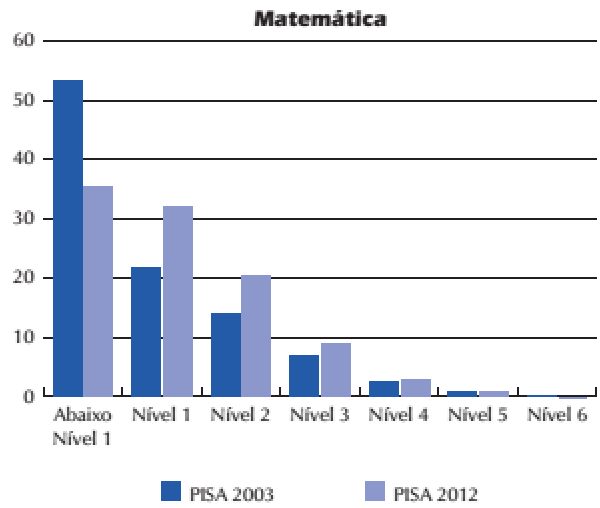
Tabela 8 - Percentual dos alunos nos nível de proficiência em Matemática - 2006

País	Abaixo do nível 1	Erro padrão abaixo do nível 1	Nível 1	Erro padrão nível 1	Nível 2	Erro padrão nível 2	Nível 3	Erro padrão nível 3	Nível 4	Erro padrão nível 4	Nível 5	Erro padrão nível 5	Nível 6	Erro padrão nível 6
OCDE	10,2	0,3	16,2	0,3	23,2	0,4	22,8	0,4	16,7	0,3	8,3	0,2	2,6	0,1
Argentina	39,4	2,7	24,7	1,5	20,4	1,7	10,6	1,1	3,8	0,6	0,9	0,3	0,1	0,1
Brasil	**46,6**	**1,4**	**25,9**	**1,2**	**16,6**	**0,9**	**7,1**	**0,6**	**2,8**	**0,4**	**0,8**	**0,3**	**0,2**	**0,1**
Chile	28,2	1,9	26,9	1,2	23,9	1,1	13,9	1,0	5,6	0,7	1,3	0,3	0,1	0,1
Colômbia	44,6	1,8	27,3	1,1	18,2	1,3	7,6	0,7	1,9	0,4	0,4	0,2	0,0	0,0
México	28,4	1,4	28,1	0,9	25,2	0,8	13,1	0,6	4,3	0,4	0,8	0,2	0,1	0,0
Uruguai	24,4	1,1	21,7	1,0	24,3	0,8	18,3	1,1	8,2	0,7	2,6	0,4	0,6	0,2

Fonte: PISA, 2006

Considerando a tabela mostrada acima podemos constatar que o nível 6 atingiu o menor percentual na escala de proficiência a nível nacional. E ainda, o Brasil ficou atrás do Uruguai e muito abaixo da média exigida pela OCDE que foi de 2,6. No gráfico 4 a seguir é feita uma comparação entre os níveis de proficiência dos exame de 2003 e 2012.

Gráfico 4 - Escala de Proficiência 2003 – 2012



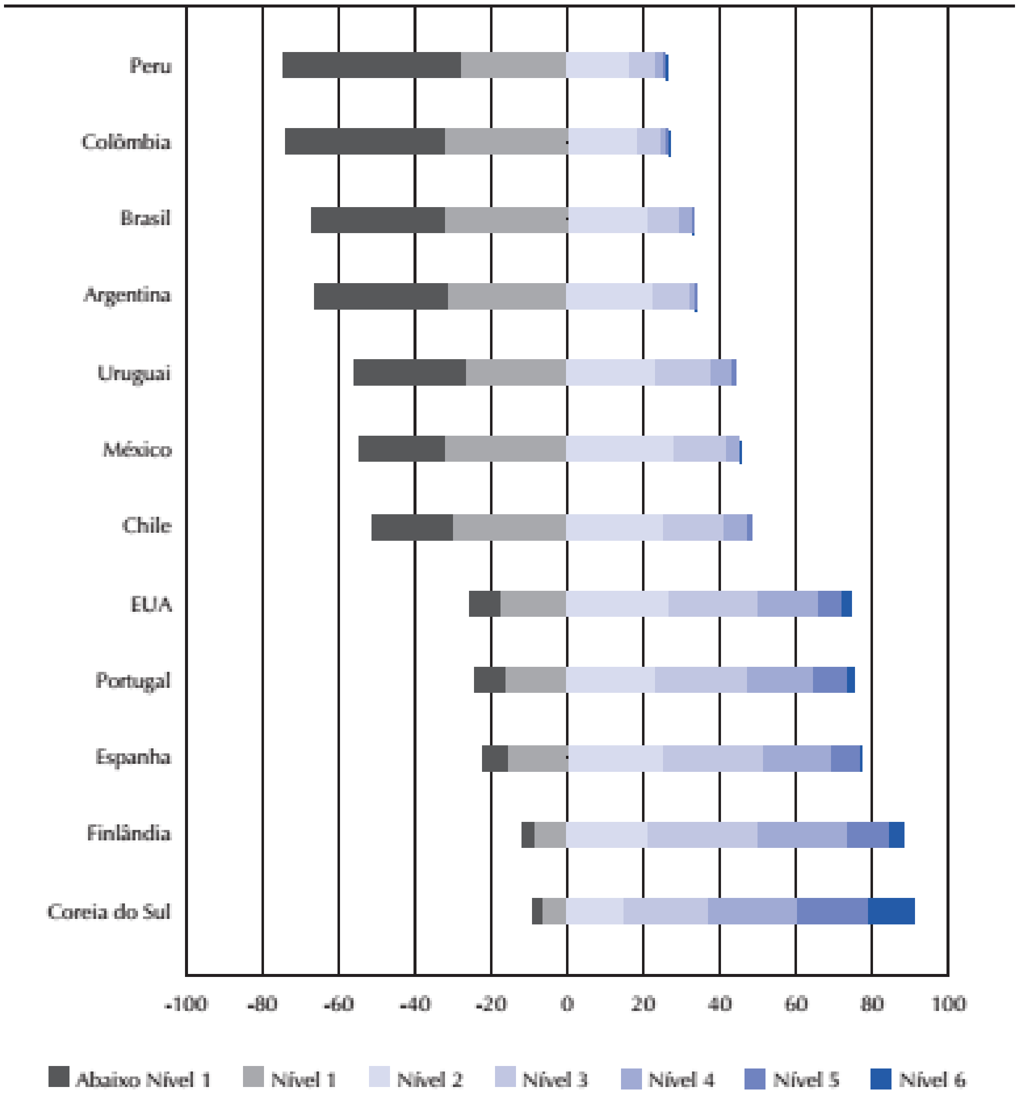
Fonte: PISA, 2012

Percebe-se ao analisar no gráfico 4 acima que o nível 6 da escala de proficiência não mostrou evolução, o que não ocorreu com os demais níveis.

O PISA considera fundamental que os estudantes apresentem habilidades e competências para formular, empregar e interpretar. De acordo como o PISA formular significa perceber que a Matemática pode ser aplicada na compreensão e na análise de estruturas matemáticas, representando variáveis e criando estratégias para solucionar o problema.

O gráfico 5 abaixo tem por objetivo apresentar o desempenho do Brasil a nível internacional em comparativo com países latino-americanos vizinhos como, Argentina, Chile, Colômbia, México, Peru e Uruguai; Portugal e Espanha, por sua proximidade cultural. Por apresentar dimensões continentais assim como o Brasil, os Estados Unidos e mais dois que reconhecidamente apresentam bons sistemas educacionais, sendo um europeu – Finlândia – e outro, asiático – Coreia do Sul.

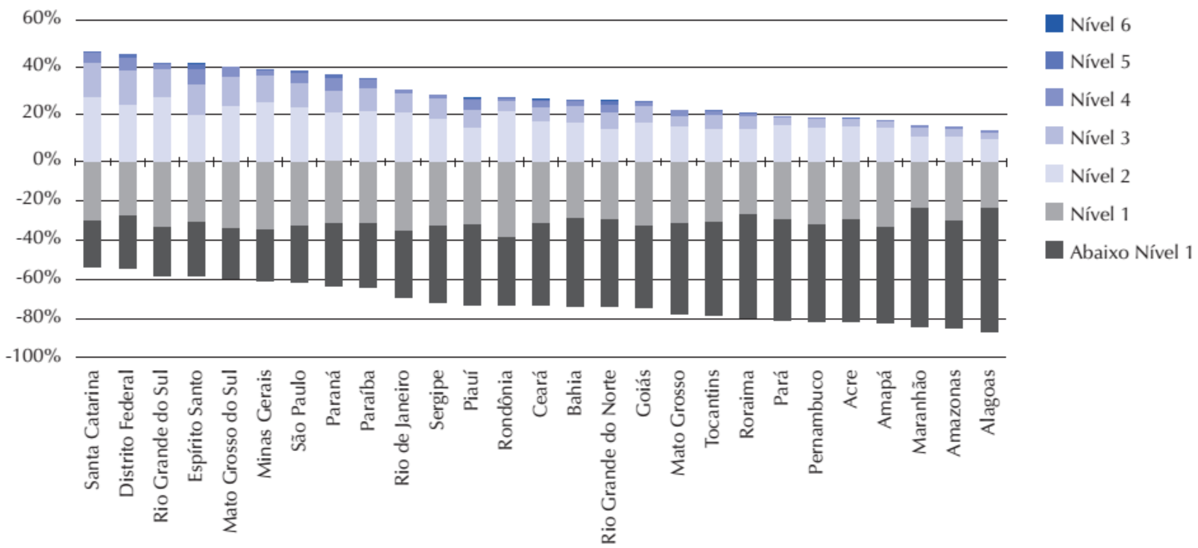
Gráfico 5 - Distribuição percentual dos estudantes por níveis de proficiência em matemática nos países



Fonte: PISA, 2012

Na sequência apresentaremos uma análise dos níveis de proficiência nas áreas urbanas no exame de 2012, como mostra o gráfico 6 abaixo.

Gráfico 6 - Nível de proficiência por estado nas áreas urbanas em 2012



Fonte: PISA, 2012

O PISA utiliza amostras estaduais desde 2006, entretanto, somente os resultados de 2009 e 2012 têm maior importância e menor erro padrão. Desconsiderando o erro padrão, e observando apenas as médias em Matemática, apenas os estados de Mato Grosso do Sul, Paraíba, Rio Grande do Norte, Sergipe e São Paulo apresentaram evolução significativa. Os demais estados apresentaram somente uma pequena oscilação. O letramento de Matemática no PISA ao que se refere a utilização de linguagem simbólica, formal e técnica seguida de suas operações necessitam de;

> [...] compreensão, interpretação, manipulação e utilização de expressões simbólicas dentro de um contexto matemático (incluindo expressões aritméticas e operações) regido por convenções e regras matemáticas. Envolve também compreensão e utilização de constructos formais baseados em definições, regras e sistemas formais, além da utilização de algoritmos com esses conceitos. Os símbolos, regras e sistemas utilizados variam de acordo com o conteúdo particular da matemática necessário para uma tarefa específica de formular, resolver ou interpretar a matemática. (PISA, 2012, p. 25).

Segundo o PISA no que se refere a formular que é a capacidade que o indivíduo tem de reconhecer e identificar oportunidades para a aplicação da Matemática, criando mecanismos que possibilitem a resolução de um problema. Apresentaremos a seguir na tabela 9 as médias e a distribuição percentual dos alunos por nível de proficiência de cada estado brasileiro avaliados nesse critério.

Tabela 9 - Médias estaduais no processo matemático de Formular

Processo matemático de FORMULAR – médias e distribuição percentual dos estudantes por nível de proficiência, por UF

Estados	Média	EP	Abaixo Nível 1	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6
Acre	333,4	6,9	62,3	24,5	10,3	2,3	0,5	0,1	0,0
Alagoas	335,4	8,0	62,4	22,9	10,6	3,2	0,8	0,1	0,0
Amapá	343,0	8,8	58,7	26,4	11,0	3,5	0,3	0,0	0,0
Amazonas	339,5	6,4	59,3	26,6	10,3	3,0	0,8	0,0	0,0
Bahia	344,5	10,5	57,1	24,6	11,6	3,9	1,9	0,8	0,0
Ceará	362,9	10,2	49,4	27,2	14,3	5,2	3,0	0,8	0,1
Distrito Federal	398,5	11,5	35,3	25,1	20,6	12,2	4,8	1,5	0,5
Espírito Santo	399,7	10,6	35,5	27,0	17,3	11,6	6,3	2,0	0,3
Goiás	357,6	10,2	50,7	26,8	13,3	6,5	2,1	0,5	0,2
Maranhão	313,5	12,3	73,6	16,6	6,6	2,3	0,4	0,4	0,0
Mato Grosso	358,5	10,7	52,8	25,4	14,0	5,2	2,0	0,6	0,0
Mato Grosso do Sul	395,0	7,1	35,3	27,9	20,9	11,0	4,5	0,4	0,0
Minas Gerais	388,5	8,8	35,0	30,7	22,2	8,9	2,4	0,6	0,1
Pará	347,8	6,3	55,5	26,4	15,0	2,8	0,4	0,0	0,0
Paraíba	384,2	7,3	40,1	28,5	19,9	7,2	3,0	1,2	0,1
Paraná	391,9	13,5	37,5	29,9	19,0	6,7	4,4	2,0	0,4
Pernambuco	352,6	9,1	53,5	30,3	11,6	3,4	0,8	0,3	0,1
Piauí	369,8	7,7	50,1	25,6	12,0	7,3	3,2	1,3	0,5
Rio de Janeiro	369,9	6,8	44,5	29,6	17,7	6,5	1,4	0,3	0,0
Rio Grande do Norte	368,0	11,6	51,2	22,8	14,1	6,4	3,2	1,7	0,5
Rio Grande do Sul	397,9	7,1	31,2	30,3	23,8	11,7	2,4	0,5	0,1
Rondônia	365,9	5,0	44,8	33,4	16,7	4,0	0,9	0,2	0,0
Roraima	352,5	6,8	54,8	26,5	11,8	5,5	1,4	0,1	0,0
Santa Catarina	401,0	9,6	29,9	29,3	23,1	13,3	3,8	0,7	0,0
São Paulo	389,3	5,5	37,5	29,0	19,4	9,2	3,6	1,1	0,3
Sergipe	363,0	9,3	49,6	26,6	15,7	6,7	1,1	0,2	0,0
Tocantins	346,9	9,9	57,4	24,1	11,7	4,9	1,1	0,6	0,2

Fonte: PISA, 2012

Ainda segundo o PISA, o raciocínio matemático para resolver problemas e chegar a obtenção de resultados depende da capacidade do indivíduo de aplicar conceito e fatos. Esse processo inclui atividades como:

• elaborar e empregar estratégias para encontrar uma solução matemática;

• utilizar ferramentas matemáticas, incluindo tecnologia, para encontrar soluções exatas ou aproximadas;

• aplicar fatos, regras, algoritmos e estruturas matemáticas quando encontrar soluções;

• manipular números, gráficos, informações e dados estatísticos, expressões e equações algébricas, e representações geométricas;

• elaborar diagramas, gráficos e outras construções matemáticas, extraindo informação deles;
• utilizar e transitar através de diferentes representações no processo de encontrar soluções;
• realizar generalizações baseadas nos resultados de aplicação de procedimentos matemáticos para encontrar soluções;
• refletir sobre argumentos matemáticos, explicar e justificar resultados matemáticos.

A tabela 10 abaixo apresenta as médias no processo matemático de Empregar por Estado.

Tabela 10 - Processo matemático EMPREGAR

Processo matemático de EMPREGAR – média e distribuição percentual dos estudantes por nível de proficiência, por UF

Estados	Média	EP	Abaixo Nível 1	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6
Acre	354,9	5,5	52,8	29,7	13,7	3,0	0,6	0,2	0,0
Alagoas	334,2	8,4	64,8	21,4	10,0	2,8	0,8	0,1	0,0
Amapá	350,1	8,5	54,1	29,2	13,2	3,3	0,3	0,0	0,0
Amazonas	345,1	6,3	58,9	28,6	8,4	2,5	1,4	0,1	0,0
Bahia	369,9	10,1	47,9	26,3	15,5	7,3	2,3	0,6	0,0
Ceará	373,2	8,9	45,3	29,4	14,8	6,3	2,7	1,2	0,3
Distrito Federal	412,7	8,6	29,2	26,7	22,2	14,3	6,1	1,3	0,1
Espírito Santo	413,8	10,7	27,3	29,9	20,6	13,1	7,3	1,7	0,1
Goiás	379,8	6,4	40,0	34,0	16,4	7,6	1,7	0,2	0,0
Maranhão	342,5	13,7	61,5	23,7	8,6	4,7	1,4	0,1	0,0
Mato Grosso	366,5	9,2	49,2	30,0	14,4	3,9	2,1	0,5	0,1
Mato Grosso do Sul	405,8	7,7	27,9	32,0	24,5	10,8	4,2	0,6	0,0
Minas gerais	401,7	7,1	28,8	31,5	25,8	11,0	2,4	0,5	0,0
Pará	355,4	4,4	53,8	25,6	16,5	3,7	0,4	0,0	0,0
Paraíba	389,4	7,1	35,4	31,1	20,8	9,2	3,1	0,4	0,1
Paraná	400,9	11,8	33,3	29,6	20,7	8,9	5,5	1,7	0,1
Pernambuco	358,4	7,1	51,3	31,0	13,4	3,5	0,7	0,0	0,0
Piauí	384,7	8,1	41,3	30,4	14,6	8,8	3,2	1,5	0,3
Rio de Janeiro	385,3	7,4	37,9	31,9	19,0	8,2	2,5	0,4	0,0
Rio Grande do Norte	372,7	9,8	50,3	25,3	11,8	7,2	3,1	2,0	0,3
Rio Grande do Sul	401,5	6,0	28,6	31,9	25,1	11,9	2,0	0,5	0,0
Rondônia	377,2	5,7	38,3	36,6	18,9	5,1	1,0	0,1	0,0
Roraima	356,3	5,9	54,7	26,0	13,1	4,6	1,5	0,2	0,0
Santa Catarina	417,1	8,6	22,3	30,7	26,4	14,3	5,5	0,8	0,0
São Paulo	398,9	4,5	32,1	30,6	22,1	10,3	3,8	1,0	0,2
Sergipe	384,5	9,4	38,6	31,7	18,1	9,3	1,8	0,4	0,0
Tocantins	362,6	7,4	50,9	27,2	14,5	5,1	1,7	0,6	0,0

Fonte: PISA, 2012

A última competência avaliada pelo PISA do quesito modelagem referente ao nível 6 da escala de proficiência é a habilidade de Interpretar, aplicar e avaliar resultados matemáticos. Essa competência exige do aluno a capacidade de refletir sobre resultados e interpretações dos problemas presentes no cotidiano. Para o PISA, as atividades relacionadas como essa aptidão são:

• interpretar um resultado matemático aplicado a um contexto do mundo real;
• avaliar a razoabilidade de uma solução matemática em um problema do mundo real;
• compreender o impacto que o mundo real exerce sobre os resultados e os cálculos de um procedimento matemático, visando a julgamentos sobre como os resultados podem ser ajustados ou aplicados àquele contexto;
• explicar por que um resultado matemático faz ou não sentido dentro do contexto de um problema;
• compreender a extensão e os limites das soluções e dos conceitos matemáticos;
• criticar e identificar os limites de um modelo utilizado na resolução de um problema.

