Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

O jogo desmata-mata e os números racionais diádicos

Alessandro Costa de Jesus
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

março de 2016

O jogo desmata-mata
e os números racionais diádicos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Alessandro Costa de Jesus e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 24 de junho de 2016.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

J58j Jesus, Alessandro Costa de.
O jogo desmata-mata e os números racionais diádicos / Alessandro Costa de Jesus. -- 2016
xiii, 48 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2016.
Inclui bibliografia.

1. Jogos. 2. Ensino de Matemática. 3. Números. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 21 de Março de 2016 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza

Prof. Dr. Edgar Nascimento

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que me deu todas as condições para concluir este mestrado. A minha família e a minha companheira Eliane, pelo apoio e compreensão da minha ausência. Ao meu orientador Aldi, que sempre me encorajou nos estudos, me dando oportunidades de manter nesta perspectiva. Aos colegas de curso, companheiros de profissão e alunos, pela troca de conhecimentos e experiências. Aos professores do PROFMAT que nos prepararam nas disciplinas, a CAPES e a SBM que elabora/Financia projetos como este para contribuir cada vez mais ao avanço científico na área de matemática.

Muito obrigado a todos.

Não tenha medo de crescer lentamente.

Tenha medo apenas de ficar parado.

Provérbio Chinês.

Resumo

Neste trabalho apresentamos o jogo combinatório Desmata-mata (Hackenbush, em inglês), que consiste de um grafo com arestas azuis e vermelhas, jogado por dois jogadores) e sua relação com números (dos naturais aos racionais diádicos), bem como a soma que torna o conjunto das classes de equivalência de todos os jogos um grupo abeliano. Também descrevemos como é feita a construção desses jogos de maneira formal e nos concentramos, mais especificamente, em mostrar uma relação biunívoca entre uma classe especial desses jogos e o conjunto dos números racionais diádicos. Falaremos ainda sobre a possibilidade de utilização de jogos em sala de aula, de maneira mais geral e de forma particular sobre o uso da teoria de jogos como ferramenta auxiliar no ensino de números reais.

Palavras chave: Jogos, ensino de matemática, números.

Abstract

In this work We present the game combinatorial desmata-mata (Hackenbush in English), which consists of a graph with blue and red edges, played by two players) and their relationship to numbers (from natural to dyadic rational), and the sum makes the set of equivalence classes of all games an abelian group. We also describe how is the construction of these games in a formal way and focus more specifically to show a two-way relationship between a special class of these games and the set of rational dyadic numbers. We'll talk also about the possibility of using classroom games, more generally and in a particular way on the use of game theory as an auxiliary tool in the teaching of real numbers.

Keywords: Games, mathematics teaching, numbers.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

> "Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas."
>
> (PCN 1998)

O aluno que resolve exercícios repetitivos sobre o que foi exposto em sala de aula não está pensando nem aprendendo algo novo. No entanto, se lhe for apresentado um jogo, uma atividade lúdica e desafiante, ele buscará suas próprias estratégias, encorajando sua criatividade e interação com os outros alunos e participando efetivamente da construção do seu conhecimento lógico-matemático, consequentemente estimula o interesse e o prazer pela matemática. O jogo pode ainda propiciar um estímulo às estimativas e ao cálculo mental.

Nesse trabalho procuramos desenvolver um material que pode servir como fonte de motivação para uma proposta de atividade com alunos e como conhecimento matemático relevante, principalmente para professores e estudantes de Matemática, não só como componente curricular, mas também para quem aprecia a matemática por si só.

No primeiro capítulo, definimos jogos combinatórios, depois, com alguns exemplos, são determinadas as regras, como são os lances e quando o jogo acaba. Intuitivamente, mostramos a relação entre os jogos e os números, definimos a soma, os sinais dos jogos e consequentemente associamos cada número inteiro com uma classe de jogos. Ainda nos exemplos iniciais, analisamos jogos para calcular o seu valor através de uma certa estratégia e, ao mesmo tempo, introduzindo a ideia das opções de cada jogador, que ajudam a entender as notações e definições da parte formal do trabalho.

No segundo capítulo, agora de maneira formal, definiremos recursivamente jogo, construindo os jogos separando em gerações, sempre associando-os com desmata-mata e denominando um valor a cada um deles. De forma breve, definimos formalmente a soma e provamos as propriedades, que indicam que as classes de equivalência de jogos formam um grupo abeliano. Depois disso, restringimos ao estudo de uma classe específica de jogos chamados de troncos e apresentamos a regra que calcula o valor desses jogos. A partir disso mostramos que há uma relação biunívoca entre os números racionais diádicos e classe jogos.

No terceiro capítulo, abordamos algumas teorias baseadas em duas teses de doutorado em educação, justificando o uso de jogos como metodologia para o ensino de matemática e, de maneira mais específica, uma proposta de abordagem da teoria de jogos combinatórios no ensino do conceito de números reais como complemento da abordagem "clássica. "

Capítulo 1

Conhecendo e explorando o jogo

"O que é desmata-mata?", "Como se joga?", "O que esse jogo tem a ver com números?". Nesse capítulo, apresentamos, de maneira intuitiva, as respostas para essas perguntas.

1.1 Jogos combinatórios

Jogos combinatórios são jogos sem informação oculta e não há elementos fortuitos[1]. Dentre eles, estão jogos mudialmente conhecidos como jogo da velha, damas, xadrez e outros um pouco menos comuns, que incluem abstrações matemáticas, jogadas geralmente em tabuleiros e grafos que é o caso do jogo que apresentaremos neste trabalho. São exemplos de jogos não combinatórios: truco (envolve o elemento sorte), dominó (um jogador não pode prever as possíveis jogadas do outro) e futebol (a habilidade de cada jogador torna esportes jogos com resultados imprevisíveis).

A teoria matemática dos jogos combinatórios tem vários objetivos inter-relacionados, incluindo:

– soluções exatas para jogos particulares, geralmente sob a forma de uma descrição algébrica dos seus resultados;

– uma compreensão da estrutura geral combinatória de jogos; e

– resultados rígidos para determinados jogos, ou em certas situações onde não existe uma solução concisa.

[1]Significa que não há jogadas que não sejam previstas pelos dois jogadores, em outras palavras, os jogadores sabem tudo sobre o que ocorre no jogo a cada lance.

Em todos os jogos considerados neste trabalho, haverá apenas dois jogadores que jogam alternadamente e cujos movimentos afetam a posição de uma maneira definida pelas regras do jogo. Ambos os jogadores terão conhecimento completo do estado do jogo em todos os momentos (nenhuma informação oculta), e o efeito de cada movimento será inteiramente conhecido antes da mudança que será feita (não há elementos fortuitos).

1.2 Desmata-mata

Desmata-mata é um jogo combinatório, jogado por dois jogadores denominados Azul e Vermelho em que a posição inicial é um grafo com arestas nas cores azul e vermelho, onde pelo menos uma aresta é conectada a uma linha tracejada chamado de “solo”.

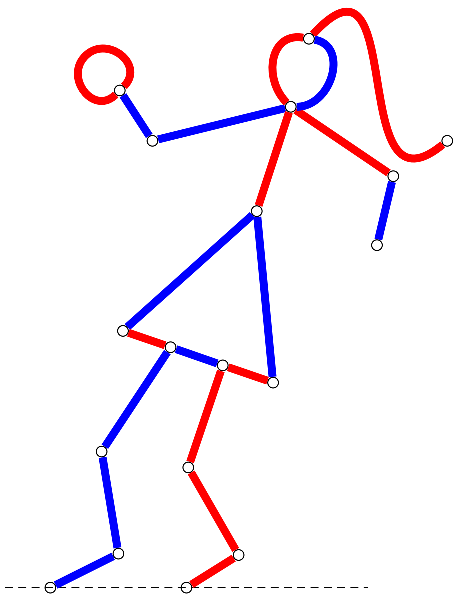

Figura 1.1: Posição inicial de um jogo desmata-mata.

É comum também denominar os jogadores por Esquerdo e Direito, que correspondem aos jogadores Azul e Vermelho, respectivamente. Existem outras versões do jogo, por exemplo, com arestas apenas de uma cor, onde os jogadores podem retirar qualquer aresta e que é equivalente ao jogo nim, mas que não será incluso neste trabalho, essa versão está descrita em Teixeira (2013).

1.2.1 Como se joga?

Na vez do jogador Azul ele pode retirar do jogo qualquer aresta azul, e na vez do jogador Vermelho ele pode excluir qualquer aresta vermelha. São retirados do jogo os nós e as arestas que são desconectadas do solo depois de um lance. Se o jogador, em sua vez, não tem lances válidos, ele é declarado perdedor. Um aplicativo grátis do jogo (para *Windows* e *Mac*), com menu em inglês, pode ser baixado no link *http://geometer.org/hackenbush/index.html*

Exemplo 1 *Vamos analisar as possibilidades de jogadas para cada jogador no jogo da figura 1.2.*

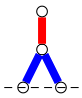

Figura 1.2: Jogo 1

Primeira jogada:

- *Existem duas possibilidades para o jogador Azul, pois existem duas arestas azuis.*
- *Como há apenas uma aresta vermelha, o jogador Vermelho tem apenas uma opção para a primeira jogada.*

Na figura 1.3 estão separadas as possibilidades de cada jogador por uma barra, do lado

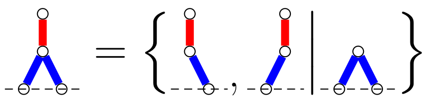

Figura 1.3: Opções para uma primeira jogada do jogo 1.

esquerdo estão os grafos relativos às possibilidades do jogador Azul e do lado direito está a única do Vermelho.

Segunda jogada:

- *Se Vermelho jogou primeiro, sobrará o jogo da figura 1.4.*

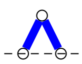

Figura 1.4: Quais são os possíveis lances do jogador Azul?

Neste jogo, Azul retira uma das arestas e restará uma azul, ou seja, na próxima jogada não há opções para Vermelho, assim Azul vence.

– *Se Azul começou jogando, agora é a vez de Vermelho, nas duas opções se for retirada a única aresta vermelha, restará apenas uma azul, essas opções estão representadas pelas figuras 1.5, assim, na próxima jogada, será retirada por Azul, não restando possibilidades para Vermelho. Portanto, como no outro caso, Azul vencerá o jogo.*

Figura 1.5: Opções da segunda jogada de Vermelho

Exemplo 2 *Vamos analisar as possibilidades de jogadas para cada jogador no jogo da figura 1.6.*

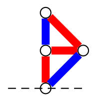

Figura 1.6: Jogo 2

Primeira jogada:

– *Existem duas possibilidades para o jogador Azul, pois existem duas arestas azuis.*

– *Como há apenas três arestas vermelhas, o jogador Vermelho tem três opções para a primeira jogada.*

Na figura 1.7 estão representadas as possibilidades de cada jogador,

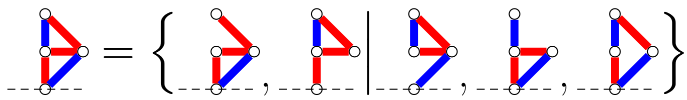

Figura 1.7: Opções da primeira jogada do jogo 2

Como no exemplo 1, a partir da primeira jogada, para verificar a próxima são verificadas as opções do outro jogador, pois, a vez é sempre alternada entre os jogadores.

