Universidade Federal do Amapá
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS, UMA ABORDAGEM DIDÁTICO METODOLÓGICA

ANDRÉ LUIZ DOS SANTOS FERRERA

MACAPÁ
2016

Universidade Federal do Amapá
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

ANDRÉ LUIZ DOS SANTOS FERRERA

TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS, UMA ABORDAGEM DIDÁTICO METODOLÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a banca examinadora da Universidade Federal do Amapá, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Erasmo Senger.

MACAPÁ
2016

ANDRÉ LUIZ DOS SANTOS FERREIRA

TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS, UMA ABORDAGEM DIDÁTICO METODOLÓGICA

Composição da Banca Examinadora:

____

Orientador / Examinador interno Prof. Dr. Erasmo Senger
Instituição: Universidade Federal do Amapá

____

Examinadora interna Profa. Dra. Simone De Almeida Delphim
Instituição: Universidade Federal do Amapá

____

Examinador externo Prof. Msc. Hilton Bruno Pereira Viana
Instituição: Instituto Federal de ciências e tecnologia do Amapá

DATA___________________

NOTA __________________

DEDICATÓRIA

A minha amada esposa Elenilze, por ser minha companheira de vida e por me incentivar em todos os meus projetos e sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por permitir que eu alcance meus objetivos e por me abençoar com grandes vitórias.

Aos meus pais, Aylson Luiz (em memória) e Maria José por serem minhas referências de perseverança, humildade e honestidade, sem os quais eu não seria o homem que sou hoje.

A minha avó, Oscarina por também estar diretamente envolvida em minha formação e nas decisões acertadas de minha vida.

Aos meus quatro irmãos, Bruno, Aylton , Thiago e Hilton Bruno que sempre vão ser grandes referências em minha vida; assim como aos primos tias e tios que também fazem parte de minha formação.

Aos meus filhos, Natan e Luiza por estarem presentes em minha vida realizando o meu grande sonho de ser pai.

A minha esposa Elenilze que sempre é participante direta de todos os meus projetos e sonhos.

Ao professor Erasmo Senger pela orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta dissertação.

A todos os professores envolvidos no PROFMAT pela UNIFAP em especial a professora Simone Leal que trabalhou atividades em sua disciplina que motivaram a execução deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho mostra o desenvolvimento histórico da trigonometria e mais especificamente das funções trigonométricas; o tratamento dado a este conteúdo frente às novas exigências curriculares, e a didática de aprendizagem necessária ao processo de ensino e aprendizagem pelo qual professores e alunos buscam harmonia. Ao analisarmos estruturas didáticas e curriculares propusemos uma sequencia didática em que a interpretação gráfica das funções trigonométricas esperada pelos professores por parte dos alunos é comentada em cada nível de atividade organizada no programa Geogebra.

Palavras chave: Funções Trigonométricas, Sequencia Didática, Geogebra,

ABSTRACT

This work shows the historical development of trigonometry and more specifically of the trigonometric functions ; the treatment of this forward content to the new curriculum requirements , and the didactic learning necessary for the teaching and learning process by which teachers and students seek harmony. Analyzing educational and curricular structures we proposed a didactic sequence where the graphic interpretation of the trigonometric functions expected from the teachers by the students is commented on every level of organized activity in the program Geogebra.

Keywords: Trigonometric Functions , Didactic Sequence, Geogebra.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A natureza tem sido inspiração do conhecimento matemático há milênios, o tratamento destes fenômenos, cientificamente tem uma importância natural ao processo de ensino e aprendizagem nas escolas e tornam se, referencias de ferramentas pedagógicas motivacionais ao processo de aprendizagem da matemática. Considerando esta ideia tentamos buscar um conteúdo matemático que normalmente tem uma abordagem tradicional, mas está aberto a novas aplicações do dia a dia e a utilização de novas tecnologias.

Com esta motivação, trataremos do estudo das funções trigonométricas, seno e cosseno, fazendo um apanhado histórico, inicial, completamente voltada a alguns estudiosos da trigonometria e suas motivações através do tempo e das civilizações. Trataremos também das estruturas:

- Disciplinar, ao trabalharmos os conteúdos básicos da trigonometria estruturando uma sequencia didática e com um cuidado epistemológico para que não haja transposição.
- Curricular, ao analisarmos conteúdos relacionados às funções trigonométricas de acordo com os parâmetros curriculares nacionais e secretarias estaduais de educação, assim como o tratamento deste conteúdo, na forma que são cobrados em exames como o ENEM.
- Didaticamente, tratando de experiências pessoais de sala de aula e das dificuldades e comportamentos dos alunos quanto ao conteúdo e seus materiais didáticos, alguns destes, analisados no trabalho que desenvolvemos.

Este trabalho vem em forma de proposta de aplicação para colegas professores, em suas turmas de segundos anos, a fim de melhorar o desempenho e entendimento dos alunos quanto ao conteúdo de funções trigonométricas e para tanto, percebemos que além dos materiais didáticos, outros materiais como softwares e materiais concretos podem fazer uma diferença positiva na relação de ensino e aprendizagem.

Pretendemos com este trabalho fortalecer a ideia de se trabalhar as funções trigonométricas de uma maneira mais natural e significativa, podendo o aluno descrever e modelar fenômenos periódicos com mais facilidade e compreensão, para isso o domínio de conhecimento gráfico e as aplicações das funções trigonométricas devem coexistir em harmonia, para que sejam compreendidas as aplicações.

Esta proposta será fundamentada por meio de uma unidade didática em que uma sequencia será proposta e comentada, afim de que professores e alunos que forem utilizá-la possam tirar conclusões e compreender a estrutura gráfica das funções trigonométricas.

2 HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Neste capítulo faremos uma abordagem acerca de acontecimentos históricos em várias épocas e lugares em que a trigonometria foi relevante, mostrando assim a evolução de sua importância perante a matemática, durante as várias fases, contextos históricos, evidenciando assim que a matemática, a partir do pensamento humano, na forma da trigonometria sempre está em transformação e evolução.

2.1 Considerando o Império Egípcio

O envolvimento dos egípcios com a matemática veio a partir de interesses no desenvolvimento do povo no que se refere a problemas práticos que viessem beneficiar o crescimento das cidades e a autossuficiência do povo em relação à agricultura. "Muito do que fizeram os egípcios em matemática está diretamente ligado a transações comerciais, grandes construções, cálculos de áreas e outros assuntos ligados a agricultura que era a base do interesse do império para a sustentação do povo".(Ruiz, A1990:220)

Grande parte das informações que temos hoje sobre o trabalho dos egípcios em relação a matemática é graças ao que foi encontrado por egiptólogos em papiros como o de Moscou que esta no museu de belas artes de Moscou datado de (1850 aC); e o papiro de Rhind datado de (1650 Ac) que está no museu Britânico;"Chamado papiro deAhmes nome do escriba que o transcreveu, onde estão contidas soluções de 85 problemas de aritmética e geometria. Este papiro foi encontrado pelo egiptólogo inglês Rhind no final do século 19 e hoje está exposto no Museu Britânico, em Londres."(Eves , H 2008:57)

Figura 1.1 Papiro de Rhind – Museu Britânico

Os egípcios não diferenciaram a aritmética da geometria e sabe-se que conheciam as áreas do triangulo retângulo trapézios além de uma forma de aproximação para a área do circulo, como também calculavam volumes de pirâmides e prismas de base quadrangular; e utilizavam o triangulo retângulo de lados 3, 4 e 5 na delimitação de superfícies de ângulos retos tendo uma corda com 13 nós equidistantes, sendo a ferramenta. Tinham um domínio básico de astronomia e a utilizavam com a geometria para realizar algumas construções.

Para termos uma amostra da manipulação de trigonometria básica dos egípcios, podemos encontrar no problema 56 do papiro de Rhind. Problema este que remonta da construção das pirâmides onde se deve calcular o “seqt” de uma pirâmide a partir de rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes, cujo o objetivo era manter uma inclinação constante das faces da pirâmide. No problema é pedido o “seqt”, da pirâmide de 250 cúbitos de altura cujos lados de uma base medem 360 cúbitos.

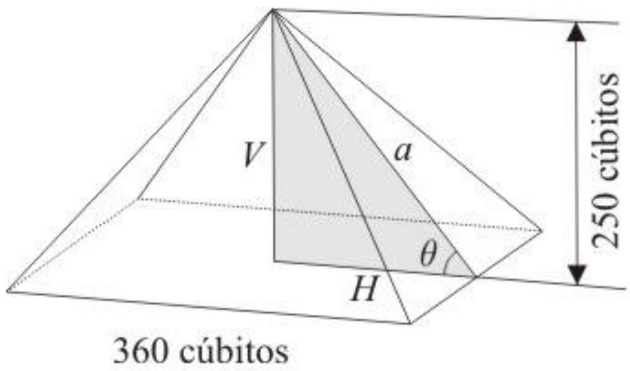


Figura 1.2 seqt de uma pirâmide problema 56, Rhind.

O seqt é dado pela razão entre o afastamento horizontal (H) pela altura (V); outra consideração a se fazer é que a medida horizontal seria contada em mãos, enquanto que a vertical em cúbitos, sabe-se que cada cúbito equivale a sete mãos, desta forma:

$$\begin{array}{l} \textit{note que}: \\ s = \dfrac{H}{V} = \dfrac{180}{250} = \dfrac{18}{25} \\ \textit{considerando que } 1 \textit{ cúbito} = 7 \textit{ mãos} \\ \textit{então, para o calculo do seqt, temos}: \\ s = \dfrac{126}{25} \quad \textit{mãos/cúbitos} \end{array}$$

Notemos que para o calculo do seqt, a razão da medida horizontal pela altura nos dá uma razão que na trigonometria usual é conhecida como cotangente, neste caso ao falarmos da cotangente do ângulo diédrico (figura 1.1), que é representado pela inclinação da face lateral com a superfície horizontal, para cada valor de altura teríamos um comprimento horizontal para que a inclinação fosse a mesma, construindo assim uma espécie de função a partir de um ângulo agudo.

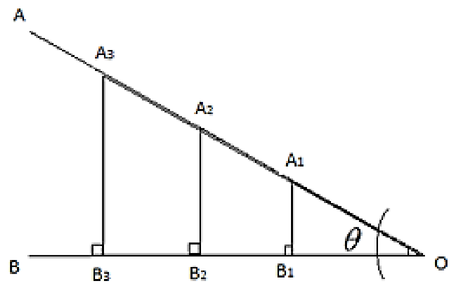


Figura 1.3 Autor

Consideremos agora o ângulo agudo AÔB = θ, 0 < θ < 90º, e tracemos a partir dos pontos A_1, A_2, A_3 etc. da semi-reta OA, perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 etc. à semi-reta OB. Os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3 etc. são semelhantes por terem os mesmos ângulos (figura 1.3). Podemos, portanto escrever:

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{B_1A_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{B_2A_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{B_3A_3}} = ...$$

Esta relação depende apenas do ângulo θ e neste caso se OB_1, OB_2, OB_3 etc. representassem os afastamentos horizontais da pirâmide (figura 1.2) e A_1B_1,A_2B_2, A_3B_3 etc. representassem as variações das alturas, seria conveniente dar um nome para esta função que proporciona a regularidade da inclinação da face de uma pirâmide que neste caso seria o seqtθ e convencionalmente considerando a trigonometria atual teríamos a cotangente de θ.

$$seqt\theta = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{B_1A_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{B_2A_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{B_3A_3}} = \cot g\theta$$

Dadas as variações encontradas a partir do cálculo de seqt de uma pirâmide podemos ter o entendimento que os egípcios já traçavam um caminho de parametrização de dados em um triângulos retângulo no qual se verifica uma variação em forma de uma função(cotangente θ), mantendo-se um ângulo correspondente.

2.2 Babilônios

Os arqueólogos vêm trabalhando na mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de meio milhão de tabuas de argila. Somente no sítio da antiga Nipur foram escavadas 50 000 tabuas. Do total de cerca de meio milhão de tabuas quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, constituídas listas de problemas matemáticos.

Devemos nosso conhecimento da matemática babilônica antiga[1] ao sábio trabalho de decifrar e interpretar muitas dessas tabuas.(Eves, Howard 2004:59)

Assim como os egípcios os babilônios trabalharam algumas áreas de figuras planas regulares e dominavam as propriedades de semelhança de triângulos para uma dimensão. No entanto o conhecimento algébrico foi bem desenvolvido possibilitando que resolvessem até equações quadráticas e cubicas de forma completa. O conhecimento acerca da semelhança de triângulos permitiu que eles conhecessem o teorema:

"*Seja um triangulo retângulo ao traçar uma perpendicular baixada do ângulo reto à hipotenusa, os triângulos que se formam a cada lado desta perpendicular são semelhantes entre si e ao triangulo inicial"* .(Eves, Howard 2004:61)

Em alguns documentos sobre a história da matemática é dito que a matemática babilônica é essencialmente utilitária, mas uma das tábuas encontradas que data de entre os anos de 1900 a.Ce 1600 a.C, pode se ver a matemática pela matemática; trata-se da tábua Plimpiton 322 que faz parte da coleção da Universidade de Columbia, catalogada sob o numero 322.(Boyer C.)

Figura 1.4 tábua Plimpiton 322, Universidade de Columbia EUA

[1] Usa-se o termo babilônico meramente por conveniências pois na Mesopotâmia viviam muitos povos além dos babilônicos, como os sumérios, os acadianos, caldeus, assírios e outros povos que habitaram a região em uma época ou outra.

Esta tabua é um pedaço de uma tábua maior em que se encontram quatro colunas e números distribuídos em quinze linhas horizontais, a coluna da extrema direita serve para enumerar as linhas apenas em que se encontram os números das outras três colunas que podemos visualizar suas cinco linhas iniciais na tabela 1.

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,48,54,1,40	3,31,49	5,9,1	4
1,47,6,41,40	1,5	1,37	5
Tabela 1 lista de números da tábua Plimpiton 322			

Os dados da Tabela 1 estão escritos em numeração sexagesimal[2],considerando a transformação para o sistema decimal, teremos os valores na tabela 2 apresentada abaixo:

a^2/c^2	B	a	n
1,9834	119	169	1
1,9491	3367	4825	2
1,9188	4601	6649	3
1,8862	12709	18514	4
1,8150	65	97	5
Tabela 2, números em base 10 da tábua de Plimpiton 322			

Considerando as 5 linhas iniciais da tábua de Pliumpiton; (tabela 2), devemos considerar um triangulo retângulo para a representação dos valores da tabela.

[2]É um sistema de numeração de base 60, criado pela antiga civilização Suméria. Uma hipótese poderá vir de uma união de um sistema de contagem de base 5 que se baseava em contar com os dedos da mão e o sistema de contagem de base 12 que usava o método das três falanges. O sistema consistia em contar as falanges dos dedos da mão direita, utilizando o polegar, totalizando doze falanges (três falanges em quatro dedos),com os cinco dedos da mão esquerda, contam-se as dúzias, totalizando cinco dúzias ou seja 60.Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/plimpiton322

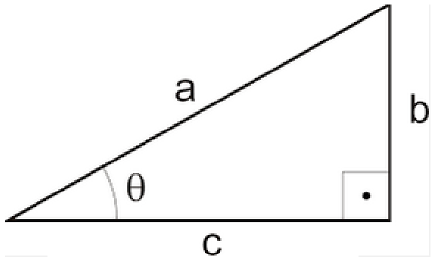


Figura 1.5 Triângulo Retângulo

A segunda coluna são valores diferentes para o cateto "b" já a terceira coluna representam dados da hipotenusa "a" com estes dados temos que a primeira coluna seria a razão entre o quadrado de "a" pelo quadrado da hipotenusa "c" gerando então a função secante ao quadrado de θ. " Nem os egípcios ou babilônios tinham o entendimento real dos ângulos considerando uma visão moderna do termo ângulo.

Podemos observar que os números não estão dispostos aleatoriamente, visto que os números da primeira coluna estão ordenados de maneira descendente, sendo o primeiro número correspondente a aproximadamente $\sec^2 45^o$ e o seguinte a $\sec^2 44^o$ de forma sucessiva até $\sec^2 31^o$.

2.3 Gregos

O primeiro grego a ser mencionado deve ser Tales da cidade de Mileto, 645 a. C, pois seus trabalhos em geometria logo viriam beneficiar a trigonometria, como comerciante Tales pode viajar ao Egito e a Babilônia, conhecendo assim os avanços da matemática. Muitos duvidam da existência de Tales, visto que sus escritos não sobreviveram. "se sabe que Proclos um escriba, egípcio, que tales introduziu na geometria, grega deixou muitos escritos e atribuiu a tales" (Boyer C.)

Considerado o primeiro matemático autentico devido à organização dedutiva que utilizou em seu trabalho com geometria,a ele foram atribuídos cinco teoremas estes que supostamente foram demonstrados por ele:

- Um ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.
- Todo circulo está dividido em duas partes iguais por uma triangulo.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

- Os ângulos opostos pelo vértice que se formam ao cortarmos duas paralelas são iguais.
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos do primeiro são correspondentes a dois ângulos de outro qualquer então eles são semelhantes.

O fato de se calcular a distância em que um barco se encontra em um rio até a margem também é atribuído a tales assim como a medição da altura de pirâmides fazendo comparações com as suas sombras projetadas no chão. E sempre utilizando as mesmas propriedades.

Podemos reconhecer Pitágoras como um matemático que deu um novo entendimento à matemática considerando todos os feitos dele e de seus discípulos pitagóricos, que ao tomarem a matemática como uma ciência que aproxima o homem da sabedoria e não só como uma simples ferramenta, conseguiram elevar a matemática a um novo patamar. "Diz-se de Pitágoras que assim como tales ele fez viagens como Tales pelo Egito, Mesopotâmia, chegando até a Índia; conhecendo assim a aritmética os números racionais e o próprio teorema conhecido como de Pitágoras que é demostrado no livro elementos de Euclides"(ET AL).

No século III a. C. Aristarco de Samos realizou um calculo relacionado à distância entre sol, lua e terra. Antes da teoria heliocêntrica. Aristarco em seu trabalho intitulado "Sobre os tamanhos e as distâncias do sol e da lua" no que supõe que a terra é o centro do universo, ele sugeria que quando a lua estava em uma posição em que o centro da lua ficasse ligado à terra e ao sol sob um ângulo de 90º, então o ângulo lua terra sol seria de aproximadamente 87º(figura 1.6).

A conclusão tomada por Aristarco depois de aplicar um teorema de desigualdades conhecido da época é que a distância entre a terra e o sol deveria ser maior que dezoito vezes a distância da lua a terra, mas considerando um método correto deste cálculo verificou-se que o ângulo lua terra sol era de 89,86º e não 87º como sugeriu Aristarco.

Para compreendermos o pensamento de Aristarco a respeito dessas distâncias,voltemos a considerar o problema de medir o ângulo α por Aristarco (Figura 1.6). Seria mais fácil calcular o ângulo do que medi-lo fisicamente. Neste caso é preciso observar o tempo gasto pela lua para dar uma volta em torno da Terra e o tempo de passagem de

minguante a crescente; desta forma aplicando proporcionalidade temos a solução do problema. Ao que tudo indica a translação da lua dura cerca de 29,5 dias, Aristarco teria observado 14,25 dias, um dia a menos que a passagem de crescente para
minguante. Considerando uma velocidade uniforme da lua em seu ciclo, os ângulos descritos são proporcionais aos tempos gastos nos mesmos deslocamentos desta forma podemos observar com referencia a (figura 1.6)

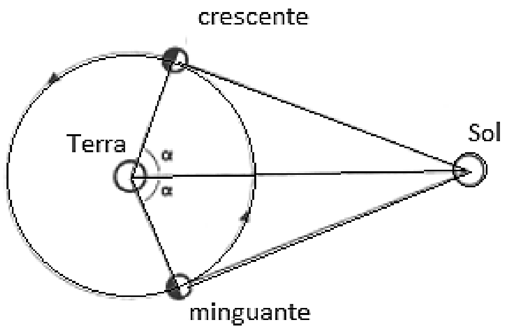


Figura 1.6 ângulo Lua,Terra,Sol

$$\frac{360^o}{29,5^o} = \frac{2\alpha}{14,25^o}$$
$$vem\, que\ \alpha = 86,95^o$$
$$\frac{TS}{TL} = \sec\alpha = \sec 86,95^o \cong 18,8$$
$$desta\ \ forma\ a\ distância\ TS = 18,8.TL$$

“O resultado de Aristarco está bem longe do valor correto, pois hoje sabemos que a distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes a da Terra a Lua. E de fato o ângulo α é aproximadamente 89,96º, logo muito perto de 90º! Logo os raios solares que se dirigem a terra e a lua são praticamente paralelos.Isto põe o problema de explicar como Aristarco teria chegado ao calculo de α . Ao que parece, a diferença que ele teria notado entre o tempo gasto pela Lua numa volta completa em torno da Terra e o tempo para ir de minguante a crescente se deve à peculiaridade do movimento da Lua naquela época. ”.(Àvila G[3].)

Na antiguidade, vários tentaram medir o perímetro da terra, porém Eratóstenes de Cirene foi o grego que o mediu com maior precisão por volta de 250 a. C Eratóstenes observou que no dia de solstício de verão ao meio dia e a sombra gerada pelo sol é exatamente vertical no fundo de um poço bem profundo na localidade de Siena. Ao mesmo tempo em Alexandria situada a 5000 estádios de Sienesobre o mesmo meridiano projetava uma sombra que indicava a distância angular do sol por volta de 7,2º; uma simples proporção deu-lhe um comprimento do meridiano da Terra de 40000 km, valor muito próximo do atualmente estabelecido (40 075 é o comprimento do equador).

.

[3]http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm55.pdf

$$7,2^{\circ} \longrightarrow 787Km$$
$$360^{\circ} \longrightarrow (comprimento\ do\ meridiano)$$
$$\log o : 39350Km$$

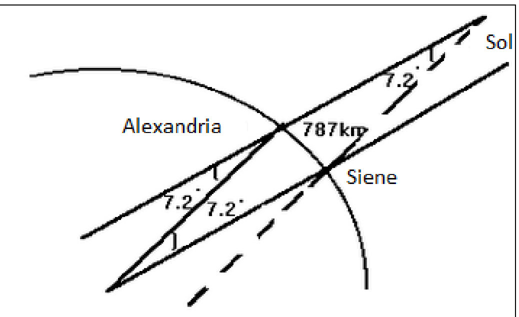


Figura 1.7 Experimento de Erátostenes

"O perímetro da terra foi dado como 50 vezes a distância de Siene a Alexandria o que nos dá um perímetro da terra igual a 250 000 estádios cada um de comprimento estimado em 157m o que leva a uma medida de 39 250 km. Hoje sabemos que o perímetro é de 40 075 km". (Stewart, I)

Mesmo considerando os feitos de Aristarco e Erátostenes, a pessoa que foi considerada o pai da trigonometria foi Hiparco cuja morte se deu por volta do ano de 125 a. C; seus trabalhos são conhecidos graças à obra de Ptolomeu, visto que não existe um registro escrito de seu trabalho em trigonometria. O grande trabalho de Hiparco foi a construção de uma tabela com cordas de onde se obtinha valores correspondentes de arcos e tudo para uma série completa de ângulos o que se poderia comparar a uma tabela de senos. A fim de melhorar os cálculos na astronomia, foi feito esse trabalho. Hoje mesmo não conhecemos quem primeiro utilizou a divisão da circunferência em 360º, mas em seu trabalho foi utilizada por Hiparco na sua tabela de cordas, o que sugere que ele tenha se baseado na base hexadecimal utilizada para cálculos de astronomia babilônica.

Quem completou este trabalho foi Ptolomeu, melhorando as descrições matemáticas e dos astros.Ptolomeu é o autor de *Almagesto* que para os árabes que tem como nome *SintaxisMatemática,*este trabalho era uma referencia para todos os estudiosos da Astronomia por muitos séculos. "O Almagesto resistiu à ação do tempo e hoje se tem acesso não só as tabuas trigonométricas, como também uma explicação sobre os métodos utilizados em sua construção" (Boyer, C.)

2.4 Índia

Por volta do século VI, a Europa ocidental sofria com as invasões bárbaras, que gerou uma crise e, por conseguinte a queda do império romano; com isso o centro de cultura começou a se deslocar para a Índia onde houve uma verdadeira revolução na trigonometria, proveniente de um conjunto de textos denominados *Siddhanta*, que significa sistema de astronomia. O que chegou em nossa época foi o *SuryaSiddhanta*, conhecido como sistemas do sol, de aproximadamente 400 d. C, escrito em sânscrito. Os Indus diziam que o autor do texto, foi *Surya*, o deus do sol. Esta obra tem poucas explicações e nenhuma prova visto que tendo sido escrita por um deus seria muita pretensão exigir provas.(Boyer C, 1974)

O Surya abriu novas perspectivas para a trigonometria, por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um circulo com os ângulos centrais correspondentes considerando as aplicações da função corda na astronomia; na Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente.

No saurya, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente à corda, chamada de jiva. Assim temos uma nova visão de um triangulo na circunferência.

Por volta do ano 500 d C. , o matemático hindu Aryabhata, calculava semi cordas e usava também o sistema decimal que foi desenvolvido completamente EM 600 d C. Quando os Indus começaram a trabalhar com o conceito de seno, demostraram identidades como: $sen^2 x + cos^2 x = 1$

O seno apareceu pela primeira vez de fato no trabalho de Aryabhata por volta de 500 d C. elaborou tabelas de senos usando Jiva no lugar de seno. A mesma tabela pode ser observada no trabalho de Brahmagupta(628) após esse tempo, já em 1150 o matemático Bhaskara construiu uma tabela de senos para qualquer ângulo.

2.5 Arábia

No século IX na Arábia já se manipulava tabelas para cálculos astronômicos, de cordas como aparece em Almagesto e de senos trabalhados pelos Indus conhecidos é claro através dos Árabes e não dos Indus então a trigonometria chegou à Europa.

No fim do século X, já teriam completado as seis funções trigonométricas e também as trabalharam como hoje em que adotamos o valor do raio da circunferência trigonométrica igual a um. Estruturaram tabelas de seno e tangentes com intervalos de um minuto mostrando assim uma ótima precisão.

“Atrigonometria dos árabes adaptou uma forma mais sistemática, ao demonstrar teoremas como as fórmulas do arco metade e do arco duplo”. (Boyer, C)

2.6 Europa

No século 15 George Peurbach trabalhou com tabelas trigonométricas fazendo com que ficassem mais precisas e corrigiu outras que foram traduzidas para o latim do livro de Ptolomeu (Almagesto). Johannes Muller(1436-1476) conhecido como Regiomontano, fez várias traduções de obras gregas, árabes desejando expressar da melhor forma os conhecimentos acerca da trigonometria; tratando a até mesmo como se ela fosse um ramo diferente da matemática.

Durante os séculos XVI e XVII várias pessoas trabalharam as tabelas trigonométricas utilizando círculos com unidades cada vez maiores para seus raios, com um objetivo de alcançar maior precisão em seus cálculos sem a necessidade de utilizar decimais ou fracionários.” Algumas pessoas chegaram o obter a tabela dos senos baseados a circunferências de raio igual a 10^{10} unidades e outro baseado em 10^{15}. BarthdolomaeusPitiscus (1561-1613) corrigiu muitos destes trabalhos e se supõe que o termo trigonometria foi dado por ele.(Stewart, I.)

Em 1579 François Viete publicou umas tabelas com as seis funções trigonométricas, para ângulos de minuto em minuto no livro Canon Matematicus, Viete resolve triângulos obtusângulos os dividindo em retângulos e aplicando a lei das tangentes. Também trabalhou as identidades trigonométricas que provém de multiplicações de funções para que sejam convertidas em soma de funções que se assemelham a:

$$senx + seny = 2\, sen\frac{x+y}{2} cos\frac{x-y}{2}$$

Considerando estas novas aplicações, podemos constatar que a trigonometria deixou de ter aplicações exclusivas na astronomia e mostrou suas utilidades como uma nova ferramenta a ser explorada de forma incessante, em problemas de álgebra e aritmética. Além disso as identidades trabalhadas por Viete foram a base para o estudo dos logaritmos do escocês Napier, principalmente no que tange a redução da multiplicação em somas reduzindo muito alguns cálculos.

No século XVII com os avanços obtidos por Leibniz e Newton no calculo diferencial e integral, especificamente sobre representações de funções matemáticas em séries infinitas, de potencias de uma variável. Newton chegou a obter as séries do seno, cosseno e da tangente; as três séries foram encontradas partindo de um circulo de raio 1, e com o calculo de áreas de setores circulares, sendo utilizados também o binômio de Newton e o cálculo integral. O suíço Leonhard Euler é considerado como o fundador da trigonometria moderna; Euler no século XVIII encontrou as séries infinitas para as funções trigonométricas com exponenciais que possuem expoentes formados com números complexos.

Em 21 de dezembro de 1807 o matemático e engenheiro francês Jean Baptiste Joseph Fourrier (1768-1830) apresentou a academia de ciências de Paris, a sua “Teoria da propagação de calor nos sólidos” Boa parte de seu tempo foi dedicadoa ser prefeito do departamento de Isère, cargo designado por Napoleão, dedicou parte de seu tempo livre à física e a matemática, mais especificamente ao estudo da transferência de calor a partir de um sólido. Estabeleceu a equação diferencial parcial que rege a difusão do calor e é resolvidapor séries infinitas e funções trigonométricas, é conhecida como equação do calor.

O grande feito de Fourier não está associado simplesmente a seu trabalho com o calor, e sim por ele descobrir um recurso matemático que é utilizado em diferentes campos, da ciência moderna. No momento em que o trabalho de Fourier foi publicado, foi tratado por grandes matemáticos como algo repetido sem qualquer credibilidade; entre os matemáticos estavam Laplace eLagrange, que afirmavam que o trabalho de Fourier não trazia nada de novo ou interessante. Nesta época era difícil aceitar que uma função poderia utilizar termos trigonométricos, estes que se pensava à época divergente e que se utilizavam para representar funções convergentes. O emprego do método de Fourier, atualmente conhecido como “método de separação de variáveis” transformava qualquer função de período T em uma soma infinita do tipo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos\left(\frac{2\pi}{T} x\right) + b_n sen\left(\frac{2\pi}{T} x\right)\right)$$

Donde $a_n \ e \ b_n$ são ditos coeficientes de Fourier.

Se a estrutura gráfica de uma função *f(*x)era arbitrária cheia de picos e pontos de descontinuidade, então não teríamos uma função continua. Fourier declarou que os gráficos (arbitrários descontínuos)Podem ser representados por séries trigonométricas.

3. ESTRUTURA DISCIPLINAR

Neste capítulo trataremos os conceitos básicos em trigonometria de forma a encaminhar o entendimento das funções trigonométricas e de suas representações gráficas dando base às considerações que faremos em capítulos subsequentes sobre o entendimento da representação gráfica das funções trigonométricas

3.1 Triângulo Retângulo (Ângulo)

O ângulo é uma região formada por duas semirretas de mesma origem ou vértice. Podemos representar um ângulo de muitas maneiras. Se O é o vértice e temos A e B pontos quaisquer em cada uma das semirretas, teremos a representação do ângulo por AÔB ou BÔA (figura 2.1). Se utilizarmos tal notação o vértice será designado pela letra que ficar entre as outras duas. Se nenhum outro ângulo possuir o mesmo vértice, podemos representar apenas a letra da forma Ô. Para a medição de ângulos cabe a utilização de um transferidor

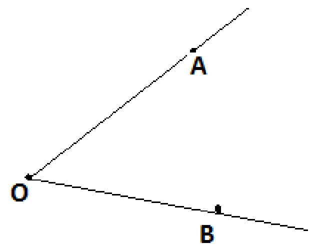


Figura 2.1

Para a medição de ângulos normalmente é utilizada uma régua conhecida como transferidor que mede para cada grau uma parte de 360, que estariam representados na circunferência. A estrutura do transferidor na maioria das versões vem graduada em uma dupla escala considerando o sentido da medição dos ângulos o que na preferencia dos matemáticos é vista em sentido anti-horário.

3.2 Semelhança

Considerando que as razoes trigonométricas são tratadas inicialmente a partir de triângulos retângulos tomando como base a semelhança de triângulos, então vamos partir dos conceitos iniciais para chegarmos a nosso objetivo que será o estudo das funções trigonométricas.

Diz-se que duas figuras são semelhantes, se possuem a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Um exemplo comum de semelhança consiste em ampliar ou diminuir uma figura qualquer.

A semelhança pode ser verificada em triângulos quando os ângulos são congruentes e os lados homólogos são proporcionais. Desta forma dois triângulos ΔABC~ΔDEF Se, e se, somente se for verificada a validade das proposições:

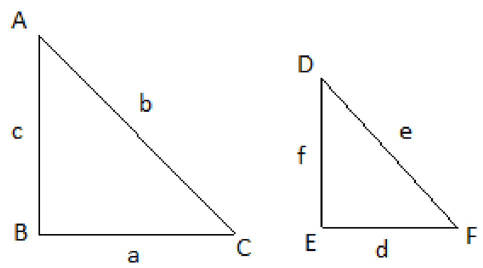


Figura 2.3

Não precisamos verificar cada uma das condições supracitadas para que exista semelhança, basta que verifiquemos os chamados critérios de semelhança.

- Dois triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes se possuem os três lados homólogos proporcionais:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

- Dois triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes se possuem dois lados proporcionais e o ângulo compreendido entre eles congruente:

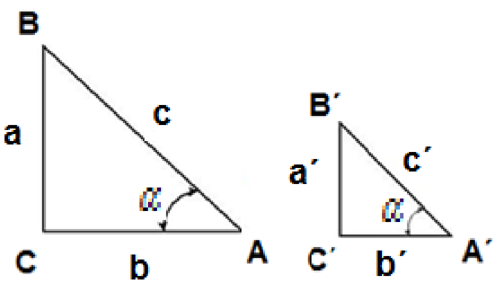
$$\frac{b}{e} = \frac{c}{f} \qquad \sphericalangle A = \sphericalangle D$$

• Dois triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes se possuem dois ângulos congruentes o que já indica que o terceiro também o é :

$$\measuredangle A = \measuredangle D \qquad \measuredangle B = \measuredangle E$$

3.3 Razões e Funções Trigonométricas.

Considere o triangulo ΔABC, com ângulo reto em C. se ΔA’B’C’ é semelhante ao primeiro, logo teremos as seguintes proporções:



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Figura 2.3 Razoes trigonométricas

De onde vem que:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \;\; ; \;\; \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \;\; ; \;\; \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad e \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \;\; ; \;\; \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \;\; ; \;\; \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

Considerando também suas respectivas reciprocas. Temos então que razões para um dado triangulo ΔABC devem ser equivalentes às razões em qualquer triangulo semelhante a ΔABC.

Dois triângulos semelhantes devem ter os três ângulos congruentes. As três razões e suas inversas estão ligadas diretamente ao ângulo α, e tais razões são conhecidas como razões trigonométricas e recebem os nomes de: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente.

Seja α um ângulo agudo, com $0 < \alpha < 90º$, se chamam cosseno de α e secante de α, respectivamente.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad ; \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b}$$

Estas funções são chamadas de funções trigonométricas e não são independentes. Duas relações aparecem naturalmente:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad ; \quad tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

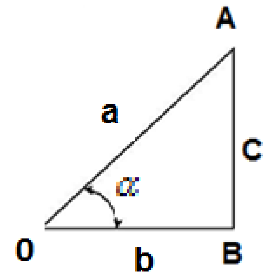


Figura 2.4

Para demonstrá-las vamos considerar um triangulo ΔAOB, retângulo em B, como mostra a figura 2.4. Fazendo uma aplicação do teorema de Pitágoras , $a^2 = b^2 + c^2$, teremos:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \quad e \quad \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b/a}{c/a} = b/c = tg\alpha.$$

Como $\cos\alpha$, sen α e tag α , são números positivos então temos como calcular as outras duas funções sendo suficiente só uma das funções. Tendo um triangulo retângulo em que um de seus ângulos agudos seja α e hipotenusa a, então os catetos deste triangulo retângulo mediriam a.sen α (cateto oposto a α) e a.cos α (cateto adjacente a α) como na figura 2.5

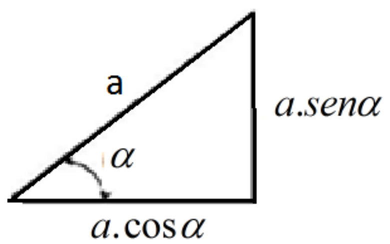


Figura 2.5

Note que não temos ainda uma forma para calcularmos sen α , para um dado ângulo agudo α . No entanto as próximas proposições nos farão dar início a uma primeira organização tabular dos senos.

