Andréia Caetano da Silva Curty

Números Racionais e suas Diferentes Representações

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

ABRIL - 2016

Andréia Caetano da Silva Curty

Números Racionais e suas Diferentes Representações

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof^{a}. Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
ABRIL - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **108/2016**

Curty, Andréia Caetano da Silva
Números racionais e suas diferentes representações / Andréia Caetano da Silva Curty. – Campos dos Goytacazes, 2016.
84 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016.
Orientador: Liliana Angelina León Mescua.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 64-67.
1. NÚMEROS RACIONAIS 2. DIFERENTES REPRESENTAÇÕES 3. INTERVENÇÕES PEDAGÓGICAS 4. JOGOS (MATEMÁTICA) I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 512.782

Andréia Caetano da Silva Curty

Números Racionais e suas Diferentes Representações

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 28 de Abril de 2016.

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz La torre
D.Sc. - UENF

Prof^a. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto
D.Sc. - IFF

Prof^a. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho a Deus, ao meu esposo, aos meus pais, aos meus irmãos, aos meus amigos e professores do PROFMAT-UENF que muito me apoiaram em minha caminhada.

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus por ter me concedido sabedoria, ânimo e coragem para realizar mais uma etapa em minha vida.

Ao meu esposo, Felipe, por todo apoio, compreensão e paciência.

À minha família, que soube compreender meus momentos de ausência em certas ocasiões devido aos estudos.

Aos meus colegas de Mestrado, pelos momentos agradáveis, pela força nas situações difíceis e contribuições na aprendizagem.

Aos colegas, Cilícia e Eduardo, pela hospedagem e todo carinho.

Ao Lenilson, pela amizade, companhia nas viagens para a Universidade e pela constante ajuda em todo o mestrado.

Aos Professores do Profmat-UENF, pelos conhecimentos e sabedoria transmitidos, em especial, ao professor Rigoberto, por toda ajuda no LaTex.

À minha orientadora Liliana, por confiar no meu trabalho e pela grande orientação prestada.

E a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

‘‘...Dê-me, Senhor, agudeza para entender, capacidade para reter, método e faculdade para aprender, sutileza para interpretar, graça e abundância para falar, acerto ao começar, direção ao progredir e perfeição ao concluir...’’

São Tomás de Aquino

Resumo

O presente trabalho refere-se à construção de ideias e conceitos matemáticos em torno da habilidade de identificar e associar a equivalência entre as diversas representações de um mesmo número racional (fração, decimal e porcentagem). A investigação justifica-se pela dificuldade que muitos alunos apresentam no domínio dessa habilidade e por reconhecer que a não acessibilidade dos discentes ao conceito de número racional pode gerar graves defasagens à aprendizagem, nos diversos ramos da Matemática. Assim, o objetivo principal desta pesquisa é aplicar uma sequência didática e verificar se a mesma contribuiu positivamente para o aprendizado da habilidade de reconhecer e associar as diferentes representações para um mesmo racional. A sequência didática foi aplicada a alunos do 9^o ano do Colégio Estadual Jaime Queiroz de Souza, em Portela – RJ, os quais foram submetidos à um teste inicial (Pré-Teste) para verificar o nível de conhecimento prévio sobre o assunto, intervenção pedagógica, na qual se implementaram estratégias focadas em jogos manipuláveis e reaplicação do teste inicial (Pós-Teste) para verificar se houve ou não um avanço no aprendizado após a intervenção pedagógica. Diante da pesquisa bibliográfica e da análise das respostas dos alunos no pré-teste e pós-teste, pode-se constatar que o ensino e a aprendizagem dos números racionais necessita de uma atenção especial e o professor, usando métodos de ensino diversificados como materiais concretos, contribui para a erradicação das dificuldades que muitos alunos apresentam em identificar e associar as diferentes e equivalentes representações para um mesmo número racional.

Palavras-chaves: Números Racionais, Diferentes Representações, Intervenção Pedagógica, Jogos.

Abstract

This work refers to the construction of ideas and mathematical concepts about the ability to identify and associate the equivalence among the various representations of the same rational number (fraction, decimal and percentage). The study is justified by the difficulty many students present on the understanding this ability and also it is justified by the recognition that the inaccessibility of the students to the rational number concept can lead to serious gaps in learning, in various fields of mathematics. Thus, this work has the main objective to apply a didactic sequence and see if it contributed positively to the learning of the ability to recognize and associate the different representations for the same rational . The didactic sequence was applied to students of the 9th grade of a public High School called Colégio Jaime Queiroz de Souza located in Portela - RJ, which were submitted to an initial test (pre-test) to check the level of prior knowledge on the subject , pedagogical intervention, which was implemented strategies focused on games and reapplication of the initial test (post-test) to check whether or not a breakthrough in learning after the pedagogical intervention. Given the literature search and analysis of student responses in the pre-test and post-test, it can be seen that the teaching and learning of rational numbers require special attention and the teacher, using different teaching methods such as concrete materials contributes to the eradication of the difficulties that many students have to identify and associate the different and equivalent representations for the same rational number.

Key-words: Rational Numbers, Different Representations, Pedagogical Intervention, Games.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
SAERJ	Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro
SEEDUC	Secretaria de Estado de Educação
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio

Lista de símbolos

$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\in$	Pertence
$\%$	Por Cento
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos Números Racionais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\Leftrightarrow$	Se e somente se

Sumário

Introdução

A Matemática é uma disciplina considerada muito complexa, que apresenta grande rejeição na Educação Básica o que adicionado ao desinteresse por parte dos alunos vem colaborando com os altos índices de reprovação (SILVA, 2014).

Diversos são os conteúdos de Matemática que os alunos apresentam dificuldades de compreensão, porém, dentre os muitos existentes, os números racionais se destacam (ROSA, 2007). Reforçando esse fato, Toledo (2009, p.163), afirmam que esse conteúdo "costuma trazer grandes dificuldades aos alunos, até para aqueles dos anos finais do Ensino Fundamental e mesmo para o Ensino Médio.

As dificuldades aparecem nas diferentes formas de representação dos números racionais", segundo os PCNs BRASIL (1998)

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo (BRASIL, 1998, p. 100 e 101).

Pesquisas apontam que muitos alunos, após anos de escolaridade, continuam trabalhando com as frações de forma simbólica, como se fossem "números naturais, só que escritos de uma forma diferente, um em cima do outro", isso porque não associam a fração nem como uma quantidade, pois não a percebem como um número; nem como um quociente, pois não a associam ao resultado de uma divisão (SILVA, 1997, p.6).

Uma das dificuldades que terá destaque neste trabalho é a dificuldade que muitos alunos apresentam em converter e associar a equivalência entre as diversas representações dos racionais (fração, decimal e porcentagem). Catoo (2000) destaca que:

> Observações realizadas em diferentes fases da aprendizagem da Matemática têm mostrado que essa atividade de conversão por meio da mudança de registro é de fato muito difícil. Para uma grande maioria de alunos, o conteúdo fica restrito a um único registro de representação, o que acaba limitando os tratamentos possíveis. Essa falta de reconhecimento do representado (o número racional) e as diferentes formas de representação, representante, levam os alunos a um trabalho desconexo de significação, a ponto de deixarem de estabelecer ligação entre os registros na forma fracionária, 1/4 e a decimal 0,25, embora os tratamentos no interior de cada registro sejam realizados corretamente (CATOO, 2000, p.30).

Essas dificuldades expostas acima motivaram a procura por métodos ou ações diferenciadas que auxiliem o aluno a realmente reconhecer e associar diferentes representações para um mesmo número racional.

Assim, o presente trabalho tem por objetivo principal aplicar uma sequência didática e verificar se a mesma contribuiu para corrigir as lacunas existentes no aprendizado associado a habilidade de reconhecer e associar as diferentes representações para um mesmo número racional.

A sequência didática [1] acontecerá em seis encontros de 2 horas/aula, com alunos do 9^o ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Jaime Queiroz de Souza, em Portela - RJ, escolhida por ser a escola na qual a pesquisadora leciona. Esta sequência didática está dividida em três etapas: Pré-teste, Intervenção Pedagógica e Pós-teste. Inicialmente foi aplicado um pré-teste para identificar o nível de conhecimento prévio dos alunos, uma vez que, esse conteúdo já foi trabalhado anteriormente. A seguir, foi realizada uma intervenção pedagógica e finalmente foi aplicado um pós-teste, para verificar, se a intervenção pedagógica contribuiu ou não para um aprendizado significativo dos alunos.

A ideia da intervenção pedagógica [2] surgiu por meio da experiência docente da pesquisadora com turmas de 9^o ano do Ensino Fundamental da Rede Estadual de Ensino do Estado do Rio de Janeiro. Nessa rede de ensino os alunos matriculados no 9^o ano realizam bimestralmente as avaliações diagnósticas denominadas Saerjinho (1^o, 2^o e 3^o bimestre) e Saerj (4^o bimestre) , e também, nos anos ímpares, a Prova Brasil, onde uma das habilidades avaliadas é a habilidade destacada nesse trabalho.

A intervenção pedagógica é composta por uma atividade com linhagem construtivista e três jogos manipuláveis, também contará com a exibição de duas videoaulas para despertar o interesse dos alunos pelo assunto.

Nos trabalhos de Ventura (2013), Ferreira (2014) e Souza (2013) é possível encontrar ideias semelhantes a apresentada neste trabalho, onde há o enfoque das dificuldades no ensino e aprendizagem dos números racionais e o uso de jogos como estratégia de ensino para a correção de tais dificuldades. As principais diferenças do presente trabalho dos citados são os tipos de jogos utilizados, a análise dos resultados utilizando a comparação do resultado do pré-teste com o do pós-teste e o enfoque nas diferentes representações de um mesmo número racional, uma vez que, a maioria dos trabalhos que apresentam os números racionais como tema se concentram em apenas uma de suas representações.

[1] Sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos.

[2] A intervenção pedagógica é uma interferência que um profissional, tanto o educador quanto o psicopedagogo, faz sobre o processo de desenvolvimento ou aprendizagem do sujeito, o qual no momento apresenta problemas de aprendizagem. Entende-se que na intervenção o procedimento adotado interfere no processo, com o objetivo de compreendê-lo, explicitá-lo ou corrigi-lo.

Esta dissertação está estruturada em três capítulos.

O primeiro capítulo apresenta definições, propriedades e características dos números racionais, além de abordar o seu ensino-aprendizagem, destacando as dificuldades e erros frequentes e finaliza mencionando a cobrança desse conteúdo nas avaliações diagnósticas.

O segundo capítulo fala da intervenção pedagógica, destacando a utilização dos jogos no ensino da matemática e descrevendo os jogos que serão utilizados como recursos para o ensino dos números racionais.

O capítulo três apresenta a intervenção pedagógica utilizada na pesquisa, assim como, a análise das respostas do pré e pós-teste aplicado aos alunos, visando uma sondagem do aprendizado.

Finalmente, são expostas as considerações finais, seguidas das referências bibliográficas, apêndices e anexos.

Capítulo 1

Os Números Racionais

A palavra fração deriva do latim “fractus” que significa “partido”, “quebrado”, assim pode-se dizer que a fração é a representação das partes iguais de um todo (HENRIQUE, 2010).

Conforme Boyer (1974), as primeiras notícias sobre o uso das frações remetem a cerca de 3000 a.C. e vêm do Egito. As terras que margeavam o Rio Nilo eram divididas entre os grupos familiares, em troca de pagamento de tributos para o Estado. Como eram periódicas as inundações do Rio Nilo, as terras tinham de ser frequentemente medidas, visto que o tributo era pago proporcionalmente à área a ser cultivada. Para tanto, os proprietários usavam cordas (que seriam uma espécie de medida), esticando-as e, assim, verificavam quantas vezes aquela unidade de medida (encontrada através da corda esticada) estava contida nos lados do terreno. Mas raramente essas medidas correspondiam exatamente ao tamanho do terreno, pois não cabiam um número inteiro de vezes em seus lados, dificuldade esta que os levou, então, à criação de um novo tipo de número: o número fracionário (BOYER, 1974).

Os antigos egípcios, utilizavam apenas frações da forma $1/n$ de modo que todas as demais frações tinham que ser expressas como somas de frações de numerador 1 e denominadores diferentes. Só duas frações podiam ser apontadas como exceção a tal regra: $3/4$ e $2/3$, sendo que a última era contemplada como fração geral, uma vez que era utilizada como base para diversas operações matemáticas. Os babilônios usavam em geral frações com denominador 60. É provável que o uso do número 60 pelos babilônios se deve ao fato que é um número menor do que 100 com maior quantidade de divisores inteiros. Os romanos, por sua vez, usavam constantemente frações com denominador 12. Provavelmente os romanos usavam o número 12 por ser um número que embora pequeno, possui um número expressivo de divisores inteiros (BERLINGHOFF; GOUVEA, 2012).

Com o passar dos tempos, muitas notações foram usadas para representar frações. A forma de escrever frações usando um número sobre outro vem dos hindus, eles colocavam um número sobre outro sem o traço, com o tamanho da parte abaixo e o número de vezes que essa parte devia ser contada em cima. Esse costume se espalhou pela Europa mais tarde (FERREIRA, 2014).

Em relação as frações decimais (frações cujos denominadores são potências de 10), vale salientar que cerca de 100 a.C. os chineses já as usavam. O primeiro registro de uso de frações decimais, depois dos chineses, ocorreu somente no século X numa obra de aritmética do árabe Al-Uqlidisi. No Mundo Cristão, por volta de 1200, foram introduzidas por Fibonacci que havia tomado contato com elas durante suas viagens pelo norte da África. Fibonacci deu, ademais, os primeiros passos na construção de uma aritmética dessas frações (SILVEIRA, 2011). Apesar disso, as frações decimais quase não foram usadas na Europa na Idade Média. Somente em 1585, com a publicação de um livreto intitulado De Thiende (A Arte Dos Décimos), do holandês Simon Stevin que essa situação começou a mudar, mostrando que “escrever frações como decimais permite que operações com frações sejam efetuadas pelos algoritmos muito mais simples da aritmética dos inteiros” (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2013).

Os números decimais têm origem nas frações decimais. Os números decimais são, na realidade, a mesma coisa que as frações decimais, porém “escritos” de modos diferentes. Existiram muitas formas de separar a parte inteira da parte decimal, mas foi John Napier, matemático escocês, que sugeriu o uso de um ponto ou de uma vírgula para separar a parte inteira da parte decimal (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2013).

O termo por cento para as frações com denominadores 100 tem sua origem na aritmética comercial dos séculos XV e XVI. Isso se deu por ser comum citar taxas de juros em centésimos. O que contribuiu também para tal costume de uso do termo foi o fato dos Estados Unidos possuírem um sistema monetário baseado em dólares e centavos (centésimos de dólares). Através dos séculos, o símbolo de porcentagem se consolidou, iniciando com uma abreviação à mão “por 100”, depois para “por $\frac{0}{0}$”, posteriormente apenas por “$\frac{0}{0}$” e, finalmente para “$\%$” (CAJORI, 1993).

Assim surgiu o número racional, aquele que pode ser expresso como a razão ou fração de dois inteiros a e b ($b \neq 0$). O conjunto dos números racionais pode ser expresso do seguinte modo:

$$\mathbb{Q} = \{a/b;\ a \text{ e } b\ \in\ \mathbb{Z} \text{ e } b\ \neq 0\}$$

O símbolo $\mathbb{Q}$ deriva da palavra inglesa “Quotient” que pode ser traduzido como quociente e que apareceu a primeira vez no livro Algèbre, de Bourbaki (BOURBAKI, 1998).

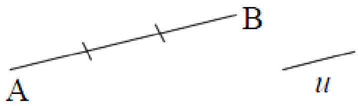
Segundo Caraça (1951) o conjunto dos números racionais, ou campo racional compreende o conjunto dos números inteiros e mais o formado pelos números fracionários.

O estudo dos números racionais floresceu sob os gregos: Pitágoras, Eudoxus, Euclides e muitos outros que trabalhavam com proporções, embora seus trabalhos tenham sido limitados pelo fato de só terem como ferramenta à geometria.

Assim, os números racionais surgiram como abstração do processo de medir, quando a unidade não cabia um número inteiro de vezes no que estava sendo medido, o que tornava necessário que a unidade fosse redividida.

Segundo Lima (2013) para medir um segmento AB é necessário fixar um segmento padrão u, chamado segmento unitário. Por definição, a medida do segmento u é igual a 1. Estipula-se ainda que segmentos congruentes tenham a mesma medida e que se n – 1 pontos interiores decompuserem AB em n segmentos justapostos, então a medida de AB será igual a soma das medidas desses n segmentos. Portanto, se estes segmentos parciais forem todos congruentes a u, diz-se que u cabe n vezes em AB e a medida de AB será igual a n. A Figura 1 ilustra esse fato.

