



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CALENDÁRIOS , ESTAÇÕES DO ANO E A SENÓIDE, O SOL,
COORDENADAS GEOGRÁFICAS: CONEXÕES COM A
MATEMÁTICA DOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

ADRIANO CARIBÉ RIBEIRO

Salvador - Bahia
10 DE MARÇO DE 2016

CALENDÁRIOS , ESTAÇÕES DO ANO E A SENÓIDE, O SOL,
COORDENADAS GEOGRÁFICAS: CONEXÕES COM A
MATEMÁTICA DOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

ADRIANO CARIBÉ RIBEIRO

Dissertação de Mestrado apresentada
à Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFBA como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Godinho
Mandolesi.

Salvador - Bahia
10 de Março de 2016

CALENDÁRIOS , ESTAÇÕES DO ANO E A SENÓIDE, O SOL, COORDENADAS GEOGRÁFICAS: CONEXÕES COM A MATEMÁTICA DOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 10 de março de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Rita de Cássia de Jesus Silva
UFBA

Prof. Dr. Walter Accioly Costa Porto
IFBA

Dedico este trabalho à minha amada esposa Alessandra e aos meus amados filhos Júlia e Lucas, que estiveram sempre ao meu lado ao longo desta jornada me dando muito carinho e tornando os meus dias mais felizes.

Agradecimentos

Aos meus Pais, Victor e Áurea, a quem eu devo toda minha formação e que sempre foram grandes incentivadores do estudo.

À minha esposa Alessandra que sempre esteve ao meu lado me apoiando e me dando todo o suporte para que pudesse enfrentar esses anos de mestrado.

Aos meus filhos Júlia e Lucas por serem a grande razão da minha existência e por renovarem as minhas energias com seu carinho e amor.

Aos meus professores de toda a vida, desde as minhas professoras da pré-escola aos meus professores do PROFMAT. Nada disso seria possível sem vocês.

Ao meu orientador, Prof. André Mandolesi, por acreditar no meu trabalho e pela compreensão com as minhas dificuldades.

Aos meus amigos e colegas do PROFMAT, por serem uma turma maravilhosa que tornou os meus sábados mais agradáveis. A nossa união e a forma como nos ajudávamos uns aos outros foi muito importante para mim ao longo do curso.

A todos os meus alunos ao longo desses 25 anos de exercício dessa profissão tão bela. Com vocês eu também aprendi muito.

E, acima de tudo, a Deus, a quem tudo devo e por colocar sempre pessoas maravilhosas na minha vida.

Resumo

Este trabalho tem por finalidade falar sobre tópicos interessantes ligados à Astronomia, que tenham conexões com a Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e que estejam ao alcance da compreensão dos alunos do Ensino Médio. Neste trabalho vamos falar sobre calendários: o Calendário Juliano, Calendário Gregoriano (os dias que nunca existiram) e o Calendário Muçulmano. Em seguida mostraremos como podemos usar funções trigonométricas para calcular, com boa aproximação, a declinação do Sol e ainda relacionar o gráfico da função seno às estações do ano. Vamos desmistificar a falsa ideia que os alunos têm de que o Sol fica a pino todos os dias ao meio dia. E, por fim, vamos mostrar como a sombra mínima de uma vareta ao longo de um dia pode nos ajudar na determinação da nossa localização.

Palavras-chave: Calendários, Declinação do Sol, Estações do Ano, Sol a pino, Sombra mínima.

Abstract

This study aims to talk about interesting topics related to Astronomy which have connections with Mathematics from Elementary to High School levels and which can be understood by High School students. This paper is going to talk about Calendars: Julian Calendars, Gregorian Calendar (the days which have never exist) and Muslin Calendar. Next, this study will demonstrate how people can use trigonometric functions to calculate with good approach the declination of the Sun and relate the graph of sine function with the seasons of the year. We demystify the false idea that students have that the Sun is directly overhead every day at noon. Finally, we will show how the shortest shadow of a stick over a day can help in the determination of our localization.

Keywords: Calendars, Solar Declination , Seasons, Noonday sun, Minimal shadow.

Sumário

Introdução	11
1 Calendários	13
1.1 O Ano Solar	13
1.2 O Calendário Juliano	14
1.3 O Calendário Gregoriano e os Dias que nunca existiram	17
1.4 O Calendário Islâmico	18
2 A Senóide, as Estações do Ano e a Declinação do Sol	22
2.1 A Circunferência Trigonométrica	22
2.2 A Função de Euler e a Medida de Arcos na Circunferência Trigonométrica	22
2.3 As funções Seno e Cosseno	23
2.4 O Gráfico da Função Seno	24
2.5 Movimentos de Gráfico Envolvendo a Função Seno	25
2.6 Modelando uma Função para Determinação da Declinação do Sol	33
2.6.1 Sugestão de Problemas para debate com os Alunos:	38
2.7 A Senóide e as Estações do Ano	41
3 Sol a Pino, Sombra Mínima e Declinação do Sol	44
3.1 Zênite e o Sol a Pino	44
3.2 Localizando-se a partir da Sombra de uma Vareta ao longo do dia	48
3.2.1 Determinação do Leste, Oeste, Norte e Sul	48
3.2.2 Cálculo da Latitude a partir da Sombra mínima e da Declinação do Sol	51
Considerações Finais	55
Referências Bibliográficas	56

Lista de Tabelas

1.1	Organização dos meses no Calendário após 44 a. C.	14
1.2	Organização dos meses no Calendário após 8 d. C.	15
1.3	Momento Exato dos equinócios e solstícios de 2006 a 2025	16
1.4	Data 1 de Ramadan no Calendário Islâmico e no Gregoriano	19
1.5	Associação entre os calendários Islâmico e Gregoriano	20
3.1	Sol a pino em algumas Latitudes (Sul)	46
3.2	Sol a pino em algumas Latitudes (Norte)	47

Lista de Figuras

2.1	Circunferência Trigonométrica	22
2.2	Função de Euler	23
2.3	Senos e Cossenos na Circunferência Trigonométrica	24
2.4	Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$	25
2.5	Gráfico de $g(x) = \text{sen}(x)$ e $f(x) = 3 + \text{sen}(x)$	26
2.6	Gráfico de $g(x) = \text{sen}(x)$ e $f(x) = \text{sen}(x - \pi/3)$	27
2.7	Gráficos de $g(x) = 2^x$ e $f(x) = -2^x$	28
2.8	Gráficos de $g(x) = 2^x$ e $h(x) = 2^{-x}$	28
2.9	Gráfico de $g(x) = \text{sen}(x)$	29
2.10	Gráficos de $g(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = -\text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{sen}(-x)$	29
2.11	Gráficos de $g(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = 2 \cdot \text{sen}(x)$	30
2.12	Gráficos de $g(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = \text{sen}(2x)$	31
2.13	Gráficos de $g(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen}(x/2 + \pi/4)$	32
2.14	Declinação do Sol;	33
2.15	Eclíptica com datas de Equinócios e Solstícios	34
2.16	Trópicos de Câncer e Capricórnio	34
2.17	Solstício de Dezembro	35
2.18	Gráfico da função $g(d) = 23,5 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot d}{365})$ ao longo de um ano	36
2.19	Gráfico da função $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365})$ ao longo de um ano	36
2.20	Gráfico da função $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365})$	37
2.21	Gráfico da função $h(d) = 23,4378 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot (d-79,1875)}{365,2422})$	37
2.22	Gráficos das funções $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365})$ e $h(d) = 23,4378 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot (d-79,1875)}{365,2422})$	38
2.23	Gráficos das funções $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365})$ e $h(d) = 23,4378 \cdot \text{sen}(\frac{2\pi \cdot (d-79,1875)}{365,2422})$ no intervalo $[36500, 37500]$	38
2.24	Estações do Ano no Hemisfério Sul	41
2.25	Diferenças entre Inclinação do Sol e Latitude local	41
2.26	Incidência de raios solares na superfície da Terra	42
2.27	Incidência de raios solares na superfície da Terra	42
3.1	Zênite	44
3.2	Sugestão de Experimento	45
3.3	Declinação do Sol ao longo de um ano	47
3.4	Localização dos Pontos Cardeais: Norte, Sul, Leste e Oeste	48
3.5	Sombra mínima em Janeiro em Salvador	49
3.6	Sombra mínima em Julho em Salvador	49
3.7	Foto da Sombra mínima registrada em 09/08/2015 em Salvador	50
3.8	Foto da Sombra mínima registrada em 01/12/2015 em Salvador	50

Introdução

Ao longo de mais de vinte anos ensinando Matemática nos Ensinos Fundamental e Médio na rede particular de ensino da cidade do Salvador, algumas perguntas sempre estiveram presentes em minhas aulas: “Professor, para que serve este assunto”, “Qual aplicação que ele tem?” e outras tantas sempre na direção das aplicações dos assuntos estudados. Em particular, no ensino da Trigonometria tais questionamentos eram muito frequentes. Naturalmente, isso sempre foi uma preocupação para mim, que procurava colocar para meus alunos essas aplicações. Em Trigonometria, sempre gostava de citar exemplos ligados às sombras, ao Sol, associações do comportamento da função seno com as estações do ano e declinação do Sol, assim como sobre calendários. Sempre me interessei muito por esses assuntos, li e falei muito sobre eles, mas pouco escrevi. No máximo, formulei, ao longo dos anos, algumas questões para minhas aulas e para avaliações acerca desses temas.

Quando, no ano de 2013, ingressei no PROFMAT e tomei conhecimento de que teríamos que apresentar um Trabalho de Conclusão de Curso que, conforme orienta o banco indutor, “*deve consistir, preferencialmente, de projeto com aplicação direta em sala de aula de Matemática na Educação Básica, contribuindo para o enriquecimento do ensino da disciplina*”, logo pensei em abordar estes temas.

Inicialmente, comecei a pensar sobre que tópicos exatamente tratar, de modo que nada que fosse colocado nesse trabalho estivesse fora do alcance dos alunos do Ensino Médio e que tudo que aqui fosse colocado pudesse realmente contribuir para o enriquecimento das aulas de Matemática, em particular as aulas de Trigonometria. Sendo assim, o presente trabalho foi dividido em três capítulos.

No capítulo 1, tratamos dos calendários, assunto que desperta grande curiosidade nos alunos, trazendo, inclusive, alguns aspectos históricos que podem e devem ser discutidos. A passagem do calendário Juliano para o calendário Gregoriano e os dias que nunca existiram é um ponto que desperta grande interesse. Outro ponto muito interessante é o calendário Muçulmano, no qual não há concordância entre o calendário e o ano solar, o que faz com que as datas passem pelas estações do ano. Um muçulmano que nasceu no Verão, nem sempre fará aniversário no Verão. Depois de algum tempo seu aniversário cairá na Primavera e depois no Inverno, e depois no Outono... Isso também é muito interessante para os alunos. E o fundamental nessa abordagem é não apenas fornecer a informação aos alunos, mas discutir com eles os porquês. E construir com eles as respostas.

No capítulo 2, vamos discutir como podemos modelar uma composição com a função seno ou com a função cosseno para, a partir de uma delas, estudar a declinação do Sol e, ainda, relacionar o gráfico da função seno às estações do ano mostrando que cada quadrante corresponde a uma das estações e os Solstícios e Equinócios correspondem aos pontos notáveis do gráfico.

No capítulo 3, vamos falar sobre o Sol a pino. Vamos desmistificar a falsa ideia que os alunos têm de que o Sol fica a pino todos os dias ao meio dia. A grande maioria dos alunos e até parte dos professores acreditam que, ao meio dia, uma vareta perpendicularmente fincada no chão não projeta sombra. Este evento raríssimo só ocorre em Salvador, e ainda assim aproximadamente, em dois dias do ano (um na primavera e um no verão) e em cidades como Nova Iorque e Buenos Aires isso não ocorre nunca. Veremos que dias são esses que o Sol passa por Salvador. Mostraremos, ainda, como usar a sombra mínima de uma vareta em um dia para determinar a latitude do local (processo que foi de fato utilizado na época das grandes navegações) e como podemos, observando a trajetória dessa sombra ao longo do dia, determinar o Norte, o Sul, o Leste e o Oeste.

Capítulo 1

Calendários

1.1 *O Ano Solar*

O Ano Solar é o tempo que a Terra leva para executar completamente uma volta em torno do Sol. Podemos dizer também que é o tempo exato entre dois Solstícios de Verão consecutivos ou ainda entre dois Equinócios de Primavera. Desde a antiguidade, os homens já o percebiam a partir das periódicas mudanças nas condições do clima como chuvas, mais calor em determinadas épocas, frio, enchentes de rios, secas, etc. Naturalmente, ele foi usado para contagem da passagem de tempo desde os tempos mais remotos. E portanto era a base dos calendários mais antigos de que se tem conhecimento. O Ano Solar tem a duração de aproximadamente 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos.

Ao longo do Ano Solar ocorrem os chamados Solstícios e Equinócios que são assim definidos para nós que estamos no Hemisfério Sul:

- Solstício de Verão: É o momento do ano em que os raios solares incidem perpendicularmente mais ao Sul do planeta. O paralelo onde isso ocorre é chamado de Trópico de Capricórnio.
- Equinócio de Outono: É a primeira vez, após o Solstício de Verão, que o Sol incide perpendicularmente no Equador.
- Solstício de Inverno: É o momento do Ano em que os raios solares incidem perpendicularmente mais ao Norte do planeta. O paralelo onde isso ocorre é chamado de Trópico de Câncer.
- Equinócio de Primavera: É a primeira vez, após o Solstício de Inverno, que o Sol incide perpendicularmente no Equador.

As Estações do Ano são definidas a partir das datas exatas dos Solstícios e Equinócios e são assim definidas:

- Verão: É o período do Ano que vai do Solstício de Verão ao Equinócio de Outono.
- Outono: É o período que vai do Equinócio de Outono ao Solstício de Inverno.
- Inverno: É o período do Ano que vai do Solstício de Inverno ao Equinócio de Primavera.
- Primavera: É o período que vai do Equinócio de primavera ao Solstício de Verão.

1.2 O Calendário Juliano

O Calendário Juliano foi instituído pelo Imperador Júlio Cesar na Roma Antiga em 46 a.C. e, ao longo dos anos que se seguiram, foi sofrendo algumas modificações até que, em 8 d.C., com Roma já sob o comando do Imperador Augusto chegou-se ao formato definitivo. Tal formato consistia de um ano de 365 dias e, de quatro em quatro anos, um ano bissexto com 366 dias. A princípio, no calendário instituído por Júlio César, os anos bissextos ocorriam a cada três anos. Somente em 8 d.C. Augusto fixou que os anos bissextos ocorreriam a cada quatro anos ao invés de três. Mesmo assim o calendário continuou a se chamar **Calendário Juliano**.