Se dois ângulos α e β são complementares ($\alpha+\beta$ = 90º), então: senα =cosβ (o cosseno de um ângulo é o seno de um ângulo complementar) e como consequência; tgα =1/tg β.

Aplicando as definições no triangulo da figura 2.6, temos

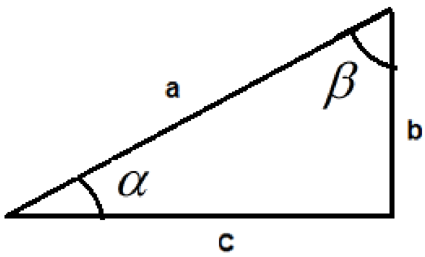


Figura 2.6

$$sen\alpha = b/a = \cos\beta \quad ; \quad tg\alpha = b/c = \frac{1}{c/b} = \frac{1}{tg\beta}$$

Se conseguirmos calcular as funções de ângulos do intervalo entre (0º,45º), passaremos a conhecer imediatamente as funções de seus ângulos complementares, que estão no intervalo entre (45º, 90º) e vice versa. No entanto não serão somente de ângulos complementares que poderemos calcular suas funções pois em nosso próximo passo iremos verificar a possibilidade de calcularmos as funções dos ângulos 2α e α/2, com isso tendo um ângulo poderemos calcular as funções de muitos outros. Como exemplo com as funções de 18º, poderemos obter as de 72º=90-18º, 9º=18º/2, 36º=2x18º, 54º=90º-36º etc. considerando as proposições abaixo, teremos:

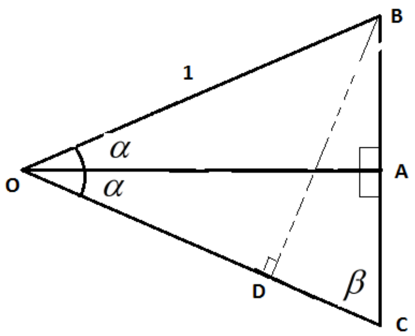


Figura 2.7

$$1- \quad Se\ \alpha \in \left(0^\circ, 45^\circ\right)\ então:\ sen2\alpha = 2.sen\alpha.cos\alpha$$

$$2- \quad Se€\ \left(0^\circ, 45^\circ\right)\ então\ sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Considerando a figura 2.7, formada por dois triângulos OAB e OAC retângulos em A, podemos observar que sendo OB=OC=1, e que os ângulos AÔB = AÔC= α. E com estas condições verificamos que $AB = AC = sen\alpha\ e\ OA = \cos\alpha$. Ao traçarmos a altura BD verificamos que BD= sen2α. Ao considerarmos o dobro da área do triangulo OBC teremos BC.OA=OC.BD nessas condições temos que:

$$2sen\alpha\cos\alpha = 1.sen2\alpha$$

Para a segunda parte verifiquemos que:

$1.\cos 2\alpha + BC.\cos\beta = 1.$ *Como* $BC = 2sen\alpha$ *e* $\cos\beta = sen\alpha.$

Temos que:

$$\cos 2\alpha + 2sen\alpha.\cos\alpha = 1 \qquad \textit{fazendo devidas substituições teremos}:$$

$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad ; \quad 2\alpha = \alpha \ \ e \ \ \alpha = \frac{\alpha}{2}$$

3.4 Tabelando alguns Ângulos

Consideremos um triangulo equilátero de lado 2, figura 2.8.

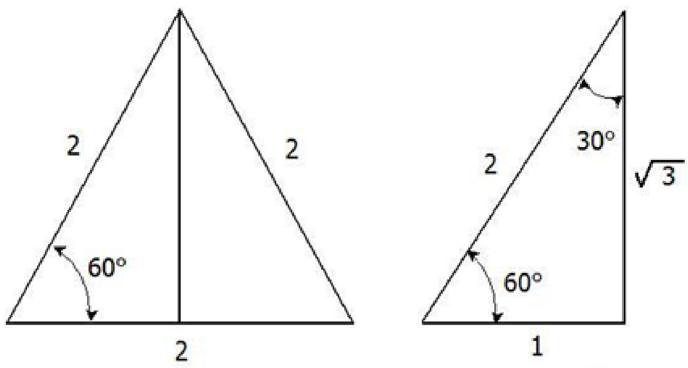


Figura 2.8 Triangulo Equilátero

Neste caso obtemos as razoes trigonométricas para cada ângulo agudo, desta forma:

$$sen60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos 60^o = \frac{1}{2} \quad ; \quad tg60^o = \sqrt{3}$$

$$sen30^o = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ao considerarmos um triangulo retângulo isósceles, de cateto igual a 1 arbitrariamente obtemos as razões trigonométricas para o ângulo de 45º.

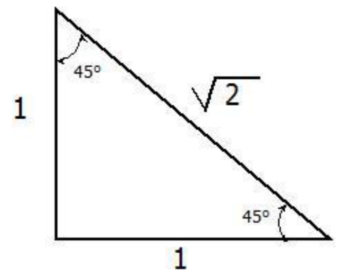


Figura 2.9 Triângulo retângulo isósceles

$$sen45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad tg45^o = 1$$

3.5 As Funções Seno e Cosseno.

Neste trabalho até agora trabalhamos as razões trigonométricas que eventualmente são chamadas de funções de ângulos agudos de um triangulo retângulo, esta extensão a ângulos maiores que noventa se amplia a um domínio real e neste trabalho nos ocuparemos das funções seno e cosseno em especial a função seno. A fim de trabalharmos estas funções circulares temos que definir alguns termos que serão usados em seguida; neste caso trataremos do significado de radianos inicialmente. Um radiano é a medida de um ângulo central que gera um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência. Considerando que o comprimento de uma circunferência de raio r é igual a 2π radianos= 360º. Em um sistema de coordenadas cartesianas se diz que um ângulo está em posição normal se o seu lado inicial coincide com o semieixo positivo das abscissas "X" para marcarmos valores das funções trigonométricas de números reais utilizaremos um circulo de raio unitário, com centro na origem "O", x será um número real com medidas em radianos de um dado ângulo α .desta maneira"h" então será a medida do arco que partirá do ponto A(1,0) até o ponto P(x,y).

$$h = r.\alpha \;\; ; \quad r = 1 \;\; ; \; h = \alpha$$

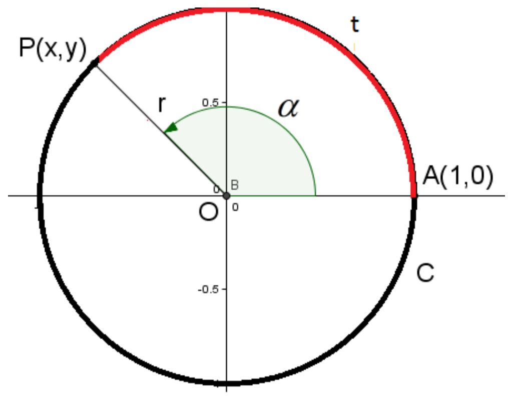


Figura 2.10

Quando giramos o segmento OA, em redor do centro O como se o ponto A percorresse uma trajetória sobre a circunferência C a fim de chegar ao ponto P, temos que considerar dois sentidos; um horário e o outro anti-horário como veremos:

- t> 0 então o segmento OA gira em sentido anti-horário positivo.
- t< 0 então o segmento OA gira em sentido anti-horário negativo.

Caso t> 2π, podemos considerar que A poderá dar mais que uma volta na circunferência antes de chegar ao ponto P.O ponto P(x,y) representará o arco equivalente a m e suas coordenadas (x,y) serão utilizadas para definirmos as seis funções trigonométricas de "t" que obteremos a partir das razões trigonométricas já trabalhadas para os ângulos agudos relacionadas ao circulo trigonométrico unitário.

$$sen\, t = sen\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad ; \; assim \;\; como: \qquad \cos t = x$$

Considerando a estrutura da circunferência trigonométrica e seu eixo, podemos tomar várias conclusões:

$$-1 \le x \le 1 \quad e \quad -1 \le y \le 1$$

Lembrando que y = sent e x = cost então considerando as variações de x e y.

$$-1 \le sen\, t \le 1 \quad e \quad -1 \le \cos t \le 1$$

Desta forma podemos perceber que o domínio das funções f(t)=sent e h(t)= cost é o conjunto dos números reais enquanto que a imagem vaia no intervalo [-1,1]. Desta forma podemos ter uma forma geral para taralharmos estas funções na forma:

$$sent = sen(t + 2k\pi) \qquad \cos t = \cos(t + 2k\pi)$$

Sendo k qualquer numero inteiro que representaria o número de voltas positivas ou negativas que mostra sempre a mesma circunferência com os mesmos pontos, no entanto em uma angulação que representaria $\pm$k voltas positivas ou negativas em relação Ao ponto “P”.

3.6 Periodicidade

Uma função será periódica se existe um número real m, tal que f(x) =f(x+m) para todo “x” pertencente ao domínio de f. Desta forma podemos afirmar que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π; com isso se conhecemos o comportamento destas funções no intervalo [0, 2π], conheceremos imediatamente o comportamento destas funções em todos os intervalos seguintes (ou anteriores) de comprimento 2π. Desta forma podemos afirmar que o gráfico da função f(x)= senx no intervalo [0, 2π] é exatamente o mesmo em qualquer intervalo da forma [2kπ, 2(k+1)π]. Podemos então restringir o estudo dessas funções ao intervalo [0, 2π] sem qualquer perda de generalidade fazendo correspondência as coordenadas de um ponto que dá exatamente uma volta ou menos, em ralação a circunferência C (figura 2.11)

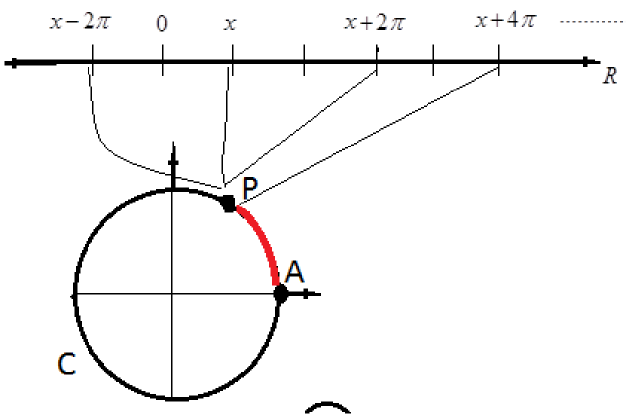


Figura 2.11 $\widehat{AP}$=x+2kπ

As funções sent e cost, como coordenadas de um ponto, têm sinais que dependem do quadrante em que se encontram para todo número real “t” os pontos na circunferência trigonométrica se localizam no lado terminal de um ângulo e teremos também três pontos simétricos, gerando assim 4 ângulos sem falar de suas determinações positivas e ou negativas e estas, terão os mesmos valores absolutos de seno cosseno e tangente e suas respectivas inversas. Em virtude dessas observações podemos compreender os valores absolutos das funções trigonométricas podem ser todos determinados no primeiro quadrante.

Para se ter, uma ideia breve do comportamento global de uma função trigonométrica é necessário que tracemos seu gráfico.

3.7 Gráficos de Funções Trigonométricas.

O gráfico da função seno, ou o conjunto dos pontos do plano de coordenadas (t,sent), traz em uma figura todas as informações relativas a função seno. Em primeira mão seria necessário conhecermos todos os pontos (t, sent) para traçarmos o gráfico. Considerando o conjunto de pontos de que já conhecemos, permite que tracemos uma figura que representaria o gráfico da função seno representado na (figura 2.12). Da mesma forma obteremos na (figura 2.13) o gráfico da função cosseno, de fato um conjunto de pontos de coordenadas (t , cos t). observe que o seno e o cosseno variam entre 1 e -1. Para obtermos os gráficos completos devemos repetir os próximos gráficos por varias vezes considerando o domínio das funções, mas tudo a partir do período, podemos conhecer o comportamento da função.

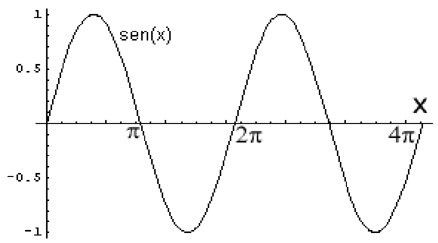


Figura 2.12

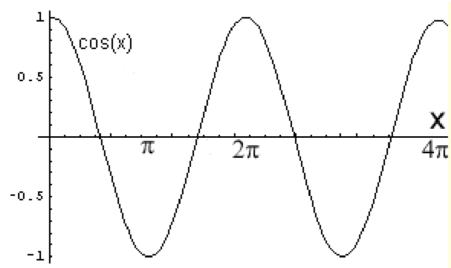


Figura 2.13

Observando os dois gráficos acabamos percebendo uma grande semelhança entre as duas curvas. E de fato elas são idênticas, duas senóides, poisse trata de uma translação de π/2 para a esquerda no gráfico da função seno.

Considerando observações podemosencontrar um ciclo completo entre$0 \le x \le 2\pi$. Em termos é natural considerarmos um circulo como uma onda senoidal é importante reconhecer também os pontos no eixo x em que os gráficos das funções seno e cosseno se intersectam.

Graficamente as raízes da função seno, são os pontos de intersecção entre o gráfico e o eixo das abscissas e de fato serão os números do circulo unitário para os quais senx=0 ; π e 2π além de todas as suas determinações positivas e negativas no caso teríamos sempre múltiplos inteiros de π. No caso do gráfico da função cosseno suas raízes sempre estão a um quarto de volta atrasadas ou adiantadas em relação às da função seno e no circulo unitário suas raízes sempre são identificadas como múltiplos inteiros e impares de $\frac{\pi}{2}$.

A função tangente foi definida por $tgx = \frac{senx}{cosx}$; $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi.$ Devemos entender que a tangente de um determinado ângulo deve ser vista como a medida algébrica de um segmento. Na figura 2.14 podemos verificar uma reta orientada tangente ao ponto A formando na circunferência α um arco AB de medida x, a reta r que contém O e B determina B' em α E t no novo eixo das tangentes.

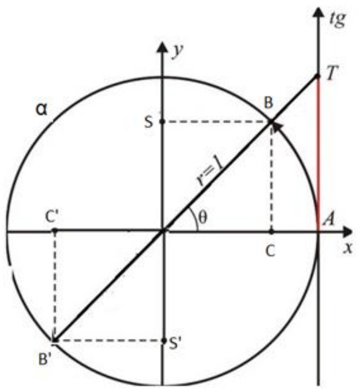


Figura: 2 14

Na figura 2.14, os arcos AB e AB' teriam o mesmo valor de tangente, que no caso seria a medida algébrica do segmento AT; observe que a tangente é uma função periódica com período igual a π. tgx=tg(x+π), para valores próximos e menores que π/2 a função torna-se maior que qualquer numero positivo dado, e para valores próximos e maiores que π/2, a tangente torna-se menor que qualquer número dado. Podemos então esboçar o gráfico da função tangente de forma a que respeite o intervalo [0,π] e repeti-lo em todos os intervalos da forma [kπ), (k+1)π] (Figura: 2.15).

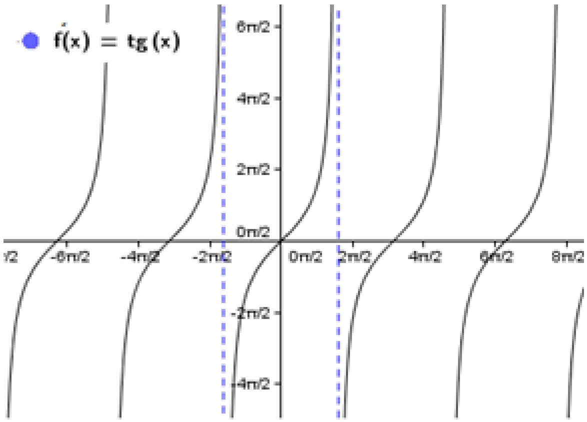


Figura: 2.15

3.8 Transformações nos Gráficos das Funções Seno e Cosseno.

Este item será de extrema importância para o desenvolvimento do trabalho que aplicaremos pelo fato de que as observações acerca das transformações nos gráficos das funções seno, feitas por alunos, são o maior objetivo do trabalho para compreendermos se os alunos com novas ferramentas e técnicas compreendem um conteúdo de caráter complexo e não muito bem tratado nos livros didáticos ou mesmo nos currículos escolares e acadêmicos, sempre gerando duvidas e também inserido em uma atmosfera de dificuldades e medo por alunos e professores.

3.8.1 Dilatação Vertical e Horizontal

Podemos descrever os gráficos das funções seno e cosseno de forma que:

$$y = a + bsen(cx + d)$$

Sendo a, b, c e d números reais. Tentaremos trabalhar os gráficos sem termos que mudar muitos pontos, até mesmo para que na aplicação do trabalho com os alunos possamos diminuir a margem de erro a partir de uma má visualização. Nosso alvo inicial será a função seno, pois será a função aplicada na proposta didática que faremos nos próximos capítulos.

$$y = a + bsen(cx + d)$$

Considerando a e d, iguais a zero e c =1, trabalharemos a ideia do gráfico da função seno tentando compreender quais os efeitos do coeficiente b na construção do gráfico.

$$y = bsenx$$

O gráfico será obtido a partir da multiplicação das ordenadas da função *y=senx* por b. por exemplo caso a função seja *y= 3senx*, então cada ordenada da função original seria multiplicada por 3 e isso faria com que acontecesse um certo alongamentovertical do gráfico, fazendo com que o intervalo de imagem passasse a variar de $-3 \leq y \leq 3$, ao invés de $-1 \leq y \leq 1$, como na função *y=senx.* poderemos observar bem esta transformação na figura 2.14; onde a função inicial está representada em linha continua e a secundária em linha pontilhada.

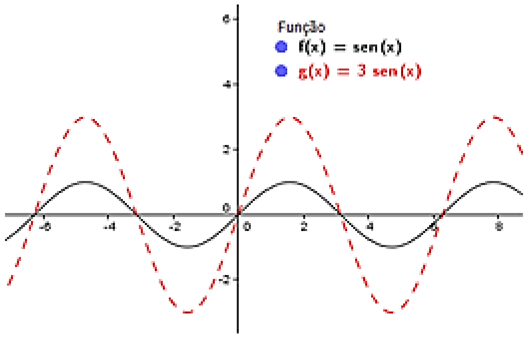


FIGURA 2.16

Se a função fosse $y = \frac{1}{4}senx$, obteríamos uma compressão vertical da função inicial $y = senx$. Caso o valor de b< 0, o gráfico da função ficará simétrico em relação ao eixo x; o valor máximo das funções trigonométricas, conhecido como amplitude se dá considerando o valor absoluto de b.

Trabalharemos agora a função, $y = a + bsen(cx + d)$, em que a e d são iguais à zero tornando-a $y = b.sen(cx)$, b e c números reais diferentes de zero; teremos assim uma combinação de dois coeficientes que agem diferentemente no gráfico das funções.

Temos que$|b|$ *será* a amplitude da função enquanto que o valor de c está diretamente relacionado ao período da função e teremos um ciclo quando cx cresce de 0 a 2π, o que é o mesmo quando x cresce de 0 a $\frac{2\pi}{c}$. se $y = bsen\,cx$ para números reais b e c diferentes de zero o gráfico terá amplitude $|b|$ e período $\frac{2\pi}{|c|}$.

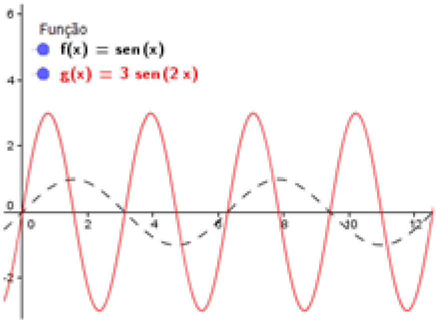


FIGURA 2.17

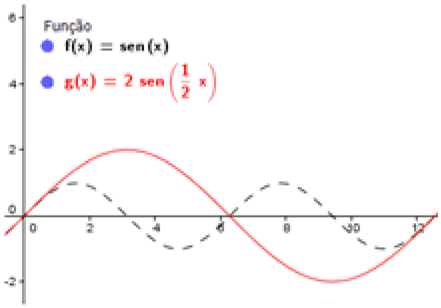


FIGURA 2.18

Se $|b| > 1$ então o gráfico de $y = b.sen(cx)$ se comprime horizontalmente considerando um fator c. caso $0 < |b| < 1$, o gráfico da função se alonga horizontalmente; vejamos o que acontece nas figuras 2.17. e 2.18.

Observando o gráfico podemos concluir que na figura 2.15 as transformações ocorridas se destacam bem evidentes em g(x), considerando a função inicial f(x) $= senx$ em pontilhado, a função g(x) apresentou duas mudanças significativas; uma em relação a amplitude que equivale a 3 e outra em relação ao período que é de duas voltas em relação ao da função f(x). Considerando a figura 2.16 podemos observar que na função g(x) a amplitude é 2 e o período é o dobro do período da função f(x).

3.8.2 Translação Vertical e Horizontal

Podemos considerar a translação vertical do gráfico das funções seno e cosseno se existir um número real a tal que f(x)= $a + bsen(cx + d)$; sendo a $\neq 0$. Como exemplo vamos verificar os gráficos da figura 2.17 em que a função $f(x) = 2sen(3x)$ aparece tracejada com amplitude 2 e período $\frac{2\pi}{3}$. Considerando a função g(x)= $2 + sen(3x)$ podemos perceber que a amplitude e o período se mantém a única diferença identificada visualmente é que houve um deslocamento vertical completo do gráfico considerando duas unidades positivas o que nos faz perceber que o coeficiente a é responsável por este deslocamento, positivo se a > 0 e negativo caso a < 0.

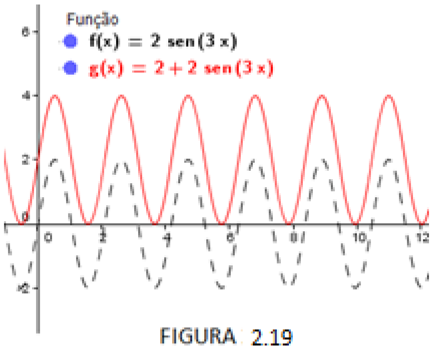


FIGURA 2.19

3.8.3 Mudança de Fase

Vamos considerar a expressão da forma $y = asen(bx + c) + d$; no caso em que b > 0 e b< 0, faremos considerações similares. Há pouco tratamos dos parâmetros responsáveis pelas mudanças geradas na amplitude$|a|$, e no período$\frac{2\pi}{|b|}$ das funções. Teremos valores máximos e mínimos da função entre os intervalos d + a e mínimo em d – a. Para determinarmos onde podemos encontrar o começo de um ciclo, podemos utilizar a desigualdade $0 \leq bx + c \leq 2\pi$ e após isso será possível encontrar um intervalo onde se encontra o ciclo trigonométrico.

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi \qquad - c \leq bx \leq 2\pi - c \qquad \frac{-c}{b} \leq x \leq \frac{2\pi}{b} - \frac{c}{b}$$

Desta expressão vamos obter o ponto sobre o eixo central (0, -c/b) mais próximo do ponto (0,d), que representa o início do ciclo, com o deslocamento do ciclo a partir do ponto –c/b a partir do ponto (0,d) bastando então se o deslocamento do circulo será positivo ou negativo. Caso negativo a função $y = asen(bx + c) + d$ terá o gráfico deslocado para a esquerda em um valor absoluto de c/d. se o deslocamento for positivo a função $y = asen(bx + c) + d$ será deslocada para a direita considerando o valor absoluto de c/b. Para a função: $y = acos(bx + c) + d$, teremos os mesmos deslocamentos.

Por exemplo, seja a função $y = 3sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$. Essa função tem uma amplitude $|2| = 3$, um período de $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$, terá um deslocamento vertical positivo de eixo central, até y=1 e encontraremos o ciclo no intervalo:

$$0 \leq 2x + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \qquad -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2\pi - \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$$

Na figura 2.20 poderemos perceber que o eixo foi deslocado uma unidade para cima, pois considerando a função do tipo $y = acos(bx + c) + d$, o valor de d=1, o novo eixo estará representado pela reta pontilhada de equação y=1; esta função terá seu ciclo definido no intervalo $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$, mais precisamente $-0{,}79 \leq x \leq 2{,}36$.

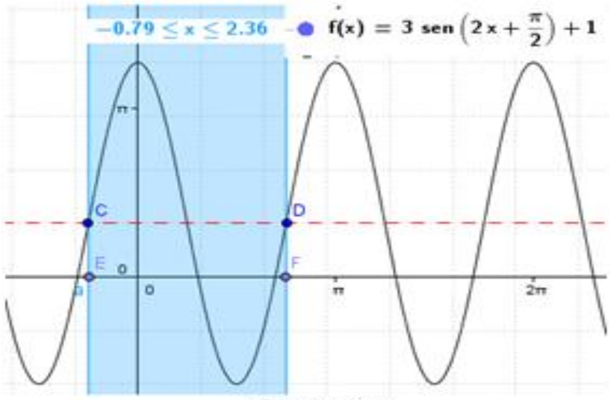


Figura: 2.20

Dada a função y=$-\frac{2}{3}\cos(\frac{x}{2} - \pi)$; possui amplitude $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$ sendo o período $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$e para encontrarmos um intervalo em que possa encontrar um ciclo, teremos:

$$0 \leq \frac{x}{2} - \pi \leq 2\pi \qquad \pi \leq \frac{x}{2} \leq 3\pi \qquad 2\pi \leq x \leq 6\pi$$

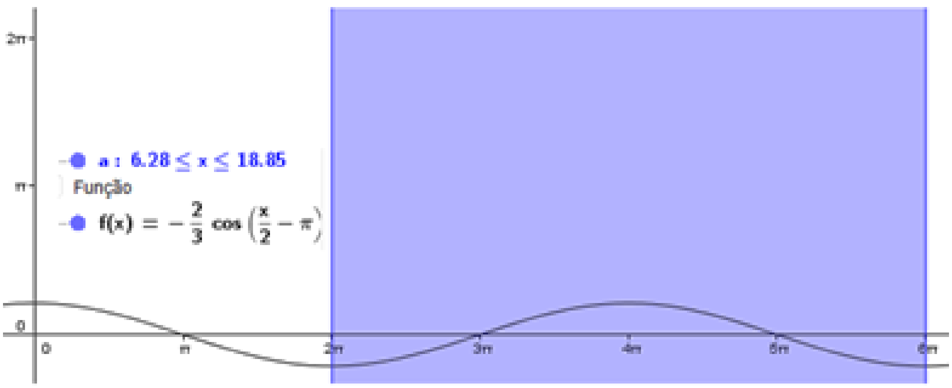


Figura 2.21

4 ASPECTOS, CURRIGULARES, DIDÁTICOS E METODOLÓGICOS.

Neste capítulo abordaremos a estrutura curricular do ensino de matemática, acerca da trigonometria, mais especificamente das funções trigonométricas, em nível médio e na formação do professor de matemática; considerando os aspectos didáticos, trataremos de algumas experiências profissionais quanto ao ensino de funções trigonométricas, faremos uma discussão acerca de livros didáticos que trabalham estes conteúdos e discutiremos a inserção de novas tecnologias para o ensino destas funções em face às limitações e dificuldades encontradas por professores e alunos no canal de ensino e aprendizagem deste conteúdo.

4.1 Um Pouco de Experiência

Durante minha graduação na Universidade Federal do Pará, mais precisamente no inicio da graduação, quando assistia a disciplina Fundamentos de Matemática I, senti sérias dificuldades em aprender o conteúdo de trigonometria por não tê-lo estudado no ensino médio, mas quando o estudei de forma correta e com linearidade consegui ser aprovado na disciplina, mas ainda assim o conhecimento não estava consolidado.

Já nas disciplinas de calculo e álgebra linear a mecânica e os instrumentos de ensino foram diferentes e de fato consegui compreender o papel da trigonometria e principalmente das funções trigonométricas como uma ferramenta especial e insubstituível para algumas aplicações matemáticas.

Durante e após a graduação a partir de 2001, tive e tenho experiências, como professor de ensino médio, e pude perceber que a trigonometria acaba sendo um verdadeiro tabu para alguns alunos e mesmo professores. Os alunos em sua maioria relatam que as questões de trigonometria são as mais difíceis e muitas vezes são feitas por ultimo ou mesmo deixadas em branco nos testes em geral.

De 2009 até hoje eu trabalho com as disciplinas de fundamentos, calculo, álgebra linear, e outras, percebo que o nível de dificuldades dos alunos, em matemática é alarmante, mas no que se refere à trigonometria, quando tenho que trabalhar a disciplina de Fundamentos1, normalmente tenho que revisar as bases da trigonometria, afim de trabalhar com as funções trigonométricas ou o aprendizado acaba sendo deficitário e sem efeito em relação a essas funções.

Motivado pela percepção do quanto o assunto de funções trigonométricas muitas vezes é ignorado, ou mesmo deixado de lado por muitos alunos,em face à suposta dificuldade encontrada pela maioria deles, fui levado a buscar alternativas como utilização de material físico e mesmo a utilização de softwares como o GeoGebra e outros, que na falta de um computador ou de laboratório de informática pode ser baixado como aplicativo para celular e assim podemos experimentar sequencias de ensino construídas com estes materiais que acabam proporcionando uma diversidade de observações em muito pouco tempo, e para o ensino de funções trigonométricas, estas ferramentas são primordiais.

Um contra ponto que faz com que alguns professores repensem sua pratica é que fica cada vez mais evidente um questionamento feito pelos alunos, sobre a importância da aplicabilidade do conteúdo matemático abordado em sala, em especial em relação à formação de um cidadão e de suas ações cotidianas. De fato como professor,percebo que o ensino tradicional está presente ainda na maioria dos textos didáticos, e que não são exploradas aplicações e a maior parte dos exercícios acaba direcionando os alunos a uma estrutura tecnicista e repetitiva, onde o entendimento real dos conteúdos não é alcançado devido a falta de motivação e de estímulos, o frequente questionamento “Onde vou utilizar isso na minha vida professor”, vem ficando cada vez mais sem qualquer resposta, devido a falta de aplicabilidade dos conteúdos nos livros didáticos e ou nas aulas de professores que não utilizam qualquer recurso além dos livros didáticos em suas aulas.

4.1.2 Situações Didáticas

Pensando em meu trabalho com o ensino médio mais especificamente nos segundos anos, pude perceber que muitas das situações individuais dos alunos em relação à trigonometria, dependem diretamente de como este aluno teve contato com os conteúdos básicos de trigonometria e vistoque qualquer conteúdo matemático quase sempre é apresentado pelo professor, logo dificilmente o aluno teria qualquer preconceitoquanto ao conteúdo. Um número maior de estímulos ou mesmo de aplicações seria primordial para o melhor entendimento dos alunos acerca do conteúdo de funções trigonométricas.

“é interessante que os alunos partilhem ideias, raciocínios, processos, estabeleçam conexões, comparações e analogias, construam conjecturas e negociem significados, desenvolvam capacidades de comunicar e argumentar. Nesse sentido, durante as atividades, o aluno deve:observar experimentar, comparar, relacionar, analisar, justapor, compor, encaixar, levantar hipóteses e argumentar".(KFOURI; D'AMBRÓSIO, 2006, p.2).

Hoje em dia a aparente inabilidade de alguns professores de matemática do ensino fundamental II é conferida com em face da estrutura de ensino dos primeiros anos do ensino fundamental, visto que a maioria das crianças do fundamental 1, não são formadas por um professor de matemática, de fato, e acabam aprendendo matemática sem uma estrutura coesa e definitiva. Tendo seu conhecimento associado à memorização e repetição ao invés de ser associado a interpretações e abstrações, o que traria para o aluno fundamentos e alicerceiesque aprimorariam os seus mecanismos de aprendizagem.

No âmbito da formação dos professores de séries iniciais, normalmente egressos do curso de normalista, magistério, ou mesmo de um curso de graduação em pedagogia, algumas limitações matemáticas manifestadas por alunos que procuram o curso são deixadas de lado causando um transtorno que muitas vezes torna-se cumulativo e em consequência é transmitido ao aluno do fundamental. De acordo com Carvalho (1994, p. 17),

"como aprender Matemática é um objetivo distante e inatingível, só lhe resta escolher uma carreira que não requisite conhecimentos matemáticos".

Como consequência de tais limitações surgem o desgosto e uma suposta incapacidade para a Matemática, o que faz com que alguns profissionais julguem grande parte de seus alunos também como incapazes de aprendê-la. Assim, se o profissional das séries iniciais do Ensino Fundamental, ao longo de sua formação, não vivenciar a experiência de se sentir capaz de entender Matemática, nem se sentir capaz de construir qualquer conhecimento matemático, terá dificuldades em aceitar que seus alunos adquiram tal capacidade, impedindo que se libertem desse tabu de ensino, considerado difícil e inacessível, pois "o professor, ao ensinar Matemática – quer por ações e discursos, quer no próprio tratamento com o conteúdo matemático, ensinar, implicitamente, valores sobre essa área do conhecimento, através das qualidades afetivas na interação com os alunos" (NACARATO, PASSOS & CARVALHO, 2004, p. 10).

Em muitos momentos o professor do fundamental I (1º à 4º séries) sente certo desconforto com os conteúdos a serem ensinados, problema este que talvez o acompanhe desde sua formação inicial, professor de séries iniciais, e é apresentado com muita ênfase às técnicas e metodologias de ensino em face ao conteúdo de matemática e o saber matemático (Marques, 2006, p 93)

Contudo, a formação de parte dos alunos do fundamental é deficitária, e acaba por comprometer todo o seu desenvolvimento em matemática, além de atrapalhar uma sequencia de conteúdos, que se fosse iniciada com perfeição, as outras fases de aprendizado não seriam tão prejudicadas, no sentido de fazer com que professores das séries finais do ensino fundamental e outros do ensino médio e ou superior tenham dificuldades em ensinar certos conteúdos; assim como seus alunos de aprendê-los.

4.2Funções Trigonométricas e o Currículo do Ensino Médio:

Considerando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN'S) para o ensino médio, volume três que trata de (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), nota-se que o texto faz uma referencia especial em relação à formação do individuo como cidadão pleno e enfatiza que o ensino de matemática e seus aspectos voltados à tecnologia sejam tratados de maneira uniforme e universal, que não seja específico ou tecnicista. Propõe um aprendizado que de fato seja útil à vida das pessoas no sentido mais pleno, de forma que a teoria, competências e habilidades se associem naturalmente ao dia a dia das pessoas, em tarefas simples ou complexas do cotidiano. Segundo os PCN'S, não se deve dar ênfase a tópicos que só possam ser entendidos em outros níveis de escolaridade, podemos destacar então:

[...] este documento procura apresentar, na seção sobre O Sentido do aprendizado na área, uma proposta para o Ensino Médio que, sem ser profissionalizante,efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual asinformações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valoresdesenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação,julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente,evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa deescolaridade. (PCN's, 1998, p.4)

No ensino fundamental, especificamente no sexto ano o aluno começa a ter entendimento a cerca dos entes geométricos essenciais (ponto, reta, plano) e a abstração algébrica aparece no conteúdo timidamente; já por volta do oitavo ano que o aluo começa a trabalhar com noções de semelhança e com a abstração algébrica voltada à geometria, na forma de conteúdos que envolvem o teorema de Pitágoras e os teoremas sobre as paralelas. As razões métricas, a partir das semelhanças do triangulo retângulo assim como as razoes trigonométricas em fim são trabalhadas no segundo semestre do 9 ano, onde as primeiras concepções de trigonometria aparecem baseadas em problemas de aspectos simples no triangulo retângulo, mas até então não desvendados por Pitágoras.

Já no primeiro ano do ensino médio de acordo com os PCN'S, os alunos reveem conteúdos básicos de trigonometria no que tange a ideia de circunferência trigonométrica, lei dos senos e cosseno, identidades trigonométricas, simples, para que no segundo ano do ensino médio os alunos possam trabalhar com funções trigonométricas que normalmente são trabalhadas no primeiro bimestre do segundo ano do ensino médio, com média de 5 semanas de estudos e carga horária média de 4 aulas semanais.

Considerando o ultimo plano curricular de educação básica do estado do Amapá de 2009, quando o assunto é trigonometria, o plano diz, página 41, que na terceira unidade, correspondente ao terceiro bimestre da 8º série, 9º série em datas atuais, alguns dos assuntos tratados serão: razões trigonométricas no triângulo retângulo, Seno, Cosseno, Tangente, Lei dos senos, Lei dos cossenos; e, além disso, não há qualquer outra referencia à trigonometria nos três anos subsequentes do ensino médio, contudo os professores se sentem livres para estruturar a grade curricular de suas escolas visto que os livros didáticos em geral condizem com a estrutura curricular disponibilizada pelos PCN'S, em que normalmente se tem o básico de trigonometria no nono ano, considerando as razões métricas e trigonométricas no triangulo, já no primeiro ano um pouco mais de trigonometria, onde o aluno conhece a circunferência trigonométrica e algumas identidades para em fim estudar as funções trigonométricas no segundo ano do ensino médio.