A tabela 11 apresentada abaixo, mostra as médias por estado no processo matemático de Interpretar.

Tabela 11 - Processo matemático Interpretar

Processo Matemático de INTERPRETAR, média e distribuição percentual dos estudantes por nível de ensino, por UF

Estados	Média	EP	Abaixo Nível 1	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6
Acre	367,3	6,5	46,0	30,3	17,0	5,8	0,7	0,1	0,2
Alagoas	345,9	7,0	58,1	25,1	12,0	3,9	0,9	0,1	0,0
Amapá	371,8	8,6	43,3	32,7	17,0	6,0	1,0	0,1	0,0
Amazonas	368,7	6,0	46,5	33,0	13,6	4,7	1,5	0,7	0,0
Bahia	381,2	8,9	39,0	30,3	18,0	9,5	2,6	0,6	0,0
Ceará	388,8	8,4	35,3	32,7	20,0	7,7	3,4	0,8	0,0
Distrito Federal	424,2	10,0	22,6	25,2	26,8	16,8	7,2	1,1	0,2
Espírito Santo	420,7	10,1	24,2	30,6	22,7	12,5	7,3	2,5	0,2
Goiás	384,5	4,4	36,4	36,3	18,6	6,9	1,7	0,1	0,0
Maranhão	350,8	14,9	55,1	23,9	13,5	5,5	1,8	0,2	0,0
Mato Grosso	377,6	9,5	40,7	32,5	17,6	6,5	2,2	0,5	0,0
Mato Grosso do Sul	417,5	8,2	21,7	31,7	27,8	13,3	4,9	0,6	0,1
Minas Gerais	409,7	7,3	23,6	33,1	27,3	12,1	3,2	0,7	0,0
Pará	368,0	6,3	45,5	29,0	19,5	5,2	0,8	0,0	0,0
Paraíba	403,5	8,8	29,4	29,9	23,5	12,8	3,4	0,9	0,2
Paraná	408,1	11,4	29,1	30,6	21,8	11,7	5,5	1,3	0,0
Pernambuco	370,0	7,9	44,6	32,1	17,1	5,0	1,0	0,3	0,0
Piauí	388,1	8,2	37,4	32,3	17,9	8,6	3,0	0,6	0,2
Rio de janeiro	404,0	7,3	26,5	33,3	26,6	11,0	2,0	0,6	0,0
Rio Grande do Norte	394,8	8,4	36,7	30,2	18,4	8,7	3,7	1,9	0,4
Rio Grande do Sul	422,0	6,0	17,8	32,2	29,3	16,7	3,8	0,2	0,0
Rondônia	394,4	6,6	29,4	34,8	26,0	8,5	1,1	0,3	0,0
Roraima	370,9	6,7	46,1	29,3	16,1	6,8	1,5	0,1	0,1
Santa Catarina	419,0	8,1	22,7	27,0	27,9	16,6	5,2	0,5	0,0
São Paulo	415,6	4,2	23,8	30,0	26,0	14,0	5,0	1,0	0,1
Sergipe	389,3	10,0	35,8	33,0	18,7	9,4	2,6	0,4	0,0
Tocantins	374,0	7,9	43,0	31,0	16,4	7,2	2,0	0,5	0,0

Fonte: PISA, 2012

Analisando toda a estatística apresentada nos gráficos e tabelas anteriores e considerando o desempenho nas três escalas de processos matemáticos, conclui-se que os estudantes brasileiros apresentaram melhor desempenho na escala de interpretação. Essa é a última etapa do processo de modelagem e generalização matemática. Espera-se do estudante que após realizar uma representação matemática para um problema no contexto, utilize as ferramentas matemáticas necessárias para resolvê-lo, e em seguida, parte-se para a interpretação do resultado dentro do contexto apresentado. Essa foi área na qual os estudantes apresentaram um melhor desempenho, sugerindo que os esforços voltados para a educação matemática no ensino brasileiro poderiam concentrar-se mais aplicadamente nos processos *Formular e Empregar*.

3 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Com base nas informações apresentadas no capítulo anterior sobre o atual momento do Ensino de Álgebra no Brasil, sugere-se neste capítulo uma sequência de atividades didáticas visando minimizar as dificuldades encontradas por docentes no Ensino de Álgebra, buscando estimular o discente no processo de obtenção de fórmulas através do reconhecimento de padrões existentes em sequência de números e figuras.

Essa sequência didática está fundamentada nas orientações sugeridas no Banco Indutor de Trabalhos (BIT), que foram organizadas por Claudina Rodrigues (UNICAMP), Sueli Costa (UNICAMP) e Victor Giraldo (UFRJ) no que se refere às orientações a respeito do trabalho de conclusão de curso do PROFMAT. Nele é proposto que o mestrando elabore preferencialmente, um projeto com aplicação direta na sala de aula de Matemática na educação básica, contribuindo para o enriquecimento do ensino da disciplina. Esse trabalho deverá se enquadrar como sugestão, em uma das duas modalidades a seguir:

1- Elaboração de proposta de atividades educacionais;

2- Aplicação de atividades em sala de aula e avaliação de resultados.

Dessa maneira é desenvolvida a proposta com base na modalidade 2, na qual se pretende trabalhar a Álgebra como ferramenta de Generalização.

Esse trabalho foi realizado na Escola Estadual Fernandina Malta, situada à avenida Alberto Santos Dumont, s/n, Centro, Rio Largo – AL. Participaram do trabalho, os alunos das turmas: 9º ano A com 42 alunos e 9º ano B, com 40 alunos do período vespertino, durante o mês de outubro do ano letivo de 2015. Contudo, para facilitar o entendimento do trabalho, cada aluno será identificado com um código da seguinte maneira: os alunos do 9º ano A, com os códigos de A_{01} até A_{39} e os alunos do 9° ano B, de B_{01} até B_{41}.

Dificuldades previstas

A proposta tem como foco os alunos do 9° ano do ensino fundamental. É natural que em algum momento alguns alunos apresentem resistência ao tema. Muitos relutam em participar, por algum motivo, por exemplo, não se recordam de conteúdos como: expressões algébricas, valor numérico de expressão algébrica, operações com frações algébricas e equações, que deveriam ter sido abordados em séries anteriores, ou até mesmo, nunca tê-los visto, ou ainda, viram mais não desenvolveram as competências e habilidades necessárias para uma melhor compreensão. Entretanto, os procedimentos que serão apresentados são simples e espera-se que os alunos consigam desenvolver os conhecimentos necessários, tendo no professor o seu grande suporte nesse processo de ensino-aprendizagem.

Objetivos Gerais

- Apresentar uma proposta didática para o ensino de Álgebra no Ensino Fundamental, uma vez que essa é uma ferramenta de grande utilidade para expressar generalidade.
- Apresentar técnicas de validação de conjecturas fundamentadas em conceitos de transformação das expressões algébricas (utilização de letras para simbolizar números desconhecidos).
- Trabalhar problemas simples que estimulem o aluno no processo de generalização, mas que despertem no mesmo a motivação necessária para a aprendizagem da Álgebra, visando ampliar o seu potencial de abstração.

Material Utilizado

Notebook, Caixa de som amplificada, *Data show*, lápis, caneta, e palitos de picolé.

3.1 Atividade 1: Apresentação de vídeos sobre padrões matemáticos existentes na natureza

Objetivo: Despertar no aluno o gosto pela Matemática e de um modo especial pela Álgebra, mostrando imagens de objetos e seres presentes na natureza que são regidos por padrões e regularidades.

Metodologia: Antes da apresentação dos vídeos foi feita uma apresentação em Power point sobre generalização e padrões motivando os alunos para um discussão sobre o tema a ser trabalhado. Após esse momento foram exibidos dois vídeos conforme figuras 20, 21 e 22 abaixo sobre o tema. O data show foi fornecido pela escola. Os dois vídeos exibidos encontram-se disponíveis na internet (youtube), um chama-se “Matemática e a Natureza” e tem duração de 03 min e 43 s e o outro “Os Padrões Existentes na Natureza”, com duração de 04 min e 53 s. Essa atividade foi realizada em 2 aulas de 60 min em cada turma.

Figura 20 – Vídeo 1

Fonte: Autor, 2015

Figura 21 - Vídeo 2

Fonte: Autor, 2015

Figura 22 - Vídeo 3

Fonte: Autor, 2015

Durante a apresentação dos vídeos foi notória a admiração dos alunos quanto às imagens vistas, aumentado ainda mais o interesse pelo tema. Após o término da exibição dos vídeos, iniciou-se um momento de discussão de 30 minutos acerca dos vídeos, buscando explorar o que eles haviam compreendido sobre o tema e o que foi mais relevante para eles. Seguem alguns comentários dos alunos:

Aluno A_{03}:

“Eu achei a aula bem interessante. Não sabia que a Matemática tinha tanta coisa bonita”

Aluno B_{07}:

“Eu nunca imaginei que podia existir números nas flores, animais e outros objetos, muito menos que a gente pode encontrar um padrão para essas coisas. Gostei muito da aula. Seria bom se a Matemática fosse sempre assim”.

Aluno B_{19}:

“Ver essas imagens me fez mudar o pensamento sobre a Matemática. Eu nem sabia o que era Álgebra, muito menos para que servia. Aulas assim são muito legais”.

Aluno A_{31}:

“Quando eu estudava assuntos chatos como frações, equações, frações algébricas entre outros, não sabia para que serviam, mas agora eu sei”.

Aluno A_{33}:

"Eu nunca gostei de Álgebra ou Geometria, eu gosto é de fazer contas. Mas depois dessa aula, eu vi que eu posso generalizar padrões e continuar fazendo minha contas. A aula de hoje foi muito massa. As aulas de Matemática tem que ser sempre assim.

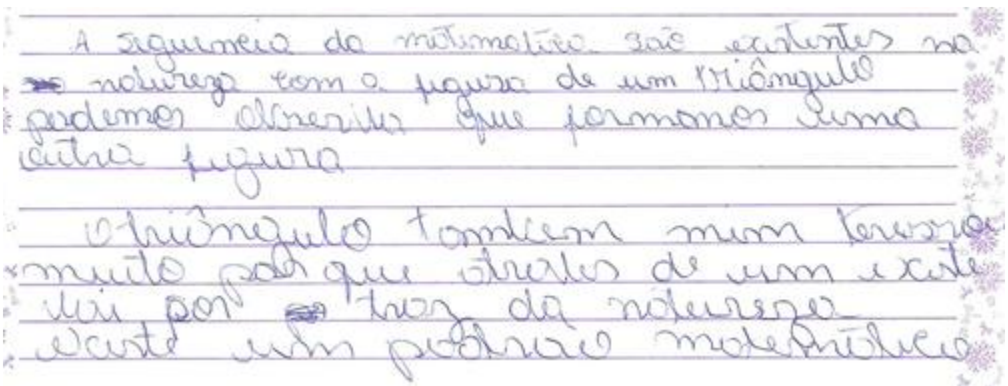
Nesses relatos observa-se a admiração e a empolgação dos alunos pelo tema. Eles puderam visualizar a Matemática num cenário que faz parte do seu cotidiano, mas, que muitas vezes passa despercebido, o que ficou evidente nas falas dos alunos A_{33} e B_{07}. Já na fala do aluno B_{31} percebe-se um bom conhecimento do conteúdo. Entretanto, é percebível na fala da maioria deles a necessidade de encontrar funcionalidade na Matemática. Durante a discussão alguns alunos se recusaram a falar alegando que tinham vergonha. Como sugestão, foi pedido que eles relatassem o que acharam da aula. Seguem alguns trechos de comentários dos alunos nos relatórios, conforme figuras 23, 24, 25, 26, 27 e 28 a seguir.

Aluno B_{02}

"A sequência (*sic*) da matemática (*sic*) são existentes na nalureza (*sic*) com a figura de um triângulo podemos observa (*sic*) que formamos uma outra figura.

O triângulo tambem (*sic)* mim (*sic*) teressou (*sic*) muito por que através (*sic*) de um existe vai pôr traz da natureza existe um padrao (*sic*) matematico (*sic*)".

Figura 23 - Relato do aluno B_{02}


A sequencia da matematica são existentes na
nalureza com a figura de um triângulo
podemos observila que formamos uma
outra figura

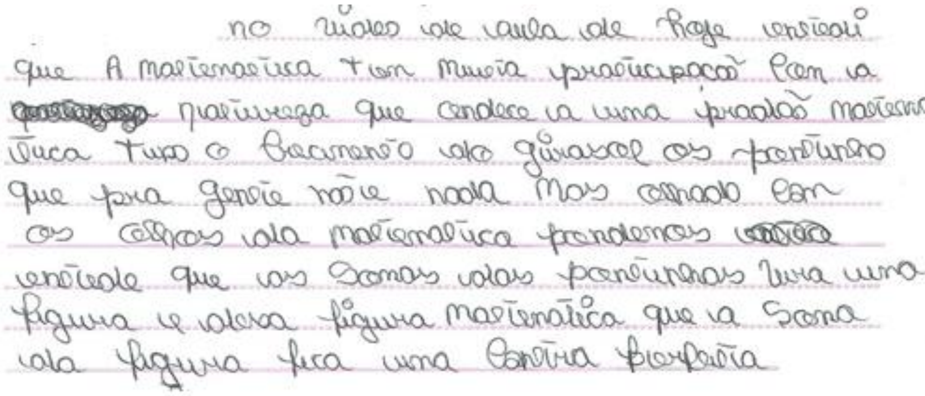
O triângulo tambem mim teressou
muito por que atravês de um exite
vai por traz da natureza
exite um padrão matematico

Fonte: Autor, 2015

Aluno A_{28}

"no (*sic*) video (*sic*) de (*sic*) de (*sic*) aula de hoje entendi que A (*sic*) matemática ten (*sic*) muita praticipação (*sic*) com (*sic*) a natureza que ondece (*sic*) a uma (*sic*) padrão matemática (*sic*) o crecinento (*sic*) do girassol os pontinho (*sic*) que pra (*sic*) gente não e (*sic*) nada mas olhado (*sic*) com os olhos da matemática pondemos (*sic*) entede (*sic*) que as somas das pontinhas vira uma figura matemática (*sic*) que a soma da figura fica una (sic) conta perfeita".

Figura 24 - Relato do aluno A_{28}


no vídeo de aula de hoje entendi que A matemática tem muita participação com a natureza que conhece a uma posição matemática tudo o bacamento do girasol os pontinho que pra gente não e nada mas olhado com os olhos da matemática pondemos entede que as somas das pontinhas vira uma figura e desa figura matemática que a soma da figura fica uma conta perfeita

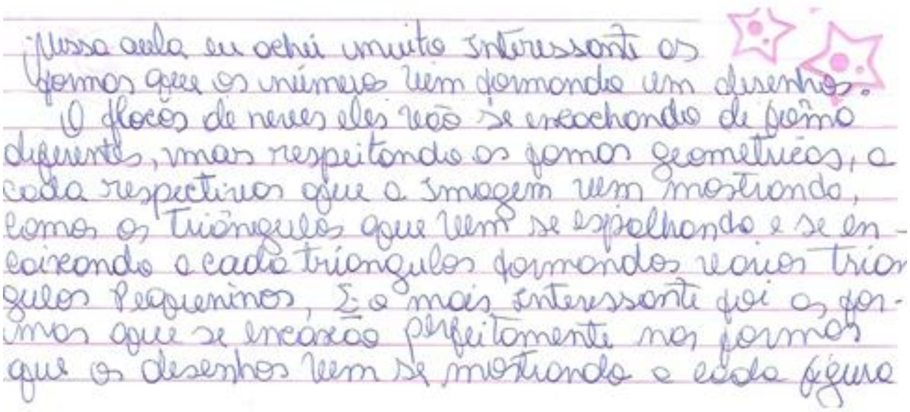
Fonte: Autor, 2015

Aluno B_{15}

"Nessa aula eu achei muito interessante as formas (*sic*) que os números vem formando em desenhos.

