UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

WAGNER VIEIRA OLIVEIRA

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS E QUÁRTICAS E AS EQUAÇÕES DO QUINTO GRAU

DOURADOS
2016

WAGNER VIEIRA OLIVEIRA

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS E QUÁRTICAS E AS EQUAÇÕES DO QUINTO GRAU

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos

DOURADOS

2016

Nome: Wagner Vieira Oliveira

Título: Métodos de resolução de equações cúbicas e quárticas e as equações do quinto grau.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 31 / 05 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos – UEMS

Julgamento: Aprovado Assinatura: OJ Neto

Prof. Dr. OdivalFaccenda - UEMS

Julgamento: Aprovado Assinatura:

Prof.ª Dr.ª Selma Helena Marchiori Hashimoto - UFGD

Julgamento: Aprovado Assinatura: Hashimoto

Dedico primeiramente este trabalho a Deus por ter me conduzido até a este momento e por Sua mão poderosa durante estes dois anos, realizando o que parecia impossível aos meus próprios olhos. À minha esposa Tatiane e meu filho Olavo que, mesmo sendo privados da companhia do marido e pai em muitas ocasiões, respondiam com amor, incentivo e compreensão. E aos meus pais, Etevaldo e Neli, e minha irmã, Marlivand, que me apoiam nesta dura e frutífera jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul que compartilharam seus conhecimentos e dedicaram seu tempo para nos tornar professores e profissionais mais capacitados, e também seres humanos melhores.

Agradeço especialmente a três professores da UEMS. Ao professor doutor Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos, por aceitar ser meu orientador neste trabalho e me dar o suporte necessário para a conclusão do mesmo. Aos professores doutores Odival Faccenda e Vando Narciso, por abrirem as portas dos seus lares, possibilitando que realizasse as provas após o pôr-do-sol de sábado no primeiro ano do curso, e assim pudesse guardar o santo do dia do Senhor, apregoado na Bíblia.

O meu muito obrigado à professora doutora Elizabeth Matos Rocha da UFGD, aplicadora do exame de qualificação, ao também se dispor a aplicar a prova após o período sabático.

O meu obrigado aos colegas de turma pelo companheirismo, incentivo e apoio durante os dois anos do curso e ao corpo técnico-administrativo da UEMS, em especial à servidora Adriana Rita Sangalli, secretária do Programa de Mestrado, pela presteza e cortesia ao realizar os atendimentos de nossas demandas acadêmicas.

“A política serve a um momento no presente, mas uma equação é eterna”.

Albert Einsten

RESUMO

O problema de encontrar soluções para equações com grau maior que dois deteve a mente dos mais brilhantes matemáticos por quase 40 séculos. Neste trabalho pretendemos elencar os métodos desenvolvidos pelos matemáticos, babilônios, gregos, árabes e europeus para solucionar as equações de terceiro grau, apresentar o *casus irreducibilis* e o surgimento dos números complexos, descrever os métodos de Lodovico Ferrari, René Descartes e Leonhard Euler para as equações de quarto grau, comentar a ideia desenvolvida por Niels Henrik Abel, a fim de demonstrar o teorema da irresolubilidade algébrica para as equações de grau 5, e além disso, contar resumidamente as trajetórias de vida dos grandes matemáticos que escreveram esta história, bem como narrar algumas intrigas ocasionadas pela busca de fama, reconhecimento e posição social. O recorte temporal do trabalho será o período que abrange os séculos XVIII a.C. ao XIX d.C.

Palavras-Chave: Equações, métodos, *casus irreducibilis*, cúbicas, quárticas e quínticas.

ABSTRACT

The problem of finding solutions to equations with greater degree than two stopped the mind of the most brilliant mathematicians for nearly 40 centuries. In this study we intend to list the methods developed by mathematicians, Babylonians, Arabs and Europeans to solve third degree equations, display the casus irreducibilis and the emergence of complex numbers, describe the methods of Lodovico Ferrari, René Descartes and Leonhard Euler for equations fourth grade, comment the idea developed by Niels Henrik Abel in order to demonstrate the algebraic irresolvable theorem for equations of degree 5, and in addition, briefly tell the life stories of the great mathematicians who wrote this story end as well as to tell some intrigues caused by the pursuit of fame, recognition and social position. The time frame of the work will be the period covering the XVIII century b.C. until the XIX a.C.

Key-words: equations, methods, casus irreducibilis, cubic, quartic and quintic.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes temas abordados pela Álgebra constitui-se na resolução de equações algébricas. As equações algébricas ou polinomiais são aquelas em que a incógnita aparece submetida apenas às operações algébricas: adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação. Encontrar métodos capazes de resolver estas sentenças matemáticas sempre foi um assunto que arrebatou os matemáticos no decorrer da história.

Os mais antigos registros históricos da utilização de equações pelo homem advêm das regiões do Egito e Mesopotâmia e datam de cerca de 2000 a.C. A matemática nesse período tinha um caráter essencialmente aplicável às atividades práticas do cotidiano, como a contagem e a mensuração. Somente com o decorrer do tempo passa a ter caráter mais abstrato e possuir o *status* de ciência.

Do Egito Antigo, os documentos matemáticos mais famosos que foram preservados e chegaram aos dias atuais são os papiros de Ahmes (também conhecido como papiro de Rhind) e de Moscou. O papiro de Moscou, o mais antigo deles, data de cerca de 1850 a.C., e o papiro de Ahmes, um pouco mais recente, datado por volta de 1650 a.C., contém respectivamente 25 e 85 problemas de geometria e aritmética. Em ambos, as equações do 1º grau aparecem de forma tímida e disfarçada de problemas e eram resolvidas por meio do *Método da Falsa Posição*[1].

Os antigos babilônios, nesta mesma época, já conseguiam trabalhar com equações quadráticas usando um raciocínio semelhante ao de Bhaskara, quase três mil anos antes, denominado “complemento do quadrado” (GARBI, 2007). Os babilônios construíram tabelas contendo quadrados e cubos de números naturais e obtiveram resultados corretos para alguns casos específicos de equações cúbicas.

A porta de entrada à Europa dos conhecimentos das antigas civilizações do oriente foi a Grécia. Quando se fala de equação neste país balcânico não se pode

[1] O Método da Falsa Posição consistia em assumir de início uma solução falsa que depois era corrigida para obter a solução correta.

deixar de lembrar-se de dois grandes matemáticos: Pitágoras (569 a.C. - 475 a.C.) e sua demonstração da relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo $(a^2 = b^2 + c^2)$, que produziu pela primeira vez a equação de segundo grau na Europa, com defasagem temporal de 1200 anos em relação à civilização babilônica; e Euclides (330 a. C. – Desconhecida) que em sua célebre obra "Os Elementos", lança as regras básicas a fim de solucionar as equações de primeiro grau; estas regras são conhecidas como axiomas[2]. Menecmo (380 a. C. a 320 a. C.) e Hipócrates (460 a. C. – 370 a. C.) estudaram casos particulares de equações cúbicas oriunda da resolução de um dos 3 problemas clássicos da matemática grega: a duplicação do cubo.

Mas quando a Grécia antiga caiu em declínio, o progresso matemático teve uma pausa. Isso foi no ocidente; no oriente, por volta do século VII, a matemática floresceu no império islâmico. Sob a tutela dos califas surgiu a Casa do Conhecimento[3], cujo diretor foi o persa Mohammad Al-Khwarizmi. Al-Khwarizmi revolucionou até então a matemática utilizada com a adoção dos números hindus e com a criação de uma nova linguagem matemática, a álgebra. Apropriando-se destas ferramentas, ele foi capaz de obter uma fórmula que poderia ser usada para resolver qualquer equação de segundo grau, com quaisquer números. O próximo cálice sagrado da matemática era encontrar um método geral que pudesse resolver as cúbicas. Foi o matemático árabe do século XI, Omar Khayyam, que encarou o desafio de resolver o problema das cúbicas. A partir de um método que utilizava álgebra e geometria estabeleceu pela primeira vez uma forma de resolver equações cúbicas, em alguns casos gerais.

Foram necessários mais cinco séculos para que os matemáticos europeus, munidos das poderosas ferramentas construídas pelos árabes, pudessem fornecer uma solução geral para as cúbicas. Na Europa, três grandes matemáticos italianos

[2]Os axiomas utilizados para a resolução das equações lineares são: 1º - Entidades iguais a uma terceira são iguais entre si $(ax + b = c)$; 2º - Se a iguais somam-se ou subtraem-se iguais, os resultados permanecem iguais $(ax + b - b = c - b)$; e 3º - Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais $\left(\frac{ax}{a} = \frac{c-b}{a}\right)$.

[3]Sediada em Bagdá, a Casa do Conhecimento era considerada como o maior centro intelectual durante a Idade de Ouro do Império Islâmico. Além de ser uma biblioteca e centro de tradução de manuscritos de outras civilizações (babilônica, egípcia, hindu, grega) era um centro de estudos em astronomia, química, medicina, zoologia e matemática.

se destacaram: Scipione del Ferro, o primeiro a descobrir método algébrico para solucionar equações cúbicas de um determinado tipo, mas que não publica sua descoberta, Niccolò Fontana, apelidado de Tartaglia, descobridor de um método algébrico capaz de resolver as equações de terceiro grau no caso geral, e Girolamo Cardano, responsável pela publicação e consequente difusão da fórmula atribuída à Tartaglia.

O método descoberto exigia uma série de transformações da equação inicial, obtendo assim um algoritmo que ficou conhecido como “fórmula por meio de radicais” ou “fórmula resolvente”. A fórmula, contudo, gerou em alguns casos muita estranheza entre os matemáticos, pois ao aplicá-la, uma parcela da equação gerava uma raiz quadrada de número negativo, o que era sabido até então que não existia. Este problema que assombrou os matemáticos por alguns anos ficou conhecido como os “*Casus Irreducibilis”*. Coube ao também matemático italiano Rafael Bombelli propor uma nova interpretação para os números da forma $\sqrt{-n}$, ou como ele denominou na época de “*plus* de *minus*”. Bombelli com seus estudos cria uma nova classe de números não conhecidos até então e que foram mais tarde nominados por Descartes de números imaginários.

Após a descoberta do método para a resolução da equação do terceiro grau por meio de radicais, os matemáticos se perguntavam se isso seria possível para equações de graus superiores. Lodovico Ferrari, assistente de Girolamo Cardano, respondeu a esta indagação para o caso das quárticas. Utilizando convenientes substituições e outros artifícios matemáticos conseguiu reduzir a três o grau da equação original, e valendo-se da fórmula já existente para as cúbicas, Ferrari conseguiu encontrar uma solução para a equação do quarto grau. Outros matemáticos posteriormente desenvolveram métodos próprios para a resolução das quárticas, entre ele, Descartes, Euler e Lagrange.

Após Ferrari, muitos matemáticos tentaram demonstrar que era possível encontrar uma fórmula geral para solucionar equações quínticas por resolventes, contudo os sonhos destes foram frustrados por dois jovens prodígios do século XIX, Niels Henrik Abel e Evariste Galois. Abel demonstrou a impossibilidade de se obter uma fórmula resolutiva geral que expressasse as raízes de uma equação de grau cinco por meio de radicais e Galois provou a impossibilidade de encontrar uma fórmula geral para equação de grau $n > 4$ e apresentou os critérios a fim de que uma equação seja solúvel por meio de radicais. As descobertas de Galois põem um ponto final na longa história pela busca de métodos resolventes para as equações de 3º, 4º e 5º e abre uma nova página na matemática com o estudo da Teoria de Grupos.