A cerca da discrepância existente entre alguns planos de educação básica estaduais, como o do Amapá e os PCN's(1998) ou PCN's+(2002), Segundo PORTANOVA (2007), os grandes temas a serem trabalhados nas três séries do ensino médio são: Geometria, Álgebra e Análise de Dados.

Analisando como esses temas são abordados nos dois casos, podemos ter uma referência norteadora para que nos próximos capítulos possamos analisar como os materiais didáticos estão sendo disponibilizados para nossos estudantes, além de podermos tratar os temas do trabalho com mais segurança, sobre os critérios para a elaboração de uma proposta em que abordaremos o tema específico de funções trigonométricas.

Considerando a geometria fizemos um apanhado teórico de cada item considerado importante para o ensino médio: geometrias euclidianas, não-euclidianas e dimensionalidade, verificando a importância de tais conteúdos na própria história da matemática, considerando a importância epistemológica, para o desenvolvimento das habilidades e competências no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Analisando os PCN+, BRASIL (2002, p.111), relativos ao ensino médio, considerado como etapa final da escolaridade básica, verifica-se que:

> *"[...] a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo de sua vida social e profissional".*

Ao trabalharmos diferentes geometrias no ensino médio, estamos inserindo diferentes estilos de raciocínios que amadurecem novas formas de enxergar o mundo e a tecnologia, fazendo com que o pensar humano torne-se mais versátil, valorizando as habilidades humanas.

Segundo PORTNOVA (2007), a generalização da aritmética é completamente realizada através da abstração do pensamento algébrico, que deve ser encarado como um dos meios mais eficazes de resolução de problemas. A álgebra hoje auxilia o homem na compreensão de estruturas matemáticas que estão no dia a dia do cidadão comum, desta forma a álgebra tem um papel de destaque entre as matemáticas disponíveis para o conhecimento humano, em todos os níveis de ensino e em especial no ensino médio, onde o período de três anos é intensivo em relação a matemática. É necessário que o entendimento algébrico seja desenvolvido de forma ampla para que os alunos que comporão a sociedade do amanhã possam ter habilidades para resolver, analisar e descrever relações matemáticas e não matemáticas, construindo significados e estando inseridos nas mais diversas situações.

Segundo os PCN+, a álgebra é um dos eixos estruturantes da matemática, sendo trabalhada simultaneamente com a Geometria e a Análise de Dados.

Considerando a Análise de Dados, de acordo com os PCN+, está dividida em: combinatória, Estatística e probabilidade. Em uma análise sucinta de como estes assuntos devem ser abordados, percebemos que se tem um olhar especial sobre esses temas para o ensino médio, visto que algumas tecnologias como a calculadora o computador e outros meios de tecnologia como celulares tabletes e outros, podem aproximas o aluno de novos contextos matemáticos fazendo com que as experiências de ensino sejam mais significativas e o raciocínio lógico matemático trabalhado nas escolas se desenvolva além do esperado com o uso de novas tecnologias.

Especificamente sobre o ensino de trigonometria e funções trigonométricas os PCN'S (20020pg 44).

> "Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que se deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos "(BRASIL, 2000, p.44).

Considerando o que os PCN'S indicam para o ensino dos conteúdos de trigonometria e de funções trigonométricas, relacionados diretamente a álgebra e a geometria, vimos que tais conhecimentos são necessários à habilidades e competências direcionadas a resolução de problemas de aplicação o que nos faz compreender que a álgebra pela álgebra, sem qualquer aplicação deve ser substituída por problemas que tenham respostas palpáveis e reais.

Das habilidades e competências importantes para o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de trigonometria são evidentes:

Ler, interpretar e construir (gráficos, tabelas, representações e expressões matemáticas); além de julgar e criticar resultados a partir de situações concretas, produzindo conjecturas e modelos valorizando também o pensamento recorrente e a capacidade de esboçar argumentos convincentes e até mesmo experimentos relacionados a fenômenos concretos, utilizando aparatos tecnológicos como: calculadora, computadores e programas, para a resolução, e mesmo elaboração de problemas. Tais habilidades e competências devem ser alcançadas na proposta didática elaborada para este trabalho. Podemos compreender que os três grandes eixos abordados estão diretamente presentes no estudo de trigonometria e bem precisamente nas funções trigonométricas que é um dos conteúdos finais de trigonometria no ensino médio e de acordo com os PCENM, as competências e habilidades tratadas aqui são fundamentais para que o cidadão possa viver neste novo século repleto de complexidades.

4.3 Obstáculos para o Ensino de Funções Trigonométricas, aos Alunos de Ensino Médio

Considerando minhas experiências na docência, mais especificamente nos segundos anos, pude constatar muitas dificuldades por parte dos alunos, como:

- Muitos alunos não conseguiam aplicar as razões trigonométricas de maneira correta, algumas vezes por não identificar os catetos corretamente ou por não aplicar corretamente a relação de tangente.
- Não compreendiam a estrutura dos quadrantes em relação aos ângulos, não consideravam a simetria em relação aos ângulos notáveis e muito menos a estruturação das funções na circunferência trigonométrica.
- Não tinham o entendimento correto do que seria ângulo ou radiano, e muitas vezes exibiam igualdades do tipo: sen 1= 90 ou sen0,5=30.
- Decoravam as formulas de redução ao primeiro quadrante sem compreender que seria necessário apenas um entendimento a cerca de simetria no circulo trigonométrico.
- Não compreendiam as diferenças e semelhanças específicas entre os gráficos de seno e cosseno, das funções trigonométricas.
- Na resolução de algumas equações trigonométricas não compreendiam que a todos os ângulos simétricos de um dado intervalo eram solução do problema.
- Não compreendiam a estrutura do circulo trigonométrico como base para o gráfico no plano das funções trigonométricas.

Podemos considerar que erros como estes, muitas vezes cometidos em sala no momento de perguntas ou mesmo em alguns momentos em que eu fazia uma avaliação de sondagem sobre o conhecimento prévio dos alunos, nos mostram que seja qual tenha sido a experiência do aluno com trigonometria ou funções trigonométricas, com toda a certeza não foi feita com base em significados, tendo o aluno uma visão tecnicista que consiste somente em decorar fórmulas para resolver exercícios.Além destes pontos o mais intrigante é que alguns livros didáticos para o ensino médio não seguem uma sequencia didática adequada, visto que em algumas escolas ocorrem mudanças de títulos e autores anualmente. Muitas questões nos livros são tratadas de forma em que o aluno não tenha uma ou mais referencias de aplicação dos conteúdos, desta forma para este trabalho fui motivados a fazer uma analise dos livros adotados na instituição em que desenvolvi meu trabalho.

5 ANÁLISE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo trataremos da análise feita em algumas coleções de livros didáticos mais especificamente no que se refere às funções trigonométricas. Faremos considerações acerca da matemática tradicional, inovações, aplicações no cotidiano e perspectivas quanto ao tratamento com funções trigonométricas graficamente.

5.1 Livro 1 – Matemática Ciência e Aplicações 2 vol.

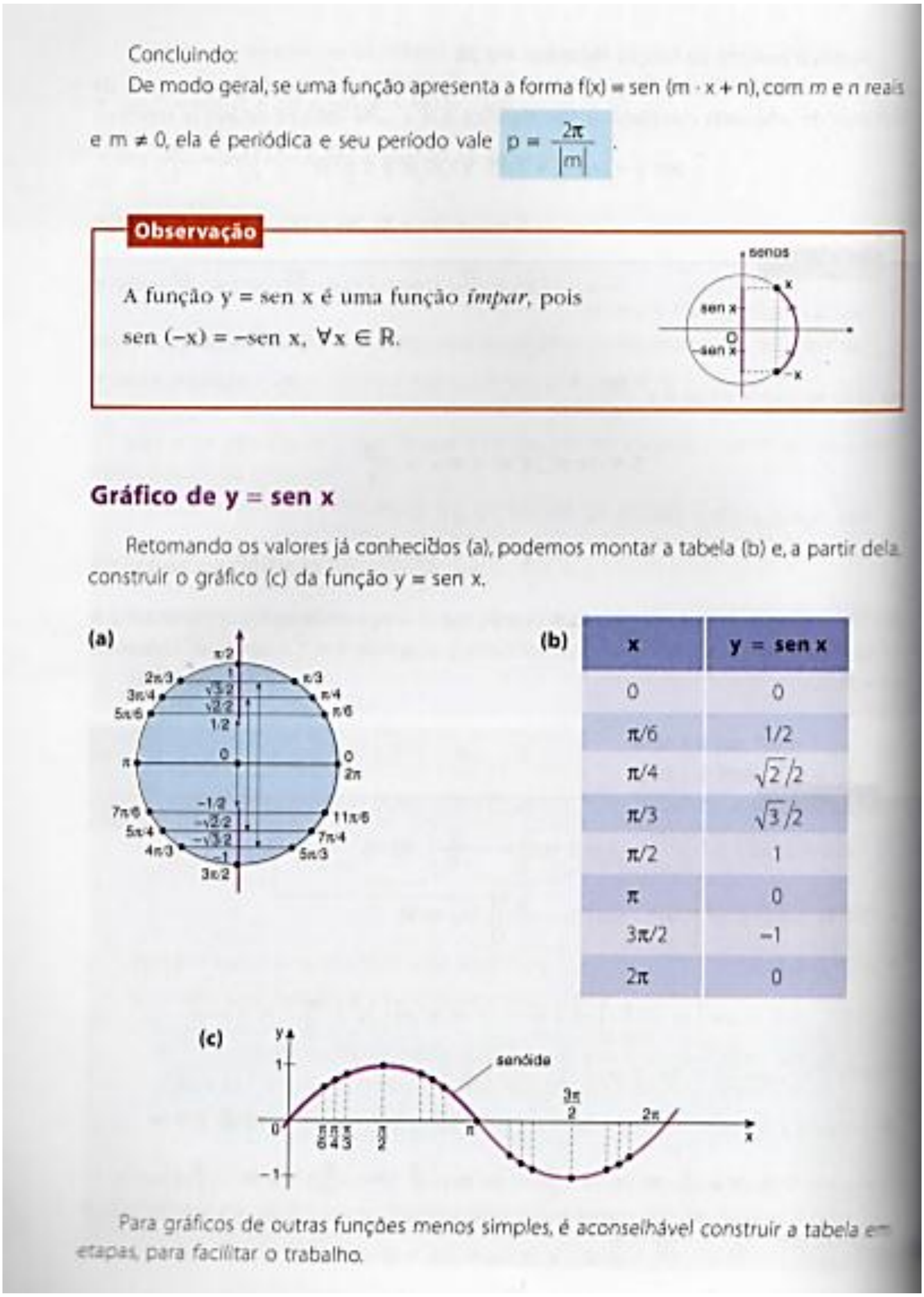
O livro didático de Iezzi et al. (2004) apresenta uma postura bem tradicional diante das funções trigonométricas como definição, propriedades, exemplos, exercícios, ciclo trigonométrico e representação geométrica das principais funções trigonométricas, onde esteconteúdo aparece de forma isolada o que é bem interessante para nosso trabalho, pois sugerimos uma proposta didática diferenciada para o melhor entendimento dos alunos a partir da análise gráfica das funções trigonométricas.

No entanto os gráficos são tratados sem qualquer motivação inicial a tomada de posição com base nas funções é inserida de forma seca e formal sem um tratamento mais específico e ou com problemáticas que motivem o aluno a compreender o conteúdo a partir de uma proposta holística e aplicada à realidade. Podemos perceber que a introdução do conceito de período é feita de forma que o aluno entende que existe um período pelo fato da função ser periódica e não com um entendimento lúdico que poderia ter sido tratado a partir de um fenômeno periódico como o movimento do ponteiro dos segundos de um relógio ou mesmo em um sistema de molas.

Os exercícios são completamente secos sem que de fato haja qualquer aplicação, contradizendo os eixos temáticos aos quais as funções trigonométricas são relacionadas nos PCN+.

Nas figuras abaixo, a primeira referente a pagina 108(figura 5.0) do livro de Iezzi et al. (2004), e a segunda à página 110 do mesmo livro, podemos observar o conteúdo descrito de maneira extremamente técnica sem qualquer referencia à realidade do aluno, já na página

110(figura 5.1) seguem os exercícios que acabam induzindo o aluno à repetição, que leva o aluno somente a decorar as ações sem qualquer relação direta com o processo de aprendizagem visto que não ouve um estímulo prévio acerca de fenômenos que pudessem ser modelados por tais funções.



Concluindo:
De modo geral, se uma função apresenta a forma $f(x) = \text{sen}\,(m \cdot x + n)$, com m e n reais e $m \neq 0$, ela é periódica e seu período vale $\boxed{p = \frac{2\pi}{|m|}}$.

Observação

A função $y = \text{sen}\,x$ é uma função *ímpar*, pois $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Gráfico de y = sen x

Retomando os valores já conhecidos (a), podemos montar a tabela (b) e, a partir dela, construir o gráfico (c) da função $y = \text{sen}\,x$.

(a)

(b)

x	y = sen x
0	0
π/6	1/2
π/4	$\sqrt{2}/2$
π/3	$\sqrt{3}/2$
π/2	1
π	0
3π/2	−1
2π	0

(c)

Para gráficos de outras funções menos simples, é aconselhável construir a tabela em etapas, para facilitar o trabalho.

Figura 5.0

EXERCÍCIOS

1 Encontre o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = \text{sen}\left(\frac{3x}{2} - \pi\right)$.

2 Para que valores de *m* existe *x* tal que $\text{sen } x = 2m + 3$?

3 Estude os sinais da função $f(x) = 3 \cdot \text{sen } 2x$.

4 Encontre o domínio da função $f(x) = \sqrt[4]{1 - 2\,\text{sen } x}$.

5 Ache o período de cada função:

a) $f(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \text{sen } \left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = \text{sen } \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

Nos exercícios 6 a 11, determine o período e o conjunto imagem, construindo o gráfico de um período completo para a função dada.

6 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 3 \text{ sen } x$

7 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \text{sen } 3x$

8 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 3 + \text{sen } x$

9 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = -\text{sen } x$

10 $f(x) = 1 - \text{sen } x$, com $D = C = \mathbb{R}$

11 $f(x) = 2 + \text{sen } 2x$, com $D = C = \mathbb{R}$

12 Sabendo que a função $f(x) = a \cdot \text{sen } (bx + c) + d$, com *a*, *b*, *c* e *d* reais, $b > 0$ e $ab < 0$, tem como conjunto imagem o intervalo $[-4, 2]$ e período igual a π, determine os valores de *a*, *b*, e *d*.

110 MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES

Figura 5.1

Entretanto Iezzi et al. (2010) reformulou seu material didático de modo a inserir aplicações do cotidiano em seus exemplos e exercícios, além de apresentar de forma sucinta em um mesmo gráfico a representação geométrica de duas funções, algo que se aproxima de nossa proposta didática.

Representamos no gráfico apenas um período de f. A senoide, no entanto, continua para a esquerda de 0 e para a direita de 2π, pois o domínio de f é $\mathbb{R}$. Note que, de -2π a 0, de 2π a 4π, etc., encontraríamos "cópias" do gráfico representado, devido à periodicidade de f.

A partir da senoide, é possível construir o gráfico de outras funções. Acompanhe os dois exemplos que seguem.

Exemplo 9

Para construir o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$, podemos fazer uma tabela em três etapas:

- atribuímos valores convenientes para x;
- associamos a x os correspondentes valores de sen x;
- multiplicamos sen x por 3:

x	sen x	$y = 3 \cdot$ sen x
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

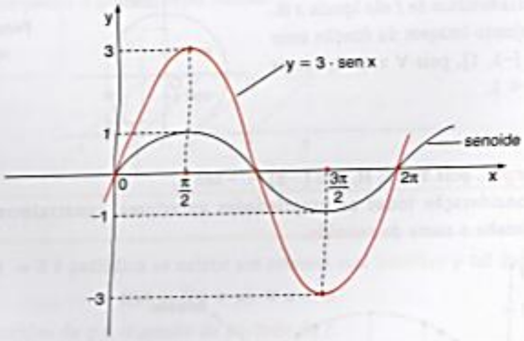
$\Rightarrow$

x	sen x	$y = 3 \cdot$ sen x
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

$\Rightarrow$

x	sen x	$y = 3 \cdot$ sen x
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	3
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3
2π	0	0

Observe que o período de f é 2π, e seu conjunto imagem é $\text{Im} = [-3, 3]$.



Pense nisto: No gráfico de $y = 3 \cdot$ sen x, para cada x corresponde uma ordenada y que é o triplo da ordenada na senoide.

| 58 |

Figura 5.2

Exercícios

5. Dê o sinal de:

a) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ c) $\text{sen}\,\frac{10\pi}{3}$ e) sen 3816°

b) $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ d) sen 850°

6. Qual é o valor de:

a) sen 4π c) $\text{sen}\,\frac{19\pi}{3}$ e) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\text{sen}\,\frac{17\pi}{2}$ d) sen 1290°

7. Qual(is) das afirmações a seguir é (são) verdadeira(s) ou falsa(s)?

a) O valor de $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right)$, para *k* inteiro, é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\text{sen}\,(k \cdot \pi) = 0$, para *k* inteiro.

c) sen 1000° > 0.

d) O seno do número real 10 é negativo.

O enunciado a seguir refere-se aos exercícios de 8 a 12.

Determine o período e o conjunto imagem, construindo o gráfico de um período completo para cada função dada.

8. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2\,\text{sen}\,x$.

9. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\,\text{sen}\,x$.

10. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}\,3x$.

11. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 + \text{sen}\,x$.

12. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

13. Para quais valores reais de *t* temos $\text{sen}\,\alpha = \frac{t+1}{2}$, sendo α um número real qualquer?

14. O número real α é tal que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, com $\text{sen}\,\alpha = 2m - 3$. Quais são os possíveis valores reais de *m*?

15. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\,4x$.

a) Qual é o período de *f*?

b) Qual é o valor máximo que *f* assume?

16. Em uma pequena roda-gigante, a altura (em metros) em que um passageiro se encontra no instante *t* (em segundos), é dada pela lei:

$$h(t) = 6 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right), \text{ para } t \in [0, 270].$$

STOCKXPERT/IMAGE PLUS

a) No início do passeio, a que altura se encontra o passageiro?

b) A que altura se encontra o passageiro após 9 s do início? Use a aproximação $\sqrt{2} = 1{,}4$.

c) Qual é a altura mínima que esse passageiro atinge no passeio?

d) Qual é o tempo necessário para a roda-gigante dar uma volta completa?

e) Quantas voltas completas ocorrem no passeio?

Aplicações

A trigonometria, a roda-gigante e os fenômenos periódicos

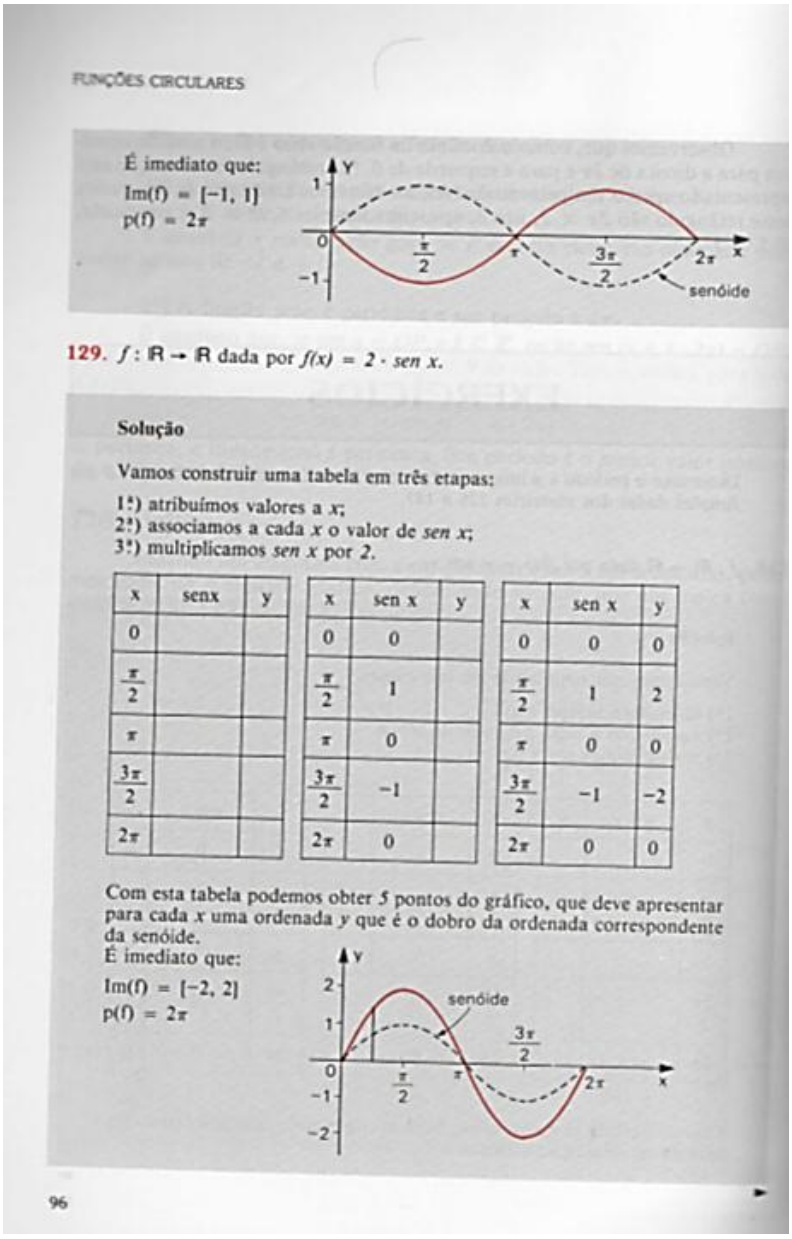
A roda-gigante é uma das atrações mais tradicionais de todo parque de diversões.

Imagine que a roda-gigante mostrada na figura 1 a seguir tenha 12 cadeiras igualmente distribuídas ao longo da circunferência, que mede 9 m de raio. Uma estrutura de ferro sustenta a roda-gigante a partir do seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro da roda ao solo é 10 m.

Figura 5.3

5.2 Livro 2 – Fundamentos de Matemática Elementar

O livro 3 de Iezzi (2004) apresenta uma postura bem tradicional diante das funções trigonométricas como definição, propriedades, exercícios, ciclo trigonométrico e representação geométrica das principais funções trigonométricas e também se abstendo de aplicações no cotidiano, entretantocom uma postura diferenciada em relação a Iezzi et al. (2004), devido resolver exercícios esboçando os gráficos com duas funções o que contribui de modo significativo em nosso trabalho.



FUNÇÕES CIRCULARES

É imediato que:
Im(f) = [−1, 1]
p(f) = 2π

129. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot sen\ x$.

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:
1º) atribuímos valores a x;
2º) associamos a cada x o valor de $sen\ x$;
3º) multiplicamos $sen\ x$ por 2.

x	senx	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	−1	
2π	0	

x	sen x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	−1	−2
2π	0	0

Com esta tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o dobro da ordenada correspondente da senóide.
É imediato que:
Im(f) = [−2, 2]
p(f) = 2π

96

Figura 5.4

130. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2 \cdot sen\ x$.

131. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\,sen\ x\,|$

Solução

Recordemos inicialmente que, para um dado número real a, temos:

$a \geqslant 0 \implies |a| = a$

$a < 0 \implies |a| = -a$

Aplicando esta definição, temos:

$\text{sen } x \geqslant 0 \implies |\text{sen } x| = \text{sen } x$

(quando $sen\ x \geqslant 0$, os gráficos $y = |sen\ x|$ e $y = sen\ x$ coincidem)

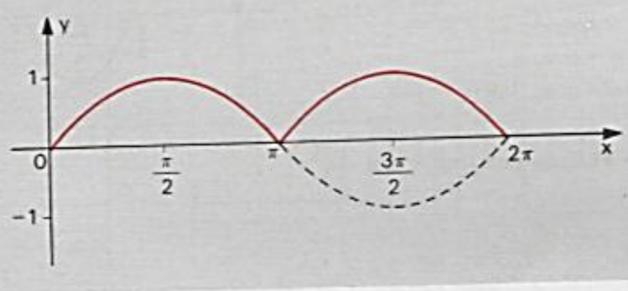
$\text{sen } x < 0 \implies |\text{sen } x| = -\text{sen } x$

(quando $sen\ x < 0$, os gráficos $y = |sen\ x|$ e $y = sen\ x$ são simétricos em relação ao eixo dos x).

É imediato que:

$\text{Im}(f) = [0, 1]$

$p(f) = \pi$



132. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |3 \cdot sen\ x|$.

133. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen\ 2x$.

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

1ª) atribuímos valores a $t = 2x$;

2ª) associamos a cada $2x$ o correspondente $sen\ 2x$;

3ª) calculamos x $\left(x = \dfrac{t}{2}\right)$.

Figura 5.5

136. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = -sen\ \frac{x}{3}$.

137. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 \cdot sen\ 4x$.

138. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + sen\ x$.

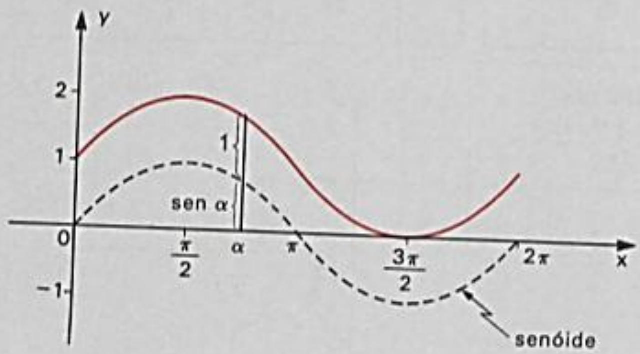
Solução

x	senx	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	−1	
2π	0	

x	sen x	y
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	−1	0
2π	0	1

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é igual ao seno de x mais uma unidade. Se cada seno sofre um acréscimo de 1, então a senóide sofre uma translação de uma unidade "para cima".
É imediato que:
$Im(f) = [0, 2]$
$p(f) = 2\pi$

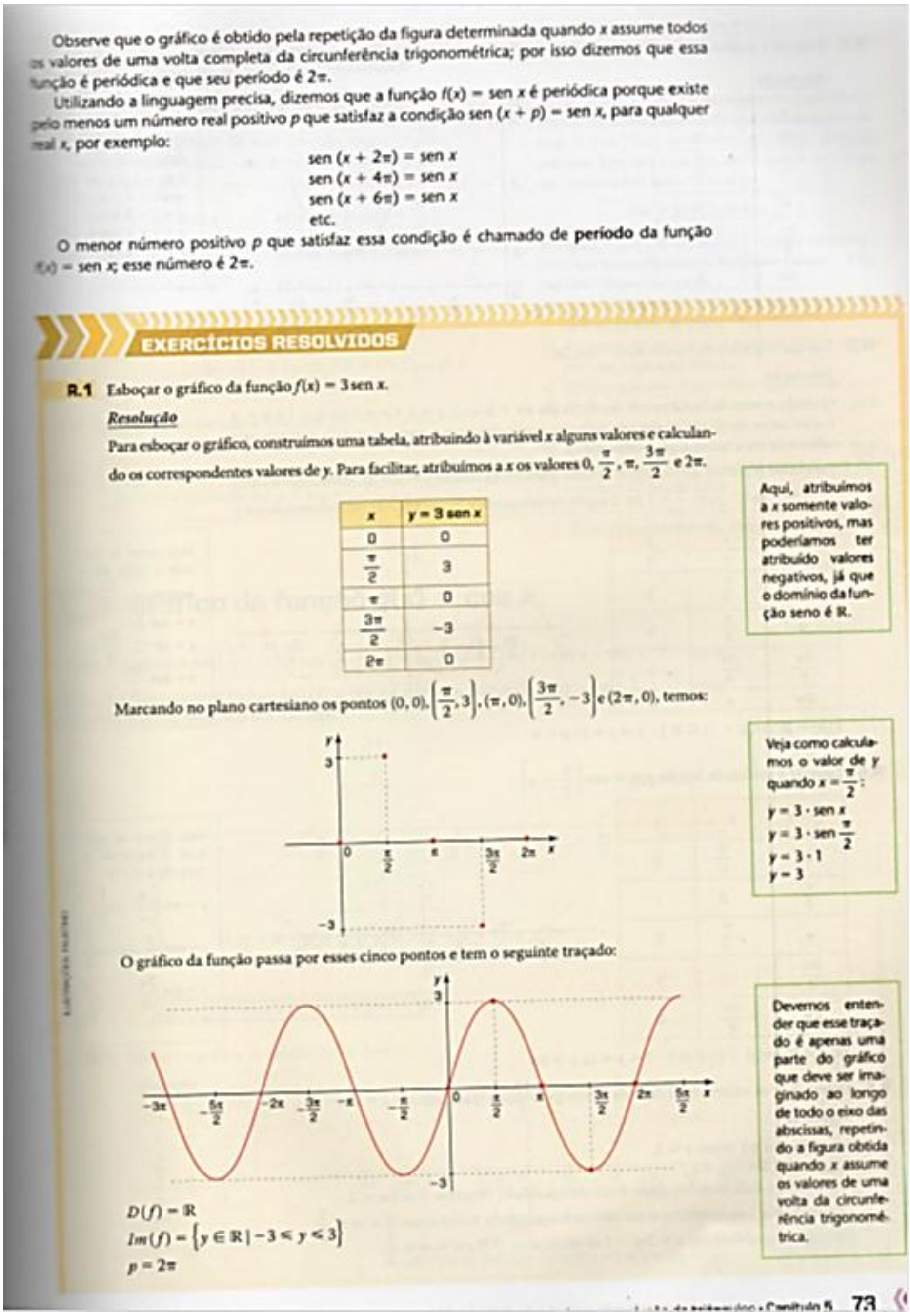


139. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2 + sen\ x$.

Figura 5.6

5.3 Livro 3 – Matemática Paiva

A abordagem de Paiva (2013) se assemelha as de Iezzi et al. (2010) diferindo na análise gráfica devido não apresentar funções em um mesmo gráfico, porém resolve uma quantidade de exercícios com a tentativa de ilustrar as variações como amplitude e período nas representações geométricas algo que faremos de modo mais detalhado e de modo organizado para melhor entendimento por parte do leitor.



Observe que o gráfico é obtido pela repetição da figura determinada quando x assume todos os valores de uma volta completa da circunferência trigonométrica; por isso dizemos que essa função é periódica e que seu período é 2π.

Utilizando a linguagem precisa, dizemos que a função $f(x) = \text{sen } x$ é periódica porque existe pelo menos um número real positivo p que satisfaz a condição $\text{sen }(x + p) = \text{sen } x$, para qualquer real x, por exemplo:

$$\text{sen }(x + 2\pi) = \text{sen } x$$
$$\text{sen }(x + 4\pi) = \text{sen } x$$
$$\text{sen }(x + 6\pi) = \text{sen } x$$
etc.

O menor número positivo p que satisfaz essa condição é chamado de **período** da função $f(x) = \text{sen } x$; esse número é 2π.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Esboçar o gráfico da função $f(x) = 3\text{sen } x$.

Resolução

Para esboçar o gráfico, construímos uma tabela, atribuindo à variável x alguns valores e calculando os correspondentes valores de y. Para facilitar, atribuímos a x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

x	$y = 3 \text{ sen } x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	3
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-3
2π	0

Aqui, atribuímos a x somente valores positivos, mas poderíamos ter atribuído valores negativos, já que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$.

Marcando no plano cartesiano os pontos $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$ e $(2\pi, 0)$, temos:

Veja como calculamos o valor de y quando $x = \frac{\pi}{2}$:

$y = 3 \cdot \text{sen } x$
$y = 3 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}$
$y = 3 \cdot 1$
$y = 3$

O gráfico da função passa por esses cinco pontos e tem o seguinte traçado:

Devemos entender que esse traçado é apenas uma parte do gráfico que deve ser imaginado ao longo de todo o eixo das abscissas, repetindo a figura obtida quando x assume os valores de uma volta da circunferência trigonométrica.

$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$
$p = 2\pi$

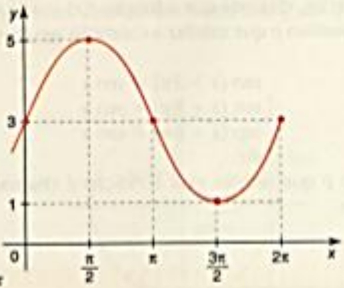
Capítulo 5 73

Figura 5.7

R.2 Esboçar o gráfico da função $g(x) = 3 + 2\,\text{sen}\,x$.

Resolução

x	y
0	3
$\frac{\pi}{2}$	5
π	3
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	3



Veja como se calcula o valor de y quando $x = \pi$:
$y = 3 + 2\,\text{sen}\,x$
$y = 3 + 2\,\text{sen}\,\pi$
$y = 3 + 2 \cdot 0$
$y = 3$

$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\}$; $p = 2\pi$

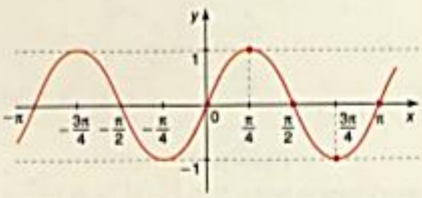
R.3 Esboçar o gráfico da função $h(x) = \text{sen}\,2x$.

Resolução

Quando o arco da função seno for da forma $ax + b$, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$ ou $a = 1$ e $b \neq 0$, construímos uma tabela com três colunas: a primeira para o arco $(ax + b)$, a segunda para valores de x e a terceira para valores de y.

Para obter o gráfico correspondente a um período da função $y = \text{sen}\,2x$, atribuímos ao arco $2x$ os valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π, a seguir determinamos os valores correspondentes de x e y.

$2x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0

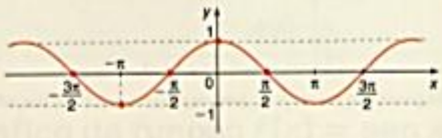


Veja como se calcula o valor de y quando $x = \frac{3\pi}{4}$:
$y = \text{sen}\,2x$
$y = \text{sen}\,(2 \cdot \frac{3\pi}{4})$
$y = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}$
$y = -1$

$D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$; $p = \pi$

R.4 Esboçar o gráfico da função $g(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$\frac{\pi}{2} - x$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	$-\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	-1
2π	$-\frac{3\pi}{2}$	0



Veja como se calcula o valor de y quando $x = -\pi$:
$y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (-\pi)\right)$
$y = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}$
$y = -1$

$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$; $p = 2\pi$

R.5 Determinar os valores reais de m de modo que exista a igualdade $\text{sen}\,x = 5m - 1$.

Resolução

Sabemos que $-1 \leq \text{sen}\,x \leq 1$.
Logo: $-1 \leq 5m - 1 \leq 1$
Somando 1 a cada membro dessa dupla desigualdade, obtemos: $0 \leq 5m \leq 2$
Dividindo por 5 os membros dessa última desigualdade, concluímos: $0 \leq m \leq \frac{2}{5}$
Portanto, a igualdade $\text{sen}\,x = 5m - 1$ só existe se $m \in \mathbb{R}$ e $0 \leq m \leq \frac{2}{5}$.

74 Capítulo 5 · Funções trigonométricas e resolução de triângulos

Figura 5.8

5.4 Livro 4 – Matemática Souza & Spinelli

O livro de Souza & Spinelli (1996) faz a abordagem que esperávamos nos livros didático com relação a análise gráfica, algo que também faremos com o auxílio do GeoGebra, inclusive a partir da representação geométrica fazendo as extrações de domínio, contradomínio, imagem e período das funções trigonométricas em exercícios resolvidos.

FUNÇÃO DO TIPO y = a sen bx + c OU y = a cos bx +

A partir do conhecimento dos gráficos básicos de $f(x) = \text{sen}\, x$ e $f(x) = \cos x$, pode estudar outros gráficos mais complexos de funções seno e cosseno, nos quais serão i duzidas variações nos períodos e nas imagens.

Associadas aos fenômenos físicos ondulatórios que são explicados por modelos base nessas funções, as modificações que serão introduzidas significarão alterações de freqüênc amplitude das ondas analisadas.

As funções, nesses casos, são do tipo:

$$y = a\cos bx + c \quad \text{ou}$$
$$y = a\,\text{sen}\, bx + c$$

e, para a construção de seus gráficos, devemos atribuir os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π ao ter **bx**, do qual se quer calcular o seno ou o cosseno.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R28 Construa o gráfico e dê período, domínio e imagem da função:

$$f(x) = 2\,\text{sen}\, 4x$$

Resolução:

Observe a tabela na qual foram atribuídos os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π a 4x.