Os flocos de neves (*sic*) eles vão se encachando (*sic*) de fômo (*sic*) diferentes, mas respeitando as fomas (*sic*), a cada respectivas (*sic*) que a imagem vem mostrando, como os triângulos que vem se espalhando e se encaixando a cada triangulos (*sic*) formandos (*sic*) varios (*sic*) vários trangulos (*sic*) pequenininhos, e o mais interessante foi as formas que se encaxão (*sic)* perfeitamente nas formas que os desenhos vem se mostrando a cada figura".

Figura 25 - Relato do aluno B_{15}

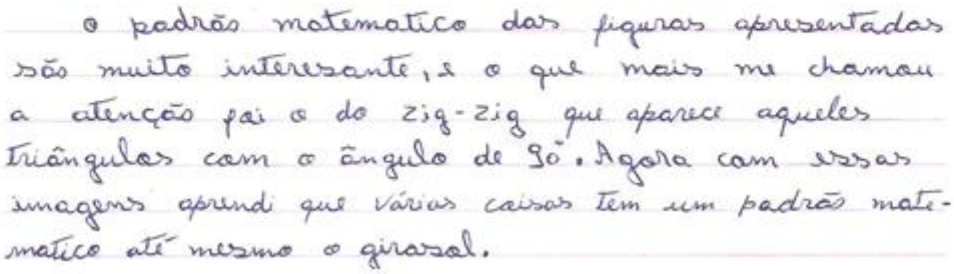

Nessa aula eu achei muito interessante as formas que os números vem formando em desenhos.
O flocos de neves eles vão se encachando de fômo diferentes, mas respeitando as formas geométricas, a cada respectivas que a imagem vem mostrando, como os triângulos que vem se espalhando e se encaixando a cada triângulos formandos varios triangulos pequeninos, E o mais interessante foi as formas que se encaxão perfeitamente nas formas que os desenhos vem se mostrando a cada figura

Fonte: Autor, 2015

Aluno B_{37}

“O padrão matematico (*sic*) das figuras apresentadas são muito interessantes, e o que me chamou mais a atenção foi o zig-zig que aparece aqueles triângulos com o ângulo de 90°. Agora com essas imagens aprendi que várias coisas tem um padrão matematico (*sic*) até mesmo o girassol”.

Figura 26 - Relato do aluno B_{37}

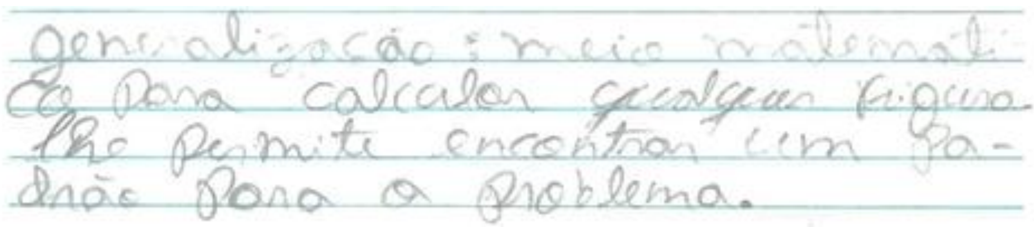

o padrão matematico das figuras apresentadas
são muito interesante, e o que mais me chamou
a atenção foi o do zig-zig que aparece aqueles
triângulos com o ângulo de 90°. Agora com essas
imagens aprendi que várias coisas tem um padrão mate-
matico até mesmo o girasol.

Fonte: Autor, 2015

Aluno B_{08}

“generalização (*sic*): meio matematico (*sic*) para calcular qualquer figura. lhe (*sic*) permite encontrar um padrão para o problema”.

Figura 27 - Relato do aluno B_{08}

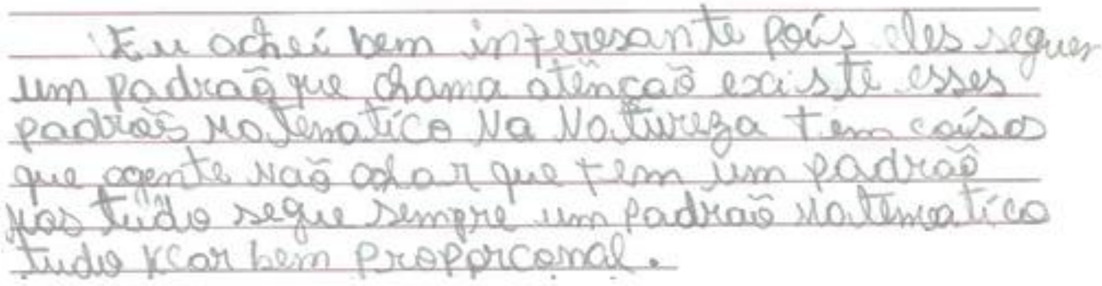

generalização: meio matemati-
co para calcular qualquer figura.
lhe permite encontrar um pa-
drão para o problema.

Fonte: Autor, 2015

Aluno A_{25}

“Eu achei bem interessante pois eles seguem um padrão que chama a atênção (*sic*) existe esses padrões matematico (*sic*) Na (*sic*) Natureza (*sic*). Tem coisas que agente (*sic*) Não (*sic*) achar (*sic*) que tem um padrão mas tudo segue sempre um padrão matematico (*sic*) tudo ficar (*sic*) bem proporcional”.

Figura 28 - Relato do aluno *A*₂₅


"Eu achei bem interesante pois eles segues
um padraõ que chama atençaõ existe esses
padrões Matematíca Na Naturezа tem coisas
que agente Naõ achar que tem um padraõ
mas tudo segue sempre um padraõ matematico
tudo ficar bem proporconal.

Fonte: Autor, 2015

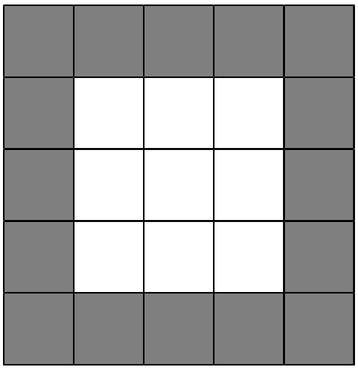
As falas dos alunos acima comprovam o fascínio deles pelo tema abordado, mostrando que eles puderam constatar a relação entre Matemática e cotidiano, aproximando a Matemática de suas realidades.

3.2 Atividade 2: Contagem de quadradinhos da borda

Objetivo: Explorar situações-problema onde o aluno possa reconhecer diferentes funções da Álgebra generalizando padrões aritméticos e criando modelos matemáticos para solução de problemas mais difíceis.

Metodologia: Foi entregue impresso em papel A4 a cada aluno um quadrado desenhado com 5 quadradinhos de lado conforme figura 29 na sequência e logo após foi perguntado quantos quadradinhos cinzentos havia na borda. Em seguida, perguntou-se quantos quadradinhos cinzentos haveria se o quadrado tivesse 6 quadradinhos de lado, e se tivesse sete quadradinhos, oito quadradinhos, 9 quadradinhos e 37 quadradinhos. Após essa etapa, os alunos foram agrupados em equipes de 5 alunos no 9º ano A e 6 alunos no 9º ano B. No 9° ano A, as equipes foram denominadas de EA1 a EA7 e no 9º ano B, de EB1 a EB8 para socialização das respostas a serem divulgadas, onde cada um descreveu o seu método para os demais gerando uma pluralidade de ideias. Em seguida, cada equipe foi orientada a escrever uma fórmula que traduzisse o procedimento utilizado na obtenção de um padrão. Nesse momento fez-se necessária uma intervenção da minha parte, afim de estabelecer um diálogo referente a fórmula obtida por eles e possíveis conteúdos relacionados como, cálculo de áreas e perímetros. Uma quantidade significativa de resultados corretos, surgiram antes de se chegar a fórmula para generalizar o exercício permitindo-nos explorar a noção de equivalência entre os resultados obtidos, mostrando-lhes como a fórmula tem grande aplicabilidade no descobrimento das características de cada problema. Para essa atividade foram destinadas 2 aula de 60 min.

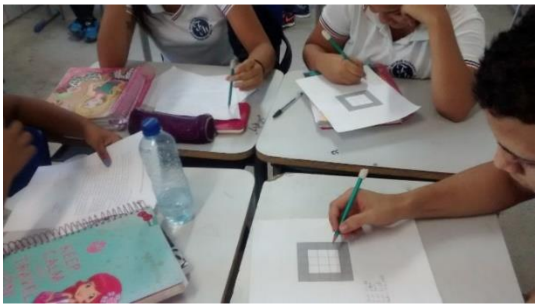
Figura 29 - Quadrados cinzas



Fonte: Autor, 2015

Podemos observar os alunos em equipes resolvendo a atividade 2, de acordo com as figuras 30, 31 e 32 a seguir.

Figura 30 - Equipe EA2



Fonte: Autor, 2015

Figura 31 - Equipe EB1

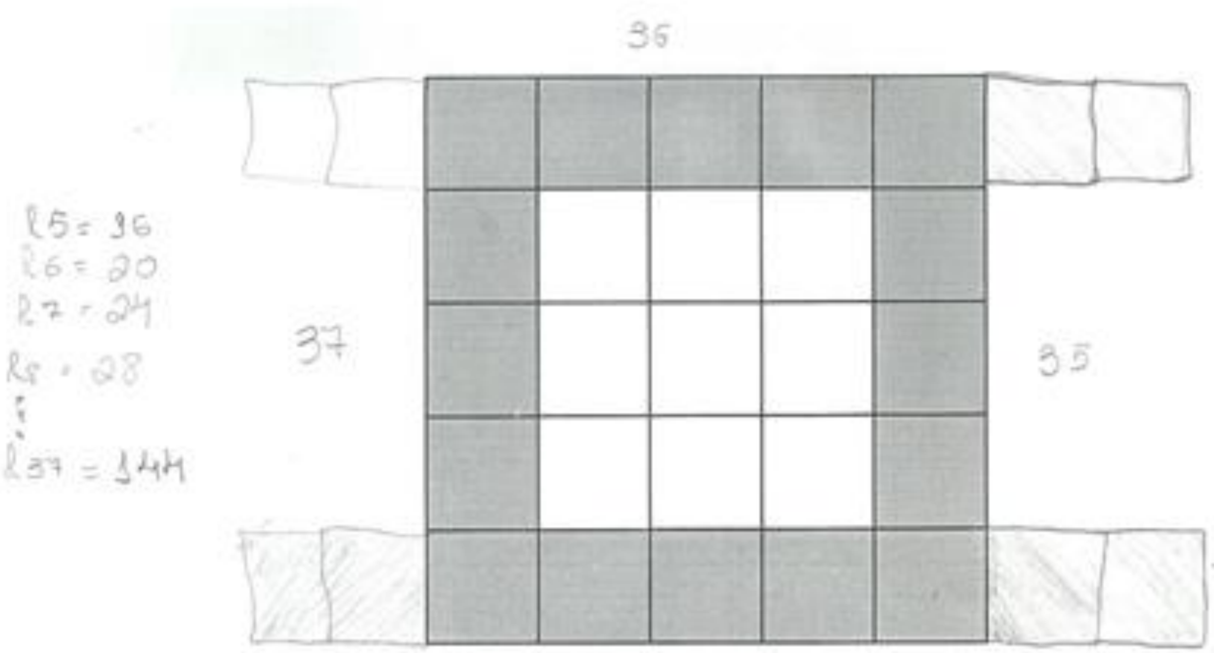
Fonte: Autor, 2015

Figura 32 - Equipe EB7

Fonte: Autor, 2015

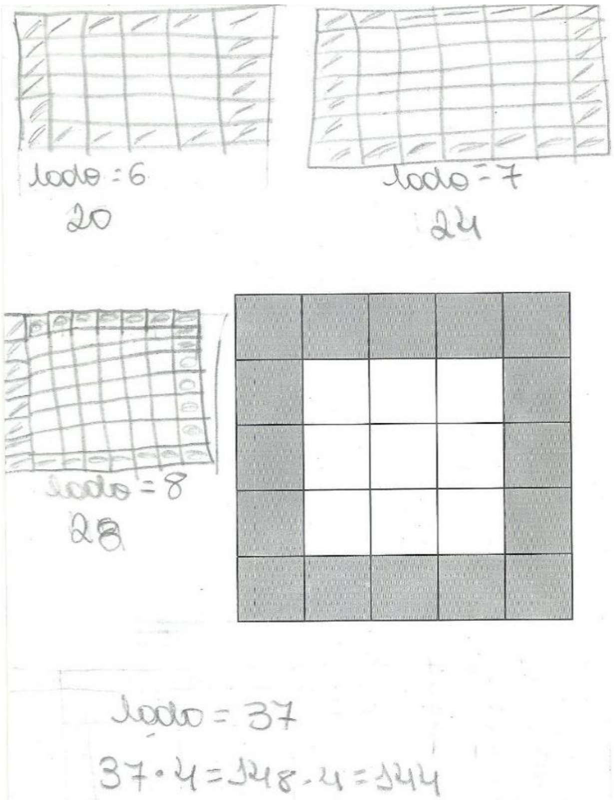
Vejamos algumas soluções apresentadas pelas equipes conforme as figuras 33, 34, 35 e 36 abaixo.

Figura 33 - Solução apresentada pela equipe EA4



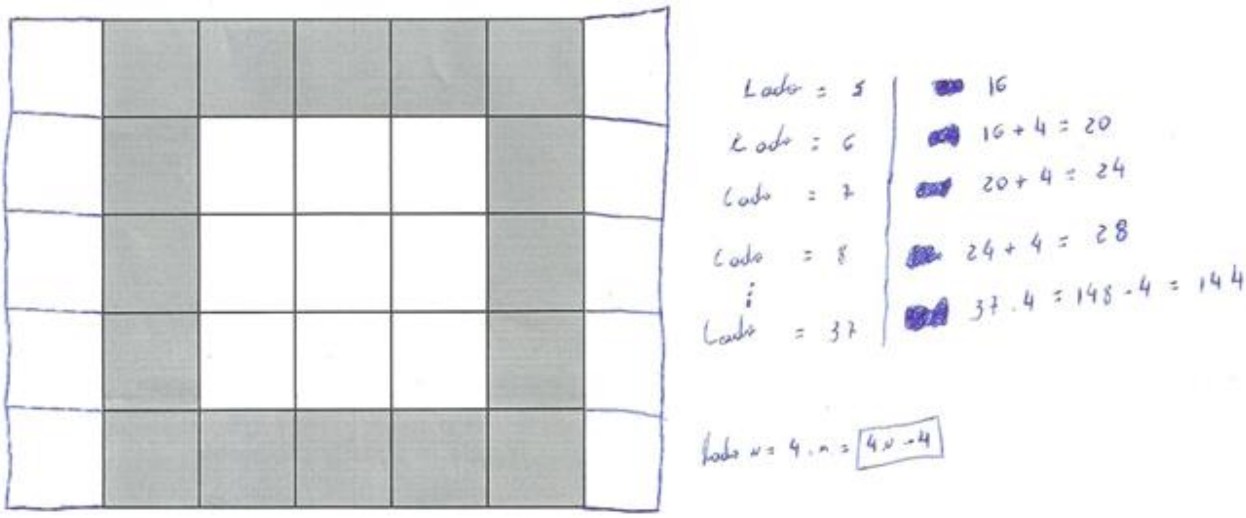
Fonte: Autor, 2015

Figura 34 - Solução apresentada pela equipe EB6



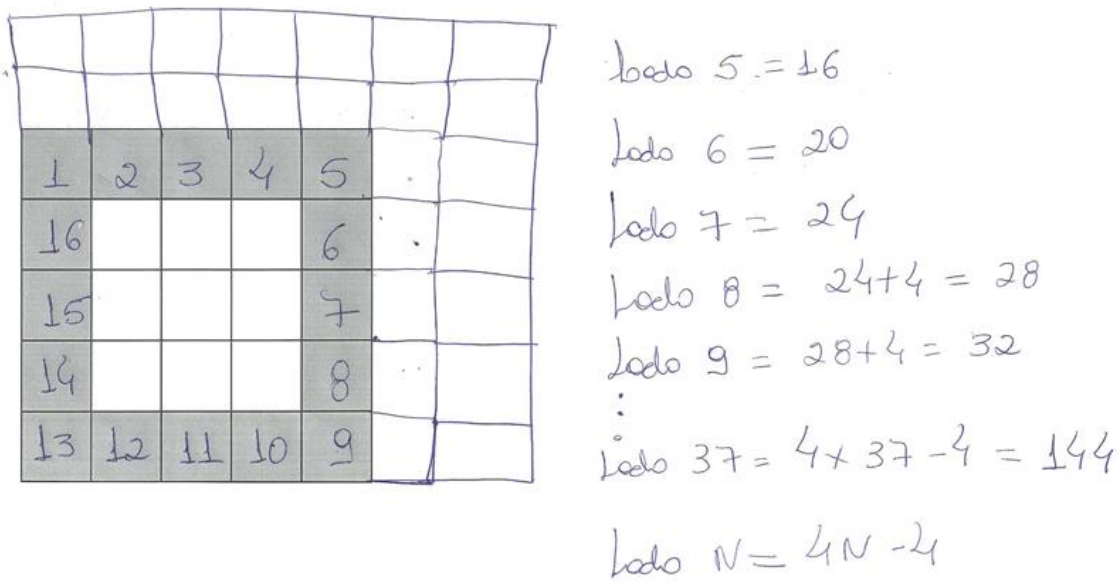
Fonte: Autor, 2015

Figura 35 - Solução apresentada pela equipe EB7



Fonte: Autor, 2015

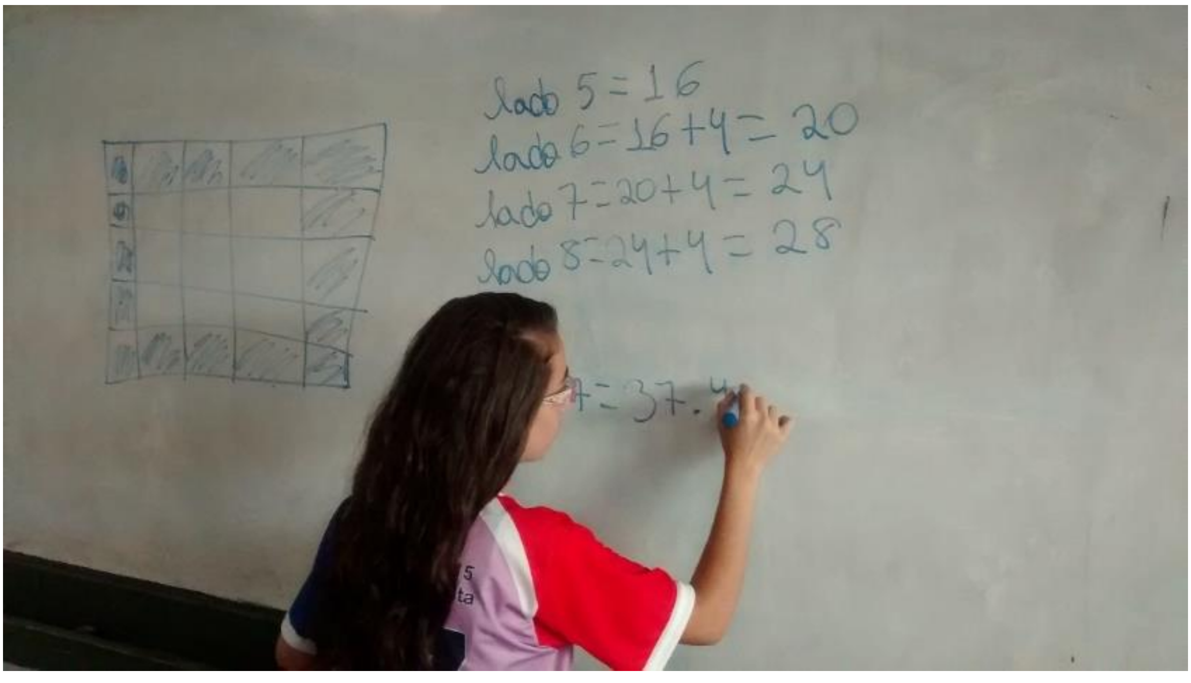
Figura 36 - Solução apresentada pela equipe EA2