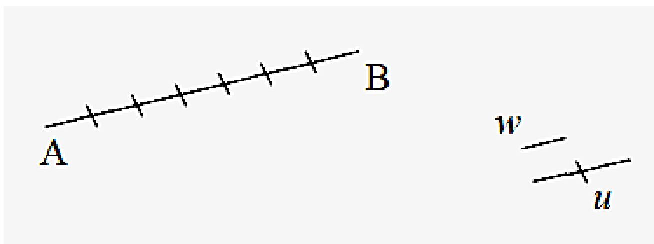
Figura 1 – *Segmento AB*



Fonte: (ZUFFI, 2015)

Porém, é claro, nem sempre este é o caso. A unidade u pode não caber um número exato de vezes em AB, ou seja, a medida de AB não é um número natural. Tal situação conduz a ideia de fração, uma vez que, uma possível estratégia para solucionar esse caso é subdividir a unidade u em partes iguais, obtendo uma nova unidade w, que caiba n vezes no segmento u e m vezes em AB. Esse segmento w será então uma medida comum de u e AB. Encontrando w, diz-se que AB e u são comensuráveis. A medida de w será a fração 1/n e a medida de AB, por conseguinte, será m vezes 1/n, ou seja, igual a m/n. Caso contrário, diz-se que u e AB são incomensuráveis. Desta forma, quando um segmento considerado é comensurável com a unidade indicada, sua medida é um número racional (LIMA, 2013). Observe um exemplo de segmento comensurável na Figura 2.

Figura 2 – *Segmento Comensurável*



$$w = \frac{1}{2}u$$

$$AB = 7w = \frac{7}{2}u$$

Fonte: (ZUFFI, 2015)

Generalizando o exposto acima, seja um segmento de medida p a ser medido em função de um segmento de medida q considerada como unidade, a razão p/q expressa a medida do segmento que se queria medir. Se p é divisível por q, a medida expressa um número inteiro. Se p não é divisível por q, haverá um problema, pois a medida não pertence ao conjunto dos números inteiros. Assim, surgiu a necessidade da criação de um novo campo numérico (números racionais) onde o número fracionário estivesse inserido.

Segundo Caraça (1951), esse surgimento dos números racionais é resultado do desenvolvimento da humanidade que se viu diante da necessidade de realizar medições onde os números inteiros já não eram mais suficientes para expressá-las. Atualmente, as atividades desenvolvidas pelo homem tanto no âmbito social, comercial e tecnológico demandam muito mais dos números racionais do que dos números inteiros.

1.1 Equivalências entre as Representações de um Número Racional

Um número racional pode assumir diferentes representações: fracionária, decimal e percentagem.

Conforme Duval (2009), apresentar uma única forma de representação não garante aos alunos a compreensão da aprendizagem do conceito.

> Mudar a forma de uma representação se revela ser, para muitos alunos nos diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e, por vezes, mesmo impossível. Tudo se passa como se a compreensão que a grande maioria dos estudantes tivesse de um conteúdo ficasse limitada à forma de representação utilizada (DUVAL, 2009, p.35).

Nesse sentido é muito importante para o aluno transitar pelos diferentes tipos de representação durante o processo de ensino e aprendizagem, além da realização de tratamentos e conversões em diferentes representações, a fim de facilitar a construção do conhecimento.

A seguir, apresenta-se as possíveis conversões de uma representação para outra dos números racionais.

1.1.1 Conversão de Fração em Decimal

Quando os números racionais estão na forma fracionária, basta dividir o numerador pelo denominador para obter a forma decimal. Uma forma decimal pode ser finita (decimais exatos) ou infinita (dízimas periódicas).

Exemplos:

Quadro 1 – Exemplos de decimais exatos e dízimas periódicas

Decimal Exato	Dízima Periódica Simples	Dízima Periódica Composta
$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{3} = 0,333...$	$\frac{145}{90} = 1,6111...$

Fonte: Autoria Própria

Os números fracionários resultam em decimais exatos quando o denominador da fração apresentar somente fatores 2 e/ou 5. Sendo assim, o número racional na forma fracionária a/b, com a e b primos entre si, que admite representação decimal finita $a_0,\ a_1\ a_2\ \ldots a_n$ pode ser representado da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} = a_0, a_1a_2...a_n = \frac{a_0a_1a_2...a_n}{10^n} = \frac{a_0a_1a_2...a_n}{2^x5^y}, \quad \text{onde} \quad n \geq 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant n \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant n$$

Exemplificando:

(a) Número racional com representação decimal finita quando o seu denominador apresenta apenas o fator 2:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 0,125$$

(b) Número racional com representação decimal finita quando o seu denominador apresenta apenas o fator 5:

$$\frac{2}{25} = \frac{2}{5^2} = 0,08$$

(c) Número racional com representação decimal finita quando o seu denominador apresenta os fatores 2 e 5:

$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3.5} = 0,175$$

Os decimais periódicos, também chamados de dízimas periódicas, são representados por números fracionários que não possuem o fator 2 e/ou 5 no seu denominador ou se contiver outros fatores primos além do 2 e/ou 5. Esses números quando escritos no sistema decimal apresentam uma série infinita de algarismos decimais que se repetem em grupos ou individualmente.

As dízimas periódicas podem ser simples ou compostas, dependendo dos números que aparecem após a vírgula.

Exemplificando:

(a) Decimal Periódico Simples, após a vírgula, logo identifica-se o período.

$$\frac{1}{3} = 0,3333...$$

(b) Decimal Periódico Composto, após a vírgula, tem-se o anteperíodo antes do período.

$$\frac{29}{18} = 1,6111...$$

1.1.2 Conversão de Decimal em Fração

Na conversão de decimais em frações, há basicamente duas possibilidades a ser consideradas: conversão de decimal exato e conversão de decimal infinito (periódico).

Quadro 2 – Exemplos de decimal exato e decimal infinito periódico

Decimal Exato	Decimal Infinito Periódico
$0,75 = \frac{3}{4}$	$0,222... = \frac{2}{9}$

Fonte: Autoria Própria

Para transformar um **decimal exato** em fração segue-se os passos abaixo:

1. Relacionar o número decimal exato com uma incógnita.
2. Multiplicar por uma potência de 10. O valor da potência dependerá de quantas casas decimais o decimal exato possui.
3. Encontrar o valor da incógnita, que resultará na representação fracionária do decimal exato.
4. Por fim, se for possível, simplifica-se a fração.

Exemplos:

1. $x = 0,8 \Leftrightarrow 10x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
2. $x = 1,02 \Leftrightarrow 100x = 102 \Leftrightarrow x = \frac{102}{100} = \frac{51}{50}$
3. $x = 0,047 \Leftrightarrow 1000x = 47 \Leftrightarrow x = \frac{47}{100}$

Para transformar um **decimal infinto periódico simples** em fração segue-se os seguintes passos:

1. Relacionar a dízima periódica com uma incógnita. Normalmente usa-se a incógnita x.
2. Multiplicar os dois lados da igualdade por um múltiplo de 10, de acordo com a quantidade de algarismos do período, por exemplo: um algarismo, multiplicar por 10; dois algarismos, multiplicar por 100; três algarismos, multiplicar por 1000, e assim sucessivamente.
3. Subtrair a segunda igualdade da primeira igualdade (elimina-se a parte periódica, ficando apenas os números não periódicos). Finaliza-se encontrando o valor de x.

Exemplo 1.1 *Encontrar a fração geratriz da dízima* $0,333...$*:*

$1^o \quad passo:$ *Chamando* $x = 0,333...$

$2^o \quad passo:$ *Multiplicando* x *por* 10*, dá* $10x = 3,3333...$

$3^o \quad passo:$ *Fazendo* $10x - x = (3,3333...) - (0,333...)$ *temos* $9x = 3$*. Logo,*

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 1.2 *Encontrar a fração geratriz da dízima* $0,454545...$*:*

$1^o \quad passo:$ *Chamando* $x = 0,454545...$

$2^o \quad passo:$ *Multiplicando* x *por* 10^2*, dá* $100x = 45,45...$

$3^o \quad passo:$ *Fazendo* $100x - x = (45,4545...) - (0,4545...)$ *temos* $99x = 45$*. Logo,*

$$x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

Observação 1.1 *Um método prático para se obter a fração geratriz no caso de dízimas periódicas simples, consiste em utilizarmos o período como numerador e utilizarmos como denominador um número formado por tantos dígitos 9, quantos forem os dígitos do período.*

*Para transformar um **decimal infinito periódico composto** em fração segue-se os seguintes passos:*

1. *Relacionar a dízima periódica com uma incógnita. Normalmente usa-se a incógnita* x*.*
2. *Multiplicar os dois lados da igualdade por um múltiplo de* 10*, a fim de representar, na parte decimal, somente os algarismos do período.*
3. *Multiplicar os dois lados da igualdade por um múltiplo de* 10*, de acordo com a quantidade de algarismos do período.*
4. *Subtrair as igualdades encontradas nos passos* 2 *e* 3 *e finalizar encontrando o valor de* x*.*

Exemplo 1.3 *Encontrar a fração geratriz da dízima* $1,6111...$*:*

$1^o \quad passo:$ $x = 1,6111...$

$2^o \quad passo:$ *Multiplicando* x *por* 10*, dá* $10x = 16,111...$

$3^o \quad passo:$ *Multiplicando novamente por* 10*, dá* $100x = 161,111...$

$4^o \quad passo:$ *Fazendo* $100x - 10x = (161,111...) - (16,111...)$ *temos* $90x = 145$*. Logo,*

$$x = \frac{145}{90} = \frac{29}{18}$$

Exemplo 1.4 *Encontrar a fração geratriz da dízima* $0,45222...$*:*

$1^o \quad passo: \; x = 0,45222...$

$2^o \quad passo:$ *Multiplicando* x *por* 100*, dá* $100x = 45,222...$

$3^o \quad passo:$ *Multiplicando novamente por* 10*, dá* $1000x = 452,222...$

$4^o \quad passo:$ *Fazendo* $1000x - 100x = (452,222...) - (45,222...)$ *temos* $900x = 145.$ *Logo,*

$$x = \frac{452-45}{900} = \frac{407}{900}$$

Observação 1.2 *Uma forma prática de converter uma* ***representação decimal periódica infinita composta*** *em uma fracionária da forma* $\frac{n}{d}$ *é fazendo* n *igual a junção do anteperíodo com o período menos o anteperíodo da dízima, e* d *o número formado por tantos dígitos 9, quantos forem os dígitos do período seguidos de tantos dígitos 0 quantos forem os dígitos do anteperíodo.*

1.1.3 Conversão de Porcentagem em Fração e Decimal

Apresenta-se agora a noção de porcentagem que é simplesmente um tipo especial de fração, mais precisamente uma fração cujo denominador é 100*. Assim,* n *por cento, ou* $n\%$*, representa a fração* $n/100$*. O símbolo* $\%$ *aparece com muita frequência em jornais, revistas, televisão, anúncios de liquidação, entre outros.*

Vale ressaltar que a porcentagem também pode ser representada na forma de número fracionário ou decimal.

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15$$

$$218\% = \frac{218}{100} = 2,18$$

Apresentar-se a seguir três questões envolvendo porcentagens que geralmente os estudantes apresentam dificuldades (WU, 2008). Antes de apresentá-las vale salientar que a habitual declaração $N\%$ *de uma quantidade* m/n *é exatamente* $N\% \quad$ *x* $\quad m/n$*, ou seja, para se calcular a porcentagem de algum valor basta multiplicar o valor desejado pelo percentual que se quer.*

1. ***Quanto é de 8% de 75?***

$$8\% \quad \textit{de} \quad 75 = \frac{8}{100} \times 75 = \frac{600}{100} = 6$$

2. ***5 % de que número é 16?***

   Chama-se de y o número que se quer encontrar. Assim a questão se resume em resolver 5% de y é igual a 16 , isto é,

$$5\% \times y = 16$$

   Usando as definições já conhecidas tem-se:

$$\frac{5}{100} \times y = 16$$

$$y = \frac{16}{5/100} = 16 \times \frac{100}{5} = \frac{1600}{5} = 320$$

3. ***Qual o percentual de 24 é igual a 9?***

   Suponha que $N\%$ é o percentual procurado. Assim a questão traduz-se em $N\%$ de 24 é igual a 9 , ou $\frac{N}{100} \times 24 = 9$, que é o mesmo que $N \times \frac{24}{100} = 9$. Finalizando pela definição da divisão, tem-se:

$$N = \frac{9}{24/100} = 9 \times \frac{100}{24} = 37,5$$

   Portanto, a resposta procurada é $37,5\%$.

Diante as várias representações para um mesmo número racional, vale ressaltar que é importantíssimo que os alunos consigam associar e relacionar as diferentes representações de um mesmo número racional e não simplesmente decorem métodos sem entender o processo.

1.2 As Dificuldades no Ensino e Aprendizagem

O ensino-aprendizagem dos números racionais no ensino básico não tem sido uma tarefa fácil. Muitas são as dificuldades acerca deste tema e por isso, os números racionais, são alvos de discussão e investigações por vários autores, como Ventura (2013), Monteiro e Costa (1996) e BRASIL (1998), onde afirmam que, entre outros fatores, essas dificuldades existem devido a complexidade dos conceitos, a utilização precoce das regras e pelos racionais serem o primeiro conjunto numérico denso a ser estudado. Essas dificuldades vêm acarretando, nas habilidades que envolvem os números racionais, erros frequentes e baixo desempenho em provas diagnósticas nacionais e estaduais.

Muitos professores de Matemática compartilham da mesma ideia quando o assunto tratado é o ensino dos números racionais, onde afirmam que, para os alunos, a noção dos números racionais ainda é um grande obstáculo do ensino da Matemática a ser vencido.

Como já citado na introdução, para Toledo (2009) as dificuldades aparecem nas diferentes formas de representação dos números racionais e não se limitam ao Ensino Fundamental, chegam também ao Ensino Médio. Os PCNs, BRASIL (1998), vão mais além quando afirmam que essas dificuldades acerca dos números racionais persistem até mesmo na faculdade, onde se evidencia que os alunos chegam sem entender o significado e com muitas dificuldades nos cálculos, principalmente dos decimais.

Há também aqueles que afirmam que as dificuldades não se limitam apenas aos discentes, mas estende-se aos professores. Onuchic e Botta (1997) afirmam que:

> *Quem está ou já esteve trabalhando com números racionais nota grandes dificuldades no ensino-aprendizagem desse tópico. Na literatura existente sobre esse tema, todos os educadores matemáticos são concordes em dizer que há muita dificuldade aí, tanto para os alunos como para os professores (ONUCHIC; BOTTA, 1997, p.1).*

Diante da complexidade que caracteriza o ensino dos números racionais, surge a pergunta: Quais serão os motivos de tanta dificuldade?

Muitos autores têm uma resposta para essa indagação. As orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais BRASIL (1998) indicam que "uma explicação para as dificuldades encontradas possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais." Ainda complementam citando alguns obstáculos que os alunos têm que enfrentar quando estudam os números racionais, obstáculos como as diferentes representações que um mesmo racional pode assumir e a comparação dos racionais que é muito diferente da dos números naturais, visto que se antes o tamanho da escrita dos números era um bom indicador de grandeza ($25 < 2499$) *agora não se pode usar mais esse critério* ($2,5 > 2,499$) *e além de terem que compreender uma desigualdade que lhes parecem contraditória como* $1/2 > 1/3$*, diante do fato que estavam acostumados com a relação* $2 < 3$.

Já para Sweeney e Quinn (2000), citado por Ventura (2013, p. 1), o motivo das dificuldades dos alunos nesse tema deve-se a uma abordagem isolada das frações, dos decimais e das porcentagens. Essa abordagem isolada impossibilita o aluno de identificar e associar as diferentes representações dos números racionais, gerando assim, uma compreensão incompleta dos números racionais.

Duval (2003) afirma que a dificuldade dos alunos com os números racionais aumenta quando é solicitado a troca de registro ou o uso de dois registros simultaneamente. Ele destaca que essa dificuldade encontra-se em vários níveis de ensino, acontecendo como se fosse um bloqueio que impede o aluno de identificar o mesmo objeto em duas representações diferentes. Maranhao e Igliori (2003) complementam as constatações de Duval (2003) quando afirmam que, apesar dos alunos terem o conhecimento das regras de mudança de registros dos racionais, muitas vezes não conseguem fazer essa mobilização simultaneamente quando solicitados. É o caso quando o aluno não reconhece que a *representação $1/4$ tem o mesmo valor que a representação $0,25$. Umas das razões dessas dificuldades é que números racionais envolvem várias ideias e todas elas devem ser bem trabalhadas na sala de aula.*

Outra razão para as dificuldades na aprendizagem dos números racionais segundo Monteiro e Costa (1996) é a utilização precoce das regras que muitas vezes não são compreendidas.