Como ficaram os meses após 44 a. C.:

Número	Mês	Quantidade de Dias
1	Januarius	31
2	Februarius	29 ou 30
3	Martius	31
4	Abrilis	30
5	Maius	31
6	Junius	30
7	Julius	31
8	Sextilis	30
9	September	31
10	October	30
11	November	31
12	December	30

Tabela 1.1: Organização dos meses no Calendário após 44 a. C.
Fonte: MARQUES, M. N., 1992

Como ficaram os meses após 8 d. C.:

Número	Mês	Quantidade de Dias
1	Januarius	31
2	Februarius	28 ou 29
3	Martius	31
4	Abrilis	30
5	Maius	31
6	Junius	30
7	Julius	31
8	Augustus	31
9	September	30
10	October	31
11	November	30
12	December	31

Tabela 1.2: Organização dos meses no Calendário após 8 d. C.
Fonte: MARQUES, M. N., 1992

No calendário Juliano, então o ano tem uma duração média de 365 dias e 6 horas, o que gera uma diferença de aproximadamente 11 minutos e 13 segundos em relação à duração do Ano Solar. Essa diferença, que parece insignificante, fez com que a data dos solstícios e equinócios fosse se deslocando ao longo dos séculos. Vejamos, por exemplo, o momento exato dos solstícios e equinócios no período de 2006 a 2025:

Ano	Equinócio de Março	Solstício de Junho	Equinócio de Setembro	Solstício de Dezembro
2006	20 às 18:26 h	21 às 12:26 h	23 às 04:03 h	22 à 00:22 h
2007	21 à 00:07 h	21 às 18:06 h	23 às 09:51 h	22 às 06:08 h
2008	20 às 05:48 h	20 às 23:59 h	22 às 15:44 h	21 às 12:04 h
2009	20 às 11:44 h	21 às 05:45 h	22 às 21:18 h	21 às 17:47 h
2010	20 às 17:31 h	21 às 11:28 h	23 às 03:09 h	21 às 23:38 h
2011	20 às 23:21 h	21 às 17:16 h	23 às 09:04 h	22 às 05:30 h
2012	20 às 05:14 h	20 às 23:09 h	22 às 14:49 h	21 às 11:11 h
2013	20 às 11:02 h	21 às 05:04 h	22 às 20:44 h	21 às 07:11 h
2014	20 às 16:57 h	21 às 10:51 h	23 às 02:29 h	21 às 23:03 h
2015	20 às 22:45 h	21 às 16:38 h	23 às 08:21 h	22 às 04:48 h
2016	20 às 04:30 h	20 às 23:34 h	22 às 14:21 h	21 às 10:44 h
2017	20 às 10:29 h	21 às 04:24 h	22 às 20:02 h	21 às 16:28 h
2018	20 às 16:15 h	21 às 10:07 h	23 à 01:54 h	21 às 22:23h
2019	20 às 21:58 h	21 às 15:54 h	23 às 07:50 h	22 às 04:19 h
2020	20 às 03:50 h	20 às 21:44 h	22 às 13:31 h	21 às 10:02 h
2021	20 às 09:37 h	21 às 03:32 h	22 às 19:21 h	21 às 15:59 h
2022	20 às 15:53 h	21 às 09:14 h	23 à 00:40 h	21 às 21:48 h
2023	20 às 21:24 h	21 às 14:58 h	23 às 06:50 h	22 às 03:27 h
2024	20 às 03:06 h	20 às 20:51 h	22 às 12:44 h	21 às 09:21 h
2025	20 às 09:01 h	21 às 02:42 h	22 às 18:19 h	21 às 15:03 h

Tabela 1.3: Momento Exato dos equinócios e solstícios de 2006 a 2025

Fonte: Adaptada de aa.usno.navy.mil/data/docs/EarthSeasons.php, acesso em 29/09/2015

Com base nos dados da tabela, vamos observar, por exemplo, a data exata do equinócio de setembro nos anos 2008, 2012, 2016, 2020 e 2024:

- 2008: 22 de setembro às 15:44.
- 2012: 22 de setembro às 14:49.
- 2016: 22 de setembro às 14:21.
- 2020: 22 de setembro às 13:31.
- 2024: 22 de setembro às 12:44.

Observe que o momento do equinócio retrocede em média, aproximadamente, 11 minutos e 13 segundos por ano. Esse retrocesso chega a cerca de, aproximadamente, três dias a cada 400 anos. Isso fez com que, ao longo dos séculos em que vigorou o Calendário Juliano, as datas dos solstícios e equinócios retrocedessem no calendário e motivou a criação de um novo calendário, que é o **Calendário Gregoriano**.

É importante ressaltar que, apesar das datas dos solstícios e equinócios apresentadas na tabela já estarem ajustadas ao Calendário Gregoriano, para o período de 2006 a 2025 o mesmo retrocesso que ocorre no Calendário Juliano, ocorre no Calendário Gregoriano, dado que, como veremos a seguir, a diferença entre os dois calendários se dá nos anos seculares não divisíveis

por 400.

1.3 *O Calendário Gregoriano e os Dias que nunca existem*

Em 1577, após séculos de vigência do Calendário Juliano, a data do Equinócio de Primavera do Hemisfério Norte ocorreu em 11 de março. O Papa Gregório XIII desejava corrigir o erro de séculos de Calendário Juliano com o objetivo de fazer com que a data do Equinócio de Primavera voltasse a ser 21 de março e, ao mesmo tempo, corrigir também as outras datas dos solstícios e do Equinócio de Outono. Ao mesmo tempo, ele desejava fazer uma mudança que não gerasse os mesmos erros do Calendário Juliano ou que, pelo menos, minimizasse esses erros. Para isso, reuniu, então, um grupo de especialistas para estudar o assunto e propor uma mudança. Deste grupo, participaram o matemático alemão Christopher Clavius e o astrônomo e cronologista italiano Luigi Giglio. Depois de cinco anos de estudos foi promulgada a Bula Papal Inter Gravissimas que institui na quinta-feira, 04 de outubro de 1582, o Calendário Gregoriano, o qual passaria a vigorar a partir do dia seguinte, que seria sexta-feira 15 de outubro de 1582. Inicialmente, o Calendário Gregoriano suprimiu os dias de 05 de outubro de 1582 a 14 de outubro de 1582 gerando um fato histórico curioso que são **os dias que nunca existiram**. Em seguida, a Bula redefinia os anos bissextos, tornando os anos seculares (divisíveis por 100) não divisíveis por 400 anos não bissextos, ou seja, anos como 1700, 1800 e 1900 não foram bissextos, o ano 2000, por ser divisível por 400, foi bissexto, mas 2100 e 2200 não serão.

Vejamos abaixo a definição de ano bissexto nos Calendários Juliano e Gregoriano:

No Calendário Juliano, ano bissexto é o ano divisível por 4.

No Calendário Gregoriano, ano bissexto é o ano divisível por 4 que não é divisível por 100 ou que é divisível por 400.

Com essa mudança, a duração média do ano calendário mudou de 365,25 dias por ano no calendário juliano para 365,2425 dias por ano no calendário gregoriano. Essa pequena redução aproximou mais a duração do ano calendário da duração do ano solar.

O Calendário Gregoriano foi imediatamente adotado por países como Portugal, Espanha, Itália e Polônia e, na sequência, pelos demais países europeus de maioria católica. Países onde o catolicismo não predominava tardaram a adotá-lo. A Alemanha o adotou em 1700 e a Grã-Bretanha, em 1752. Alguns países só vieram a adotá-lo no século XX, a exemplo da Rússia, em 1918 e da Turquia em 1926. Apesar de ser o calendário predominante no Mundo Ocidental, existem países que não o adotam.

Sugestão de problema para debate com os alunos:

Com a adoção do Calendário Gregoriano, minimizou-se bastante o problema do deslocamento da data dos solstícios e equinócios, mas ainda assim, persiste um pequeno deslocamento a cada ciclo de 400 anos. Qual é esse deslocamento? Quantos ciclos de 400 anos seriam necessários para acumular mais de um dia?

Solução:

Como o Ano Solar tem a duração de, aproximadamente, 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos, então, a cada ano não bissexto (365 dias), o momento dos solstícios e equinócios avançam 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos menos 365 dias, ou seja, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos. E, a cada ano bissexto (366 dias), o momento dos solstícios e equinócios retrocedem 366 dias menos 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos, ou seja, 18 horas, 11 minutos e 13 segundos.

Como, a cada 400 anos, 97 são bissextos e 303 não são, então o momento dos solstícios e equinócios avançam 303 vezes 5 horas, 48 minutos e 47 segundos e retrocedem 97 vezes 18 horas, 11 minutos e 13 segundos. Ou seja, avançam 1761 horas, 21 minutos e 11 segundos e retrocedem 1754 horas, 18 minutos e 1 segundo. Portanto, isso gera, a cada 400 anos, um avanço de 7 horas, 3 minutos e 10 segundos. Em 1600 anos, o que equivale a 4 ciclos de 400 anos, teríamos, então, um avanço de 1 dia, 4 horas, 12 minutos e 40 segundos.

Em resumo:

- A cada 400 anos há um avanço de 7 horas, 3 minutos e 10 segundos.
- A cada 1600 anos há um avanço de 1 dia, 4 horas, 12 minutos e 40 segundos.

1.4 O Calendário Islâmico

O Calendário Islâmico ou Hegírico é baseado em doze meses lunares com duração de 29 ou 30 dias. O mês lunar tem duração média de 29 dias, 12 horas e 44 minutos. Por conta disso, os meses se alternam em 29 e 30 dias e os ajustes são feitos ao longo do tempo de modo que o mês sempre comece quando o crescente lunar aparece pela primeira vez após o por do Sol. O Ano Islâmico tem 354 ou 355 dias, o que dá uma diferença de cerca de 11 dias em relação ao Ano Solar. Essa diferença faz com que as datas passem pelas estações do ano, incluindo aí, naturalmente, as datas dos solstícios e equinócios. O marco zero (início do ano 1) do Calendário islâmico é a Hégira, 16 de julho de 622 d.C. do Calendário Juliano, o dia da fuga de Maomé de Meca para Medina. Daí vem a grande diferença entre os anos do Calendário Gregoriano e do Calendário Islâmico. No ano 2016 do Calendário Gregoriano, o Calendário Islâmico estará no ano 1437.

Vamos imaginar um muçulmano que tenha nascido no Iraque no primeiro dia do Ramadan de 1420, que corresponde no nosso Calendário Gregoriano ao dia 07 de Dezembro de 1999 (Outono no Iraque). Vamos acompanhar abaixo as datas de seus aniversários:

Aniversário	Data no Cal. Islâmico	Data no Cal. Gregoriano	Estação do Ano no Iraque
1 ano	1 de Ramadan 1421	27 de Nov. de 2000	Outono
2 anos	1 de Ramadan 1422	17 de Nov. de 2001	Outono
3 anos	1 de Ramadan 1423	06 de Nov. de 2002	Outono
4 anos	1 de Ramadan 1424	27 de Out. de 2003	Outono
5 anos	1 de Ramadan 1425	16 de Out. de 2004	Outono
6 anos	1 de Ramadan 1426	05 de Out. de 2005	Outono
7 anos	1 de Ramadan 1427	27 de Set. de 2006	Outono
8 anos	1 de Ramadan 1428	13 de Set. de 2007	Verão
9 anos	1 de Ramadan 1429	01 de Set. de 2008	Verão
10 anos	1 de Ramadan 1430	22 de Ago. de 2009	Verão
11 anos	1 de Ramadan 1431	11 de Ago. de 2010	Verão
12 anos	1 de Ramadan 1432	01 de Ago. de 2011	Verão
13 anos	1 de Ramadan 1433	20 de Jul. de 2012	Verão
14 anos	1 de Ramadan 1434	09 de Jul. de 2013	Verão
15 anos	1 de Ramadan 1435	28 de Jun de 2014	Verão
16 anos	1 de Ramadan 1436	18 de Jun. de 2015	Primavera
17 anos	1 de Ramadan 1437	06 de Jun. de 2016	Primavera
18 anos	1 de Ramadan 1438	27 de Maio de 2017	Primavera

Tabela 1.4: Data 1 de Ramadan no Calendário Islâmico e no Gregoriano
 Fonte: Adaptado de MORALLES, J. A. V, 2012

Esse muçulmano que nasceu no Outono completará 18 anos na Primavera.

Outro fato curioso é que um muçulmano de 33 anos se tivesse a sua idade contada pelo Calendário Gregoriano teria apenas 32 anos.

Sugestões de Problemas para debate com os Alunos:

Problema 1: De posse das informações anteriormente apresentadas sobre o Calendário Gregoriano e o Calendário Islâmico, poderíamos criar uma fórmula que relacionasse os dois calendários? Se sim, que fórmula seria essa?

Resolução:

Primeiro vamos calcular a duração média de um ano no Calendário Gregoriano e no Calendário Islâmico:

No Calendário Gregoriano, a cada 400 anos, 97 tem 366 dias e 303 tem 365 dias. Logo, a duração média de um ano é $\frac{97 \times 366 + 303 \times 365}{400}$ que é igual a 365,2425 dias por ano.

No Calendário Islâmico, a duração média de um mês é de 29 dias, 12 horas e 44 minutos. Sendo assim, o ano no Calendário Islâmico terá duração média de:

$12 \times (29 \text{ dias, } 12 \text{ horas e } 44 \text{ minutos}) = 12 \times 29,5305556 \text{ dias} = 354,36667 \text{ dias por ano.}$

Logo, temos:

- 1 Ano Gregoriano = 365,2425 dias

- 1 Ano Islâmico = 354,36667 dias

Fazendo a divisão de 1 Ano Gregoriano (A_g) por 1 Ano Islâmico (A_i) obtemos que: $\frac{1A_g}{1A_i} \cong 1,0307$ ou seja, quando se passa 1 ano no Calendário Gregoriano, se passa 1,0307 ano no Calendário Islâmico.

Por fim, temos de considerar que o marco zero do Calendário Islâmico é o ano 622 do Calendário Gregoriano. Logo, sendo **I** o ano no Calendário Islâmico e **G** o ano no Calendário Gregoriano, temos:

I	G
0	622
1,0307	623
⋮	⋮
103,07	722
⋮	⋮
I	G

Tabela 1.5: Associação entre os calendários Islâmico e Gregoriano

Como a variação dos anos em um calendário é diretamente proporcional à variação dos anos no outro, temos que $\frac{G-622}{I-0} = \frac{1}{1,0307}$.

Logo,

$$I = (G - 622) \cdot 1,0307$$

A fórmula acima nos fornece uma boa aproximação do ano correspondente (I) no Calendário Islâmico ao ano (G) do Calendário Gregoriano. Mas se quisermos um pouco mais de precisão na fórmula devemos considerar que a Hégira, o marco zero do Calendário Islâmico ocorreu em 16 de julho de 622 d. C. do Calendário Juliano, o que corresponde aproximadamente ao momento 621,55 anos do Calendário Gregoriano. Sendo assim, ajustando a fórmula, temos:

$$I = (G - 621,55) \cdot 1,0307$$

Problema 2: Imagine que você tenha um amigo muçulmano e que mora em um país que adota o calendário islâmico. Você perguntou a idade dele e ele respondeu dizendo que acabou de fazer aniversário completando 40 anos. Se ele tivesse sua idade medida em anos pelo calendário gregoriano, qual seria ela?

Resolução: Como 1 ano gregoriano equivale a 1,0307 ano islâmico, então fazendo uma regra de três simples e direta temos:

$$\begin{array}{l} 1,0307 \text{ ano islâmico} \text{ --- } 1 \text{ ano gregoriano} \\ 40 \text{ anos islâmicos} \text{ --- } x \text{ anos gregorianos} \\ x = \frac{40}{1,0307} \cong 38,8 \end{array}$$

Portanto, seu amigo teria 38 anos gregorianos e estaria a poucos meses de completar 39 anos.

Capítulo 2

A Senóide, as Estações do Ano e a Declinação do Sol

2.1 *A Circunferência Trigonométrica*

A circunferência trigonométrica é uma circunferência de raio unitário com centro na origem de um sistema cartesiano. Da Geometria Analítica sabemos que essa circunferência pode ser obtida pelo conjunto de pontos $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$

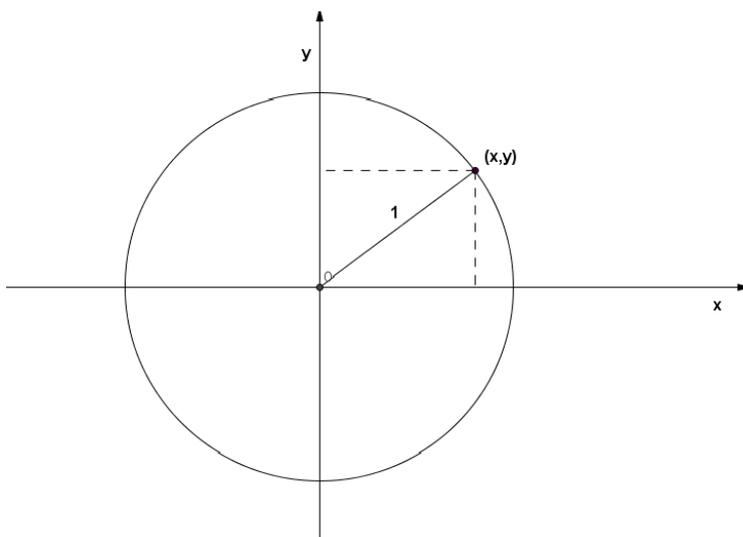


Figura 2.1: Circunferência Trigonométrica

2.2 *A Função de Euler e a Medida de Arcos na Circunferência Trigonométrica*

Considere a função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow C$ (C representando a circunferência trigonométrica) que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência trigonométrica obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (0, 1)$;

- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C , a partir do ponto $(0, 1)$, um caminho de comprimento t no sentido anti-horário. O ponto final do caminho será chamado $E(t)$;
- Se $t < 0$, percorremos sobre a circunferência, a partir do ponto $(0, 1)$, um caminho de comprimento $|t|$ no sentido horário. O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.