Segunda jogada: jogador Azul:

Para as opções de primeira jogada do Vermelho, temos as opções para a segunda jogada de Azul como mostram as figuras

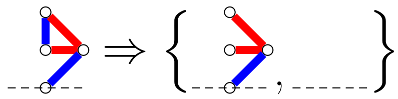

Figura 1.8: Opção 1, segundo lance Vermelho

Observe que nessa jogada Azul pode antecipar sua vitória escolhendo retirar a aresta conectada ao solo deixando nada para a vez seguinte. E mesmo que fizer a outra escolha é evidente que ele o fará na próxima jogada, e assim vencerá da mesma forma.

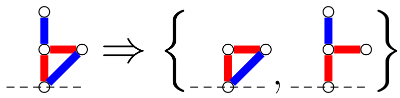

Figura 1.9: Opção 2, segundo lance Vermelho

Na segunda escolha, há apenas uma aresta vermelha conectada ao solo, então na próxima jogada vermelho pode retirá-la e vencer, ou pode retirar a outra, mas irá apenas adiar a sua vitória. O jogo que resta da primeira escolha depende da próxima jogada, se Vermelho for esperto e retirar a aresta que não está conectada ao solo vencerá depois de mais uma rodada, caso contrário, na terceira jogada de Azul ele retira a sua aresta conectada ao solo e de quebra a vermelha também será excluída. Aqui existem três maneiras de Azul vencer, contra uma de Vermelho.

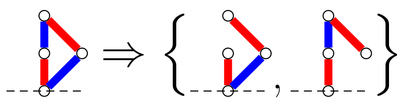

Figura 1.10: Opção 3, segundo lance Vermelho

A análise dessas escolhas é análoga em relação as escolhas da opção 2.

Segunda jogada: jogador Vermelho:

Para as opções de Azul, temos

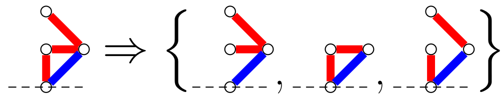

Figura 1.11: Opção 1, segundo lance Azul

Na primeira escolha, o Azul vence na próxima jogada, pois serão desconectadas todas as arestas, ou seja, não sobrará lance para uma eventual terceira jogada de Vermelho. Na segunda escolha Vermelho vence, porque depois da jogada de Azul ainda restará duas arestas vermelhas, não restando lances para uma terceira jogada de Azul. Na última opção Vermelho também vence, pois, sobrará uma aresta vermelha após a segunda jogada de Azul.

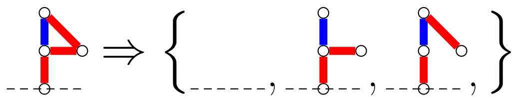

Figura 1.12: Opção 2, segundo lance Azul

Este é o pior lance que o jogador Azul poderia ter feito na primeira jogada. Na primeira escolha o jogador Azul já está sem opções, logo, perde antes de fazer sua segunda jogada. A segunda escolha deixa para Azul um lance que resultará num jogo com duas arestas vermelhas e que implicará em sua derrota na terceira jogada, assim como na terceira escolha, com a diferença que, em vez de duas arestas vermelhas, restará apenas uma opção para uma terceira jogada de Vermelho, que é o suficiente para vencer o jogo.

Neste exemplo, fizemos uma análise do final do jogo já na segunda jogada, mas poderíamos ter descrito todos os lances e posições até chegar a um vencedor. Dessa maneira, pode-se fazer um mapa do jogo, onde é possível saber das estratégias vencedoras do jogo para cada jogador, olhando do fim para o início, ou seja, do último lance para o primeiro. Esse mapa é chamado de árvore do jogo por Teixeira (2013) e pode ser feito para qualquer jogo combinatório.

1.2.2 Regra de sinais de um jogo

Inicialmente convencionamos que:

– Se Azul vence, independente de quem começa, o jogo é denominado positivo.

– Se Vermelho vence, independente de quem começa, o jogo é denominado negativo.

– Se quem começa perde, diremos que o jogo é nulo.

Em outras palavras, se em um jogo G :

1. quem começa perde, então $G = 0$;

2. Azul sempre ganha, então $G > 0$;

3. Vermelho sempre ganha, então $G < 0$.

No jogo de desmata-mata não há a possibilidade de quem começa ganha. De fato, os dois jogadores devem fazer sempre a melhor jogada, além disso, quem começa geralmente está em desvantagem, pois vence quem conseguir permanecer arestas por mais lances. Suponha que o jogador Azul vença se começar (se fosse Vermelho, a análise seria análoga), isso significa que não existe uma jogada que Vermelho pode fazer para vencer o jogo. Se Vermelho não vence quando, em sua vez, o jogo tem uma aresta a menos que no jogo inicial, então não vencerá com uma aresta a mais, nesse caso Vermelho começaria jogando. Portanto quem começa jogando e ganha, vai ganhar também se não começar.

1.2.3 Jogos com arestas de uma mesma cor.

Jogos determinados por grafos com arestas apenas na cor azul são positivos, pois Vermelho não tem lances válidos. De forma analoga, os grafos formados por arestas vermelhas representam jogos negativos.
Convencionando que o valor absoluto desses jogos é dado pelo número de arestas que contém o grafo, podemos associar a cada número inteiro um jogo.

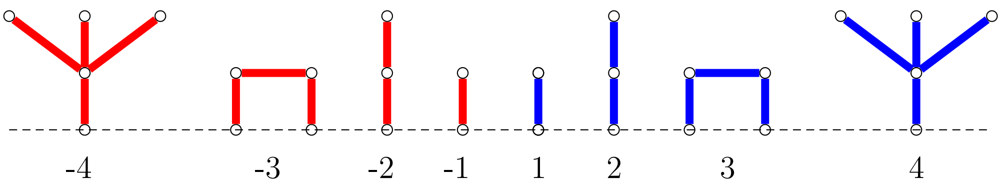

Figura 1.13: Exemplo de inteiros.

1.2.4 Soma de jogos

Para somar dois jogos, basta colocar os grafos, relativos a cada um deles, lado a lado formando um novo jogo, cujo valor é dado pela soma dos valores de cada jogo.

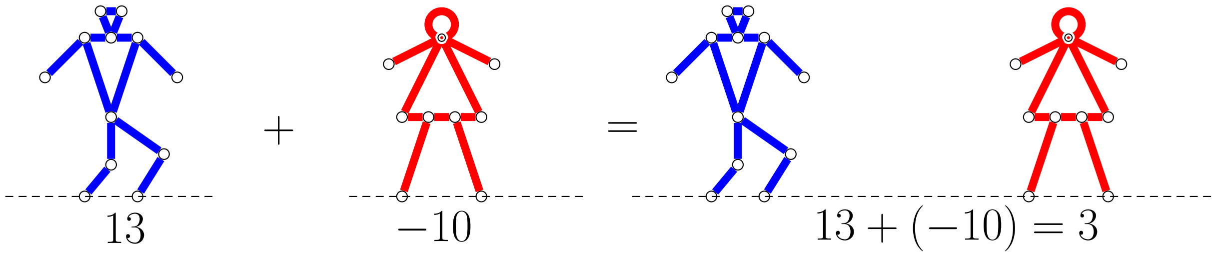

Figura 1.14: Soma

Exemplo 3

Como o grafo da primeira parcela possui 13 arestas azuis e o grafo da segunda parcela possui 10 arestas vermelhas o jogador Azul vence, pois permanecerá com arestas no fim do jogo, se começar jogando ou não. Assim, o jogo é positivo, por isso é razoável atribuir o valor 13+(-10)=3.

Generalizando, temos:

Se um jogo é formado por um grafo todo azul com m arestas e outro grafo todo vermelho com n arestas, temos:

a) se $m > n$ o jogador azul vencerá e sobrará $m - n > 0$ arestas azuis. Então seu valor será $m - n$.

b) se $m < n$ o jogador vermelho vencerá e sobrará $n - m$ arestas vermelhas. Então seu valor será $-(m - n)$.

1.2.5 Valor de jogos de arestas com cores alternadas

Nem sempre é fácil dizer se um jogador vence apenas contando as arestas de cada cor. Vale ressaltar que sempre devemos considerar que cada jogador jogue da melhor maneira possível. Nos exemplos a seguir, veremos exemplos de jogos com valores não inteiros. Para alguns exemplos de jogos "pequenos" podemos encontrar o valor do jogo através de algumas tentativas, mas isso não é uma tarefa fácil para jogos mais complexos.

Exemplo 4 (Simetria e jogos nulos)

Para calcular o valor de um jogo é preciso antes conhecer e relacionar os conceitos de jogo nulo e jogos simétricos. Observe o jogo da figura 1.15:

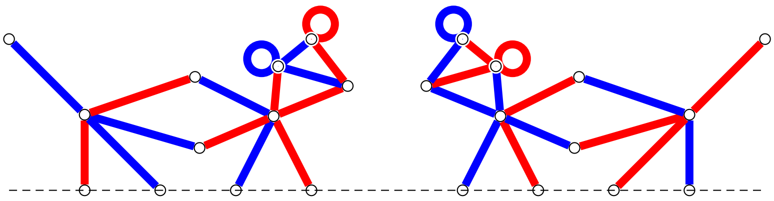

Figura 1.15: $G + (-G) = 0$

Digamos que o primeiro grafo corresponda a um jogo G, na figura 1.15 o segundo grafo é simétrico ao primeiro em relação as cores, logo o número de arestas de cada cor, juntando os dois grafos, é o mesmo. Uma estratégia para que o segundo jogador ganhe é imitar os lances do primeiro jogador, ou seja, retirar a aresta correspondente no grafo oposto. Dessa forma, o segundo jogador em sua última jogada, deixa o jogo zero (nenhuma aresta ligada ao solo) para o primeiro, em outras palavras, quem começa perde, então este jogo vale zero, isso significa que o segundo grafo é o oposto em valor ao primeiro, logo o indicaremos por $-G$. A estratégia para vencer jogos simétricos é chamada de "Tweedledum and Tweedledee Argument" por Conway (2001).

Exemplo 5 *[jogo x] Vamos calcular quanto vale o jogo da figura 1.16:*

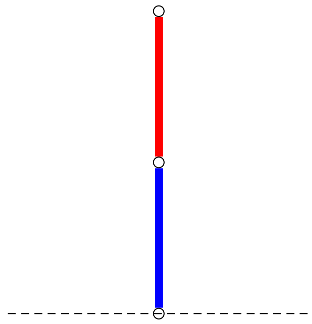

Figura 1.16: Quanto vale x?

Observe que o jogo não é nulo, pois Azul vence o jogo, não importa quem comece, logo $x > 0$.

- Se Azul começa, ele retira a única aresta azul do jogo, e consequentemente a vermelha é excluída por não estar conectada ao solo, dessa forma na vez de Vermelho não terá lances válidos.

– Se Vermelho começa ele deixa a aresta azul, ou seja, o jogo 1 logo Azul vence.

Como fizemos nos primeiros exemplos desse trabalho (páginas 5 a 8), podemos dividir as opções dos jogadores, nesse caso fica como na figura 1.17

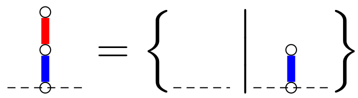

Figura 1.17: Opções dos jogadores no jogo x

Do lado esquerdo, o jogo vale zero e do lado direito 1, como denominamos o jogo por x, podemos usar a notação $x = \{0|1\}$ para representar o jogo através das possibilidades dos jogadores. Veremos, no próximo capítulo, na formalização do jogo, que essa notação será usada. Para descobrir o valor de um jogo, geralmente, somamos um jogo com valor já conhecido verificando se nele quem começa perde, ou seja, se ele é nulo. Vamos verificar se $x = 1$. Para isso vamos adicionar o jogo -1, assim o jogo da figura 1.18 é $x + (-1)$ ou simplesmente $x - 1$. Resumindo, verifica-se se o jogo $x - 1$ é nulo para saber se ele vale 1.