> *A utilização prematura das regras no estudo das frações e decimais, tem sido detectado como outro fator que atrasa a compreensão dos números racionais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática (MONTEIRO; COSTA, 1996, p.62).*

Diante a tantas justificativas para entender as dificuldades que cercam o estudo dos números racionais, evidencia-se que o processo de ensino e aprendizagem do conceito de número racional tem sido alvo de várias pesquisas da educação Matemática. Mas o que mais preocupa são as implicações da não acessibilidade de um aluno ao conceito de número racional, uma vez que, podem acarretar graves prejuízos à aprendizagem dos diversos ramos da matemática (MARANHAO; IGLIORI, 2003, p.57).

1.2.1 Erros Frequentes nas Representações de um mesmo Número Racional

Segundo Souza (2002), os erros fazem partem do processo de aprendizagem e devem ser compreendidos e encarados como uma importante ferramenta para diagnosticar e identificar as dificuldades e obstáculos presentes na aprendizagem da Matemática e gerar elementos que favoreçam o desenvolvimento cognitivo do aluno. Sendo assim, o professor deve sempre está atento aos erros que seus alunos cometem para analisá-los e compreendê-los, visando aproveitá-los como estratégia de ensino para ajudar os alunos a vencerem suas dificuldades e reverter esse quadro de deficiência na aprendizagem.

Os erros são inúmeros e frequentes quando o tema trabalhado são os números racionais. É muito comum os professores se depararem com erros do tipo:

- $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$ *(adiciona-se de forma separada os numeradores e denominadores, originando uma fração Empson (1999).)*
- $\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ *(Compara-se frações em termos do tamanho dos termos da fração, $\frac{1}{2}$ é menor do que $\frac{1}{4}$ porque 2 é menor do que 4 Empson (1999).)*
- $1,235 > 1,6$ *($1,235$ é maior do que $1,6$ porque tem mais algarismos Monteiro e Pinto (2007).)*
- $1,7 = 1,07$ *(Confunde-se as décimas com as centésimas. Monteiro e Pinto (2007))*

- $\frac{4}{7}$ *é o sucessor de* $\frac{3}{7}$ *(O aluno utiliza a regra dos números naturais, onde há sempre um elemento seguinte Gil (2012))*

Também há muitos erros relacionados à transposição de registros dos racionais. Catoo (2000) destaca a dificuldade dos alunos na atividade de conversão por meio da mudança de registro e também destaca que muitos alunos não reconhecem e nem associam as diferentes representações do número racional, chegando ao ponto do aluno não estabelecer ligação entre a forma fracionária $\frac{1}{2}$ *e a decimal* $0,5$.

Na transposição de registros dos racionais, é comum os alunos estabelecerem uma equivalência errada entre uma fração e um decimal, separando o numerador do denominador com uma vírgula (CARVALHO, 2005).

$$\frac{1}{2} = 1,2$$

No caso da transformação de decimais para fração os alunos também cometem esse mesmo erro, porém de forma inversa, ou seja, consideram a parte inteira como numerador e a parte decimal como denominador.

$$3,4 = \frac{3}{4}$$

Para Monteiro e Pinto (2007), esses erros revelam que o sistema de numeração decimal não está completamente entendido e que os alunos não ligam as representações com as quantidades que dizem respeito.

Já quando os números racionais estão na forma percentual, Parker e Leinhardt (1995) afirmam que é comum os alunos cometerem três tipos de erros:

1. *Ignorar o símbolo da porcentagem – o aluno não distingue* 10 *de* 10%*;*
2. *Regra do numerador – o aluno substitui o símbolo "*$\%$*" por uma vírgula à esquerda do número, o que o faz admitir que* $50\% = 0,5$ *e que* $120\% = 0,120$*;*
3. *Algoritmo aleatório – os alunos referem que* $8 = 4\%$ *de* 32*, determinando o quatro através da divisão de* 32 *por oito.*

Como pode-se perceber, muitos são os erros associados aos números racionais que os docentes se deparam frequentemente. Isso deve ser encarado como um alerta para os docentes refletirem as práticas educativas adotadas e também como um estímulo para encontrarem alternativas de trabalho para o assunto. Além disso, a pesquisadora defende a ideia de Romanatto (1997) que afirma que os números racionais devem ser bem explorados ao longo de todo o Ensino Fundamental. Desta forma, tem-se a chance de amenizar as dificuldades que rodeiam os números racionais e consequentemente, diminuir erros.

1.2.2 Os Números Racionais nas Avaliações Diagnósticas da Educação Básica

Atualmente o Sistema de Avaliação Educacional ocupa um lugar de destaque nas redes de ensino, visto que, cada vez mais se observa a necessidade de verificação do aprendizado dos alunos ao longo dos seus anos de escolaridade. "Esse tipo de avaliação é um dos principais instrumentos para a elaboração de políticas educacionais dos sistemas de ensino e redirecionamento das metas das unidades escolares" (SANTOS; CAMPOS; CARVALHO, 2013, p.1).

Foi na década de 80 *que se iniciou a discussão da implantação desse sistema de avaliação em larga escala no Brasil. Mais foi a partir de 1990 que o Ministério da Educação, por meio do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), instituiu e colocou realmente em prática esse sistema de avaliação em larga escala em nosso país. O SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e a Prova Brasil são exemplos de avaliações para diagnóstico em larga escala organizadas pelo Inep. Elas são compostas por testes padronizados e questionários socioeconômicos e têm por objetivo avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro. O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) que avalia o desempenho do estudante ao fim da educação básica, também é de responsabilidade do Inep (BRASIL, 2008).*

Os Estados também estão procurando desenvolver seus próprios sistemas de avaliação, estabelecendo metas e diretrizes específicas às suas realidades. No Rio de Janeiro, por exemplo, já existe o SAERJ (Sistema de Avaliação do Estado do Rio de Janeiro) e em São Paulo, há o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP).

Essa subseção abordará a cobrança de habilidades que envolvem os números racionais em algumas dessas avaliações citadas, dando ênfase para as avaliações destinadas para o 9^o *ano do Ensino Fundamental e* 3^o *ano do Ensino Médio. Também apresentará questões dessas avaliações e comentários pertinentes às mesmas. Vale ressaltar que o grau de deficiência no aprendizado dos números racionais é averiguado anualmente pelas avaliações externa de larga escala, a exemplo do Sistema de Avaliação do Ensino Básico – SAEB (FERREIRA, 2014).*

Iniciando-se pela Prova Brasil, onde a sua matriz de Matemática está estruturada por anos e séries avaliadas. Para cada um deles, são definidos os descritores[1] que indicam uma determinada habilidade que deve ter sido desenvolvida nessa fase de ensino. Esses descritores são agrupados por temas que relacionam um conjunto de objetivos educacionais.

[1] Descritores representam as habilidades que são esperadas dos alunos em diferentes etapas de escolarização

Os descritores relacionados aos números racionais estão descritos abaixo:

D17 *Identificar a localização de números racionais na reta numérica*

D21 *Reconhecer as diferentes representações de um número racional*

D22 *Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados*

D23 *Identificar frações equivalentes*

D24 *Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de "ordens", como décimos, centésimos e milésimos*

D25 *Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação)*

D26 *Resolver problema com números racionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação)*

Abaixo há alguns itens que foram utilizados na Prova Brasil, assim como, informações relevantes dos mesmos. Esses itens e informações foram retirados do Plano de Desenvolvimento da Educação - Prova Brasil (BRASIL, 2008).

Exemplo 1.5 *No Brasil, $\frac{3}{4}$ da população vive na zona urbana. De que outra forma podemos representar esta fração?*
(A) 15%. *(B)* 25%. *(C)* 34%. *(D)* 75%.

Esse item está associado ao descritor 21, no qual se pretende avaliar a habilidade de o aluno identificar números racionais nas suas diversas representações: fracionária, decimal ou percentual.

Quadro 3 – Percentual de respostas às alternativas do Exemplo 1.8

A	B	C	D
16%	17%	32%	32%

Fonte: (BRASIL, 2008)

Através do resultado exposto no Quadro 3 verifica-se que apenas a terça parte dos alunos dominam a habilidade. O mesmo percentual dos alunos que acertaram o item corresponde àqueles que optaram pela alternativa "C", mostrando o completo desconhecimento de equivalência de números racionais. Os alunos que escolheram as alternativas "A" ou "B" devem ter escolhido ao acaso.

Para melhor desenvolver essa habilidade sugere-se atividades nas quais, a partir de números racionais na forma fracionária, efetua-se a divisão do numerador pelo denominador, obtendo-se o correspondente decimal. Este decimal, por sua vez, quando multiplicado por 100, representa a forma percentual do número racional.

Exemplo 1.6 *Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou* $\frac{6}{8}$ *do caminho; Pedro,* $\frac{9}{12}$ *; Ana,* $\frac{3}{8}$ *e Maria,* $\frac{4}{6}$*. Os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho são:*

(A) João e Pedro. (B) João e Ana. (C) Ana e Maria. (D) Pedro e Ana

Esse item é destinado a avaliar a habilidade de o aluno reconhecer que uma fração pode também ser representada por um conjunto infinito de outras frações equivalentes a ela (descritor 23*).*

Quadro 4 – Percentual de respostas às alternativas do Exemplo 1.9

A	B	C	D
26%	41%	19%	9%

Fonte: (BRASIL, 2008)

Por meio dos resultados observados no Quadro 4, possivelmente, esses 41% *dos alunos tenham escolhido a alternativa "B", devido à igualdade entre os denominadores das frações. Apenas cerca de um quarto do universo avaliado mostrou dominar a habilidade (item A).*

Inúmeras atividades podem ser realizadas em sala de aula para bem desenvolver essa habilidade. É importante partir de materiais concretos verificando-se as equivalências entre fichas, peças de cartolina etc. Em seguida, deve ser exercitada a representação de frações equivalentes, por meio da simplificação de numeradores e denominadores

Os números racionais também são cobrados no ENEM, estes estão inseridos na ***HABILIDADE*** 1 ***– Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.***

Em 2012*, o site G1* [2] *apresentou uma reportagem cujo título era "Veja* 10 *temas que podem cair na prova de matemática do Enem". Essa reportagem afirma, baseada em comparação com provas passadas do Enem, que cerca de* 35% *da prova de Matemática do Enem avalia a competência e habilidades de : construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais; reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.*

Nessa mesma reportagem, Daniel Lowinsohn e Geraldo Akio, professores de Curso Preparatório de Vestibulares de São Paulo-SP, afirmam que "para ter sucesso na prova de matemática do Enem, os alunos devem conhecer bem alguns conceitos básicos da aritmética como: porcentagem, juros simples, frações, razão e proporção e análise de gráficos." A colocação dos professores é pertinente e ainda vale reforçar que tentar resolver questões do segundo grau sem a base do primeiro é impossível.

[2] Reportagem disponível em: http://g1.globo.com/educacao/noticia/2012/10/veja-10-temas-que-podem-cair-na-prova-de-matematica-do-enem.html (G1, 2012).

Abaixo apresenta-se duas questões cobradas no último Enem em que era necessário usar os conhecimentos sobre os números racionais para resolvê-las. Veja:

***Exemplo 1.7** **(Questão 177-Prova Amarela -Enem 2015)** No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema (Figura 3).*

Figura 3 – *Figura da questão 177 - Prova Amarela do Enem 2015*

Fonte:(ESTUDANTE, 2015b)

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

A) 9 *B)* 7 *C)* 5 *D)* 4 *E)* 3

RESOLUÇÃO: Pode-se perceber que essa questão é simplesmente a manipulação de frações, porém o aluno tinha que dominar a habilidade de reconhecer as diferentes representação para um mesmo racional. A carta da mesa é $\frac{6}{8}$ *que corresponde a* $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\% = 0,75.$ *Assim, temos três possibilidades de pares, as cartas:* $\frac{3}{4}, 75\%$ *e* $0,75.$

Logo, a resposta correta é a letra E.

***Exemplo 1.8** **(Questão 147 - Prova Amarela - Enem 2015)** A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma "caneta" na qual pode ser inserido um refil contendo* 3 *ml de insulina, como mostra a imagem (Figura 4).*

Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como $0,01$ *mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar* 2 *unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar. A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias:* 10 *unidades de insulina*

Figura 4 – *Figura da questão 147 - Prova Amarela do Enem 2015*

Fonte:(ESTUDANTE, 2015a)

pela manhã e 10 à noite. Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

A) 25 *B)* 15 *C)* 13 *D)* 12 *E)* 8

RESOLUÇÃO: Para resolver essa questão o aluno precisava dominar a operação de multiplicação e divisão com racionais na forma decimal. Sabe-se que 1 unidade de insulina equivale a $0,01$ ml e que cada aplicação do paciente conterá 10 unidades, porém para cada aplicação perde-se 2 unidades. Assim, 1 aplicação será ($10+2$) unidades. Então a cada aplicação serão gastos $12 \times 0,01 = 0,12$ ml. Logo, o número máximo de aplicações será: $3/0,12 = 25$ aplicações.

Assim, a alternativa correta é a letra A

Para finalizar, aborda-se a cobrança dos números racionais no Saerj. Na sua Matriz de referência os descritores que envolvem habilidades associadas aos números racionais são os mesmos da Prova Brasil.

Essa avaliação diagnóstica vem mostrando que os alunos do 9^o ano do Estado do Rio de Janeiro não estão alcançando resultados satisfatórios quando os itens avaliados estão associados aos números racionais. A revista pedagógica saerj 2012 SEEDUC (2012) fez uma análise por meio dos resultados das avaliações já realizadas e constatou que, em sua maioria, as habilidades avaliadas pelos itens presentes nos testes mostram que os descritores relacionados ao reconhecimento de diferentes representações de um número racional "D1" e à identificação de fração como representação que pode estar associada a diferentes significados "D2" têm um percentual de acerto abaixo de 50%. Verificou-se também que os itens relacionados ao "D1" apresentam um resultado ligeiramente melhor no desempenho dos alunos do 9^o ano para os do 5^o ano do Ensino Fundamental e, quando a habilidade em questão foi relativa ao descritor "D2", os resultados dos testes mostram que, em alguns casos, o desempenho dos alunos do 9^o é menor que o dos alunos do 5^o ano. Essas informações evidenciam que há uma urgência em modificar esse panorama educacional no Rio de Janeiro.

A revista do professor de matemática do 9^o ano SEEDUC (2008), material preparado pela secretaria de educação do Estado do RJ, apresenta um exemplo de questão simples sobre números racionais cobrada no saerj e com baixo índice de acerto. Veja um exemplo de questão e análise da mesma:

Exemplo 1.9 *De dez maçãs, seis são verdes e as outras são vermelhas. Considerando o conjunto dessas maçãs, que fração representam as maçãs vermelhas?*

A) $\frac{4}{6}$ *B)* $\frac{4}{10}$ *C)* $\frac{6}{4}$ *D)* $\frac{6}{10}$

Quadro 5 – Quadro de percentual por opção de resposta do Exemplo 1.12

A	B	C	D	Brancos e Nulos
$17,5\%$	$29,6\%$	$33,0\%$	$18,5\%$	$1,5\%$

Fonte:(SEEDUC, 2008)

Esse item tem por objetivo avaliar a habilidade do aluno resolver problemas envolvendo o conceito de frações. Para acertar esse item o aluno deveria comparar a quantidade de maçãs vermelhas (4) em relação ao total de maçãs (10). Essa comparação pode ser expressa por meio da fração $4/10$ (alternativa B). A escolha das alternativas A ($17,5$%) ou C ($33,0$%) indica que o aluno comparou as duas partes (maçãs verdes e maçãs vermelhas), sem atenção ao todo. Já a escolha da alternativa D ($18,5$%) indica que o aluno considerou o todo, mas trocou a parte solicitada pela não solicitada. É importante que os alunos tenham possibilidades em lidar com as diversas representações de um mesmo número racional. Por exemplo, a quantidade dois quintos pode ser representada por meio de um desenho ou por números ($2/5 = 4/10 = 0,4 = 40\% = 10/25$, etc.). Além disso, é importante que eles lidem com conjuntos discretos e contínuos, analisando a relação parte todo.

Também extraído da revista do professor Saerj, SEEDUC (2013), apresenta-se mais um exemplo representativo com baixo desempenho no Saerj.

Exemplo 1.10 *Qual é a representação percentual do número racional $0,65$?*

a) 65% *b)* $6,5\%$ *c)* $0,65\%$ *d)* $0,065\%$

Esse item avalia a habilidade de os alunos reconhecerem diferentes representações de um número racional. Questão simples, mas com índice de acerto de apenas $21,4\%$. O item C é o campeão de escolha pelos alunos, são $44,2\%$. A escolha dos itens B e D pelos alunos correspondem, respectivamente, a $18,4\%$ e $14,6\%$.