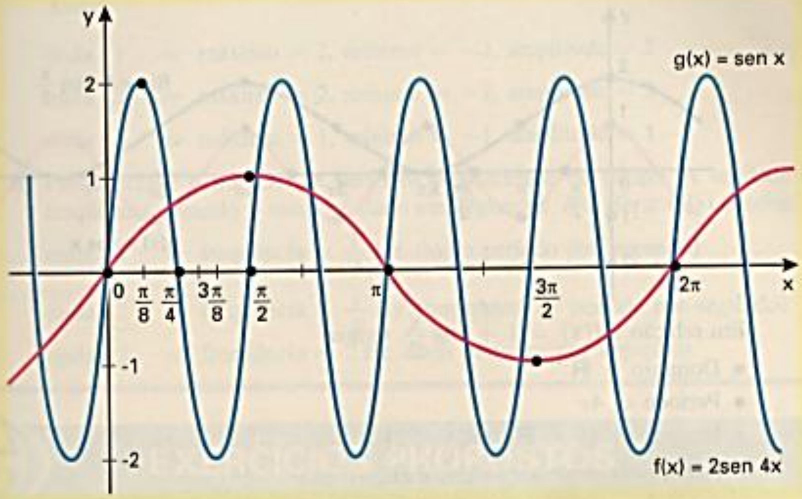
4x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
sen 4x	0	1	0	−1	0
2 sen 4x	0	2	0	−2	0

Os valores de **x** foram obtidos dividindo-se cada valor da linha anterior da tabela por 4. Os valores de sen 4x foram obtidos calculando-se os senos dos valores da primeira linha da tabela.

100

Figura 5.9

A seguir são mostrados, num mesmo sistema de eixos, os gráficos de $g(x) = \operatorname{sen} x$ e de $f(x) = 2 \operatorname{sen} 4x$.



Para $f(x) = 2 \operatorname{sen} 4x$, temos:

Período $= \frac{\pi}{2}$

Domínio $= \mathbb{R}$

Imagem $= \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\}$

Comparando os dois gráficos construídos, podemos notar que:

- a imagem de $f(x) = 2 \operatorname{sen} 4x$ é $[-2, 2]$, enquanto a de $g(x) = \operatorname{sen} x$ é $[-1, 1]$.
- o período de $f(x) = 2 \operatorname{sen} 4x$ é $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, enquanto o de $g(x) = \operatorname{sen} x$ é 2π.

R29 Construa o gráfico e dê domínio, período e imagem da função:

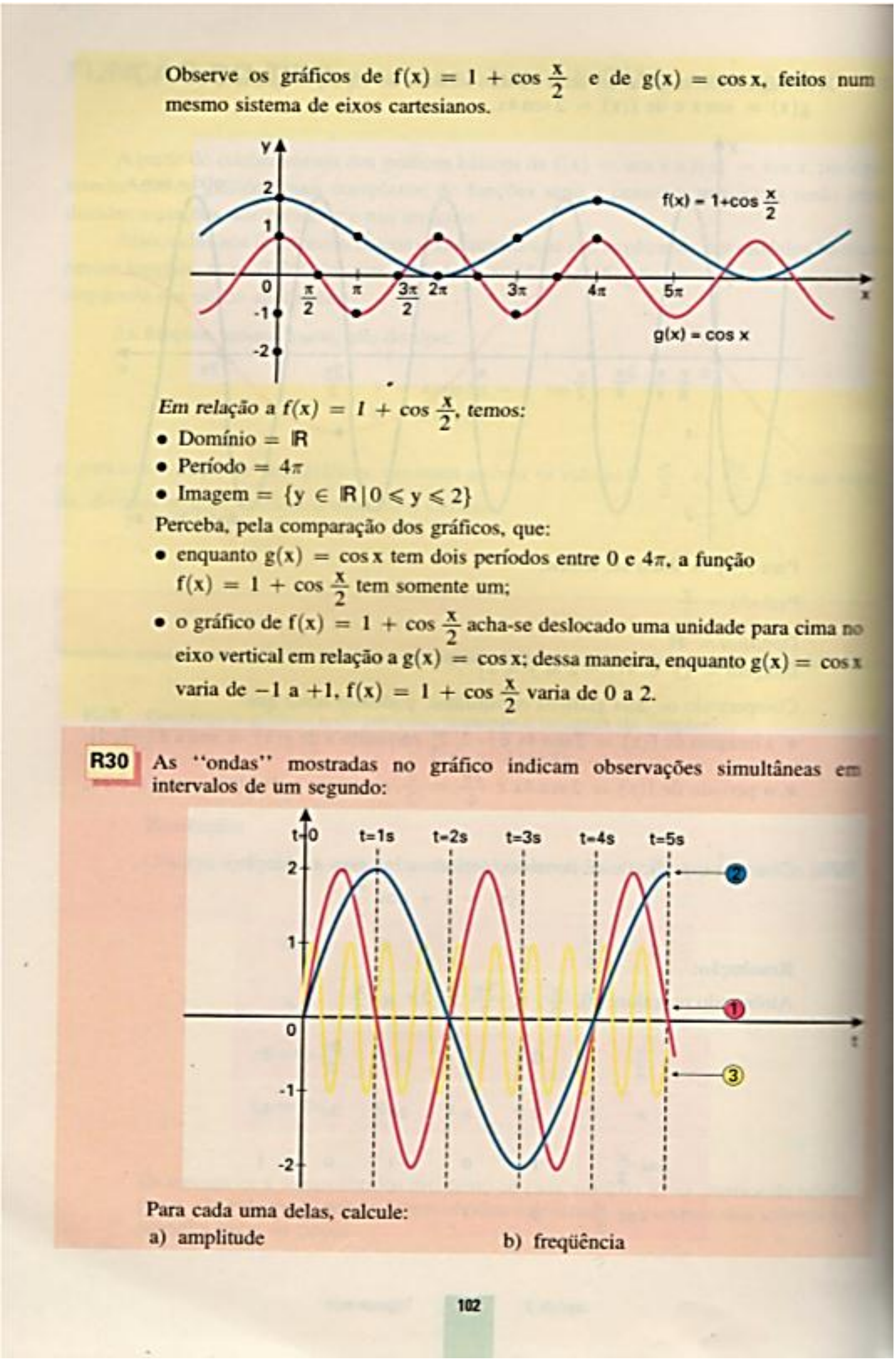
$$f(x) = 1 + \cos \frac{\pi}{2}$$

Resolução:

Atribuindo os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π a $\frac{x}{2}$:

$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$\cos \frac{x}{2}$	1	0	-1	0	1
$1 + \cos \frac{x}{2}$	2	1	0	1	2

Figura 6.0



Observe os gráficos de $f(x) = 1 + \cos \frac{x}{2}$ e de $g(x) = \cos x$, feitos num mesmo sistema de eixos cartesianos.

Em relação a $f(x) = 1 + \cos \frac{x}{2}$, *temos:*

- Domínio = $\mathbb{R}$
- Período = 4π
- Imagem = $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

Perceba, pela comparação dos gráficos, que:

- enquanto $g(x) = \cos x$ tem dois períodos entre 0 e 4π, a função $f(x) = 1 + \cos \frac{x}{2}$ tem somente um;
- o gráfico de $f(x) = 1 + \cos \frac{x}{2}$ acha-se deslocado uma unidade para cima no eixo vertical em relação a $g(x) = \cos x$; dessa maneira, enquanto $g(x) = \cos x$ varia de -1 a $+1$, $f(x) = 1 + \cos \frac{x}{2}$ varia de 0 a 2.

R30 As "ondas" mostradas no gráfico indicam observações simultâneas em intervalos de um segundo:

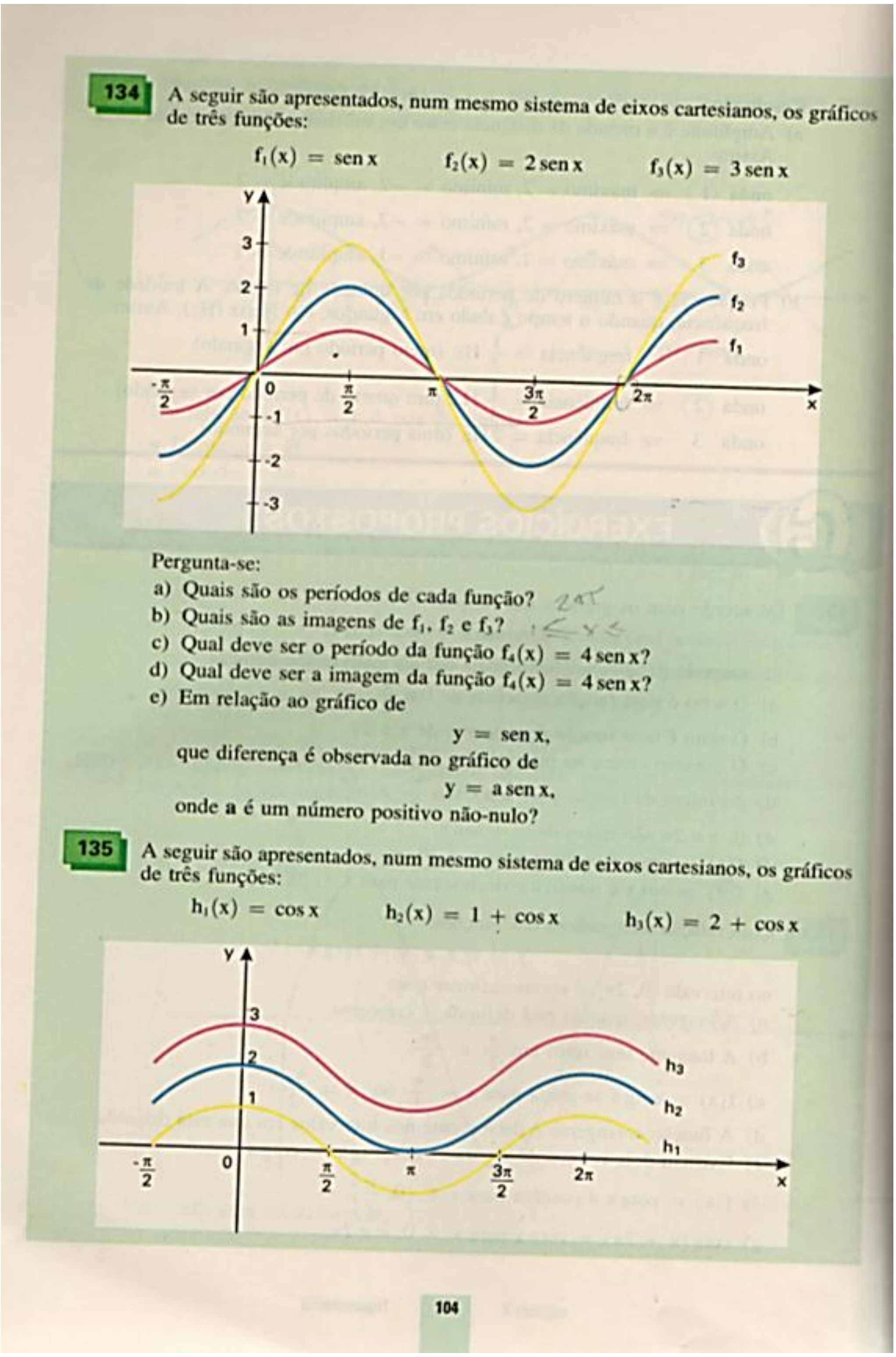
Para cada uma delas, calcule:

a) amplitude

b) freqüência

102

Figura 6.1



134 A seguir são apresentados, num mesmo sistema de eixos cartesianos, os gráficos de três funções:

$f_1(x) = \text{sen}\,x$ $\quad f_2(x) = 2\,\text{sen}\,x$ $\quad f_3(x) = 3\,\text{sen}\,x$

Pergunta-se:

a) Quais são os períodos de cada função? 2π

b) Quais são as imagens de f_1, f_2 e f_3?

c) Qual deve ser o período da função $f_4(x) = 4\,\text{sen}\,x$?

d) Qual deve ser a imagem da função $f_4(x) = 4\,\text{sen}\,x$?

e) Em relação ao gráfico de

$$y = \text{sen}\,x,$$

que diferença é observada no gráfico de

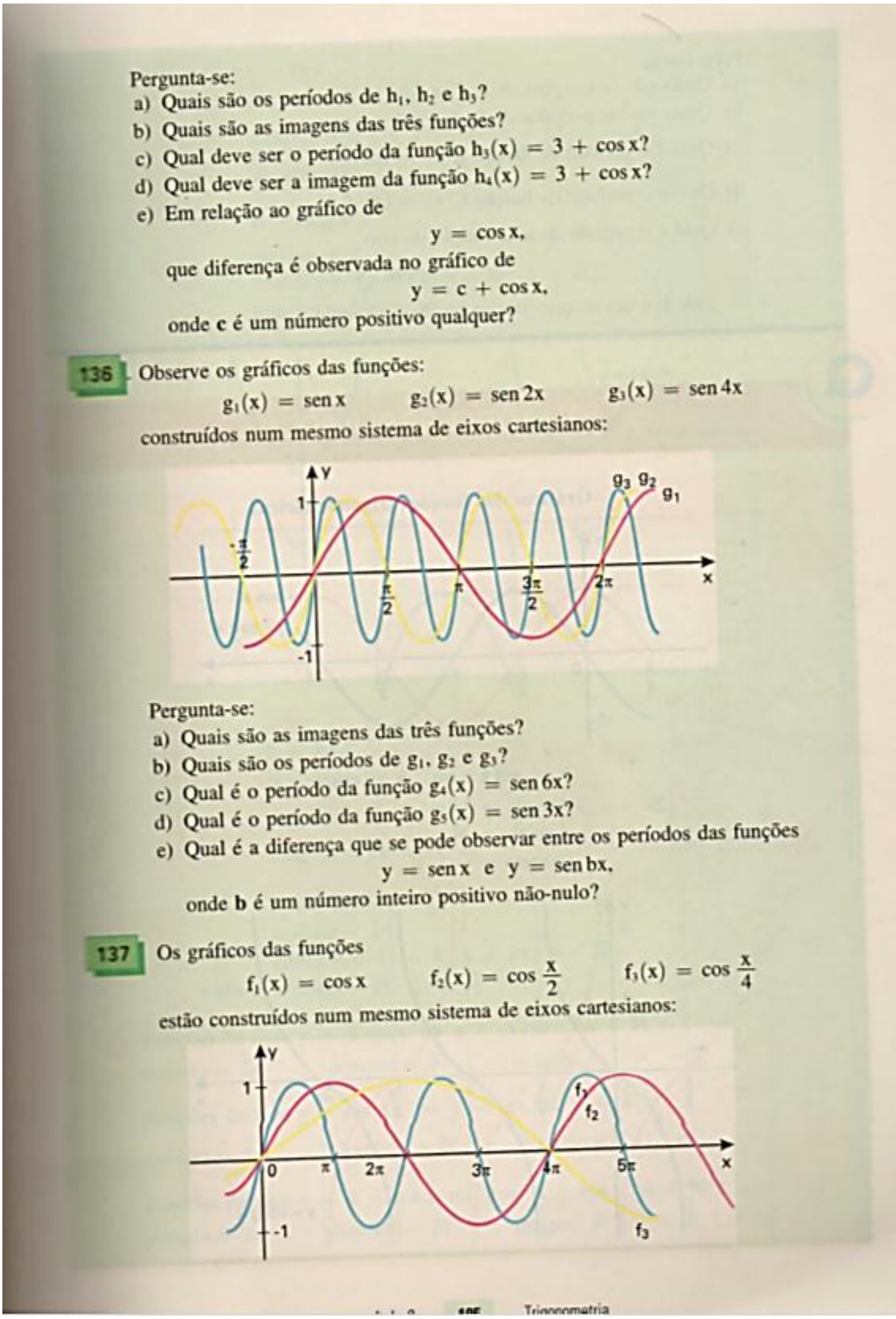
$$y = a\,\text{sen}\,x,$$

onde a é um número positivo não-nulo?

135 A seguir são apresentados, num mesmo sistema de eixos cartesianos, os gráficos de três funções:

$h_1(x) = \cos x$ $\quad h_2(x) = 1 + \cos x$ $\quad h_3(x) = 2 + \cos x$

Figura 6.2



Pergunta-se:

a) Quais são os períodos de h_1, h_2 e h_3?

b) Quais são as imagens das três funções?

c) Qual deve ser o período da função $h_3(x) = 3 + \cos x$?

d) Qual deve ser a imagem da função $h_4(x) = 3 + \cos x$?

e) Em relação ao gráfico de

$$y = \cos x,$$

que diferença é observada no gráfico de

$$y = c + \cos x,$$

onde **c** é um número positivo qualquer?

136 Observe os gráficos das funções:

$$g_1(x) = \operatorname{sen} x \qquad g_2(x) = \operatorname{sen} 2x \qquad g_3(x) = \operatorname{sen} 4x$$

construídos num mesmo sistema de eixos cartesianos:

Pergunta-se:

a) Quais são as imagens das três funções?

b) Quais são os períodos de g_1, g_2 e g_3?

c) Qual é o período da função $g_4(x) = \operatorname{sen} 6x$?

d) Qual é o período da função $g_5(x) = \operatorname{sen} 3x$?

e) Qual é a diferença que se pode observar entre os períodos das funções

$$y = \operatorname{sen} x \quad e \quad y = \operatorname{sen} bx,$$

onde **b** é um número inteiro positivo não-nulo?

137 Os gráficos das funções

$$f_1(x) = \cos x \qquad f_2(x) = \cos \frac{x}{2} \qquad f_3(x) = \cos \frac{x}{4}$$

estão construídos num mesmo sistema de eixos cartesianos:

Trigonometria

Figura 6.3

5.5 Considerações.

É importante observar que na maioria das vezes, o livro didático representa a principal ferramenta para a aprendizagem dos alunos na sala de aula. Para ampliarmos a nossa visão sobre o ensino de funções trigonométricas, decidimos fazer uma análise em alguns dos livros, estes que já foram ou são trabalhados em turmas de nosso convívio, lembro bem do livro Antônio Bezerraque foi meu auxiliar em muitas noites de estudo. Mas como em Bezerra (1976), muitos dos livros de hoje ainda trazem uma linguagem muito técnica e sem aplicações, isso vai de encontra aos PCN+(2002) e também ao Programa Nacional do Livro Didático para o ensino médio(PNLEM).

> [...] a própria complexidade das técnicas mais antigas para escrever e contar requeria que estas fossem ensinadas sistematicamente através de métodos padronizados. Todas as culturas que dispunham de uma escrita própria mais cedo ou mais tarde começaram a padronizar e a institucionalizar o seu ensino para os jovens (SCHUBRING, 2003, p. 19).

Considerando a nossa análise, que foi baseada diretamente em verificar a introdução do conteúdo a abordagem metodológica adotada e os exercícios propostos, verificamos que dos 4 livros abordados , três deles dão ênfase às interpretações geométricas, sem antes trabalhar aplicações e contextualizações; somente o livro de IEZZI et al (2010) comenta algumas aplicações e faz contextualizações em alguns exercícios; no entanto o livro Souza & Spinelli(1996) faz uma abordagem técnica mas bem organizada graficamente, deixando a desejar somente nas aplicações e contextualizações dos exercícios.

6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS (FUNÇÃO SENO) PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

O desenvolvimento desta sequência didática é uma sugestão para que professores do ensino médio possam utilizá-la em suas aulas; no entanto essa sequência didática pode ser desenvolvida em quadro branco através de aula expositiva, mas faremos a utilização do software GeoGebra para melhor compreensão e interesse dos alunos nas aulas; assim como afirma SILVA, 2013,p. 52, o *software* GeoGebra tem o papel de possibilitar as explorações inicias do problema, permitindo que sejam traçados um grande número de gráficos, e a interpretação das conclusões, articulando diferentes representações.

Faremos a cada momento a exposição de um gráfico com duas funções seno, de modo que a função f(x) = sen(x) será considerada como uma função padrão, ou seja, aparecerá em todos os gráficos pelo simples fato de ser uma das primeiras funções utilizadas em sala de aula, pois RIBEIRO, 2011, p. 19, comenta que ao construir o gráfico o aluno facilmente visualizará essas ideias, o seu período, sua imagem e seu domínio. E a partir desse gráfico, ele poderá construir outros mais elaborados como, por exemplo, da forma f(x) = a + b . sen (cx +d).

> [...] através da introdução de uma ferramenta computacional na dinâmica de sala de aula, enfatizando como pode ser usada nas aulas de Funções Trigonométricas, principalmente no que se refere à evolução da assimilação do aprendizado quando se faz comparações algébricas, as quais são acompanhadas geometricamente e vice-versa pelo *software* (SILVA, 2013).

De acordo com SILVA, 2013, os professores apresentam dificuldades em trabalhar este assunto porque não tiveram contato em sua formação básica ou pelo fato de terem visto só na graduação, no entanto apresentam familiaridade com a tecnologia, mas a maioria prefere ministrar aulas de forma tradicionais.

A pesquisa realizada por OLIVEIRA, 2014, indica os sites Portal EducarBrasil e Portal do Professor, onde este último disponibiliza planos de aulas para que os professores possam ter acesso a materiais de apoio, ter notícias de educação, além de poder contribuir com planos de aulas e também participar de cursos.

Assim como no Portal do Professor faremos a sugestão de um plano de aula, mas utilizaremos somente a função seno com o uso do *software* GeoGebra para facilitar o entendimento e o interesse por parte dos aluno durante as aulas, de modo que a função seno f(x) = sen(x) seja utilizada para fazer comparação com funções da forma f(x) = a + b . sen (cx +d), para todo a, b, c, d $\in \mathbb{R}$.

Entretanto, após a análise gráfica das funções os alunos deverão fazer uma atividade para responder há cinco perguntas que no final da atividade os ajudarão a perceber, nas funções do tipo f(x) = a + b . sen (cx +d), para todo a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, quais as variações que a, b, c, e d produzem na representação gráfica, ao final destas análises comparativas e a partir das hipóteses dos alunos, definiremos o que representam os valores a, b, c e d nas funções seno.

PLANO DE AULA

1. IDENTIFICAÇÃO

- Disciplina Matemática
- Conteúdo: Funções trigonométricas
- Conteúdo específico: Representação geométrica da função seno.

2. Carga Horária: 5 h/a.

3. Pré-requisitos

- Aritmética básica.
- Localização de pontos no sistema de coordenadas do plano cartesiano.
- Conhecimento de trigonometria de ângulos notáveis inclusive do círculo trigonométrico.
- Identificar domínio, imagem E Período de funções.

4.OBJETIVO

Compreender o comportamento, as propriedades e a variação de parâmetros da função trigonométrica seno a partir da comparação com a função f(x) = sen(x) com o auxílio do geogebra.

5. METODOLOGIA DE ENSINO

Aulas expositivas/dialogadas com a utilização de quadro-branco, uso de computador e data-show para utilização do software geogebra.

Funções Trigonométricas

Objetivo: Compreender o comportamento, as propriedades e a variação de parâmetros da função trigonométrica seno a partir da comparação com a função f(x) = sen(x) com o auxílio do Geogebra.

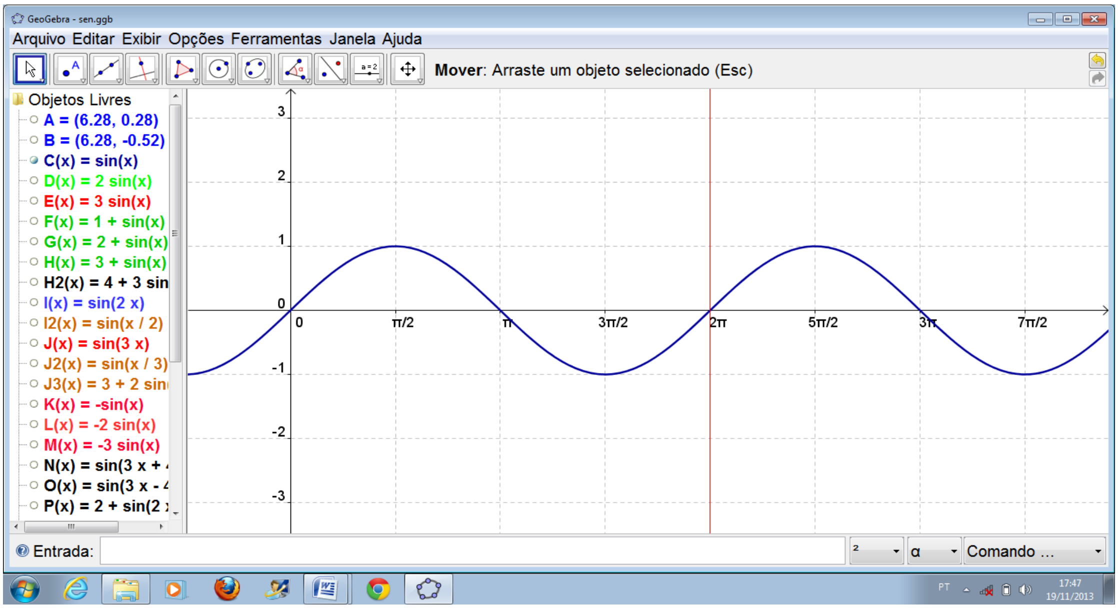
As funções trigonométricas são periódicas, isto é repetem seus resultados a cada intervalo; isso pode ser percebido pelos gráficos dessas funções, nos quais é observada uma série de simetrias. Essa característica de periodicidade torna o estudo das funções trigonométricas muito importante. Diversos conceitos físicos podem ser observados como os fenômenos das marés, os movimentos ondulatórios, frequências cardíacas, onde os estudos destes conceitos recorrem às funções trigonométricas.

Agora faremos primeiro a análise desses comportamentos juntamente com a variação de parâmetros para a partir daí construirmos as propriedades de uma forma mais didática.

Professor, neste primeiro momento nossa sugestão é que você construa uma sequência de funções seno aumentando seu grau de dificuldade e complexidade conforme a sequência abaixo.

Nosso objetivo neste primeiro momento é mostrar o comportamento da função $f(x) = sen(x)$ até a função seno ficar da forma $f(x) = a + b \, . \, sen\,(cx + d)$.

1. Representação geométrica da função seno definida como C(x) = sen(x) = 1.sen(x).



Neste momento mostre no sistema ortogonal OXY o comportamento da função seno definida como C(x) = sen(x), que esta função é contínua em todo seu domínio, e também que o eixo das abscissas é o eixo central desta função C(x); e que será feita uma comparação usando um período desta função (período = 2π), na figura acima este período está entre o eixo das ordenadas e um eixo vertical e paralelo ao das ordenadas na cor vermelha. E ainda que o limite superior atingido pela função é uma unidade acima do eixo central e o limite inferior atingido pela função é uma unidade abaixo do eixo central.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função C(x)?

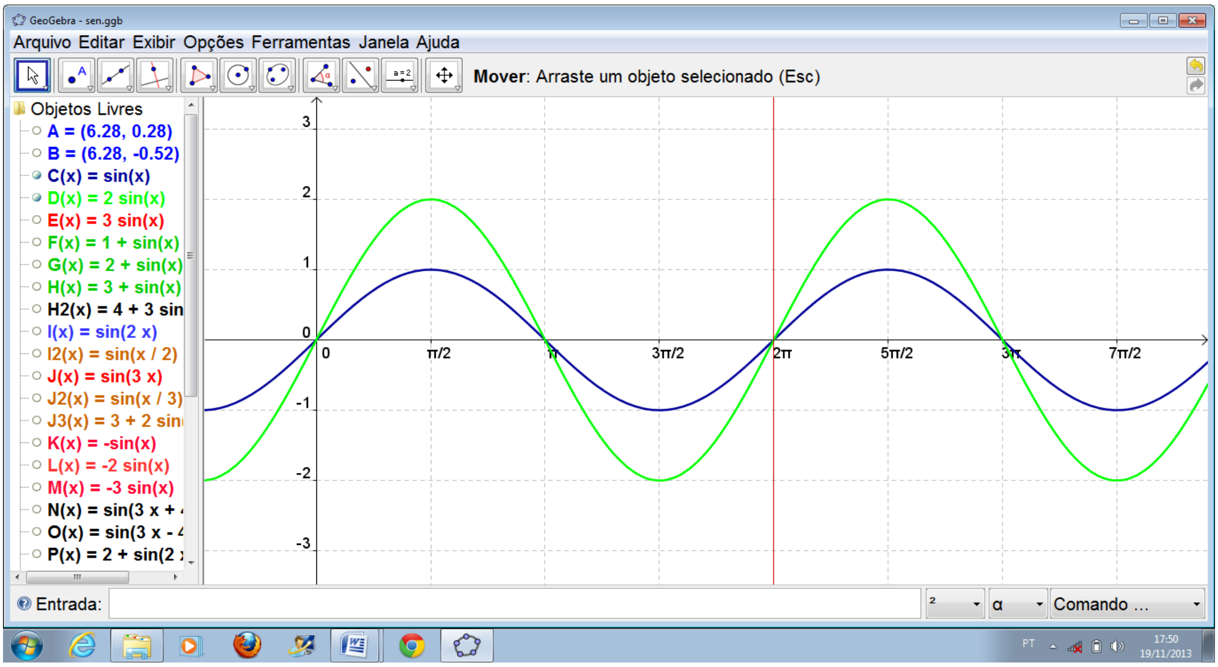
b) O eixo central da função C(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função C(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

2. Representação geométrica da função seno definida como D(x) = 2 sen(x).



Neste momento mostre o que acontece ao transformar a função de C(x) = sen(x) em D(x) = 2sen(x); ou seja, que o limite superior é duas unidades acima do eixo central e o limite inferior é também duas unidades abaixo do eixo central.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função D(x)?

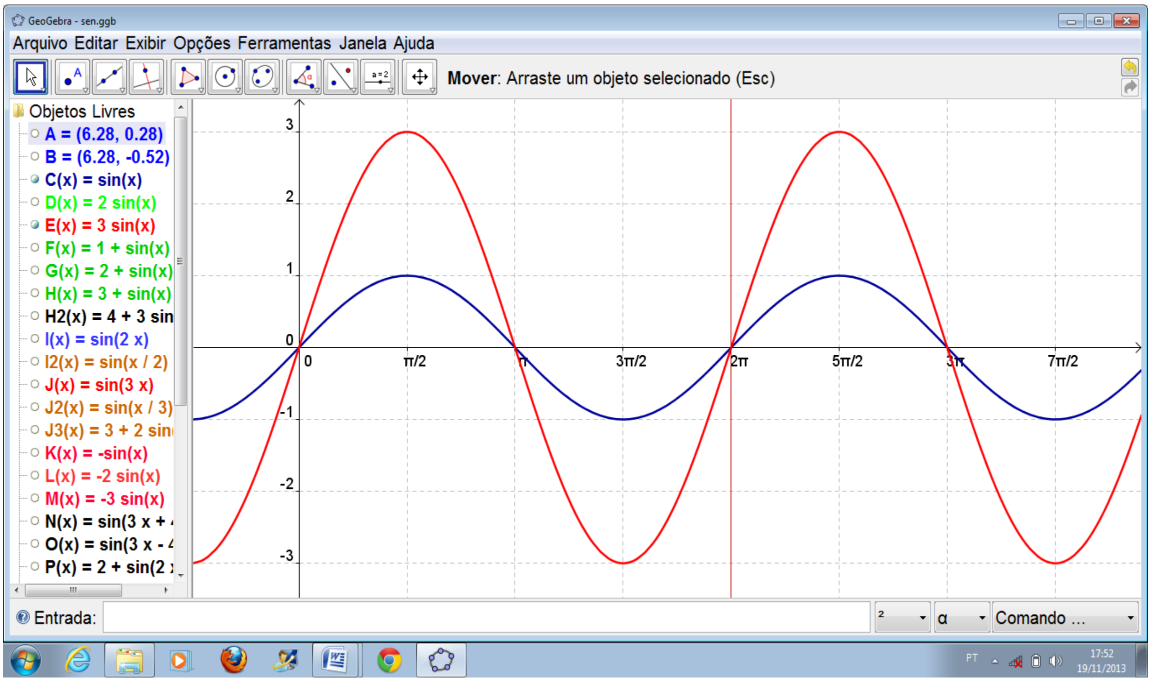
b) O eixo central da função D(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função D(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

3. Representação geométrica da função seno definida como E(x) = 3 sen(x).



Neste momento mostre o que acontece ao transformar a função de C(x) = sen(x) em E(x) = 3sen(x); ou seja, que o limite superior é três unidades acima do eixo central e o limite inferior é também três unidades abaixo do eixo central.

A ideia é que o aluno comece a perceber que o número (coeficiente) que multiplica sen(x) é o valor que determinará quanto a função se deslocará do eixo central para cima e para baixo, isto é, o valor do limite superior e o valor do limite inferior.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função E(x)?

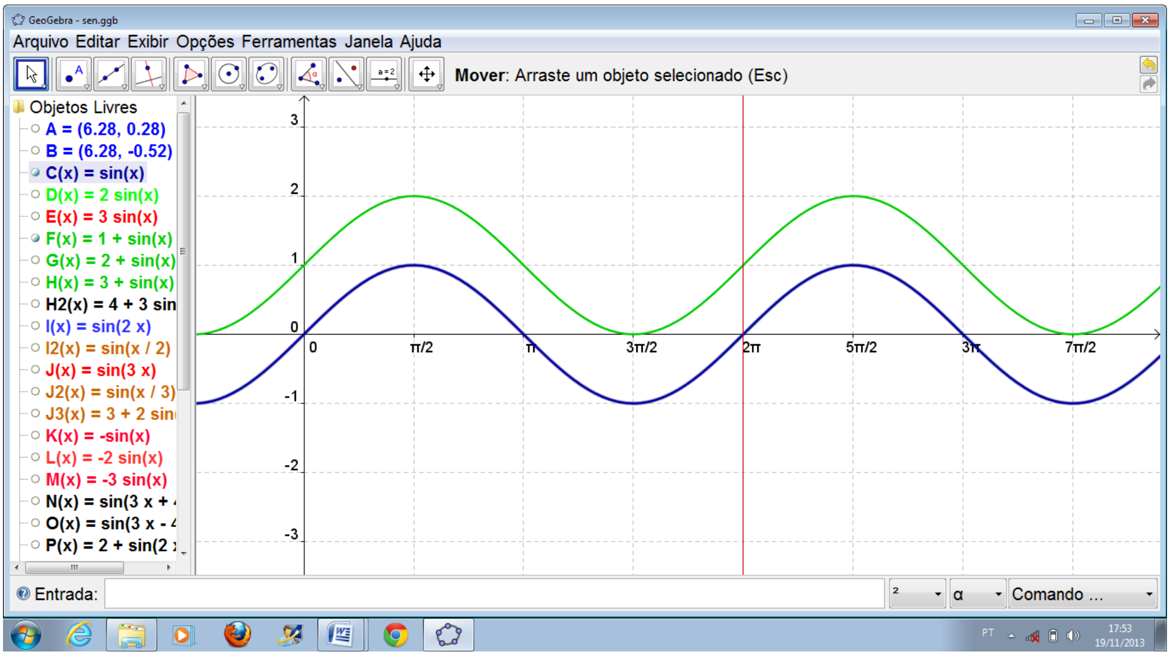
b) O eixo central da função E(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função E(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

4. Representação geométrica da função seno definida como F(x) = 1 + sen(x) = 1 + 1.sen(x)



Agora mostre ao aluno que houve um deslocamento da função, ou seja, o eixo central que coincidia com o eixo das abscissas passando pelo 0 (zero) no eixo das ordenadas, agora o eixo central é paralelo ao eixo das abscissas e passa pelo 1 (um) no eixo das ordenadas, no entanto, o limite superior deslocou-se uma unidade para cima do eixo central e o limite inferior deslocou-se uma unidade para baixo do eixo central.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função F(x)?