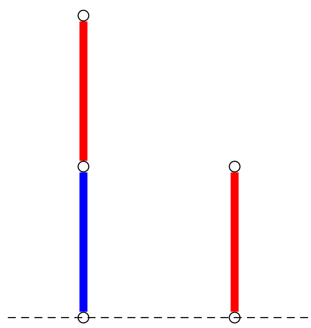

Figura 1.18: $x + (-1)$

Se Vermelho começa jogando, o melhor lance é retirar a aresta vermelha do topo, pois essa será eliminada na jogada de azul o que resultaria em sua derrota. Se Azul começa, a aresta azul é retirada sobrando apenas a aresta vermelha ao lado. Portanto, não importa quem comece, Vermelho vence, logo o jogo é negativo, isto é, $x + (-1) = x - 1 < 0$, então $x < 1$ e assim $0 < x < 1$. Observe que as opções de $x = \{0|1\}$ parecem delimitar o valor deste jogo.

Já que o valor de x está entre 0 e 1, vamos verificar se vale $\frac{1}{2}$, para isso, consideremos o jogo $x + x - 1$ como na figura 1.19,

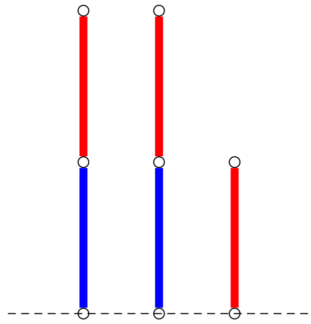

Figura 1.19: $x + x + (-1)$

Se é a vez de Azul, ele retira uma aresta azul e consequentemente um dos grafos que representa o jogo x restando o jogo $x - 1$, como sabemos, é negativo, então Vermelho vence.

Se é a vez de Vermelho, a melhor jogada é retirar uma aresta do topo de um dos dois primeiros grafos, por exemplo, se for do primeiro, sobra o jogo $1 + x + (-1) = x$, como x é positivo, Azul ganha. Nesse jogo quem começa perde, então $x + x - 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

Na outra notação fica $x = \{0|1\} = \dfrac{1}{2}$.

Exemplo 6 *[Jogo y]Agora vamos analisar o valor do jogo na figura 1.20:*

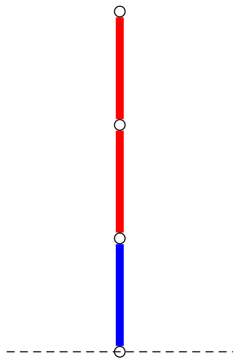

Figura 1.20: Quanto vale y?

– Se Azul começar, ele retira a aresta azul e não sobrará nada para o jogador vermelho, então o azul vence.

– Se o jogador Vermelho começa, ele tira a aresta vermelha mais alta restando o jogo x logo, o Azul vence.

Essas opções do jogo estão representadas na figura 1.21.

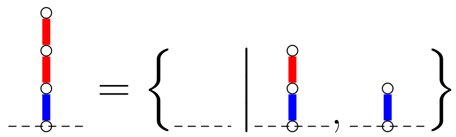

Figura 1.21: Opções dos jogadores no jogo y

Esse jogo y é positivo, por ter uma única aresta azul “sustentando” as outras, qualquer jogo que tenha essa característica é positivo, isto é, Azul sempre vence. Na notação das possibilidades, temos $y = \left\{0 \middle| \frac{1}{2}, 1\right\}$, como foi dito, consideramos que os jogadores jogam da melhor maneira possível, a melhor jogada possível para o azul é o maior valor possível, pois, para Azul quanto mais positivo melhor, e a melhor jogada para Vermelho acontece quando é deixado a menor possibilidade, pois para que vermelho vença, quanto mais negativo for o jogo melhor. Azul tem apenas uma opção, mas Vermelho tem duas, a menor delas é deixar o jogo $\frac{1}{2}$, assim $y = \left\{0 \middle| \frac{1}{2}\right\}$. As opções de y delimitam o seu valor, como no jogo x ? Para responder essa pergunta deve-se verificar se $y + (-x)$ é negativo.

Vamos analisar o sinal de $y - x = y - \frac{1}{2}$, observando a figura 1.22

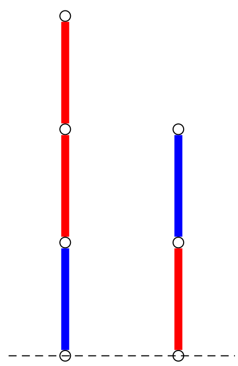

Figura 1.22: $y + \left(-\frac{1}{2}\right)$

Veremos primeiro que $y < \frac{1}{2}$.

– Se Azul começar, retira a aresta azul do topo do segundo grafo, que pode ser retirada na próxima jogada, mas, ainda assim, ficará o jogo $y - 1$ que é um jogo negativo (observe que a opção de Azul é deixar o jogo -1 e as opções de Vermelho deixam os jogos $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ e $1 - 1 = 0$), então Vermelho vence.

– Se o jogador Vermelho começa, ele tira a aresta vermelha do topo do primeiro grafo, sobrará um jogo nulo, pois sobra dois jogos simétricos, assim o jogador Vermelho vence, pois a próxima jogada é de Azul.

Com isso confirmamos que $0 < y < \frac{1}{2}$, vamos ver agora que $y = \frac{1}{4}$, ou seja, $y + y - \frac{1}{2}$ é nulo.

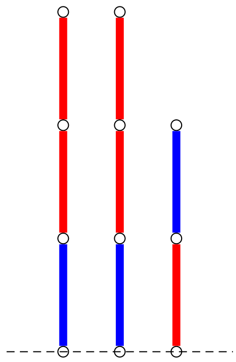

Figura 1.23: $y + y - \frac{1}{2}$

– Se Azul começar, ele retira a aresta azul do topo do segundo grafo, que pode ser retirada na próxima jogada, ainda assim, ficará o jogo $y + y - 1$, mas $y < \frac{1}{2}$, logo $y + y < 1$ e portanto, Vermelho vence.

– Se o jogador Vermelho começa, ele tira a aresta vermelha do topo de um dos primeiros grafos, por exemplo, se retirar do primeiro deixará o jogo $\frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} = y$ que, como vimos, é positivo e assim Azul vence.

$$\therefore y = \frac{1}{4}$$

Exemplo 7 (Jogo z_n) *Denotamos por z_n, o jogo que possuí uma única aresta conectada ao solo, de cor azul, e n arestas vermelhas, com a condição de que cada nó una apenas duas arestas, como está representado na figura 1.24. Vamos encontrar o valor de z_n, usando a mesma ideia dos exemplos 5 e 6 que são correspondentes a z_1 e z_2, respectivamente.*

Em outras palavras, mostraremos que

$$z_n = \frac{1}{2^n}$$

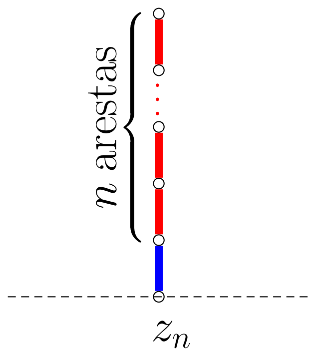

Figura 1.24: Caso genérico.

1. O caso base já está provado, pois $z_1 = x = \dfrac{1}{2}$ e $z_2 = y = \dfrac{1}{4}$.

2. Suponha que a proposição é válida para $n-1$, isto é,

$$z_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Observe que z_n é positivo, pois na jogada de Azul são retiradas todas arestas do jogo e se Vermelho começa, seu melhor lance é retirar a n-ésima aresta vermelha, restando assim $n-1$ arestas vermelhas, isto é, o jogo z_{n-1}, que é positivo e portanto Azul vence.

O próximo passo é mostrar que $z_n < z_{n-1}$. Para isso observemos a figura

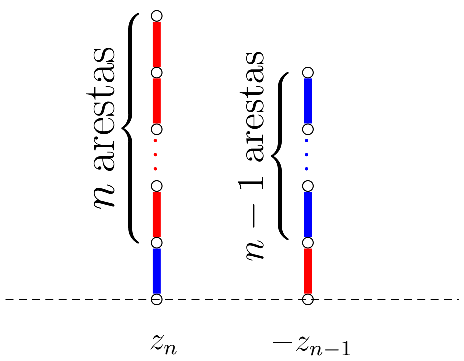

Figura 1.25: $z_n + (-z_{n-1})$

- Se o Azul começar, ele retira a aresta azul do topo de z_{n-1} ficando o jogo $z_n + (-z_{n-2})$, aí será a vez de Vermelho que retira a aresta do topo do primeiro grafo, deixando o jogo $z_{n-1} + (-z_{n-2})$, e dessa forma chegaremos, logo após o $(n-1)$-ésimo lance de Vermelho, ao jogo $z_1 + (-1) = x - 1$ que é negativo e portanto, Vermelho vence.

- Se o jogador Vermelho começa, ele retira a aresta vermelha do topo do primeiro grafo, ou seja, de z_n, restando um jogo nulo, como o próximo a jogar é Azul, então ele perderá.

Agora vamos usar o que acabamos de mostrar para concluir que $z_n + z_n + (-z_{n-1})$ vale zero.

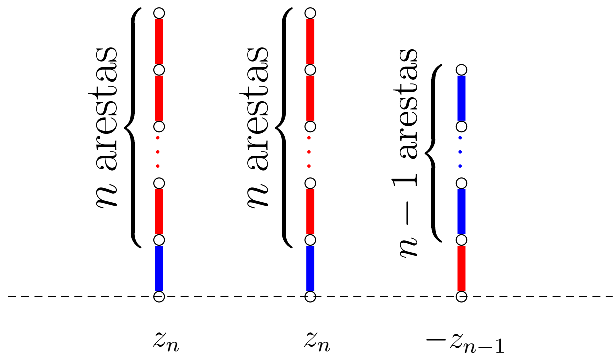

Figura 1.26: $z_n + z_n + (-z_{n-1})$

– Se o Azul começar, ele retira a aresta do topo do terceiro grafo, ou seja, ele deixa o jogo $z_n + z_n + (-z_{n-2})$, daí, em sua primeira jogada Vermelho retira aresta de um dos dois primeiros grafos, deixando o jogo (a menos de ordem) $z_n + z_{n-1} + (-z_{n-2})$, e assim sempre alternando lances retirando arestas do topo, no lance $n-1$ teremos $z_s + z_s + (-1)$ se n é ímpar e $z_r + z_{r-1} + (-1)$ se n é par, onde $s = n - \frac{n-1}{2}$ e $r = n - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ com $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ parte inteira do número $\frac{n-1}{2}$. Dessa forma, para $n > 2$, é garantido que existam, pelo menos, mais duas arestas vermelhas no primeiro grafo e, no mínimo, mais uma no segundo grafo, além da aresta vermelha no terceiro. Nos dois próximos lances de Azul serão eliminados os dois primeiros grafos, restando apenas uma aresta vermelha e, sendo assim, Vermelho vence.