De forma geral, o que tem se constatado nas avaliações diagnósticas da Educação Básica é que os alunos não estão alcançando resultados satisfatórios nas habilidades referentes aos números racionais. Evidenciando a necessidade de mudar as políticas *públicas educacionais , assim como paradigmas utilizados nas escolas brasileiras de Ensino Fundamental e Médio (BRASIL, 2008).*

Capítulo 2

Os Jogos no Ensino dos Números Racionais

O capítulo anterior, dentre outras coisas, abordou as grandes dificuldades no ensino e aprendizagem dos números racionais, dificuldades que se estendem ao longo dos anos de escolaridade. Isso evidencia que há a necessidade de buscar estratégias diversificadas de ensino que visem sanar tais dificuldades e que sirvam como fator de correção para as habilidades que não foram atingidas no ano de escolaridade adequado.

> *O desinteresse dos alunos na sala de aula e as dificuldades que por vezes enfrentam em relação à Matemática, são razões mais que suficientes para que os professores procurem novas estratégias de ensino para os ajudar a superar os seus receios e os seus obstáculos (MOTA, 2009, p.14).*

Pensando nessa busca por novas estratégias de ensino para superar as dificuldades que os alunos apresentam em trabalhar com a habilidade de associar e identificar diferentes representações para um mesmo número racional, que este trabalho apresentará uma intervenção pedagógica focada em jogos.

A escolha de se trabalhar focando nos jogos manipuláveis (cartas) deve-se ao fato de serem recursos de ensino que não são usados com muita frequência, mas são de fácil acessibilidade e construção para o professor. Poderia-se pensar em estratégias mais tecnológicas, mas infelizmente, muitas escolas públicas ainda não têm um laboratório de informática e as que têm, não possuem computador para todos os alunos e/ou não possuem as mínimas condições de funcionamento, a exemplo da escola que a pesquisadora leciona.

Os jogos podem ser grandes aliados no ensino da Matemática, uma vez que, ao inseri-los nas aulas de Matemática, cria-se um ambiente mais favorável ao aprendizado, visto que a aula passa a ser mais agradável e dinâmica, além de despertar o interesse dos alunos em aprender.

Para os PCNs - BRASIL (1998):

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situaçõesproblema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas (BRASIL, 1998, p.46).

Carneiro, Rodrigues e Souza (2015), reforçam a contribuição dos jogos no ensino quando diz que os jogos matemáticos quando usado como estratégia de ensino e aprendizagem na sala de aula é um recurso pedagógico que apresenta excelentes resultados, uma vez que, desenvolve a criatividade, o raciocínio lógico, possibilita a elaboração de estratégias por meio de uma Matemática prazerosa, quebra a monotonia das aulas, além de promover interação social entre os alunos.

Completando essa ideia, Borin (1996) apresenta-nos mais motivos para introduzir os jogos nas aulas de matemática:

> Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem (BORIN, 1996, p.9).

Assim, em seu aspecto pedagógico, o jogo se apresenta produtivo ao professor que o utiliza como facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolve sua capacidade de "pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação"(GRANDO, 2000, p.45).

O uso dos jogos no ensino também tem desvantagens, porém as vantagens são bem maiores. As desvantagens acontecem principalmente quando os jogos são mal utilizados. Algumas vantagens já foram mencionadas sobre o uso dos jogos no ensino, mas pode-se conhecer mais algumas citadas por Grando (2000):

- Fixar conceitos já aprendidos de forma mais atrativa e motivadora para os discentes;
- Favorecer a relação entre alunos e a conscientização do trabalho em equipe;
- Reforçar o aprendizado de habilidades de que os alunos necessitem;
- Resgatar o prazer em aprender, desenvolver a criatividade, estimular o raciocínio lógico;

- *Permitir o professor identificar e diagnosticar alguns erros de aprendizagem dos alunos;*
- *Levar o aluno a construção do seu próprio conhecimento;*
- *Levar o aluno a aprender a tomar decisões e avaliá-las.*

Enfim, diante a tantas vantagens mencionadas sobre o uso dos jogos no ensino da Matemática aliada à dificuldade evidente que grande parte dos alunos apresenta na aprendizagem dos números racionais, evidencia-se que a utilização de jogos para trabalhar esse conteúdo pode ser uma estratégia de ensino que contribua positivamente para um ensino e aprendizagem eficaz.

Como já mencionado anteriormente os jogos com cartas é foco principal da intervenção pedagógica que está organizada para ser aplicada em 4 encontros de 2 horas/aulas cada, totalizando assim, 8 horas/aula. Porém essa intervenção também apresenta uma atividade que conduz o aluno a compreensão e relação das múltiplas e equivalentes formas de representar um mesmo número racional (fração, decimal e porcentagem).

Essa intervenção pedagógica também utilizará duas videoaulas que foram produzidas pelo Novo Telecurso 2000, Aula 26 - Fração ou número com vírgula e Aula 45 - Novamente frações, que podem ser acessadas facilmente e até baixadas.

Essas videoaulas estão inseridas na intervenção visando despertar o interesse dos alunos pelo tema, pois considera-se que "o processo de ensino-aprendizagem da matemática, quando submetido a estilos visuais e sonoros, torna-se mais dinâmico e cria-se assim um ambiente interativo e menos tradicional do ensino de matemática". (JÚNIOR, 2013, p.25)

Nas subseções abaixo, apresenta-se a descrição de três tipos de jogos com cartas sobre os números racionais. Esses jogos juntamente com a atividade, fazem parte da intervenção pedagógica e objetivam auxiliar os alunos a vencerem as dificuldades que cercam a habilidade de identificar e associar diferentes representações para um mesmo racional.

2.0.1 Jogo: Que Racional é esse?

Objetivos:

- *Reconhecer os racionais na forma de decimais exatos, dízimas periódicas simples e compostas;*
- *Converter número na forma fracionária para a forma decimal;*
- *Diferenciar decimais infinitos periódicos e decimais infinitos não-periódicos;*
- *Identificar regularidades existentes entre as frações que se convertem em decimais exatos e entre frações que se transformam em dízimas periódicas.*

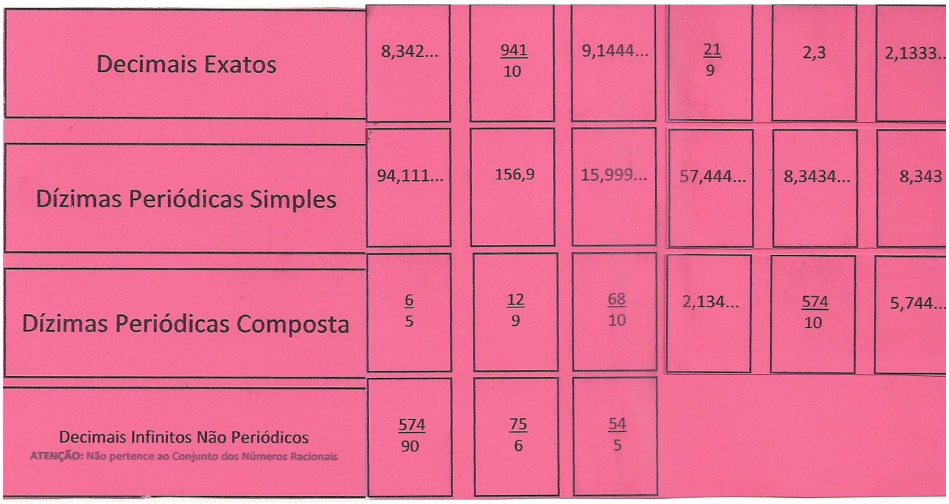
Número de participantes: *2 a 4 jogadores*

Materiais:

- *Folhas de rascunho;*
- *Fichas do Jogo (Anexo A) compostas por cartas principais e cartas numeradas.*

Figura 5 – Fichas do Jogo: Que Racional é esse?

(a) Cartas Principais (b) Cartas Numeradas



Fonte: Autoria própria

Regras do jogo:

- *Tira-se par ou ímpar para ver quem irá iniciar o jogo;*
- *O jogo se inicia com todas as cartas viradas para baixo, tanto as cartas principais como as cartelas numeradas;*
- *Para dar início a primeira rodada, vira-se uma das cartas principais. Exemplo: Decimais Exatos;*
- *Em seguida, um integrante de cada equipe irá sortear uma das cartas numeradas;*
- *Após o sorteio de uma carta para cada equipe, verifica-se se o número sorteado corresponde à forma decimal apresentada na carta principal;*
- *Se o número sorteado corresponder à carta principal, a carta ficará com a equipe. Caso contrário, a carta deve ser devolvida para a mesa de jogo. E, dessa forma se encerra uma rodada;*
- *Mistura-se a Carta Principal com as outras 3 cartas e realiza-se todo o processo novamente;*
- *Quando acabarem todas as cartas numeradas da mesa, vence a equipe que estiver com mais cartas em mãos.* [1]

[1] Jogo disponível em http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/downloads/cm/cm_10_10_71_7A_2.pdf

2.0.2 Jogo: Qual é a Fração?

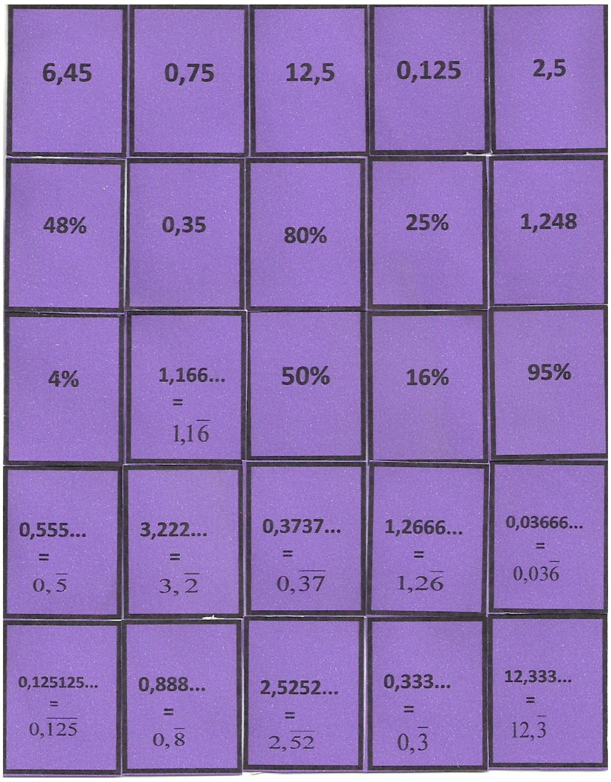
Objetivo: *Converter números na forma percentual e decimal para a forma fracionária.*

Número de participantes: *2 a 5 jogadores*

Material:

- *Folhas de rascunho.*
- *Fichas do Jogo (Apêndice C) compostas por cartas numéricas.*

Figura 6 – *Fichas do Jogo: Qual é a Fração?*



Fonte: Autoria Própria

Regras do jogo:

- *A turma será divida, por meio de sorteio, em equipes;*
- *Um integrante de cada equipe pegará uma carta na qual conterá números racionais representados na forma percentual e decimal (exato e dízima periódica);*
- *Cada aluno individualmente e simultaneamente tentará encontrar a fração irredutível correspondente ao racional sorteado;*
- *Tempo máximo por questão 2 min;*
- *Caberá ao estudante mais rápido avisar do término da questão, que será corrigida pelo professor. O outro estudante competidor poderá continuar resolvendo sua questão, dentro do prazo previsto, uma vez que o colega mais rápido poderá errar a solução;*

- *Caso a resposta do competidor mais rápido esteja correta, marcará ponto para sua equipe. Caso a resposta esteja errada, o outro competidor terá sua questão analisada. Se ambos errarem, nenhuma equipe ganhará ponto na rodada e os competidores voltam a se enfrentarem em outro momento do jogo;*
- *A equipe vencedora é aquela que acumular mais pontos.* [2]

2.0.3 Jogo: Memória dos Racionais

Objetivo: *Compreender que os números racionais podem ser representados nas formas decimal (exata e dízima periódica), percentual e fracionária.*

Número de participantes: *2 a 4 jogadores*

Material:

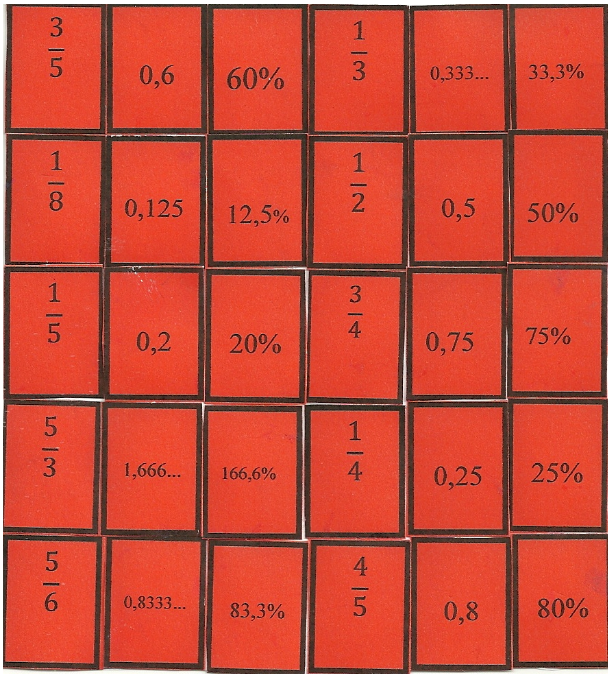
- *30 cartas de baralho com números racionais escritos nas formas decimal, percentual e fracionária. (Apêncice D)*
- *folhas de rascunho.*

Regras do jogo:

- *Embaralhe as cartas e coloque-as na mesa com as faces escritas voltadas para cima;*
- *Os jogadores observam as cartas por alguns segundos, tentando identificar trios de racionais equivalentes;*
- *A seguir, vire as faces escritas das cartas para baixo.*
- *O primeiro jogador desvira três cartas. Se elas formarem trio, ele as retira da mesa e joga novamente;*
- *Se o jogador não formar um trio, coloca as cartas com as faces escritas para baixo, deixando-as no mesmo lugar na mesa;*
- *O jogo continua até que todas as cartas sejam retiradas da mesa;*
- *Vence o jogador que conseguir o maior número de trios de cartas.*[3]

[2] Jogo de autoria própria
[3] Jogo adaptado do artigo: "Jogos matemáticos no ensino dos números racionais"(CARNEIRO; RODRIGUES; SOUZA, 2015).

Figura 7 – *Fichas do Jogo: Memória dos Racionais*



Fonte: Autoria Própria

Capítulo 3

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo, são apresentados os aspectos metodológicos do estudo: descrição do tipo de pesquisa, apresentação do campo onde a pesquisa ocorreu, caracterização dos sujeitos e definição dos instrumentos de coletas de dados e dos procedimentos para análise dos dados da pesquisa.

Segundo Neves e Domingues (2007, p.46), "a metodologia deve ser escrita de modo claro e detalhado, para que o leitor seja capaz de reproduzir, se necessário, o aspecto essencial do estudo".

3.1 Tipo de Pesquisa

A presente pesquisa tem um caráter qualitativo. Em seu artigo, Godoy (1995) faz a seguinte explicação sobre pesquisa qualitativa:

> *Os estudos denominados qualitativos têm como preocupação fundamental o estudo e a análise do mundo empírico em seu ambiente natural. Nessa abordagem valoriza-se o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo estudada. No trabalho intensivo de campo, os dados são coleta dos utilizando-se equipamentos como videoteipes e gravadores ou, simplesmente, fazendo-se anotações num bloco de papel. Para esses pesquisadores um fenômeno pode ser mais bem observado e compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte. Aqui o pesquisador deve aprender a usar sua própria pessoa como o instrumento mais confiável de observação, seleção, análise e interpretação dos dados coletados (GODOY, 1995, p.62).*

De acordo com Neves e Domingues (2007) a pesquisa qualitativa é dialógica pois é vista como uma relação entre sujeitos, onde o pesquisador é considerado parte integrante da investigação. Vale ressaltar que a análise qualitativa pode ter apoio quantitativo, porém seu emprego não é tão sofisticado ou pode até não ter a análise estatística.