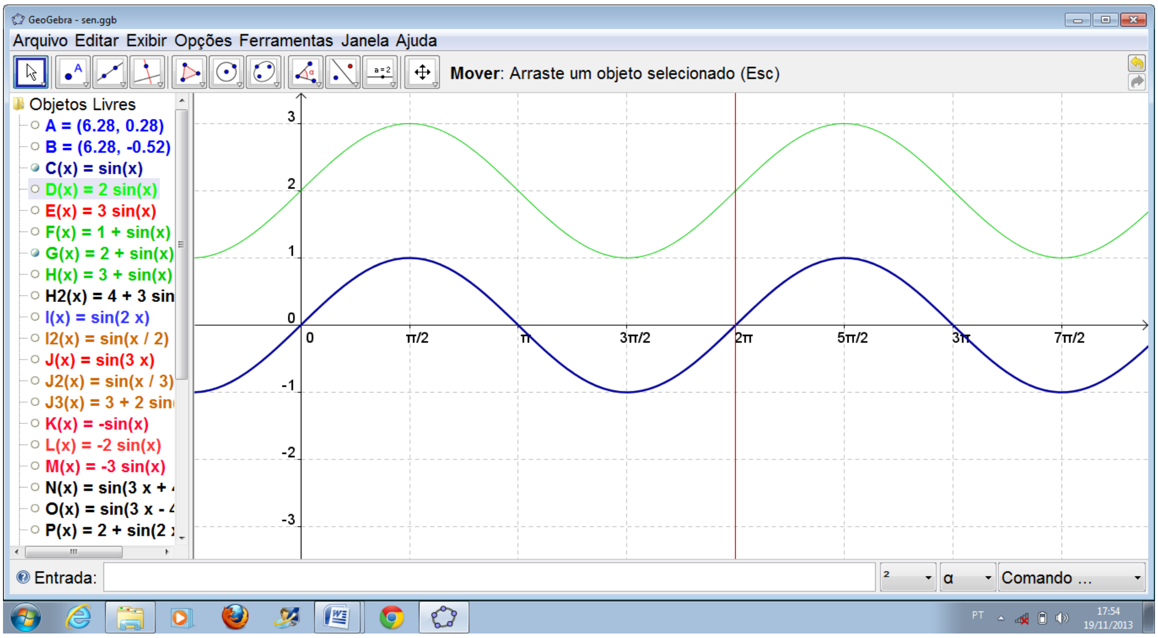
b) O eixo central da função F(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função F(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

5. Representação geométrica da função seno definida como G(x) = 2 + sen(x) = 2 + 1.sen(x)



Agora mostre que houve um deslocamento da função, ou seja, o eixo central que coincidia com o eixo das abscissas passando pelo 0 (zero) no eixo das ordenadas, agora o eixo central é paralelo ao eixo das abscissas e passa pelo 2 (dois) no eixo das ordenadas, no entanto, o limite superior deslocou-se duas unidades para cima do eixo central e o limite inferior deslocou-se duas unidades para baixo do eixo central.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função G(x)?

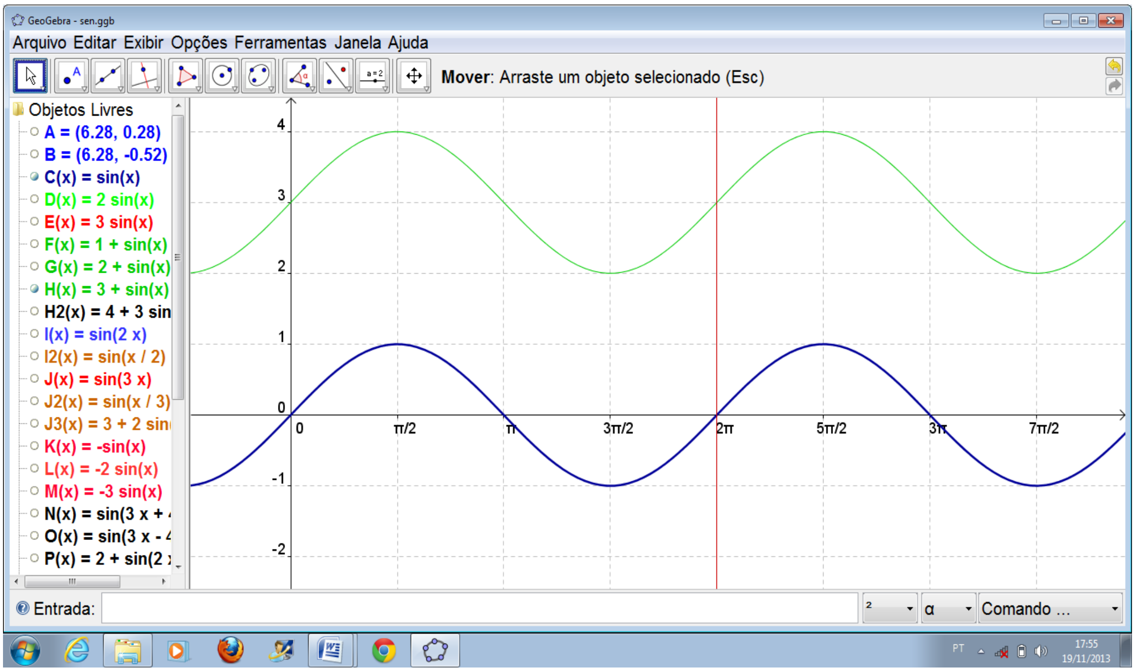
b) O eixo central da função G(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função G(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

6. Representação geométrica da função seno definida como H(x) = 3 + sen(x) = 3 + 1.sen(x)



Agora mostre que houve um deslocamento da função, ou seja, o eixo central que coincidia com o eixo das abscissas passando pelo 0 (zero) no eixo das ordenadas, agora o eixo central é paralelo ao eixo das abscissas e passa pelo 3 (três) no eixo das ordenadas, no entanto, o limite superior deslocou-se três unidades para cima do eixo central e o limite inferior deslocou-se três unidades para baixo do eixo central.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função H(x)?

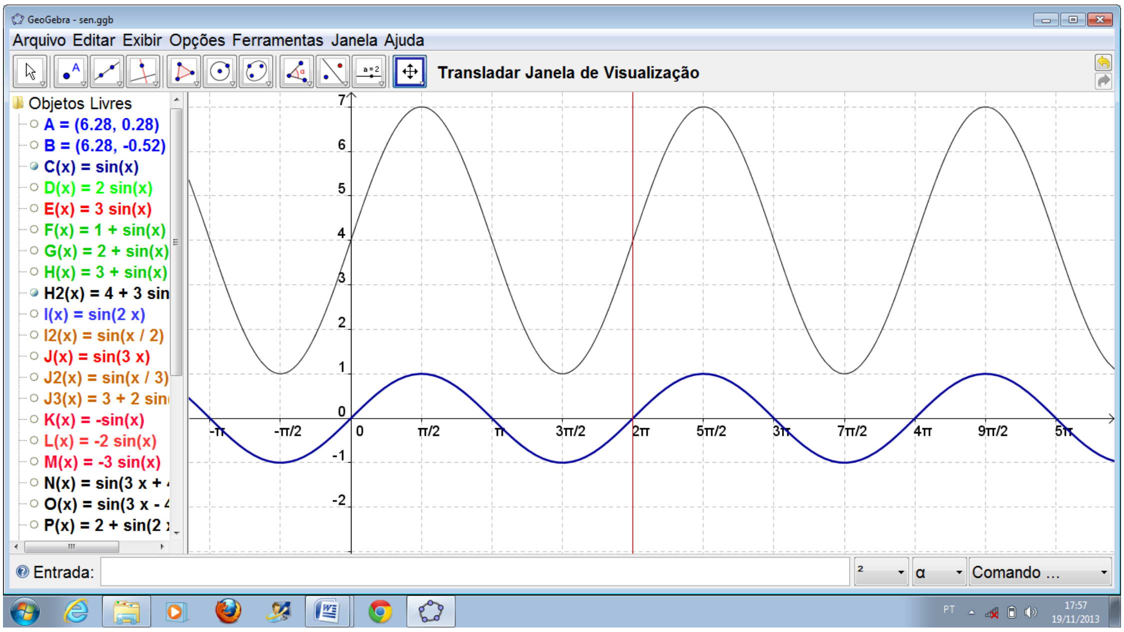
b) O eixo central da função H(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função H(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

7. Representação geométrica da função seno definida como H2(x) = 4 + 3 sen (x).



Esta função serve para mostrar uma forma mais complexa, onde o eixo central é a reta paralela ao eixo das abscissas que passa pelo 4 (quatro) no eixo das ordenadas e o limite superior deslocou-se quatro unidades para cima do eixo central e o limite inferior deslocou-se quatro unidades para baixo do eixo central. Este é o momento para mostrar que até o momento vimos as funções seno até a forma f(x) = a + b sen(x), ou seja, a função

C(x) = sen(x), está na forma C(x) = 0 + 1 sen (x)

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função H2(x)?

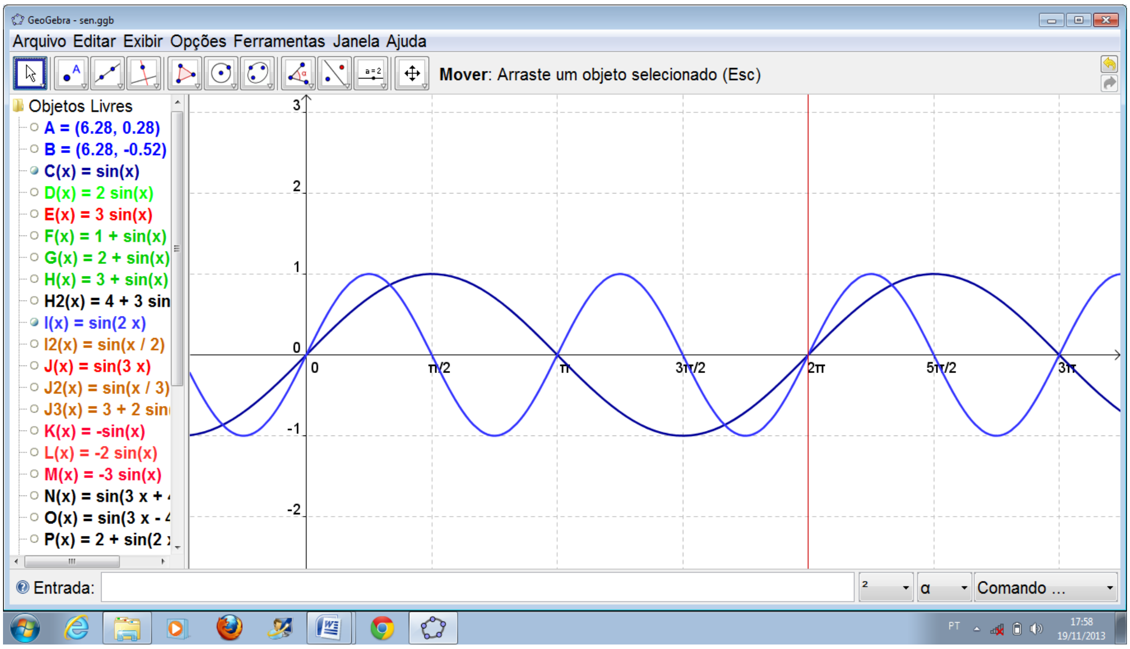
b) O eixo central da função H2(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função H2(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

8. Representação geométrica da função seno definida como I(x) = sen (2x).



Agora mostre aos alunos que onde aparecia um período da função C(x) = sen(x) apareceram dois períodos, pois a função teve uma mudança no tamanho do seu período, ou seja, a função agora é da forma I(x) = sen (2x).

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função I(x)?

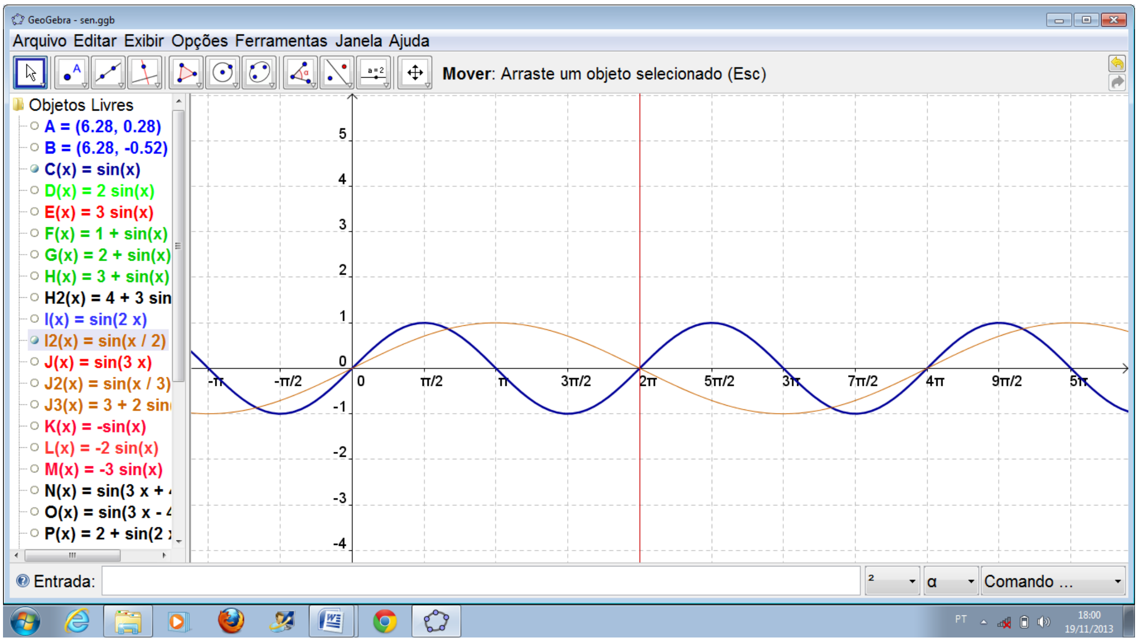
b) O eixo central da função I(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função I(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

9. Representação geométrica da função seno definida como I2(x) = sen (x/2).



Agora mostre aos alunos que onde aparecia um período da função C(x) = sen(x) só aparece a metade do período, pois a função teve uma mudança no tamanho do seu período em relação a função C(x), pois agora a função é I2(x) = sen (x/2).

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função I2(x)?

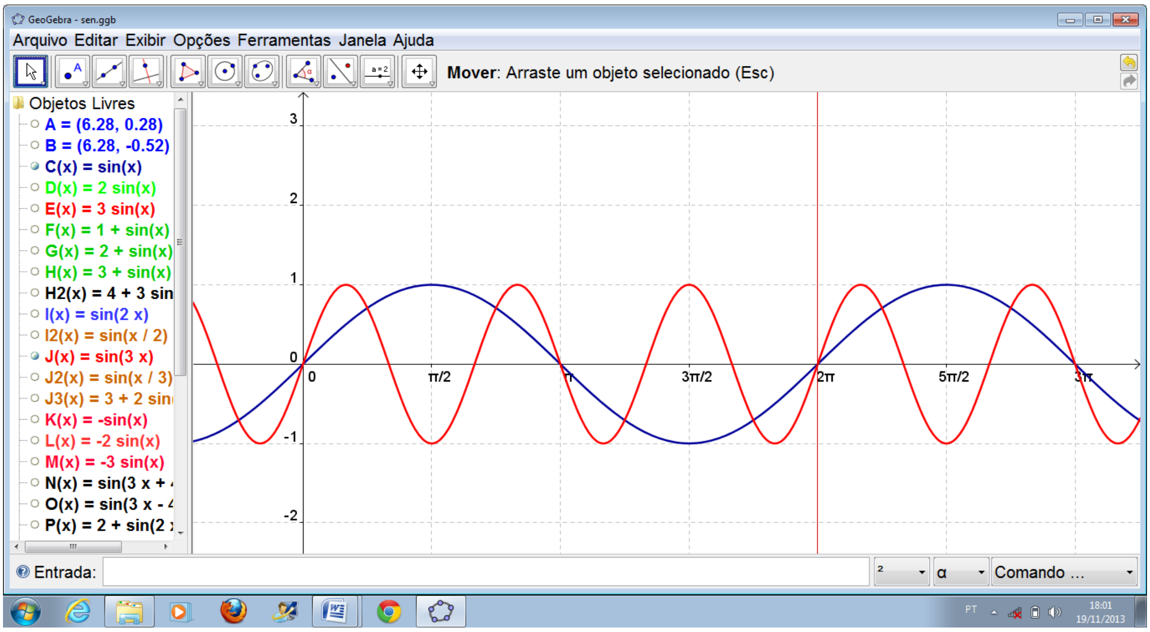
b) O eixo central da função I2(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função I2(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

10. Representação geométrica da função seno definida como J(x) = sen (3x).



Agora mostre aos alunos que onde aparecia um período da função C(x) = sen(x) apareceram três períodos, pois a função teve uma mudança no tamanho do seu período, ou seja, a função agora é da forma J(x) = sen (3x).

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função J(x)?

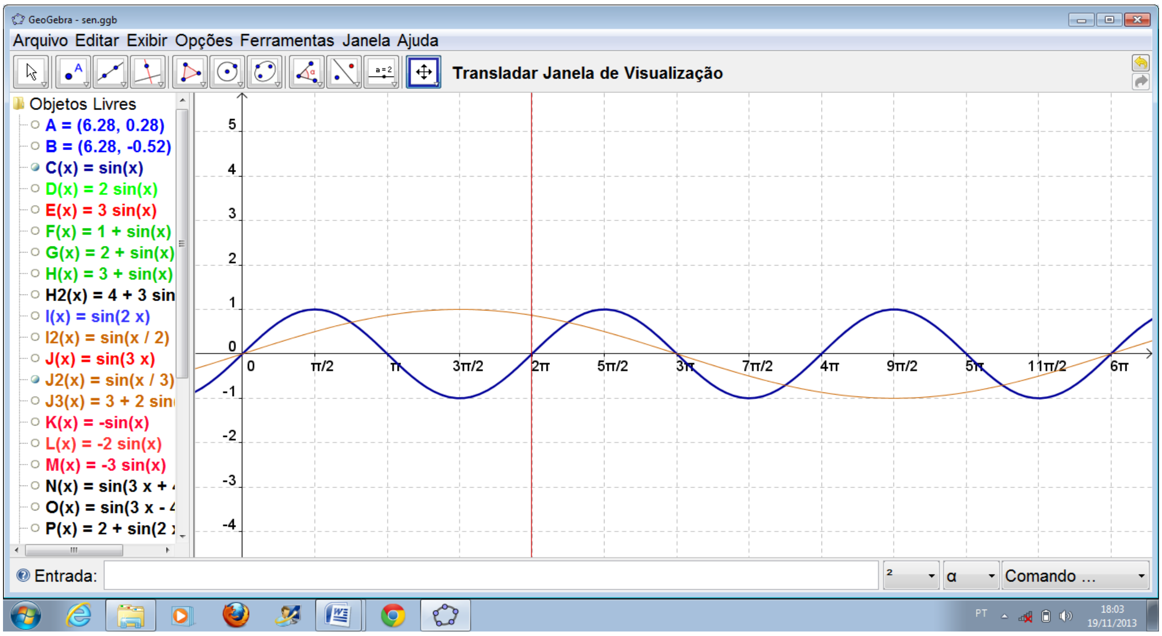
b) O eixo central da função J(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função J(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

11. Representação geométrica da função seno definida como J2(x) = sen (x/3).



Agora mostre aos alunos que onde aparecia um período da função C(x) = sen(x) só aparece a terça parte do período, pois a função teve uma mudança no tamanho do seu período em relação a função C(x), pois agora a função é J2(x) = sen (x/3).

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função J2(x)?

b) O eixo central da função J2(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função J2(x)?

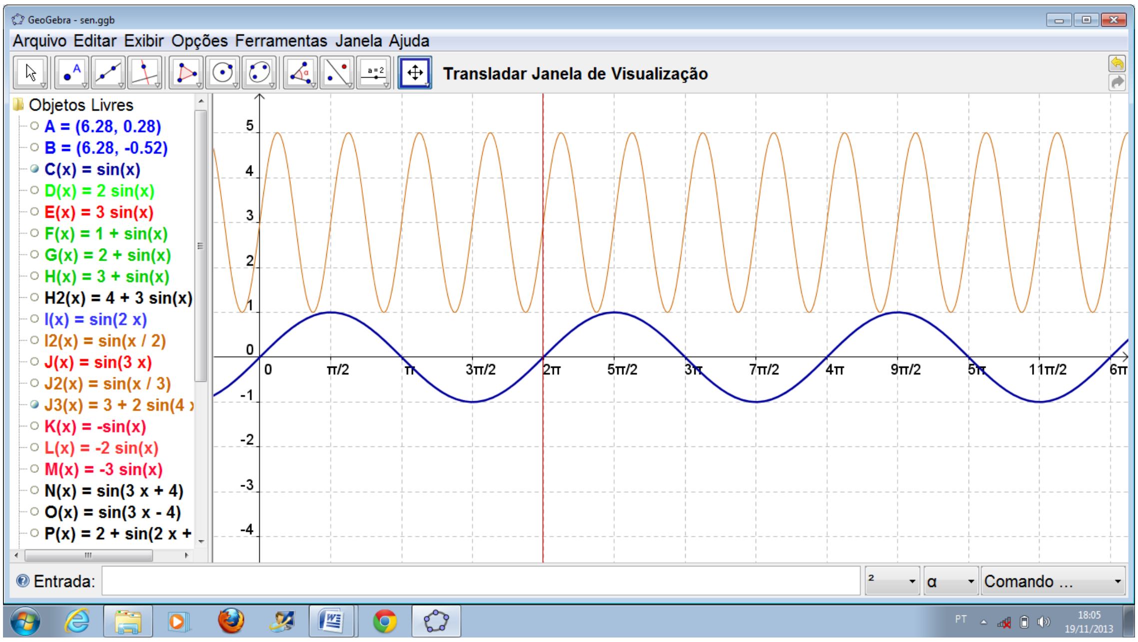
d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

Resalte também que:

- Se o coeficiente de x for inteiro é como se os períodos fossem comprimidos em relação a função C(x).
- Se o coeficiente de x for racional (fracionário ou decimal) é como se os períodos fossem alongados em relação a função C(x).

12. Representação geométrica da função seno definida como J3(x) = 3 + 2sen(4x).



Neste momento é importante mostrar que a função está na forma f(x) = a + b sen(cx).

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função J3(x)?

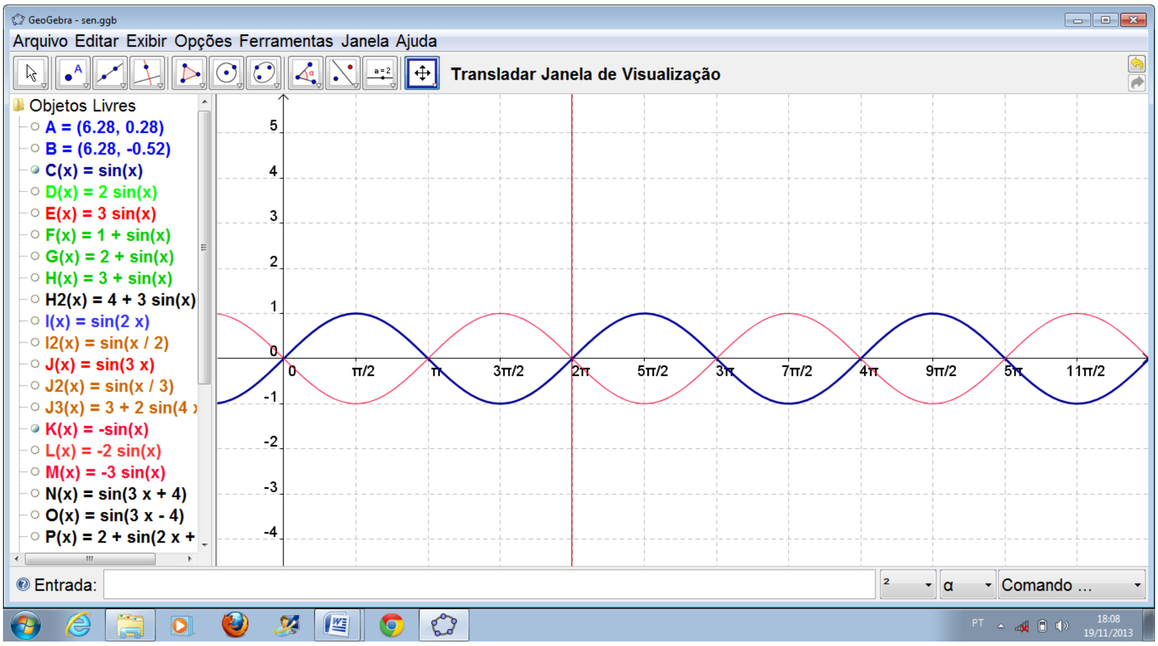
b) O eixo central da função J3(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função J3(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

13. Representação geométrica da função seno definida como K(x) = - sen(x).



Neste momento a função K(x) é o oposto da função C(x), ou seja, analisando a função C(x) na interseção com o eixo das ordenadas, é fácil observar que este ponto de interseção pertence também ao eixo central da função. No entanto, até aqui já vimos a função na forma f(x) = a + b sen(cx), onde o sinal de b era até então positivo e a função se deslocava do eixo central em direção do limite superior, mas, quando b assume valores negativos a função continua se deslocando do eixo central mas em direção do limite inferior.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função K(x)?

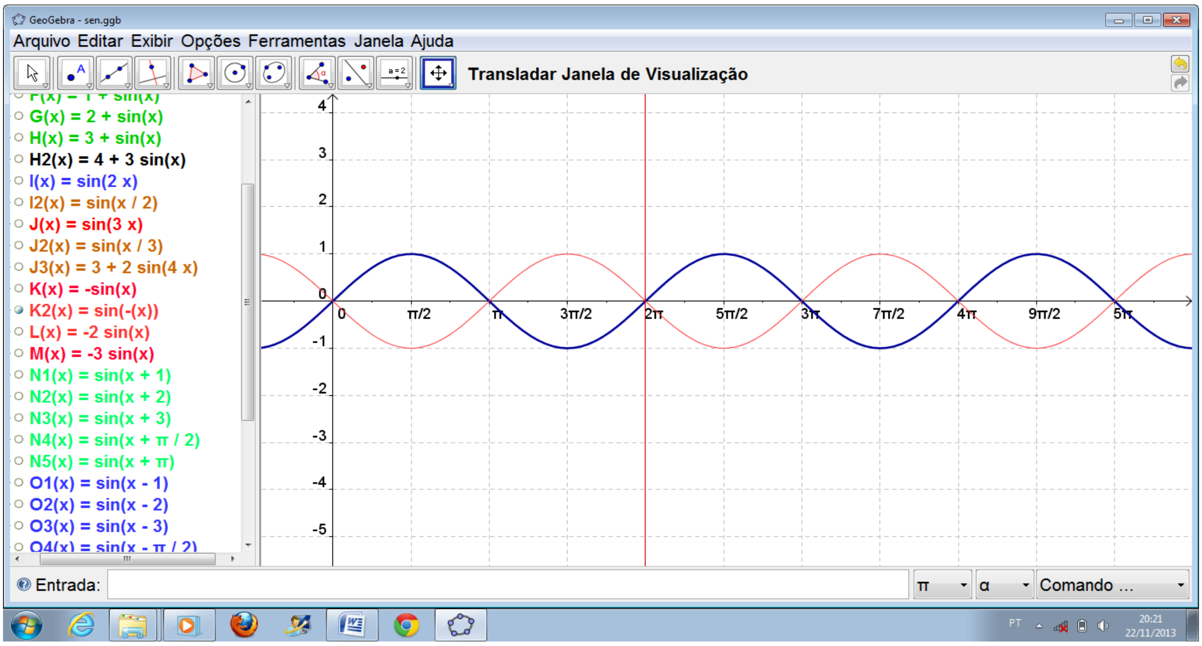
b) O eixo central da função K(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função K(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

14. Representação geométrica da função seno definida como K2(x) = sen(- x).



Agora mostre geometricamente que – sen (x) = sen (– x).

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função K2(x)?

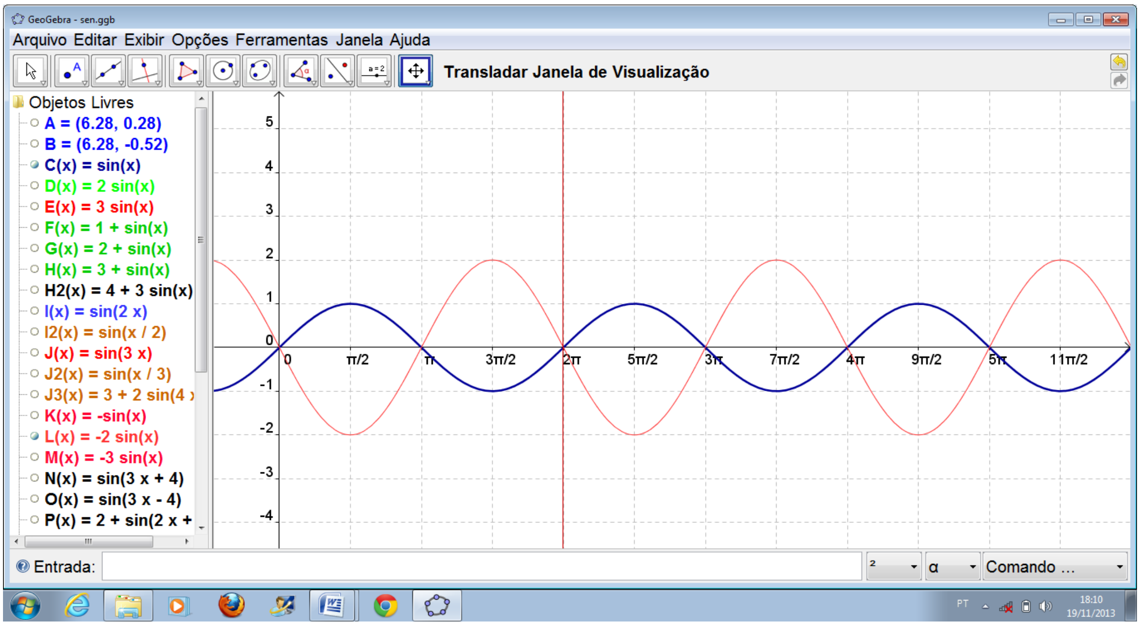
b) O eixo central da função K(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função K2(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

15. Representação geométrica da função seno definida como L(x) = -2 sen(x).



A função L(x) parte do ponto de interseção em direção ao limite inferior deslocando-se duas unidades para baixo até o limite inferior em relação ao eixo central e duas unidades para cima até o limite superior em relação ao eixo central.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função L(x)?

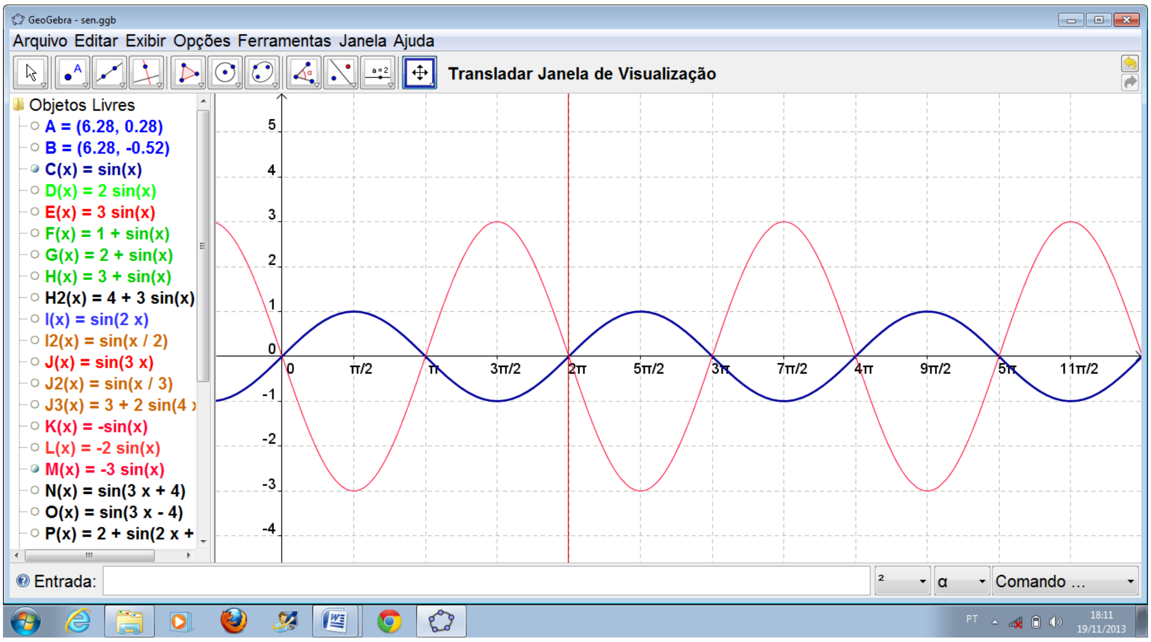
b) O eixo central da função L(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função L(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

16. Representação geométrica da função seno definida como M(x) = -3 sen(x).



A função M(x) parte primeiramente do ponto de interseção com o eixo central em direção ao limite inferior deslocando-se duas unidades para baixo até o limite inferior e duas unidades para cima até o limite superior em relação ao eixo central.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função M(x)?

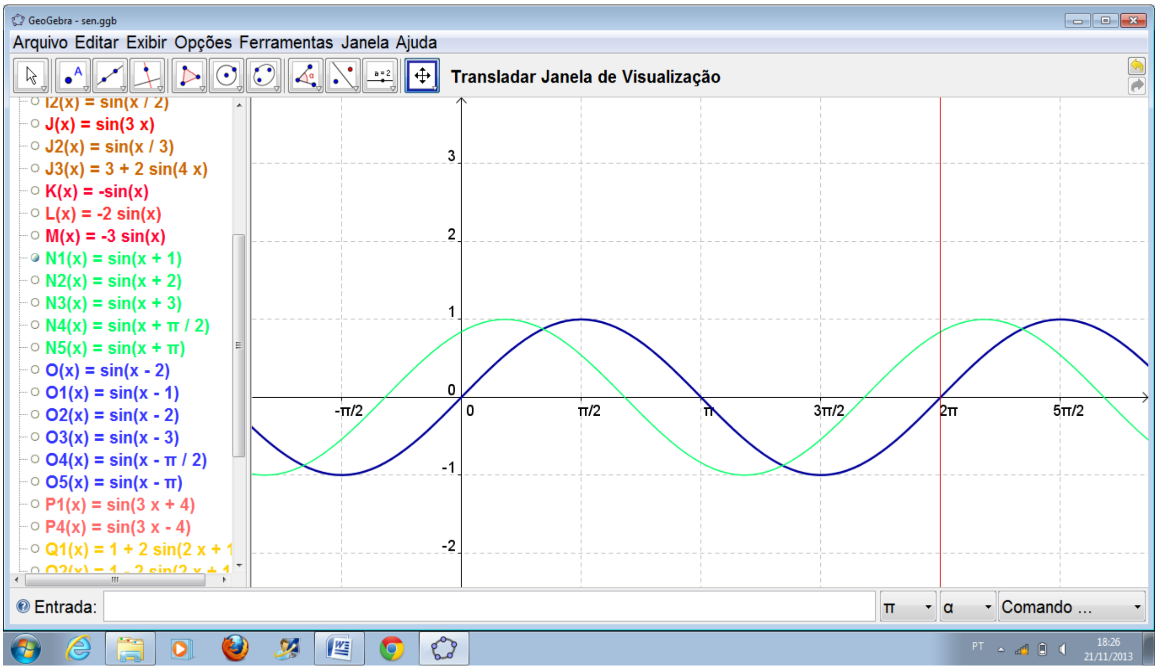
b) O eixo central da função M(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

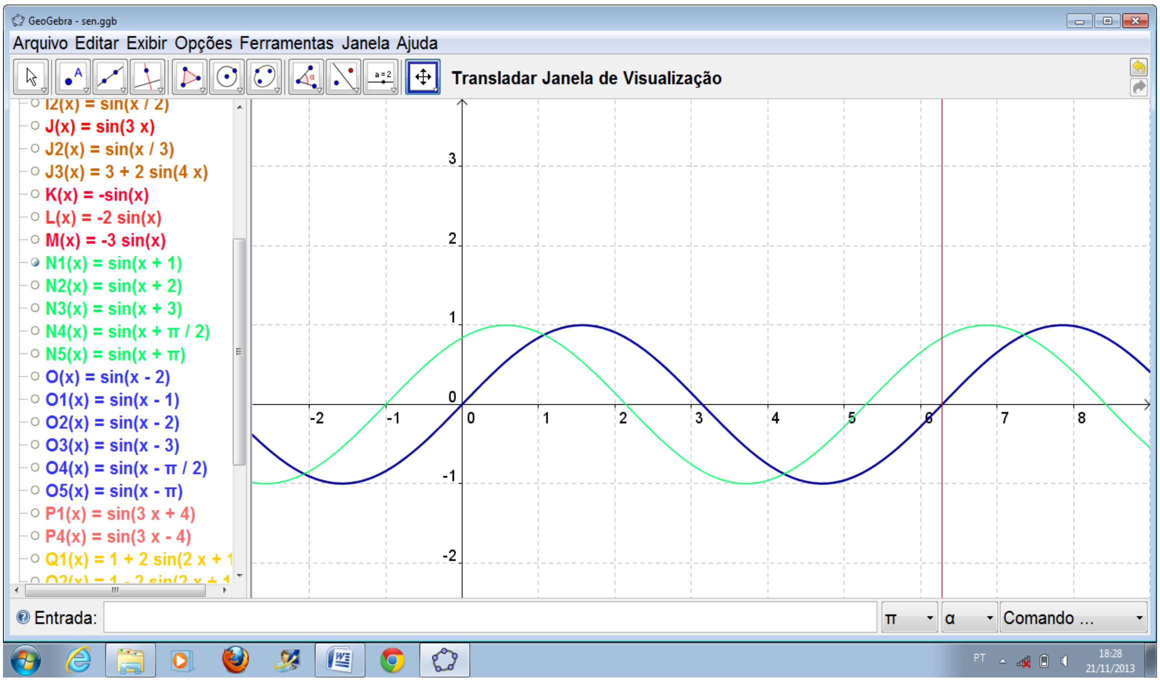
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função M(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

17. Representação geométrica da função seno definida como N1(x) = sen (x + 1).





Neste momento é importante mostrar que está sendo abordado o comportamento de funções do tipo y = sen (cx + d). O valor de “d” faz com que a função se desloque horizontalmente para a esquerda ou para a direita, como sen 0 possui imagem 0 (zero); então, sen(cx + d) possuirá imagem 0 (zero) quando cx +d = 0, ou seja, descobriremos quanto a função se deslocará para a direita ou para a esquerda em relação a origem. Observe que a função N1(x) sofrerá um deslocamento de uma unidade para a esquerda,pois $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ (uma unidade para a esquerda). Visualize no segundo gráfico devido o primeiro está com o eixo x em radiano.