2 SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO 3º GRAU

A história da solução da equação do terceiro grau é rica em personagens intrigantes, envolta em fatos históricos marcantes e conduzida por mentes geniais, que por vezes entraram em rota de colisão, mas que construíram o arcabouço da Álgebra que conhecemos hoje, e particularmente, os métodos de resoluções de equações algébricas. Essas características tornam o estudo desta classe de equações tão atraente para pesquisadores e fonte de aprendizado e discussão entre alunos e professores de Matemática.

Os babilônios foram os primeiros a estudá-las. Embora obtivessem métodos de resolver alguns tipos particulares de equações cúbicas, o homem precisaria de cerca de três mil anos até que o matemático Scipione del Ferro apresentasse uma fórmula resolvente geral para as cúbicas e Lodovico Ferrari, discípulo de Girolamo Cardano, logo em seguida, o fizesse para as quárticas.

Contudo, esse extenso período não foi infrutífero para o campo das equações algébricas. Matemáticos gregos como Menecmo, Hipócrates, Platão e Arquimedes, fundamentados na prodigiosa geometria, desenvolveram métodos para a resolução da equação do terceiro grau do tipo $x^3 = a$. Para tal tarefa utilizaram essencialmente duas ferramentas: a proporcionalidade entre três segmentos de reta e as propriedades de curvas obtidas pela intersecção de uma clepsidra de base circular e um plano.

Com o declínio da cultura greco-romana, ocasionado pelas invasões bárbaras ao Império Romano Ocidental, o progresso da matemática teve uma pausa no ocidente. Entretanto, no oriente, por volta do século XI, um famoso poeta, Omar Khayyam, se valeu do conhecimento dos antigos gregos para obter soluções geométricas para alguns tipos de equações cúbicas.

Após o final da Idade Média, a matemática na Europa renasceu e com ela a busca de métodos algébricos para a resolução das equações do terceiro grau. No final do século XV, mais precisamente em 1494, um frei chamado Luca Pacioli (1445 – 1517), afirmou em seu livro *Summa de arithmetica, geometria proportioni et propornalitá* (Coleção de conhecimentos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade) ser impossível haver uma regra para resolver a equação $x^3 +$

$px = q$. Entretanto, tal afirmação foi demolida anos mais tarde pelo trabalho do matemático Niccolò Fontana.

2.1 As tabelas e o método babilônico

Por volta de 1800 e 1600 a.C. os babilônios começaram o estudo das equações cúbicas e buscam maneiras de resolvê-las. Fizeram tabelas de quadrados e cubos de valores para resolver o tipo específico de equação de 3º grau, $n^3 + n^2 = k$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \in [1; 30]$ (LIMA, 1999). Abaixo, Tabelas 1 e 2, temos respectivamente um tablete babilônico de argila com dados para a resolução de equações cúbicas no sistema sexagesimal antigo e a tabela correspondente na notação matemática moderna e no sistema decimal.

Tabela 1: Tabela babilônica com escrita cuneiforme

Fonte: http://www.schoyencollection.com/mathematics-collection/9-3-algebra/cubic-equations-table-ms-3048

Tabela 2: Tabela babilônica com escrita arábica

n	n^2	n^3	n^3+n^2
1	1	1	2
2	4	8	12
3	9	27	36
4	16	64	80
5	25	125	150
6	36	216	252
7	49	343	392
8	64	512	576
9	81	729	810
10	100	810	1100
11	121	1331	1452
12	144	1728	1872

Fonte: O Autor (2016).

Para a resolução de equações da forma $ax^3 + bx^2 = c$, com a, b e $c \in \mathbb{N}$ possivelmente multiplicavam ambos os lados da igualdade por $\frac{a^2}{b^3}$, com $b \neq 0$ e em seguida utilizavam o método da substituição, a fim de transformar as equações originais para a forma $n^3 + n^2 = k$. Os procedimentos descritos são equivalentes aos mostrados abaixo:

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}$$

Tomando $y = \frac{ax}{b}$, temos a equação

$$y^3 + y^2 = \frac{ca^2}{b^3}$$

o que pode, agora, ser resolvido, como uma equação na forma $n^3 + n^2 = k$. Onde $n = y = \frac{ax}{b}$ e $k = \frac{ca^2}{b^3}$ (BOYER, 1996). Vale ressaltar que tudo isso foi feito sem qualquer notação algébrica mostrando uma destacável compreensão matemática.

Para exemplificar o método, tomemos dois exemplos.

Exemplo 1. Dada a equação $2x^3 + 3x^2 = 540$, com $a = 2$, $b = 3$ e $c = 540$.

Passo 1. Multiplicar a equação $2x^3 + 3x^2 = 540$ por $\frac{2^2}{3^3}$, obtendo:

$$\left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{540.2^2}{3^3}$$

$$\frac{8x^3}{27} + \frac{4x^2}{9} = \frac{2160}{27}$$

$$8x^3 + 12x^2 = 2160$$

Esta última equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(2x)^3 + 3(2x)^2 = 2160$$

Passo 2. Fazendo uma substituição do tipo: $y = 2x$, obtemos:

$$y^3 + 3y^2 = 2160.$$

Passo 3. Com uma nova substituição: $y = 3z$, temos:

$$(3z)^3 + 3(3z)^2 = 2160$$

ou equivalente a

$$27z^3 + 3.9z^2 = 2160 \rightarrow 27z^3 + 27z^2 = 2160$$

$$z^3 + z^2 = 80$$

Com a equação inicial reescrita desta forma, consultando uma tabela semelhante à descrita na página anterior, verificamos que o valor que torna a equação $z^3 + z^2 = 80$ verdadeira é 4, logo $y = 12$, e consequentemente a solução da cúbica $2x^3 + 3x^2 = 540$ será $x = 6$.

Exemplo 2. Dada a equação $12x^3 + x^2 = 1{,}75$, com $a = 12$, $b = 1$ e $c = 1{,}75$.

Utilizando os mesmos passos descritos no exemplo 1, temos:

$$\left(\frac{12x}{1}\right)^3 + \left(\frac{12x}{1}\right)^2 = \frac{1{,}75.12^2}{1^3}$$

$$3^3.4^3.x^3 + 3^2.4^2.x^2 = 252$$

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252$$

Tomando $y = 12x$, temos

$$y^3 + y^2 = 252$$

Consultando a tabela, temos que $y = 6$ e, consequentemente, $x = \frac{1}{2}$.

2.2 O problema da duplicação e o método grego

O estudo das equações de terceiro grau na antiguidade grega está relacionado com a resolução de um dos três grandes problemas clássicos da geometria: a duplicação do volume de um cubo.

A origem deste problema não é certa, e o que sabemos sobre ele se deve principalmente a Eutócio de Ascalon (480 – 540 a. C.), que foi um matemático grego que escreveu comentários sobre vários tratados de Arquimedes e sobre a "As cônicas" de Apolônio. Existem duas lendas sobre a origem do problema - a primeira diz que o problema surgiu com a insatisfação do rei Minos[4] em relação ao tamanho do túmulo construído para seu filho Glauco (CARVALHO, 2004). O rei ordenou que o tamanho do túmulo com forma cúbica e aresta medindo 100 pés fosse dobrado. Tal situação foi descrita por um poeta, que por falta de conhecimento matemático, induziu o rei a acreditar que para duplicar o tamanho do túmulo bastava dobrar todas as medidas do mesmo. Esta incoerência matemática fez com que os geômetras da época buscassem uma solução da duplicação do sólido, mantendo sua forma.

A outra lenda diz que em 427 a.C., Péricles morrera de peste juntamente com um quarto da população de Atenas. Os atenienses entristecidos por essa irreparável perda consultaram o Oráculo de Apolo, em Delos, a fim de obter um meio de extinguir a terrível moléstia. O oráculo disse então que, para a peste se extinguir, o altar do deus Apolo, que possuía o formato de um cubo, deveria ser duplicado. Imediatamente os atenienses dobraram as dimensões do altar, entretanto isso não fez cessar a mortandade, e isto se deveu ao fato do que o volume do altar original fora multiplicado por oito e não por dois.

O problema deliano, como ficou conhecido, consistia em dado um cubo de aresta a e volume v construir, somente com régua e compasso, um cubo com o dobro do volume do primeiro, ou seja, em notação moderna, o problema consistia em dado um cubo de aresta a e volume $v = a^3$, encontrar uma aresta b tal que $v =$

[4]Minos, rei lendário da ilha de Creta, filho do deus Zeus e da princesa fenícia Europa.

$b^3 = 2a^3$. Presumidamente, era conhecido por Platão e por outros matemáticos gregos.

Independente da origem do problema, o fato é que a duplicação do cubo foi estudada pela Academia de Platão. E diversas resoluções foram apresentadas pelos estudiosos gregos, inclusive as atribuídas a Hipócrates, Menecmo e ao próprio Platão.

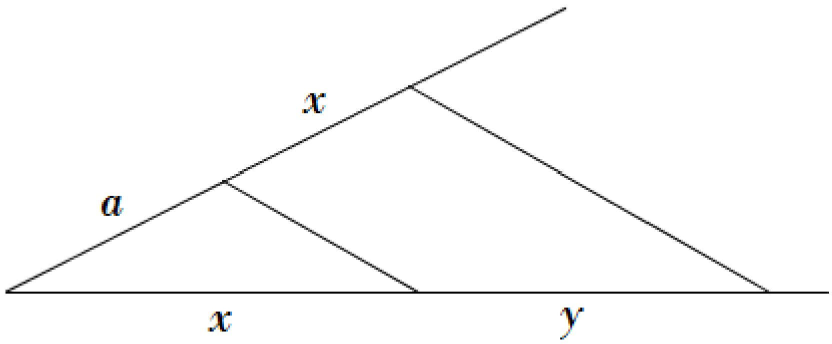
2.2.1 A redução de Hipócrates

Hipócrates de Quios (470 – 410 a. C.) foi um matemático geômetra grego, nascido na Ilha de Quios, no arquipélago de Dodecanes. O primeiro progresso na solução do problema da duplicação do cubo foi atribuído a ele, que reduziu o problema à construção de dois *meios proporcionais*[5] x e y, entre 1 e 2. Tal solução não satisfez os matemáticos gregos, pois não apresentou uma solução ao problema original, contudo colaborou no desenvolvimento de diversas outras tentativas que confluíram na mesma direção (EVES, 1997).

O problema proposto por Hipócrates era que, dado um cubo de aresta a, encontramos dois meios proporcionais entre a e b, com $b < 2a$, tais que, $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ (Figura 1) e $\frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ (Figura 2).