A função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta real sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(0, 1) \in C$.

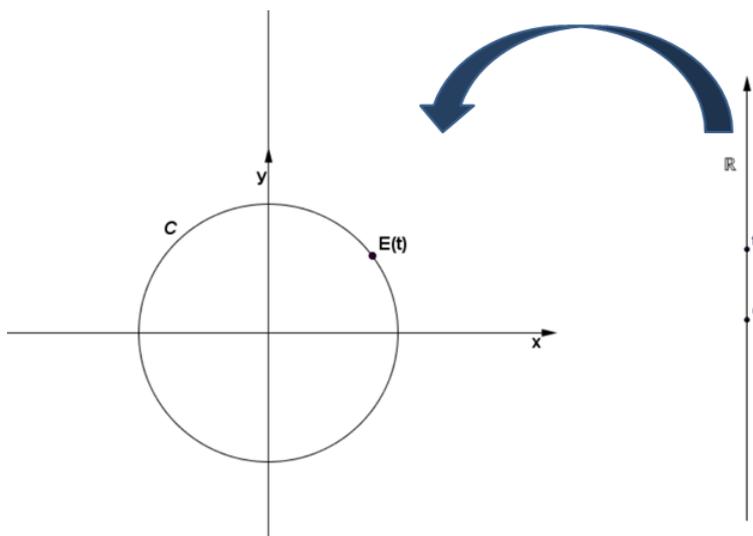


Figura 2.2: Função de Euler

Como a circunferência C tem comprimento igual a 2π , quando t descreve um intervalo de comprimento 2π , sua imagem dá uma volta completa sobre C , retornando ao ponto de partida. Assim sendo, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se que $E(t + 2\pi) = E(t)$ e para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ tem-se que $E(t + k \cdot 2\pi) = E(t)$.

2.3 As funções Seno e Cosseno

As funções $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, chamadas de função cosseno e função seno, são definidas pondo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$$

Ou seja, $x = \cos(t)$ e $y = \text{sen}(t)$ são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto $E(t)$ na circunferência trigonométrica.

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, chama-se período da função f . Podemos observar que as funções seno e cosseno são periódicas, de período 2π .

Dizemos que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é função par quando se tem $f(-t) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e dizemos que ela é função ímpar quando $f(-t) = -f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Podemos observar que a função cosseno é uma função par e que a função seno é uma função ímpar.

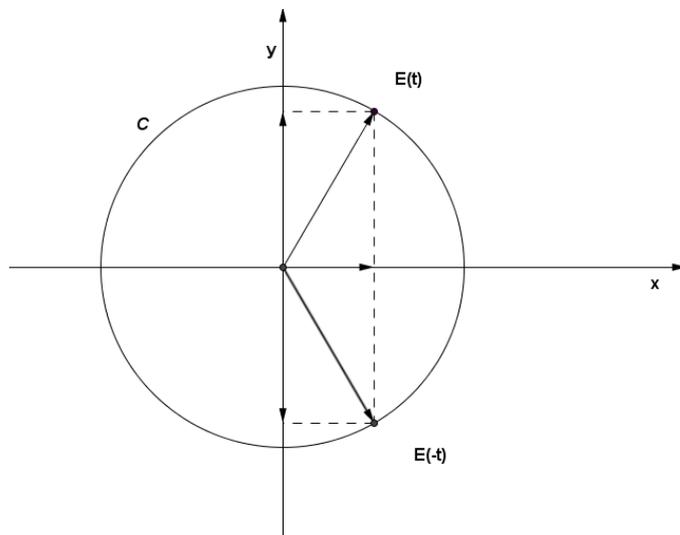


Figura 2.3: Seno e Cosseno na Circunferência Trigonométrica

Como os pontos $E(t)$ e $E(-t)$ são simétricos em relação ao eixo \overrightarrow{Ox} , eles têm abscissas iguais (cossenos) e ordenadas opostas (senos). Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(-t) &= -\text{sen}(t) \quad (\text{Função ímpar}) \\ \text{cos}(-t) &= \text{cos}(t) \quad (\text{Função par}) \end{aligned}$$

2.4 O Gráfico da Função Seno

Vamos considerar a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela sentença $f(x) = \text{sen}x$. Essa função, no intervalo $[0, 2\pi]$, tem alguns pontos notáveis que são $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 1$, $f(\pi) = 0$, $f(3\pi/2) = -1$ e $f(2\pi) = 0$.

Sabemos que se trata de uma **função periódica de período 2π** , visto que, $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ também de uma função ímpar, visto que $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

O gráfico dessa função é:

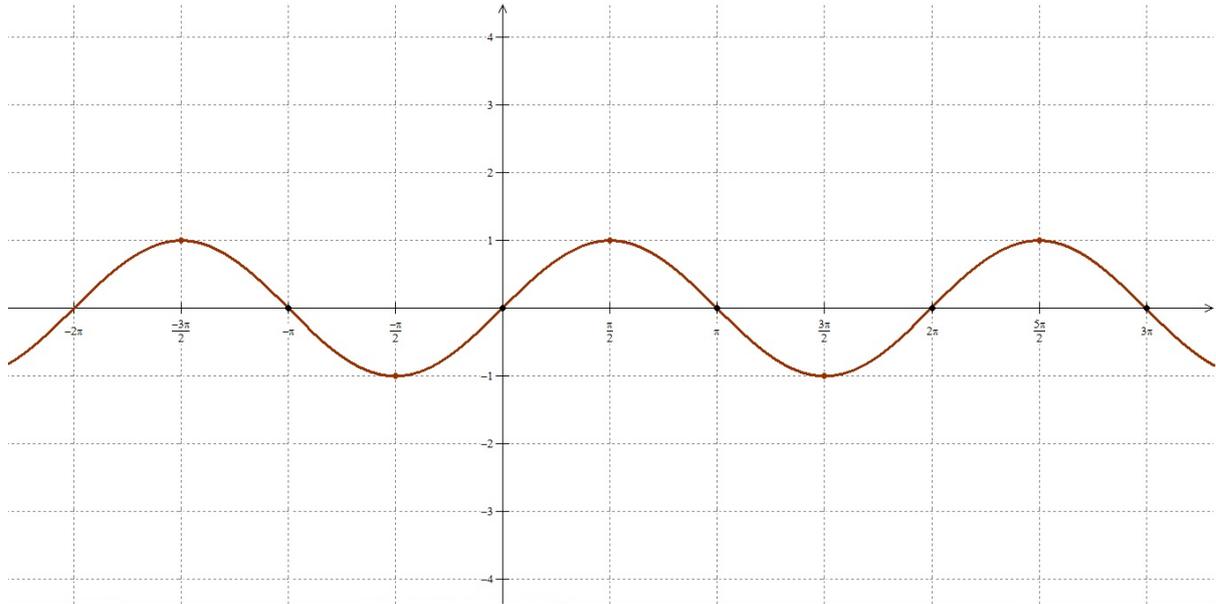


Figura 2.4: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$

2.5 Movimentos de Gráfico Envolvendo a Função Seno

Neste tópico vamos, a partir do conhecimento do gráfico da função seno, discutir como se comportam funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(\omega x + \phi)$, com a e $\phi \in \mathbb{R}$ e b e $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Vamos, inicialmente, chamar atenção para o fato de que funções que têm a forma acima são periódicas e têm período $\frac{2\pi}{|\omega|}$, pois:

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{|\omega|}\right) &= a + b \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot \left(x + \frac{2\pi}{|\omega|}\right) + \phi\right) = \\ &= a + b \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot x + \phi \pm 2\pi\right) = \\ &= a + b \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot x + \phi\right) = f(x). \end{aligned}$$

Como $f\left(x + \frac{2\pi}{|\omega|}\right) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então as funções que têm a forma $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(\omega \cdot x + \phi)$ são sempre periódicas.

Vamos ver de que maneira os parâmetros a , b , ω e ϕ interferem no gráfico da função.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1:

Qual o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela sentença $f(x) = 3 + \text{sen}(x)$?

Consideremos a seguinte tabela de valores:

x	$\text{sen } x$	$f(x) = 3 + \text{sen } (x)$
0	0	3
$\pi/2$	1	4
π	0	3
$3\pi/2$	-1	2
2π	0	3

A partir da tabela acima, podemos facilmente construir o gráfico da referida função:

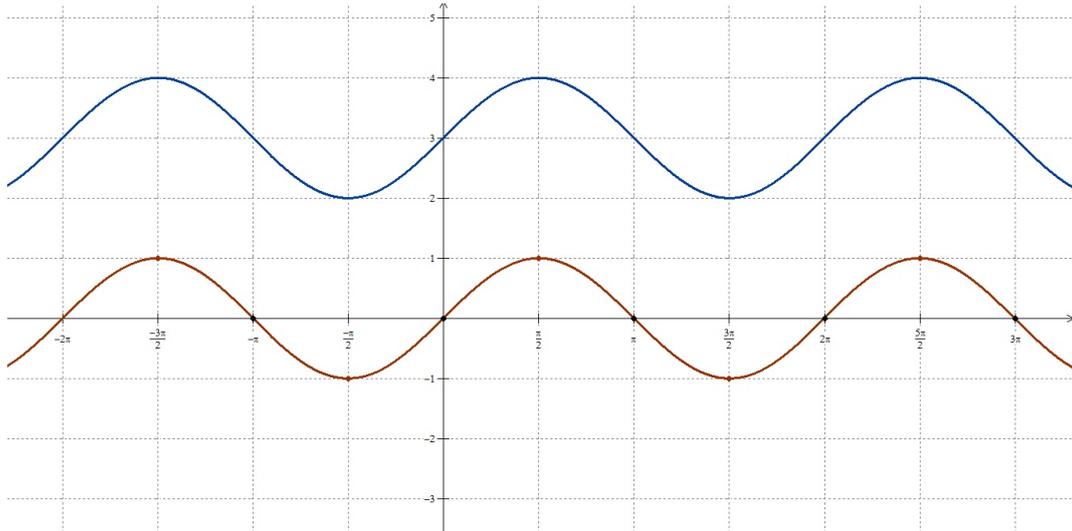


Figura 2.5: Gráfico de $g(x) = \text{sen } (x)$ e $f(x) = 3 + \text{sen } (x)$

Podemos observar, então, que o gráfico da função $f(x) = 3 + \text{sen } (x)$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $g(x) = \text{sen } (x)$ transladando-o três unidades para cima. Naturalmente, se quiséssemos o gráfico da função $h(x) = -3 + \text{sen } (x)$, este poderia ser obtido a partir do gráfico da função $g(x) = \text{sen } (x)$, transladando-o três unidades para baixo.

De uma forma geral, se conhecemos o gráfico de uma função $y = f(x)$, podemos obter o gráfico da função $y = a + f(x)$ por meio de uma translação vertical. Se a for um número real positivo, o gráfico é transladado a unidades para cima e, se a for um número real negativo, o gráfico é transladado a unidades para baixo.

Exemplo 2:

Qual o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela sentença $f(x) = \text{sen } (x - \pi/3)$?

Consideremos a seguinte tabela de valores:

x	$x - \pi/3$	$f(x) = \text{sen } (x - \pi/3)$
$\pi/3$	0	0
$5\pi/6$	$\pi/2$	1
$4\pi/3$	π	0
$11\pi/6$	$3\pi/2$	-1
$7\pi/3$	2π	0

Importante salientar que na tabela acima a segunda coluna foi preenchida antes da primeira. Inicialmente, atribuímos os valores $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ e 2π à expressão $(x - \pi/3)$, os quais produzem os valores notáveis na função seno e, posteriormente, calculamos os respectivos valores para x . A partir da tabela, podemos construir o gráfico da referida função:

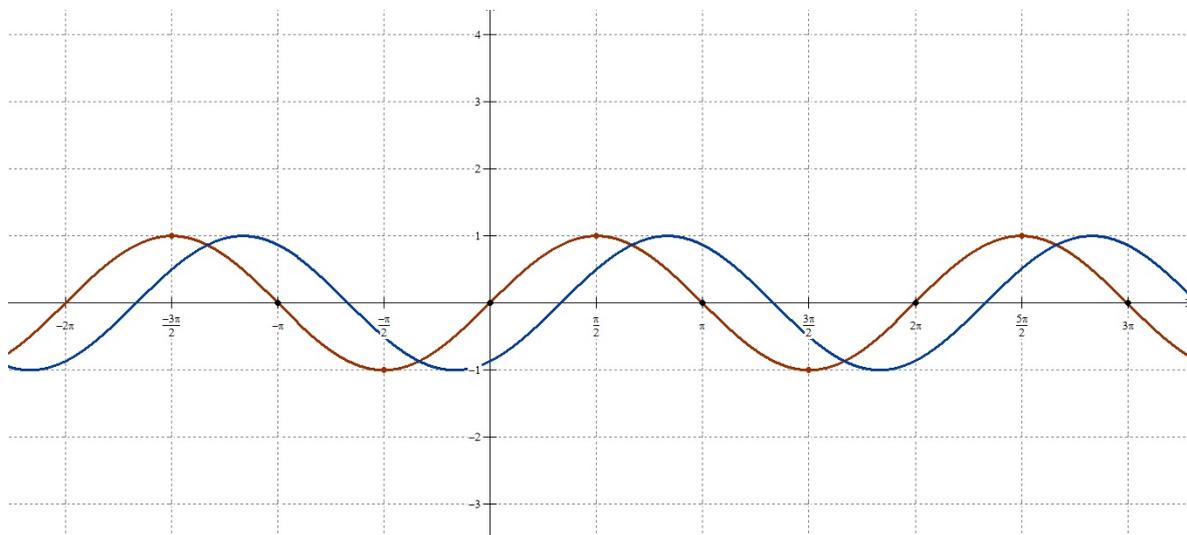


Figura 2.6: Gráfico de $g(x) = \text{sen}(x)$ e $f(x) = \text{sen}(x - \pi/3)$

Podemos observar, então, que o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x - \pi/3)$ pode ser obtido a partir do gráfico da função $g(x) = \text{sen}(x)$, trasladando-o $\pi/3$ unidades para a direita. Naturalmente, se quiséssemos o gráfico da função $h(x) = \text{sen}(x + \pi/3)$, por exemplo, este poderia ser obtido do gráfico da função $g(x) = \text{sen}(x)$ trasladando-o $\pi/3$ unidades para a esquerda.

De uma forma geral, se sabemos o gráfico de uma função $y = g(x)$, podemos obter o gráfico da função $y = g(x + \phi)$ por meio de uma translação horizontal. Caso ϕ seja um número real positivo, o gráfico sofre deslocamento de ϕ unidades para a esquerda e, se ϕ é um número real negativo, o gráfico sofre deslocamento de ϕ unidades para a direita.

Exemplo 3:

A partir do gráfico da função $g(x) = 2^x$, faça os gráficos das funções $f(x) = -2^x$ e $h(x) = 2^{-x}$.