3.2 Campo da Pesquisa

A pesquisa ocorreu no Colégio Estadual Jaime Queiroz de Souza, pertencente à SEEDUC - Secretaria de Estado de Educação e Cultura. Fica localizado na Rua Pereira Marins, 187*, em Portela,* 3^0 *Distrito de Itaocara no Estado do Rio de Janeiro.*

Fundado no ano de 1935*, como Escola Estadual Jaime Queiroz de Souza. Em* 14 *de março de* 1987*, transforma-se em Colégio Estadual atendendo as modalidades de Pré-escolar,* 1^o *grau (*1^a *à* 8^a *série do Ensino Regular e supletivo) e* 2^o *grau.*

Atualmente o Colégio conta com boas e amplas instalações. Possui 9 *salas de aula,* 1 *sala de vídeo,* 1 *biblioteca,* 1 *almoxarifado,*1 *refeitório conjugado com a cozinha e a despensa,* 1 *sala de professores,* 1 *sala da coordenação pedagógica,* 1 *secretaria,* 1 *sala de direção, banheiros femininos, masculinos, para funcionários e adaptado para deficientes físico, rampa de acesso,* 1 *pátio coberto,* 1 *pátio descoberto e* 1 *quadra de esporte.*

O colégio selecionado para a pesquisa funciona em três turnos. No ano de 2015*, havia* 247 *alunos matriculados distribuídos entre as modalidades: Ensino Fundamental (*6^o *ao* 9^o *ano), Ensino Médio (*1^o *ao* 3^o *ano e NEJA-Nova Educação de Jovens e Adultos) e Projeto Autonomia.*

A escolha desse colégio como campo de pesquisa se deu pelo fato de ser o local onde a pesquisadora leciona a disciplina de Matemática, desde 2011*, para os níveis Fundamental e Médio. Presenciando, assim, as dificuldades apresentadas pelos alunos nesta disciplina e, mais notadamente, em relação aos números racionais. Tendo anseio por proporcionar a esses alunos experiências e atividades significativas e diversificadas que lhes deem a oportunidade de intervir ativamente no processo de ensino e aprendizagem.*

3.3 Sujeitos da Pesquisa

Por meio da conscientização que "a escolha dos informantes ou sujeitos do estudo deve ser baseada na procura por indivíduos sociais que tenham uma vinculação significativa com o objeto de estudo", é que os testes e a intervenção pedagógica propostos neste trabalho foram submetidos a alunos do 9^0 *ano do Ensino Fundamental, visto que a habilidade de reconhecer e identificar diferentes representações para um mesmo número racional é parte integrante do currículo mínimo para este ano de escolaridade (NEVES; DOMINGUES, 2007, p.57).*

A pesquisa foi realizada na turma 902 *do Colégio Estadual Jaime Queiroz de Souza, no turno da tarde. Nessa turma, estão matriculados* 14 *alunos, porém quatro não frequentavam, totalizando assim* 10 *alunos como sujeitos desta pesquisa, com idades entre* 14 *e* 17 *anos.*

Neste trabalho, cada sujeito da pesquisa foi identificado em ordem alfabética, como pode ser observado na Tabela 1:

Tabela 1 – Tabela: Grupo de participantes da pesquisa

Alunos	Código do Participante
1	Aluno A
2	Aluno B
3	Aluno C
4	Aluno D
5	Aluno E
6	Aluno F
7	Aluno G
8	Aluno H
9	Aluno I
10	Aluno J

Fonte: Dados da pesquisa

3.4 Os instrumentos da Pesquisa

3.4.1 Teste

A intervenção pedagógica proposta neste trabalho iniciou-se por meio da aplicação de um teste, denominado inicialmente de pré-teste (Apêndice A) no qual se pretendia verificar o nível prévio de conhecimento dos alunos, uma vez que, a habilidade avaliada já foi trabalhada em anos de escolaridade anteriores e também revista no primeiro bimestre do corrente ano escolar.

Ao final da intervenção pedagógica foi aplicado o mesmo teste, porém agora denominado pós-teste, cujo objetivo agora é verificar se a intervenção pedagógica contribuiu positivamente para o aprendizado dos alunos.

3.4.2 Atividades

Além dos testes já citados, propõe-se uma intervenção pedagógica por meio da aplicação de uma atividade e de três jogos com cartas, sendo que o objetivo comum entre estes é favorecer o avanço na aprendizagem dos sujeitos da pesquisa na habilidade de reconhecer, identificar e associar as diferentes representações para um mesmo racional.

Neste intuito, a primeira atividade, no Apêndice B, traz uma sequência de exercícios que ajuda na visualização da equivalência entre as diferentes representações de um mesmo número racional. Enquanto que o uso de materiais manipuláveis (jogos com cartas) permite a fixação das regras de conversão entre essas diferentes representações.

Os jogos foram escolhidos como foco da intervenção pois os mesmos, no contexto educacional, apresentam-se "importante ao resgate do prazer em aprender Matemática de uma forma significativa ao aluno." Além disso, o interesse pelo material do jogo, pelas regras ou pelo desafio proposto envolvem o aluno, estimulando-o à ação (GRANDO, 2000, 26).

3.5 Os Procedimentos da Pesquisa

A pesquisa foi realizada em seis encontros com duração de 2 horas/aula cada:

Aula 1: *Aplicação do pré-teste (Apêndice A).*

Aula 2: *Foi dividida em duas etapas de uma hora/aula cada:*

- 1^a *etapa: Aplicação de atividade (Apêndice B) realizada em dupla.*
- 2^a *etapa: Momento de discussão da atividade aplicada e correção das questões.*

Aula 3: *Foi dividida em três etapas:*

- 1^a *etapa: Exibição da videoaula: Telecurso - AULA 45: Novamente frações.*
- 2^a *etapa: Discussão da videoaula exibida e uma revisão rápida.*
- 3^a *etapa: Aplicação do jogo: Que Racional é esse? (Anexo A)*

Aula 4: *Foi dividida em duas etapas:*

- 1^a *etapa: Relembrar as regras de conversão de decimais para fração, principalmente das dízimas, assim como, a conversão de números na forma percentual para fração.*
- 2^a *etapa: Aplicação do jogo: Qual é a Fração? (Apêndice C).*

Aula 5: *Foi dividida em três etapas:*

- 1^a *etapa: Exibição da videoaula: Telecurso - Aula 26: Fração ou número com vírgula.*
- 2^a *etapa: Discussão da videoaula e reforço do assunto.*
- 3^a *etapa: Aplicação do Jogo: Memória dos Números Racionais (Apêndice D).*

Aula 6: *Aplicação do pós-teste (Apêndice A).*

A investigação deu-se a partir das informações coletadas no período de setembro a novembro do ano de 2015.

Vale ressaltar que até mesmo os alunos que faltaram em algum encontro, não deixaram de realizar nenhuma atividade, pois a mesma foi feita em dia posterior, em intervalos ou aula vaga, para que não afetasse o resultado da pesquisa.

Capítulo 4

Sequência Didática Aplicada em Sala de Aula

Este capítulo descreve a aplicação da sequência didática que está dividida em três etapas: Pré-teste, Intervenção Pedagógica e Pós-teste. Contém também a análise das respostas dos alunos no teste (Apêndice A) aplicado. Esse teste foi denominado inicialmente de pré- teste e, posteriormente pós-teste, porque foi aplicado também ao final da intervenção pedagógica. Esse teste, contendo 10 questões, foi elaborado pela pesquisadora e possui questões extraídas de Saerjinhos [1] *e de autoria da mesma. Todas as questões são focadas na habilidade de reconhecer e associar as diferentes representações para um mesmo número racional. O objetivo desse instrumento é comprovar se, de fato, a intervenção pedagógica proposta e realizada contribuiu para a aprendizagem da habilidade citada.*

O referido teste foi aplicado como pré-teste, no primeiro encontro e também utilizado como pós-teste, sendo aplicado no sexto e último encontro da sequência didática.

Os testes e a intervenção pedagógica propostos neste trabalho foram submetidos a alunos do 9^o ano do Ensino Fundamental, visto que a habilidade a ser trabalhada apresenta deficiência para este ano de escolaridade e, além disso, foi levado em consideração a Prova Brasil, avaliação que ocorre a cada 2 anos e que exige das turmas de 9^o ano o domínio dessa habilidade.

Através da comparação dos dois testes será possível perceber se houve ou não evolução do aprendizado dos participantes, considerando o desempenho coletivo do grupo de uma forma geral e também o desempenho individual.

Vale lembrar que durante a análise, todas às vezes que for necessário fazer referência ao grupo de alunos participantes da pesquisa usará os códigos A, B, ... , J no lugar de

[1] SAERJINHO é um programa de avaliação diagnóstica do processo Ensino Aprendizagem realizado bimestralmente nas unidades escolares da rede estadual de educação básica , sendo uma das ações que integram o Sistema de Avaliação da Educação Básica do Rio de Janeiro – SAERJ.

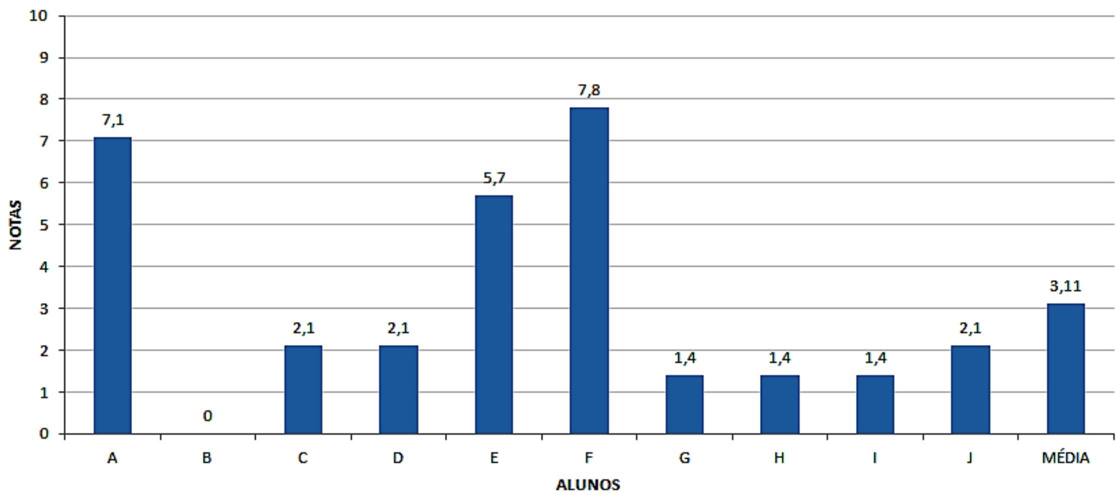
seus nomes.

4.1 Sondagem da Aprendizagem por meio das Respostas do Pré-teste

Esta sondagem servirá para analisar os acertos e erros apresentados pelos alunos ao responderem às questões do pré-teste. Para tanto serão descritas as respostas de alguns alunos, evidenciando os erros mais comuns cometidos pela turma. Vale ressaltar que o objetivo da aplicação do pré-teste era averiguar os conhecimentos que os alunos possuíam até o momento sobre a habilidade, uma vez que, a mesma já foi trabalhada em anos anteriores e também revisada no referido ano de escolaridade.

Para iniciar a análise observe a Figura 8 que demonstra o desempenho dos alunos no pré-teste considerando uma nota de 0 *a* 10 *atribuída a cada aluno proporcional ao desempenho de cada um deles, bem como a média do grupo.*

Figura 8 – *Desempenho absoluto dos alunos no pré-teste*



Fonte: Dados da pesquisa

Os números representados no gráfico evidenciam um déficit muito grande no domínio da habilidade trabalhada, reforçando assim a necessidade de uma intervenção pedagógica para superação das dificuldades. Pode-se observar claramente que apenas 3 *alunos alcançaram rendimento superior a* 50% *e os demais com um rendimento muito baixo. Esse resultado é lamentável, mas por um lado engrandece a iniciativa que reveste a proposta desse trabalho que entre outros objetivos busca encontrar alternativas para superar essas deficiências.*

A correção das questões foi feita usando apenas o critério de certo e errado. Questões incompletas e em branco foram consideradas erradas. Optou-se por esse tipo de *correção com o objetivo de obter uma visão global dos conhecimentos dos sujeitos frente à habilidade avaliada.*

Vale ressaltar que para ter uma melhor análise das respostas dos alunos, após a aplicação do pré-teste, a pesquisadora propôs um momento de discussão, no qual os alunos iam descrevendo como pensaram para responder cada questão e a pesquisadora anotava as observações.

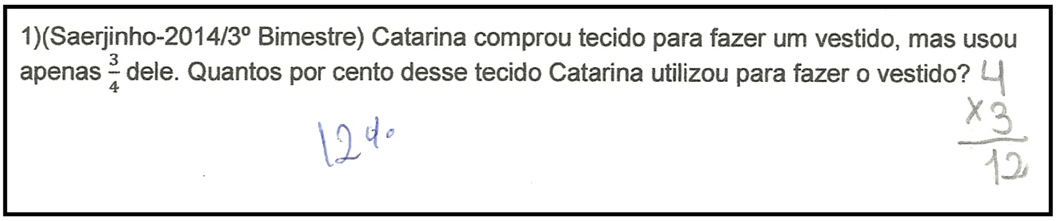
A seguir, apresenta-se a análise das respostas que os sujeitos da pesquisa deram às dez questões do pré-teste.

Resultados da questão 1: *A questão 1 solicitava para determinar a forma percentual correspondente a $3/4$. Apenas 2 alunos responderam corretamente essa questão, o que é muito grave, uma vez que, o aluno no 9^o ano do Ensino Fundamental deveria associar as representações $\frac{3}{4}$, $0,75$ e 75% de forma automática devido as muitas vezes que esse tipo de questão já foi trabalhada ao longo de todo o Ensino Fundamental. Do total de alunos que erraram, 4 apresentaram como resposta $0,75$, ou seja, representou apenas a forma decimal da fração. Houve 2 alunos que deixaram a questão em branco.*

Para Ventura (2013, p.63) "as várias representações que o número racional pode assumir, desde que estejam bem compreendidas, podem também auxiliar na resolução de problemas simples" como o apresentado nessa questão.

Um erro que chamou atenção está representado na Figura 9. O aluno J multiplicou o numerador pelo denominador para encontrar a forma percentual pedida, mostrando assim, total desconhecimento sobre o método de mudança da forma fracionária para a forma percentual.

Figura 9 – *Resposta do aluno J à questão 1*



Fonte: Dados da Pesquisa

Resultados da questão 2: *Na segunda questão (Figura 10), novamente apenas dois alunos marcaram a opção correta (B), porém 1 deles alegou que não sabia resolver e marcou a alternativa correta de forma aleatória. Nenhum aluno escolheu o item A como resposta. Dos 10 alunos que realizaram o teste, 50% deles marcaram o item C) $0,25$. A escolha dessa alternativa foi justificada pelo fato do item ter duas casas decimais, pois para esses alunos a forma decimal que representa uma porcentagem sempre tem que ter duas casas decimais. Esse fato reforça um erro citado por Parker e Leinhardt (1995), onde* *afirmam que o aluno substitui o símbolo % por uma vírgula à esquerda do número.*

Figura 10 – *Questão 2*

2)(Saerjinho-2014/3º Bimestre) A projeção de crescimento do PIB em 2014 é de 2,5%, de acordo com o governo brasileiro.
Isso significa que a soma, em valores monetários, de todos os bens e serviços finais produzidos no Brasil (PIB) durante o ano de 2014 poderá ter um crescimento de
A) 0,0025 em relação ao ano de 2013.
B) 0,025 em relação ao ano de 2013.
C) 0,25 em relação ao ano de 2013.
D) 2,5 em relação ao ano de 2013.

Fonte: (RJ, 2014b)

Resultados da questão 3: *O resultado da questão 3 (Figura 11) foi péssimo, pois apenas um aluno acertou essa questão escolhendo a alternativa C. Outro aluno marcou o item D, três, o item A e cinco o item B, ou seja, metade dos alunos que realizaram o teste escolheram o item B. O aluno que escolheu o item D afirmou que achava que era só trocar o "traço da fração" pela vírgula, os que marcaram o item A afirmavam que observaram que o denominador tinha 3 zeros coincidindo com os três dígitos $29,5$ e dos 50% dos alunos que escolheram o item B, dois alegaram que escolheram aleatoriamente e os demais justificaram a escolha por ter mesma quantidade de algarismo no numerador e denominador.*

Figura 11 – *Questão 3*

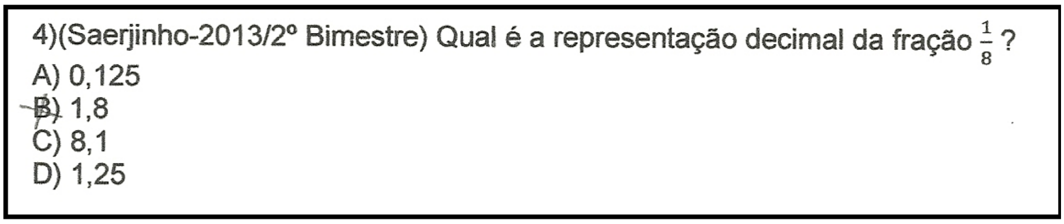
3)(Saerjinho-2014/1º Bimestre) Qual é a representação fracionária do número racional 29,5?
A)$\frac{295}{1000}$
B)$\frac{295}{100}$
c)$\frac{295}{10}$
d)$\frac{29}{5}$

Fonte: (RJ, 2014a)

Resultados da questão 4: *Nessa questão (Figura 12), três alunos marcaram a alternativa correta (A). O item B foi escolhido por quatro alunos, evidenciando a associação que muitos alunos têm em achar que a forma decimal de uma fração e só trocar o "traço da fração" pela vírgula. O item C não foi escolhido e o restante dos alunos escolheu o item D, mostrando que sabem como fazer a questão, mas apresentaram dificuldade na divisão.*

Resultados da questão 5: *Um aluno deixou essa questão (Figura 13) em branco. Dos que responderam, quatro acertaram, ou seja, encontram $3,4$ como resposta. Cinco alunos erraram essa questão. Dos erros encontrados, os que mais se repetiram foram as respostas $17,5$ e 34, evidenciando novamente a troca do "traço da fração" pela vírgula e a dificuldade na divisão.*

Figura 12 – *Resposta do aluno D à questão 4*


4)(Saerjinho-2013/2º Bimestre) Qual é a representação decimal da fração $\frac{1}{8}$?