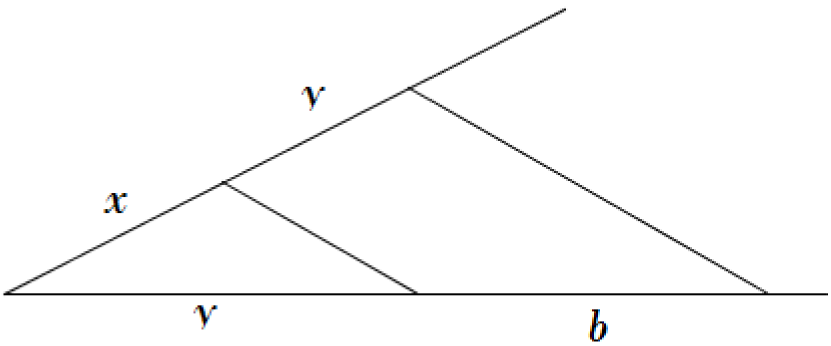
[5]Dados dois números positivos a e b, o seu *meio proporcional* é o número x tal que a está para x como x está para b; por outras palavras, $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Por exemplo, o meio proporcional de 18 e de 2 é 6, pois $\frac{18}{6} = \frac{6}{2} = 3$. Na linguagem atual os meios proporcionais entre duas grandezas é o equivalente ao encontrar a média geométrica, no caso de Hipócrates, x seria a média proporcional de a e y ($x = \sqrt{a.y}$), e y a média geométrica de b e x ($y = \sqrt{b.x}$).

Figura 1: Meio proporcional $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$



Fonte: O Autor (2016).

Figura 2: Meio proporcional $\frac{x}{y} = \frac{y}{b}$



Fonte: O Autor (2016).

Ou equivalente

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

E disso vemos que

$$\begin{cases} x^2 = ay \ (1) \\ xy = ab \ (2) \end{cases}$$

Multiplicando (1) por x temos

$$x^3 = axy \ (3)$$

De (2) e (3) segue que

$$x^3 = axy = a^2b$$

Assim

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a^3}{a^2b} = \frac{a}{b} \ (4)$$

Então o cubo de aresta x tem volume ampliado ou reduzido, em relação ao cubo original, na razão $\frac{a}{b}$.

Caso tomarmos $b = 2a$ e substituirmos em (4) teremos $\frac{a^3}{x^3} = \frac{1}{2} \rightarrow x^3 = 2a^3$, o que demonstra que o cubo de aresta x tem volume duplicado em relação ao cubo de aresta a, isto é, a razão entre os volumes dos cubos de arestas a e x é de 1 para 2.

2.2.2 A solução de Menecmo

Menecmo (380 - 320 a.C.), importante astrônomo e geômetra grego da Academia de Platão nascido em Alopeconnesus, Ásia Menor, atualmente Turquia, obteve fama ao descobrir em torno de 350 a. C. as propriedades das curvas que hoje conhecemos como cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Estas curvas se obtêm respectivamente pela intersecção de uma *clepsidra*[6] reta de base circular, com um plano oblíquo à base, perpendicular à base ou paralelo à geratriz.

Os estudos conduzidos por Menecmo a respeito das cônicas foram motivados por encontrar uma solução para o problema da duplicação do cubo. Ele percebeu que ao utilizar dois meios proporcionais da redução de Hipócrates, $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ e $\frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ estas proporções representavam a equação de duas equações destas cônicas. As soluções obtidas por Menecmo, e descritas por Eutócio, são baseadas na obtenção de um determinado ponto definido pela intersecção destas duas cônicas (SOUSA, 2001).

Se x e y são dois meios proporcionais entre a e b, temos que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Estas igualdades são equivalentes às equações abaixo:

$$\begin{cases} y^2 = bx \\ xy = ab \end{cases}$$

[6]A *clepsidra* possui o formato de uma ampulheta; é obtida pela ligação de dois cones pelos seus respectivos vértices, ficando as suas bases paralelas uma em relação à outra.

Assim, resolver o problema proposto por Hipócrates, consiste encontrar a intersecção da parábola $y^2 = bx$ com a hipérbole $xy = ab$. As coordenadas deste ponto são os meios proporcionais que estamos procurando.

É evidente que é equivalente também a relação

$$y^2 = bx \text{ e } x^2 = ay.$$

Desta forma, o problema pode também ser resolvido utilizando duas parábolas cujos vértices coincidem e os eixos são ortogonais. Estas duas soluções são referenciadas por Eutócio em seu comentário a respeito do *Tratado sobre a esfera e o cilindro* de Arquimedes.

O problema específico da duplicação do cubo pode então ser transformado em determinar dois meios proporcionais entre dois segmentos a e $2a$ (sendo a a aresta do cubo a duplicar), ou equivalentemente, encontrar x e y, tais que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Dessas igualdades podemos obter, numa linguagem de geometria analítica, as seguintes relações:

$$x^2 = ay \rightarrow y = \frac{1}{a}x^2 \ (1)$$

$$xy = 2a^2 \ (2)$$

$$y^2 = 2ax \rightarrow x = \frac{1}{2a}y^2 (3)$$

Portanto, podemos obter x de dois modos:

1) Pelo ponto de intersecção da parábola $y = \frac{1}{a}x^2$ com a hipérbole $xy = 2a^2$ (primeira solução atribuída a Menecmo); ou
2) Pelo ponto de intersecção da parábola $y = \frac{1}{a}x^2$ com a parábola $x = \frac{1}{2a}y^2$ (segunda solução atribuída a Menecmo).

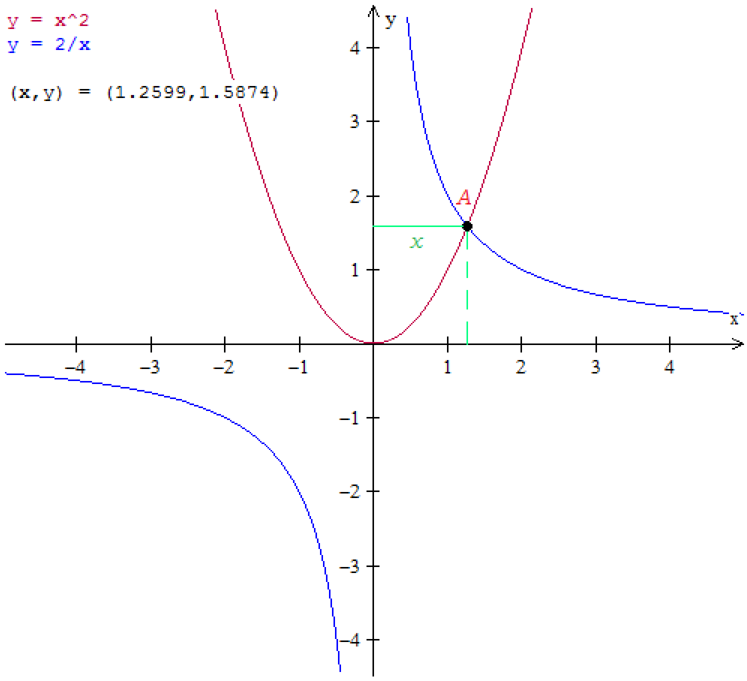
Podemos verificar que ao substituir a equação (1) em (2) e a equação (2) em (3), em ambos os casos, obtemos que $x^3 = 2a^3$, ou seja, x é a aresta do cubo com volume duplicado em relação ao cubo original, de aresta a. Apesar da aparente simplicidade destas soluções para nós atualmente, elas eram de grande complexidade para Menecmo, dado que não dispunha das notações e teoria decorrente da geometria analítica, que teve suas bases somente estabelecidas por Descartes, já no século XVII (SOUSA, 2001).

Para exemplificar o método de Menecmo, consideremos o exemplo abaixo:

Dado o cubo de aresta $a = 1$ construir o segmento de tamanho x tal que o comprimento obtido seja igual a $\sqrt[3]{2}$.

Para isso, traçaremos a parábola $y = \frac{1}{a}x^2$ e a hipérbole $xy = 2a^2$, com o auxílio do programa Wimplot, obtendo o ponto A. O valor da abscissa desse ponto será o tamanho da aresta x do cubo duplicado. O segmento x, aresta do cubo procurado, está representado em verde na Figura 3.

Figura 3: Construção geométrica do segmento de tamanho $\sqrt[3]{2}$



Fonte: O Autor (2016).

Note que o valor de $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992104989$ e o valor "truncado" da abscissa do ponto A, traçado na Figura 3, são aproximadamente iguais.

É importante lembrar que, embora esta resolução forneça a aresta do cubo procurado, ela não se limita ao uso da régua não graduada e do compasso, uma vez que não é possível desenhar todos os pontos de uma parábola ou de uma hipérbole com tais instrumentos.

2.3 Omar Khayyam e o método geométrico

Omar Khayyam, cujo nome completo era Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar Ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami, nasceu em Nichapur, na Pérsia, atual Irã, em 1040 e morreu nesta mesma cidade em 1120 d. C. Khayyam significa, em persa, "fabricante de tendas"; ele adotou esse nome em homenagem ao pai que tinha esta profissão. Mais conhecido no Ocidente como o autor do *Rubaiyat* (*Rubaiyat* é o plural da palavra persa *rubai*, e quer dizer quadras ou quartetos), uma coleção de poemas de quatro linhas. A poesia de sua obra oferece uma visão muito pessoal da vida — uma espécie de hedonismo pós-morte com fio melancólico, prefigurando um pouco *Alfred Edward Husman*[7]. Edward Fitzgerald, principal tradutor da obra para o inglês, publicou-a em 1859, 75 quartetos, que possuíam rima da forma $a - a - b - a$, ou seja, em cada rubai, o primeiro, o segundo e o quarto versos são rimados e o terceiro é branco, sem rima. *The Rubaiyat* de Omar Khayyam de Fitzgerald era o livro favorito do mundo de língua inglesa até a I Guerra Mundial (DERBYSHIRE, 2006).

Além de poeta, Omar Khayyam foi matemático e astrônomo. Dos seus livros de ciência chegaram até nós as *Explanations of the Difficulties in the Postulates of Euclid* (Explanações das Dificuldades nos Postulados de Euclides) e o *Treatiseon Demonstration of Problems of Algebra* (Tratado sobre a Demonstração de Problemas de Álgebra).

Figura 4: Primeira página do Tratado sobre a Demonstração de Problemas de Álgebra

Fonte: http://blog.yovisto.com/omar-khayyam-mathematics-and-poetry/

[7]Alfred Edward Housman foi um poeta inglês que em suas obras líricas aliou a pureza do classicismo, a inspiração romântica, triste e quase fatalista.

Em 1074, o então diretor do Observatório de Merv, incumbiu a Khayyam e a outros sete sábios persas a tarefa de reforma do calendário muçulmano. A precisão obtida por Khayyam no cálculo da duração do ano foi extraordinária, ele mediu a duração do ano como tendo 365,24219858156 dias, enquanto hoje se sabe que um ano possui 365.242190 dias, um erro apenas na sexta casa decimal.

No campo da matemática, Omar Khayyam encontrou métodos aritméticos e geométricos para a resolução das equações quadráticas, contudo, Khayyam acreditava erroneamente que era impossível obter soluções aritméticas para o caso geral das equações cúbicas, por isso desenvolveu apenas métodos geométricos (BOYER, 1996). Este pensamento da não existência de métodos algébricos de resolução das cúbicas pode ser explicado em parte pela não aceitação dos números negativos como números de fato, e o desconhecimento dos números irracionais e complexos.