Como $f(x) = -g(x)$, então para cada valor de x , as funções f e g assumem valores simétricos. Ou seja, para cada ponto $P(m, n)$ pertencente ao gráfico da função g existe um ponto $Q(m, -n)$ pertencente ao gráfico da função f . Ocorre que os pontos $P(m, n)$ e $Q(m, -n)$ são simétricos em relação ao eixo das abscissas. Sendo assim, o gráfico da função $f(x) = -2^x$ é simétrico ao gráfico da função $g(x) = 2^x$ em relação ao eixo \overrightarrow{Ox} .

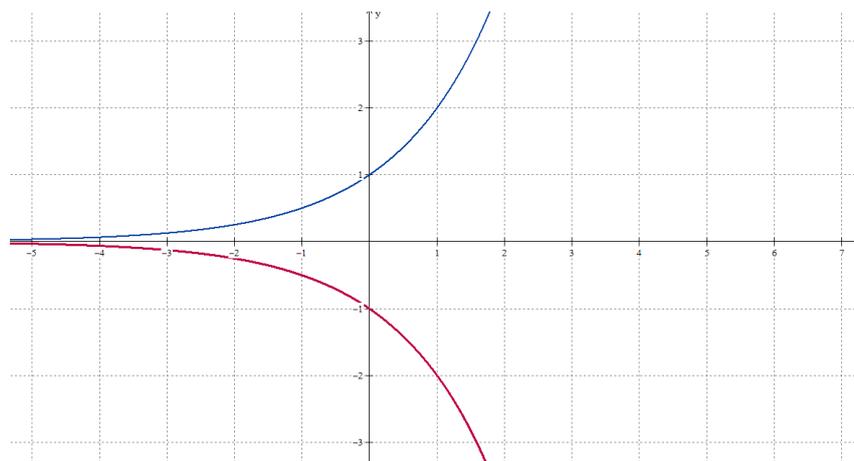


Figura 2.7: Gráficos de $g(x) = 2^x$ e $f(x) = -2^x$

Como $h(x) = g(-x)$, então cada imagem obtida na função g para um certo valor do domínio, também será obtida na função h com o valor do domínio oposto. Ou seja, para cada ponto $P(m, n)$ pertencente ao gráfico da função g , existe um ponto $Q(-m, n)$ pertencente ao gráfico da função h . Ocorre que os pontos $P(m, n)$ e $Q(-m, n)$ são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Sendo assim, o gráfico da função $h(x) = 2^{-x}$ é simétrico ao gráfico da função $g(x) = 2^x$ em relação ao eixo \overrightarrow{Oy} .

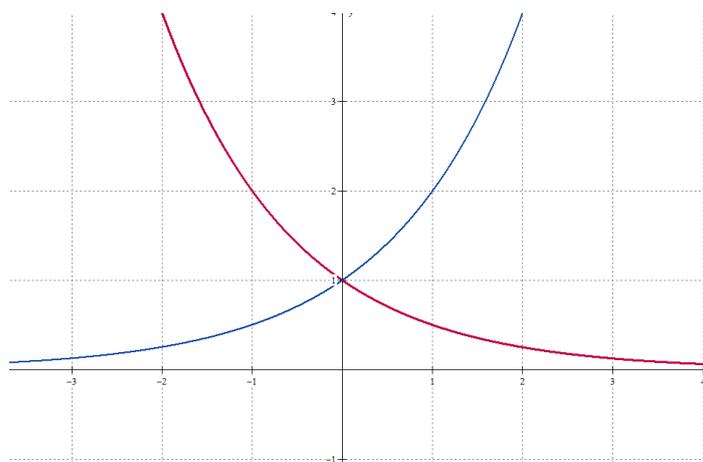


Figura 2.8: Gráficos de $g(x) = 2^x$ e $h(x) = 2^{-x}$

De uma forma geral, se sabemos o gráfico de uma função $y = g(x)$, podemos obter o gráfico de uma outra função do seguinte modo:

- $y = -g(x)$ fazendo uma reflexão do gráfico de $g(x)$ em torno do eixo \overrightarrow{Ox} .
- $y = g(-x)$ fazendo uma reflexão do gráfico de $g(x)$ em torno do eixo \overrightarrow{Oy} .

Observação: A função seno é uma função ímpar, ou seja, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$. Sendo assim, as funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} $f(x) = -\text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{sen}(-x)$ são iguais. Isso pode ser observado a partir do gráfico da função $g(x) = \text{sen}(x)$ que é:

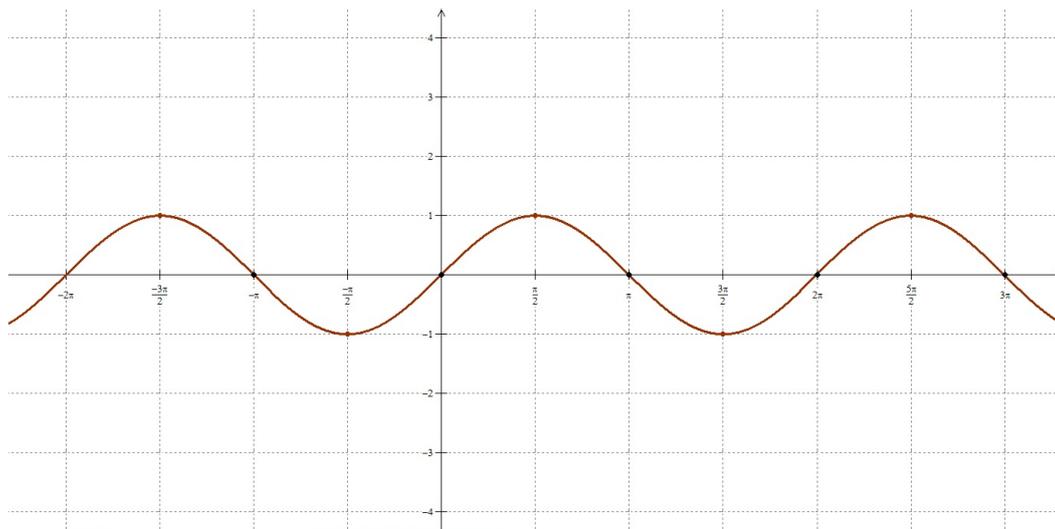


Figura 2.9: Gráfico de $g(x) = \text{sen}(x)$

Se fizermos uma reflexão em torno do eixo \vec{Ox} ou em torno do eixo \vec{Oy} , obteremos o mesmo resultado:

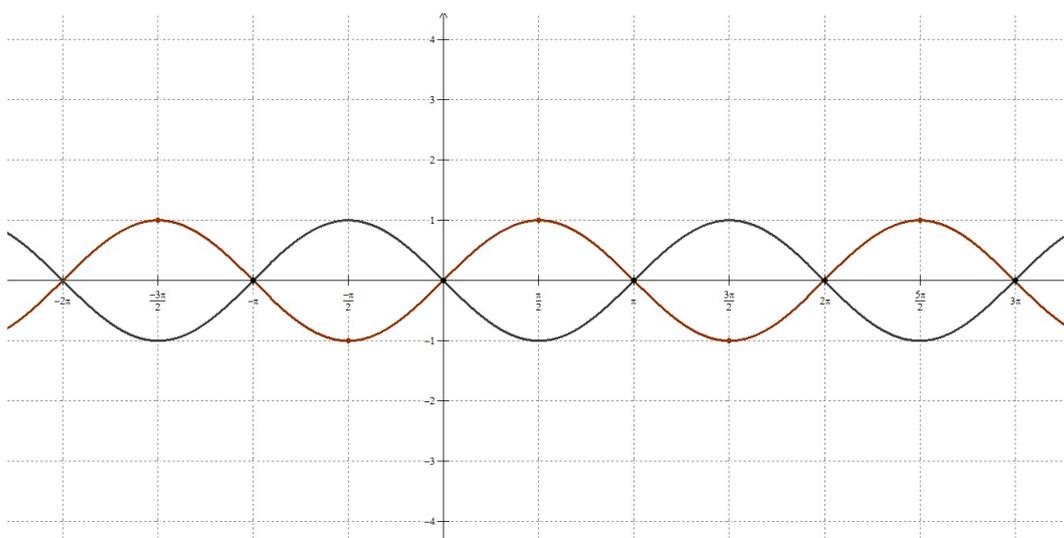


Figura 2.10: Gráficos de $g(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = -\text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{sen}(-x)$

Exemplo 4:

Qual o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela sentença $f(x) = 2 \cdot \text{sen}(x)$?
Consideremos a tabela de valores:

x	$\text{sen}(x)$	$f(x) = 2 \cdot \text{sen}(x)$
0	0	0
$\pi/2$	1	2
π	0	0
$3\pi/2$	-1	-2
2π	0	0

A partir da tabela acima, podemos construir o gráfico da referida função que representamos abaixo:

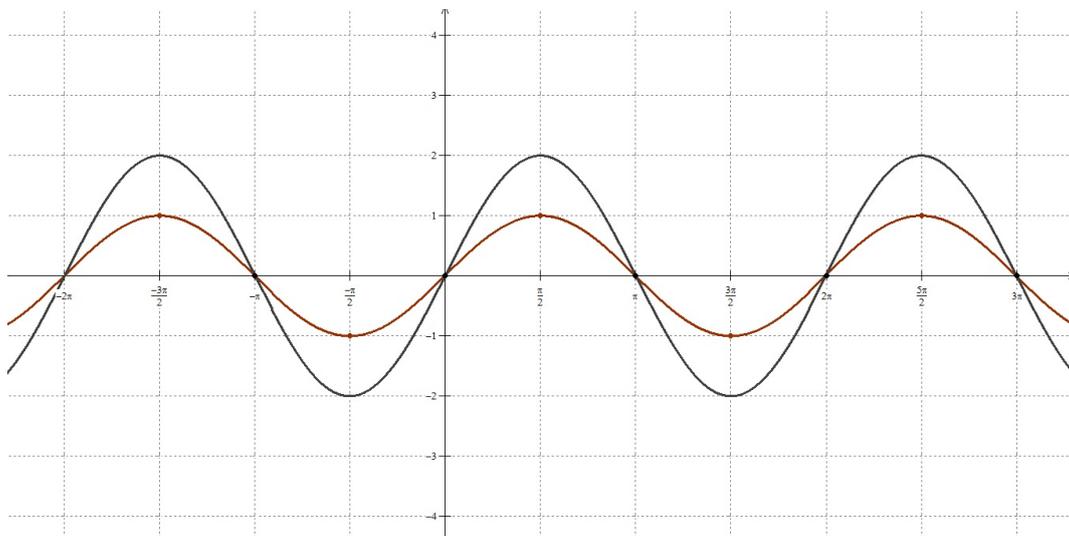


Figura 2.11: Gráficos de $g(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = 2 \cdot \text{sen}(x)$

Vamos definir como amplitude da função f a metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo assumidos pela função.

Podemos observar que, comparado com o gráfico da função $g(x) = \text{sen}(x)$, o gráfico da função $f(x) = 2 \cdot \text{sen}(x)$ dobrou a **amplitude**. Observe ainda, que os valores de x para os quais f e g atingem seus máximos e mínimos são, respectivamente, os mesmos. Naturalmente, se quiséssemos o gráfico da função $h(x) = -2 \cdot \text{sen}(x)$, este poderia ser obtido a partir do gráfico de f por uma reflexão em torno do eixo \vec{Ox} .

De uma forma geral, a função $f(x) = b \cdot \text{sen}(x)$, com $b > 0$, comparada à função $g(x) = \text{sen}(x)$, tem apenas sua amplitude multiplicada por b , sem alterar as raízes da função e também os respectivos valores de x para os quais a função atinge seus valores máximos e mínimos. No caso em que $b < 0$, podemos inicialmente considerar a multiplicação por $|b|$ e, em seguida, realizar uma reflexão em relação ao eixo \vec{Ox} .

Exemplo 5:

Qual o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela sentença $f(x) = \text{sen}(2x)$?

Considere a tabela:

x	$2x$	$f(x) = \text{sen}(2x)$
0	0	0
$\pi/4$	$\pi/2$	1
$\pi/2$	π	0
$3\pi/4$	$3\pi/2$	-1
π	2π	0

É importante salientar que, na tabela acima, a segunda coluna foi preenchida antes da primeira.

A partir da tabela podemos construir o gráfico da função:

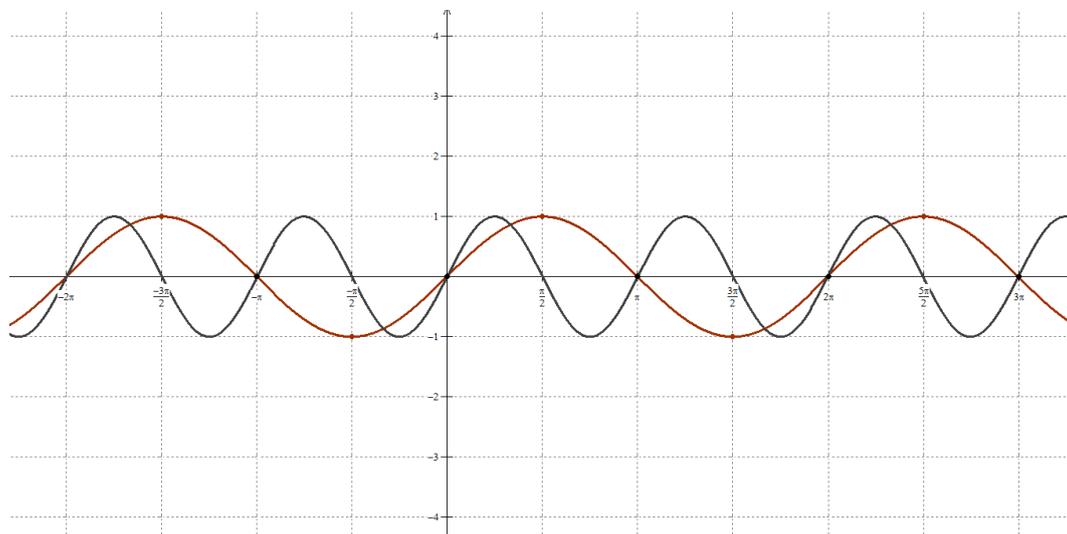


Figura 2.12: Gráficos de $g(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = \text{sen}(2x)$

Podemos observar que, comparando ao gráfico da função $g(x) = \text{sen}(x)$, o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(2x)$ teve seu período reduzido à metade. Naturalmente, se quiséssemos o gráfico da função $h(x) = \text{sen}(-2x)$, este poderia ser obtido do gráfico da função f por uma reflexão em torno do eixo \overrightarrow{Oy} .

De uma forma geral, a função $f(x) = \text{sen}(\omega \cdot x)$ tem período $\frac{2\pi}{|\omega|}$, pois:

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{|\omega|}\right) &= \text{sen}\left(\omega \cdot \left(x + \frac{2\pi}{|\omega|}\right)\right) = \\ &= \text{sen}\left(\omega \cdot x \pm 2\pi\right) = \text{sen}\left(\omega \cdot x\right) = f(x) \end{aligned}$$

Exemplo 6:

Qual é o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela sentença $f(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen}(x/2 + \pi/4)$?

Considere a tabela:

x	$x/2 + \pi/4$	$\text{sen}(x/2 + \pi/4)$	$f(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen}(x/2 + \pi/4)$
$-\pi/2$	0	0	5
$\pi/2$	$\pi/2$	1	2
$3\pi/2$	π	0	5
$5\pi/2$	$3\pi/2$	-1	8
$7\pi/2$	2π	0	5

É importante salientar que, na tabela acima, a segunda coluna foi preenchida antes da primeira. Os valores de x da primeira coluna foram obtidos igualando a expressão $x/2 + \pi/4$,

respectivamente, aos valores $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ e 2π .