Como a função C(x) possui período igual a 2π e sen $(2\pi) = 0$ (imagem igual a zero); então, o período de sen(cx + d) possuirá imagem 0 (zero) quando $cx + d = 2\pi$ ou $cx + d = 6{,}28$ (na forma unitária).

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função N1(x)?

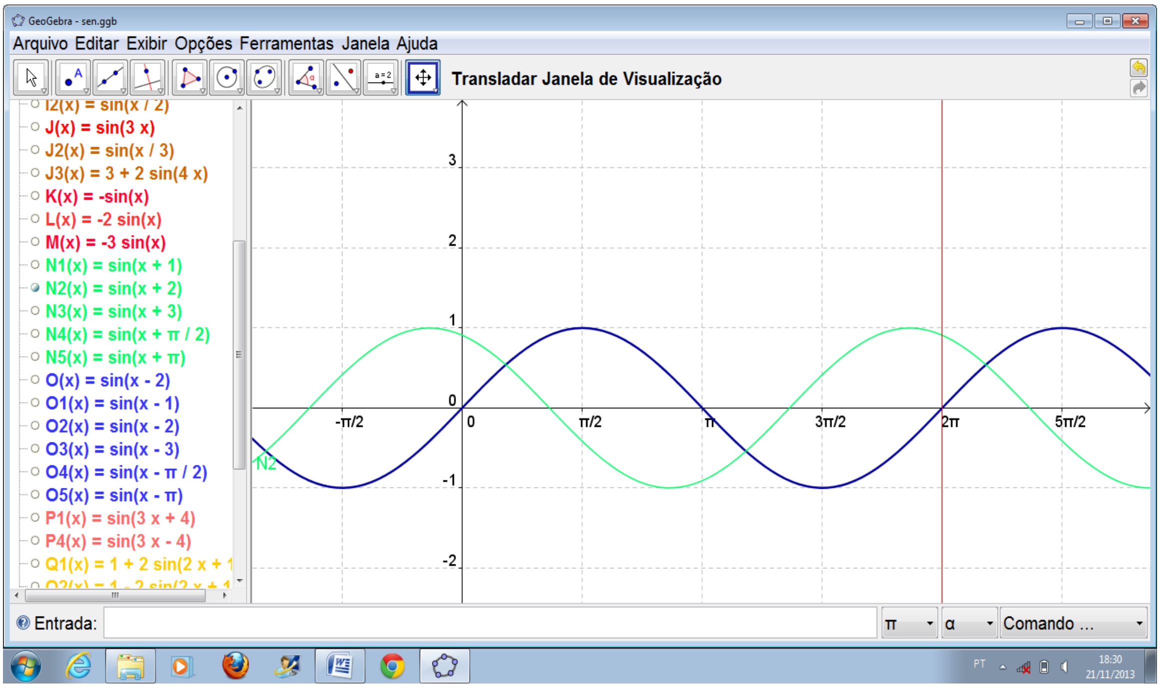
b) O eixo central da função N1(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

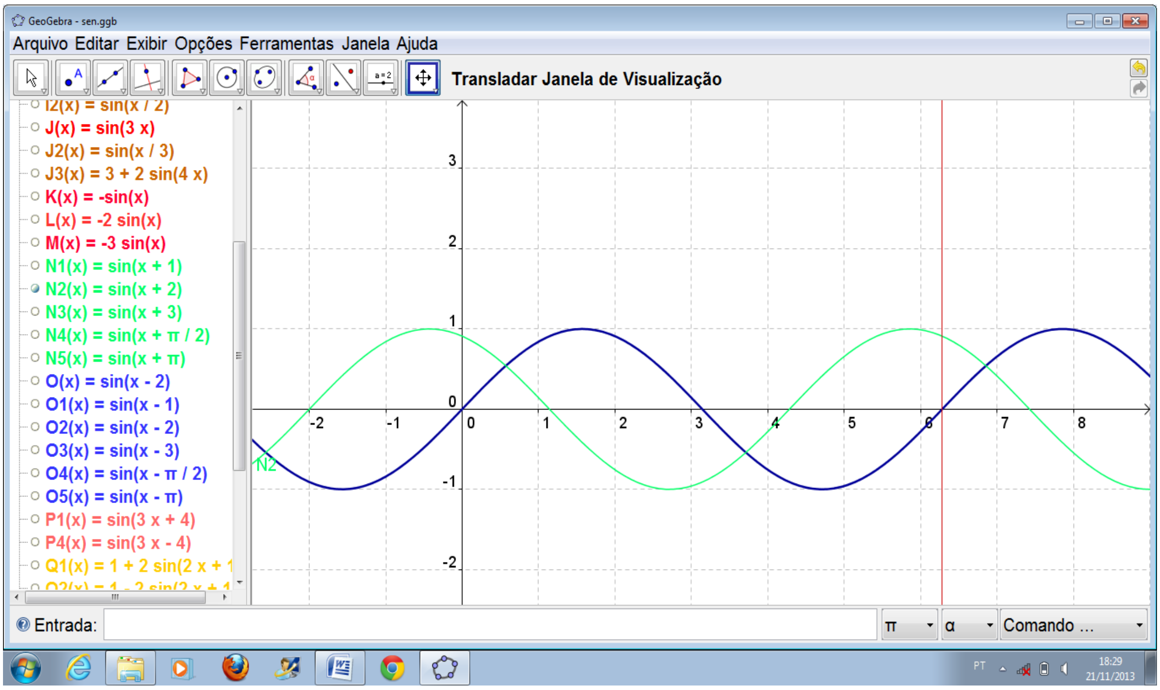
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função N1(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

18. Representação geométrica da função seno definida como N2(x) = sen (x + 2).





Agora mostre que x + 2 = 0 → x = – 2; então, haverá um deslocamento da função N2(x) em duas unidades para a esquerda em relação a origem. Com uma melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função N2(x)?

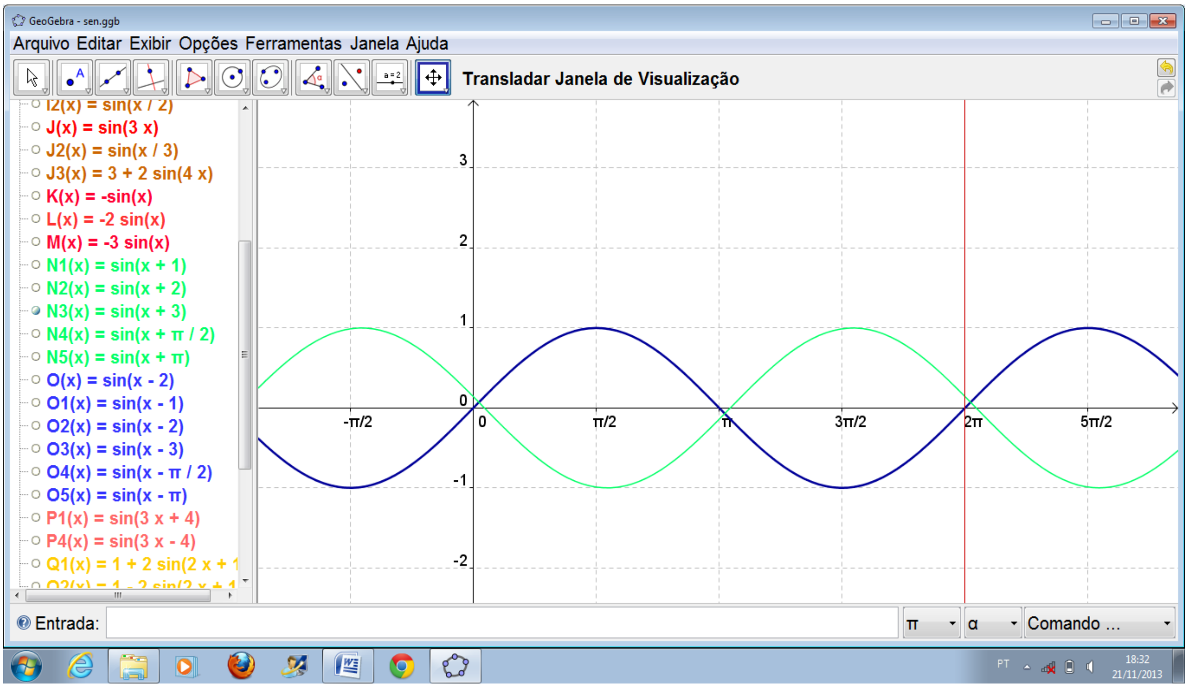
b) O eixo central da função N2(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

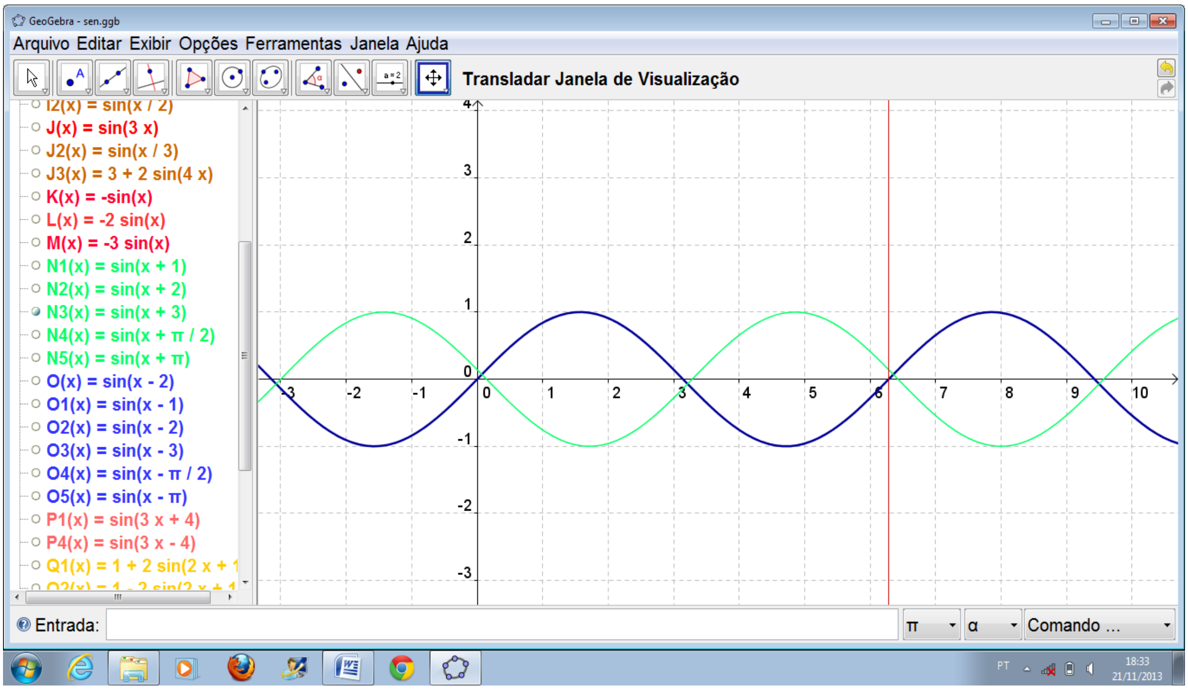
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função N2(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

19. Representação geométrica da função seno definida como N3(x) = sen (x + 3).





Agora mostre que x + 3 = 0 → x = – 3; então, haverá um deslocamento da função N3(x) em três unidades para a esquerda em relação a origem. Com uma melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função N3(x)?

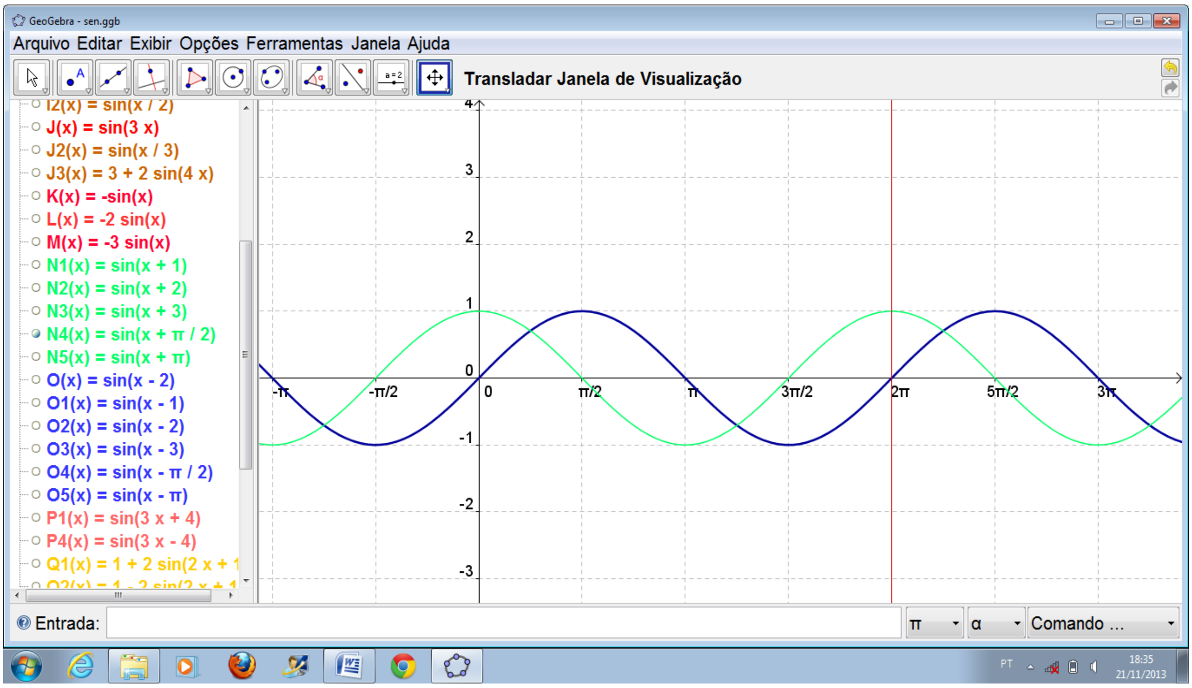
b) O eixo central da função N3(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

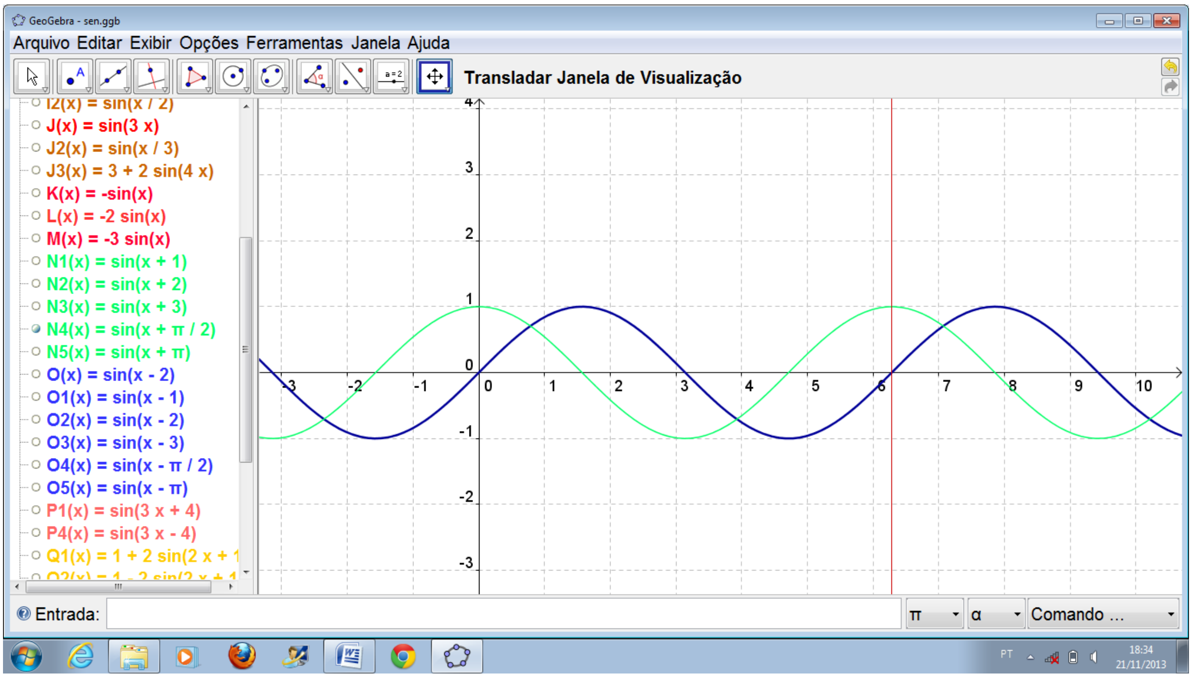
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função N3(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

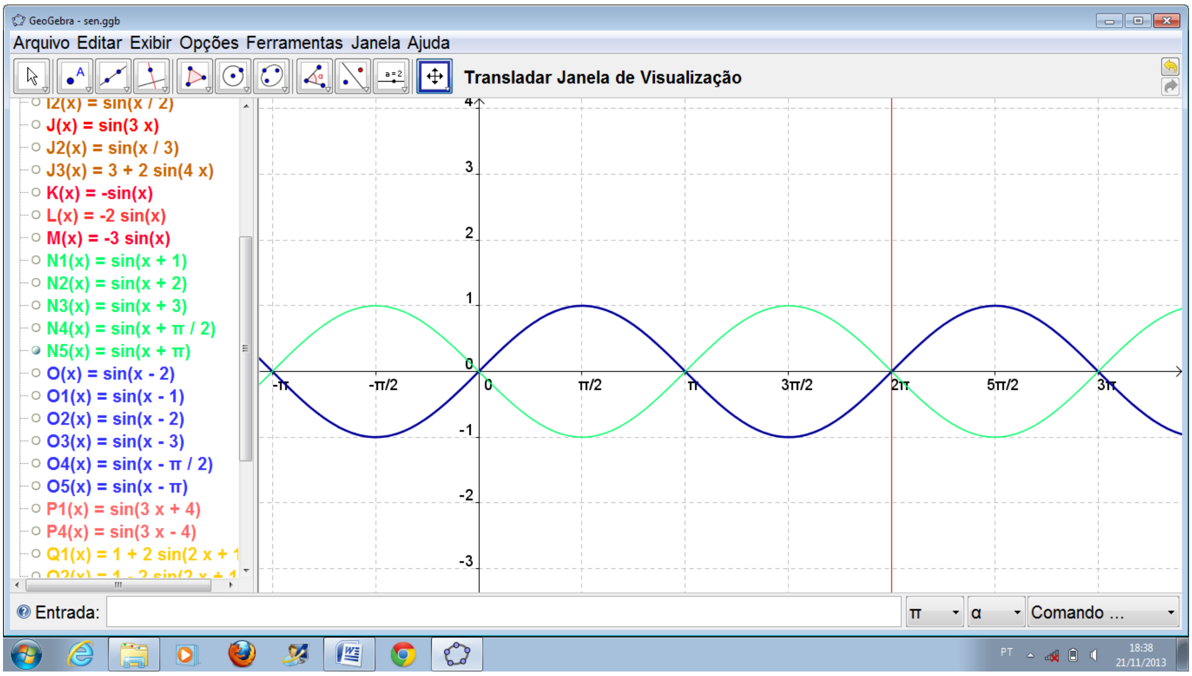
e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

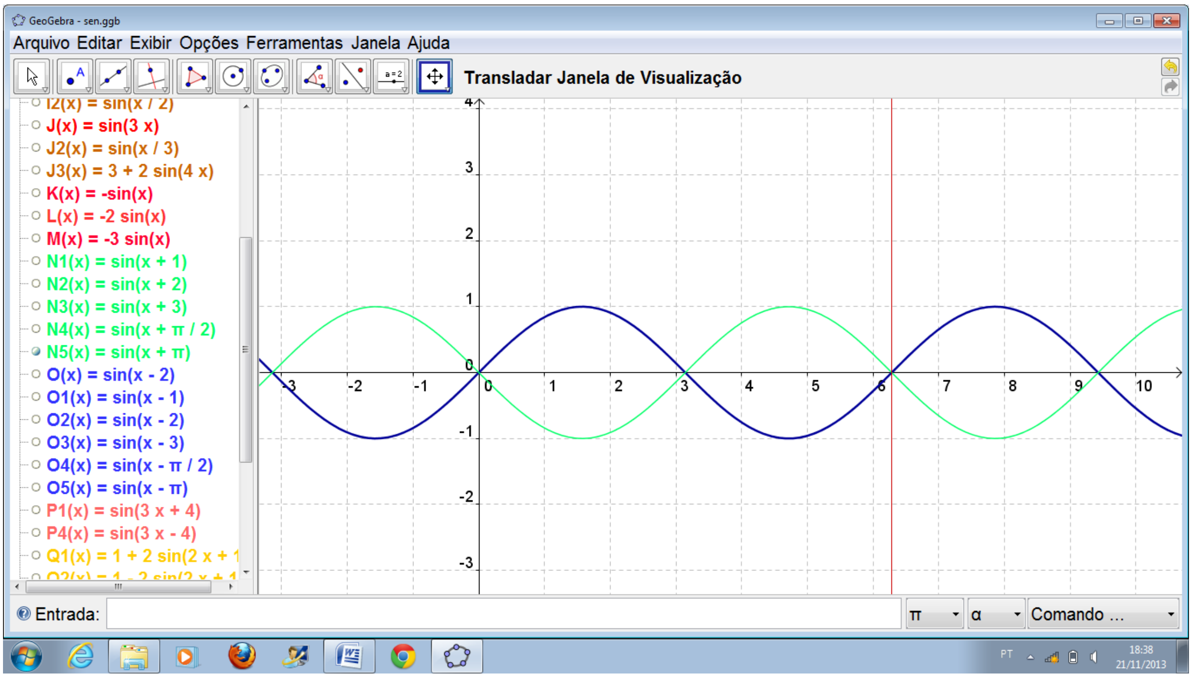
20. Representação geométrica da função seno definida como N4(x) = sen (x + π/2).





21. Representação geométrica da função seno definida como N5(x) = sen (x + π).





Agora mostre que x + π = 0 → x = – π; então, haverá um deslocamento da função N4(x) em π radianos para a esquerda em relação a origem. Com uma melhor visualização no primeiro gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função N5(x)?

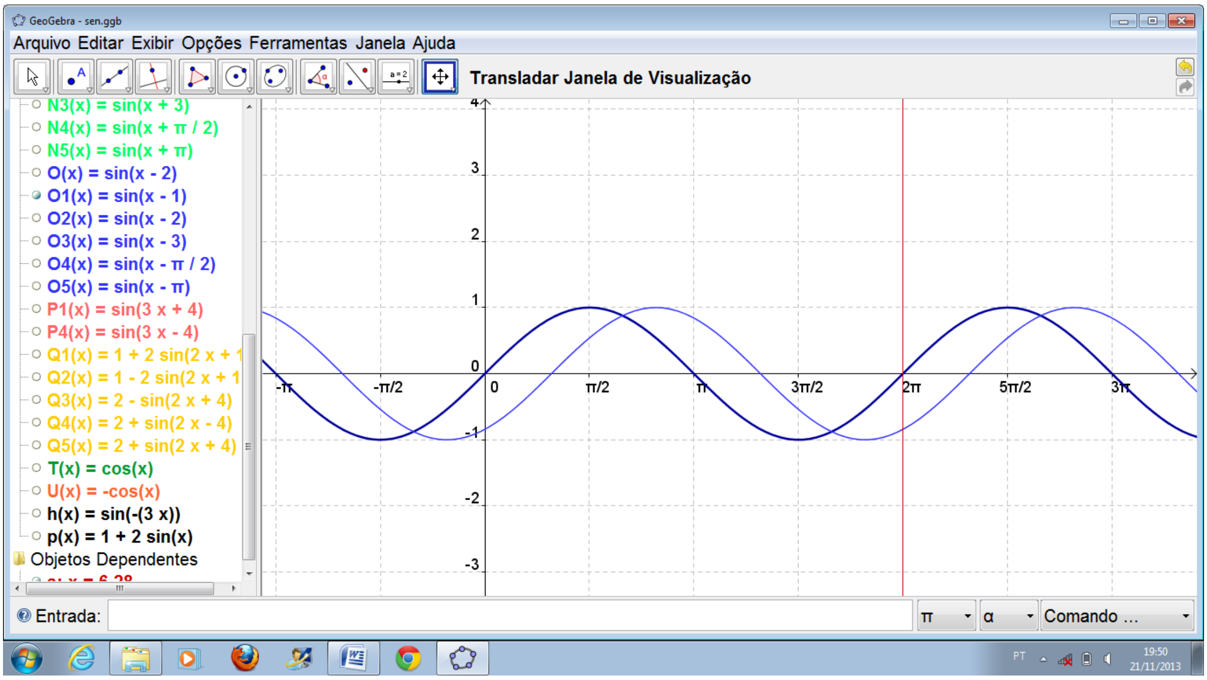
b) O eixo central da função N5(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

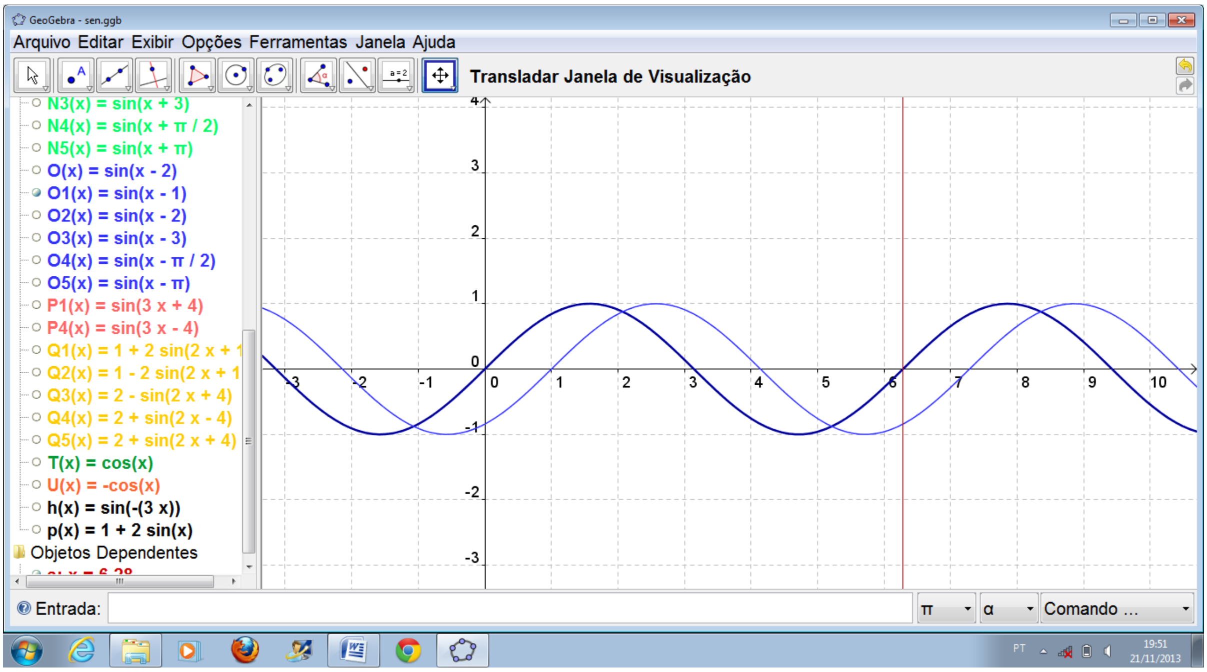
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função N5(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

22. Representação geométrica da função seno definida como O1(x) = sen (x – 1).





Agora mostre que x – 1 = 0 → x = 1; então, haverá um deslocamento da função O1(x) em uma unidade para a direita em relação a origem. Com uma melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função O1(x)?

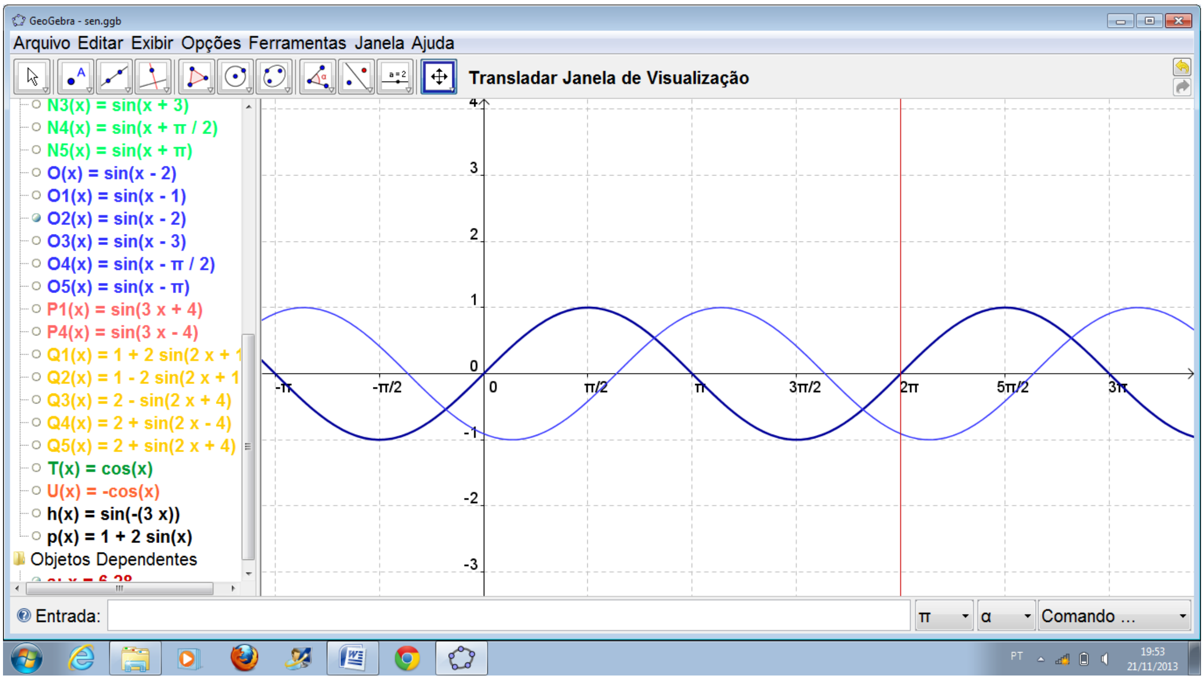
b) O eixo central da função O1(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

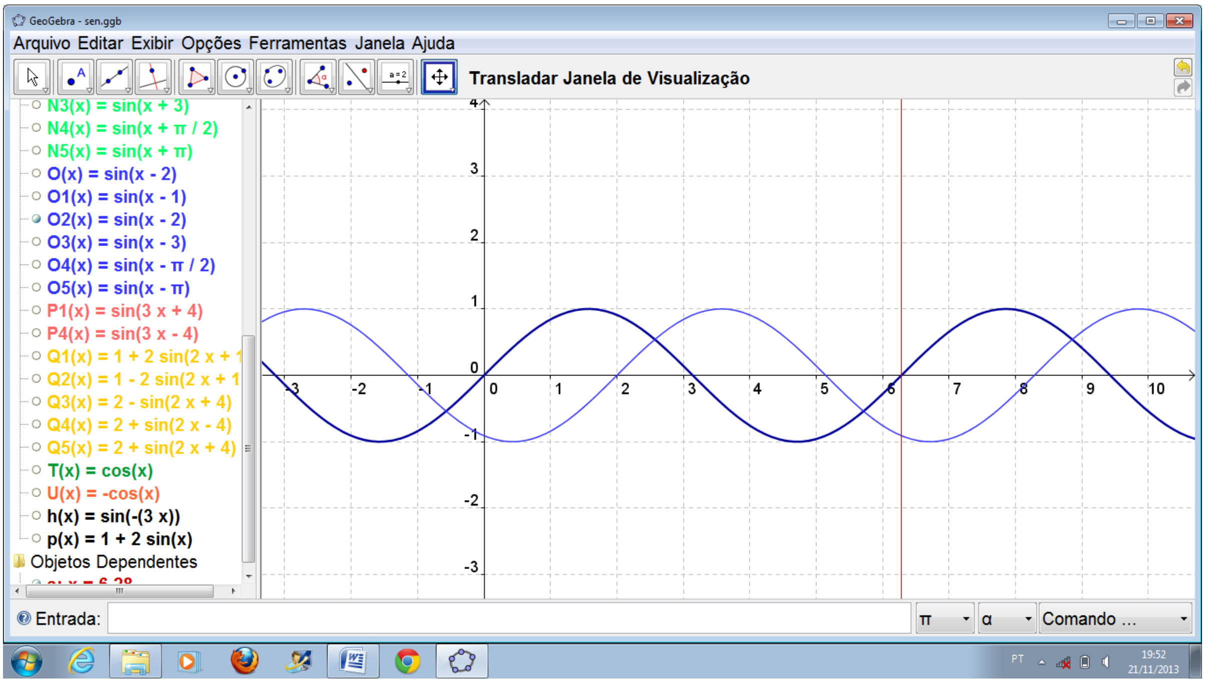
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função O1(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

23. Representação geométrica da função seno definida como O2(x) = sen (x – 2).





Agora mostre que x – 2 = 0 → x = 2; então, haverá um deslocamento da função O2(x) em duas unidades para a direita em relação a origem. Com uma melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função O2(x)?