– Se o jogador Vermelho começa, ele retira a aresta vermelha do topo de um dos dois primeiros grafos. Como não fará diferença, digamos que esta é retirada é feita no segundo grafo, então restará o jogo $z_n + z_{n-1} + (-z_{n-1}) = z_n$, que é positivo e portanto Azul vence.

Portanto $2z_n = z_{n-1}$, ou seja, $z_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$.

Capítulo 2

Formalização

John Horton Conway (Liverpool, 26 de dezembro de 1937), inventou um novo conjunto de números, os números surreais, que são intimamente relacionados com jogos desmata-mata (em inglês, Hackenbush) e foram o tema de um romance matemático de Donald Knuth (Knuth (1974)). Um de seus livros o "On numbers and Games"(Conway (2001)) é a principal referência na teoria de jogos combinatórios. O objetivo desse capítulo é apresentar uma introdução sobre essa teoria.

Primeiro, daremos a definição formal de jogos e a operação de soma. Em seguida, mostraremos como associar números inteiros e, mais geralmente, racionais diádicos a jogos e, como resultado principal do nosso trabalho, uma bijeção entre uma classe de jogos chamada de troncos finitos e os números racionais diádicos.

2.1 Definição de jogo

Formalmente, um jogo G é um par ordenado $(\mathcal{G}^A|\mathcal{G}^V)$, onde $\mathcal{G}^A$ e $\mathcal{G}^V$ são conjuntos de jogos"previamente definidos". À esquerda estão as opções do jogador Azul e à direita as opções do jogador Vermelho. Podemos escrever

$$G = \{\mathcal{G}^A|\mathcal{G}^V\}$$

Embora geralmente nós vamos listar as opções de G explicitamente:

$$G = \{\{G_1^A, G_2^A, \ldots, G_m^A, \ldots\}|\{G_1^V, G_2^V, \ldots, G_m^V, \ldots\}\}$$

ou, por abuso de notação escrevemos

$$G = \{G_1^A, G_2^A, \ldots, G_m^A, \ldots | G_1^V, G_2^V, \ldots, G_m^V, \ldots\}$$

Como trabalhamos com a hipótese que as jogadas são as melhores[1] possíveis, se G^A for a melhor opção de Azul e G^V a de vermelho, o jogo pode ser descrito simplesmente por

$$G = \{G^A | G^V\}$$

Essa notação é perfeitamente compatível com o que vimos na parte intuitiva.

Exemplo 8 *Na figura 2.1, estão representadas as únicas opções dos jogadores para a primeira jogada.*

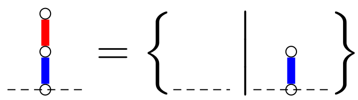

Figura 2.1: Notação formal

O jogo sem arestas é um jogo nulo, pois, quem começa perde. Colocando os valores das opções (que também representam jogos), temos a seguinte notação

$$x = \{0|1\}$$

Exemplo 9 *Na figura 2.2, estão representadas as opções dos jogadores para a primeira jogada, relativos ao jogo t. Porém, as melhores jogadas são aquelas em que o jogador fica com mais arestas, após sua jogada. Atribuindo os valores relativos para as melhores jogadas temos* $t = \left\{ \frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2} \right\}$.

[1]Para Vermelho quanto mais negativo é o jogo, melhor para ele será. Já para Azul o melhor lance é aquele que deixa o jogo mais positivo possível, em outras palavras, G^A é o maior elemento de $\mathcal{G}^A$ e G^V é o menor elemento de $\mathcal{G}^V$.

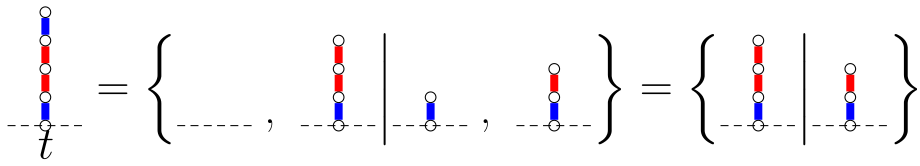

Figura 2.2: Exemplo da notação formal - melhor jogada

2.1.1 Construção dos jogos

A construção dos jogos é feita de forma recursiva, a partir de dois axiomas, para que a formalização fique compatível com a parte intuitiva.

Axioma 1 *Cada número corresponde a dois conjuntos de números previamente criados, de tal modo que nenhum membro do conjunto da esquerda é maior ou igual a qualquer um dos membros do conjunto da direita.*

Se $G = \{\mathcal{G}^A|\mathcal{G}^V\}$, então para todo $G^A \in \mathcal{G}^A$ e todo $G^V \in \mathcal{G}^V$ temos que $G^A \ngeq G^V$.

Esse axioma exclui, entre outros jogos, os do tipo quem começa ganha, que não representam jogos desmata-mata. Uma interpretação disso é que não faz sentido o jogador Azul fazer uma jogada que beneficie mais o jogador Vermelho que a si próprio, e vice-versa.

Axioma 2 *Um número é menor ou igual a outro número, se, e somente se nenhum membro do conjunto esquerda do primeiro número é maior ou igual aos do segundo número, e nenhum membro da direita do segundo número é inferior ou igual ao primeiro número.*

Sejam $G = \{\mathcal{G}^A|\mathcal{G}^V\}$ e $H = \{\mathcal{H}^A|\mathcal{H}^V\}$, temos

$G < H \iff G^A \ngeq H^A$ e $G^V \nleq H^V$ para todo $G^A \in \mathcal{G}^A$, $G^V \in \mathcal{G}^V$,$H^A \in \mathcal{H}^A$ e $H^V \in \mathcal{H}^V$.

Esse axioma define a ordem e como verificar o primeiro axioma dos jogos que vão ser construídos, na prática, conhecendo o valor do jogo é só usar a mesma desigualdade dos números que já conhecemos.

Na geração zero, como não há jogos criados, ou seja, $G^A = G^V = \emptyset$, então o primeiro jogo é $0 = \{\emptyset|\emptyset\}$, que na notação mais simples fica

$$\{\ |\ \} = 0$$

Os espaços vazios na notação interpretados como a falta de opções dos jogadores e por isso o jogo 0, é representado pelo jogo que não possui arestas, dessa forma, quem começa perde.

Figura 2.3: primeiro jogo

Primeria Geração:

As opções para G^A e G^V são 0 ou $\emptyset$, dessa forma são criados os jogos:

$$\{\emptyset|\{0\}\} = \{\ |0\} := -1$$

Pode ser representado pelo jogo da figura

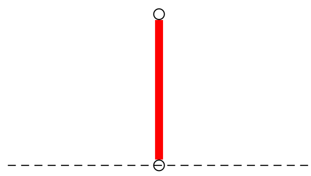

Figura 2.4: -1

Se jogador Azul começa, ele não tem movimentos válidos e se Vermelho começa, ele deixa o jogo zero.

Outro jogo é

$$\{\{0\}|\emptyset\} = \{0|\ \} := 1$$

Pode ser representado pelo jogo da figura

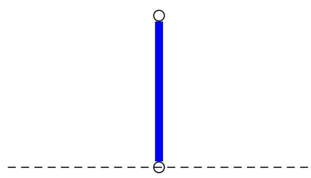

Figura 2.5: 1

Se jogador Azul começa, ele deixa o jogo 0 e se Vermelho começa, ele não tem lances válidos.

O jogo $\{\{0\}|\{0\}\} = \{0|0\}$ é descartado, pois, não satisfaz o axioma 1. De fato, $0 \geq 0$.

Segunda Geração:

Agora as opções para G^A e G^V são 0,$\emptyset$,1 e -1, sempre consideramos as melhores opções para os conjuntos, por exemplo, o conjunto $\{0,-1\} = \{0\}$ quando pensamos nas opções da esquerda, ou seja, $\{\{0,-1\}|\} = \{\{0\}|\} = \{0|\ \}$, em outras palavras, usaremos apenas a maior opção do lado esquerdo e a menor opção do lado direito. Nessa geração, tirando os casos que não satisfazem os axiomas 1 e 2, são criados mais 4 jogos, são eles

$$\{\ |-1\} := -2$$

Esse jogo pode ser representado pelo jogo da figura

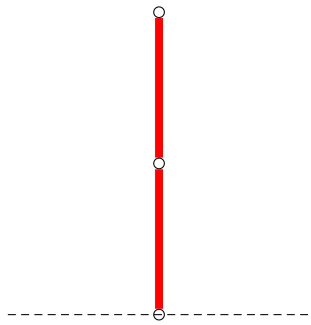

Figura 2.6: -2

Nesse jogo Azul não tem opções, já o jogador Vermelho pode retirar a aresta do topo deixar uma aresta vermelha, ou seja, o jogo -1.

$$\{1|\ \} := 2$$

Pode ser representado pelo jogo da figura

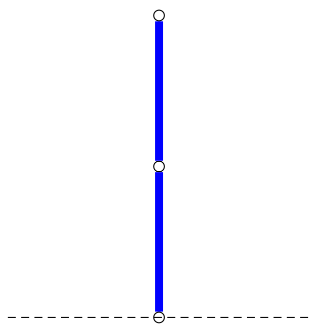

Figura 2.7: 2

Se Azul começa jogando, ele deixa uma aresta azul, ou seja, o jogo equivalente ao número 1, o jogador Vermelho não tem jogadas válidas para uma primeira jogada.

$$\{-1\ |0\} := -\frac{1}{2}$$

Esse jogo pode ser representado pelo jogo da figura

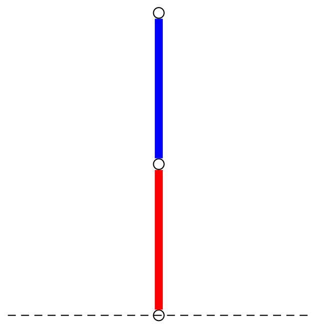

Figura 2.8: $-\dfrac{1}{2}$

Se azul começa jogando, sobra uma aresta vermelha, ou seja -1 e se Vermelho inicia, ele retira a aresta vermelha desconectando a azul automaticamente deixando o jogo 0.

$$\{0|1\} := \frac{1}{2}$$

Vimos que essa é a notação vista no exemplo 2.1, ou seja, o jogo acima pode ser representado pelo jogo da figura

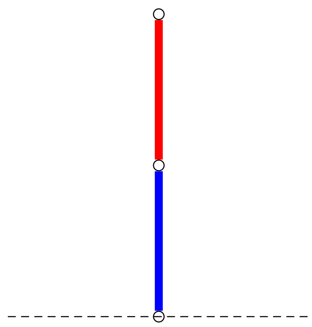

Figura 2.9: $\dfrac{1}{2}$

Outras gerações:

Seguindo as regras anteriores, constrói-se uma infinidade de jogos – ver equação (2.1), algumas generalizações importantes são:

$$\{n|\ \} = n + 1 \tag{2.1}$$

Pode ser representado por um jogo – ver equação (2.2), com $n+1$ arestas azuis

$$\{\ |-n\ \} = -(n+1) \tag{2.2}$$

Pode ser representado por um jogo – ver equação (2.3), com $n+1$ arestas vermelhas

$$\left\{0\middle|\frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2^{n+1}} \tag{2.3}$$

Pode ser representado pelo jogo z_{n+1}, ou seja, o jogo da figura 2.10.