Fonte: Autor, 2015

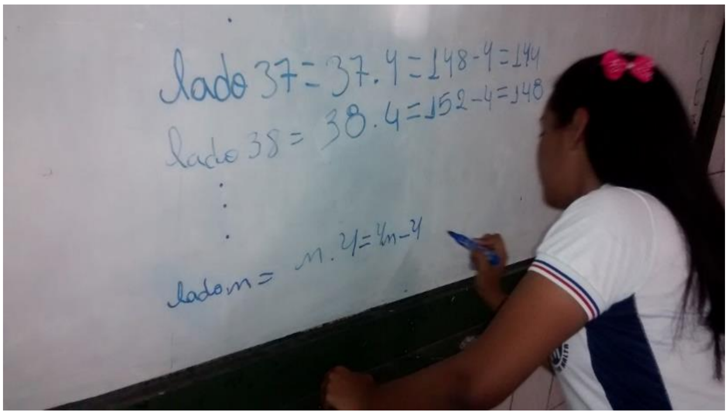
Em seguida foi pedido às equipes que escolhessem um componente para apresentar sua solução no quadro, como se vê nas figuras, 37 e 38 a seguir.

Figura 37 – Aluna expondo a solução da equipe EA5



Fonte: Autor, 2015

Figura 38 - Aluna apresentando a solução da equipe EB3



Fonte: Autor, 2015

Após a conclusão da atividade solicitou-se aos alunos que fizessem um relato oral ou escrito sobre o que eles acharam da atividade e das dificuldades encontradas por eles.

Aluno A_{17}

“Eu achei bem interessante. Foi um pouco difícil a parte de generalizar no início”

Aluno A_{21}

“Gostei muito de ficar brincando de achar o número de quadrados cinzas da próxima figura. É fácil. É só pensar um pouquinho”. Não sabia que generalizar era isso.

Aluno B_{11}

“Não gostava de Matemática, mas gostei muito dessa brincadeira que o professor passou, gostei da aula de Matemática de hoje. As vezes a gente pensa que é só calcular o valor das coisas”.

Aluno B_{24}

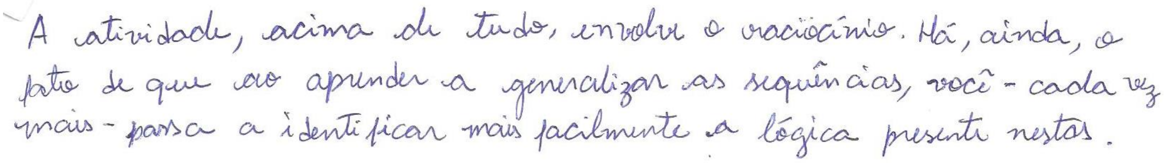
“A Matemática é muito interessante. A gente só tem que prestar atenção. Generalizar foi a porte mais interessante”.

A seguir acompanharemos alguns relatos escritos de acordo com as figuras 39, 40, 41 e 42 a seguir.

Aluno A_{22}

"A atividade, acima de tudo, envolve o raciocínio. Há, ainda, o fato de que ao aprender a generalizar as sequências, você – cada vez mais – passa a identificar mais facilmente a lógica presente nestas".

Figura 39 - Relato do aluno A_{22}

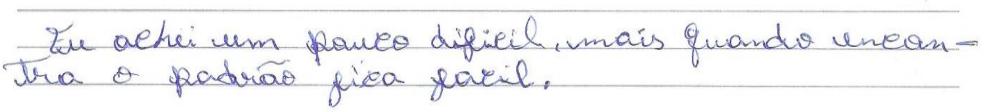

A atividade, acima de tudo, envolve o raciocínio. Há, ainda, o fato de que ao aprender a generalizar as sequências, você - cada vez mais - passa a identificar mais facilmente a lógica presente nestas.

Fonte: Autor, 2015

Aluno A_{09}

"Eu achei um pouco difícil, mais (sic) quando encontra o padrão fica fácil (sic)".

Figura 40 - Relato do aluno A_{09}

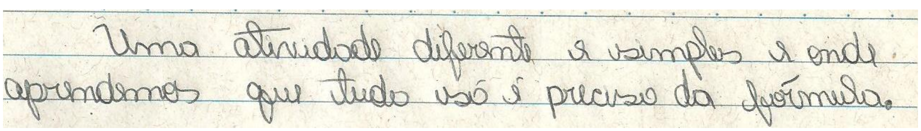

Eu achei um pouco dificil, mais quando encontra o padrão fica facil.

Fonte: Autor, 2015

Aluno B_{12}

"Uma atividade diferente e simples e onde aprendemos que tudo só é preciso da fórmula"

Figura 41 - Relato do aluno B_{12}

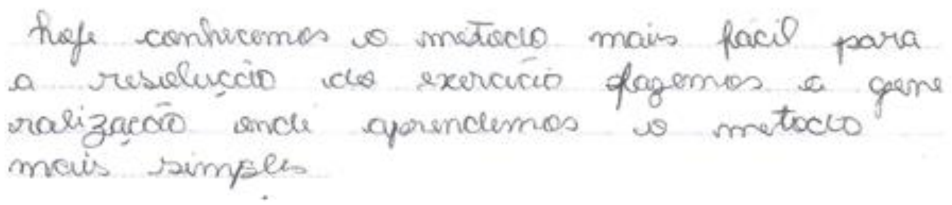

Uma atividade diferente e simples e onde aprendemos que tudo só é preciso da fórmula.

Fonte: Autor, 2015

Aluno B_{34}

“Hoje conhecemos o método mais fácil para a resolução do exercício é a generalização onde aprendemos onde aprendemos o método mais simples”

Figura 42 - Relato do aluno B_{34}


hoje conhecemos o metodo mais fácil para
a resolução do exercício fazemos a gene
ralização onde aprendemos o metodo
mais simples

Fonte: Autor, 2015

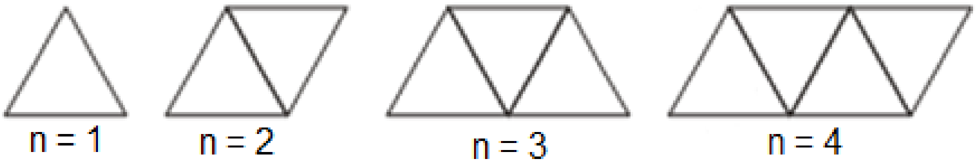
Os relatos dos alunos e as soluções apresentadas demonstram o entusiasmo deles ao participar da atividade e o fascínio pela descoberta de procedimentos que facilitaram o desenvolvimento do exercício. Observa-se também, que na construção da atividade com o discente, houve uma evolução do raciocínio matemático e uma mudança na maneira de ver a Matemática como uma disciplina complexa e sem funcionalidade no seu cotidiano.

3.3 Atividade 3: Reconhecendo um padrão na construção de sequência de figuras com palitos de picolé

Objetivo: Facilitar o processo de ensino-aprendizagem através da experimentação, aliando teoria e prática, proporcionando o desenvolvimento da pesquisa e da problematização em sala de aula, transformando o estudante em sujeito ativo da aprendizagem, permitindo que o mesmo aperfeiçoe competências e habilidades inerentes à Álgebra.

Metodologia: Os alunos mais uma vez foram reorganizados em equipes conforme Atividade 2. Em seguida foi entregue a cada uma das equipes impressa em folha de papel A4 a sequência representada na figura 43 abaixo e 100 palitos de picolé para que eles as construíssem, sendo que as mesmas podiam ser produzidas em qualquer superfície plana. Para essa atividade foram utilizadas 2 aulas de 60 min.

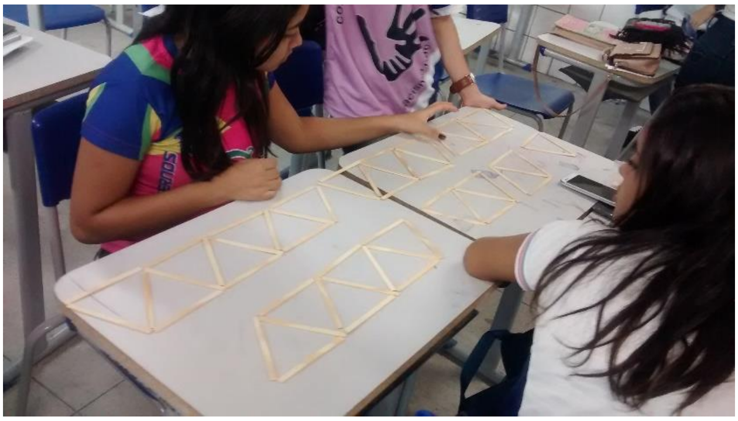
Figura 43 - Construção de triângulos com palitos de picolé



Fonte: Autor, 2015

Segue abaixo algumas imagens das equipes realizando a atividade conforme as figuras 44, 45 e 46 abaixo.

Figura 44 - Atividade realizada pela equipe EA2



Fonte: Autor, 2015

Figura 45 - Atividade realizada pela equipe EA1

Fonte: Autor, 2015

Figura 46 - Atividade realizada pela equipe EB2

Fonte: Autor, 2015

Após essa etapa, as equipes responderam oralmente os questionamentos:

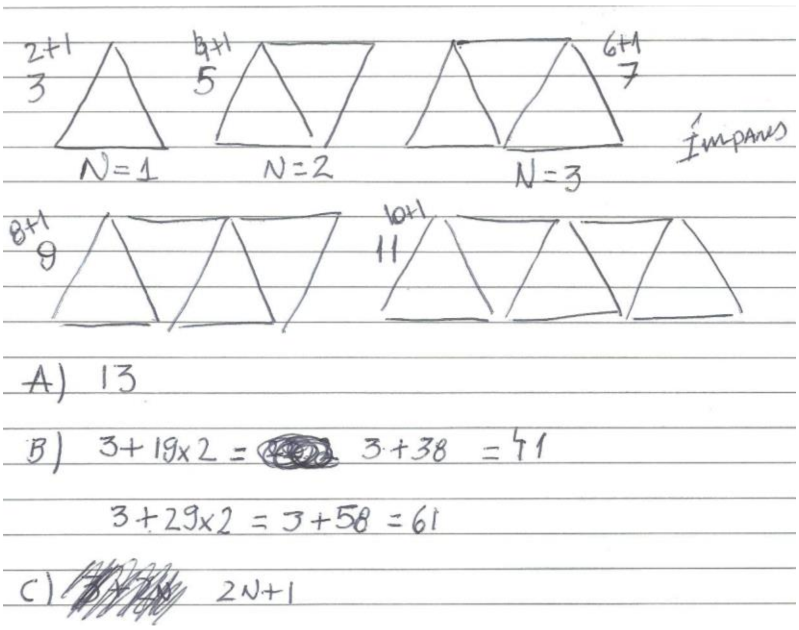
a) Qual a quantidade de palitos necessária para formar a sexta figura na sequência?

b) Qual a quantidade de palitos necessária para construir a vigésima figura da sequência? E a trigésima?

c) Determinar uma fórmula que generalize a quantidade de palitos da posição n.

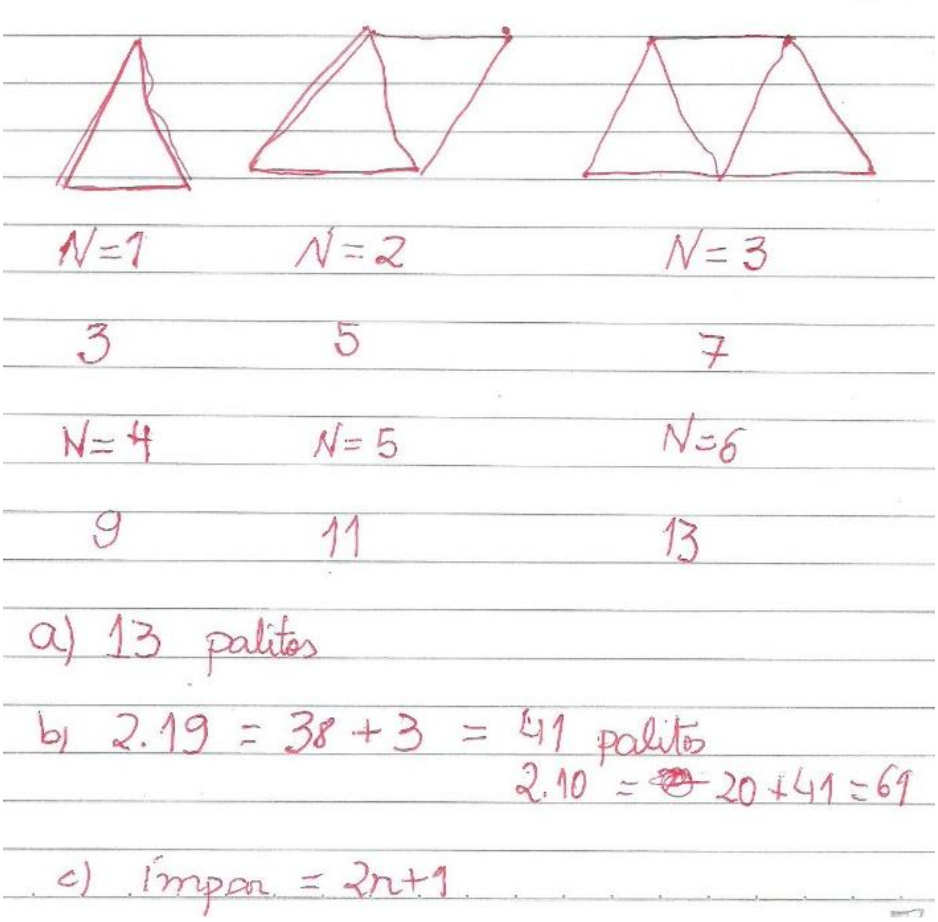
Vejamos as soluções apresentadas por algumas das equipes conforme as figuras 47, 48, 49, 50, 51 e 52.