Omar Khayyam em seus estudos também observou que as equações de terceiro grau podem ter uma, duas ou três soluções positivas ou nenhuma (caso as cônicas não se interceptem) e ele impõe as condições que os coeficientes devem ter para cada caso (ESTRADA, 2000).

2.3.1 Classificação das equações

Omar Khayyam foi o primeiro a classificar exaustivamente as equações, embora em termos modernos, ele verificava principalmente o grau destas (MARDIA, 1999).

Khayyam não admitiu a existência de raízes negativas, o que o levou a categorizar as equações polinomiais de primeiro, segundo e terceiro grau em 25 tipos. Destas, 14 eram do tipo cúbica e não seriam suscetíveis de ser reduzidas a equações lineares ou quadráticas, por meio da divisão por x ou x^2.

Em uma notação moderna as equações foram divididas em dois grupos, com a, b, c e $x \in \mathbb{N}$, conforme segue (MARDIA, 1999).

O primeiro conjunto é composto das equações formadas por dois termos ou equações binomiais, chamadas por ele de “Equações Simples”. São elas:

$(I)\ a = x$

$(II)\ a = x^2$

$(III)\ a = x^3$

$(IV)\ bx = x^2$

$(V)\ cx^2 = x^3$

$(VI)\ bx = x^3$

O segundo conjunto é formado pelas chamadas equações compostas, dividido em trinomiais (ou seja, com três termos) e as tetranomiais (com quatro termos).

A. Equações Trinomiais Quadráticas:

$(I)\ x^2 + bx = a$

$(II)\ x^2 + a = bx$

$(III)\ bx + a = x^2$

B. Equações Trinomiais Cúbicas redutíveis a equações de segundo grau:

$(I)\ x^3 + cx^2 = bx$

$(II)\ x^3 + bx = cx^2$

$(III)\ cx^2 + bx = x^3$

C. Equações Trinomiais Cúbicas:

$(I)\ x^3 + bx = a$

$(II)\ x^3 + a = bx$

$(III)\ bx + a = x^3$

$(IV)\ x^3 + cx^2 = a$

$(V)\ x^3 + a = cx^2$

$(VI)\ cx^2 + a = x^3$

D. Equações Tetranomiais em que a soma de três termos é igual ao quarto termo:

$(I)\ x^3 + cx^2 + bx = a$

$(II)\ x^3 + cx^2 + a = bx$

$(III)\ x^3 + bx + a = cx^2$

$(IV)\ cx^2 + bx + a = x^3$

E. Equações Tetranomiais em que a soma de dois termos é igual à soma dos outros dois:

$(I)\ x^3 + cx^2 = bx + a$

$(II)\ x^3 + bx = cx^2 + a$

$(III)\ x^3 + a = cx^2 + bx$

Algebricamente, algumas dessas categorias são essencialmente idênticas, embora as construções geométricas sejam distintas. Das 14 equações cúbicas não passíveis de redução Omar descreveu métodos para a resolução de 4 delas, que será apresentada logo a seguir.

2.3.2 Método de resolução da equação cúbica da forma $x^3 + bx = a$

O primeiro método atribuído a Khayyam era o de resolução da equação $x^3 + bx = a$. A fim de descrevê-lo, serão elencados abaixo os passos a serem seguidos.

Primeiro passo. Multiplicar por $x\ (x \neq 0)$, em ambos os lados da equação $x^3 + bx = a$, obtendo-se:

$$x^4 + bx^2 = ax\ (1).$$

Segundo passo. Tomar a parábola (ver definição de parábola no Anexo A) descrita por

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{b}} \leftrightarrow x^2 = \sqrt{b}.y$$

e substituir $x^2 = \sqrt{b}.y$ em (1), resultando:

$$x^4 + bx^2 = (x^2)^2 + bx^2 = \left(\sqrt{b}.y\right)^2 + bx^2 = by^2 + bx^2 = ax$$

$$y^2 + x^2 = \frac{a}{b}x$$

$$\therefore x^2 + y^2 = \tfrac{a}{b}x.$$

Terceiro passo. Reescrever a expressão $x^2 + y^2 = \frac{a}{b}x$ do seguinte modo:

$$x^2 + y^2 - \frac{a}{b}x = 0$$

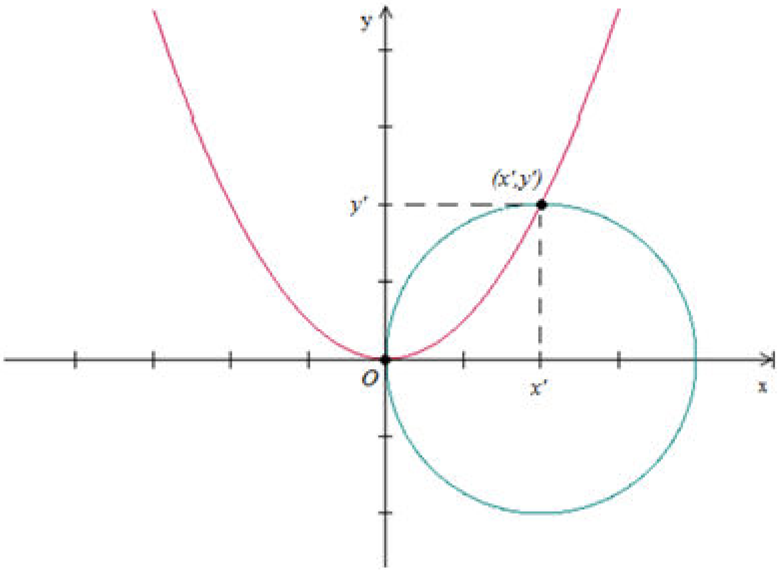
$$x^2 + y^2 - 2x\frac{a}{2b} + \frac{a^2}{4b^2} = \frac{a^2}{4b^2}$$

$$\left(x^2 - 2x\frac{a}{2b} + \frac{a^2}{4b^2}\right) + y^2 = \left(\frac{a^2}{4b^2}\right)$$

$$\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{a}{2b}\right)^2\ (2)$$

Notadamente, a equação descrita em (2), representa uma circunferência de centro $\left(\frac{a}{2b}, 0\right)$, tangente ao eixo Oy (ver definição de circunferência no Anexo A). O ponto de interseção da parábola $y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$, com a circunferência $\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{a}{2b}\right)^2$, fornece a solução da equação cúbica dada inicialmente por $x^3 + bx = a$. Para tanto, basta calcular a distância deste ponto de intersecção (x', y') ao ponto $(0, y')$, ou neste caso, tomar o valor da abcissa do ponto de intersecção das cônicas.

Figura 5: Distância ponto de intersecção $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$ ao ponto $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}')$



Fonte: O Autor (2016).

Para exemplificar o procedimento de resolução de equações cúbicas utilizado por Khayyam, observe a equação abaixo:

Exemplo 1. Considere a seguinte equação $x^3 + 4x = 8$, com $b = 4 \; e \; a = 8$.

Multiplica-se a equação $x^3 + 4x = 8$ por x, com $x \neq 0$, obtendo a equação quártica $x^4 + 4x^2 = 8x$, e tomando a parábola $y = \frac{x^2}{\sqrt{4}} \leftrightarrow x^2 = \sqrt{4}.y = 2y$ e substituído na quártica. Segue que:

$$(x^2)^2 + 4x^2 = 8x$$

$$\left(\sqrt{4}.y\right)^2 + 4x^2 = 8x$$

$$4y^2 + 4x^2 = 8x$$

$$y^2 + x^2 = \frac{8}{4}x$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2x$$

Reescrevendo $x^2 + y^2 = 2x$ obtém-se:

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

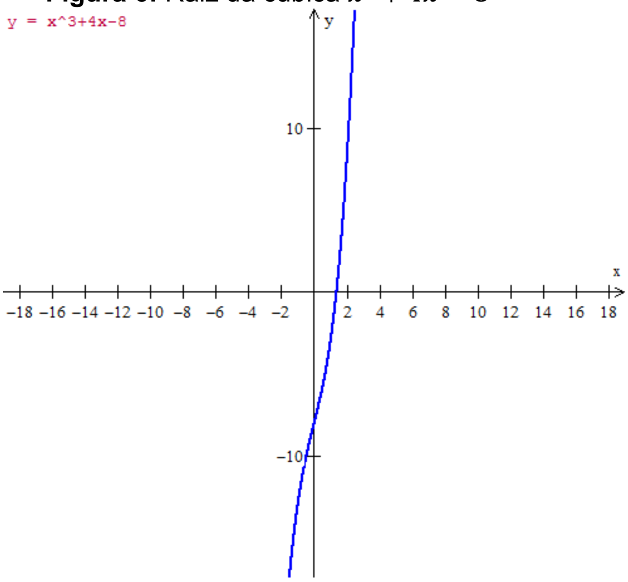
$$(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

A equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$ representa a circunferência de centro $(1{,}0)$ e raio 1.

Plotando o gráfico da equação $x^3 + 4x = 8$, Figura 6, verifica-se que sua única raiz real é aproximadamente $1{,}36$.

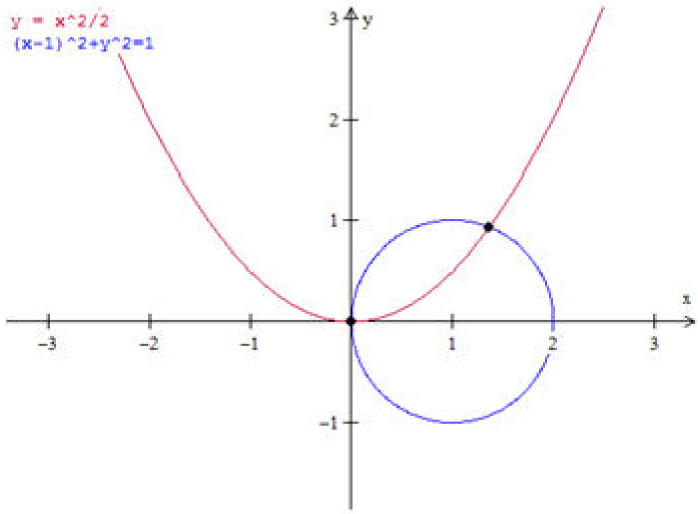
Figura 6: Raiz da cúbica $\boldsymbol{x^3 + 4x = 8}$



Fonte: O Autor (2016).

Traçando também as equações da parábola $y = \frac{x^2}{\sqrt{4}}$ e da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (Figura 7), verifica-se que os pontos de intersecções destas serão aproximadamente $(0; 0)$ e $(1{,}36; 0{,}93)$. A raiz da cúbica procurada será a distância entre os pontos $(1{,}36; 0{,}93)$ e $(0; 0{,}93)$, que constitui neste caso, o próprio valor da abscissa do ponto de intersecção das seções cônicas.

Figura 7: Gráfico da circunferência $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2+\boldsymbol{y}^2=\mathbf{1}$ e da parábola $\boldsymbol{y}=\frac{x^2}{2}$



Fonte: O Autor (2016).