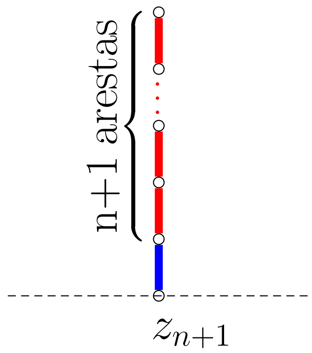

Figura 2.10: Representante do tronco z_{n+1}

Ver equação (2.4).

$$\left\{-\frac{1}{2^n}\middle|0\right\} = \frac{1}{2^{n+1}} \tag{2.4}$$

Pode ser representado pelo jogo $-z_{n+1}$, ou seja, o jogo da figura 2.11

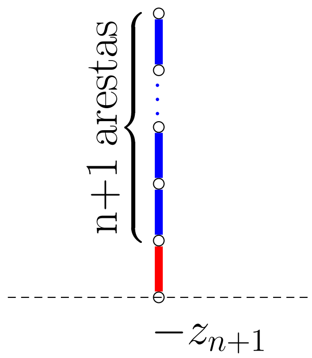

Figura 2.11: Representante do tronco $-z_{n+1}$

Uma representação da construção dos jogos, pode ser feita através do diagrama 2.12

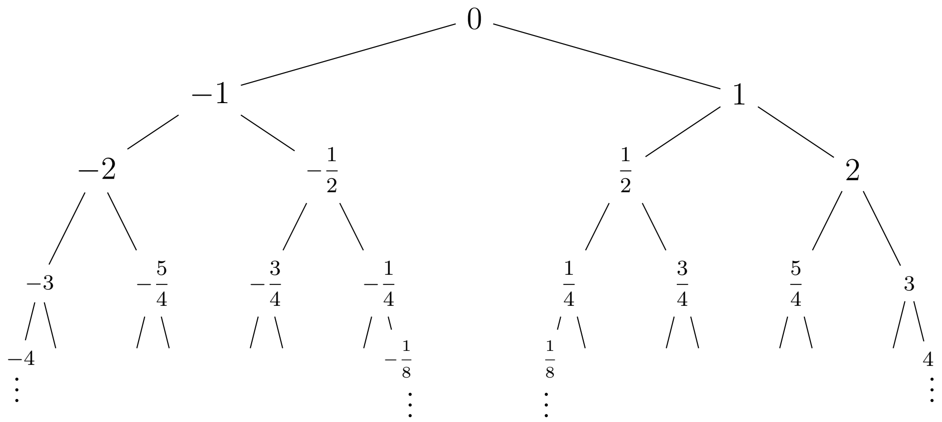

Figura 2.12: Árvore da construção dos jogos.

Em uma geração n são criados 2^n novos jogos. Se $x_1^n, x_2^n, ..., x_{2_n}^n$, são os jogos criados em ordem crescente, na geração n, então x_1^n e $x_{2_n}^n$ são os inteiros $-n$ e n e os demais são,

$$-\frac{2^n-1}{2^{n-1}}, -\frac{2^n-3}{2^{n-1}}, \cdots, -\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{3}{2^{n-1}}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$$

.

Observe que a cada dois desses jogos estão associados a um jogo da geração anterior. Até o final deste capítulo, veremos resultados que ajudam a entender como foi construida essa árvore.

2.2 Soma de jogos – um grupo abeliano.

Veremos aqui a definição formal de soma de jogos, aquela mesma que foi indicada no capítulo anterior, a maneira que está definida é para que tenha as mesmas propriedades já observadas. Mostraremos, só a título de informação, que o conjunto das *classes de equivalência de jogos*[2], com a operação de soma, forma um grupo abeliano[3].

2.2.1 A soma

Definição 1 *Sejam os jogos $G = \{G^A|G^V\}$ e $H = \{H^A|H^V\}$ então a soma de G com H é dado por*

$$G + H = \{G + H^A, H + G^A | G + H^V, H + G^V\}$$

[2] Da mesma forma que existem infinitas frações equivalentes associadas com um mesmo número racional, é notável que exista mais de um jogo desmata-mata associado a um mesmo número.

[3] Grupo abeliano é um conjunto munido de uma operação bem definida, com as propriedades comutativa, associativa, existe um elemento neutro para tal operação e todo elemento possui um simétrico.

Como H^A é um conjunto de jogos, a soma $G + H^A$ significa somar G a cada jogo pertencente a H^A. Por exemplo, se $H^A = \{A_1, A_2, A_3 ...\}$ então

$$G + H^A = \{G + A_1, G + A_2, G + A_3 ...\}.$$

Exemplo 10

$$1 + 1 = \{0|\ \} + \{0|\ \} = \{0 + 1, 1 + 0|\ \} = \{1|\ \} = 2$$

Exemplo 11

$$2 + 1 = \{1|\ \} + \{0|\ \} = \{1 + 1, 2 + 0|\ \} = \{2|\ \} = 3$$

2.2.2 Elemento neutro

Sejam $G = \{G^A|G^V\}$ e $0 = \{\ |\ \}$, temos

$$G + 0 = \{G^A + 0|G^V + 0\} = \{G^A|G^V\} = G$$

2.2.3 Oposto de um jogo

Definição 2 *O negativo de um jogo G é o jogo obtido trocando os papéis de A e V:*

$$G = \left\{G^A|G^V\right\} \Rightarrow -G = \left\{-G^V| - G^A\right\}$$

Exemplo:

$$2 = \{1|\ \} \Rightarrow -2 = \{\ | - 1\}$$

Exemplo 12 (Justificativa da definição de oposto) *Seja $G = \{G^A|G^V\}$ logo $-G = \{-G^V| - G^A\}$, temos*

$$G + (-G) = \{-G + G^A, G + (-G^A)| - G + G^V, G + (-G^V)\}$$

Como $G^A < G < G^V$, então $-G + G^A < G + (-G^A) > 0$, e $0 > -G + G^V > G + (-G^V)$, logo $G + (-G) = \{G + (-G^A)| - G + G^V\} = 0$.

2.2.4 A soma é comutativa

Sejam os jogos $G = \{G^A|G^V\}$ e $H = \{H^A|H^V\}$, então

$$\begin{aligned} G + H &= \{G^A + H, G + H^A|G^V + H, G + H^V\} \\ &= \{H^A + G, H + G^A|H^V + G, H + G^V\} \\ &= H + G \end{aligned}$$

2.2.5 A soma é associativa

Sejam os jogos $x = \{X^A|X^V\}$, $y = \{Y^A|Y^V\}$ e $z = \{Z^A|Z^V\}$, usando a comutatividade da soma,temos

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= \{X^A + y, x + Y^A|X^V + y, x + Y^V\} + z \\ &= \{(X^A + y) + z, (x + Y^A) + z, (x + y) + Z^A|(X^V + y) + z, (x + Y^V) + z, \\ &\quad (x + y) + Z^V\} \\ &= \{X^A + (y + z), x + (Y^A + z), x + (y + Z^A)|X^V + (y + z), x + (Y^V + z), \\ &\quad x + (y + Z^V)\} \\ &= x + \{Y^A + z, y + Z^A|Y^V + z, y + Z^V\} \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$

Alguns jogos construido anteriormente, não são fáceis de se encontrar o número associado a eles, por exemplo, o jogo $\{1|3\}$ não se encaixa em nenhum daqueles casos generalizados estudados até agora. Existe uma regra que determina o valor de um jogo conhecendo os números associados às opções de Azul e Vermelho, analisando a que geração pertencem.

Definição 3 *Um número racional é dito diádico se ele é da forma* $\frac{m}{2^n}$, *com* m *inteiro e* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teorema 1 (Regra da Simplicidade) *Se* $a < b$ *são números racionais diádicos e* $G = \{a|b\}$, *então* G *é o número racional diádico mais simples (de menor geração) entre* a *e* b.

Considerando que cada geração de números são criados em um dia, por isso, a regra é chamada também por Regra de Aniversário. Em outras palavras, a regra diz o seguinte:

1. Se $a < 0 < b$, então $G = 0$; senão

2. Se há números inteiros n satisfazendo $a < n < b$, então G é o mais próximo de 0; senão

3. Se há alguma fração irredutível x de denominador 2 tal que $a < x < b$, então $G = x$; senão

4. Se há alguma fração irredutível x de denominador 4 tal que $a < x < b$, então $G = x$; senão

...

Uma demonstração rigorosa do teorema está em Conway (2001) página 23 e um esboço dessa demonstração é feita por Teixeira (2013) páginas 23 e 24.

Exemplo 13 *Uma consequência imediata da regra é que, se* $a < 0 < b$, *então* $\{a|b\} = 0$, *pois, o jogo nulo é o mais simples, entre quaisquer números com sinais opostos.*

Exemplo 14 $\{4|5\} = \dfrac{9}{2}$, *nesse caso não temos nenhum inteiro entre* 4 *e* 5, *mas temos que* $4 < \dfrac{9}{2} < 5$.

Nesse exemplo, é simples encontrar um grafo representante desse jogo, pois conhecemos seu valor e como é o jogo que vale meio, então basta adicionar a um grafo com 4 arestas azuis, como na figura

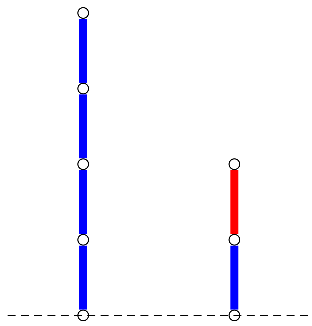

Figura 2.13: Jogo com as opções $\{4|5\}$

Ao observar as opções, fica claro que ao jogar primeiro, Azul deixa o jogo 4 e Vermelho deixa o jogo $4 + 1 = 5$.

Exemplo 15 $\left\{-3\middle|-\dfrac{5}{2}\right\} = \left\{-\dfrac{12}{4}\middle|-\dfrac{10}{4}\right\} = -\dfrac{11}{4}$, *não temos inteiros entre* -3 *e* $-\dfrac{5}{2}$ *, e nem fração irredutível de denominador 2 entre eles, mas* $-3 < -\dfrac{11}{4} < -\dfrac{5}{2}$.

Como $-\frac{11}{4} = -\frac{12}{4} + \frac{1}{4} = -3 + \frac{1}{4}$ e já sabemos quem é representante dessas duas parcelas, temos o jogo da figura

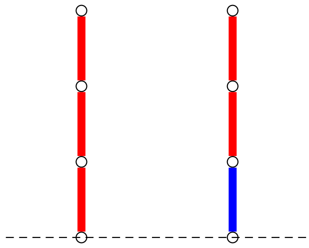

Figura 2.14: Jogo com as opções $\left\{-3 \middle| -\frac{5}{2}\right\}$

Ao iniciar, Azul deixa três arestas vermelhas, ou seja, o jogo -3, Se Vermelho começa, ele retira a aresta do topo do grafo da direita, deixando o jogo $-3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

Exemplo 16 $\{1|3\} = 2$, *pois entre* 1 *e* 5 *o número* 2 *foi criado primeiro.*

Um representante para esse jogo está na figura 2.15

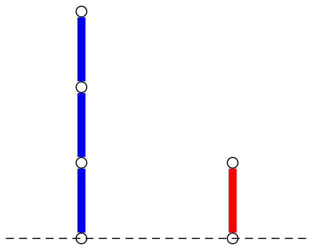

Figura 2.15: Jogo com as opções $\{1|3\}$

Mesmo conhecendo o valor do jogo, nem sempre é fácil achar uma representação que de as mesma opções dadas. Por exemplo, $\{1|5\}$ como será o jogo, sabendo que ele vale 2? O número de arestas azuis deve superar o número de arestas vermelhas em duas unidades, além disso, ao jogar primeiro, Azul deixa o jogo 1 e Vermelho deixa o jogo 5.