A partir da tabela, podemos construir o gráfico da função:

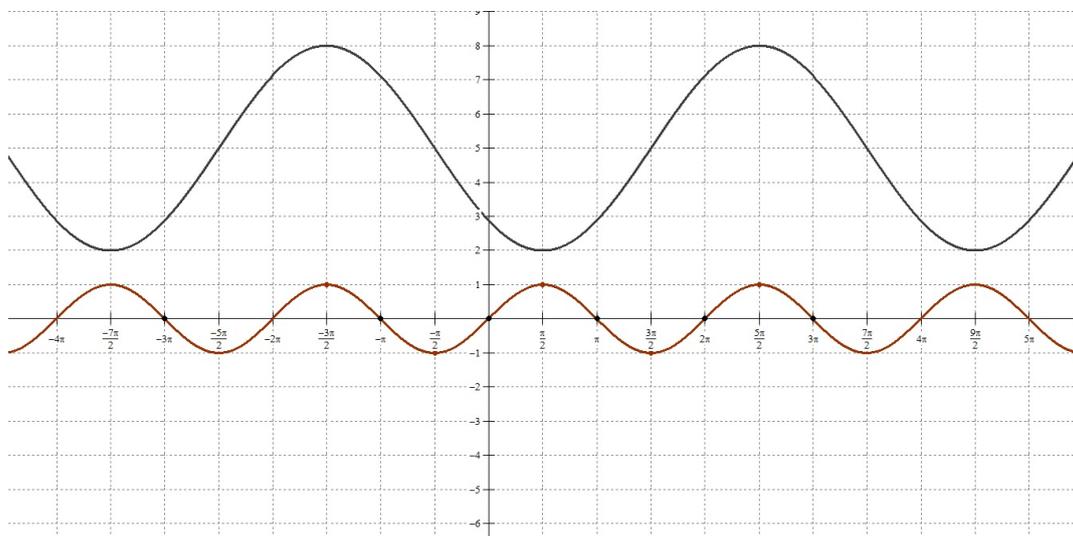


Figura 2.13: Gráficos de $g(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen}(x/2 + \pi/4)$

Podemos observar que nessa função $f(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen}(x/2 + \pi/4)$ o valor máximo é 8 e o valor mínimo é 2, a amplitude é 3 e o período é 4π .

De uma forma geral, a função $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(\omega x + \phi)$, com a e $\phi \in \mathbb{R}$ e b e $\omega \in \mathbb{R}^*$ tem valor máximo $a + |b|$, valor mínimo $a - |b|$, amplitude igual a $|b|$ e período $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

$$f(x) = a + b \cdot \text{sen}(\omega x + \phi), \text{ com } a \text{ e } \phi \in \mathbb{R} \text{ e } b \text{ e } \omega \in \mathbb{R}^*$$

1. Valor máximo $a + |b|$.
2. Valor mínimo $a - |b|$
3. Amplitude $|b|$
4. Período $\frac{2\pi}{|\omega|}$

Exemplo 7:

Escreva uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(\omega x + \phi)$, com a e $\phi \in \mathbb{R}$ e b e $\omega \in \mathbb{R}^*$ que tenha como conjunto imagem o intervalo $[-3, 7]$ e período 12.

Resolução:

Para que a imagem seja $[-3, 7]$, devemos ter $a - |b| = -3$ e $a + |b| = 7$. Resolvendo os sistema de equações, obtemos $a = 2$ e $|b| = 5$.

Para que o período seja 12, devemos ter $\frac{2\pi}{|\omega|} = 12$, o que nos leva a $|\omega| = \pi/6$. A constante ϕ pode assumir qualquer valor real. Sendo assim, podemos tomar $a = 2, b = 5$,

$\omega = \pi/6$ e $\phi = 0$. Portanto, uma função que tem imagem $[-3, 7]$ e período 12 é:

$$f(x) = 2 + 5 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi x}{6} \right)$$

Exemplo 8:

Considere que um médico, observando a pressão sanguínea de um paciente, percebe que ela oscila ao longo do tempo de forma periódica com período 0,6 segundo, tendo valor máximo 130 mmHg, valor mínimo 70 mmHg. Modele uma função $P = f(t)$ onde P é a pressão, em mmHg, e t é o tempo, em segundos, que tenha as características observadas pelo médico no paciente.

Resolução:

Podemos, para isso, usar uma função da forma $P(t) = a + b \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$. Sendo assim, temos:

$$\begin{cases} a + |b| = 130 \\ a - |b| = 70 \end{cases}$$

Segue, daí que $a = 100$ e $|b| = 30$

Temos ainda que $\frac{2\pi}{|\omega|} = 0,6 \Rightarrow |\omega| = \frac{10\pi}{3}$

Logo, uma função que tem as características desejadas é:

$$P(t) = 100 + 30 \cdot \text{sen} \left(\frac{10\pi t}{3} \right)$$

2.6 Modelando uma Função para Determinação da Declinação do Sol

A declinação do Sol é o ângulo formado entre o segmento que liga o centro da Terra ao centro do Sol e o plano do Equador terrestre. Quando o referido segmento está ao Norte do Equador considera-se a declinação positiva e quando está ao Sul do Equador considera-se a declinação negativa. A declinação do Sol coincide com a latitude do ponto onde os raios solares incidem perpendicularmente na superfície terrestre.



Figura 2.14: Declinação do Sol;

Fonte: disponível em <http://www.ancruzeiros.pt/ancdrp/declinação-do-sol>. – Acesso em 12/12/2015

O ângulo entre o plano do Equador e o plano da eclíptica (órbita da Terra em torno do Sol) é de cerca de $23^{\circ}27'$. Isso faz com que a declinação do Sol oscile de $-23^{\circ}27'$ a $+23^{\circ}27'$.

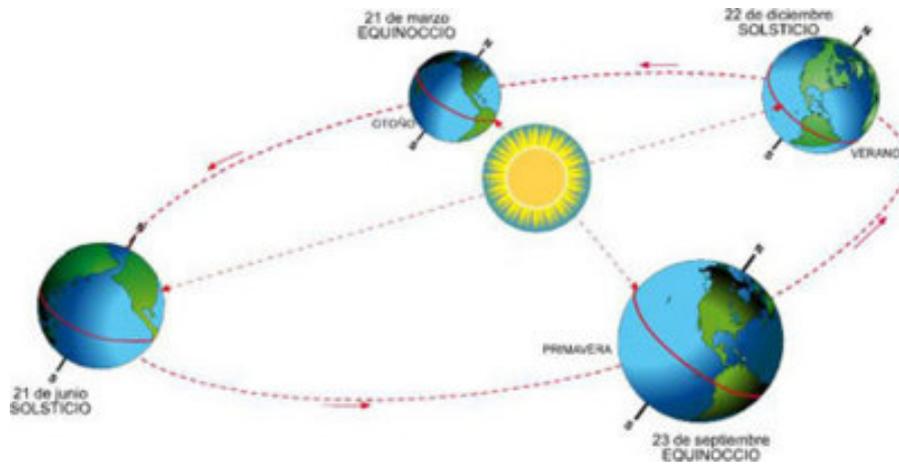


Figura 2.15: Eclíptica com datas de Equinócios e Solstícios

Fonte: disponível em

<http://blogdodgeohistoria.blogspot.com.br/2011/03/solsticio-e-equinocio.html>, acesso em 12/12/2015

Os dois pontos onde a declinação do Sol é zero são chamados de equinócios e os dois pontos onde a declinação do Sol atinge seu máximo valor absoluto são chamados de **solstícios**. Os paralelos terrestres correspondentes à latitude onde a declinação é máxima em valor absoluto são chamados de **Trópico de Câncer** (ao Norte) e **Trópico de Capricórnio** (ao Sul).



Figura 2.16: Trópicos de Câncer e Capricórnio

Fonte: Disponível em <http://www.prof2000.pt/users/elisabethm/geo7/loabsoluta.htm>, acesso em 12/12/2015



Figura 2.17: Solstício de Dezembro

Fonte: disponível em <http://www.ancruzeiros.pt/ancdrp/declinação-do-sol>, acesso em 12/12/2015

O estudo da declinação do Sol ao longo do ano tem características que permitem que ele seja modelado com boa aproximação por uma função da forma $f(d) = a + b \cdot \text{sen}(\omega \cdot d + \phi)$, onde d é o tempo em dias, sendo $d = 0$ o início do ano. Sabendo disso, a questão que se coloca agora é: Como podemos determinar estes parâmetros a, b, ω e ϕ ?

Bom, considerando que a declinação varia de, aproximadamente, $-23,5^\circ$ a $+23,5^\circ$, temos que:

$$\begin{cases} a + |b| = 23,5^\circ \\ a - |b| = -23,5^\circ \end{cases}$$

Portanto, segue que $a = 0$ e $|b| = 23,5^\circ$.

Sendo assim, já temos que $a = 0$ e um possível valor de b seria $23,5^\circ$.

Ora, sabemos também, que essa função tem como período o Ano Solar que vamos tomar como, aproximadamente, 365 dias.

Sendo assim, temos que:

$$\frac{2\pi}{|\omega|} = 365 \Rightarrow |\omega| = \frac{2\pi}{365}.$$

Logo, um possível valor para ω seria $\frac{2\pi}{365}$.

Portanto, a função $g(d) = 23,5 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot d}{365}\right)$ já tem aproximadamente a amplitude e o período que desejamos. Ocorre que, nessa função, $g(0) = 0$, o que tornaria o início do ano um equinócio e não é isso que desejamos. Vejamos então o gráfico da função g :

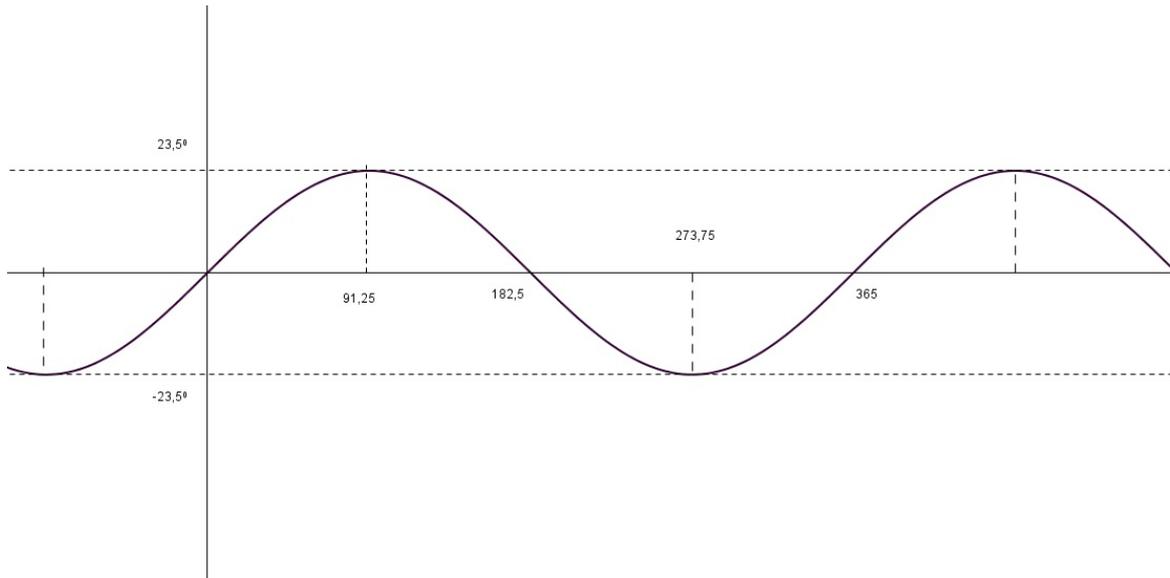


Figura 2.18: Gráfico da função $g(d) = 23,5 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot d}{365} \right)$ ao longo de um ano

Ocorre que a função que desejamos deve atingir os equinócios em março por volta do septuagésimo nono dia do ano ($d \cong 79$) e em setembro e deve atingir $+23,5^\circ$ em junho e $-23,5^\circ$ em dezembro. Logo, seu gráfico deve ser:

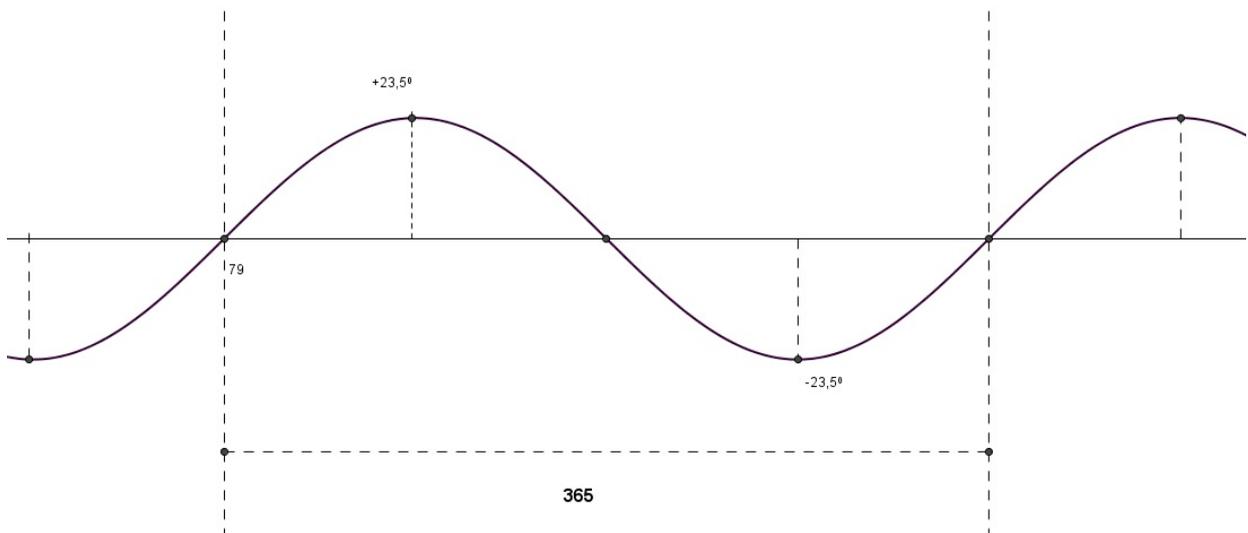


Figura 2.19: Gráfico da função $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \right)$ ao longo de um ano

Sendo assim, a função que desejamos é a função g deslocada 79 unidades para a direita. Portanto uma função que determina aproximadamente a declinação do Sol ao longo de um ano é $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \right)$, onde d representa o tempo em dias desde o início do ano.