Os gráficos gerados pelo *Winplot,* Figuras 7 e 8, representam respectivamente o gráfico da cúbica inicial fornecida, e o gráfico da parábola $x^2=2y \leftrightarrow y=\frac{x^2}{2}$ e da circunferência de centro $(1{,}0)$, bem como de suas intersecções. No gráfico da Figura 7 se observam dois pontos de interseção, todavia, Khayyam restringiu a solução das cúbicas aos $\mathbb{Z}_+^*$. Assim, descarta-se a solução $x=0$. Lima (1999) salienta que além do antigo matemático árabe restringir suas soluções aos números positivos, acreditava ser impossível fornecer soluções aritméticas (em razão das dificuldades com os irracionais) para equações cúbicas, por isso, suas soluções são apenas geométricas.

2.3.3 Método de resolução da equação cúbica da forma $\boldsymbol{x^3+ax^2+b^2x+c^3=0}$

Lima (1999) explica, ainda, outro procedimento atribuído a Omar Khayyam para a resolução das equações cúbicas, agora da forma $x^3+ax^2+b^2x+c^3=0$.

Primeiro passo. Substituir x^2 por $2py$. O que resulta na equação

$$x^3+ax^2+b^2x+c^3=0$$

$$x.x^2+ax^2+b^2x+c^3=0$$

$$2pyx + 2apy + b^2x + c^3 = 0.$$

A equação $2pyx + 2apy + b^2x + c^3 = 0$ é uma hipérbole (ver definição de hipérbole no Anexo A). E a equação $x^2 = 2py$, ou $y = \frac{x^2}{2p}$, é uma parábola.

Segundo passo. Traçar estas duas curvas em um mesmo plano cartesiano, obtendo-se o ponto de interseção destas, o que determina uma raiz real da cúbica dada inicialmente.

Para exemplificar o procedimento geral adotado acima, considere a equação.

Exemplo 2. Dada a cúbica $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$, e a parábola $x^2 = 2py$, com $p = 1$, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -1$.

Usando o mesmo raciocínio descrito, tem-se:

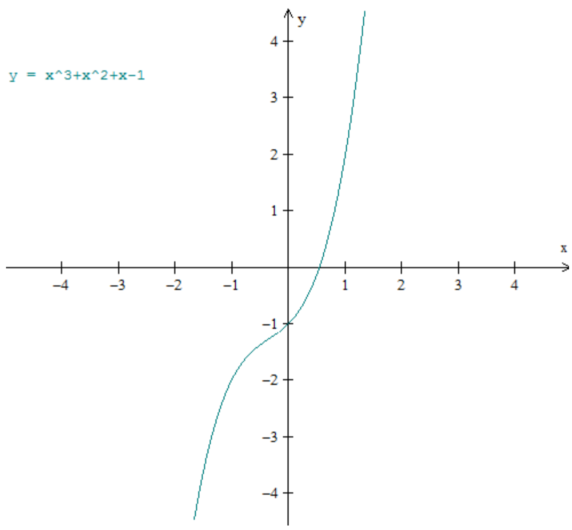
$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

$$x.x^2 + x^2 + x - 1 = 0$$

$$x + 2xy + 2y - 1 = 0.$$

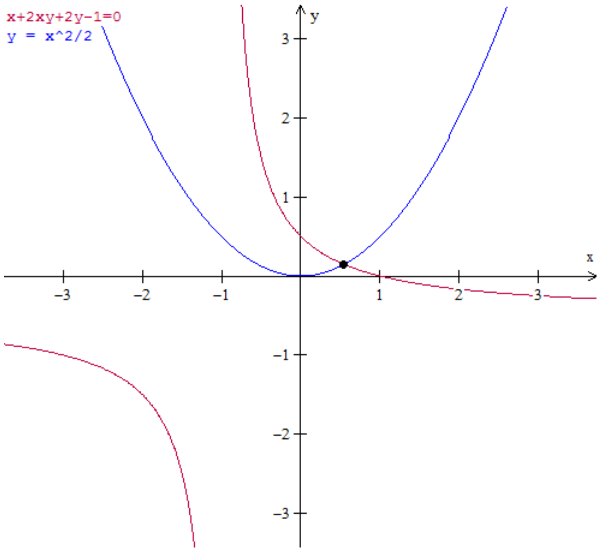
Exibindo os gráficos, Figuras 8 e 9, abaixo com o auxílio do *Winplot*, divisa-se a veracidade do método.

Figura 8: Gráfico da cúbica $\boldsymbol{x^3 + x^2 + x - 1 = 0}$



Fonte: O Autor (2016).

Figura 9: Gráfico da parábola $\boldsymbol{x^2 = 2py}$ e da hipérbole $\boldsymbol{x + 2xy + 2y - 1 = 0}$



Fonte: O Autor (2016).

Percebemos que a raiz da equação cúbica $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ é aproximadamente $0{,}54$, enquanto que o ponto de intersecção dos gráficos da parábola $x^2 = 2py$ e da hipérbole $x + 2xy + 2y - 1 = 0$ é aproximadamente o ponto $(0{,}54; 0{,}15)$.

Assim, a cúbica inicial possui apenas uma raiz real. Neste caso, pelo método empregado por Khayyam, não há condições de prever o comportamento das demais raízes da equação $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ sem o auxílio de outras ferramentas matemáticas e computacionais, não disponíveis na época.

2.3.4 Método de resolução da equação cúbica da forma $\boldsymbol{x^3 + b^2c = b^2x}$

Além dos métodos para a resolução das cúbicas da forma $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$ e $x^3 + bx = a$, Burton (2006), descreve mais dois tipos de cúbicas que foram resolvidas por Omar Khayyam usando métodos geométricos semelhantes. O primeiro grupo de equações são as da forma, $x^3 + b^2c = b^2x$. O processo de resolução é parecido com o anterior descrito por Lima (1999), e segue os seguintes passos:

Primeiro passo. Multiplicar a equação $x^3 + b^2c = b^2x$ por x e simplificá-la.

$$x^4 + b^2cx = b^2x^2$$

$$(x^2)^2 + b^2cx = b^2x^2$$

$$b^2y^2 + b^2cx = b^2x^2$$

$$y^2 - x^2 = -cx\ .$$

Segundo passo. Ao invés de tomar a parábola $x^2 = 2py$, como no exemplo anterior, utiliza-se $x^2 = by$, obtendo a seguinte expressão:

$$x^3 + b^2c = b^2x, \text{ com } x \neq 0.$$

A equação $y^2 - x^2 = -cx$ é uma hipérbole.

Terceiro passo. Traçar as duas curvas $x^2 = by$ e $y^2 - x^2 = -cx$ e encontrar o ponto de intersecção destas que a solução da cúbica inicial.

Exemplo 3. Sejam as equações $x^3 + 12 = 4x$ e $x^2 = 2y$, com $b = 2$ e $c = 3$

Multiplicando $x^3 + 12 = 4x$ por x, tem-se

$$x^3 + 12 = 4x$$

$$x^4 + 12x = 4x^2$$

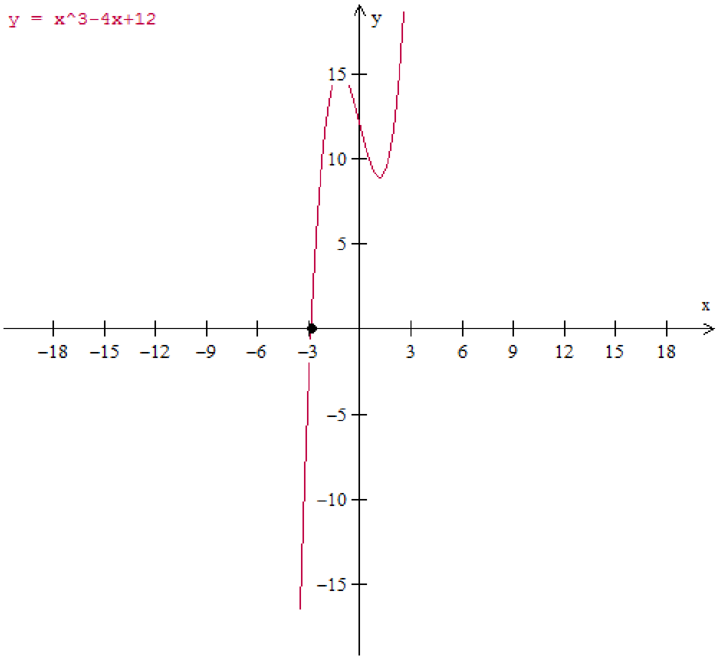
$$(x^2)^2 + 12x = 4x^2$$

$$4y^2 + 12x = 4x^2$$

$$y^2 + 3x = x^2.$$

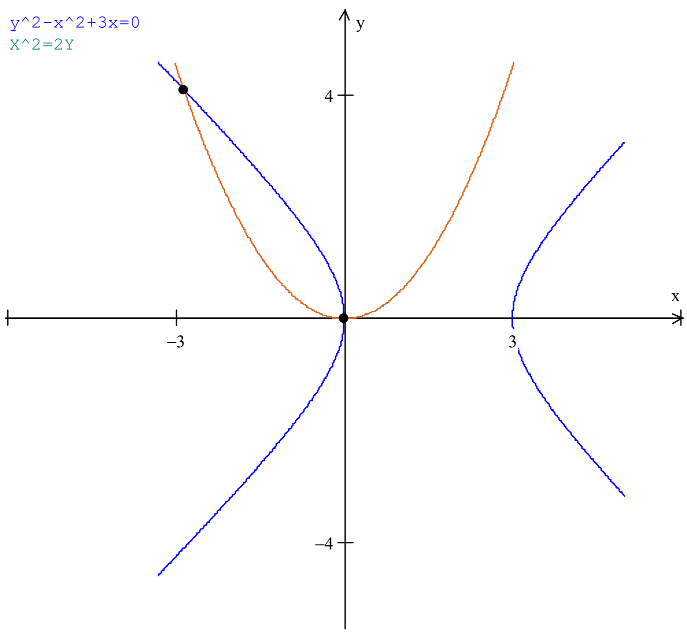
Os pontos de intersecção entre a hipérbole $y^2 + 3x = x^2$ e a parábola $x^2 = 2y$ determinam as raízes da equação $x^3 + 12 = 4x$, conforme pode ser notado pelos gráficos das Figuras 10 e 11.

Figura 10: Gráfico da cúbica $\boldsymbol{x^3 + 12 = 4x}$



Fonte: O Autor (2016).

Figura 11: Gráfico da parábola $\boldsymbol{x^2 = 2y}$ e da hipérbole $\boldsymbol{y^2 + 3x = x^2}$



Fonte: O Autor (2016).

Enquanto que a raiz da equação $x^3 + 12 = 4x$ é aproximadamente $-2{,}86$, o ponto de intersecção da hipérbole $y^2 + 3x = x^2$ com a parábola $x^2 = 2y$ é aproximadamente $(-2{,}86; 4{,}10)$.