Exemplo 17 *Para encontrar o valor de jogo em que as opções dos dois jogadores são duas frações com númeradores inteiros consecutivos e denominadores iguais a uma mesma potência de base 2, basta calcular a média aritimética entre essas opções.*

$$\left\{\frac{p}{2^n} \middle| \frac{p+1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{2p}{2^{n+1}} \middle| \frac{2p+2}{2^{n+1}}\right\} = \frac{2p+1}{2^{n+1}}$$

Com a regra da simplicidade podemos somar jogos e no fim calcular o seu valor.

Exemplo 18

$$2 + (-1) = \{1|\ \} + \{\ |0\} = \{1 + (-1)|2 + 0\} = \{0|2\} = 1$$

Exemplo 19

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \{0|1\} + \{0|1\} = \left\{\frac{1}{2} + 0, \frac{1}{2} + 0 \middle| \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2} + 1\right\} = \left\{\frac{1}{2} \middle| \frac{3}{2}\right\} = 1$$

2.3 Troncos

Uma classe importante de jogos que chamaremos de troncos, são jogos desmata-mata em que apenas uma aresta está ligada ao solo e de cada vértice ligam no máximo 2 arestas.

Vamos adotar a seguinte notação para um tronco fazendo:

– Da esquerda para direita coloque a sequência das cores das arestas iniciando do solo;

– Se a aresta for azul escreva A e se for vermelha escreva V;

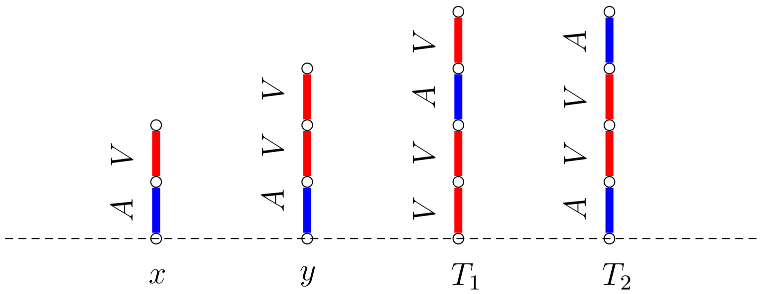

Figura 2.16: Notação de troncos.

Esta notação para os troncos da figura 2.16 ficam $x = AV$, $y = AVV$, $T_1 = VVAV$ e $T_2 = AVVA$.

Outra consequência da regra da simplicidade é que se $G = \{G^A|G^V\}$ é um tronco com mais de uma cor, então seu valor é dado pela média aritmética entre os valores de G^A e G^V (que também são troncos ou o jogo nulo), isso significa que se esses valores forem a e b, então $G = \dfrac{a+b}{2}$. Mas nem sempre é simples usar isso para calcular o valor de um tronco, pois os valores de a e b nem sempre são conhecidos, mas a utilizaremos para demonstrar outra regra, que determina o valor de um tronco através de um algoritmo simples.

Consideremos dois casos que nos ajudarão a encontrar uma justificativa para a propriedade citada no paragrafo anterior:

Seja o tronco $X_1 = \underbrace{AA\ldots A}_{k\ vezes}V$, se Azul começa jogando, ele retira a penultima aresta do tronco deixando o jogo $\underbrace{AA\ldots A}_{k-1\ vezes}$ e se Vermelho começa, retira a ultima aresta deixando o jogo $\underbrace{AA\ldots A}_{k\ vezes}$, então

$$X_1 = \{k-1|k\}$$

como $k-1$ e k são inteiros consecutivos, pela regra da simplicidade, X_1 é o mais simples número entre eles, portanto

$$X_1 = \frac{k-1+k}{2} = \frac{2k-1}{2}$$

Considere agora os troncos que são obtidos ao acrescentar uma aresta no tronco X_1

$$X_2 = \begin{cases} X_1A & = \underbrace{AA\ldots A}_{k\ vezes}VA \\ X_1V & = \underbrace{AA\ldots A}_{k\ vezes}VV. \end{cases}$$

X_1A e X_1V representam os troncos obtidos ao acrescentar uma aresta em X_1, no primeiro uma azul e no segundo uma vermelha.

Analisando a primeira jogada de cada jogador em cada um desses troncos, temos:
$X_1A = \{X_1|k\} = \left\{\frac{2k-1}{2}\middle|k\right\} = \left\{\frac{2k-1}{2}\middle|\frac{2k}{2}\right\}$

Como não existem inteiros e fração com denominador 2 entre $\frac{2k-1}{2}$ e k o mais simples é obtido pela média aritmética entre eles. Pela regra da simplicidade conclui-se que

$$X_1A = \frac{\frac{2k-1+2k}{2}}{2} = \frac{\frac{2k-1}{2}+k}{2}$$

$X_1V = \{k-1|X_1\} = \left\{k-1\middle|\frac{2k-1}{2}\right\} = \left\{\frac{2k-2}{2}\middle|\frac{2k-1}{2}\right\}$

Usando o mesmo argumento de X_1A, como não há inteiros e fração com denominador 2 entre $k-1$ e $\frac{2k-1}{2}$, temos que

$$X_1V = \frac{2k-2+2k-1}{4} = \frac{k-1+\frac{2k-1}{2}}{2}$$

Já é possível perceber que a cada acréscimo de arestas no tronco X_1, o intervalo $[k-1, k]$ vai se dividindo , em 2,4,8,... partes e os extremos de cada intervalo são as opções de Azul e Vermelho em cada troncos criados e consequentemente seus valores são obtidos através da média aritmética entre eles, pois são os números mais simples em cada um desses intervalos. Acrescentar uma aresta vermelha significa dar ao tronco o valor da média aritmética dos extremos do intervalo à esquerda do valor do tronco de origem, enquanto acrescentar uma aresta azul dá ao tronco o valor da média aritmética entre os extremos do intervalo à direita do tronco original.

A figura abaixo representa o que foi dito:

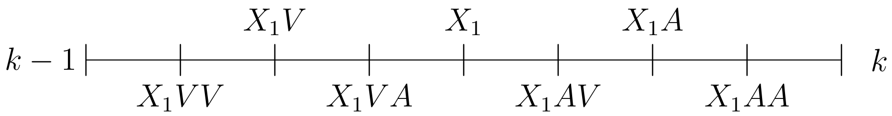

Figura 2.17: Interpretação geométrica da regra

Exemplo 20 *Determinaremos o valor do tronco $T = AVVVVA$.*

Como as jogadas devem ser da direita para a esquerda, Azul deixa o jogo AVVVV, que já sabemos calcular, nesse caso é $\frac{1}{16}$, se Vermelho começa, ele deixa AVVV, que vale $\frac{1}{16}$, então $T = \frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{8}}{2} = \frac{3}{32}$.

Proposição 2 (Regra do cálculo de um tronco) *Qualquer tronco pode ser calculado através do algoritmo:*

- *O primeiro número é obtido contando o número de arestas partindo do solo com a mesma cor.*

- *A partir daí, cada aresta vale metade da anterior e o sinal é relativo a cor.*

Somando os números teremos o valor do tronco.

Exemplos:

- $AV = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $AVV = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
- $AAVA = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

- $AAVAVAVAV\ldots = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{1}{2^n} - \ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$
- $VVAA = -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$

Para troncos com uma só cor não temos o que provar, e como o oposto de um jogo é obtido apenas trocando as cores podemos supor que as primeiras arestas são azuis.

Demonstração: 1 *Seja x um tronco da forma $\underbrace{AA\ldots A}_{t\ vezes}$, sabemos que esse jogo vale t. Agora seja y_n o tronco da forma $\underbrace{AA\ldots A}_{t\ vezes}S_1S_2\ldots S_n$ onde $S_i \in \{A,V\}$ para $1 < i \leq n$ e $S_1 = V$.*

Vamos mostrar, $\forall n \in \mathbb{N}$, que o tronco y_n vale

$$t - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2} \pm \ldots \pm \frac{1}{2^n}$$

Para $n = 1$, temos $y_1 = \underbrace{AA\ldots A}_{t\ vezes}V$
Se azul começa ele deixa o jogo $\underbrace{AA\ldots A}_{t-1\ vezes} = t-1$, se o vermelho começa ele deixa o jogo $\underbrace{AA\ldots A}_{t\ vezes} = t$ logo $y_1 = \frac{t-1+t}{2} = t - \frac{1}{2}$

Agora, supondo que a regra vale para todo natural menor ou igual a k, provaremos que a regra vale para $k+1$.

(caso 1 $S_k = V$)

Primeiramente, consideremos que $S_r = A$ para algum $1 < r \leq k$, isso significa que para todo $r < i \leq k$ temos $S_i = V$, assim o valor de y_k é

$$t - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2} \pm \ldots \pm \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^r} - \frac{1}{2^{r+1}} - \ldots - \frac{1}{2^k}$$

Dessa forma, se azul joga primeiro ele deixa o jogo y_{r-1}, se o vermelho inicia ele deixa o jogo y_k, então o valor do jogo y_{k+1} fica

$$\frac{t - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2} \pm \ldots \pm \frac{1}{2^{r-1}} + t - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2} \pm \ldots \pm \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^r} - \frac{1}{2^{r+1}} - \ldots - \frac{1}{2^k}}{2}$$

Simplificando temos

$$t - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2} \pm \ldots \pm \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{2^{r+2}} - \ldots - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}$$

Mas $\frac{1}{2^{r+1}} = \frac{1}{2^r} - \frac{1}{2^{r+1}}$ *e portanto:*

$$y_{k+1} = t - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2} \pm \ldots \pm \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^r} - \frac{1}{2^{r+1}} - \frac{1}{2^{r+2}} - \ldots - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}$$

■

2.4 Números racionais diádicos e troncos finitos

Já vimos, pela regra do cálculo do valor de um tronco, que o valor de um tronco finito (tronco com finitas arestas) é um número racional diádico. O objetivo nessa seção é mostrar que a recíproca é verdadeira, ou seja, existe um tronco finito associado a cada número racional diádico.

Existe um algoritmo que descreve dentro de um número finito de passos, o tronco associado a qualquer racional diádico. A ideia por trás deste algoritmo é o fato de que os números usados na regra do cálculo do valor do tronco, geram qualquer número diádico, esses números são:

$$\ldots, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Proposição 3 *Seja* $x = \frac{m}{2^n}$ *um número racional diádico positivo, menor que 1, isto é,* $1 \leq m < 2^n$*, podemos supor* m *ímpar, ou seja,* m *e* 2^n *primos entre si. Então* x *se escreve de maneira única, na forma*

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n} a_i \cdot \frac{1}{2^i}, \text{ com } a_i \in \{-1, 1\}$$

Demonstração: 2 *O número* x *pode ser escrito como abaixo*

$$x = \frac{2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n}{2^n} \tag{2.5}$$

Assim, basta mostrar que todo m *ímpar tal que* $1 \leq m < 2^n$ *pode ser obtido através da expressão* $2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n$*, com uma escolha conveniente de* $a_2, ..., a_n$*.*

i) Para $n = 1$*, temos* $x = \frac{1}{2}$ *logo, não há nada a provar.*

Para $n = 2$ *(esse passo é puramente ilustrativo), devemos mostrar que* $2 + a_2$ *gera qualquer ímpar, tal que* $1 \leq m < 2^2 = 4$*, isto é, os números 1 e 3.*

De fato,

$$m = 2 - 1 = 1$$

e

$$m = 2 + 1 = 3$$

ii) Agora, suponha que a proposição é verdadeira para algum $n \geq 1$. *Observe que, os números ímpares, tais que* $1 \leq m < 2^{n+1}$ *podem ser descritos por*

$$2^n \pm 1, 2^n \pm 3, \cdots, 2^n \pm (2^n - 1) \tag{2.6}$$

Por hipotese de indução, temos que os números $1, 3, \cdots, 2^n - 1$ *são gerados pela expressão* $2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n$, *assim os números de 2.6 são da forma*

$$2^n \pm (2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n) = 2^n + b_1^{n-1} + b_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + b_{n-1} \cdot 2 + b_n \tag{2.7}$$

onde $b_i \in \{-1, 1\}$ *com* $i = 1, ..., n$.