Figura 47 - Solução apresentada pela equipe EA1



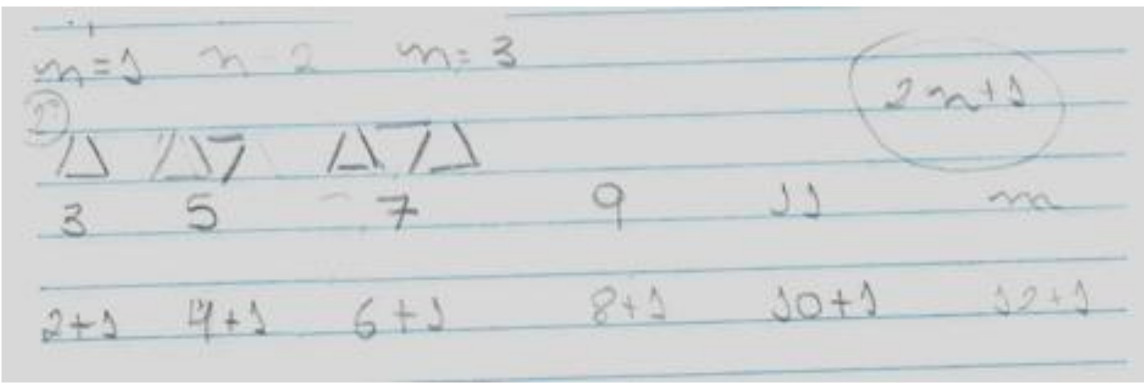
Fonte: Autor, 2015

Figura 48 - Solução apresentada pela equipe EB3



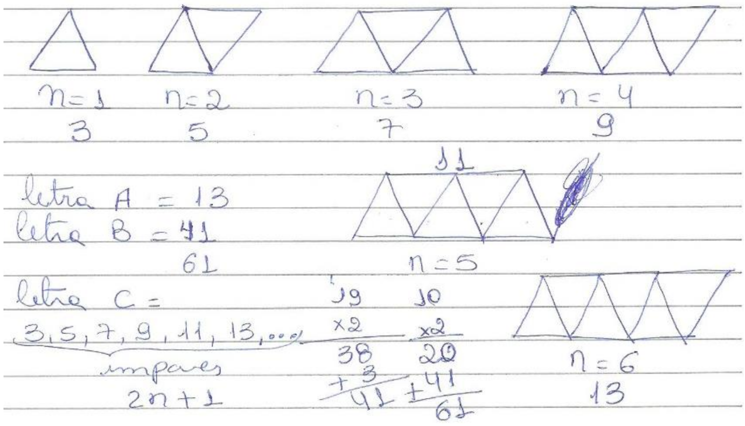
Fonte: Autor, 2015

Figura 49 - Solução apresentada pela equipe EA7



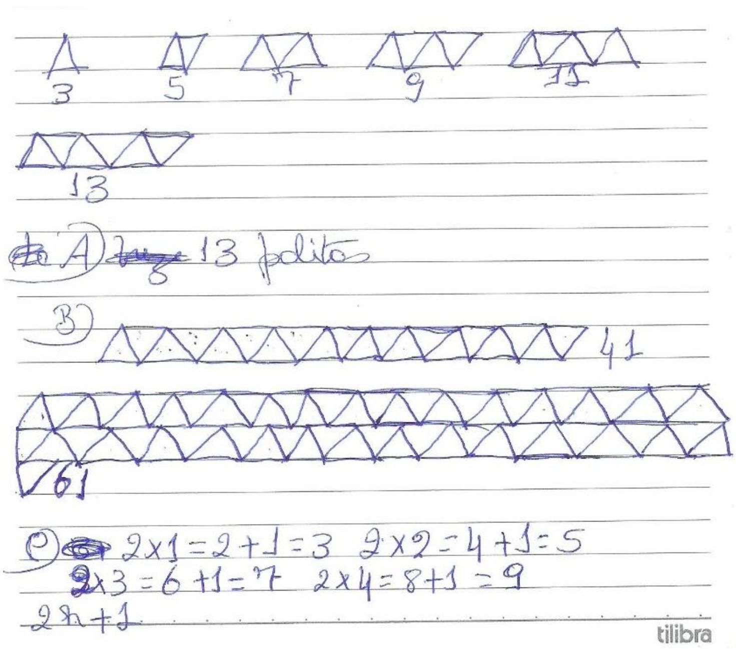
Fonte: Autor, 2015

Figura 50 - Solução apresentada pela equipe EA6



Fonte: Autor, 2015

Figura 51 - Solução apresentada pela equipe EB1



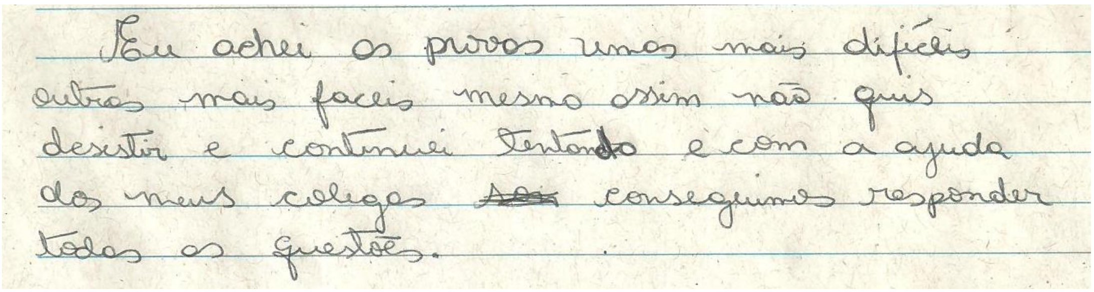
Fonte: Autor, 2015

Essa atividade possibilitou a interação entre os alunos, eles participaram ativamente, contribuindo para um bom desenvolvimento e proporcionando um momento ímpar para aprendizagem, despertando o espírito de trabalho em equipe e de competitividade. Segue abaixo alguns depoimentos do alunos a respeito da atividade, conforme as figuras 52, 53, 54, 55, 56 e 57 abaixo.

Aluno A_{08}

“Eu achei as provas umas mais difíceis outras mais fáceis mais (sic) mesmo assim não quis desistir e continuei tentando e com a ajuda dos meus colegas conseguimos responder todas as questões”

Figura 52 Relato do aluno A_{08}

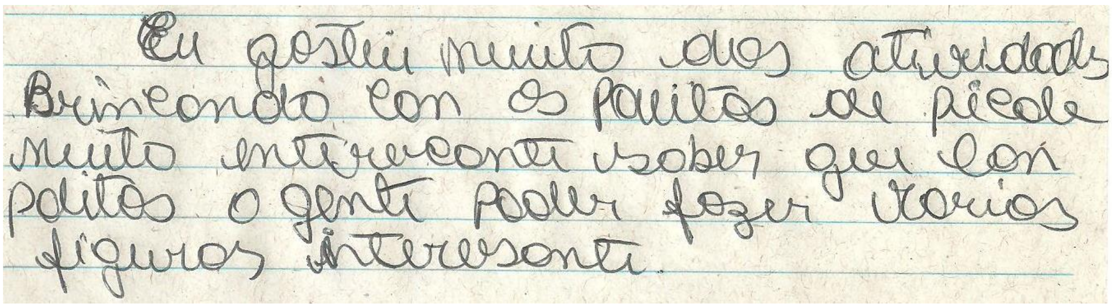

Eu achei as provas umas mais difíceis
outras mais faceis mesmo assim não quis
desistir e continuei tentando e com a ajuda
dos meus colegas ~~Aos~~ conseguimos responder
todas as questões.

Fonte: Autor

Aluno B_{11}

Eu gostei muito das atividades brincando com (*sic*) os palitos de picolé muito enterecante (*sic*) saber que con (*sic*) palitos o (*sic*) gente poder (*sic*) várias figuras interesante (*sic*).

Figura 53 - Relato do aluno B_{11}

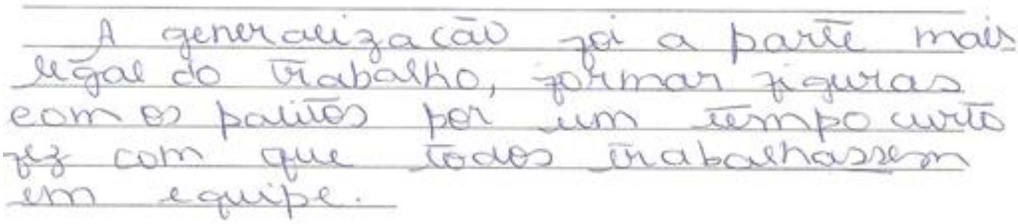

Eu gostei muito das atividades
Brincando con os palitos de picole
muito enterecante saber que con
palitos o gente poder fazer varias
figuras interesante.

Fonte: Autor, 2015

Aluno B_{36}

“A generalização foi a parte mais legal do trabalho, formar figuras com os palitos por um tempo curto fez com que todos trabalhassem em equipe”.

Figura 54 - Relato do aluno B_{36}



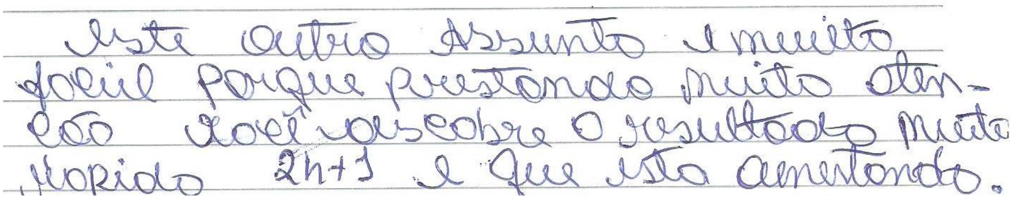
A generalização foi a parte mais legal do trabalho, formar figuras com os palitos por um tempo curto fez com que todos trabalhassem em equipe.

Fonte: Autor, 2015

Aluno A_{18}

“Este outro assunto e (*sic*) muito facil (*sic*) porque prestando muito atenção você descobre o resultado muito rápido (*sic*) $2n + 1$ e que esta aumentando”.

Figura 55 - Relato do aluno A_{18}



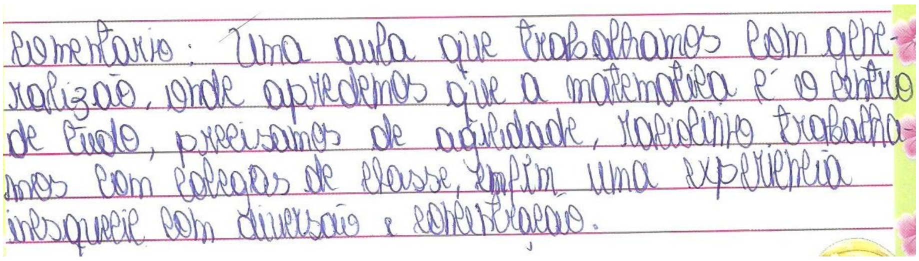
Este outro Assunto e muito facil porque prestando muito atenção você descobre o resultado muito rapido 2n+1 e que esta aumentando.

Fonte: Autor, 2015

Aluno B_{11}

“Uma aula em que trabalhamos com generalização, onde apredemos (*sic*) que a matematica (*sic*) é o centro de tudo, precisamos de agilidade, raciocínio. trabalhamos (*sic*) com colegas de classe, enfim uma experiência inesquecível com diversão e concentração”.

Figura 56 - Relato do aluno B_{11}



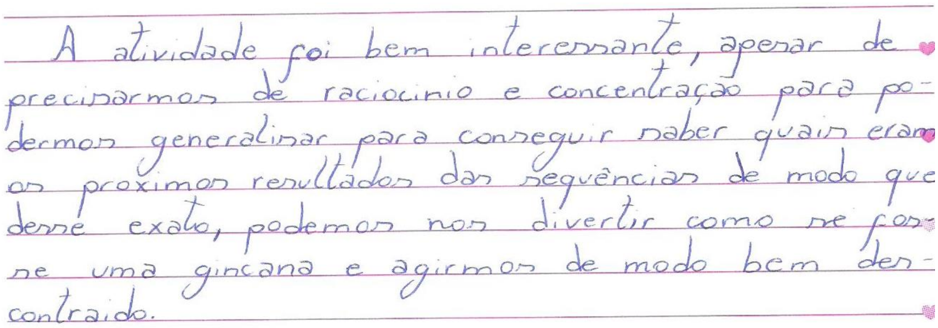
Comentario: Uma aula que trabalhamos com generalizão, onde apredemos que a matematica é o centro de tudo, precisamos de agilidade, raciocinio trabalhamos com colegas de classe, enfim uma experiencia inesquecie com diversão e concentração.

Fonte: Autor, 2015

Aluno A_{19}

“A atividade foi bem interessante, apesar de precisarmos de raciocínio e concentração para podermos generalizar para conseguir saber quais eram os proximos (*sic*) resultados das sequências de modo que desse exato, podemos nos divertir como se fosse uma gincana e agimos de modo bem descontraído”.

Figura 57 - Relato do aluno A_{19}


A atividade foi bem interessante, apesar de
precisarmos de raciocinio e concentração para po-
dermos generalizar para conseguir saber quais eram
os proximos resulltados das sequências de modo que
desse exato, podemos nos divertir como se fos-
se uma gincana e agirmos de modo bem des-
contraido.

Fonte: Autor, 2015

Nesses depoimentos podemos observar o envolvimento e a empolgação dos alunos durante a realização da atividade. Momentos como esse aproximam os alunos da Matemática e favorecem uma aprendizagem lúdica, mas significativa de conceitos matemáticos.

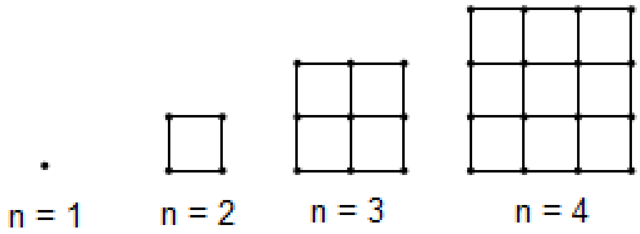
3.4 Atividade 4: Resolução de uma lista de exercícios

Objetivo: Aprimorar o que fora trabalhado nas atividades anteriores buscando avaliar como os alunos assimilaram os procedimentos aplicados nas tarefas com intuito de mensurar o avanço dos alunos no que diz respeito a Álgebra enquanto ferramenta de generalização, trabalhando o espírito de equipe, buscando assim fixar o conhecimento visto.

Metodologia: Os alunos foram divididos em grupos seguindo os critérios das atividades anteriores. Em seguida lhes foi entregue uma lista de problemas de generalização impressa em papel A4 apresentada abaixo. As equipes tiveram um tempo de 2 aulas de 60 min cada para resolverem a lista e mais uma aula também de 60 min para discussão dos resultados obtidos por eles, totalizando 3 aulas de 60 min cada. Eu fiquei a todo instante monitorando as equipes e tirando as possíveis dúvidas. Algumas equipes sentiram algumas dificuldades quanto as atividades, mas como estavam reunidos em grupos foram compartilhando as informações, conseguindo desse modo superá-las.

1) Observe a sequência de figuras a seguir:

Figura 58 - Problema 1



Fonte: Autor, 2015

Prosseguindo com esse raciocínio complete a tabela a seguir com a quantidade de pontinhos que aparecem em cada figura.

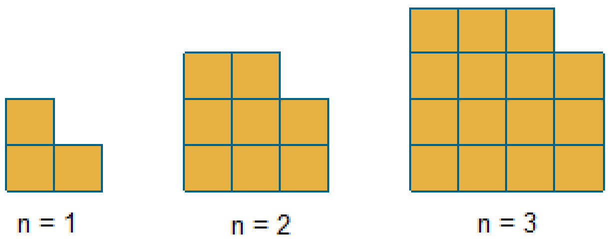
Tabela 12 - Pontinhos no quadrado

$n(n \in \mathbb{N})$	Quantidade de pontinhos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

2) As três primeiras figuras a seguir são formadas por quadrados. Com base na figura abaixo, preencha a tabela a seguir.

Figura 59 - Problema 2



Fonte: Autor, 2015

Tabela 13 - Quantidade de quadrados

n($n \in \mathbb{N}$)	Quantidade de quadrados
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

3) Considere a sequência abaixo

n = 1	1
n = 2	1 + 3
n = 3	1 + 3 + 5
n = 4	1 + 3 + 5 + 7
n = 5	1 + 3 + 5 + 7 + 9

.

.

.

Analisando o padrão apresentado na sequência acima, preencha a tabela a seguir.

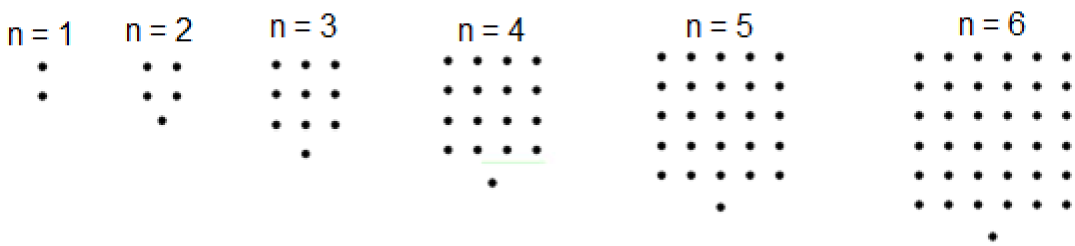
Tabela 14 - Soma

$n(n \in \mathbb{N})$	Soma
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

4) As figuras mostradas a seguir estão organizadas conforme um padrão que se repete.