2.3.5 Método de resolução da equação cúbica da forma $\boldsymbol{x^3 + c = ax^2}$

O segundo grupo de cúbicas, $x^3 + c = ax^2$, foi resolvido por Khayyam, de acordo com Burton (2006), com os seguintes procedimentos:

Primeiro passo. Toma-se $c = xy$, ou seja, a hipérbole $x = \frac{c}{y}$, e substitui-se na cúbica dada, obtendo-se a parábola $y^2 + cx - ac = 0$, conforme demonstrado abaixo.

$$x^3 + c = ax^2$$

$$\left(\frac{c}{y}\right)^3 + c = a\left(\frac{c}{y}\right)^2$$

$$\frac{c^3}{y^3} + c = a\frac{c^2}{y^2}$$

$$c^2 + y^3 = acy$$

$$x^2y^2 + y^3 = acy$$

$$x^2y + y^2 = ac$$

$$xy.x + y^2 = ac$$

$$y^2 + cx = ac.$$

Segundo passo. Da mesma forma que nas cúbicas anteriores, as raízes da equação $x^3 + c = ax^2$, são as obtidas a partir da interseção da hipérbole $x = \frac{c}{y}$, com a parábola $y^2 + cx = ac$.

Abaixo é exemplificada a forma de utilização do método em um caso particular.

Exemplo 4. Sejam as equações $x^3 + 3 = 2x^2$, com $c = 3 \; e \; a = 2$, e $xy = 3 \leftrightarrow x = \frac{3}{y}$.

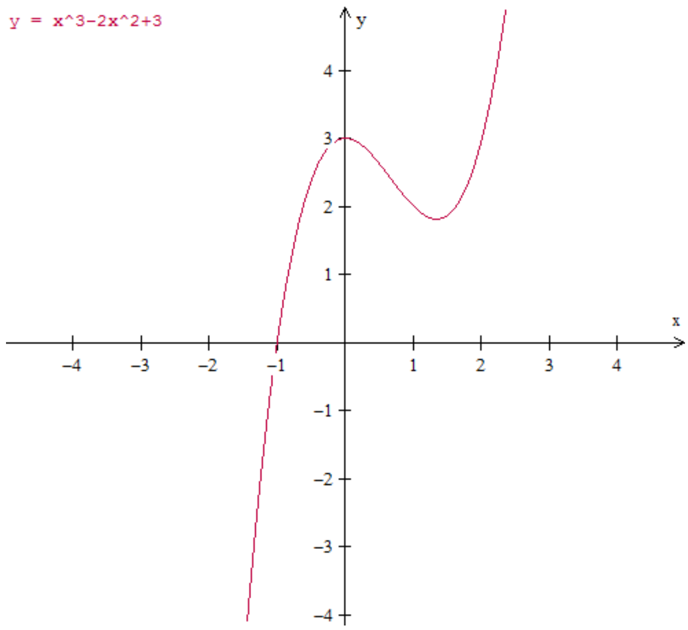
$$x^3 + 3 = 2x^2 \leftrightarrow \left(\frac{3}{y}\right)^3 + 3 = 2\left(\frac{3}{y}\right)^2 \leftrightarrow \frac{3^3}{y^3} + 3 = 2\frac{3^2}{y^2} \leftrightarrow 3^2 + y^3 = 2.3 \leftrightarrow$$

$$x^2y^2 + y^3 = 2.3y \leftrightarrow x^2y + y^2 = 6 \leftrightarrow xy.x + y^2 = 6 \leftrightarrow y^2 + 3x = 6 \leftrightarrow$$

$$3x = 6 - y^2 \leftrightarrow y^2 + 3x = 6$$

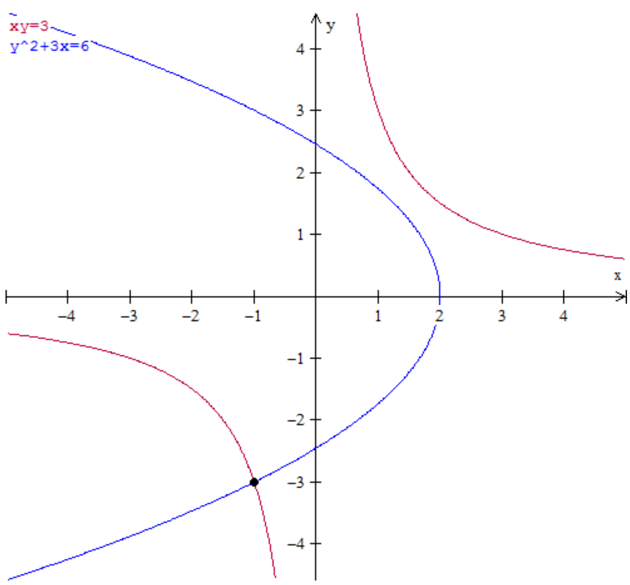
Observe, pelos gráficos das Figuras 12 e 13, que se seguem, a única raiz real da equação é $x = -1$, igualmente o único ponto de intersecção entre a hipérbole $xy = 3$ e a parábola $y^2 + 3x = 6$ é o ponto $(-1, -3)$.

Figura 12: Gráfico da cúbica $\boldsymbol{x^3 + 3 = 2x^2}$



Fonte: O Autor (2016).

Figura 13: Gráfico da parábola $\boldsymbol{xy = 3}$ e da hipérbole $\boldsymbol{y^2 + 3x = 6}$



Fonte: O Autor (2016).

2.3.6 Validade do Método

Nas subseções 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 e 2.3.5 obtemos soluções para as cúbicas usando as ideias de Khayyam com uma linguagem algébrica moderna, que não era conhecida em sua época.

Para mostrar a dificuldade de resolução das equações cúbicas somente com a geometria, sem o auxílio da álgebra, como fez Khayyam, iremos apresentar a solução geométrica da equação do tipo $x^3 + px = q$, com p e q positivos (considera na subseção 2.3.2)

Krantz (2006) justifica a validade do procedimento de obtenção de raízes da equação do tipo $x^3 + px = q$, utilizando o conceito de *latus rectum*[8] de uma parábola, e pormenoriza como segue.

Considere a equação cúbica reduzida:

$$x^3 + px = q,$$

onde p e q são constantes positivas. O que se procura é encontrar todas as soluções positivas e reais.

O primeiro passo é escolher números positivos b e c tais que $b^2 = p$ e $b^2c = q$. Sabe-se que é possível fazer isto porque cada número positivo tem uma raiz quadrada $(b = \sqrt{p})$ e cada equação linear tem uma solução.

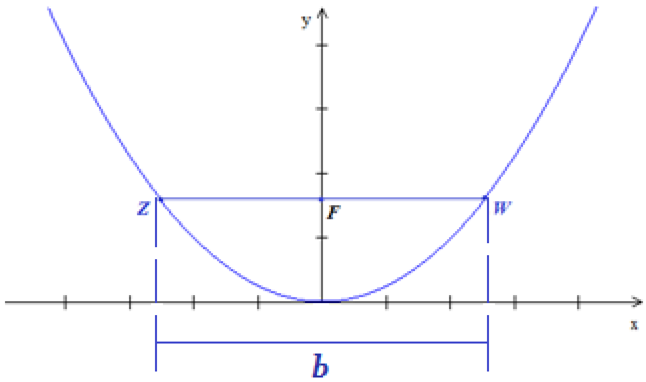
Realizando as substituições tem-se:

$$x^3 + b^2x = b^2c.$$

O próximo passo consiste em construir uma parábola cujo *latus rectum,* $\overline{ZW} = b$. É intuitivamente evidente que o comprimento do *latus rectum* exclusivamente determina a forma da parábola.

[8] O *latus rectum* de uma parábola de concavidade para cima é o segmento de reta horizontal que começa e termina na curva parabólica e passa através do foco — ver Figura 14.

Figura 14: O *latus rectum* $\overline{ZW} = b$ da parábola com foco em F



Fonte: O Autor (2016).

Observe que o ponto Q na Figura 15 é o vértice da parábola (podemos tomar Q como a origem se desejarmos). $\overline{QR}$ mostrado tem comprimento c. Considere agora o semicírculo com diâmetro $c = \overline{QR}$. O ponto P é definido como a interseção da parábola e o semicírculo. $\overline{PS}$ é traçado de tal forma a ser perpendicular a $\overline{QR}$. Então o comprimento $\overline{QS}$ é uma raiz da equação cúbica.

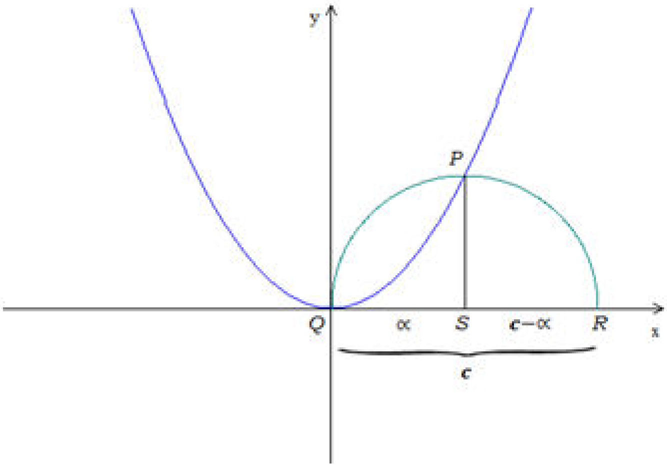
Esta última afirmação é verdadeira. Porque sabe-se que o *latus rectum* tem comprimento b, e ainda que o foco da parábola de vértice $(0,0)$ é o ponto $\left(0, \frac{b}{4}\right)$. Além disso, a reta diretriz é $y = -b/4$. Tomando a parábola definida pela equação $y = \frac{x^2}{b}$ e substituindo nesta os valores do ponto $P = (\propto, \overline{PS})$, tem-se:

$$\overline{PS} = \frac{\propto^2}{b} (2)$$

Esta relação pode ser reescrita como

$$\frac{b}{\propto} = \frac{\propto}{\overline{PS}} \quad (3)$$

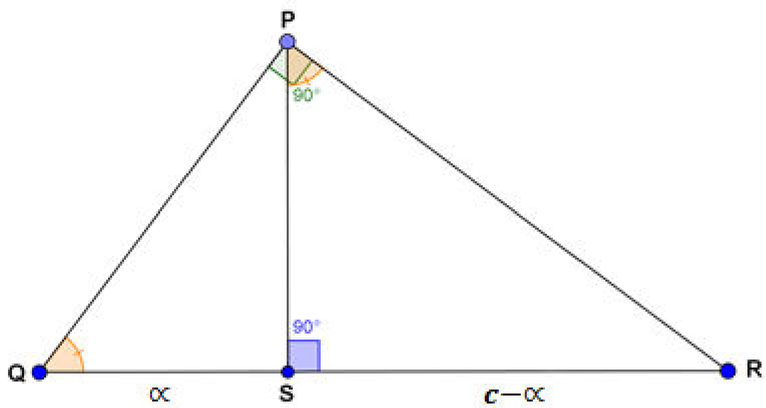
Figura 15: Intersecção da parábola com o semicírculo



Fonte: O Autor (2016).

Como $\overline{PS}$ é uma altura do triângulo ΔQPR (por construção), e como o ΔQPR inscrito, tem como um de seus lados $c = \overline{QR}$ (o diâmetro do semicírculo), então $\overline{QR}$ o triângulo ΔQPR é retângulo em P e sua hipotenusa é o diâmetro do semicírculo de diâmetro $\overline{QR}$ (Figura 16).