■

Com o que acabamos de mostrar, temos que a parte não inteira de um número racional diádico, pode ser escrito como uma soma finita de números diádicos com numerador igual a 1, isto é: se d é um número racional diádico positivo qualquer, onde $d = a + x = a + \dfrac{m}{2^n}$ tal que a é parte inteira de d e $x = \dfrac{m}{2^n}$, em que $m < 2^n$, então $d = a + \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_i \cdot \dfrac{1}{2^i}$, com $a_i \in \{-1, 1\}$, a última equação podemos interpretar da seguinte maneira:

- O número a simboliza o número de arestas azuis iniciais do tronco relacionado ao número d;
- O fator $\dfrac{1}{2}$, que está sempre presente, é como se fosse uma fronteira entre a parte inteira e não-inteira do número d sendo assim, representa um acréscimo de mais uma aresta azul e uma vermelha na sequência anterior do tronco;

- Os sinais dos coeficientes $(a_2, a_3, ..., a_n)$, representam, respectivamente, as cores das arestas restantes do tronco, sendo vermelho se for negativo e azul se for positivo.

Esse resultado será usado no algoritmo que veremos a seguir.

Antes do caso geral, vamos mostrar como funciona o algoritmo através de um exemplo:

Exemplo 21 *Determinaremos o tronco associado ao número* $\frac{71}{16} = 4,4375$.

Passo 1: Como o numerador é maior que o denominador, decompomos o número separando sua parte inteira da não-inteira.

$$\frac{71}{16} = \frac{64}{16} + \frac{7}{16} = 4 + \frac{7}{16}$$

.

Assim iniciamos o tronco com $AAAA$. Pela proposição 3, temos que $\frac{7}{16} = \frac{1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{16}$ logo acrescenta-se AV ao tronco, obtendo assim $AAAAAV$

A partir de agora, faltam acrescentar três arestas ao tronco, para isso devemos descobrir os sinais de a_2, a_3 e a_4, respectivamente.

Passo 2: Como $4+\frac{1}{2} = \frac{9}{2} = \frac{72}{16} > \frac{71}{16}$ então $a_2 = -1$, logo, acrescenta-se uma aresta vermelha na sequência do tronco, obtendo $AAAAAVV$;

Passo 3: Como $4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{17}{4} = \frac{68}{16} < \frac{71}{16}$ então $a_3 = 1$ logo, acrescenta-se uma aresta azul na sequência do tronco, obtendo $AAAAAVVA$;

Passo 4: Como $4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{35}{8} = \frac{70}{16} < \frac{71}{16}$ então $a_4 = 1$ logo, acrescenta-se uma aresta azul na sequência do tronco, obtendo $AAAAAVVAA$;

Portanto, obtemos que o tronco associado ao número $\frac{71}{16}$ é $AAAAAVVAA$, o grafo e a interpretação do algoritmo são representados na figura 2.18

No caso geral, para obter o tronco associado a um número racional diádico positivo d (o caso $d < 0$ é análogo), basta seguir o algoritmo:

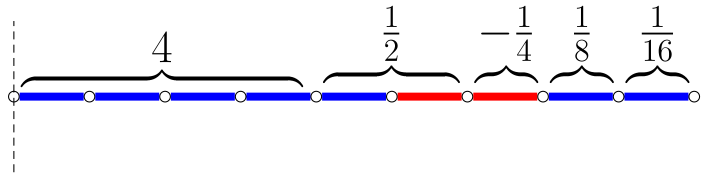

Figura 2.18: Tronco representante de $\frac{71}{16}$.

passo 1 – Antes de tudo, decomponha d como na proposição 3, isto é, $d = a + \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n} a_i \cdot \frac{1}{2^i}$, a soma $a + \frac{1}{2}$ define a base do tronco que, como sabemos, fica

$$\underbrace{AA\ldots A}_{a\ vezes}\underbrace{AV}_{\frac{1}{2}}$$

Nos próximos passos, devemos encontrar os valores dos coeficientes, acrescentando A se for 1 e V -1, ao tronco base.

passo 2 – Se $a + \frac{1}{2} > d$ então $a_2 = -1$, acrescentamos V ao tronco do passo anterior. Caso $a + \frac{1}{2} < d$ então $a_2 = 1$,acrescentamos A ao tronco do passo anterior.

passo 3 – Se $a + \frac{1}{2} + \frac{a_2}{4} > d$ então $a_3 = -1$, acrescentamos V ao tronco do passo anterior. Caso $a + \frac{1}{2} + \frac{a_2}{4} < d$ então $a_3 = 1$, acrescentamos A ao tronco do passo anterior.

$\vdots$

passo n – Se $a + \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i \cdot \frac{1}{2^i} > d$ então $a_n = -1$, acrescentamos V ao tronco do passo anterior. Caso $a + \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i \cdot \frac{1}{2^i} < d$ então $a_n = 1$, acrescentamos A ao tronco do passo anterior; se for menor que x soma-se $\frac{1}{2^{k-1}}$ e acrescenta-se a letra A, se for maior soma-se $-\frac{1}{2^{k-1}}$ e acrescenta-se a letra V.

A explicação de atribuir o valor 1, quando a subsoma do passo anterior é menor que o número dado, é que se fosse -1, mesmo que todos os outros coeficientes fossem 1, esta soma será sempre menor que o número diádico. No exemplo 18, tinhamos $4 + \frac{1}{2} > \frac{71}{16}$, se for somado $\frac{1}{4}$ ao invés de $-\frac{1}{4}$, não alcançariamos mais o número $\frac{71}{16}$ nem somando $\frac{1}{8}$

e $\frac{1}{16}$. Resumindo, se t é um número natural, então $\frac{1}{2^t} > \frac{1}{2^{t+1}} + \frac{1}{2^{t+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{t+k}}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

O Jogo como metodologia para o ensino dos números reais

3.1 Justificativas do uso de jogos em sala de aula

Não é novidade que a utilização de jogos no ensino da matemática é um assunto muito debatido por vários pesquisadores em educação matemática. Por exemplo, Grando (2000), entre outros aspectos, descreve jogo como atividade lúdica como no trecho:

> "As crianças, desde os primeiros anos de vida, gastam grande parte de seu tempo brincando, jogando e desempenhando atividades lúdicas. Na verdade, a brincadeira parece ocupar um lugar especial no mundo delas. Os adultos, por sua vez, têm dificuldade de entender que o brincar e o jogar, para a criança, representam sua razão de viver, onde elas se esquecem de tudo que as cerca e se entregam ao fascínio da brincadeira. A experiência docente tem mostrado que muitas crianças ficam horas, às vezes, prestando atenção em um único jogo e não se cansam. E muitas destas crianças são categorizadas, pela escola, como aquelas com dificuldade de concentração e observação nas atividades escolares."
>
> (Regina Célia Grando)

Partindo desse pressuposto, podemos dizer então que levar o jogo para sala de aula é no mínimo um meio divertido de aprender e até gostar do conteúdo. Mas o jogo não pode ser inserido de qualquer forma, sem ter antes um planejamento dos objetivos que se quer ter com a atividade e verificar se é realmente algo positivo no processo de ensino-aprendizagem e não apenas um mero passa-tempo.

Mas além de atividade lúdica, segundo (Grando, 2000) jogo é um suporte metodológico na aula de matemática, baseada em vários teóricos, descreve temas dentro dessa proposta, nessa seção cito alguns desses temas, dividindo os mesmos em subseções.

3.1.1 Jogo e desenvolvimento cognitivo da criança

A teoria da Psicologia do Desenvolvimento, relata que o jogo desempenha funções psicossociais, afetivas e cognitivas básicas no processo do desenvolvimento infantil.

O jogo atrai o interesse o aluno por ser um ensaio de momentos da vida real, e também, algo desafiador em relação as suas regras, que criam uma situação imaginária, e por sua vez, pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento abstrato. É importante propor atividades que vão do imaginário para a abstração, que passam pelas etapas: levantamento de hipóteses, verificação de conjecturas, reflexão, análise e síntese.

Ao jogar, os alunos desenvolvem a capacidade de fazer perguntas, buscam diferentes soluções, avaliam suas respostas, generalizam e fazem relação de uma teoria com outra, em outras palavras, desenvolvem a capacidade de resolver problemas.

No contexto do ensino de matemática, Grando (2000) destaca:

> "...o jogo pode representar uma simulação matemática na medida em que se caracteriza por ser uma situação irreal, criada pelo professor ou pelo aluno, para significar um conceito matemático a ser compreendido pelo aluno."

3.1.2 Cooperação e interação entre as crianças através do jogo

Segundo Piaget, a interação entre colegas é indispensável ao desenvolvimento social, moral e intelectual de cada indivíduo. Essa cooperação mediada por um adulto favorece a construção do conhecimento através de discussões entre pares, onde cada um expõe seu ponto de vista, assim incentivando o senso crítico. Nesse sentido, os jogos em grupo representam atividades que possibilitam, dentre outras coisas, o respeito e a disciplina(através da subordinação as regras), sendo assim, formam princípios importantes para a vida do indivíduo em sociedade.

3.1.3 O erro e sua superação como ferramenta de aprendizagem

Errar no jogo significa escolher uma estratégia ou um lance ruim que leve à derrota ou não. É analisado aqui, que ao se observar escolhas erradas num jogo, pode ajudar a diagnosticar que um conceito específico não foi compreendido pelo aluno, pode ser um conceito básico de matemática necessário para a compreensão das regras do jogo ou vice-versa.

A própria ciência é hoje fruto das superações de vários equívocos, então por que ignorar o erro e valorizar somente o acerto dos alunos? Estudar o erro é uma ferramenta importante para o entendimento efetivo de qualquer conhecimento.

3.1.4 Momentos de um jogo

Chamaremos de momento de um jogo, as fases necessárias para inseri-lo em sala de aula de uma forma efetiva. Uma maneira de fazer essa divisão é em sete fases:

1. Familiarização com o material do jogo;

   É onde os alunos entram em contato com os materiais do jogo, por exemplo, no xadrez temos o tabuleiro e as peças, pode ser o software do jogo. Nessa fase é comum fazer analogias com jogos já conhecidos.

2. Reconhecimento das regras;

   Pode ser feito de várias maneiras: explicação do professor, leitura, ou a partir de várias partidas-modelo, depois disso o professor pode jogar algumas partidas com um aluno que tenha entendido previamente as regras, enquanto os outros alunos começam a perceber regularidades e entendê-las.