Essa função $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \right)$ determina a declinação do Sol aproximada em um ano qualquer. Vejamos o gráfico dessa função no intervalo $[-50, 400]$:

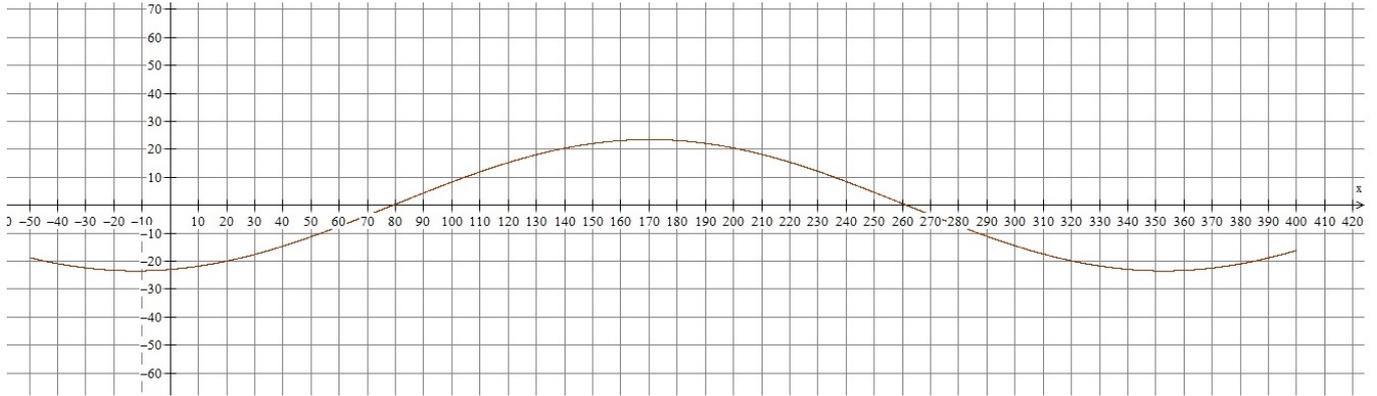


Figura 2.20: Gráfico da função $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \right)$

Mas se quisermos uma função que determine com maior precisão a declinação do Sol ao longo do tempo a partir de um $d_0 = 0$, poderíamos usar $23,4378^\circ$ no lugar de $23,5^\circ$; $365,2422$ no lugar de 365 e tomando $d_0 = 0$ como início do ano 2016 usaríamos $79,1875$ no lugar de 79 dado que o equinócio de março ocorrerá exatamente no dia 20 de março às 04:30 h (UTC). Sendo assim, ficaríamos com a função:

$$h(d) = 23,4378 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79,1875)}{365,2422} \right)$$

Vejamos o gráfico de h no intervalo $[-50, 1100]$:

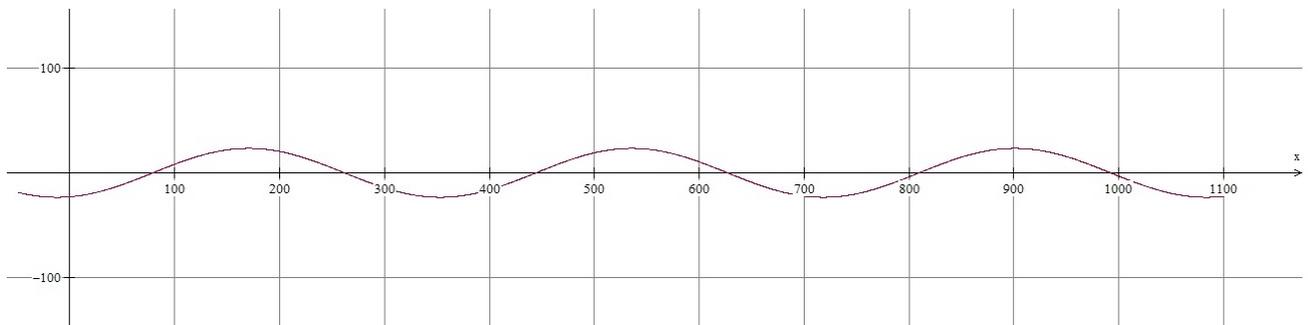


Figura 2.21: Gráfico da função $h(d) = 23,4378 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79,1875)}{365,2422} \right)$

Vejamos agora os gráficos de f e h sobrepostos no intervalo $[-50, 400]$:

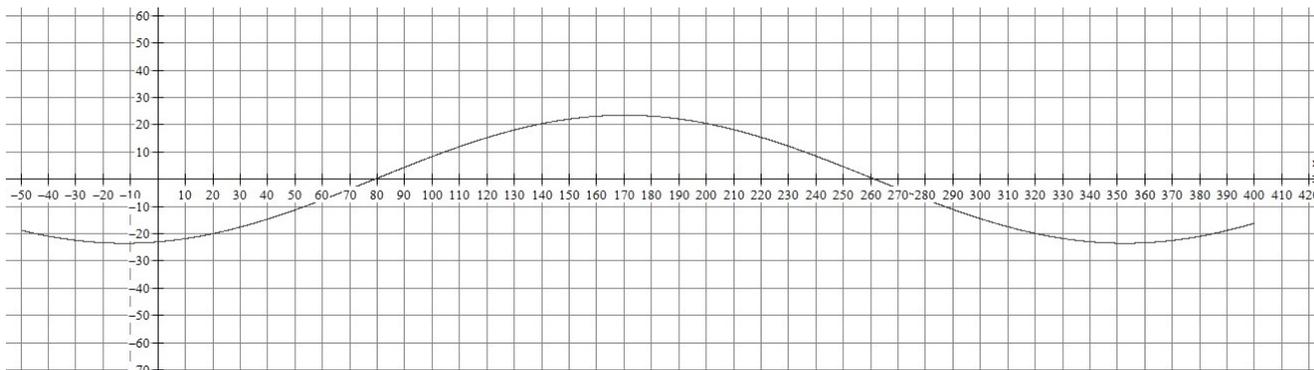


Figura 2.22: Gráficos das funções $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \right)$ e $h(d) = 23,4378 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79,1875)}{365,2422} \right)$

No intervalo $[-50, 400]$ é imperceptível a diferença entre os gráficos de f e h . Vejamos agora os gráficos de f e h no intervalo $[36500, 37300]$:

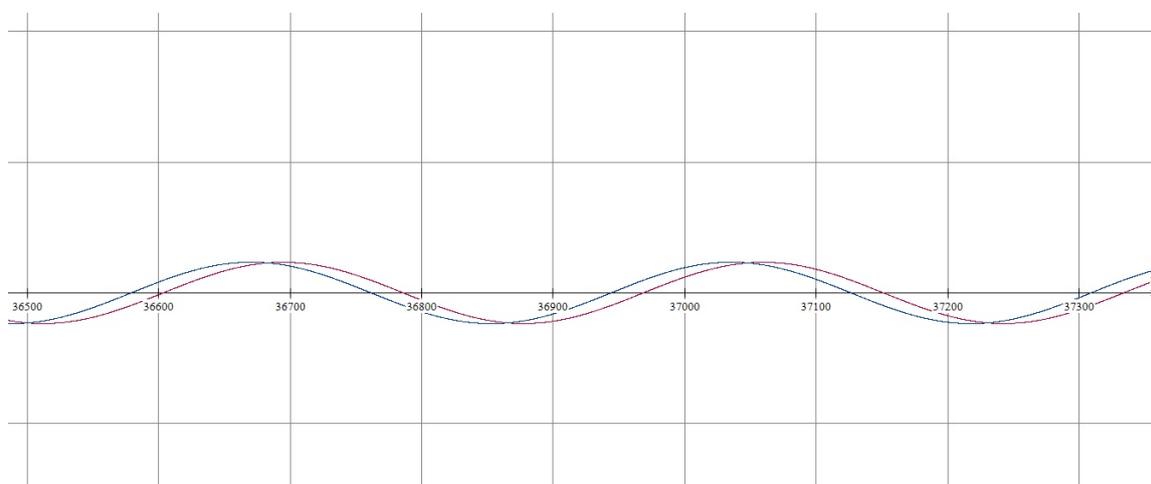


Figura 2.23: Gráficos das funções $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \right)$ e $h(d) = 23,4378 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot (d-79,1875)}{365,2422} \right)$ no intervalo $[36500, 37500]$

Podemos observar que, passados 100 anos começa a existir uma diferença significativa entre os gráficos. Com isso, queremos mostrar que a função f nos dá uma boa aproximação da declinação do Sol para cada ano contando do início dele, ou seja, tomando $d_0 = 0$ como sendo o início daquele ano.

Mas para uma análise de um período maior de tempo seria mais adequada uma função como a h .

2.6.1 Sugestão de Problemas para debate com os Alunos:

Este primeiro para ser resolvido sem o uso da calculadora:

Problema 1: Sabendo que a função $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen} \left(\frac{360 \cdot (d-80)}{360} \right)$ nos dá a latitude, em graus, do ponto da Terra onde o Sol incide perpendicularmente na superfície do planeta, onde d representa o d -ésimo dia do ano. Sendo a latitude Norte considerada positiva e sabendo que a cidade

de Serrinha tem latitude 11,75 graus Sul, determine, no verão de um ano não bissexto, qual dos dias abaixo mais se aproxima do momento em que o Sol incide perpendicularmente em Serrinha.

- A) 19 de fevereiro
- B) 01 de março
- C) 10 de março
- D) 12 de fevereiro
- E) 03 de fevereiro

Resolução:

Fazendo $f(d) = -11,75$, temos:

$$23,5 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365}\right) = -11,75$$

$$\sin\left(\frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365}\right) = -0,5$$

$$\frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365} = -30^\circ$$

$$d \cong 50$$

$$\text{ou } \frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365} = 210^\circ$$

$$d \cong 293$$

50º dia do ano corresponde a **19 de fevereiro**.

293º dia do ano corresponde a **20 de outubro**.

Sendo assim, de maneira aproximada, o Sol incide perpendicularmente em Serrinha no verão no dia 19 de fevereiro e na primavera no dia 20 de outubro.

Logo, a resposta correta é a alternativa A.

Este segundo problema para ser resolvido com o auxílio da calculadora científica:

Problema 2: Usando a mesma função do exercício anterior, determine, em um ano não bissexto, em quais dias do ano o Sol incide perpendicularmente em Salvador, que tem latitude 13 graus Sul.

Fazendo $f(d) = -13$, temos:

$$23,5 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365}\right) = -13$$

$$\sin\left(\frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365}\right) = -0,55319$$

$$\frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365} = \arcsen(-0,55319) \text{ ou } \frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365} = 180 - [\arcsen(-0,55319)]$$

$$\frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365} = -33,59^\circ$$

$$d \cong 46$$

$$\text{ou } \frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365} = 213,59^\circ$$

$$d \cong 297$$

46º dia do ano corresponde a **15 de fevereiro**.

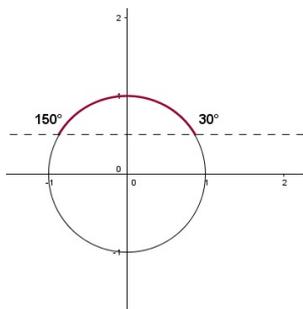
297º dia do ano corresponde a **24 de outubro**.

Observação: Uma sugestão de atividade para se fazer com os alunos do Ensino Médio seria repetir o problema acima para determinar os dias do ano em que o Sol incide perpendicularmente na cidade onde eles estão.

Problema 3: Ainda usando a função dada no Problema 1, determine o período do ano em que o Sol apresenta declinação ao norte da cidade de Bissau na Guiné-Bissau, que está localizada numa latitude de $11,75^\circ$ N.

Resolução:

Para que a declinação do Sol esteja ao norte de Bissau, devemos ter $f(d) > 11,75$. Ou seja:
 $23,5 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365}\right) > 11,75$



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365}\right) &> \frac{1}{2} \\ 30^\circ &< \frac{360^\circ \cdot (d-80)}{365} < 150^\circ \\ 30,416 &< d - 80 < 152,08 \\ 110,416 &< d < 232,08 \\ 111 &\leq d \leq 232 \\ 21 \text{ de abril} &\leq d \leq 20 \text{ de agosto} \end{aligned}$$

Portanto, no período de 21 de abril a 20 de agosto a declinação do Sol estará ao norte de Bissau.

2.7 A Senóide e as Estações do Ano

Neste tópico pretendemos mostrar como podemos usar a senóide para ter uma rápida interpretação das estações do ano. Considere a senóide abaixo representando a declinação do Sol. Considerando, porém, o Sul como positivo e o Norte como negativo para que tenhamos um ponto de vista mais adequado, já que nos encontramos no Hemisfério Sul.

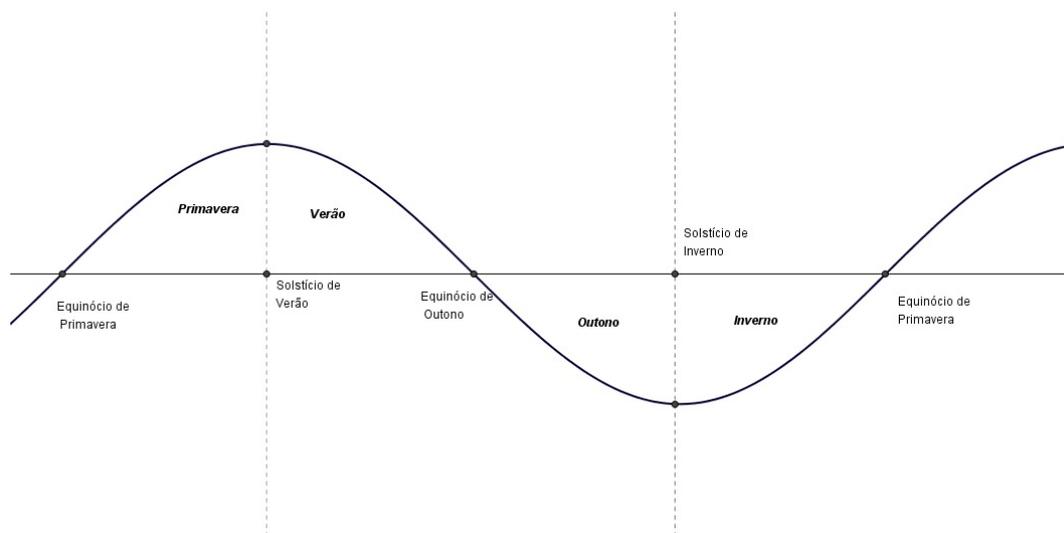


Figura 2.24: Estações do Ano no Hemisfério Sul

A partir da senóide acima podemos ter, por exemplo, desmistificar a falsa ideia de que o Verão corresponde aos 90 dias mais quentes do ano. Na verdade, apenas do ponto de vista do calor que recebemos do Sol, *os 90 dias mais quentes do ano são os 45 últimos dias da Primavera seguidos dos primeiros 45 dias do Verão*. Também podemos perceber na senóide que Primavera e Verão são as estações mais quentes e que Outono e Inverno são as estações mais frias.

São dois os principais fatores que fazem com que a declinação do sol influencie na quantidade de calor que recebemos deste astro. O primeiro é que quanto maior o valor absoluto da diferença entre a declinação e a latitude do lugar, maior é a área que um mesmo feixe de raios solares se espalha pela superfície terrestre.

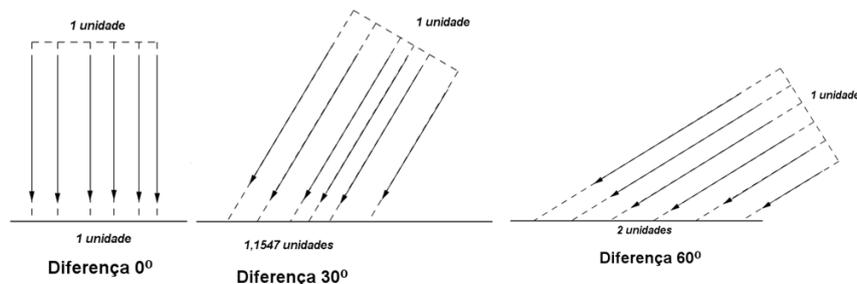


Figura 2.25: Diferenças entre Inclinação do Sol e Latitude local

Por exemplo, com uma diferença de 30° entre a inclinação do Sol e a latitude do lugar, a

mesma quantidade de raios solares se espalha por uma área cerca de 15 por cento maior.

O segundo fator é que quanto maior o valor absoluto da diferença entre a declinação do Sol e a latitude do lugar, maior é o caminho que o raio solar percorre dentro da atmosfera terrestre. E, ao longo desse caminho, parte da energia é dissipada pela atmosfera.