Figura 16: Triângulos retângulos $\boldsymbol{QPS}$ e $\boldsymbol{PRS}$



Fonte: O Autor (2016).

E, além disso, como $P\hat{S}Q \equiv P\hat{S}R = 90°$ e como $P\hat{Q}S + Q\hat{P}S = 90°$ e $P\hat{Q}S + P\hat{R}S = 90°$, então $Q\hat{P}S = P\hat{R}S$, logo ΔQPS *e* ΔPRS são semelhantes, pois possuem dois ângulos congruentes, conforme Figura 16, gerada pelo software *Geogebra*. Chega-se então à seguinte relação:

$$\frac{\propto}{\overline{PS}} = \frac{\overline{PS}}{c-\propto}(4)$$

As equações (3) e (4) juntos, dizem que

$$\frac{b}{\propto} = \frac{\overline{PS}}{c-\propto}(5)$$

Mas (2) diz que $\overline{PS} = \frac{\propto^2}{b}$.

Substituindo o valor de $\overline{PS}$ em (5) tem-se

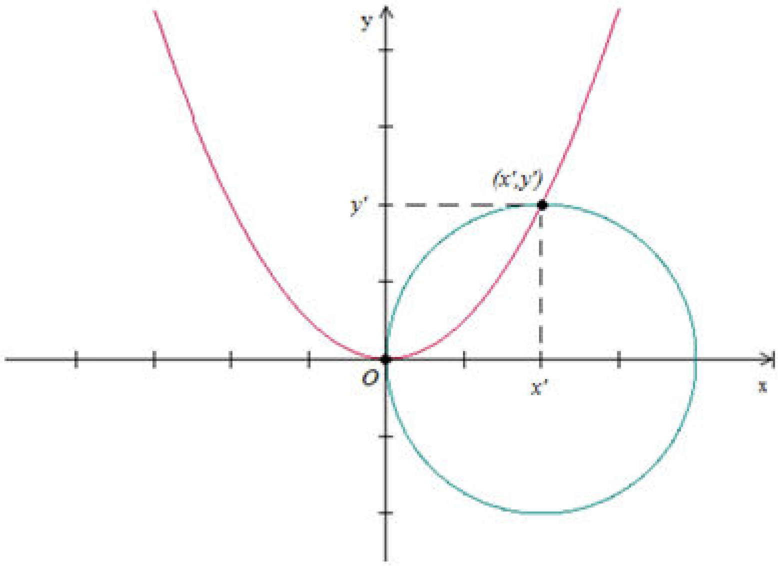
$$\frac{b}{\propto} = \frac{\propto^2/b}{c-a}$$

Simplificar esta última identidade chega-se à seguinte sentença:

$$\propto^3 + b^2 \propto = b^2c.$$

Note que a equação $\propto^3 + b^2 \propto = b^2c$ descreve o ponto P, ou seja, a intersecção das seções cônicas (ver definição de seções cônicas no Anexo A), e ao comparar com a equação $x^3 + b^2x = b^2c$, constata-se que $x = \alpha$, isto significa que achar o ponto de intersecção das seções cônicas é encontrar o zero da equação $x^3 + px = q$. Logo $\alpha = \overline{QS}$ é solução da cúbica.

Figura 17: Distância de $(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'})$ a $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y'})$ é a raiz da cúbica $\boldsymbol{x^3 + px = q}$



Fonte: O Autor (2016).

2.4 Cardano e Tartaglia e o método algébrico

A afirmação proferida por Khayyam de que era impossível resolver a equação de terceiro grau por meios exclusivamente algébricos incentivou os matemáticos dos séculos seguintes a se debruçarem sobre o tema. O primeiro a obter sucesso nesta tarefa e registrar sua descoberta foi Tartaglia, cerca de cinco séculos depois de Khayyam.

Niccolò Fontana, mais conhecido como Tartaglia, nasceu em 1500 em Bréscia, na Itália. Foi um matemático notável cujo nome está ligado especialmente à resolução da equação do terceiro grau.

Era filho de Michele Fontana, um funcionário dos Correios em Brescia. Embora sem muitos recursos financeiros, Michele deu a melhor condição possível à sua esposa e três filhos, e Niccolò frequentou a escola a partir da idade certa de quatro anos. A vida poderia ter sido muito diferente para Niccolò, se uma tragédia não tivesse acometido a família: quando ele tinha seis anos de idade, seu pai foi assassinado enquanto fazia sua rotineira entrega de cartas. Depois do assassinato de seu Pai, Niccolò e sua família mergulharam subitamente na pobreza. Em 1512, as tropas do rei Luís XII invadiram a Brescia durante a Guerra da *Liga de Cambrai*[9] contra Veneza. Durante a matança que se seguiu, o jovem Niccolò, então com 12 anos de idade, se refugiou na catedral local, com sua mãe e sua irmã mais nova, mas os franceses os encontraram e um soldado com uma espada cortou a mandíbula e palato de Niccolò, ocasionando a ele ferimentos faciais terríveis que quase o levaram à morte. Sem ter condição de pagar por cuidados médicos, sua mãe cuidou de seus ferimentos até que se recuperasse. Apesar da dedicação materna, Niccolò nunca mais iria recuperar sua fala normal, daí o apelido Tartaglia, ou gago. Para camuflar suas desfigurantes cicatrizes, mais tarde adota uma proeminente barba (O'CONNOR, 2016).

---

[9]A *Guerra da Liga de Cambrai*, ou *Guerra da Santa Liga***,** como também é conhecida, foi travada de 1508-1516. Foi um grande conflito nas Guerras Italianas, motivadas por uma disputa dinástica em que os soberanos franceses que pretendiam fazer valer seus direitos hereditários na Itália - sobre o Reino de Nápoles e o Ducado de Milão. Os principais participantes da guerra foram a França, o Estado Papal e a República de Veneza.

Autodidata, Tartaglia era um jovem com uma aptidão admirável para a matemática. Percebendo este brilhantismo, sua mãe encontrou em Ludovico Balbisonio um patrono para custear os estudos de Tartaglia que, após alguns anos em Pádua, retorna à Brescia, tornando-se impopular por supervalorizar seu talento matemático. Entre 1516 e 1518 deixa sua cidade natal e se muda para Verona a fim de ganhar a vida lecionando matemática. Em 1534, mudou para Veneza, e após participar com sucesso em um grande número de debates, adquire reputação de matemático proeminente.

2.4.1 O surgimento da fórmula

A primeira pessoa conhecida a solucionar algebricamente as equações cúbicas foi Scipione del Ferro, mas ele não registrou seu método e não disse a ninguém de sua realização. Somente em seu leito de morte, del Ferro repassou o segredo para seu discípulo Antonio Maria Del Fiore. Os matemáticos desta época costumavam categorizar as cúbicas por tipo. A equação que del Ferro havia solucionado e confiado a Fiore era a do tipo "incógnitas e cubos de igual números" ou, em notação moderna, $x^3 + px = q$. Como os números negativos não foram utilizados, isso levou a uma série de outros casos, mesmo para equações sem um termo quadrado.

Fiore se vangloriava de que era capaz de resolver equações cúbicas e um debate entre ele e Tartaglia foi organizado em 1535. Tartaglia também havia descoberto um modo de resolver a equação cúbica, mas de um tipo diferente da que del Ferro havia entregue a Fiore. Dois problemas propostos por seu amigo Zuanne da Coi levaram Tartaglia a uma solução geral das equações do tipo "quadrados e cubos iguais aos números" ou, em notação moderna, $x^3 + px^2 = q$. Para a competição entre Fiore e Tartaglia, cada um apresentou ao outro uma lista com 30 problemas. Extremamente confiante de que sua capacidade de resolver cúbicas seria o suficiente para derrotar Tartaglia, Fiore percebeu que os problemas propostos por seu adversário não podiam ser resolvidos com o método confiado a ele por del Ferro, expondo assim sua mediocridade como matemático. Por outro lado, Tartaglia após se debruçar nas primeiras horas de 13 de fevereiro de 1535, conseguiu um pouco antes do fim do prazo formular um método para a resolução dos problemas que lhe foram propostos. Ele tinha encontrado a resolução geral deste tipo de equação, e em seguida, foi capaz de resolver todos os trinta problemas de Fiore em menos de duas horas. Como seu adversário não tinha feito progresso nas questões propostas por Tartaglia, fora óbvio o resultado do debate.

2.4.2 Tartaglia e Cardano

Neste momento um novo personagem surge na história, Cardano, um conferencista público de matemática. Na Fundação Piatti, em Milão, nesta época, ele começara a escrever seu livro *Prática Arithmetica e Generalis,* um compêndio envolvendo Álgebra, Aritmética e Geometria. Ainda crendo no que dissera Luca Paccioli sobre a impossibilidade de se encontrar uma fórmula geral para a resolução das cúbicas, Cardano ficou muito intrigado quando Zuanne da Coi disse a ele sobre o debate entre Fiore e Tartaglia. Ele imediatamente começou a trabalhar buscando descobrir o método de Tartaglia, entretanto não obteve sucesso. Alguns anos mais tarde, em 1539, ele contatou Tartaglia, através de um intermediário, solicitando que lhe confidenciasse o método que seria incluído em um livro que ele estava publicando naquele ano. Tartaglia recusou esta oferta, declarando a intenção de publicar a fórmula em um livro de sua autoria, que seria escrito em uma data posterior. Cardano, não aceitou a negativa, pediu para Tartaglia lhe mostrasse o método, prometendo mantê-lo em segredo. Tartaglia, no entanto, recusou.

Cardano irritado escreveu uma carta a Tartaglia insultando-o, chamando-o de mesquinho, egoísta e destituído de senso de colaboração com o progresso da humanidade. Após trocas de insultos por cartas entre os dois matemáticos, em 1539, Cardano convidou o então rival a visitá-lo com a pretensa desculpa de ter com ele uma reunião com o governador de Milão. Tartaglia viu neste encontro uma oportunidade de sair da modesta condição de professor (GARBI, 2007). Então, em março desse mesmo ano, ele deixa Veneza e viaja para Milão. Para desânimo de Tartaglia, o governador não estava presente à reunião, somente Cardano, e depois de muita persuasão e juramentos que manteria segredo da fórmula, Tartaglia revelou a Cardano seu método por meio de um poema transcrito abaixo em italiano (língua original), extraído de *Quesiti et inventioni diverse* de Niccolò Tartaglia e posteriormente a tradução para o português.

1. *Quando chel cubo conle cose appresso*
   Se aqquaglia áqualche numero discreto
   Trouan duo altridifferenti in esso

   Dapoiterraiquesto per consueto
   Che"llorproductto sempre sia equale
   Alterzo cubo delle cose neto,

   El residuopoi suo generale
   Dellilorlaticubi ben sottrati
   Varra la tua cosa principale.

2. *In elsecondo de cotestiatti*
   Quando chel cubo restasse lui solo
   Tu osseruaraiquestaltricontratti,

   Del numer farai due tal part'àuolo
   Cheluna in laltrasiproducaschietto
   El terzocubodellecose in stolo

   Delle qual poi, per communprecetto
   Torrai li lati cubiinsiemegionti
   Etcotalsomma sara iltuoconcetto.