3. O "Jogo pelo jogo": jogar para garantir regras;

   Aqui os alunos jogam entre si, simplesmente para verificar se compreenderam as regras. E também onde começam a serem observados conceitos matemáticos presentes no jogo.

4. Intervenção pedagógica verbal;

   Nesta fase, serão feitos questionamentos e observações realizadas pelo professor a fim de provocar os alunos para a realização das análises de suas jogadas. A atenção está voltada para os procedimentos criados pelos sujeitos na resolução dos problemas de jogo, buscando relacionar este processo à conceitualização matemática.

5. Registro do jogo;

   O professor deve encaminhar para que esses registros sejam feitos, com a intenção de uma futura generalização de conceitos matemáticos observados, através de cálculos feitos nos jogos.

   O registro é um importante instrumento, para a análise de jogadas "erradas" (jogadas que poderiam ser melhores) e construção de estratégias.

6. Intervenção escrita;

   Os alunos resolvem situações-problema de jogo, elaboradas pelo professor ou por eles mesmos. A resolução dos problemas leva a uma análise mais específica do jogo, onde os problemas abordam diferentes aspectos que podem não ter ocorrido durante as partidas. Os limites e as possibilidades do jogo são resgatados pelo professor, direcionando para os conceitos matemáticos a serem trabalhados.

7. Jogar com "competência".

   Nesta fase, volta-se para o jogo e aí são aplicadas os resultados das análises feitas na fase anterior para que os alunos verifiquem a veracidade das conclusões. Ao jogar, o aluno deve refletir para encontrar uma estratégia, estudada nas situações problemas levantadas anteriormente, a fim de fazer uma boa jogada, diferentemente de "jogar por jogar", onde as jogadas são feitas sem ter certeza se a jogada foi boa ou não.

Em suma, existem inúmeras motivações para utilizar jogos como instrumento de intervenção entre o conhecimento matemático e aluno, desde que seja uma atividade planejada, com objetivos bem definidos, fazendo o registro das etapas importantes e avaliando os resultados.

3.2 O uso da teoria de jogos, como ferramenta para auxiliar no ensino de números reais

Depois de abordar jogo de maneira geral, vamos agora analisar mais especificamente o conceito de jogo feito por Conway que abordamos nos dois primeiros capítulos deste trabalho.

Em muitos países, inclusive no Brasil, é mais comum ensinar sobre números reais numa perspectiva axiomática, ou seja, geralmente é apresentado junto com seus axiomas, primeiro os números naturais, aí vem os números inteiros, um pouco adiante os racionais e por último os reais . O conjunto dos números complexos contém o conjunto dos números reais, mas, como sabemos, não existe uma relação de ordem nesse conjunto, então por que não ensinar um conjunto "maior" que os reais e que tenha ordenação dos números? E que tal fazer isso, sem perder o rigor matemático usando jogos? Essa outra forma de estudar os números, feita inicialmente por John Horton Conway, e posteriormente por Knuth (1974) em seu livro, que conta a história de dois jovens estudantes, onde lhes são apresentados os jogos e em seu desenvolvimento eles buscam saber o que está por trás dessa teoria. O jogo desmata-mata, além de ser um jogo, vimos que pode ser também um número, e isso tem muitas propriedades já estudadas e demonstradas ou justificadas algebricamente no método mais tradicional de abordagem dos números reais em sala de aula, que podem ser explicadas usando as regras do jogo como princípio.

Usando a forma como Conway aborda os números, da Fonseca (2010) escreve sua tese: *A complementaridade entre aspecto intensional e extensional*[1] *na conceituação dos números reais*. Complementaridade, teoria criada, em 1928, pelo físico Niels Bohr e mais recentemente descrita por Otte (2003) , significa que um conceito pode ser abordado de várias formas, podendo uma complementar os aspectos da teoria que faltam na outra. Nessa tese, da Fonseca (2010) defende que há complementaridade entre as abordagens intensional e extensional do conceito de número. O aspecto intensional está relacionado com a abordagem axiomática, que é aquela em que são apresentadas as propriedades propositalmente, apenas de forma abstrata, que pode acarretar em alguns obstáculos epistemológicos no aprendizado do aluno, já em relação ao aspecto extensional, está associada a ideia de uma analogia com alguma aplicação da teoria, mesmo que essa também seja abstrata, porém, que tenha uma representação mais significativa, ajudando na superação de tais obstáculos citados no outro método. Nosso objetivo, não é entrar em detalhes sobre as explicações filosóficas e históricas que dão suporte a essa tese, queremos, no entanto, citar alguns trechos onde o autor descreve o porquê essa teoria pode justificar a abordagem do jogo como complemento do método tradicional de ensinar o conceito de

[1]a palavra intensional se escreve com "s" mesmo, assim como extensional não vem de extensão, essas duas palavras são termos usados para definir dois aspectos que podem existir em uma determinada abordagem de um conceito em sala de aula.

número real.

Vale ressaltar que, a intenção dessa teoria não é descartar o método "tradicional" de ensinar o conceito de número, mas sim complementá-lo buscando explorar as diversas vantagens desse método, para superar alguns obstáculos epistemológicos deixados pela abordagem puramente axiomática. Nesse sentido, da Fonseca (2010), defende a proposta dos jogos:

> "...o jogo tem sido um auxiliar na aprendizagem da Matemática. Podemos inferir com esta pesquisa que a teoria de Conway de forma complementar pode acrescentar novos elementos às abordagens clássicas da conceituação de número, apontar algumas de suas fragilidades e destacar a importância dos questionamentos epistemológicos para a evolução do conhecimento matemático. Outro resultado desta pesquisa é indicar a fertilidade do conceito de número que ainda abre novas fronteiras para a Matemática. É nosso julgamento que a Educação Matemática precisa e deve estar próxima dos avanços da Matemática."
>
> (Rogério Ferreira da Fonseca)

Também aponta o ponto fraco da abordagem clássica para ensinar os números reais:

> "Esses axiomas tornam o conjunto dos números reais em um corpo ordenado completo. No bojo de uma abordagem axiomática não há qualquer tipo de descrição, interpretação ou aplicação para o objeto matemático. Apenas as relações entre os objetos são enfatizadas, caracterizando de forma unilateral o aspecto intensional dos números."

Propõe um novo olhar para a matemática, insistindo na importância da complementaridade entre as abordagens em:

> "A Matemática, considerada como atividade semiótica, deve ser caracterizada pela complementaridade no processo de evolução da atividade cognitiva, que poderá basear-se na complementaridade da extensão e da intensão. O primeiro componente possibilitará a consulta aos objetos por meio de alguma interpretação, enquanto o segundo estará relacionado às expressões linguísticas."

Diz também que essa abordagem de número, feita por Conway não é fácil, mas é a mais completa que a clássica:

> “não é de esperar que um conceito tão complexo como dos números reais pudesse ser definido de modo simples. Assim sendo, o método de Conway não é trivial, mas possibilita construir os números de forma única, dos naturais aos reais; além disso, pode ser fundamentada axiomaticamente e interpretada por uma classe de jogos que constitui as aplicações ou modelos da teoria. Ou seja, possibilita a complementaridade entre os aspectos intensional e extensional do conceito de número”.

Exemplifica onde a abordagem evidencia o aspecto extensional da teoria, nos trechos:

> “... os números podem ser construídos concomitantemente por meio de conjuntos e por meio dos jogos, nesse caso, os jogos poderiam ser vistos como um modelo empírico que certamente favoreceria a criatividade, as conjecturas e suas respectivas verificações, a motivação e a experimentação. Esses aspectos estão intimamente ligados à atividade matemática envolvendo um processo de investigação matemática. Esse processo servirá de base para a compreensão do aparato lógico e das deduções que envolvem as definições, os teoremas e suas respectivas demonstrações”.

> “Outra possibilidade de abordagem poderia basear-se na construção informal dos números por meio de jogos, e em um segundo momento o desenvolvimento da parte formal da teoria por meio de conjuntos. Novamente os jogos forneceriam um modelo empírico que serviria de suporte para a abordagem formal, motivando as principais ideias desenvolvidas na teoria e propiciando as experiências e verificações. Podemos considerar ainda a possibilidade de inicialmente construir os números por meio de conjuntos (a partir dos axiomas de Conway), explorando o aspecto intensional do conceito de número, e posteriormente abordar os jogos; esses seriam vistos como uma interpretação, aplicação e modelo da teoria”.

Como sua tese é puramente teórica, da Fonseca (2010) explica que para introduzir jogos no ensino de número, é preciso uma transposição didática e para isso é necessário realizar outras pesquisas de como fazer isso na prática.

Conway em seu livro Conway (2001), afirma que utilizou sua teoria para ensinar o conceito de números reais. Praticar essa teoria de jogos no ensino básico é um desafio, um dos motivos é que existem apenas aplicativos com menu em inglês, um deles pode ser encontrado no endereço eletrônico *http://geometer.org/hackenbush/index.html* é de uso simples, mas para os alunos pode ser um obstáculo, da Fonseca (2010) propõe que para que isso aconteça, poderia ser feita uma parceria entre estudantes de licenciatura em matemática e de computação a fim de construir softwares em língua portuguesa para esse fim.

Considerações finais

Ensinar matemática através de jogos é interessante, desde que não seja uma atividade em que os alunos apenas joguem por jogar, ou seja, deixar os alunos jogando sem ter algum objetivo com isso. Uma sequência didática para aplicar o jogo em sala, pode ser feito como sugerido por Grando (2000), ou seja, seguir os passos descritos na subseção 3.1.4 do capítulo 3. Outra coisa que interfere negativamente na aprendizagem é aquela aula com a insistente sequência didática: definição algébrica, exemplos e exercícios de fixação, pois nesse sistema o aluno é mero expectador e reprodutor de uma teoria pronta e acabada. Entretanto, ensinar o conceito de número através da teoria de jogos é atrativo para os alunos, pois estes serão os construtores desse conhecimento de uma maneira divertida, e ao mesmo tempo, com todo rigor matemático necessário por trás dela.

Depois de se familiarizar com as definições, regras e notações sobre o jogo desmata-mata, a leitura fica mais agradável e fácil ver toda a beleza matemática dessa teoria e ao mesmo tempo pensar sobre propostas pedagógicas que podem ser feitas sobre números e suas propriedades de maneira mais significativa na construção do conhecimento dos alunos, uma vez que eles mesmos devem criar e resolver situações dentro dessa teoria.

Um dos objetivos do trabalho foi escrever a teoria e exemplos, de uma maneira que a leitura ficasse mais simples e objetiva possível, por isso, preocupou-se com a utilização de figuras e casos particulares para ajudar na compreensão geral.

Pretendo aprofundar meus conhecimentos sobre teoria de jogos combinatórios, e aplicar esses conhecimentos em sala de aula, bem como construir materiais e relatar essas experiências em futuras publicações.

Referências Bibliográficas

Conway, J. H. (2001). *On numbers and games*. Ed. A K Peters.

da Fonseca, R. F. (2010). *A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway*. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade católica de São Paulo PUC/SP, São Paulo-SP.

Grando, R. C. (2000). *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese de doutorado, Universidade estadual de Campinas, Campinas-SP.

Knuth, D. E. (1974). *Surreal Numbers*. Addison-Wesley, Massachusetts-EUA.

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. In *Educational Studies in Mathematics*, volume 53, páginas 203–228, Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Teixeira, R. C. (2013). Jogos combinatórios e números surreais. *Colóquio da Região Sudeste*.