A) 0,125

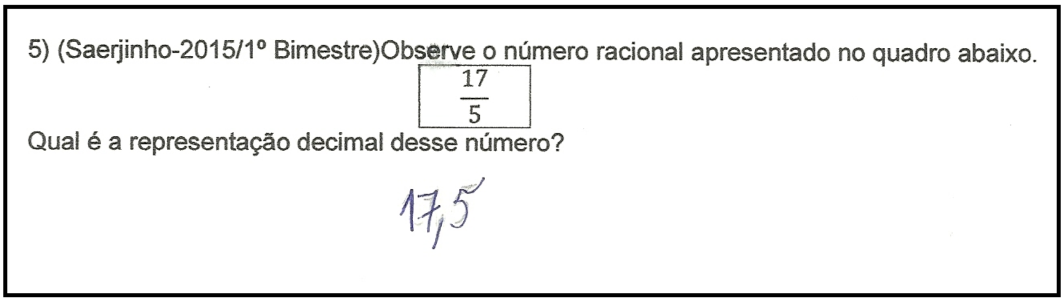
B) 1,8

C) 8,1

D) 1,25

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 13 – *Resposta do aluno B à questão 5*


5) (Saerjinho-2015/1º Bimestre)Observe o número racional apresentado no quadro abaixo.

$$\boxed{\frac{17}{5}}$$

Qual é a representação decimal desse número?

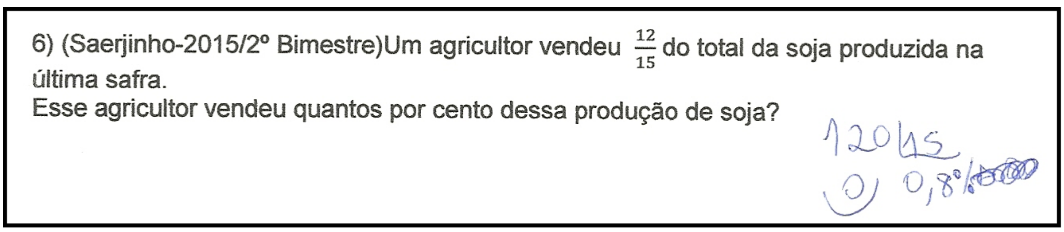
17,5

Fonte: Dados da Pesquisa

O resultado das questões 3, 4 e 5 evidencia um erro onde o aluno estabelece uma equivalência errada entre uma fração e um decimal, separando o numerador do denominador com uma vírgula.

***Resultados da questão 6:** O resultado dessa questão também foi péssimo, apenas um acerto e três alunos deixaram a questão em branco. A resposta correta era 80%. Diversificados foram os erros encontrados como respostas, muitos deles eram oriundos por erros de conta, como exemplo da resposta do aluno A: $12 : 15 = 0,9333...$ e outros por falta de consolidação do aprendizado como é o caso do aluno E que apresentou como resposta $0,8\%$, como pode ser observado na Figura 14.*

Figura 14 – *Resposta do aluno E à questão 6*


6) (Saerjinho-2015/2º Bimestre)Um agricultor vendeu $\frac{12}{15}$ do total da soja produzida na última safra.

Esse agricultor vendeu quantos por cento dessa produção de soja?

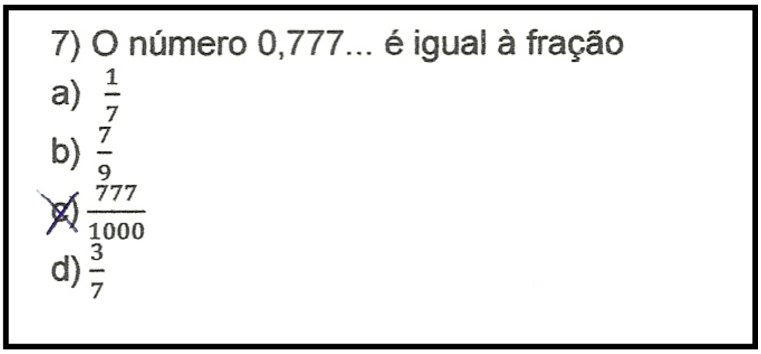
120|15

0 0,8%

Fonte: Dados da Pesquisa

***Resultados da questão 7:** Nessa questão (Figura 15), 70% dos alunos afirmaram erradamente que a forma fracionária da dízima $0,777...$ é $777/1000$. Isso deve-se ao fato dos alunos usarem a mesma regra de transformação de decimal para fração no caso da* *dízima periódica. Dois alunos acertam a questão e o item D não foi escolhido.*

Figura 15 – *Resposta do aluno G à questão 7*


7) O número 0,777... é igual à fração

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{7}{9}$

c) $\frac{777}{1000}$

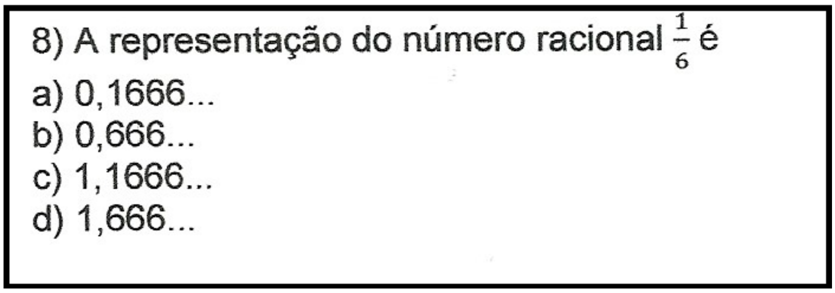
d) $\frac{3}{7}$

Fonte: Dados da Pesquisa

Resultados da questão 8: *Nessa questão (Figura 16) houve quatro acertos e seis erros. Os erros se dividiram entre os itens B e D. O item C não foi selecionado por nenhum aluno.*

Podemos perceber que "quando ocorre a situação de uso de dois registros diferentes, aparecem as dificuldades de vincular o mesmo conceito do objeto em questão"(ROSA, 2007, p.15).

Figura 16 – *Questão 8*


8) A representação do número racional $\frac{1}{6}$ é

a) 0,1666...

b) 0,666...

c) 1,1666...

d) 1,666...

Fonte: Autoria Própria

Resultados da questão 9: *Essa questão (Figura 17) apresentou o mesmo quantitativo de erros e acertos da questão anterior. Dos seis alunos que erraram essa questão, cinco deles citaram "Beto" como sendo um dos alunos que escreveram a igualdade correta ($1/2 = 1,2$). Esse fato reforça a forma errônea que muitos alunos associam o "traço de fração" com a vírgula, como já citado na análise da questão 4 e 5.*

Como afirmam Maranhao e Igliori (2003), muitas vezes os alunos não reconhecem, por exemplo, $0,25$ como outro representante de número racional $1/4$.

Resultados da questão 10: *A questão 10 é uma questão de correlacionar a representação equivalente ao racional dado, composta do item A ao E. Apenas 3 alunos*

Figura 17 – *Questão 9*

9) Veja o que quatro alunos escreveram no quadro:

Ana	Beto	Carol	Daniela
$\frac{1}{4} = 0{,}4$	$\frac{1}{2} = 1{,}2$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{2}{5} = 0{,}4$

Quais alunos escreveram as igualdades corretas?

Fonte: Autoria Própria

acertaram todas as correspondências e houve também 3 alunos que não acertaram nenhuma delas, como o aluno H, onde sua resposta à essa questão encontra-se na Figura 18. Os demais apresentaram mais erros do que acertos nas correspondências.

Esse resultado evidencia que "as múltiplas representações devem ser utilizadas, no contexto sala de aula, para que os alunos possam combinar toda a informação que estas contêm e assim ter um conhecimento mais completo de determinado conceito"(VENTURA, 2013, p.59).

Figura 18 – *Resposta do aluno H à questão 10*

10) Relacione as colunas com as representações dos números racionais equivalentes:

(A) $\frac{5}{3}$ (B) 1,666...

(B) $\frac{2}{5}$ (D)0,12

(C)2,5 (C) $\frac{11}{9}$

(D)12% (A) $\frac{5}{2}$

(E)1,222... (E)40%

Fonte: Dados da Pesquisa

O Quadro 6 apresenta um resumo dos erros, acertos e questão em branco no pré-teste. Esse quadro confirma mais uma vez que o resultado não foi bom no pré-teste. No total, houve mais erros em cada questão do que acertos. Resultados estes, que reforçam a importância da intervenção pedagógica nesta pesquisa.

4.2 Intervenção Pedagógica

Como já mencionado na introdução, a ideia da intervenção pedagógica que será exposta abaixo surgiu por meio da experiência docente da pesquisadora com turmas de 9^o ano do Ensino Fundamental da Rede Estadual de Ensino do Estado do Rio de Janeiro. Nessa rede de ensino os alunos matriculados no 9^o ano realizam bimestralmente as avaliações

Quadro 6 – Relatório de Acertos, Erros e Omissões das questões no Pré- Teste

Questões	Acertos	Erros	Em branco
1	2	6	2
2	2	8	0
3	1	9	0
4	3	7	0
5	4	5	1
6	1	6	3
7	2	8	0
8	4	6	0
9	4	6	0
$10a$	4	6	0
$10b$	4	6	0
$10c$	5	5	0
$10d$	4	6	0
$10e$	3	7	0

Fonte: Dados da pesquisa

diagnósticas denominadas Saerjinho (1^o, 2^o e 3^o bimestre) e Saerj (4^o bimestre) , e também, nos anos ímpares, a Prova Brasil, avaliações que já foram mencionadas no capítulo anterior.

Nessas avaliações, uma das habilidades cobradas é reconhecer e associar as diferentes representações de um mesmo número racional, habilidade esta que os alunos apresentam grandes dificuldades, apesar de já ter sido trabalhada ao longo dos anos de escolaridade.

A partir desse fato surge, então, a ideia de elaborar uma intervenção pedagógica, saindo do tradicionalismo das aulas de Matemática, em busca de aulas mais dinâmicas e atrativas que contribuam para acabar as dificuldades que os alunos apresentam sobre a habilidade mencionada. Essas aulas foram organizadas para serem trabalhadas em 4 encontros com duração de 2 horas/aula cada, totalizando assim, 8 horas/aula.

A seguir, encontra - se detalhes das atividades aplicadas em cada encontro:

Aula 1:

Na primeira aula foi aplicada uma atividade (Apêndice B) composta por quatro questões, que tem caráter construtivista de modo que, gradativamente, o aluno perceba e reconheça as diferentes formas de representação dos racionais.

> *Diante da concepção construtivista de que as práticas pedagógicas desenvolvidas na escola promovem o desenvolvimento na medida em que o aluno, como sujeito ativo, participa das atividades de maneira construtiva, cabe ao ensino da Matemática, além de promover a aprendizagem de diferentes procedimentos de resolução, seja na aritmética, álgebra ou geometria, proporcionar situações em que o aluno compreenda tais procedimentos e construa seus próprios significados (NIEMANN; BRANDOLI, 2012, p.8/9).*

Desse modo, o objetivo dessa atividade é levar o aluno a compreender e relacionar as diferentes e equivalentes formas de representar um mesmo número racional (fração, decimal e porcentagem).

No início da aula, a professora explicou os objetivos da pesquisa e entregou a atividade aos alunos. Foi esclarecido também que a atividade seria feita em dupla e que depois das questões resolvidas haveria um momento de correção e discussão das mesmas.

Assim, os alunos, em dupla, resolveram a atividade, no qual pode-se observar uma boa interação entre os mesmos durante a realização da atividade.

Depois que todos resolveram a atividade, iniciou-se o momento de discussão e correção das questões. Pode-se perceber que o objetivo da atividade foi alcançado, pois os alunos conseguiram entender a equivalência entre as representações fracionária, decimal e percentual e as regras utilizada para a mudança de registro dos racionais passou a ser mais significativo para os mesmos.

Aula 2:

Essa aula objetiva levar o aluno a entender a diferença entre decimal exato, dízima periódica simples e dízima periódica composta e também transformar número na forma fracionária para a forma decimal. Esta foi dividida em três etapas:

1^a etapa) *Exibição da videoaula: Telecurso - AULA 45 – Novamente frações.*

2^a etapa) *Discussão da videoaula exibida e uma revisão rápida.*

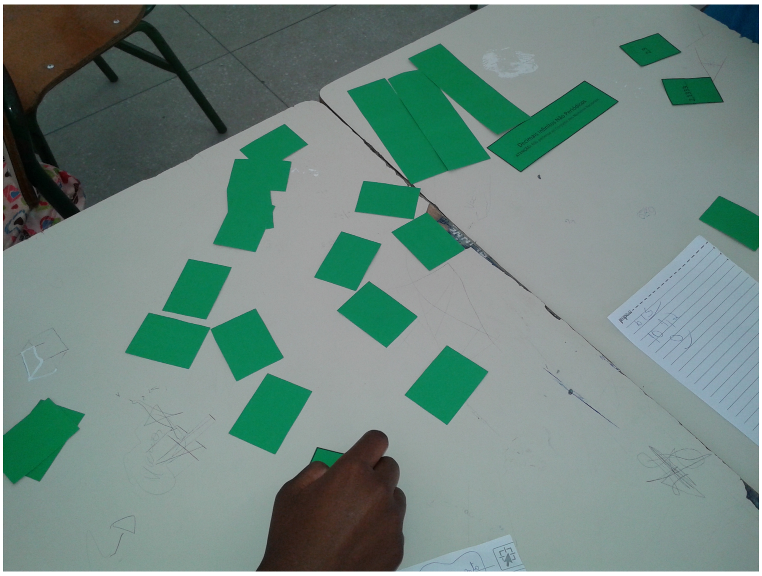
3^a etapa) *Aplicação do jogo: Que Racional é esse? (Anexo A)*

Os alunos ficaram atentos durante toda a exibição da videoaula. Para iniciar a discussão, pediu-se para que falassem do que se tratava a videoaula e o que entenderam. Percebeu-se que os discentes não tinham muito clareza sobre a diferença entre dízima periódica simples e composta. Depois dessa discussão inicial, a professora pesquisadora expôs no quadro branco diversos exemplos reforçando a diferença entre decimais exatos, dízimas periódicas simples e dízimas periódicas compostas, fazendo também um comentário sobre os decimais infinitos não periódicos, dando ênfase ao fato de que estes números não pertencem ao conjunto dos números racionais. Finalizou-se essa parte da aula, reforçando o método de conversão de um número fracionário para a forma decimal.

Na aplicação do jogo, primeiramente, os grupos foram divididos e leu-se as regras. Na sequência, os alunos iniciaram o jogo, no qual pode ser observado que a maior dificuldade apresentada foi na conversão de frações para decimais, pois não conseguiam resolver a divisão corretamente. Alguns alunos confundiram os decimais não periódicos com uma dízima periódica. A pesquisadora conseguiu orientar os alunos nas dúvidas que iam surgindo durante o jogo.

Para finalizar a aula, a pesquisadora instigou os alunos com perguntas para concluírem o fato de que quando o denominador de uma fração apresenta somente fatores 2 e/ou 5 esta fração representará um decimal exato, caso contrário, tem-se uma fração que representa, obrigatoriamente, uma dízima periódica (ver Figura 19).

Figura 19 – Foto dos alunos jogando o *jogo: Que Racional é esse?*



Fonte: Autoria Própria

Aula 3:

O objetivo central dessa aula é converter decimal exato, dízima periódica e número na forma percentual em fração.