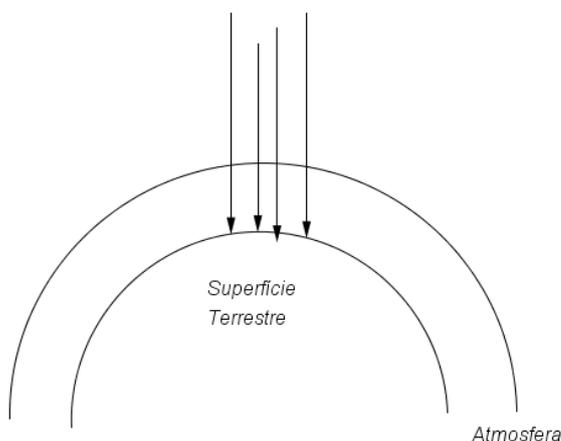


Figura 2.26: Incidência de raios solares na superfície da Terra

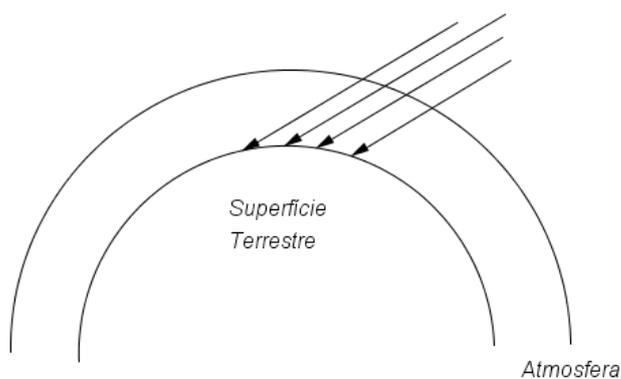


Figura 2.27: Incidência de raios solares na superfície da Terra

Cada estação do ano tem características próprias que ficam mais evidentes nas latitudes mais altas e que podem, facilmente, ser percebidas na estação.

Primavera: Durante a Primavera o calor é crescente e, por vir logo após o inverno, que é uma estação fria, está associada à ideia de florescimento, renascimento. Em lugares onde o frio do inverno é mais rigoroso, o calor crescente da Primavera faz a vida ressurgir. Os dias finais da Primavera (início de dezembro no Hemisfério Sul) estão entre os dias mais quentes do ano.

Verão: Está muito associado à ideia de estação quente porque já começa no ápice do calor. Na verdade, apenas do ponto de vista do calor recebido do Sol, é tão quente quanto à Primavera. Porém é uma estação quente após outra estação quente, ou seja, ele agrega também o calor acumulado na Primavera. Ao longo do Verão o calor é decrescente e os dias finais do Verão já não estão entre os mais quentes do ano.

Outono: No Outono, a temperatura começa a esfriar e como é a primeira das estações frias, está associada à ideia de morte, do ocaso. Os dias finais do Outono estão entre os mais frios do ano.

Inverno: Está muito associado à ideia de estação fria pois já começa no período mais frio do ano. Como é uma estação fria após outra estação fria, ela já pega carona no frio do Outono. Os dias finais do Inverno já não são tão frios como os primeiros.

É claro que existem muitos outros fatores e características que definem as estações do ano e que são tratadas nas aulas de Geografia. O que pretendemos aqui é mostrar que a senóide pode e deve ser usada, inclusive pelo professor de Geografia para auxiliar o aluno na interpretação de algumas características das estações do ano.

Capítulo 3

Sol a Pino, Sombra Mínima e Declinação do Sol

3.1 *Zênite e o Sol a Pino*

Zênite, em astronomia, é o termo que representa o ponto onde a semi-reta \overrightarrow{OP} que parte do centro da Terra (O) e passa pela cabeça de um observador (P) intercepta a esfera celeste.

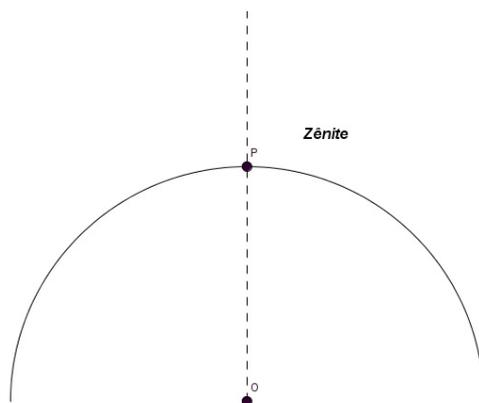


Figura 3.1: Zênite

Zênite Solar e o Sol a Pino

É o ponto da Terra onde o Zênite de um observador está no centro da superfície do Sol. O zênite solar coincide com o ponto onde os raios solares incidem perpendicularmente sobre a superfície da Terra e este ponto localiza-se no paralelo correspondente à latitude da declinação do Sol. No zênite solar dizemos que o Sol está a pino. Portanto, Sol a pino é um evento muito raro que, nas latitudes inter tropicais, ocorre duas vezes por ano e nas latitudes acima dos trópicos não ocorre nunca.

Cidades como Nova Iorque e Buenos Aires nunca têm o Sol a pino. Na cidade do Salvador o Sol a pino ocorre aproximadamente nos dias **15 de fevereiro e 24 de outubro**.

É muito comum encontrarmos pessoas que acreditam que o Sol fica a pino todos os dias ao meio-dia. O que, de fato, não ocorre em nenhum ponto da Terra.

Um experimento interessante para se fazer com os alunos para detectar o Sol a pino (ainda que de maneira aproximada) é usar um tubo cilíndrico de material opaco de comprimento consideravelmente maior ¹ do que o diâmetro que seja pendurado verticalmente, conforme a figura abaixo:

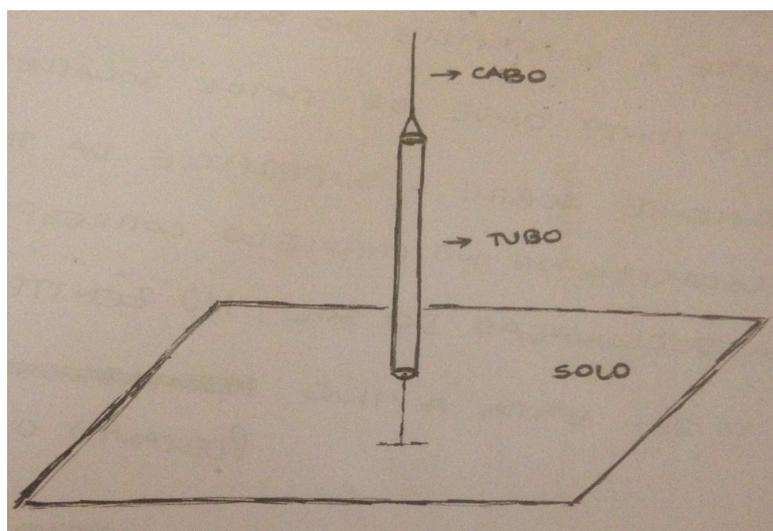


Figura 3.2: Sugestão de Experimento

No dia em que ao “meio-dia”² os raios solares atravessarem o interior do tubo projetando a luz do sol diretamente no solo teríamos ali, naquele dia, o Sol aproximadamente a pino. O experimento é ainda mais interessante para mostrar que, na imensa maioria dos dias, o Sol não fica a pino.

A tabela a seguir indica as datas nas quais ocorre o zênite solar (Sol a Pino) em algumas latitudes.

¹Quanto maior a razão entre o comprimento do tubo e o diâmetro interno maior será a precisão da detecção.

²O meio dia ao qual nos referimos não é o meio-dia do relógio (12:00h) e sim o momento exato em que o sol incide perpendicularmente na nossa longitude.

Latitude Sul	Primavera	Verão	Diferença de Dias
$23^{\circ}26'$ <i>Trop.Capr.</i>	22 Dez	22 Dez	0
$22,5^{\circ}$	6 Dez	8 Jan	33
21°	26 Nov	18 Jan	53
20°	22 Nov	22 Jan	61
$19,5^{\circ}$	19 Nov	25 Jan	67
18°	13 Nov	31 Jan	79
$16,5^{\circ}$	8 Nov	5 Fev	89
15°	3 Nov	10 Fev	99
$13,5^{\circ}$	29 Out	15 Fev	109
12°	24 Out	20 Fev	119
10°	19 Out	24 Fev	128
9°	16 Out	28 Fev	135
7°	11 Out	4 Marc	144
6°	8 Out	6 Marc	149
5°	6 Out	8 Marc	153
$3,5^{\circ}$	2 Out	12 Marc	161
$2,5^{\circ}$	29 Set	15 Mar	167
$1,5^{\circ}$	27 Set	17 Marc	171
1°	25 Set	19 Marc	175
0° <i>Equador</i>	22 Set	21 Marc	180

Tabela 3.1: Sol a pino em algumas Latitudes (Sul)

Fonte: disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Zenite>, acesso em 10/09/2015

Latitude Norte	Outono	Inverno	Diferença de Dias
$23^{\circ}26'$ Trop. Câncer	2o Jun	2o Jun	0
23°	1 Jul	8 Jun	23
$22^{\circ}15'$	10 Jul	30 Mai	41
20°	20 Jul	19 Mai	62
19°	25 Jul	15 Mai	71
$18^{\circ}15'$	31 Jul	9 Mai	83
17°	5 Ago	4 Mai	93
$15^{\circ}30'$	10 Ago	29 Abr	103
14°	15 Ago	24 Abr	113
12°	20 Ago	21 Abr	118
$10^{\circ}45'$	25 Ago	19 Abr	129
$9^{\circ}45'$	28 Ago	15 Abr	135
8°	2 Set	10 Abr	145
$6^{\circ}45'$	5 Set	7 Abr	151
$5^{\circ}45'$	8 Set	4 Abr	157
4°	12 Set	31 Marc	165
3°	13 Set	28 Marc	171
2°	18 Set	26 Marc	176
1°	20 Set	24 Marc	180
0° Equador	22 Set	21 Marc	185

Tabela 3.2: Sol a pino em algumas Latitudes (Norte)

Fonte: disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Zenite>, acesso em 10/09/2015

Podemos perceber uma relação entre as tabelas acima e a senóide que determina a declinação do Sol.

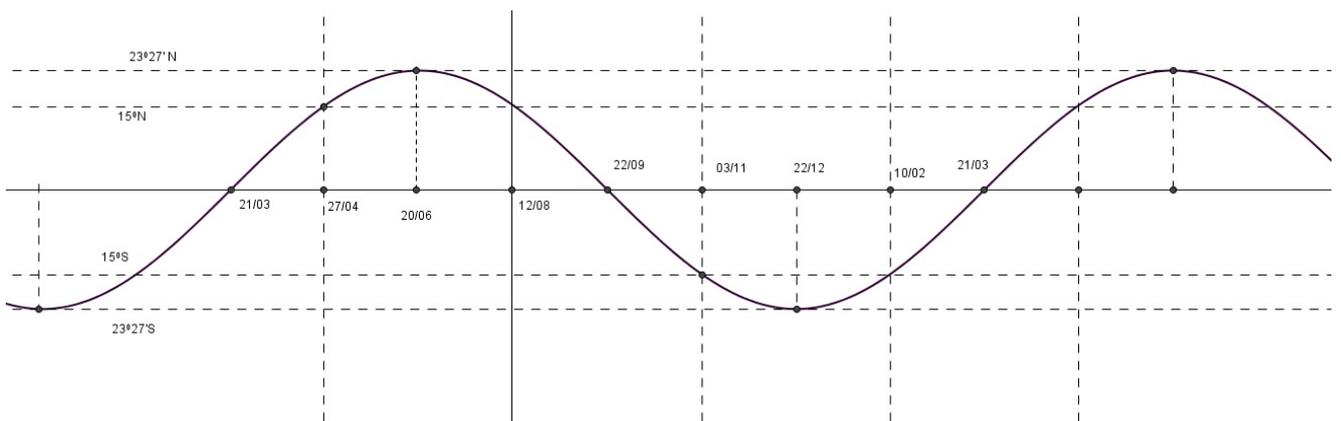


Figura 3.3: Declinação do Sol ao longo de um ano

3.2 Localizando-se a partir da Sombra de uma Vareta ao longo do dia

3.2.1 Determinação do Leste, Oeste, Norte e Sul

Se fincarmos uma vareta perpendicularmente num chão plano e horizontal e observarmos cuidadosamente a sombra desta vareta ao longo do dia, podemos, com boa precisão, determinar os quatro pontos cardeais (Leste, Oeste, Norte e Sul).

Logo, ao nascer do Sol, já temos uma boa ideia da localização do Norte e do Sul. O ponto onde o Sol nasce já nos mostra a localização aproximada do Leste. Olhando para o nascer do Sol (Leste), teremos o Sul à nossa direita, o Norte à esquerda e o Oeste atrás de nós. Mas, por conta da declinação do Sol, estas localizações ainda são aproximadas. **E como podemos fazer para determiná-las com maior precisão?** Bom, se acompanharmos o tamanho da sombra da vareta ao longo do dia e observarmos para onde aponta a sombra mínima do dia, esta sombra mínima nos dará a direção Norte/Sul. Isso ocorre porque a sombra mínima acontece no momento em que o zênite solar está na nossa longitude (Meio Dia Solar). Nesse momento então a sombra estará alinhada com o nosso meridiano e, portanto, determinará a direção Norte/Sul. Se no dia da observação o zênite solar estiver ao norte do observador a sombra mínima apontará para o Sul. Naturalmente, se o zênite solar estiver ao Sul do observador a sombra mínima apontará para o Norte. De toda forma, a sombra mínima determinará com boa precisão a direção Norte/Sul. Em seguida da determinação da direção Norte/Sul podemos então ajustar e dar mais precisão à determinação da direção Leste/Oeste.

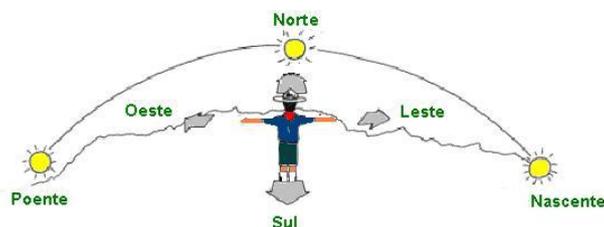


Figura 3.4: Localização dos Pontos Cardeais: Norte, Sul, Leste e Oeste

Fonte: disponível em

http://www.uff.br/geoden/index_arquivos/orientacao_eodem.htm — Acesso em 12/12/2015

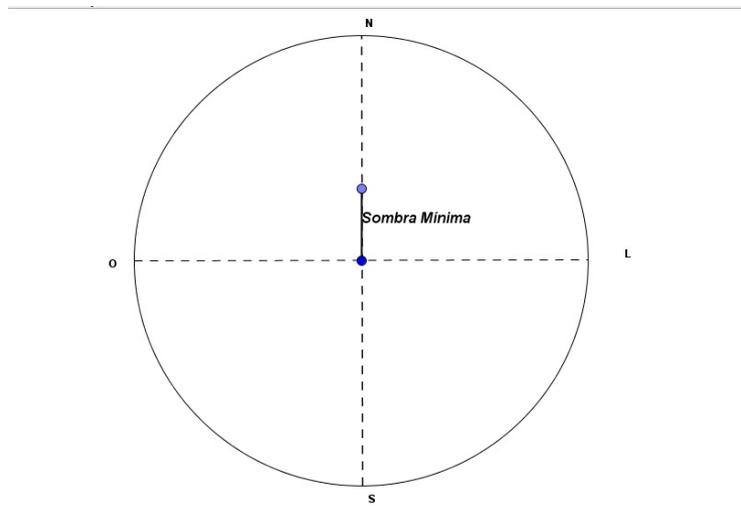


Figura 3.5: Sombra mínima em Janeiro em Salvador

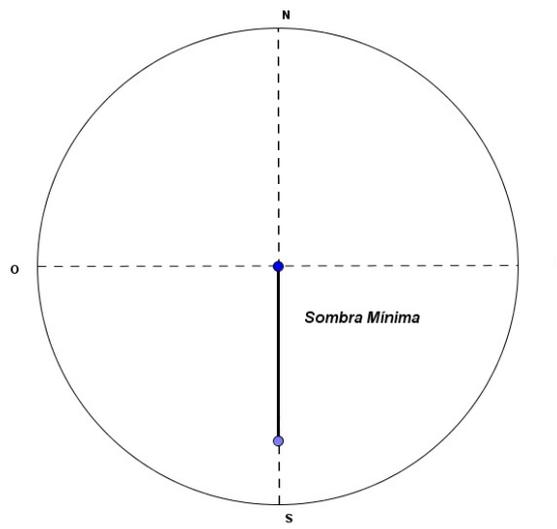


Figura 3.6: Sombra mínima em Julho em Salvador



Figura 3.7: Foto da Sombra mínima registrada em 09/08/2015 em Salvador

Na foto acima, registrada em 09 de agosto, a sombra mínima do dia apontava para o Sul e media cerca de 55 cm. O bastão tem 1 metro de altura



Figura 3.8: Foto da Sombra mínima registrada em 01/12/2015 em Salvador

Na foto acima, registrada em primeiro de dezembro, a sombra mínima apontava para o Norte e media cerca de 18 cm. É interessante observar que a sombra mínima registrada em agosto em Salvador é consideravelmente maior do que a registrada em dezembro. Isto se deve ao fato de que a diferença entre a declinação do Sol e a latitude de Salvador é maior em agosto do que em dezembro.