Figura 60 - Problema 4



Fonte: Prova Brasil, 2011

Mantendo-se essa disposição, complete a tabela a seguir:

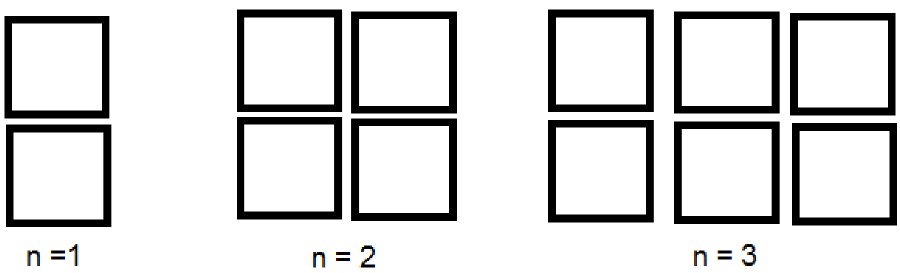
Tabela 15 – Quantidade de bolinhas

$n(n \in \mathbb{N})$	Quantidade de bolinhas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

5) Observe a sequência de figuras abaixo e responda preenchendo a tabela de acordo com o padrão apresentado:

Figura 61 - Problema 5



Fonte: Autor, 2015

Tabela 16 - Quantidade de quadradinhos

$n (n \in \mathbb{N})$	Quadradinhos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

6) Joãozinho começou a efetuar as seguintes somas e percebeu que havia um padrão nelas, conforme descrito abaixo:

Linha 1 $\quad 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = (1 + 2)^2$

Linha 2 $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = (1 + 2 + 3)^2$

Linha 3 $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$

Prosseguindo com o padrão, complete a tabela abaixo:

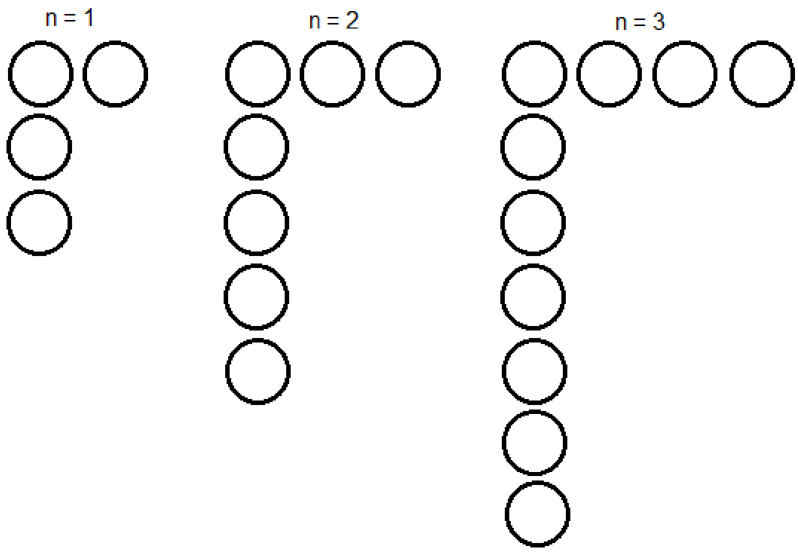
Tabela 10 – Soma de cada linha

$Linha$	Soma de cada linha
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

7) Considere a sequência de figuras a seguir.

Figura 54 – Problema 7



Fonte: Autor, 2015

Prosseguindo com o padrão, preencha a tabela abaixo.

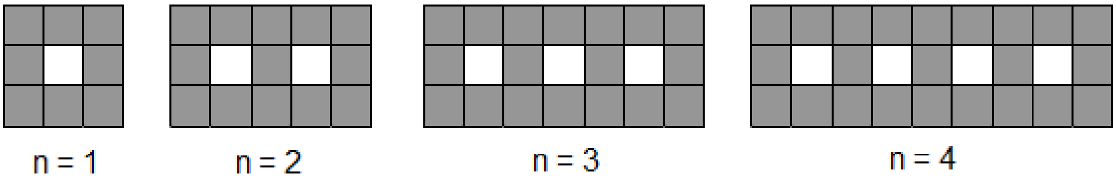
Tabela 17 - Número de bolinhas

$n(n \in \mathbb{N})$	Número de bolinhas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

8) Complete a tabela a seguir de acordo com o padrão mostrado nas figuras abaixo:

Figura 62 - Problema 8



Fonte: Autor, 2015

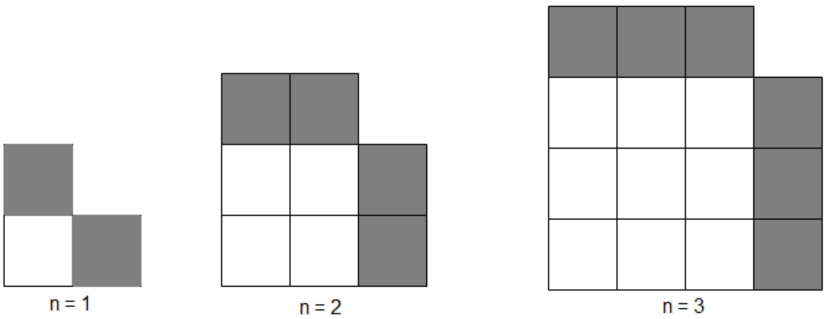
Tabela 18 - Quadrados cinzentos

$n (n \in \mathbb{N})$	Número de quadrados cinzentos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

9) Observando o padrão na figura abaixo, repare que cada figura é formada por uma região quadrada (de cor branca) e por uma região cinzenta.

Figura 63 - Problema 9



Fonte: Autor, 2015

Baseando-se nesse padrão, complete a tabela abaixo:

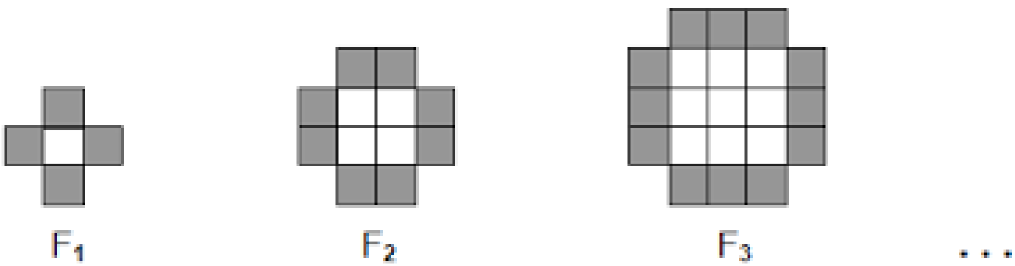
Tabela 19 - Quadrados cinzentos da borda

$n(n \in \mathbb{N})$	Quadrados cinzentos da borda
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

10) Observe a seguinte sequência de figuras e complete a tabela de acordo com o padrão apresentado.

Figura 64 - Problema 10



Fonte: Autor, 2015

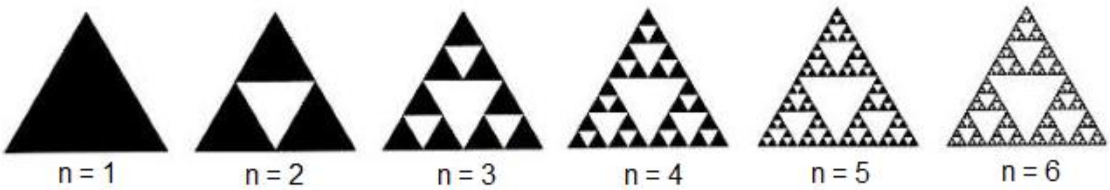
Tabela 20 - Quadrados cinzentos na borda

Figura	Quadrados cinzentos da borda
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

11) Observando a disposição dos triângulos nas figuras abaixo, complete a tabela:

Figura 65 - Problema 11



Fonte: Autor, 2015

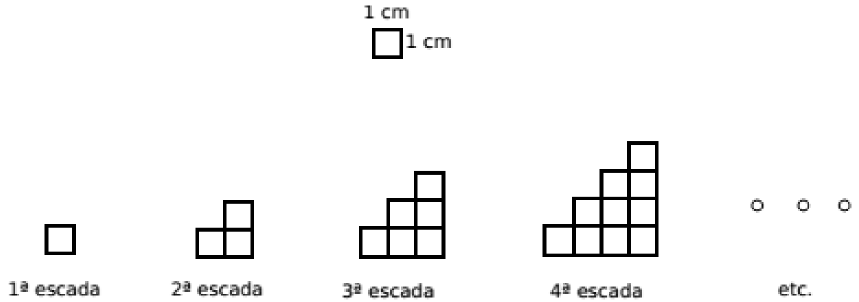
Tabela 21 - Quantidade de triângulos escuros

$n(n \in \mathbb{N})$	Triângulos escuros
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

12) Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas escadas conforme a figura abaixo:

Figura 66 - Problema 12



Fonte: Autor, 2015

Conforme padrão mostrado pelas figuras acima, complete a tabela a seguir:

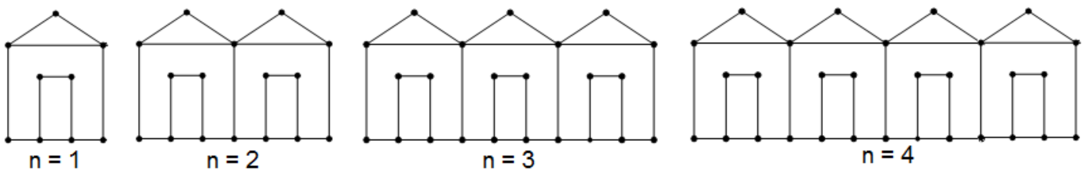
Tabela 16 – Escada de quadradinhos

Escada	Quantidade de quadradinhos da escadinha
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

13) Considere o número de pontinhos pretos dispostos em cada figura a seguir:

Figura 67 - Problema 13



Fonte: Autor, 2015

Continuando com esse padrão complete a tabela a seguir.

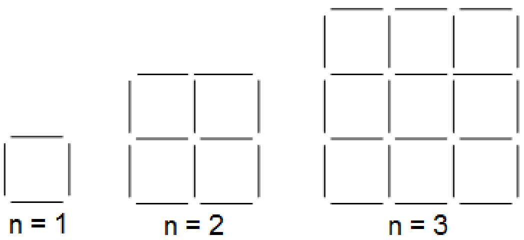
Tabela 22 - Pontinhos pretos

$n(n \in \mathbb{N})$	Números de pontinhos pretos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

14) Na figura abaixo, Maria estava brincando com palitos e resolveu montar quadrados. Inicialmente, para formar um quadrado de lado 1 x 1 ela utilizou 4 palitos, para formar um quadrado de lado 2 x 2, para formar um quadrado de lado 3 x 3, ela precisou de 24 palitos e assim por diante conforme figura abaixo.

Figura 68 - Problema 14



Fonte: Autor, 2015

Analisando o padrão apresentado pela figura acima, complete a tabela abaixo:

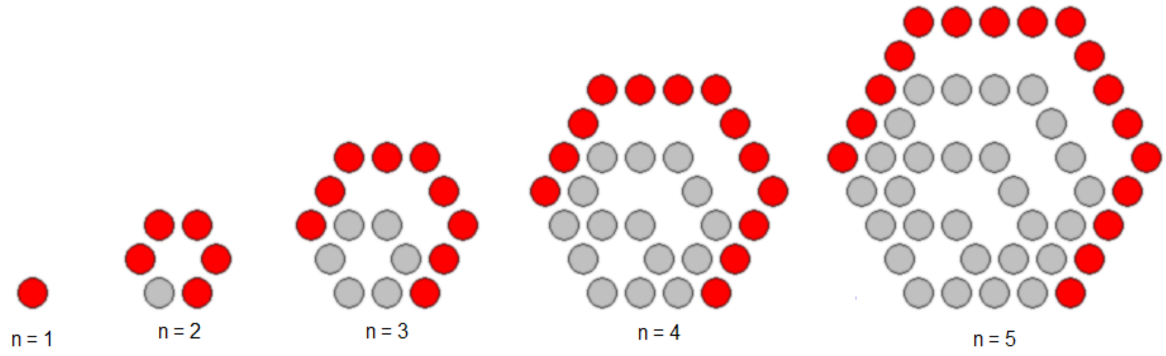
Tabela 18 – Quantidade de palitinhos

$n(n \in \mathbb{N})$	Números de palitinhos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

15) Analisando as quatro primeiras figuras abaixo, preencha corretamente a tabela a seguir indicando a quantidade de bolinhas em cada sequência.

Figura 69 - Problema 15



Fonte: Autor, 2015

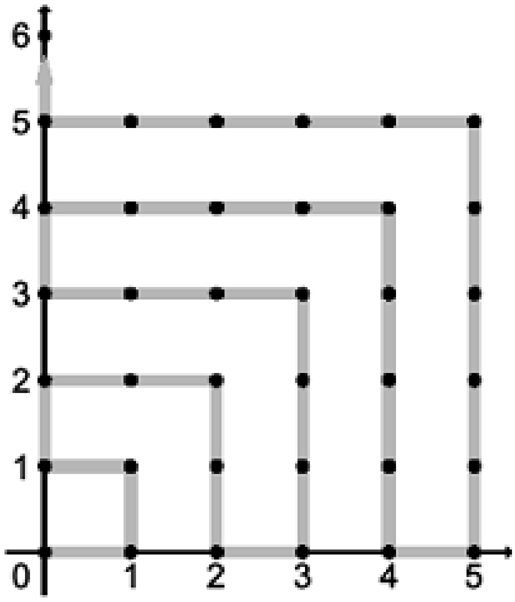
Tabela 23 - Quantidade de bolinhas

$n(n \in \mathbb{N})$	Números de bolinhas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

16) A linha poligonal da figura parte da origem e passa por todos os pontos do plano que têm coordenadas inteiras não negativas, de acordo com o padrão indicado. A unidade de comprimento nos eixos é 1 cm. O comprimento da poligonal da origem até um ponto (*a*, *b*) é chamado de lonjura de (*a*, *b*); por exemplo, a lonjura de (1, 2) é 5 cm, a lonjura de (2, 2) é de 6 cm e a lonjura de (3, 3) é de 12 cm.

Figura 70 - Problema 16



Fonte: OBMEP, 2011

Com base nessas informações preencha a tabela abaixo:

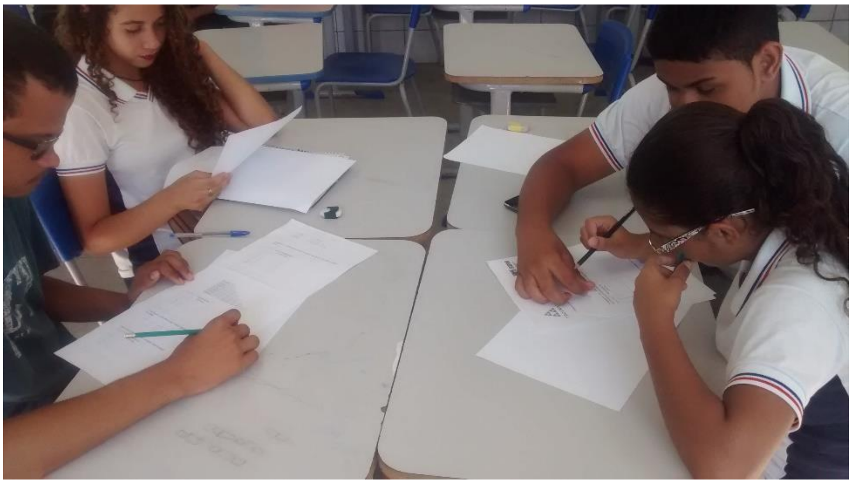
Tabela 24 - Lonjura

(a, b)	Comprimento da linha poligonal
(1,1)	
(2,2)	
(3,3)	
(4,4)	
(5,5)	
. . .	
n	

Fonte: Autor, 2015

Apresentaremos a seguir algumas equipes realizando a atividade de acordo com as figuras 71, 72, 73 e 74.

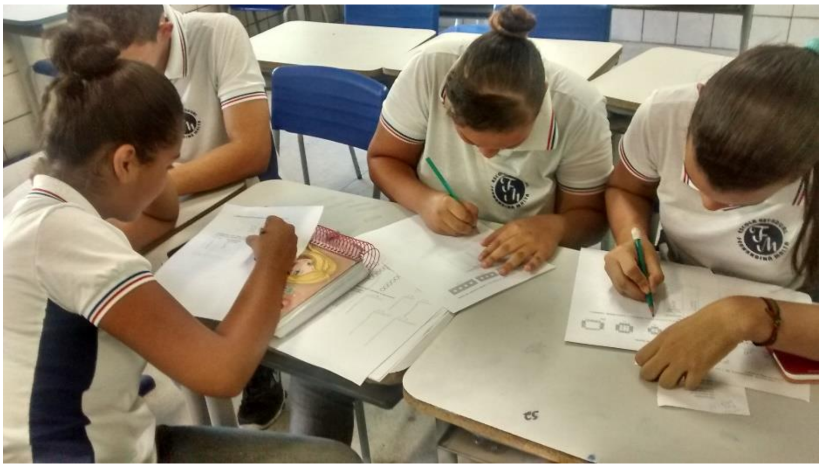
Figura 71 - Equipe EB8 realizando a atividade



Fonte: Autor, 2015

Na equipe *EB8* os alunos tiveram dúvidas no início, necessitando da minha intervenção para continuidade do exercício. Apesar da dificuldade, conseguiram dar andamento as atividades sem maiores problemas.

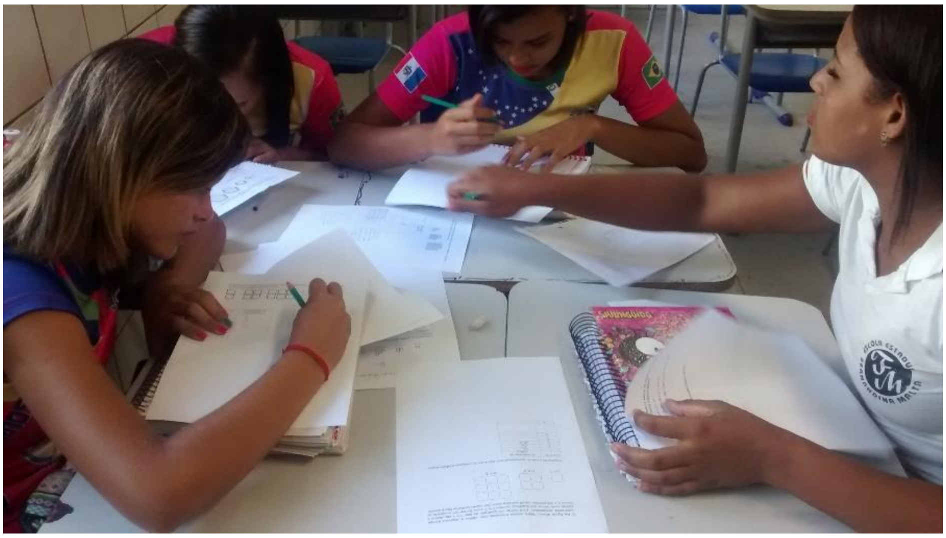
Figura 72 - Equipe EA3 realizando a atividade



Fonte: Autor, 2015

Os alunos da equipe *EA3* estavam muito motivados para realizar a atividade. Como é algo novo para eles, a vontade de superar obstáculos os incentivou a usar a criatividade, sendo estes os que mais se empenharam durante o exercício.