O desenvolvimento dessa aula deu-se nas seguintes etapas:

1^a etapa) *Relembrar as regras de conversão de decimais para fração, principalmente das dízimas, assim como, a conversão de números na forma percentual para fração.*

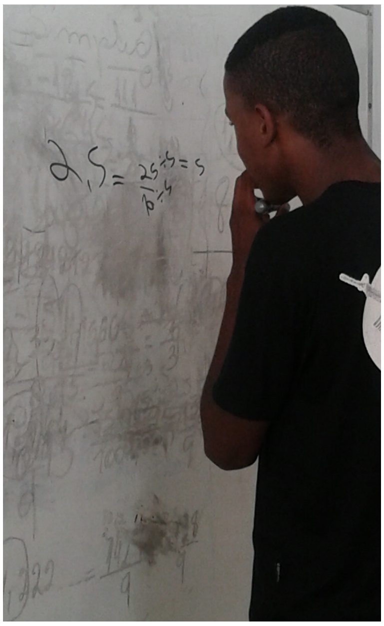
2^a etapa) *Aplicação do jogo: Qual é a Fração? (Apêndice C)*

O início dessa aula se deu com uma revisão, por meio de exemplos expostos no quadro branco, das regras de conversão de decimais para fração e também na conversão de números na forma percentual para fração. O método utilizado para relembrar a conversão de dízimas periódicas para fração encontra-se no material disponível pela SEEDUC. Porém, antes de apresentar esse método, a pesquisadora mostrou de forma detalhada o porquê que se pode usar tal técnica.

Para o jogo sugerido, foi feito uma adaptação. Como a turma era pequena, dividiu-a em duas equipes de 5 alunos. Um integrante de cada equipe retirava uma carta e no quadro resolvia a questão. Desta maneira, a turma toda podia observar o erro ou acerto do aluno, gerando assim, um maior aprendizado. Esse simples jogo de disputa surpreendeu muito a *pesquisadora, pois os alunos ficaram muito empolgados e interessados em aprender. Pode-se perceber que até aqueles alunos mais desinteressados nas aulas ficaram instigados pela disputa. Todos queriam acertar para dar ponto para a sua equipe, isso fez com que os alunos ficassem atentos ainda mais na solução dos colegas.*

No final da aula, os alunos manifestaram total satisfação em relação à disputa. Esse simples jogo de disputa, mostrou que é possível transformar a aula de Matemática em algo interessante para os alunos e sem custos adicionais para o professor (ver Figura 20).

Figura 20 – Foto dos alunos jogando o *Qual é a Fração?*



Fonte: Autoria Própria

Aula 4:

Essa última aula da intervenção pedagógica visa a consolidar o aprendizado levando o aluno a converter e a associar a equivalência entre as diversas representações dos racionais (fração, decimal e porcentagem).

As etapas dessa aula são:

1^a etapa) *Exibição da videoaula: Telecurso - Aula 26 – Fração ou número com vírgula*

2^a etapa) *Discussão da videoaula e reforço do assunto.*

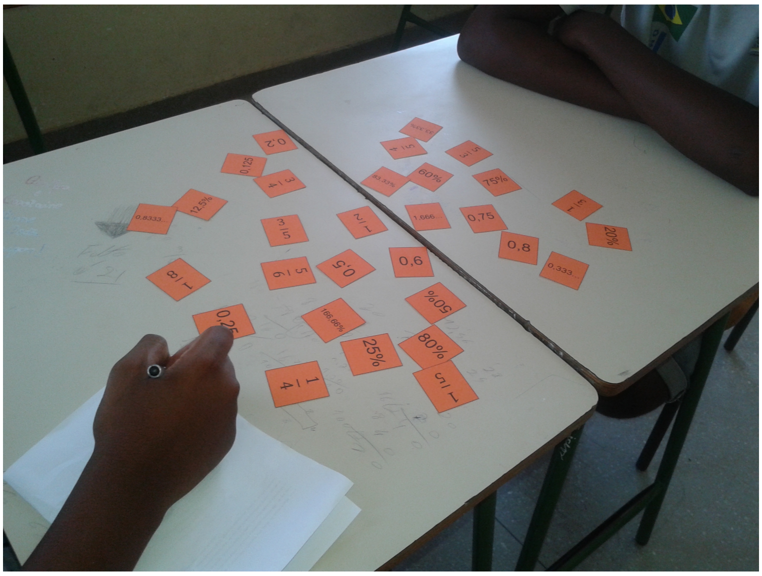
3^a etapa) *Aplicação do Jogo: Memória dos Números Racionais (Apêndice D)*

Essa última aula, foi um momento de consolidação do aprendizado e memorização, uma oportunidade para os alunos perceberem claramente as diferentes representações de um mesmo número racional e associá-las. Os alunos assistiram à videoaula com atenção e ao final da exibição, relataram que gostaram. Por meio de indagações, os discentes *expuseram o que tinham entendido. Fechou-se a discussão associando as aulas anteriores com a exibição da videoaula.*

Na hora do jogo, as equipes foram divididas e as regras lidas. Ao iniciarem o jogo, os alunos encontraram uma dificuldade, pois já tinha passado um tempo e ninguém havia formado um trio. Diante disso, a pesquisadora resolveu fazer uma adaptação, permitindo que as cartas ficassem viradas para cima. Com essa nova regra, eles conseguiram realizar o jogo com sucesso.

Pode-se percebe que os alunos conseguiram realizar melhor a divisão para conversão de fração em decimal e estavam conseguindo associar as três representações de um mesmo racional. Dois alunos ainda apresentavam dificuldades na divisão, mas os mesmos receberam orientações ainda durante o jogo (ver Figura 21).

Figura 21 – Foto dos alunos jogando o *Jogo: Memória dos Números Racionais*



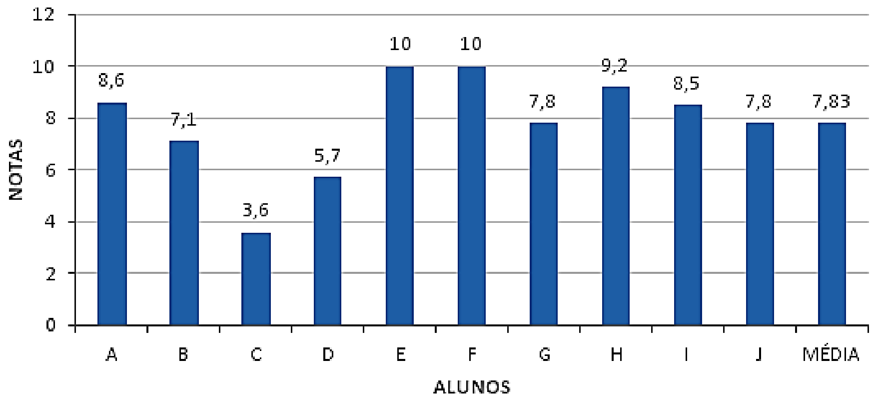
Fonte: Autoria própria

4.3 Aplicação e Análise do Pós-teste

Transcorrido todo o processo de intervenção pedagógica, os alunos foram submetidos a um pós-teste que apresentou as mesmas questões do pré-teste. O objetivo era verificar se houve uma evolução quantitativa da aprendizagem dos alunos sobre a habilidade trabalhada após a aplicação da intervenção. De modo similar a Figura 8, a Figura 22 demonstra o desempenho dos alunos no pós-teste considerando uma nota de 0 *a* 10 *atribuída a cada aluno proporcional ao desempenho de cada um deles, bem como a média do grupo.*

Para melhor análise entre o pré-teste e pós-teste, apresenta-se também o Quadro 7 e a Figura 23.

Figura 22 – *Desempenho absoluto dos alunos no pós-teste*



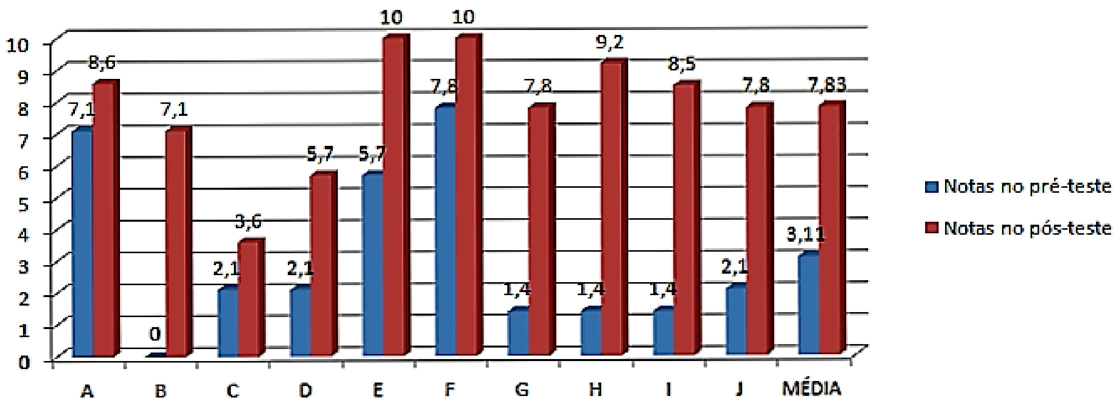
Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 7 – Índice de acertos no pré e pós-teste

Questões	Pré-teste	Pós-teste
1	20%	90%
2	20%	60%
3	10%	90%
4	30%	80%
5	40%	50%
6	10%	60%
7	20%	100%
8	40%	60%
9	40%	90%
10	30%	70%

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 23 – *Comparação do Desempenho dos alunos no pré-teste e no pós-teste*



Fonte: Dados da pesquisa

Por meio da observação dos dados apresentados na Figura 23 e no Quadro 7, é nítida a evolução quantitativa do desempenho deste grupo de participantes, tanto individualmente como coletivamente, após a intervenção pedagógica.

Além do desempenho nas resoluções dos testes, também foram analisados a participação efetiva dos alunos em cada etapa da intervenção pedagógica. Para fazer tal análise, a pesquisadora fazia anotações das observações feitas durante o desenvolvimento de cada etapa da intervenção, anotações referentes a quais alunos apresentaram maior dificuldade em cada aula, quais as maiores dificuldades encontradas, quais alunos estavam mais participativos e quais apresentavam desinteresse, dentre outras. Tais observações foram imprescindíveis para perceber que houve também um avanço qualitativo da aprendizagem.

Observa-se que o aluno C é o único que obteve desempenho inferior a 50% no pós-teste, mas mesmo assim, ele teve um avanço, mesmo que pequeno, do pré-teste para o pós-teste. Este aluno já tem um histórico de baixo rendimento escolar, devido ao desinteresse e mal comportamento durante as aulas, fato esse que com certeza contribuiu para o seu resultado não satisfatório. Ao observar a evolução de desempenho desse aluno C com os alunos D e J, que obtiveram as mesmas notas no pré-teste, fica ainda mais evidente a pouca evolução do seu desempenho.

A variação da nota do aluno A do pré-teste para o pós-teste não foi muito grande, isso deve-se ao fato do mesmo ser um aluno com facilidade de aprendizado, porém não se dedicou durante a intervenção pedagógica.

O aluno B apresentou um excelente avanço do pré-teste para o pós-teste. Esse avanço deve-se principalmente a três fatores, o primeiro é que o aluno realizou o pré-teste totalmente sem empenho, o segundo é que o mesmo apresentou-se muito interessado e motivado durante todo o processo da intervenção pedagógica e por fim realizou o pós-teste com muito empenho e atenção.

Os alunos G, H e I, que apresentaram um nota igual e bem baixa no pré-teste, obtiveram ótimas notas no pós-teste. Houve 2 alunos que gabaritaram o pós-teste.

Vale ressaltar que os índices de acertos no pós-teste foram superiores ao pré-teste em todas as questões. Dessa forma, conclui-se que todos os sujeitos analisados demonstraram, no pós-teste, progresso em relação ao pré-teste. Assim, é possível afirmar que para esse grupo de alunos a intervenção pedagógica contribuiu positivamente para uma evolução na aprendizagem.

Considerações Finais

O aprendizado dos números racionais é imprescindível para os estudantes da Educação Básica, mas por meio da prática docente e desse trabalho, percebe-se que esse conteúdo não é fácil de ser ensinado e nem de ser aprendido. Muitas dificuldades e erros cercam o ensino-aprendizagem dos racionais, no qual estes começam no ensino de base e parecem avançar ao longo dos anos de escolaridade, exigindo do educador uma mobilização, um empenho na busca por soluções pedagógicas.

Com o intuito de melhorar esse cenário do ensino e aprendizagem dos números racionais, em especial a identificação e a associação das diferentes representações de um mesmo racional, sugeriu-se e aplicou-se, nesse trabalho, uma sequência de atividades. Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Jaime Queiroz de Souza foram escolhidos como "campo de estudo". Com vistas a uma intervenção efetiva, procurou-se trazer, para o ensino da transposição de registro dos racionais, algo diferente das aulas tradicionais, por isso, focou-se na utilização dos jogos manipuláveis, além de uma atividade com linhagem construtivista.

A proposta sugerida evidencia que com o uso de materiais simples, de fácil acessibilidade e construção é possível sair do tradicionalismo das aulas de matemática e torná-las mais atrativas e dinâmicas, contribuindo assim para a construção de um aprendizado mais significativo para o estudante.

Na intervenção pedagógica realizada, pôde-se perceber o interesse da maioria dos alunos na execução das atividades. A primeira aula foi muito importante, pois a atividade (Apêndice B) proporcionou um real entendimento da equivalência entre as representações fracionária, decimal e percentual de um número racional. Nas outras aulas, com a aplicação dos jogos, pode-se corrigir dificuldades e consolidar o aprendizado. Houve alunos que apresentaram dificuldades durante os jogos, mas os mesmos permaneceram persistentes, apresentando determinação e desejo de aprender e contaram com a ajuda dos colegas e da professora. Percebeu-se também a motivação e a curiosidade durante todo o tempo de aula, além de uma forte integração de todo o grupo.

A partir dos resultados obtidos nesse estudo, por meio da sondagem do desempenho no pré e pós-teste, a conclusão é que diante a um oceano de dificuldades que cercam o processo de ensino-aprendizagem dos números racionais, atividades construtivistas e os *jogos com cartas são alternativas simples que podem contribuir para superar as deficiências da base e, consequentemente, melhorar o desempenho dos estudantes nesse conteúdo. No campo de estudo selecionado, a contribuição foi positiva, pois houve um aumento significativo do nível de domínio da habilidade testada no projeto.*

A proposta apresentada nessa pesquisa deve ser considerada como uma oportunidade e estímulo para o docente ir a busca de novos modos de ensinar e aprender. Apesar da utilização de recursos simples em prol a atender a realidade existente da Unidade Escolar selecionada, vale ressaltar que o Brasil possui realidades muito distintas e, portanto propõe-se o uso de outros recursos, sempre adaptando às diversas situações existentes.

Espera-se que este trabalho possa sinalizar para a importância de novas abordagens na aquisição de conceitos matemáticos. Em particular, que possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais. Que este estimule os docentes a buscar cada um o seu método, a sua forma particular de trabalhar, descobrindo novas formas de motivar o estudo e a maior participação dos alunos no processo de aprendizagem.

Referências

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVEA, F. G. A Matemática Através dos Tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Traduzido por Elza Gomide e Helena Castro. *2. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Citado na página 19.*

BORIN, J. Jogos e Resolução de Problemas: Uma estratégia para as aulas de matemática. *São Paulo: IME-USP, 1996. Citado na página 39.*

BOURBAKI, N. Elements de Mathématique: Algebre. Reimpresso como Elements of mathematics: Algebra I. *Berlin, Alemanha: Springer, 1998. (Chapters 1 - 3, pág. 671). Citado na página 20.*

BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. *São Paulo: Edgarg Blucher, 1974. Citado na página 19.*

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5 ^{a} a 8 ^{a} séries). *Brasília, DF, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 16, 27, 28 e 39.*

BRASIL. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil - matrizes de referência, tópicos e descritores. *Brasília, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32, 33 e 37.*

CAJORI, F. A History of Mathematical Notations. *New York: Two klumes Bound As One, 1993. Citado na página 20.*

CARAÇA, B. de J. Conceitos Fundamentais da Matemática. *Lisboa: Tipografica Matemática, 1951. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 22.*

CARNEIRO, H. G.; RODRIGUES, L. G.; SOUZA, C. da F. Jogos matemáticos no ensino dos números racionais. Enciclopédia Biosfera, Centro Científico Conhecer - Goiânia*, v.11, n. 20, p. 505, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 43.*

CARVALHO, A. M. S. O desenvolvimento do conceito de número racional em alunos do 4^o ano de escolaridade. 2005. 137 f. *Dissertação (Mestrado) — FCUL, Lisboa, 2005. Citado na página 30.*

CATOO, G. G. Registros de Representação e o Número Racional: Uma abordagem nos livros didáticos. 2000. 168 f. *Dissertação (Mestrado) — PUC, São Paulo, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 30.*

DUVAL, R. Semióses e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. *São Paulo: Livraria da física, 2009. Citado na página 22.*

EMPSON, S. B. Equal sharing and shared meaning: the development of fraction concepts in a first grade classroom. Cognition and Instruction*, 1999. Citado na página 29.*

ESTUDANTE, O. do. Questão 147 - Prova Amarela - Enem 2015. 2015. Disponível em: <http://vestibular.mundoeducacao.bol.uol.com.br/enem/questao-147---prova-amarela---enem-2015.htm.> Acesso em: 05 de julho de 2015. Citado na página 35.