3.2.2 Cálculo da Latitude a partir da Sombra mínima e da Declinação do Sol

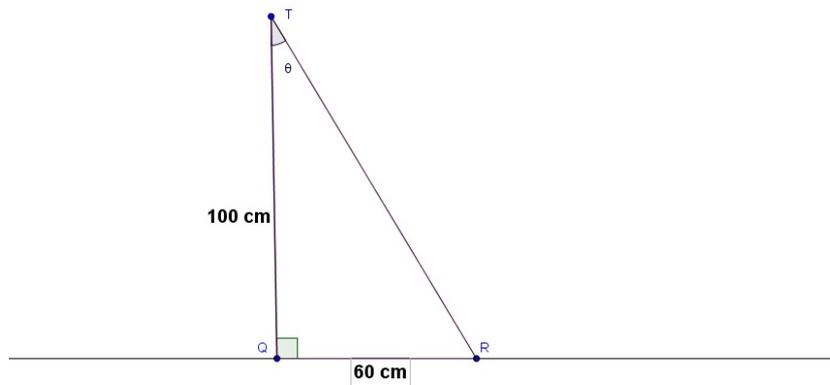
Vamos apresentar dois problemas que devem ser resolvidos fazendo uso de uma calculadora científica. Em um deles também usaremos, para determinar a declinação do Sol, a função $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365}\right)$ onde d representa o tempo em dias desde o início do ano.

Exemplo 1:

Considere que numa certa localidade uma vareta de comprimento 1 metro projeta, no dia 28 de agosto de 2015, uma sombra mínima apontando para o Sul com 60 cm de comprimento. Qual a latitude dessa localidade?

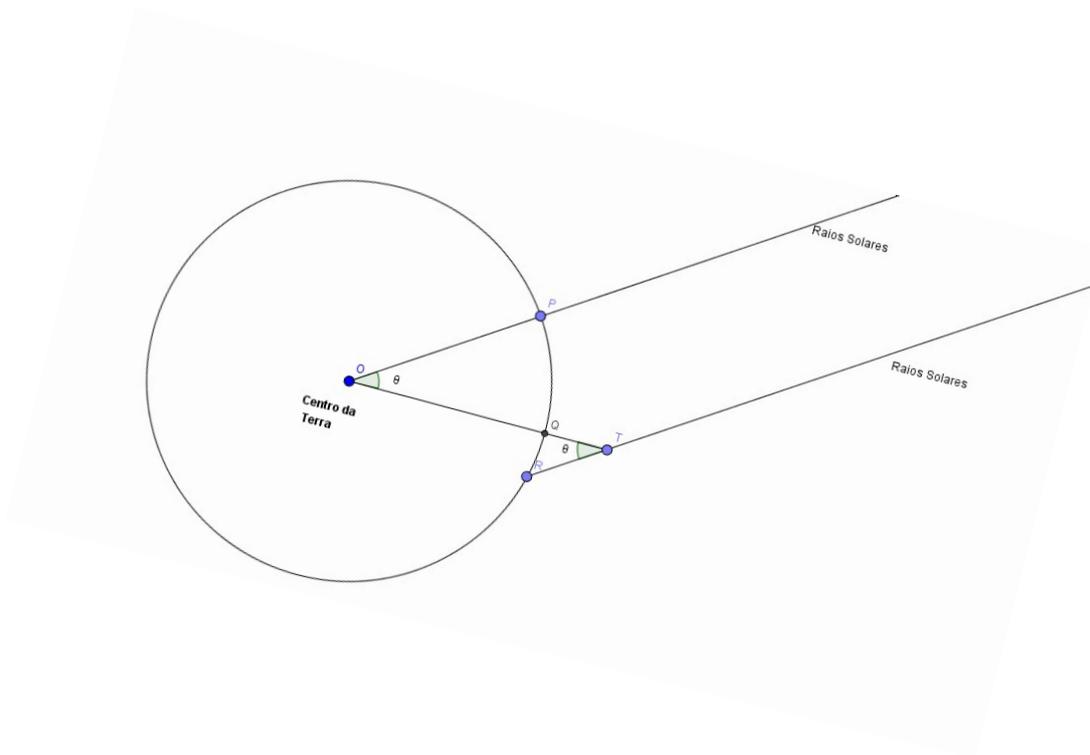
Resolução

Se a sombra mínima tem 60 cm, então temos que o ângulo θ que os raios solares formam com a vareta é $\arctan 0,6 \cong 31^\circ$.



$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{60}{100} = 0,6 \\ \theta &= \arctan 0,6 \cong 31^\circ\end{aligned}$$

Como a sombra aponta para o Sul, então o zênite solar está ao Norte do lugar. Considerando que os raios solares chegam na Terra paralelos, temos que os ângulos $\hat{P}OQ$ e $O\hat{T}R$ da figura abaixo são alternos internos e, conseqüentemente, congruentes. Sendo assim, a latitude do ponto Q está 31° ao Sul da latitude do ponto P (declinação do Sol).



Como ao meio-dia do dia 28 de agosto de 2015 foram decorridos 239,5 dias desde o início do ano, usando a função $f(d) = 23,5 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi(d-79)}{365}\right)$ para determinar a declinação do Sol, temos que $f(239,5) = 8,7^\circ$, ou seja, no dia 28 de agosto de 2015 a declinação do Sol era de $8,7^\circ$ N. Com isso temos que **a latitude do ponto P é $8,7^\circ$ N.**

Como o ponto Q está 31° ao Sul do ponto P, temos que a latitude do ponto Q é $8,7^\circ - 31^\circ = -22,3^\circ$. Sendo assim, a latitude do lugar é $22,3^\circ$ Sul.

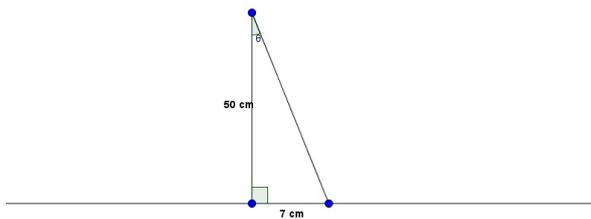
Observação: Uma sugestão de atividade para realizar com os alunos do Ensino Médio seria repetir esse problema apresentado no exemplo 1 para que eles possam determinar a latitude da cidade em que estão.

Exemplo 2:

Considere que num certo dia, na cidade do Salvador, que tem latitude 13° Sul, um grupo de estudantes observou que uma vareta de 50 cm fincada perpendicularmente no solo projetava uma sombra mínima apontando para o Norte com 7 cm de comprimento. Calcule a declinação do Sol neste dia e em seguida determine, aproximadamente, em quais datas este experimento pode ter ocorrido.

Resolução

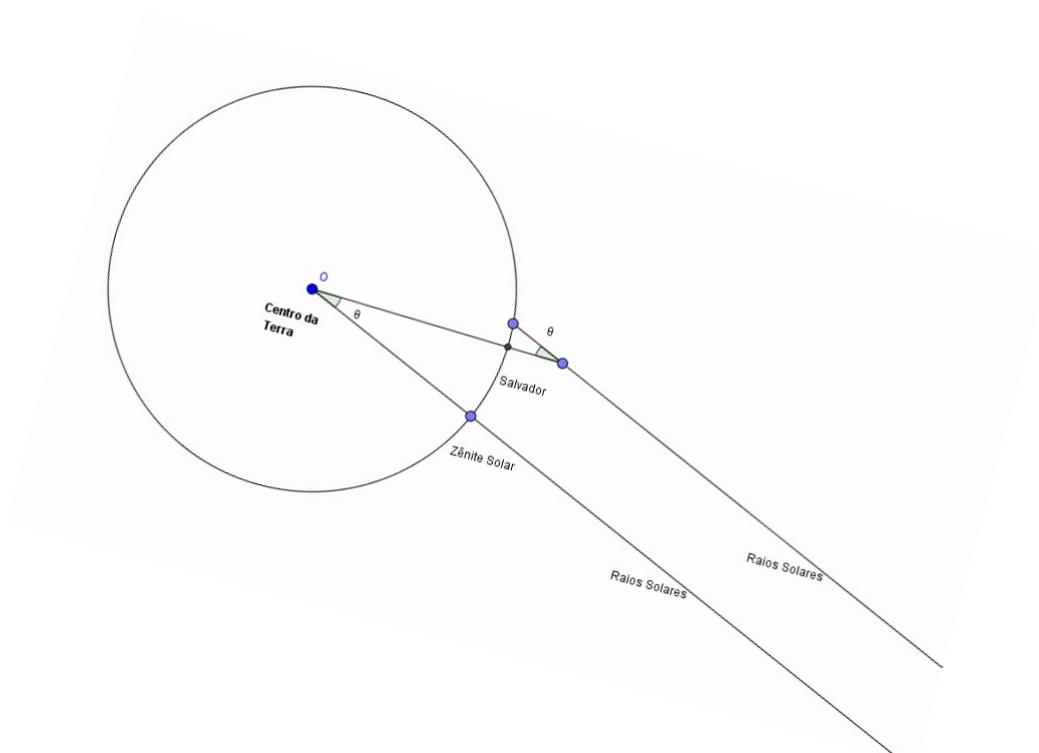
Se a sombra mínima tem 7 cm de comprimento, então temos que o ângulo θ que os raios solares formam com a vareta é $\arctan 0,14 \cong 8^\circ$



$$\tan \theta = \frac{7}{50} = 0,14$$

$$\theta = \arctan 0,14 \cong 8^\circ$$

Como a sombra aponta para o Norte, então o zênite solar está ao Sul de Salvador. Considerando que os raios solares chegam paralelos na Terra, temos, de acordo com a figura abaixo, que o zênite solar está 8° ao Sul de Salvador. Portanto, a declinação do Sol neste dia é 21° Sul.



Como a declinação do Sol neste dia é de 21° Sul, então usando a função

$$f(d) = 23,5 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365}\right) \text{ temos que:}$$

$$23,5^\circ \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365}\right) = -21^\circ$$

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365}\right) \cong -0,8936$$

$$\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \cong \arcsen(-0,8936) \text{ ou } \frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \cong \pi - \arcsen(-0,8936)$$

$$\text{Se } \frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \cong \arcsen(-0,8936), \text{ temos:}$$

$$\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \cong 1,10534$$

$$d = 14,7 \text{ (15 de janeiro)}$$

Se $\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \cong \pi - \arcsen(-0,8936)$, temos:

$$\frac{2\pi \cdot (d-79)}{365} \cong 4,24694$$
$$d \cong 325,7 \text{ (23 de novembro)}$$

Portanto o referido experimento deve ter ocorrido próximo ao dia 15 de janeiro no verão ou então próximo ao dia 23 de novembro na primavera.

Obervação: A resolução deste exercício nos mostra que da mesma forma que temos relógios solares, podemos ter calendários solares.

Considerações Finais

Desde 2013, quando ingressei no PROFMAT e tomei conhecimento de que teríamos que apresentar um trabalho de conclusão de curso que, conforme orienta o BIT, “deve consistir, preferencialmente, de projeto com aplicação direta na sala de aula de Matemática na educação, contribuindo para o enriquecimento da ensino da disciplina”, pensei em abordar os temas aqui tratados nesta dissertação mas com o cuidado de não extrapolar a esfera do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Ou seja, tive nesta dissertação a preocupação de abordar os temas usando uma linguagem e uma abordagem que fossem realmente acessíveis aos alunos do Ensino Médio. Apesar deste trabalho ser direcionado, a princípio, a professores da Educação Básica, nada impede que ele seja lido e compreendido também pelos alunos do Ensino Médio.

Entendo que esta dissertação pode, inclusive, ser usada, em parte ou na sua totalidade, por professores do Ensino Médio na elaboração de materiais (listas de exercícios, apostilas, módulos, estudos dirigidos, etc.) para tratar dos temas aqui apresentados.

Particularmente, ao longo de mais de vinte anos lecionando essa disciplina tão fascinante, por diversas vezes tratei dos temas aqui apresentados e pude perceber por parte de meus alunos grande curiosidade sobre estes assuntos, o que despertava neles, naturalmente, maior interesse pela disciplina.

Por fim, espero que com este trabalho eu tenha dado uma contribuição no sentido de dar maior significado à Matemática na Educação Básica e também despertar nos alunos maior interesse pelo estudo dessa disciplina tão importante.

Referências Bibliográficas

- [1] **Associação Nacional de Cruzeiros**, <http://www.ancruzeiros.pt/ancdrp/declinação-do-sol>. – Acesso em 12/12/2015
- [2] **CIS História e Geografia: a casadinha que dá certo**, <http://blogdogeohistoria.blogspot.com.br/2011/03/solsticio-e-equinocio.html> - 21 de março de 2011 - Acesso em 12/12/2015
- [3] **GEODEN Universidade Federal Fluminense**, disponível http://www.uff.br/geoden/index_arquivos/orientacao_godem.htm – 21 de março de 2011 – Acesso em 12/12/2015
- [4] **Lima, Elon Lages**, *A Matemática do ensino médio - volume 1* /Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto de Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. - 9. ed - Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [5] **MARQUES, M. N.**, *Origem e evolução do nosso calendário* - disponível em http://www.cce.ufes.br/jair/ieff/Origem_evolução_calendário_adaptado_Brasil.pdf – acesso em 10/09/2015
- [6] **MORALES, José Alberto Villalobos**, <http://fisica1011tutor.blogspot.com.br/2012/10/un-calendario-astronomico-el-islamico.html> – Zapote, San José, Costa Rica: 06 de outubro de 2012 - Acesso em 30/11/15
- [7] **Observatório Astronômico de Lisboa**, oal.ul.pt - Acesso em 10/09/2015
- [8] **Observatório Nacional**, www.on.br - Acesso em 10/09/2015
- [9] **Polêmicos**, polemicascmm.blogspot.com.br/2011/04/solsticio-e-equinocio.html?m=1 - 02 de abril de 2011 - Acesso em 12/12/2015
- [10] **Programa Prof2000**, <http://www.prof2000.pt/users/elisabethm/geo7/loabsoluta.htm> - Acesso em 12/12/2015
- [11] **Stewart, Ian**, *Mania de Matemática: Diversão e jogos de lógica e matemática* - Trad. Maria Luiza X. de A. Borges - Rio de Janeiro: Zahar, 2005.
- [12] **USNO**, aa.usno.navy.mil/data/docs/EarthSeasons.php - 21 de setembro de 2015 - Acesso em 29/09/2015
- [13] **Verma, Surendra**, *Idéias geniais na matemática: maravilhas, curiosidades, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências* – Trad. Amanda Pavani - 2 ed. - Belo Horizonte: Editora Gutemberg, 2014.

[14] **Wikipédia**, *pt.m.wikipedia.org/wiki/Equinócio* - dezembro de 2015 - Acesso em 29/12/2015

[15] **Wikipédia**, *https://pt.wikipedia.org/wiki/Zenite* - Acesso em 10/09/2015