Figura 73 - Equipe EB3 realizando a atividade



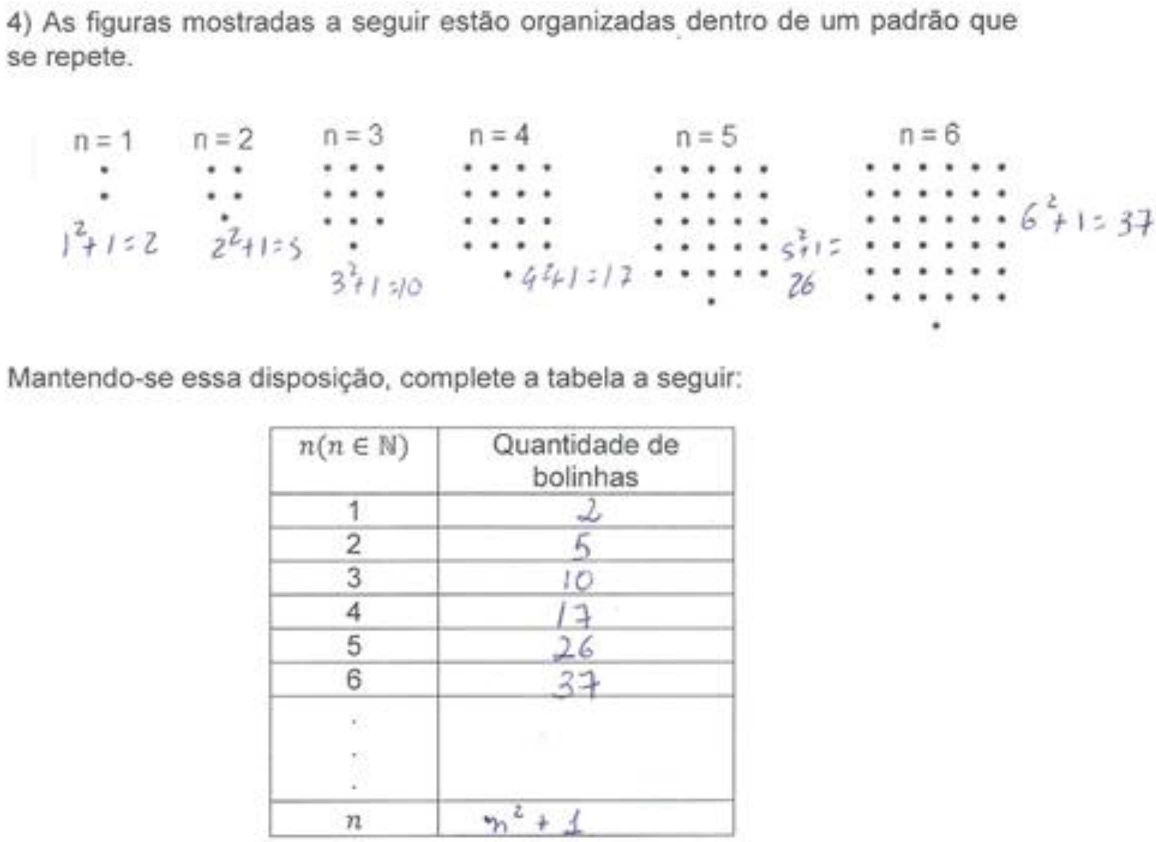
Fonte: Autor, 2015

Figura 74 - Equipe EB6 realizando a atividade

Fonte: Autor, 2015

Apresentaremos na sequência as soluções produzidas pelas equipes, conforme figuras 75, 76, 77, 78, 79, 80 e 81 a seguir.

Figura 75 - Solução apresentada pelo aluno A_{28} da equipe EA6


4) As figuras mostradas a seguir estão organizadas dentro de um padrão que se repete.

Mantendo-se essa disposição, complete a tabela a seguir:

$n(n \in \mathbb{N})$	Quantidade de bolinhas
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
⋮	
n	n^2+1

Fonte: Autor, 2015

Figura 76 - Solução apresentada pelo aluno B_{21} da equipe EB2

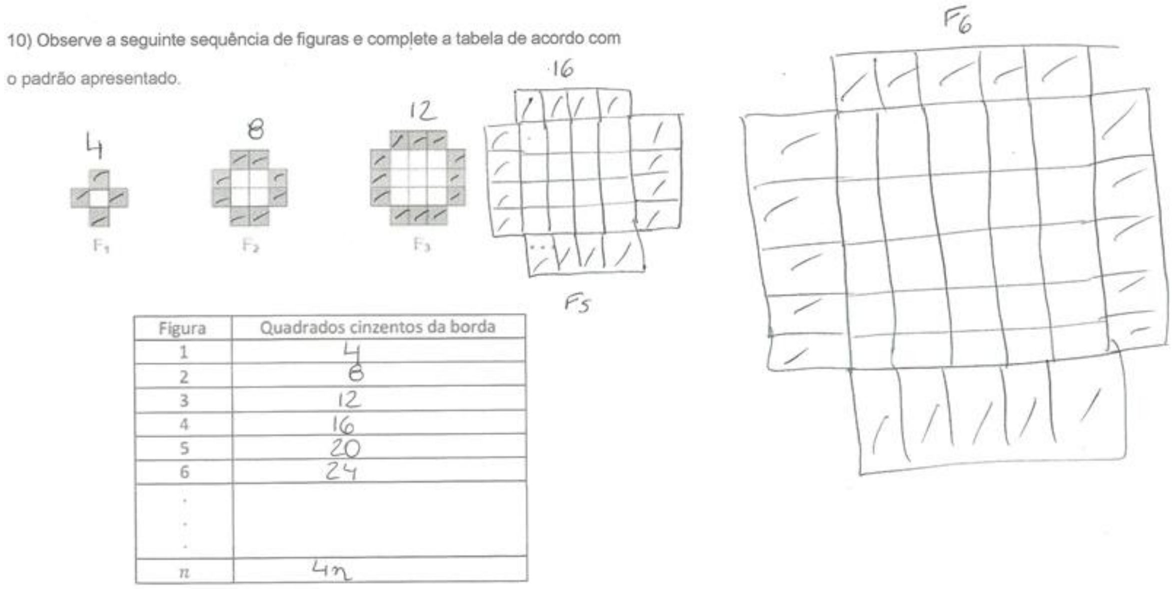
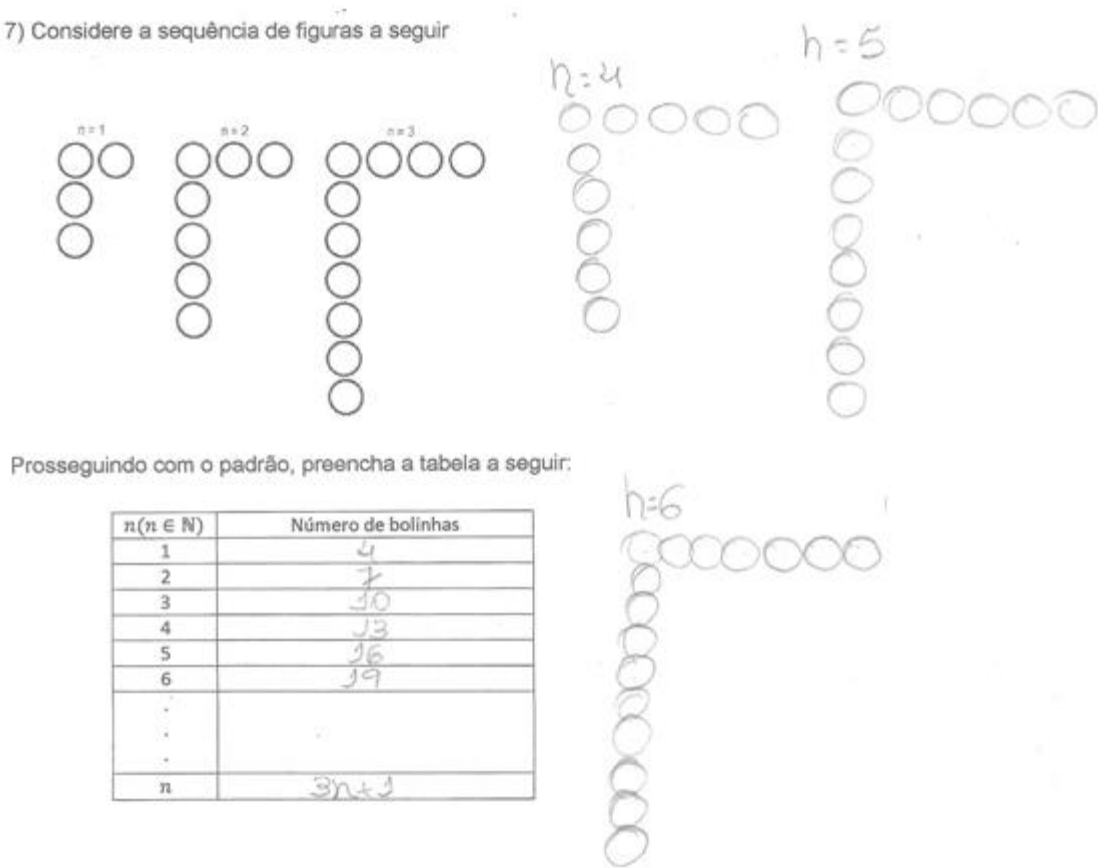

10) Observe a seguinte sequência de figuras e complete a tabela de acordo com o padrão apresentado.

Figura	Quadrados cinzentos da borda
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24
⋮	
n	$4n$

Fonte: Autor, 2015

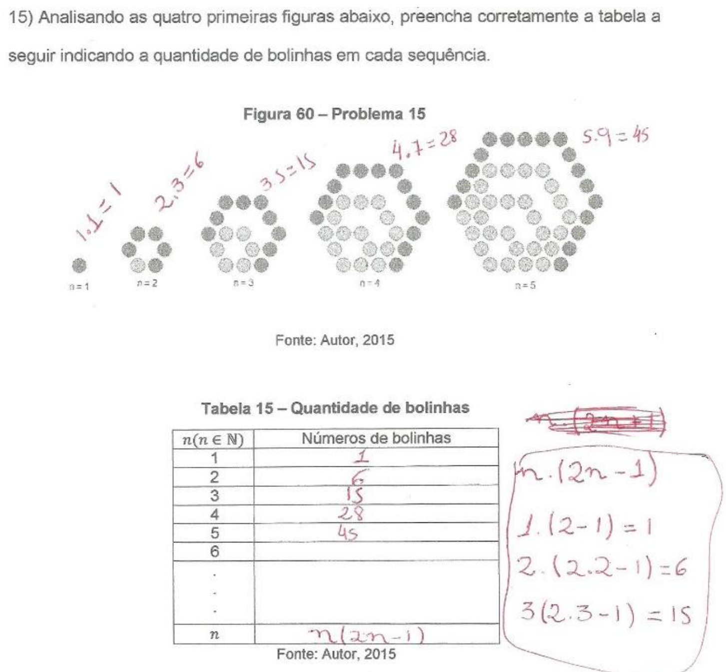
Figura 77 - Solução do aluno B_{05} da equipe EB6



$n(n \in \mathbb{N})$	Número de bolinhas
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19
. . .	
n	3n+1

Fonte: Autor, 2015

Figura 78 - Solução do aluno A_{10} da equipe EA7



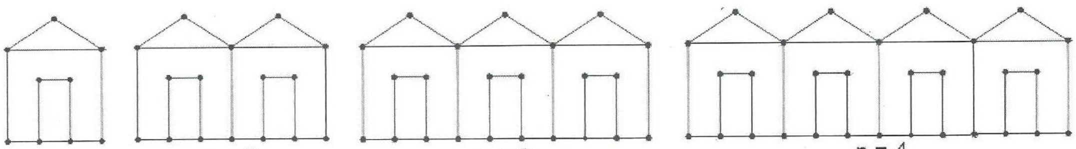
$n(n \in \mathbb{N})$	Números de bolinhas
1	1
2	6
3	15
4	28
5	45
6	
. . .	
n	n(2n-1)

Fonte: Autor, 2015

Fonte: Autor, 2015

Figura 79 - Solução apresentada pelo aluno A_{23} da equipe EA1

8) Considere o número de pontinhos dispostos em cada figura a seguir:



n = 1 n = 2 n = 3 n = 4

9 16 23 30

Continuando com esse padrão complete a tabela a abaixo:

$n(n \in \mathbb{N})$	Quantidade de palitos
1	9
2	16
3	23
4	30
5	37
6	44
. . .	
n	$7n+2$

$\boxed{(n.7)+2}$

Ex1: $(5.7)+2=$ $35+2=37$

Ex2: $(6.7)+2$ $42+2=44$

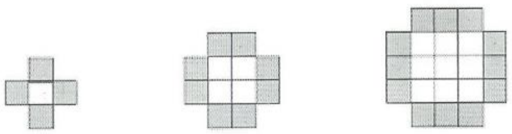
Ex3: $(1.7)+2$ $7+2=9$

Ex4: $(3.7)+2$ $21+2=23$

Fonte: Autor, 2015

Figura 80 - Solução apresentada pelo aluno A_{41} da equipe EA4

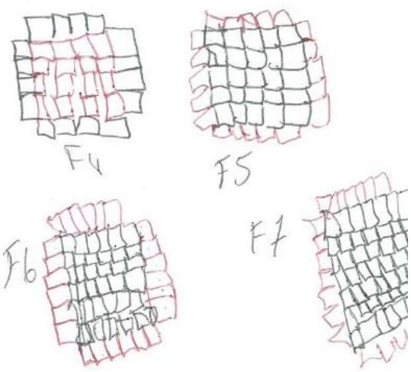
15) Observe a seguinte sequência de figuras.



F_1 F_2 F_3 . . .

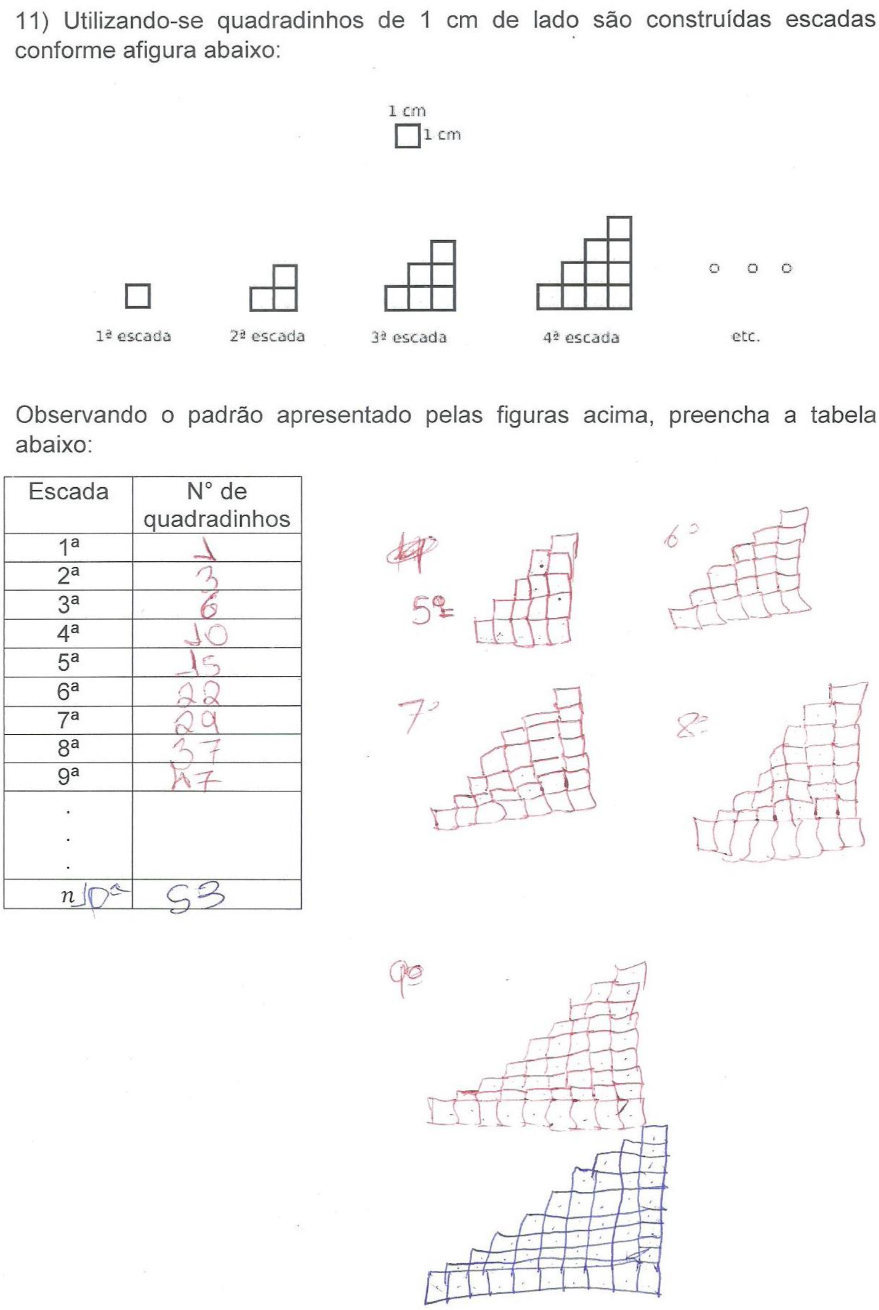
Considerando que as próximas figuras obedecem o mesmo padrão, complete a seguinte tabela:

Figura	Quantidade de quadrados cinzentos
F1	5
F2	12
F3	21
F4	16
F5	20
F6	24
F7	28
F8	32
F9	36
. . .	
n	194



Fonte: Autor, 2015

Figura 81 - Solução apresentada pelo aluno B_{39} da equipe EB6



11) Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas escadas conforme afigura abaixo:

Observando o padrão apresentado pelas figuras acima, preencha a tabela abaixo:

Escada	N° de quadradinhos
1ª	1
2ª	3
3ª	6
4ª	10
5ª	15
6ª	22
7ª	29
8ª	37
9ª	47
. . .	
n 10ª	53

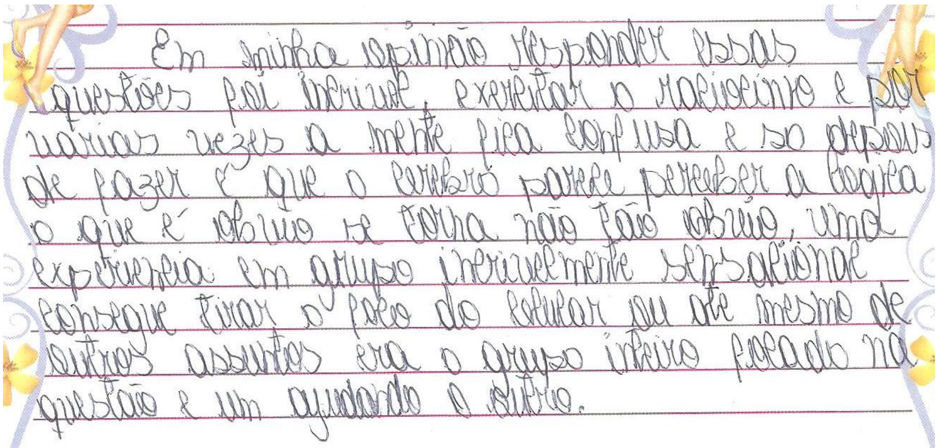
Fonte: Autor, 2015

Mesmo tendo sido passada as instruções necessárias para as equipes desenvolverem a atividade, ainda houve alunos que se confundiram e não obtiveram um desempenho satisfatório no quesito generalizar. Após o final dessa etapa da atividade, criou-se uma discussão de 30 min acerca dos exercícios a fim de socializar as ideias e saber a impressão que a mesma causou nos alunos. Logo em seguida, foi sugerido que os alunos relatassem o que acharam do exercício e o que mais gostaram durante a resolução de cada problema e suas principais dificuldades. Segue abaixo alguns relatos de acordo com as figuras 82, 83, 84 e 85 abaixo.