ESTUDANTE, O. do. Questão 177 - Prova Amarela - Enem 2015. 2015. Disponível em: <http://vestibular.mundoeducacao.bol.uol.com.br/enem/questao-177---prova-amarela---enem-2015.htm.> Acesso em: 05 de junho de 2015. Citado na página 34.

FERREIRA, C. S. A Tecnologia como ferramenta para superação das deficiências da base e otimização da aprendizagem em matemática: uma experiência com os números racionais. 2014. 129 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 17, 20 e 31.

G1. Veja 10 temas que podem cair na prova de matemática do Enem. São Paulo, 2012. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2012/10/veja-10-temas-que-podem-cair-na-prova-de-matematica-do-enem.html>. Acesso em: 12 de agosto de 2015. Citado na página 33.

GIL, J. da S. Uma Abordagem Lúdica para as Diferentes Representações do Número Racional Positivo. 2012. 164 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012. Citado na página 30.

GODOY, A. S. Introdução a pesquisa qualitativa e suas possibilidades. Revista de Administração de Empresas, v. 35, n. 2, p. 57 – 63, Abril 1995. Citado na página 45.

GRANDO, R. C. O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula. 2000. 239 f. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 48.

HENRIQUE, P. Fração. 2010. Disponível em: <http://segredodamatematica.blogspot.com.br/2010/05/fracao.html>. Acesso em: 12 de agosto de 2015. Citado na página 19.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. Matemática e realidade. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. (6º Ano). Citado na página 20.

JÚNIOR, E. M. de M. O uso de vídeo-aulas de matemática como metodologia para a melhoria da qualidade do ensino nos anos iniciais na Escola Municipal Henrique Dias no Município de Porto Velho-RO. 2013. 59 f. Dissertação (Mestrado) — Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2013. Citado na página 40.

LIMA, E. L. Números e Funções Reais. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado na página 21.

MARANHAO, M. C.; IGLIORI, S. B. Registros de representação e números racionais. in: Machado, s. d. a. aprendizagem em matemática - registros de representação semiótica. p. 57–70, 2003. São Paulo: Papirus. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 54.

MONTEIRO, C.; COSTA, C. Dificuldades na aprendizagem dos números racionais. Revista Educação e Matemática, n. 40, p. 60–63, 1996. Portugal: APM. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. Desenvolvendo o sentido do número racional. Lisboa: APM, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

MOTA, P. C. C. L. D. M. Jogos no Ensino da Matemática. 2009. 142 f. *Tese (Doutorado) — Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Portugal, 2009. Citado na página 38.*

NEVES, E. B.; DOMINGUES, C. A. Manual de metodologia da pesquisa científica*. Rio de Janerio - RJ, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.*

NIEMANN, F. de A.; BRANDOLI, F. Jean piaget: um aporte teórico para o construtivismo e suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da língua portuguesa e da matemática. Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul*, 2012. Citado na página 56.*

ONUCHIC, L. de la R.; BOTTA, L. S. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. Revista de Educação Matemática*, n. 3, p. 5–8, 1997. São Paulo: SBEM. Disponível em: <http://www.editoradobrasil.com.br/portal_educacional/fundamental2/projeto_apoema/pdf/textos_complementares/matematica/6_ano/pam6_texto_complementar05_nova_visao_aprendizagem_numeros_racionais.pdf>. Acesso em: 08 de agosto de 2015. Citado na página 28.*

DUVAL, R. (Ed.). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. 2003. Citado na página 28.*

PARKER, M.; LEINHARDT, G. Percent: a privileged proportion. Review of Educational Research*, v. 65, n. 4, p. 421 – 481, 1995. Washington: American Educational Research Association. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 51.*

RJ, S. Avaliação Diagnóstica - 1^o Bimestre*. Rio de Janeiro, 2014. Língua Portuguesa e Matemática - 9^o Ano do Ensino Fundamental. Citado na página 52.*

RJ, S. Avaliação Diagnóstica - 3^o Bimestre*. Rio de Janeiro, 2014. Língua Portuguesa e Matemática - 9^o do Ensino Fundamental. Citado na página 52.*

ROMANATTO, M. C. Número Racional: Relações Necessárias a sua Compreensão. 1997. 169 f. *Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1997. Citado na página 30.*

ROSA, R. R. da. Dificuldades na compreensão e na formação de conceitos de números racionais: uma proposta de solução. 2007. 87 f. *Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 54.*

SANTOS, R. S. dos; CAMPOS, T. M. M.; CARVALHO, J. I. F. de. Análise das Estratégias Utilizadas pelos Alunos da Educação Básica na Resolução de Questões sobre Números Racionais na Avaliação do SARESP/Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo*. Montevideo, Uruguay, 2013. Citado na página 31.*

SEEDUC. Revista do Professor de Matemática do 9^o Ano do Ensino Fundamental(SAERJ). *Rio de Janeiro, 2008. Citado na página 36.*

SEEDUC. SAERJ - Sistema de Avaliação do Estado do Rio de Janeiro*. Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 35.*

SEEDUC. Revista Pedagógicas 9^o Ano do Ensino Fundamental- Saerj*. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <http://pt.slideshare.net/djfico/prova-saerj-matemtica-nono-ano>. Acesso em: 13 de setembro de 2015. Citado na página 36.*

SILVA, M. J. F. da. Sobre a Introdução do Conceito de Número Fracionário. 1997. 245 f. Dissertação (Mestrado) — PUC, São Paulo, 1997. Citado na página 16.

SILVA, T. R. da. Dialética sobre a rejeição a matemática: Causas e formas de intervenção. Natal, 2014. Disponível em: <http://enalic2014.com.br/anais/anexos/334.pdf>. Acesso em: 13 de setembro de 2015. Citado na página 16.

SILVEIRA, F. P. da. Frações Ordinárias X Frações Decimais. 2011. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~fundamentos1/perola4.htm>. Acesso em: 25 de outubro de 2015. Citado na página 20.

SOUZA, S. S. S. de. Erros em Matemática Um Estudo Diagnóstico com alunos de 6^a série do Ensino Fundamental. 2002. 193 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Marília, 2002. Citado na página 29.

SOUZA, V. F. de. Uma Abordagem aos Números Racionais na Forma Decimal: suas Operações, Representações e Aplicações. 2013. 88 f. Dissertação (Mestrado) — UENF, Campos dos Goytacazes-RJ, 2013. Citado na página 17.

TOLEDO, M. de Barros de A. Teoria e Prática de Matemática: Como Dois e Dois, volume único: Livro do Professor / Marília de Barros de Almeida Toledo, Mauro de Almeida Toledo. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 28.

VENTURA, H. M. G. L. A Aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiências de ensino no 2 ^{o} ciclo do ensino básico. 2013. 386 f. Tese (Doutorado) — Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 17, 27, 28, 51 e 55.

WU, H. Fractions, decimals, and rational numbers. 2008. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/NMPfractions.pdf>. Acesso em: 25 de outubro de 2015. Citado na página 26.

ZUFFI, E. M. Fundamentos de matemática para o ensino superior. São Paulo: ICMC, 2015. Citado na página 21.

Apêndices

APÊNDICE A

Teste Aplicado

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Andréia Caetano da Silva Curty
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:___________________________________
Turma:_______ Data:____/____/___

TESTE

1)(Saerjinho-2014/3º Bimestre) Catarina comprou tecido para fazer um vestido, mas usou apenas $\frac{3}{4}$ dele. Quantos por cento desse tecido Catarina utilizou para fazer o vestido?

2)(Saerjinho-2014/3º Bimestre) A projeção de crescimento do PIB em 2014 é de 2,5%, de acordo com o governo brasileiro.
Isso significa que a soma, em valores monetários, de todos os bens e serviços finais produzidos no Brasil (PIB) durante o ano de 2014 poderá ter um crescimento de
A) 0,0025 em relação ao ano de 2013.
B) 0,025 em relação ao ano de 2013.
C) 0,25 em relação ao ano de 2013.
D) 2,5 em relação ao ano de 2013.

3)(Saerjinho-2014/1º Bimestre) Qual é a representação fracionária do número racional 29,5?
A)$\frac{295}{1000}$
B)$\frac{295}{100}$
c)$\frac{295}{10}$
d)$\frac{29}{5}$

4)(Saerjinho-2013/2º Bimestre) Qual é a representação decimal da fração $\frac{1}{8}$?
A) 0,125
B) 1,8
C) 8,1
D) 1,25

5) (Saerjinho-2015/1º Bimestre)Observe o número racional apresentado no quadro abaixo.

$$\boxed{\frac{17}{5}}$$

Qual é a representação decimal desse número?

6) (Saerjinho-2015/2º Bimestre)Um agricultor vendeu $\frac{12}{15}$ do total da soja produzida na última safra.
Esse agricultor vendeu quantos por cento dessa produção de soja?

7) O número 0,777... é igual à fração
a) $\frac{1}{7}$
b) $\frac{7}{9}$
c) $\frac{777}{1000}$
d) $\frac{3}{7}$

8) A representação do número racional $\frac{1}{6}$ é
a) 0,1666...
b) 0,666...
c) 1,1666...
d) 1,666...

9) Veja o que quatro alunos escreveram no quadro:

Ana	Beto	Carol	Daniela
$\frac{1}{4} = 0,4$	$\frac{1}{2} = 1,2$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{2}{5} = 0,4$

Quais alunos escreveram as igualdades corretas?

10) Relacione as colunas com as representações dos números racionais equivalentes:

(A) $\frac{5}{3}$	( ) 1,666...
(B) $\frac{2}{5}$	( )0,12
(C)2,5	( ) $\frac{11}{9}$
(D)12%	( ) $\frac{5}{2}$
(E)1,222...	( )40%

APÊNDICE B

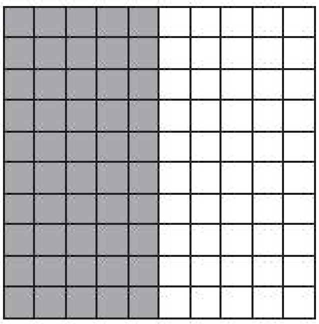
Atividade

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Andréia Caetano da Silva Curty
Orientadora: Liliana Angelina León Mescua
Aluno:_________________________________
Turma:_______ Data:____/____/___

Identificando e relacionando a equivalência entre as formas fracionária, decimal e percentual.

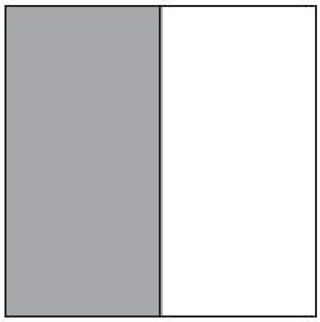
1. Escreva a fração correspondente a cada figura, de acordo com a parte pintada:

a)



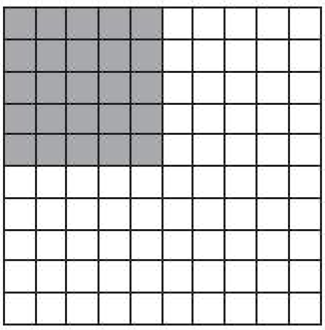
_____

b)



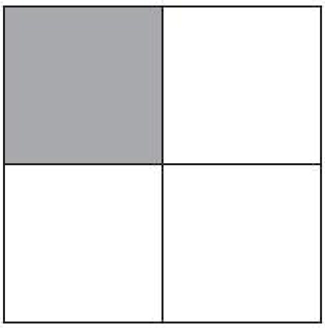
_____

c)



_____

d)

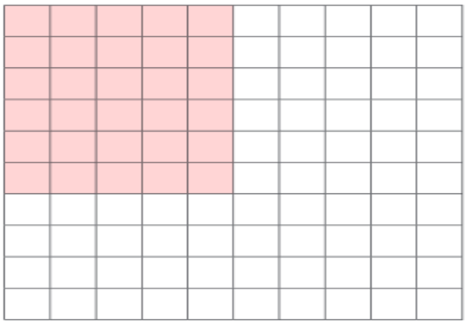


_____

Agora, compare as figuras a-b e c-d. O que você pôde observar? O que podemos dizer das representações fracionárias dessas figuras?

____
____
____

2. Já sabemos que o símbolo % significa porcentagem e que indica uma parte em relação a 100. Veja abaixo a folha que tem 10 x 10 de quadradinhos. Imagine que eles representam 100 pessoas, entre crianças e adultos, que residem em uma rua. A parte pintada representa número de crianças.



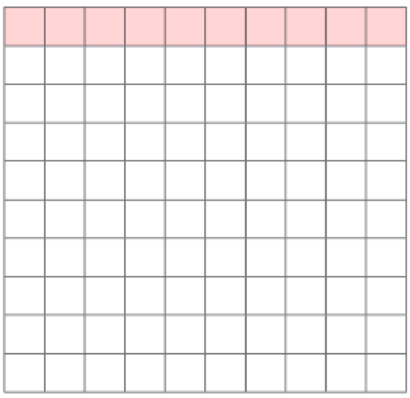
Assim, dos 100 moradores da rua, quantas crianças há?

____

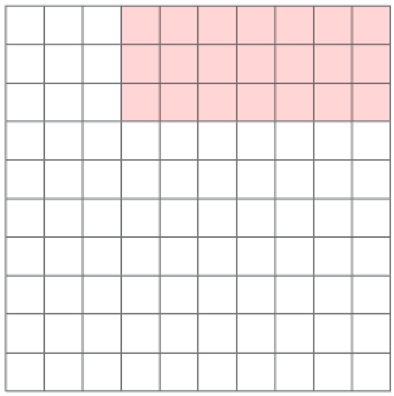
Podemos dizer que de 100 moradores, 30 são crianças. É o mesmo que escrevermos 30/100 dos moradores dessa rua são crianças. Ou ainda, que elas são 30% nessa rua.

Com base nessas informações, observe as seguintes malhas quadriculadas e represente a parte pintada na forma fracionária e em porcentagem.

a) _______ = ______%



b) ______ = ______%



Agora, represente na forma de porcentagem as frações que você encontrou nas letras a e c da 1ª questão.

____

Qual será a forma de porcentagem correspondente das frações encontradas nas letras b e d da 1ª questão? O que podemos concluir?

____
____
____

3. Imagine que as figuras a e b da questão 2 acima representem cada uma o valor de R$1,00. Assim, responda:

A) Quantos centavos a parte colorida das figuras representa, ou seja, qual é a forma decimal que a parte colorida representa?

a)___________ b) ______________

B) Faça a mesma coisa com as figuras a e c da 1ª questão.

a)___________ c)_____________

C) E as letras b e d da questão 1, como seriam as suas formas decimais?

b)_____________ d) _____________

4. Reúna as três representações encontradas (fração, decimal e porcentagem) correspondentes às figuras da 1ª questão.

a) ___ = ___ = ____% b) ___ = ___ = ____%

c) ___ = ___ = ____% d) ___ = ___ = ____%

Agora, para cada fração acima faça a divisão do numerador pelo denominador e em seguida, multiplique o resultado por 100. Quais são as suas conclusões?

APÊNDICE C

Cartas do Jogo Qual é a Fração?

Jogo: Qual é a fração

2,5	0,125	6,45	0,75	12,5
1,248	0,35	25%	80%	48%
50%	95%	16%	4%	1,166... = $1{,}1\overline{6}$
0,3737... = $0{,}\overline{37}$	0,555... = $0{,}\overline{5}$	3,222... = $3{,}\overline{2}$	0,03666... = $0{,}03\overline{6}$	1,2666... = $1{,}2\overline{6}$
0,333... = $0{,}\overline{3}$	2,5252... = $2{,}\overline{52}$	0,888... = $0{,}\overline{8}$	12,333... = $12{,}\overline{3}$	0,125125... = $0{,}\overline{125}$

APÊNDICE D

Cartas do Jogo Memória dos Racionais

Jogo da memória dos Números Racionais

60%	0,6	12,5%	0,125	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$
166,6%	0,5	1,666...	50%	$\frac{1}{2}$	0,75
75%	33,3%	$\frac{4}{5}$	0,8	80%	$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{4}$	0,8333...	$\frac{1}{3}$	0,333...	20%	$\frac{3}{5}$
$\frac{5}{3}$	0,2	$\frac{1}{5}$	0,25	25%	83,3%

Anexos

ANEXO A

Cartas do Jogo Que Racional é esse?

Anexo I – Cartas Principais

Decimais Exatos

Dízimas Periódicas Simples

Dízimas Periódicas Composta

Decimais Infinitos Não Periódicos

ATENÇÃO: Não pertence ao Conjunto dos Números Racionais

Anexo II – Cartas Numeradas

$\frac{21}{9}$	2,3	2,1333...
2,134...	$\frac{574}{10}$	5,744...
57,444...	8,3434...	8,343

8,342...	$\frac{941}{10}$	9,1444...
94,111...	156,9	15,999...
$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{68}{10}$
$\frac{574}{90}$	$\frac{75}{6}$	$\frac{54}{5}$