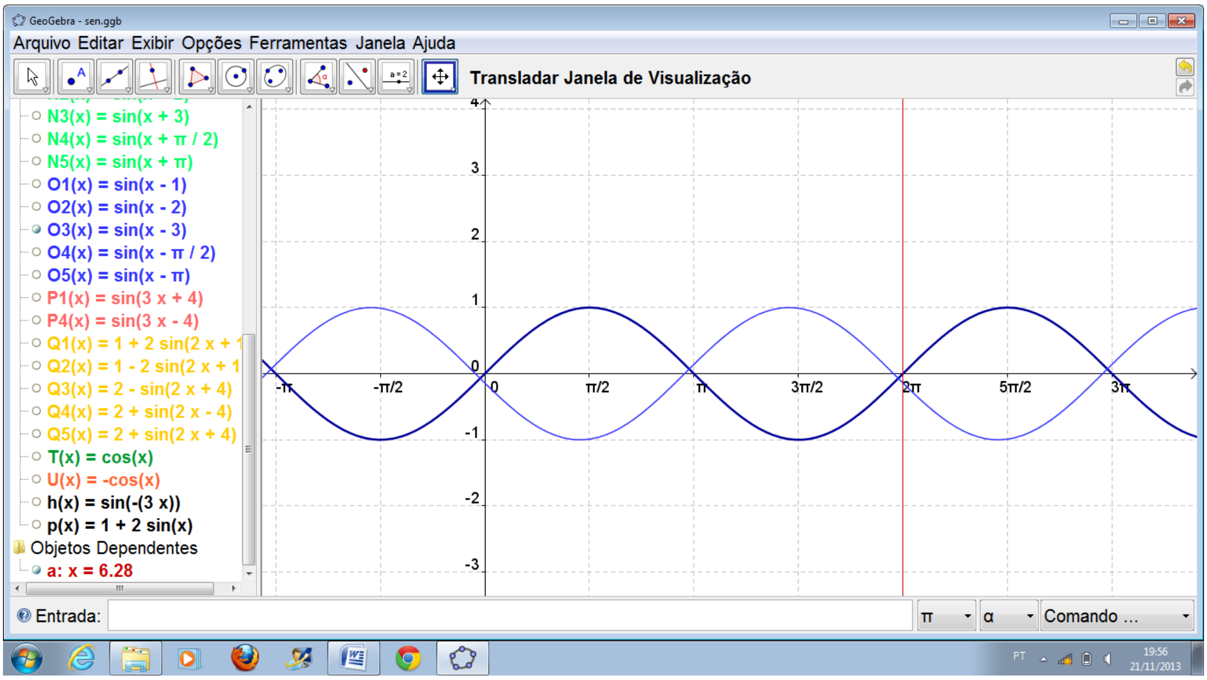
b) O eixo central da função O2(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

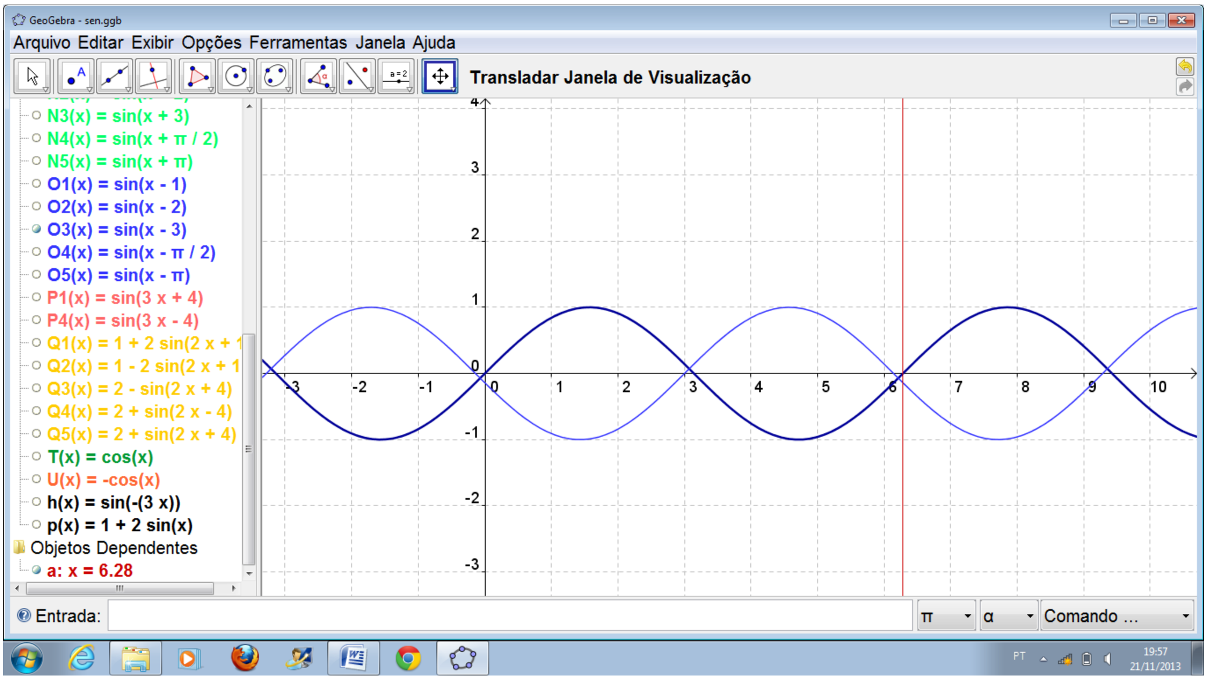
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função O2(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

24. Representação geométrica da função seno definida como O3(x) = sen (x – 3).





Agora mostre que x – 3 = 0 → x = 3; então, haverá um deslocamento da função O3(x) em três unidades para a direita em relação a origem. Com uma melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função O3(x)?

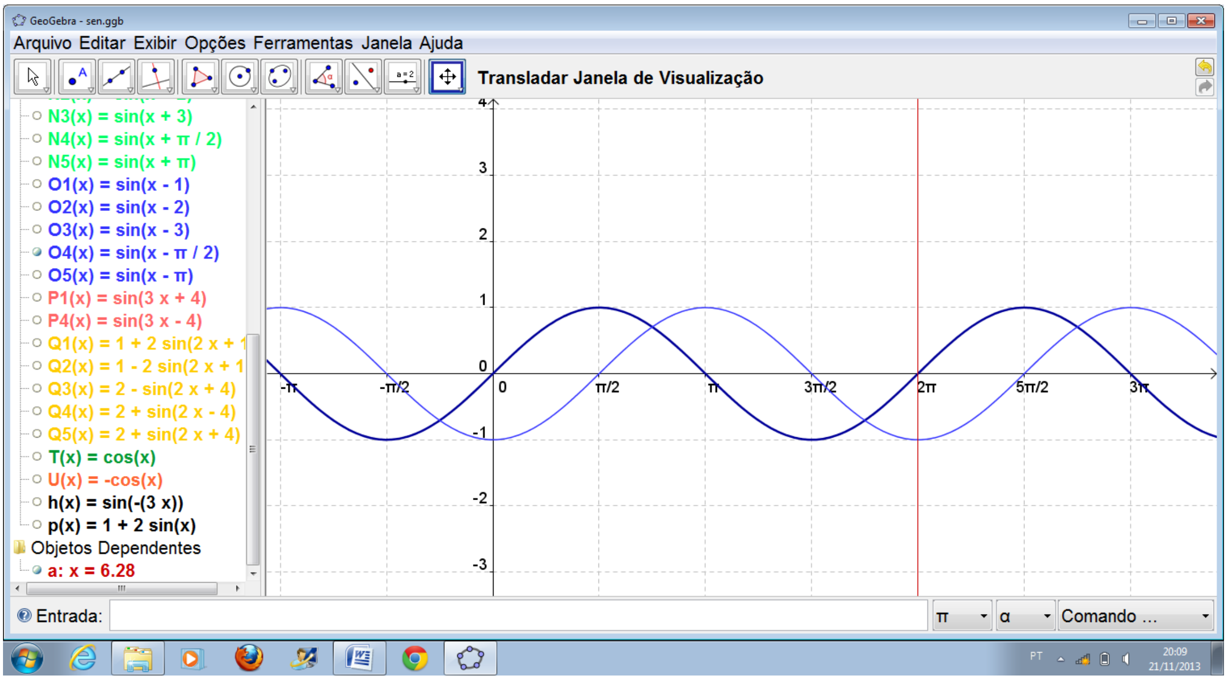
b) O eixo central da função O3(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

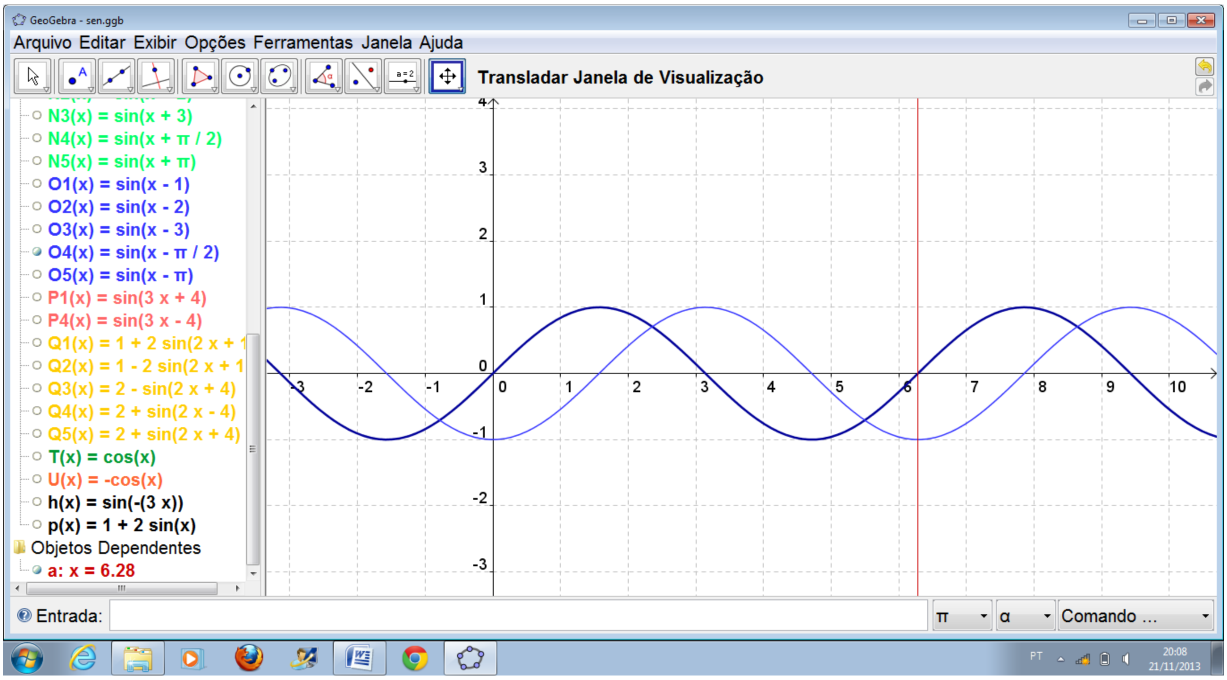
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função O3(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

25. Representação geométrica da função seno definida como O4(x) = sen (x – π/2).





Agora mostre que x – π/2 = 0 → x = π/2; então, haverá um deslocamento da função O4(x) em π/2 radianos para a direita em relação a origem. Com uma melhor visualização no primeiro gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função O4(x)?

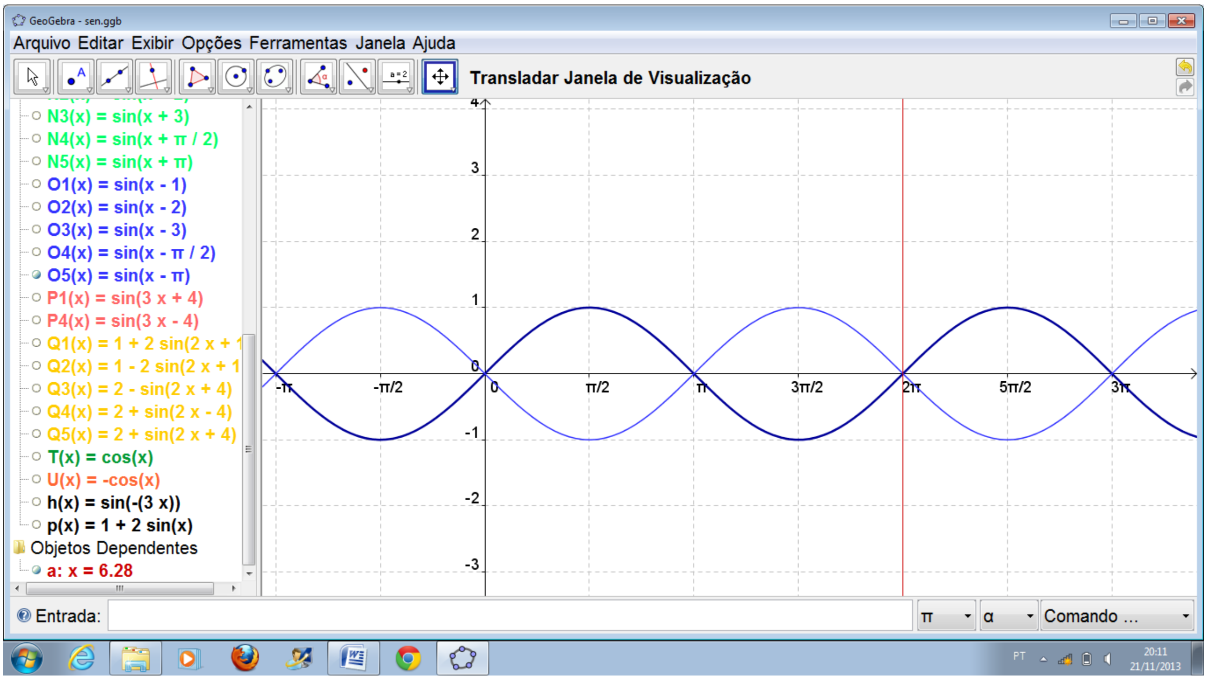
b) O eixo central da função O4(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

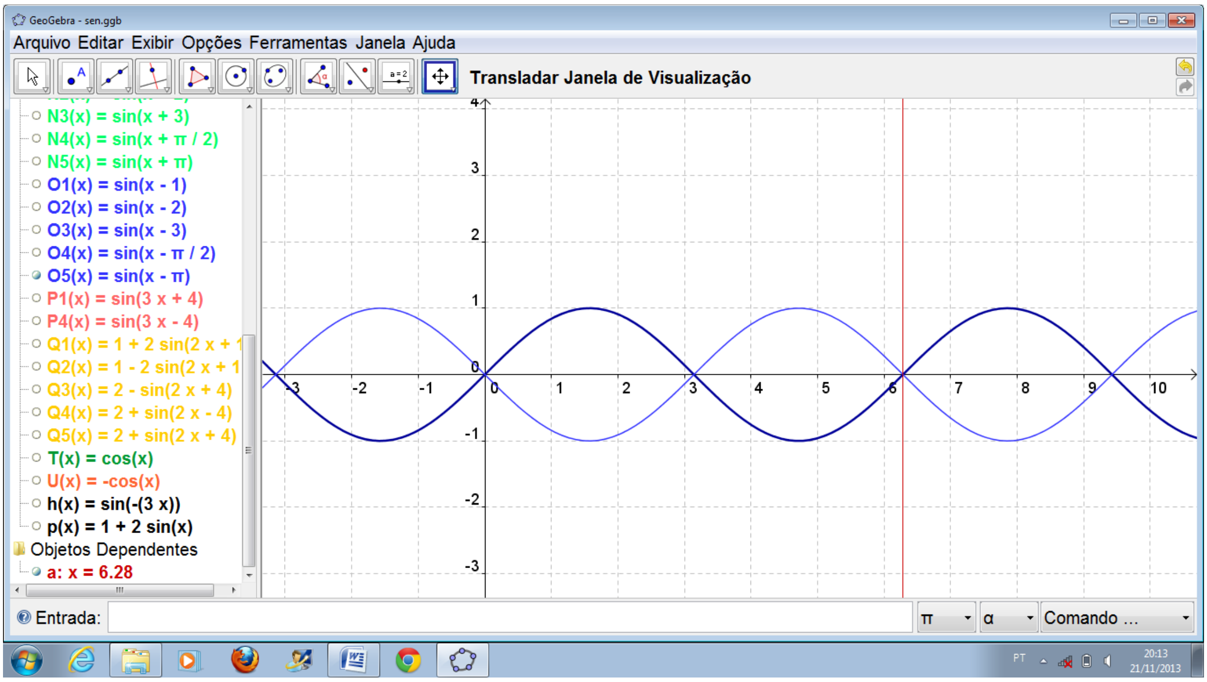
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função O4(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

26. Representação geométrica da função seno definida como O5(x) = sen (x – π).





Agora mostre que x – π = 0 → x = π; então, haverá um deslocamento da função O5(x) em π radianos para a direita em relação a origem. Com uma melhor visualização no primeiro gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função O5(x)?

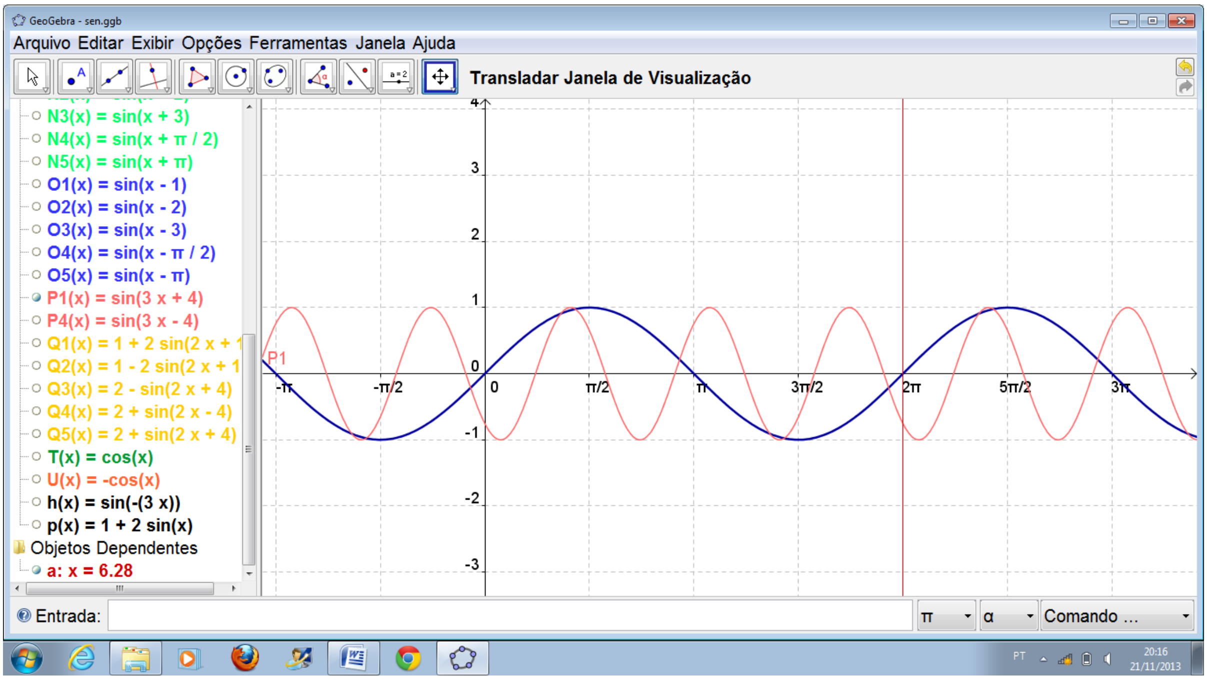
b) O eixo central da função O5(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

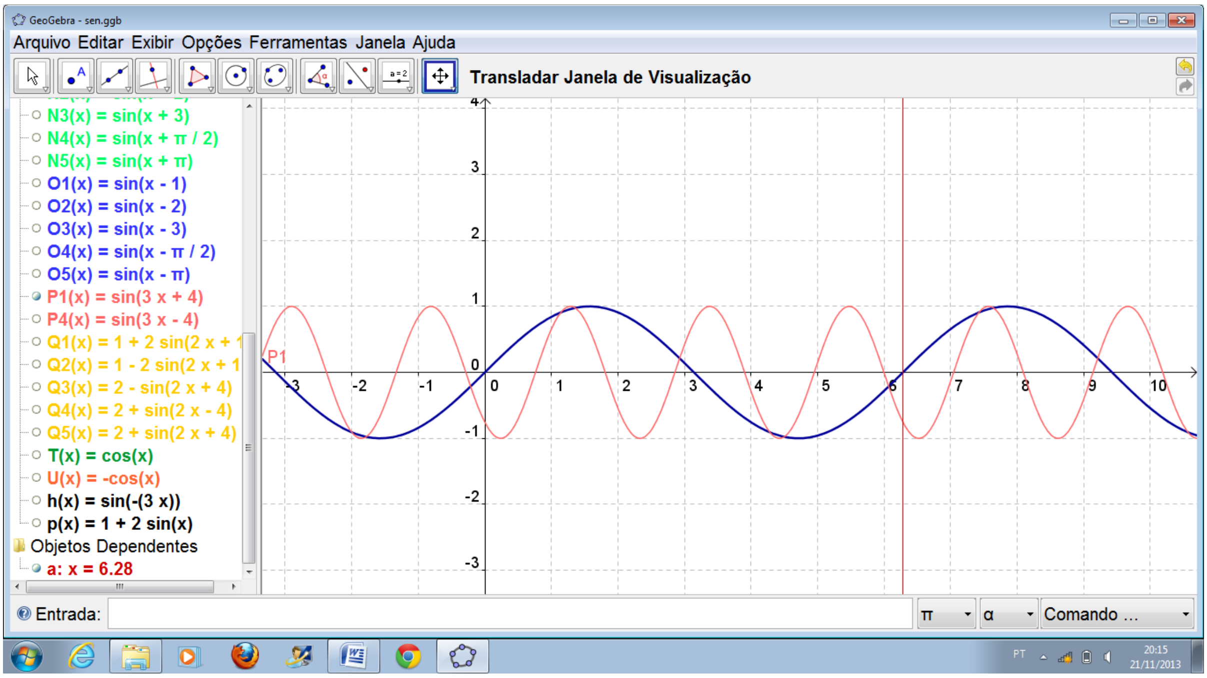
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função O5(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

27. Representação geométrica da função seno definida como P1(x) = sen (3x + 4).





Neste momento é importante relembrar que está sendo abordado o comportamento de funções do tipo y = sen (cx + d). Como em P1(x), c = 3 temos três períodos da função P1(x) em um período da função C(x), mas como 3x + 4 = 0 → x = – 4/3, haverá um deslocamento da função P1(x) em 4/3 para a esquerda em relação a origem. Com uma melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função P1(x)?

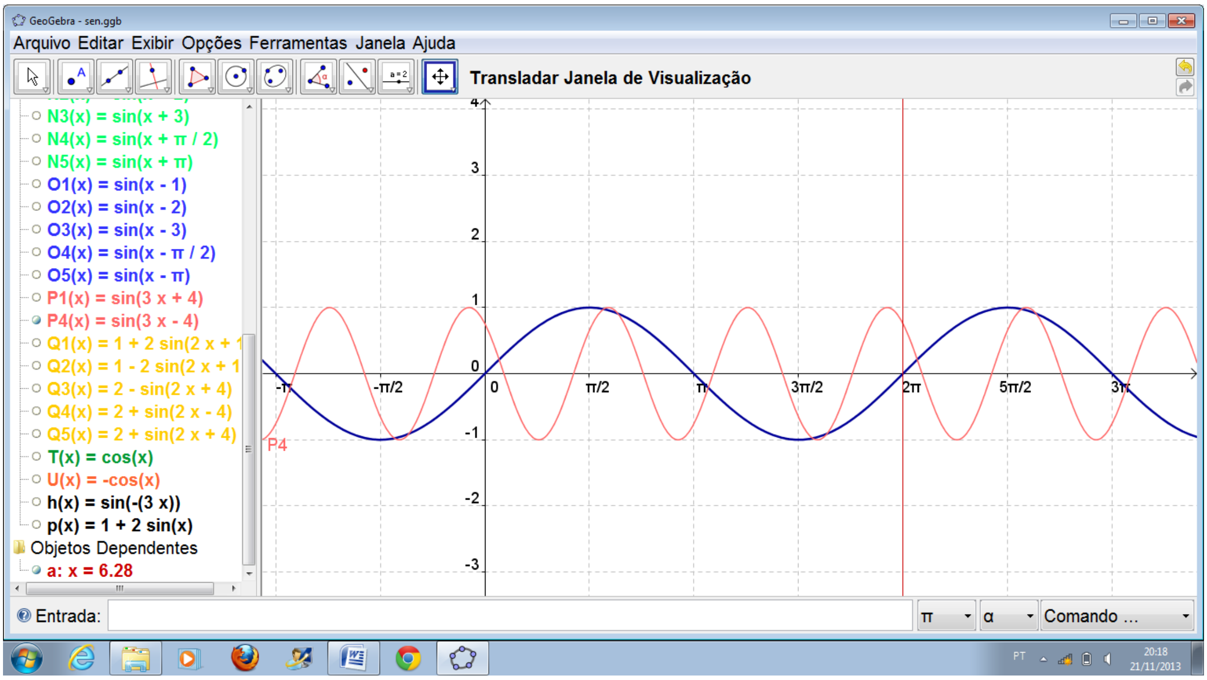
b) O eixo central da função P1(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

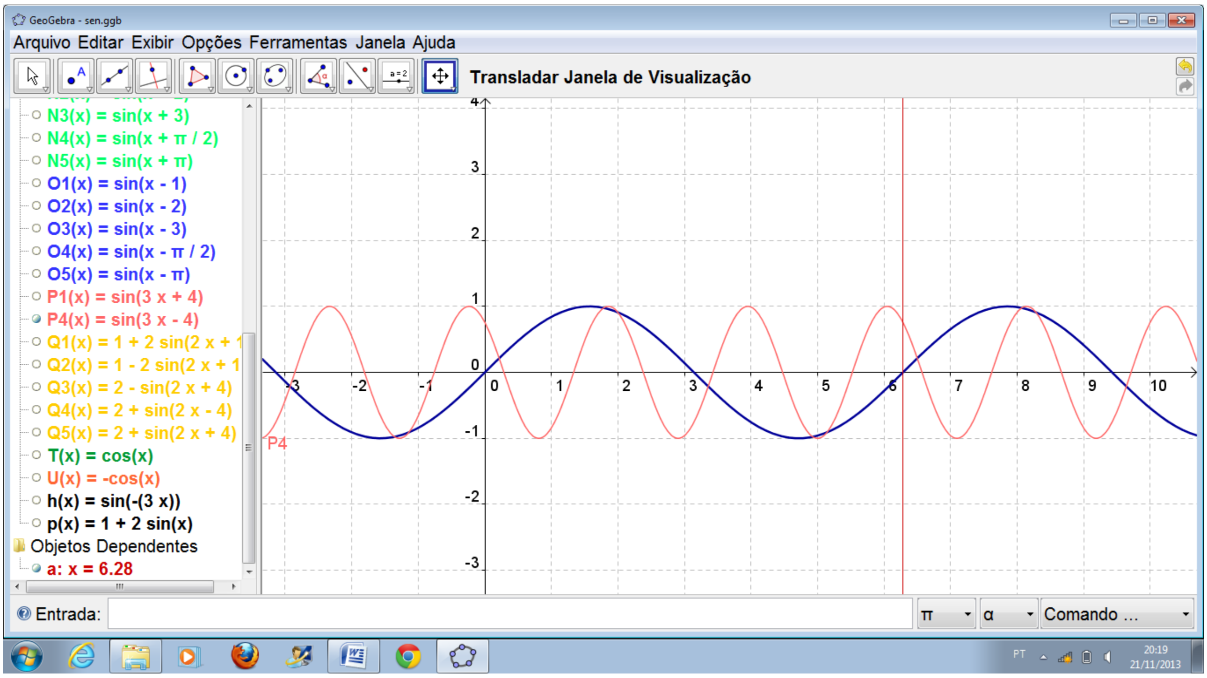
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função P1(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

28. Representação geométrica da função seno definida como P4(x) = sen (3x – 4).





Como em P2(x), c = 3 temos três períodos da função P2(x) em um período da função C(x), mas como 3x – 4 = 0 → x = 4/3, haverá um deslocamento da função P2(x) em 4/3 para a direita em relação a origem. Com uma melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função P4(x)?

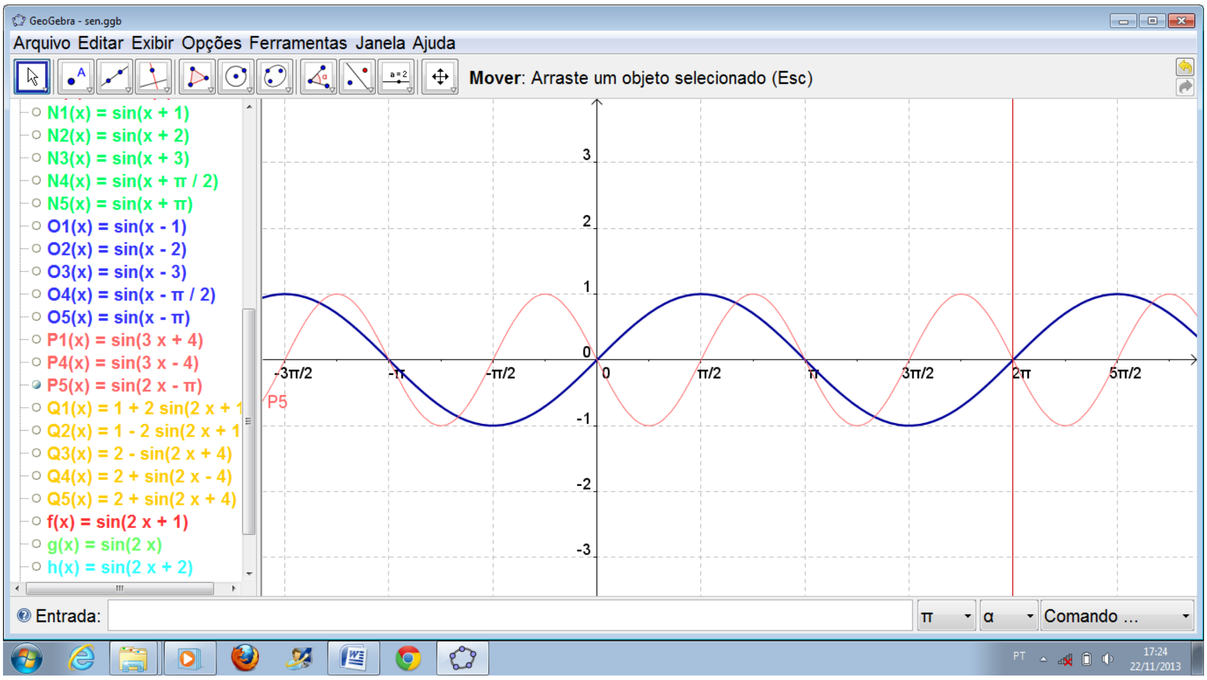
b) O eixo central da função P4(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

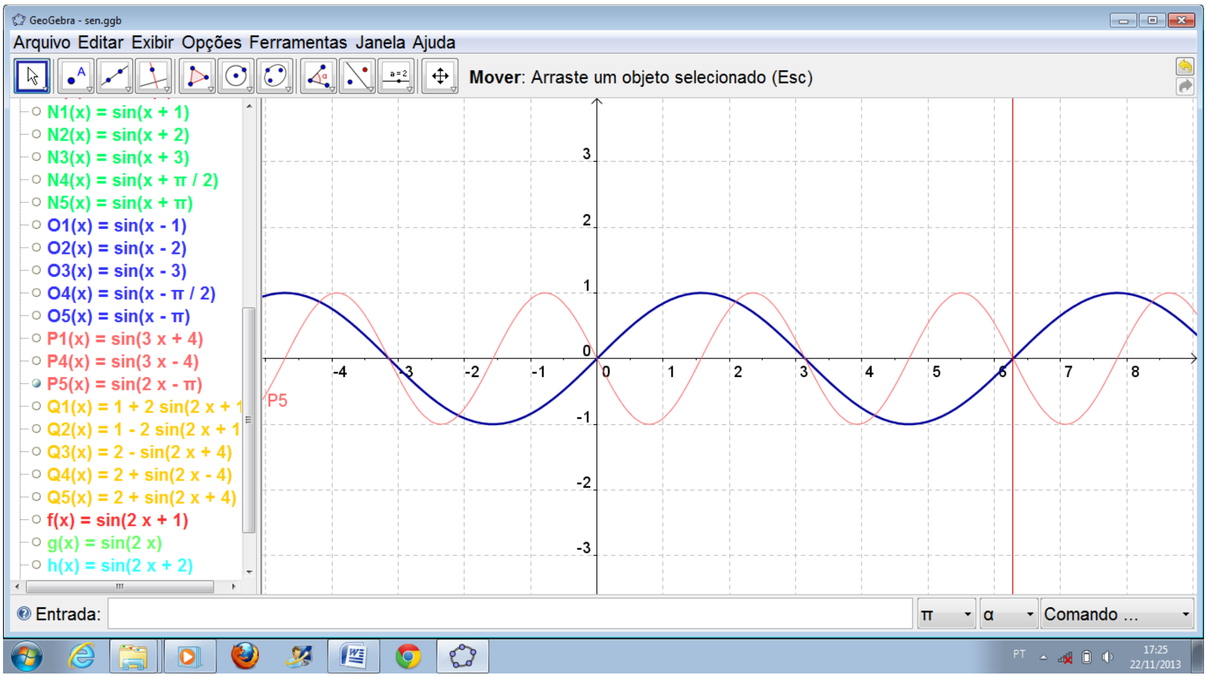
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função P4(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

29. Representação geométrica da função seno definida como P5(x) = sen (2x – π).





Como em P5(x), c = 2 temos dois períodos da função P5(x) em um período da função C(x), mas como 2x – π = 0 → x = π /2, haverá um deslocamento da função P5(x) em π/2 para a direita em relação a origem. Com uma melhor visualização no primeiro gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função P5(x)?

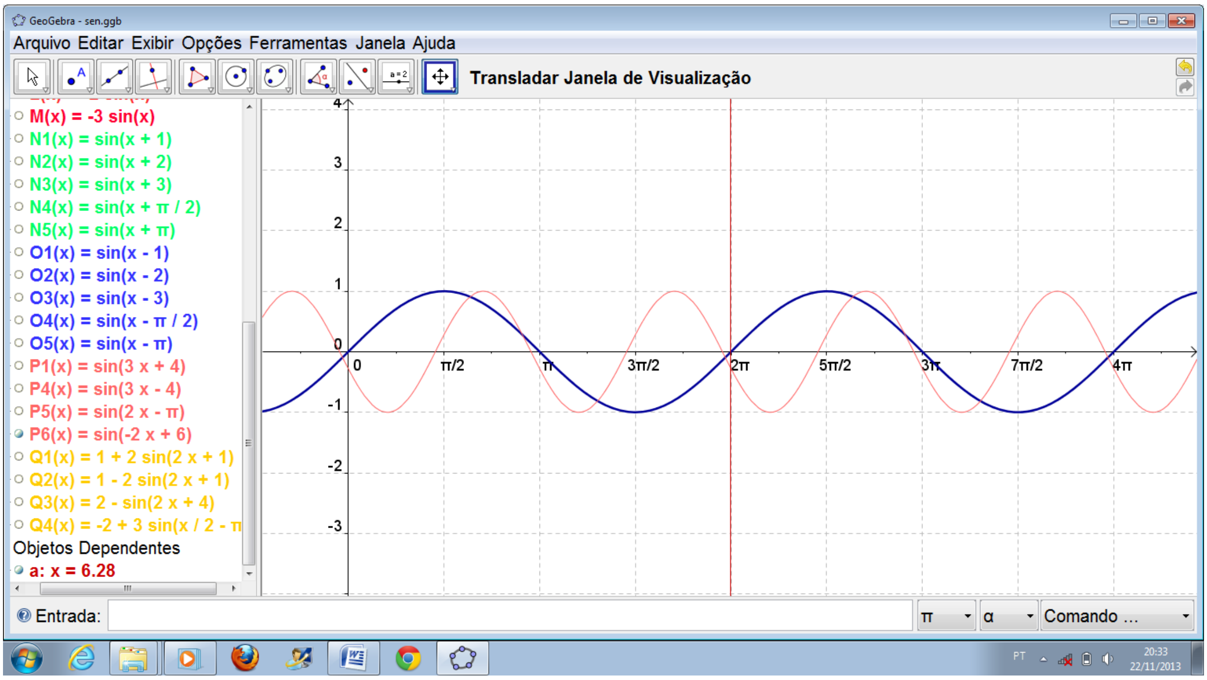
b) O eixo central da função P5(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

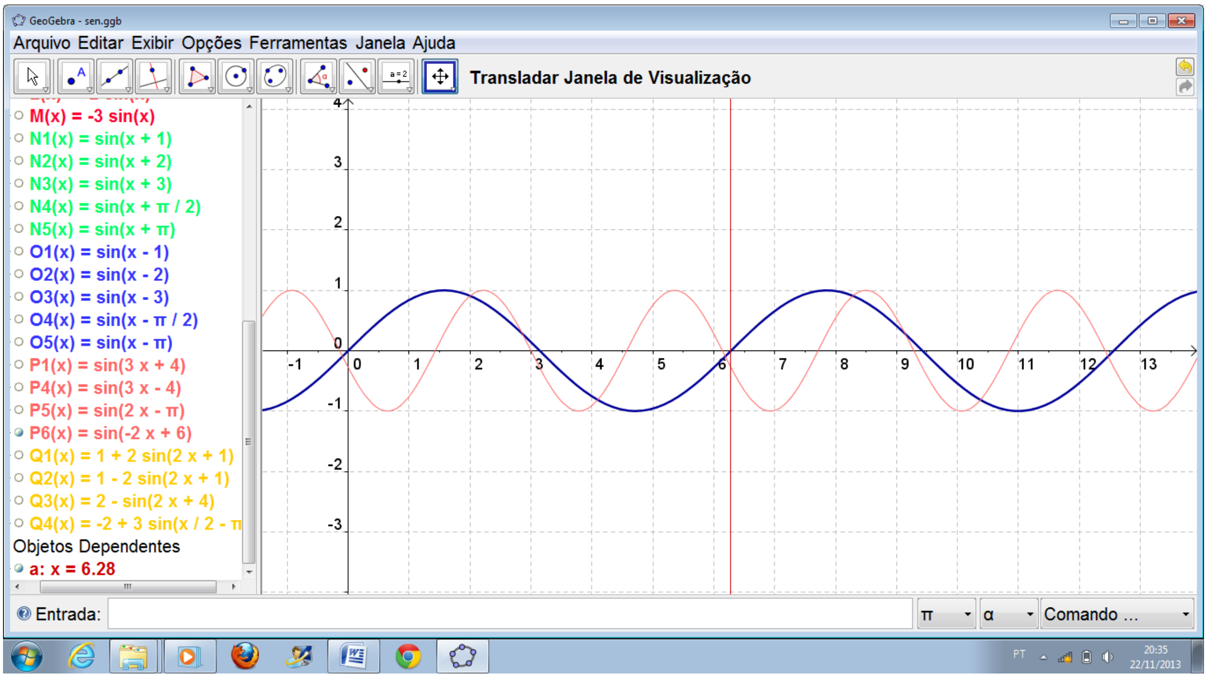
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função P5(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

30. Representação geométrica da função seno definida como P6(x) = sen (–2x + 6).





Como em P6(x), c = – 2 temos dois períodos da função P6(x) em um período da função C(x), mas como – 2x + 6 = 0 → x = 3, haverá um deslocamento da função P6(x) em três unidades para a direita em relação a origem ou de uma outra forma P6(x) pode ser reescrita da forma P6(x) = sen (–2x + 6) = – sen (2x – 6), que possui a mesma representação geométrica acima. Com uma melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função P6(x)?