Aluno B_{12}

“Em minha opinião responder essas questões foi incrível, exercitar o raciocínio e por várias vezes a mente fica confusa e so (*sic*) depois de fazer é que o cérebro parece perceber a logica (*sic*) o que é obvio (*sic*) se torna não tão obvio (*sic*), uma experiência em grupo incrivelmente sensacional consegue tirar o foco do celular ou ate (*sic*) mesmo de outros assuntos era o grupo inteiro focado na questão e um ajudando o outro”.

Figura 82 - Relato do aluno B_{12}

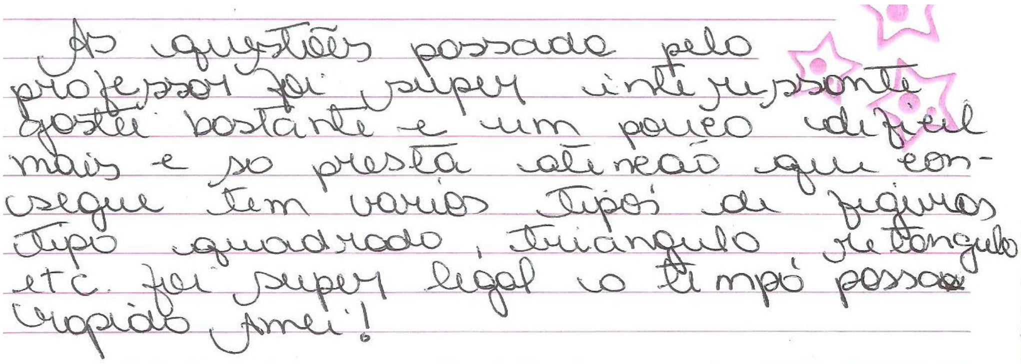

Em minha opinião responder essas
questões foi incrível, exercitar o raciocínio e por
várias vezes a mente fica confusa e so depois
de fazer é que o cérebro parece perceber a logica
o que é obvio se torna não tão obvio, uma
experiencia em grupo incrivelmente sensacional
consegue tirar o foco do celular ou ate mesmo de
outros assuntos era o grupo inteiro focado na
questão e um ajudando o outro.

Fonte: Autor, 2015

Aluno B_{24}

“As questões passada (*sic*) pelo professor foi (*sic*) super interessante gostei bastante e (*sic*) um pouco mais e (*sic*) so (*sic*) presta (sic) atenção que consegue tem vários tipos de figuras tipo quadrado, triângulo, retângulo etc. foi super legal o tempo passou rápido (sic) Amei”.

Figura 83 - Relato do aluno *B₂₄*

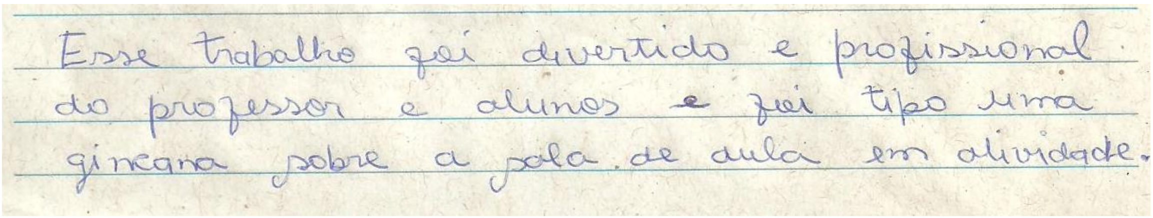

As questões passado pelo
professor foi super interessante
gostei bastante e um pouco dificil
mais e so presta atenção que con-
segue tem varios tipos de figuras
tipo quadrado, triangulo retangulo
etc. foi super legal o tempo passou
rapido Amei!

Fonte: Autor, 2015

Aluno *A_{17}*

“Esse trabalho foi divertido e profissional do professor e alunos e foi tipo uma gincana sobre a sala de aula em atividade”.

Figura 84 - Relato do aluno *A_{17}*

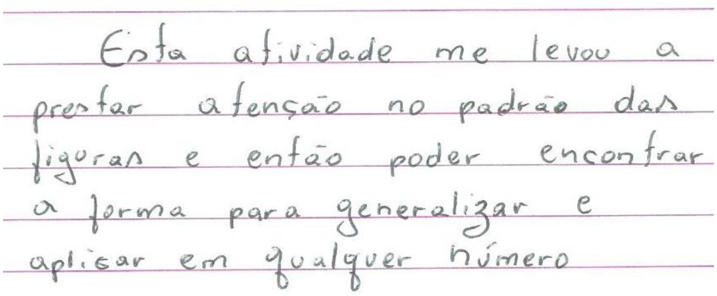

Esse trabalho foi divertido e profissional
do professor e alunos e foi tipo uma
gincana sobre a sala de aula em atividade.

Fonte: Autor, 2015

Aluno *A_{27}*

“Esta atividade me levou a prestar atenção no padrão das figuras e então poder encontrar a forma para generalizar e aplicar em qualquer número”

Figura 85 - Relato do aluno *A_{27}*

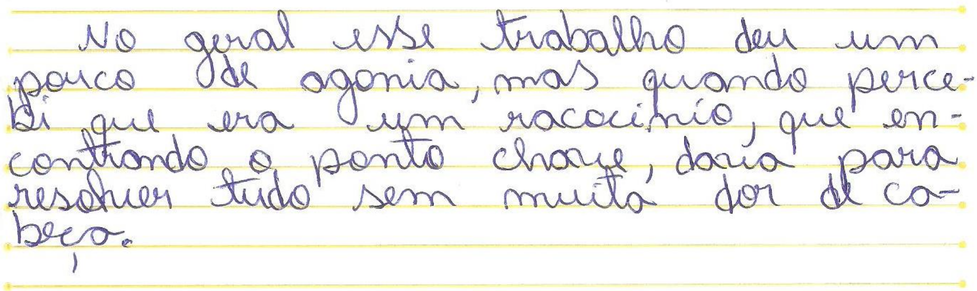

Esta atividade me levou a
prestar atenção no padrão das
figuras e então poder encontrar
a forma para generalizar e
aplicar em qualquer número

Fonte: Autor, 2015

Aluno *B18*

“No geral esse trabalho deu um pouco de agonia, mas quando percebi que um raciocínio, que encontrando o ponto chave, daria para resolver tudo sem muita dor de cabeça”.

Figura 86 - Relato do aluno B18

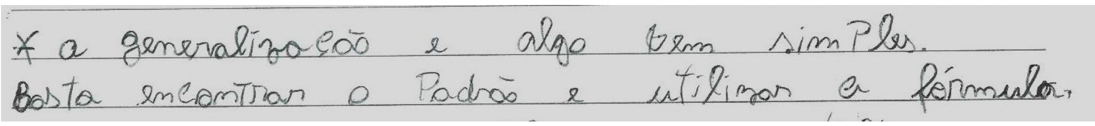

No geral esse trabalho deu um
pouco de agonia, mas quando perce-
bi que era um raciocínio, que en-
contrando o ponto chave, daria para
resolver tudo sem muita dor de ca-
beça.

Fonte: Autor, 2015

Aluno *A23*

“a (*sic*) generalização e (*sic*) algo bem simples. Basta encontrar o Padrão (*sic*) e utilizar a fórmula”.

Figura 87 - Relato do aluno *A23*


* a generalização e algo bem simPles.
Basta encontrar o Padrão e utilizar a fórmula.

Fonte: Autor, 2015

Observa-se nesses comentários, o fascínio dos alunos com a atividade prática, a surpresa em ver que estão conseguindo assimilar o conteúdo, e ainda, a comparação feita com as outras atividades, demonstrando que se pode aprender Matemática, de um modo dinâmico, mas sem perder o rigor e o padrão exigidos por ela. A Álgebra foi trabalhada de um jeito simples e objetivo, entretanto, não se perdeu a formalidade. Nota-se também, o medo de alguns alunos pela Matemática, entretanto quando são envolvidos com o problema prático tomam gosto pela disciplina. Em nossas atividades foram registrados relatos e imagens dos alunos, com faixa etária de idade em torno dos 15 anos, para a utilização desses registros foi pedida autorização aos pais ou responsáveis dos mesmos por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecimento que encontra-se no anexo no final do trabalho. A apreciação das atividades e dos comentários feitos pelos alunos foi realizada durante a aplicação dos mesmos.

4 Considerações Finais

Nos livros didáticos do Ensino Fundamental, a Álgebra é apresentada com pouca funcionalidade para os alunos. Dessa forma o aluno não consegue estabelecer uma relação significativa entre os conceitos matemáticos e as situações cotidianas, provocando um distanciamento entre teoria e prática. Além disso, como foi destacado na introdução, os professores são questionados com certa frequência pelos seus alunos a respeito da importância dos conteúdos matemáticos para as suas vidas e a sua aplicabilidade no seu cotidiano. A Álgebra no Ensino Fundamental como Ferramenta de Generalização constitui-se − pela forma como está apresentada neste trabalho – numa metodologia alternativa no que se refere à apresentação presente nos livros didáticos de Ensino Fundamental. A sequência didática aqui apresentada utiliza a Generalização como um recurso didático que se mostrou como uma metodologia efetiva com o objetivo de minimizar tal distância. Motivados em proporcionar um processo de ensino-aprendizagem da Álgebra, percebemos, no início do nosso trabalho, que seria necessário apresentar uma investigação do desenvolvimento histórico da Álgebra. Partindo desse princípio, no capítulo 1, intitulado "A Álgebra e a Linguagem Matemática relatando um pouco da história da Álgebra", apresentamos uma base histórica de alguns acontecimentos matemáticos que marcaram época, e que contribuíram para formar alicerces importantes que fundamentaram o desenvolvimento da Álgebra. E, além disso, foram citados alguns matemáticos que contribuíram imensamente na evolução no campo da Matemática. Com isso, espera-se estar oferecendo informações de grande valia para professores e estudantes que pretendem debater a Álgebra do ponto de vista da Generalização. No capítulo 2 foram apresentadas informações sobre a inserção da Álgebra no Brasil e também se mostrou através de um levantamento estatístico o desempenho dos estudantes brasileiros em dois exames que visam medir o IDEB das escolas do nosso país, como, Prova Brasil e PISA com o objetivo de identificar o despreparo dos nossos estudantes quando realizam exames desse porte. Por fim, no capitulo 3, apresentou-se a aplicação das atividades práticas, realizadas com os estudantes. Os mesmos assistiram a vídeos sobre formas e padrões de sequências presentes na natureza. Em seguida, eles foram desafiados a encontrar padrões matemáticos em sequências de figuras aprimorando o pensamento algébrico e melhorando a concentração num clima bem descontraído e divertido, promovendo uma aprendizagem bem lúdica. A sequência didática foi construída, tendo como referencial o professor e a sua experiência em sala de aula e nos conhecimentos prévios dos discentes. Vale apena lembrar, que todas as estratégias e metodologias utilizadas na aplicação dessa sequência didática pode ser aplicada em outras séries. Entretanto, dependo do nível de ensino deverá ser feita uma adaptação. Enfim, espera-se que os valores obtidos com os resultados dessa sequência didática levem o aluno a um melhor entendimento da Matemática levando-o a um caminho de progresso no processo ensino-aprendizagem no que se remete à Álgebra; e despertem no professor a prudência de associar teoria e prática, utilizando a Generalização como recurso didático.

REFERÊNCIAS

ALAGOAS, **Secretaria de Estado da Educação e Esporte**.

BAUMGART, Jonh K. **História da Álgebra**; Hygino H. Domigues. São Paulo: Atual, 1992 (Tópicos de História da Álgebra para uso em sala de aula: v. 4)

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 3ª. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacional**: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

EVES, Howard. **Introdução da História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM. **Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?** Vol. 3, Nº 1[7], Pro-Posições, 1992.

GOMES, M. L. M. **História do Ensino de Matemática: uma introdução.** Belo Horizonte, UFMG, 2012.

MATEMÁTICA e a Natureza. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=XjOUoLfoLo8>. Acesso em: 21 de outubro de 2015.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. – Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

OS PADRÕES Existentes na Natureza. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=LKZlaWfXFRI>. Acesso em: 21 de outubro de 2015.

Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos>. Acesso em: 19 de novembro de 2015.

Prova Brasil. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/prova-brasil>. Acesso em: 19 de novembro de 2015.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

SADOVSKY, Patrícia, **O ensino de matemática**: enfoques, sentido e desafios; tradução Antonio de Padua Danesi; apresentação e revisão técnica da tradução Ernesto Rosa Neto. 1 .ed. São Paulo : Ática, 2010.

SESSA, Carmem. **Iniciação ao estudo didático da álgebra**: origens e perspectivas; tradução Damian Kraus. São Paulo: Edições SM, 2009.

ANEXOS

ANEXO - A

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____ pai (mãe) ou responsável legal do(a) estudante(a) ____, autorizo meu filho(a) a participar da pesquisa desenvolvida pelo Profº. André Oliveira dos Santos e orientado pelo Profº. Dr. André Luiz Flores, do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Alagoas.

A pesquisa consistirá na realização de entrevistas, fotografias, intervenção pedagógica junto aos participantes do estudo e posterior análise dos dados.

A qualquer momento da realização desse estudo qualquer participante/pesquisado ou o estabelecimento envolvido poderá receber os esclarecimentos adicionais que julgar necessários. O sigilo das informações será preservado através de adequada codificação dos instrumentos de coleta de dados. Todos os registros efetuados no decorrer desta investigação serão usados para fins unicamente acadêmico-científicos e apresentados na forma de Dissertação, não sendo utilizados para qualquer fim comercial.

Em caso de concordância com as considerações expostas, solicitamos que assine este "Termo de Consentimento Livre e Esclarecido". Desde já agradecemos sua colaboração e nos comprometemos com a disponibilização à instituição dos resultados obtidos nesta pesquisa, tornando-os acessíveis a todos os participantes.

____

Profº. André Oliveira dos Santos
Profº. Pesquisador
PROFMAT/UFAL

____

Profº. Dr. André Luiz Flores
Orientador
PROFMAT/UFAL

Rio Largo, _____/______/2015.

ANEXO – B

GOVERNO DE ALAGOAS
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO E ESPORTE
ESCOLA ESTADUAL FERNANDINA MALTA
AV. ALBERTO SANTOS DUMONT, S/N – CENTRO – RIO LARGO – AL
CNPJ: 00.762.503/0001-02, E-MAIL: EEFMALTA@HOTMAIL.COM

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, Rosangela Ferreira da Silva, Diretora Geral da Escola Estadual Fernandina Malta, autorizo pelo presente termo, a utilização do nome desta unidade de ensino, pelo professor pesquisador **ANDRÉ OLIVEIRA DOS SANTOS**, em sua Dissertação de Mestrado (PROFMAT/UFAL) orientado pelo professor Dr. André Luiz Flores (PROFMAT/UFAL). Pois, tenho ciência de que todos os registros efetuados no decorrer de sua investigação serão usados para fins unicamente acadêmico-científicos não sendo utilizados para qualquer fim comercial.

Rio Largo – Al, 16 de dezembro de 2015.

Rosangela Ferreira da Silva
Diretora Geral
Port. 36.05/2015

Diretora geral