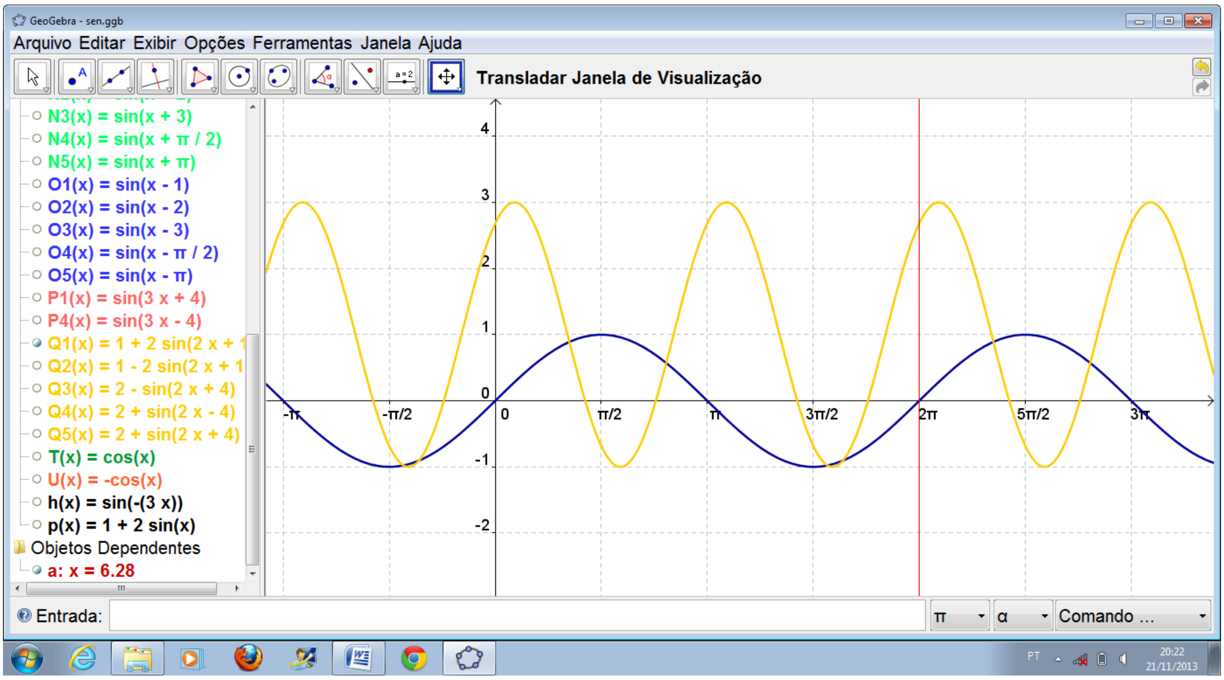
b) O eixo central da função P6(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

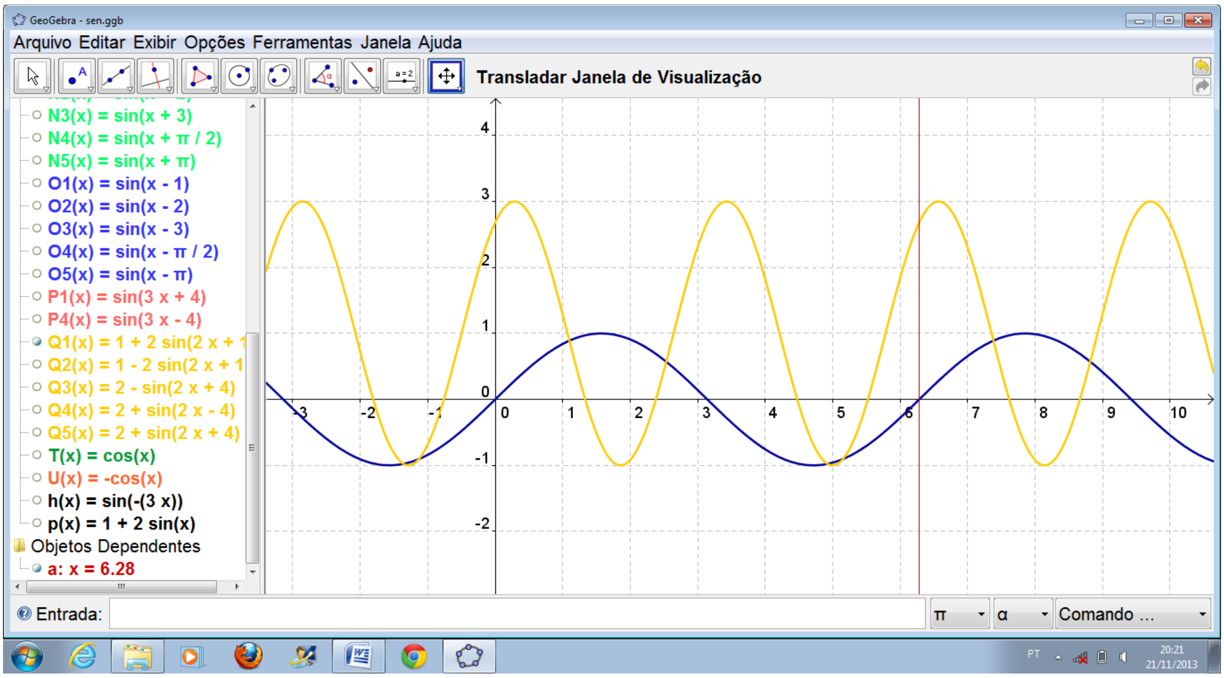
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função P6(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

31. Representação geométrica da função seno definida como Q1(x) = 1 + 2sen (2x + 1).





Finalmente chegamos as funções do tipo y = a + b . sen (cx + d), ou seja, a função Q1, possui:

Eixo central passando por 1 no eixo y, pois a = 1.

Limite superior e inferior respectivamente 3 e – 1, pois b = 2

Como b > 0 o deslocamento da função se dará primeiramente em direção ao limite superior.

Existem dois períodos de Q1(x) em relação ao período de C(x), pois c = 2.

A função se deslocará 1/2 para a esquerda em relação a origem, pois $2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1/2$. Melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função Q1(x)?

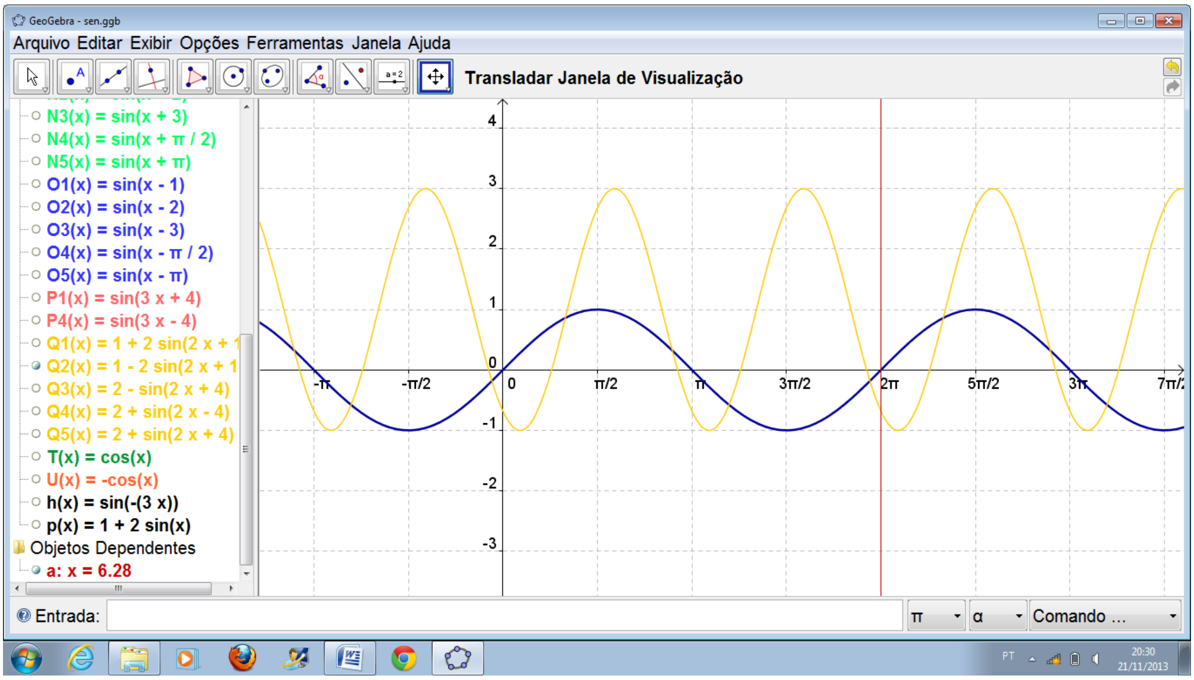
b) O eixo central da função Q1(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

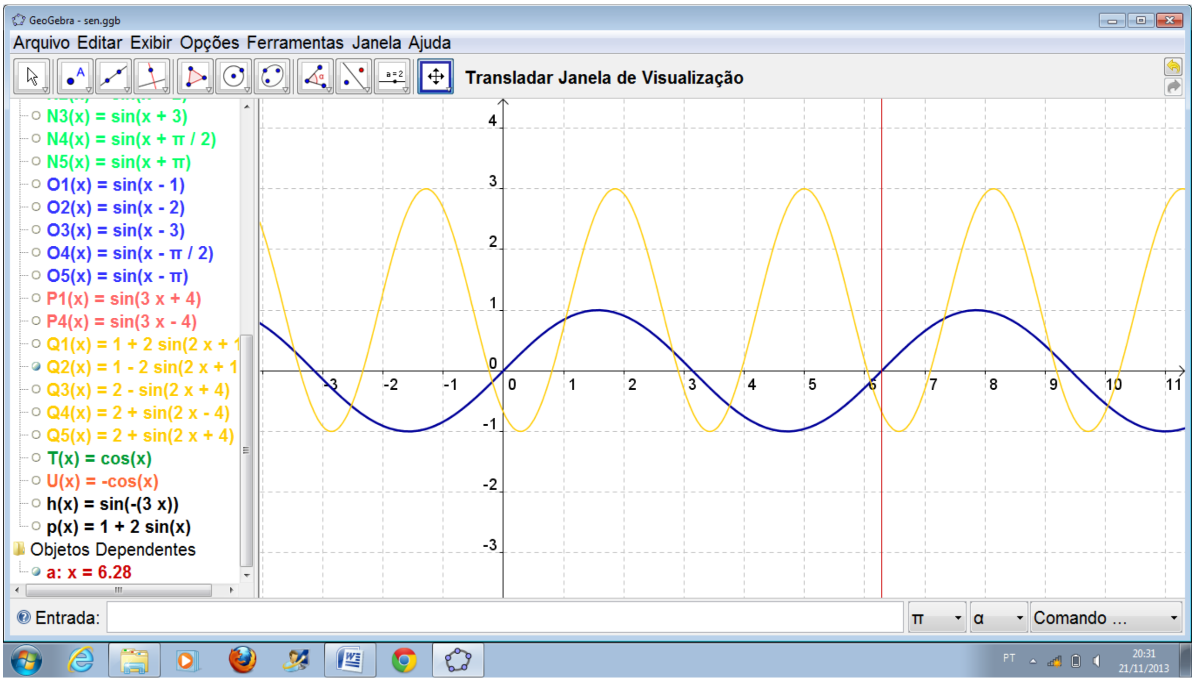
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função Q1(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

32. Representação geométrica da função seno definida como Q2(x) = 1 – 2sen (2x + 1).





A função Q2(x), possui:

Eixo central passando por 1 no eixo y, pois a = 1.

Limite superior e inferior respectivamente 3 e – 1, pois b = – 2.

Como b < 0 o deslocamento da função se dará primeiramente em direção ao limite inferior.

Existem dois períodos de Q2(x) em relação ao período de C(x), pois c = 2.

A função se deslocará 1/2 para a esquerda em relação a origem, pois $2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1/2$. Melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função Q2(x)?

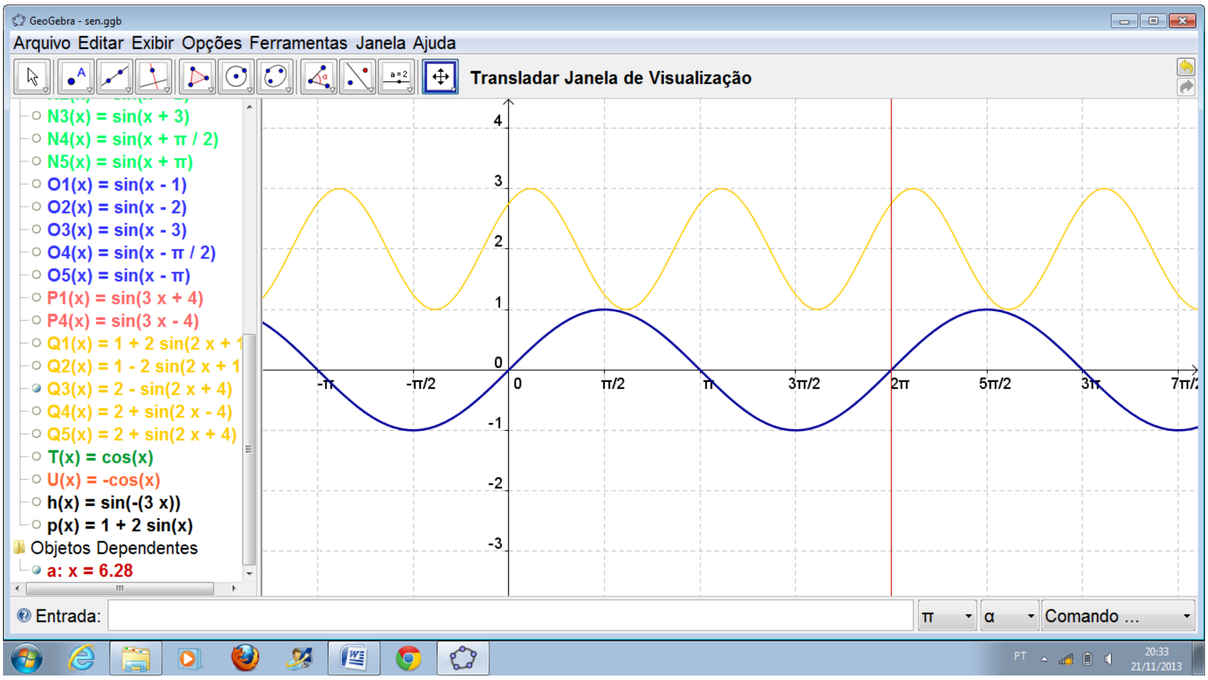
b) O eixo central da função Q2(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

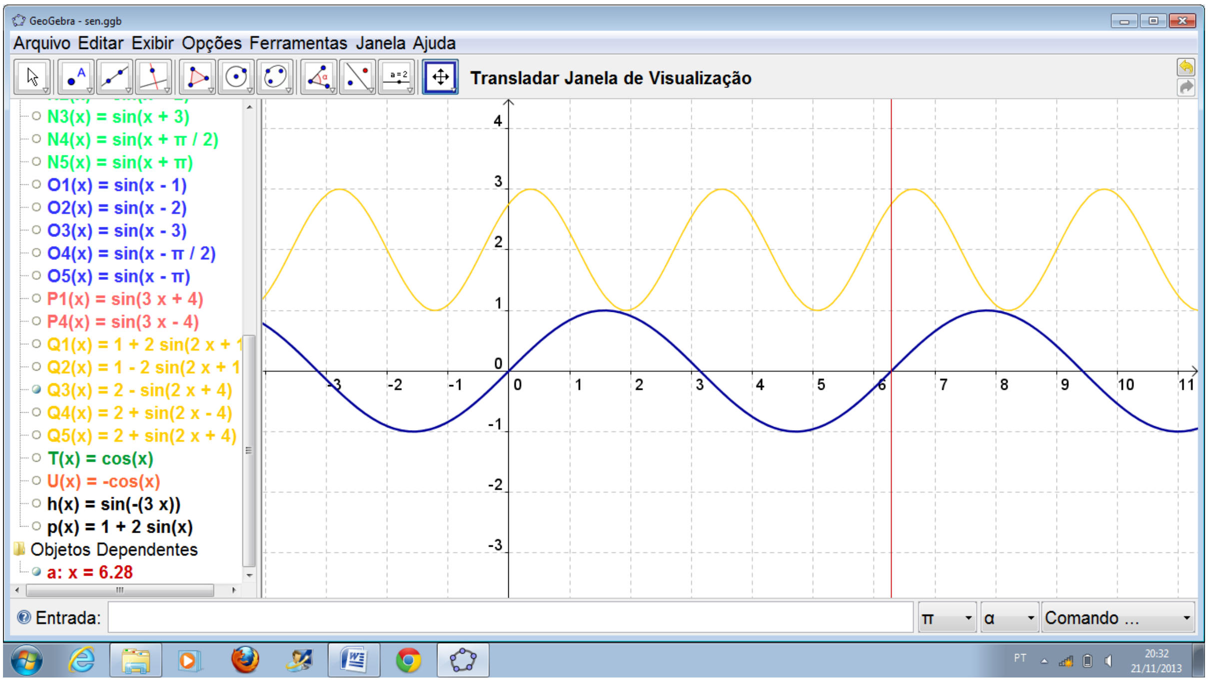
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função Q2(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

33. Representação geométrica da função seno definida como Q3(x) = 2 – sen (2x + 4).





A função Q3(x), possui:

Eixo central passando por 1 no eixo y, pois a = 2.

Limite superior e inferior respectivamente 3 e 1, pois b = – 1.

Como $b < 0$ o deslocamento da função se dará primeiramente em direção ao limite inferior.
Existem dois períodos de Q3(x) em relação ao período de C(x), pois $c = 2$.
A função se deslocará 2 para a esquerda em relação a origem, pois $2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$.
Melhor visualização no segundo gráfico.

Atividade

1) Responda:

a) Qual o período, o domínio e a imagem da função Q3(x)?

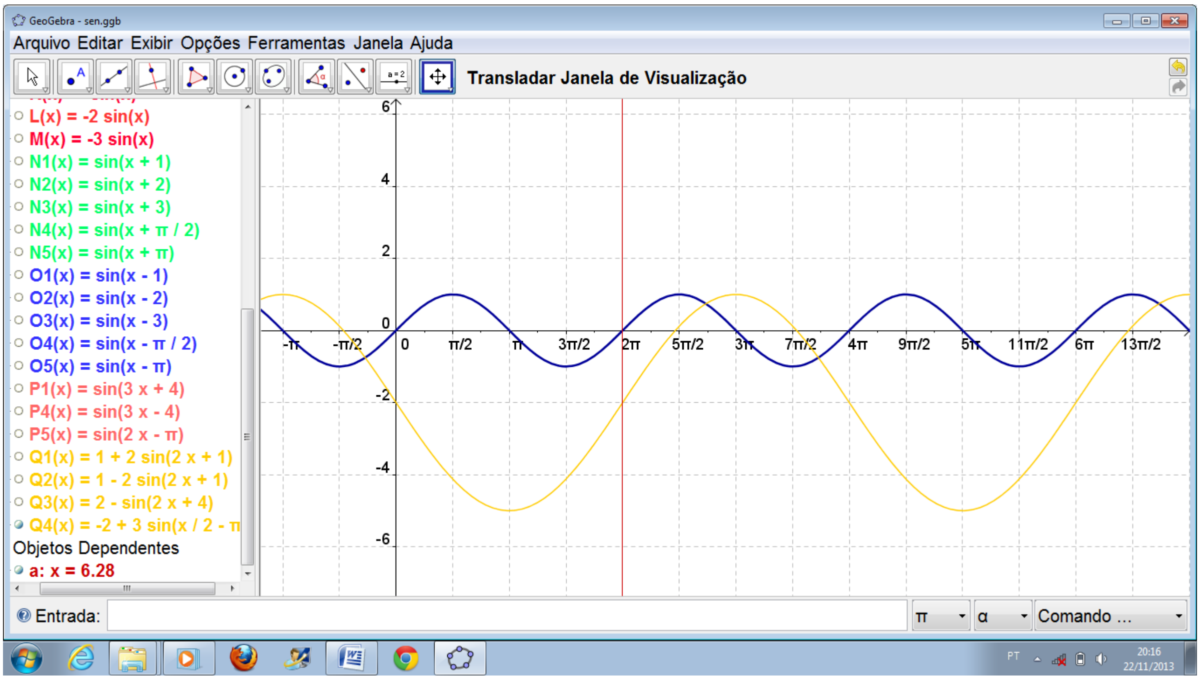
b) O eixo central da função Q3(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?

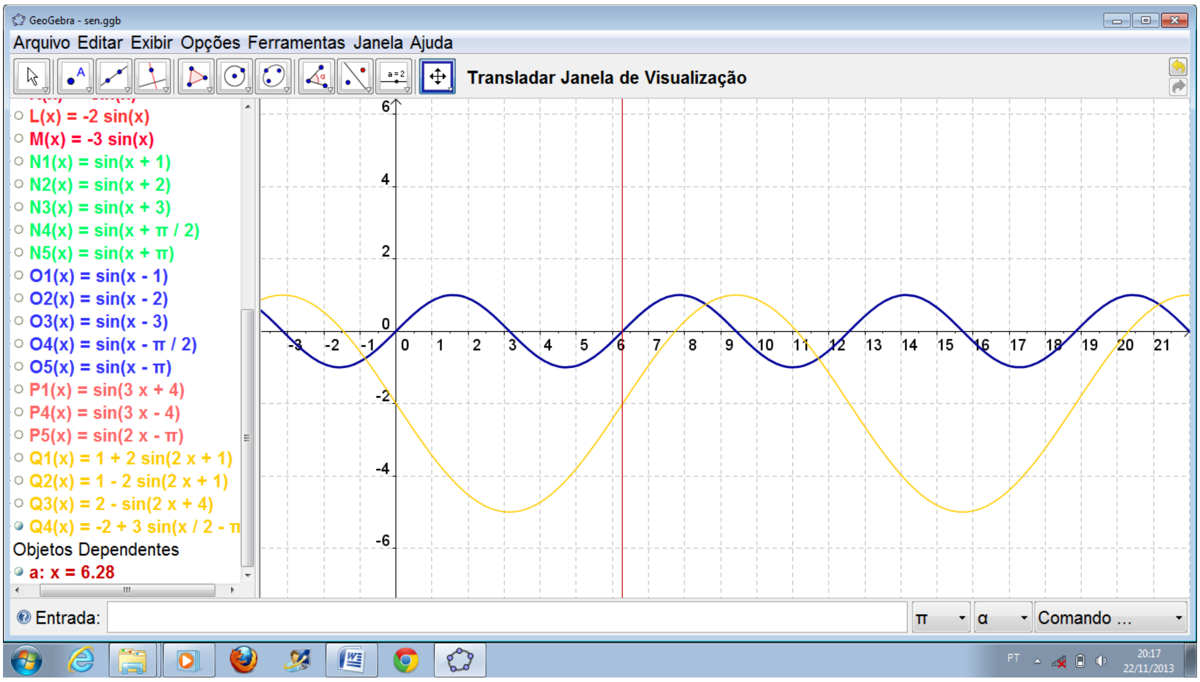
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função Q3(x)?

d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?

e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

34. Representação geométrica da função seno definida como Q4(x) = – 2 + 3 sen (x/2 – π).





A função Q4, possui:

Eixo central passando por – 2 no eixo y, pois a = – 2.

Limite superior e inferior respectivamente 1 e – 5, pois b = 3.

Como b > 0 o deslocamento da função se dará primeiramente em direção ao limite superior.

Existem dois períodos de C(x) em relação ao período de Q4(x), pois c = 1/2.

A função se deslocará 2π para a direita em relação a origem, pois $x/2 - \pi = 0 \rightarrow x = 2\pi$.
Melhor visualização no primeiro gráfico.
Atividade

1) Responda:
a) Qual o período, o domínio e a imagem da função Q4(x)?
b) O eixo central da função Q4(x) passa por qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas)?
c) Qual ponto no eixo y (eixo das ordenadas) que representa o limite superior e o limite inferior da função Q4(x)?
d) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite superior?
e) Qual a distância, no eixo y, do ponto no eixo central ao ponto no limite inferior?

Professor, neste momento, após várias observações e comparações entre as funções, sugerimos que seja feita por sua parte algumas indagações sobre o comportamento das funções trigonométricas senoidais, com relação aos valores de a, b, c, e d $\in \mathbb{R}$ nas funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$. Esse é o momento de fechamento da aula para conclusões finais por parte dos alunos antes que você defina esses parâmetros de modo formal.

Após as conclusões, por parte dos alunos, nossa sugestão para definir uma função seno na forma $f(x) = a + b\,\text{sen}(cx + d)$; é:

- "a" é um ponto que pertence ao eixo das ordenadas e determina por onde passa o eixo central paralelo ao eixo das abscissas.

- "b" somado ao valor de "a" determina o limite superior da função.

- "b" subtraído do valor de "a" determina o limite inferior da função.

- "b" também define o sentido da função à direita do eixo das ordenadas:

  Se $b > 0$, a função se desloca primeiro em direção ao limite superior;

  Se $b < 0$, a função se desloca primeiro em direção do limite inferior.

- "c" determina se uma função é "comprimida" ou "alongada" em relação ao período de 2π, onde:

  Se $c \leq -1$ ou $c \geq 1$, a função se "comprime".

Se $-1 < c < 1$, com $c \neq 0$ a função se “alonga”.

- Determinando o valor de x em $(cx + d) = 0$, obtém-se que:

  Se $x > 0$, a função se deslocará horizontalmente para a direita.

  Se $x < 0$, a função se deslocará horizontalmente para a esquerda.

- Para determinar o período de uma função basta, encontrar o valor de x em $cx = 2\pi$ (ou 6,28, pois $2\pi = 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$ na forma unitária).

7 PROPOSTA DE ATIVIDADE COMPLEMENTAR:

Podemos perceber que o objetivo específico de nossa atividade anterior, era tão somente que o aluno compreendesse a estrutura gráfica das funções trigonométricas quanto aos seus parâmetros que estão relacionados à mudança de amplitude, período, simetria e aos deslocamentos verticais e horizontais, além do entendimento e identificação do domínio e imagem das funções, restaria saber se o aluno ficaria seguro para trabalhar uma aplicação das funções a partir da interpretação dos parâmetros dos gráficos, considerando uma aplicação em um contexto do dia a dia e desta forma vamos propor uma atividade para que sirva de inspiração a professores e alunos que queiram modelar funções periódicas e experimentar o que tem além do trivial.

Em (Souza ,2010 pg 52), foi mostrada uma aplicação das funções trigonométricas bem peculiar; o ciclo cardíaco quando modelado matematicamente, considerando a situação a seguir:

“suponha que a pressão sanguínea de um indivíduo a partir de um instante inicial, t=0, possa ser representada exatamente pela função: $f(t)= 95 - 25\text{sen}\,(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$, sendo t o tempo dado em segundos e f(t) a pressão sanguínea em milímetros de mercúrio t segundos após o instante inicial.”

Desta forma fica fácil perceber que existe uma linha tênue entre a teoria e a prática e que o homem através da matemática, e de softwares como o Geogebra podem sim ser autores de sua própria história.

7.1 Proposta:

Certa capital brasileira, banhada pelo rio Amazonas tem grandes problemas com períodos de chuva intensa e marés lançantes, visto que grande parte da população mora em áreas alagadas. Um pesquisador da universidade local tentando fazer um estudo sobre a regularidade dos períodos de maré conseguiu modelar a função que representa este ciclo: $h(x) = \frac{17}{4} + 2.sen(\frac{\pi}{7}.x)$ na qual x representa o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite quando x=0. Esboçar o gráfico da função determinando seus respectivos período e imagem.

1. Para fazermos a aplicação utilizando o geogebra, vamos partir da função,

   f(x)=senx

2. Construção do gráfico de: $g(x) = sen(\frac{\pi}{7}.x)$.

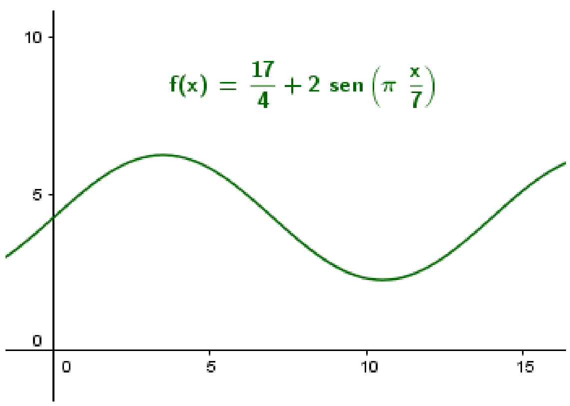
   Observe que o gráfico sofrerá uma ampliação e neste caso o período será 14

3. Construa o gráfico de $h(x) = 2.sen(\frac{\pi}{7}.x)$.

   Observe que o gráfico sofrerá uma ampliação vertical igual ao dobro da amplitude inicial.

4. Construa o gráfico de $j(x) = \frac{17}{4} + 2.sen(\frac{\pi}{7}.x)$

   Observe que o gráfico sofrerá um deslocamento de 17/4 unidades positivas no eixo vertical.



8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As reflexões e atividades propostas nesse trabalho, devem permitir que o canal entre professor e aluno possa ser bem mais dinâmico em relação aos conteúdos e propriedades matemáticas, trabalhadas e aprendidas.

As discursões a cerca de um conteúdo específico como o de funções trigonométricas, podem ser tão ricas e complexas, o quanto quisermos, no entanto a relação máxima do ensino com a aprendizagem deve ser tomada como parâmetro a cada nova experiência.

A expectativa é que as praticas individuais sempre possam ser revistas e registradas afim de que novas experiências possam ser socializadas. Em nosso trabalho as tarefas desenvolvidas, devem permitir que o aluno aplique conteúdos e propriedades matemáticas já vistas, mas em um ambiente dinâmico com a utilização do Geogebra, os breves comentários feitos em cada atividade, direcionam o aplicador da atividade a uma determinada questão, mas não que a atividade em si engesse o aplicador, pois a partir de cada uma delas podem surgir vários questionamentos.

Consideramos que o software, por si só não garante o sucesso nos processos de ensino e aprendizagem, no entanto o conhecimento prévio sobre os conceitos básicos de funções e suas aplicações também são primordiais para que a sequência de estudos nos gráficos tenha um resultado significativo.

É importante compreendermos que a atitude de deixarmos eventualmente na mesma janela duas ou três ações por atividade, permite a visualização e a comparação de transformações nos gráficos a partir de seus parâmetros, fazendo com que o aluno ao resolver as atividades possa vir a perceber algumas generalizações, com isso o processo de modelação de fenômenos a partir das funções trigonométricas deve ficar mais facilitado.

Caso seja o primeiro contato dos alunos com o software é natural que eles fiquem empolgados, se o entendimento for satisfatório, talvez queiram trabalhar inclusive com outras funções, o que enriqueceria a prática pedagógica. É natural que a todo o momento surjam novos questionamentos e possibilidades de explorarmos outras ferramentas do Geogebra, com as mais diversas aplicações, ou mesmo com outros programas, o que de fato vem enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem, com novas metodologias de ensino e a quebra de um grande tabu que é justamente a inserção de novas tecnologias nos processos educativos.

REFERÊNCIAS

1. BEZERRA, Manuel Jairo. Curso de Matemática. Companhia das Letras, 8ª edição, São Paulo, 1962.

2. BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G.(2003). *Informática e Educação Matemática.* 2.ed.,Belo Horizonte: Autêntica.

3. BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: SEF/MEC, 1997.

4. BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros Curriculares nacionais: matemática. Brasília: SEF/MEC, 1998.

5. BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC,SEMTEC, 1999.

6. BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. Parâmetros Curriculares Nacionais. PCN+ Ensino Médio. Brasília: MEC,SEMTEC, 2002.

7. BOYER, C.B. História da Matemática, Editora Blücher, São Paulo, SP, 1974.

8. BRIGUENTI, Maria J. L. Alterando o ensino da trigonometria em escolas públicas de nível médio: a representação de algumas professoras. UNESP: Marilia, 1998. Tese de Doutorado.

9. DAMAZIO, Ademir. A prática docente do professor de matemática: marcas das concepções do livro didático. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V1.2, p.14-25. UFSC: 2006.

10. EVES, H.: Introdução à História da Matemática, Editora da UNICAMP, Campinas, SP, 1997.

11. FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. Revista Zetetiké. Campinas, ano 3, n.4, p. 1-37. 1995.

12. IEZZI, Gelson. MATEMÁTICA: 1ª série, 2º grau – Vol. 2, ATUAL EDITORA LTDA., São Paulo, 2004.

13. MENDES, Iran de Abreu. Histórica no ensino da Matemática: O caso da Trigonometria.Site: http://membros.aveiro-digital.net/matematica/acompanhamento/Iran2.pdf. Consultado em: 31/10/2015.

14.

15. MENDES, Iran Abreu; Fossa, John A. "Conceptions and Attitudes of Mathematics Teachers Towards the History of Matematics as a Pedagogical Device." *História e Educação Matemática*. Vol. II. Portugal/Braga: 1996.

16. MIGUEL, A. Três Estudos sobre História e Educação Matemática. UNICAMP: Campinas, 1993. Tese de Doutorado.

17. MIORIM, Maria Ângela. **Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil.** V CIBEM - Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática. Porto, Portugal, 2005.

18. SOUZA, Rosa Fatima de. Política curricular no Estado de São Paulo nos anos 1980 e 1990. Cad. Pesqui. vol.36 no.127 São Paulo Jan./Apr. 2006.

19. STRUIK, D.J. *.História Concisa Das Matemáticas.*- Trad. de J.C. Santos Guerreiro, Ed. Gradiva, Lisboa, 1992.

20. Dante, Luiz Roberto. Matemática – contexto e aplicações. São Paulo: Editora Ática, 2007. Cap 17, sec. 7.

21. Paiva, Manoel. Matemática – Conceitos, linguagem e aplicações. São Paulo: Moderna, 2007. Vol 2, Cap 10.

22. Boyce, William e di Prima, Richard. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Editora ltc, 2008, 8ª. ed. Cap 10, sec. 2.

21.SOUZA, Maria Helena Soares de; SPINELLI, Walter. Matemática. 2° grau volume 2. Editora Scipione,1996.

22. OLIVEIRA, Carlos André Carneiro de. Trigonometria: O radiano e as funções seno, cosseno e tangente. Campina Grande – PB, 2014. http://www.mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/CarlosAndre.pdf

23. SCHUBRING, G. *Análise histórica de livros de matemática.* Campinas: Autores Associados, 2003. 175p

24. SILVA, Sandro Ricardo Pinto da. Desenvolvimento de material didático teórico e prático de apoio ao ensino de funções trigonométricas utilizando o software *g*eo*g*ebra. Porto Velho, 2013.SOARES, M.B. *Um Olhar Sobre o Livro Didático.* **Presença Pedagógica,** v.2, n.12, p. 53-64, nov./dez. 1996

25. RIBEIRO, Erika da Costa. Material concreto para o ensino da trigonometria. Belo Horizonte, 2011.