3. *El terzopoi de questinostriconti*
   Se soluecolsecondo se benguardi
   Che per natura sonquasicongionti.

4. *Questitrouai, non conpassitardi*
   Nelmillecinquecentè, quatroetrenta
   Confondamentibensaldègagliardi

   Nellacittadalmarintornocenta.

(TARTAGLIA, 1554, p.120)

1. *Quando o cubo com a coisa em apreço*
   Se igualam a qualquer número discreto
   Acha dois outros diferentes nisso

   Depois terás isto por consenso
   Que seu produto seja sempre igual
   Ao cubo do terço da coisa certo

   Depois, o resíduo geral
   Das raízes cúbicas subtraídas
   Será tua coisa principal

2. *Na segunda destas operações,*

Quando o cubo estiver sozinho
Observarás estas outras reduções

Do número farás dois, de tal forma
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa

Depois, por um preceito comum
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito

3. Depois, a terceira destas nossas contas
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são quase idênticas.

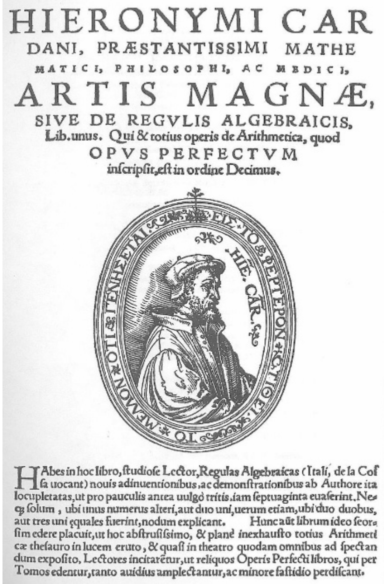
4. Isto encontrei, e não com passo lento
Em mil quinhentos e trinta e quatro
Com fundamentos bem firmes e sólidos

Na cidade que o mar rodea.

(MILLES, 1994)

Em 1545, Cardano quebrou seu juramento e publicou *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, ou *Ars Magna* (A Grande Arte, ou As Regras da Álgebra), que continha soluções para as equações cúbicas (obtidas pelo método de Tartaglia) e quárticas (método desenvolvido pelo seu assistente Lodovico Ferrari).

Figura 18: Página de rosto do Ars Magna



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Fonte: http://www.mathsisgoodforyou.com/artefacts/arsmagnacardano.htm

Tartaglia ficou extremamente irritado quando descobriu que Cardano havia publicado seu método, violando assim seu juramento, e sua animosidade em relação a Cardano transformou-se em profunda raiva. Em 1546, Tartaglia publicou um livro, *Quesiti et inventioni diverse (Novos Problemas e Invenções)* que declarou abertamente o seu lado da história e sua crença de que Cardano fez uso de mentiras para persuadi-lo a contar o seu método, e acrescentou alguns insultos pessoais dirigidos a seu desafeto. Contudo, estes ataques pouco ofuscaram o sucesso de *Ars Magna*, e seu autor tornou-se o mais prestigiado matemático de seu tempo.

2.4.3 Dedução da Fórmula de Cardano – Tartaglia

Tartaglia não considerou coeficientes negativos em suas equações, ele dividiu o problema da solução de equações cúbicas em três diferentes casos: $x^3 + ax = b$, $x^3 = ax + b$ e $x^3 + b = ax$, que são essencialmente o caso $x^3 + ax + b = 0$. Nos dois primeiros versos do poema enviado a Cardano, ele considerava equações do primeiro tipo (LIMA, 1991).

"*Quando o cubo com a coisa em apreço*
Se igualam a qualquer número discreto"

No décimo e décimo primeiro versos, ele ponderava a respeito das equações do segundo tipo.

"Na segunda destas operações,
Quando o cubo estiver sozinho"

e a partir do décimo nono verso começava a analisar o último tipo de equação

"Depois, a terceira destas nossas contas
Se resolve como a segunda, se observas bem".

Devido à inexistência da linguagem matemática moderna, Tartaglia utilizava o *"número"* para representar o termo independente b, o *"cubo"* para o termo cúbico e *"coisas juntas",* a fim de designar o termo de primeiro grau. A significação completa dos versos do poema de Tartaglia, em linguagem matemática moderna, pode ser conferida no Anexo B, constante ao final deste trabalho.

O método contido no poema de Tartaglia e publicado em *Ars Magna* para a resolução das equações do 3º grau, utilizando uma linguagem matemática familiar, pode ser assim descrito:

Dada a equação do terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Ela é equivalente a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Logo, para resolver a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, basta considerar a equação cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \ (1)$$

em que o coeficiente de x^3 é igual a 1.

Realizando uma mudança de variável tomando $x = y - m$ e substituindo em (1), teremos:

$$(y - m)^3 + a(y - m)^2 + b(y - m) + c = 0$$

$$y^3 - 3y^2m + 3ym^2 - m^3 + ay^2 - 2aym + am^2 + by - bm + c = 0$$

$$y^3 + (-3m + a)y^2 + (3m^2 - 2am + b)y + (-m^3 + am^2 - bm + c) = 0$$

Deseja-se que o termo y^2 seja nulo. Então:

$$-3m + a = 0$$

$$m = \frac{a}{3}$$

Logo $x = y - \frac{a}{3}$.

Ou seja, dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a substituição $x = y - \frac{a}{3}$ a transforma em

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Tomando $-\frac{a^2}{3} + b = \mathrm{p}$ e $\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \mathrm{q}$, tem-se uma equação reduzida na incógnita y:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Portanto, é suficiente estudar as equações cúbicas do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

A fim de resolver esta equação acima, tomemos $x = u + v$, isto é, tomemos a raiz x como soma de outros dois números u e v.

Substituindo na equação $x^3 + px + q = 0$, temos:

$$(u + v)^3 + (u + v)p + q = 0$$

$$u^3 + 3uv^2 + 3u^2v + v^3 + pu + pv + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

$$(u^3 + v^3) + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Portanto, é possível encontrar números u e v tais que:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

Então $x = u + v$ será uma raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

O problema de encontrar u^3 e v^3 conhecendo o seu produto e sua soma é, como sabemos, de fácil solução. Basta tomarmos u^3 e v^3 como raízes da equação do segundo grau do tipo

$$w^2 - Sw + P = 0,$$

onde

$$S = u^3 + v^3 = -q$$

$$P = u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

são respectivamente a soma e o produto das raízes. Logo, pode-se escrever essa equação como:

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0 \ (2)$$

Utilizando a Fórmula de Bhaskara $w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ em (2), chega-se à conclusão que:

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \text{onde } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \Delta = D \ (Discriminante)$$

Como u^3 e v^3 são raízes dessa equação, então:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \rightarrow u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \rightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Para concluir. Dado que $x = u + v$, então:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Essa fórmula fornece uma raiz da equação cúbica do tipo $x^3 + px + q = 0$.

Agora utilizando um pouco de Cálculo, mais especificamente a definição de continuidade de uma função em um intervalo fechado e o Teorema de Bolzano, "Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$", explicaremos a natureza das raízes da equação $x^3 + px + q = 0$ a partir do discriminante $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. A argumentação utilizada será a mesma adotada pelo professor Elon (LIMA, 1991).

Examinemos o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 + px + q$. Cada ponto que o gráfico cortar o eixo da abscissa corresponde a uma raiz real da equação $x^3 + px + q = 0$.

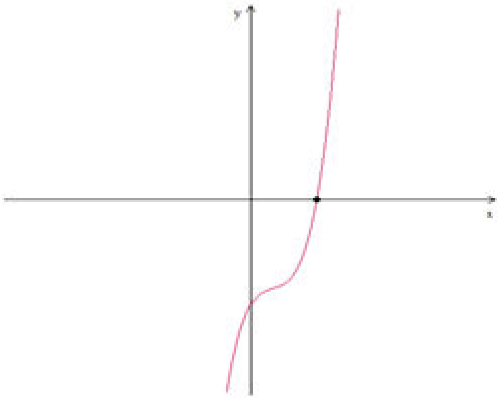
Primeiramente, observemos que $f(x) = x^3 + px + q$ pode ser escrita como $f(x) = x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right)$.

Agora tomemos um valor absoluto para x muito grande. Repare que ao tomar este x, o valor dentro dos parênteses será um número positivo muito próximo de um, pois o $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{p}{x^2}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{q}{x^3}$ são iguais a zero, e como x^3 neste caso será positivo, então $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = +\infty$. Agora se tomarmos x muito grande negativo, teremos que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{p}{x^2}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{q}{x^3}$ também são iguais a zero. E como x^3, que será um número muito grande negativo, logo $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = -\infty$.

Sabemos que a função $f(x)$ é contínua em todo o seu domínio (propriedade gozada por todas as funções polinomiais), e, além disso, como acabamos de argumentar, a função $f(x) > 0$ para $x \to +\infty$ e $f(x) < 0$ para $x \to -\infty$, logo pelo Teorema de Bolzano $f(x)$ possui pelo menos uma raiz real. Ou seja, dada uma função polinomial cúbica, esta cortará o eixo das abscissas em pelo menos um ponto, ou equivalente, e a função polinomial cúbica terá pelo menos uma raiz real.

Quando $p > 0$, a derivada a primeira $f'(x) = 3x^2 + p$ é sempre positiva, logo f é uma função crescente que corta o eixo das abscissas em somente um ponto. Logo, quando $p > 0$, a equação $x^3 + px + q = 0$ tem uma única raiz real, a qual pode ser positiva, negativa ou nula (Figuras 19, 20 e 21), e duas raízes complexas conjugadas[10]. A raiz real nula ocorre se $q = 0$.

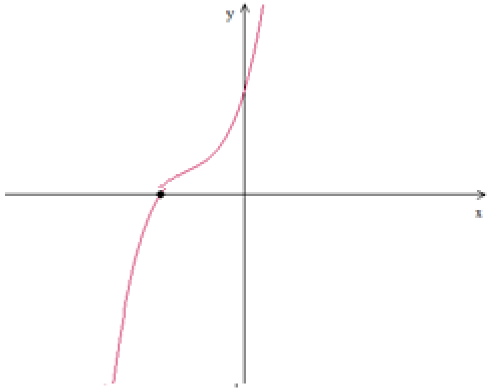
Figura 19: Uma raiz real positiva



Fonte: O Autor (2016).

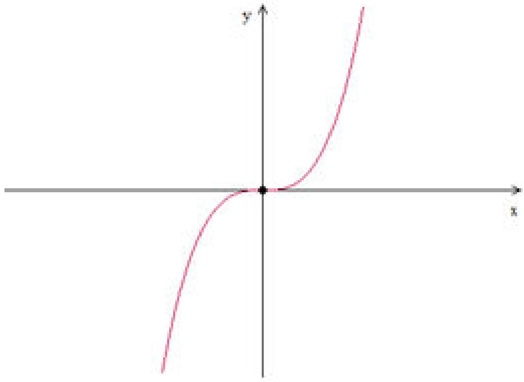
[10]Uma equação do terceiro grau não pode possuir 2 raízes reais e uma conjugada, pois pelo Teorema das Raízes Conjugadas, estas aparecem somente aos pares. Teorema das Raízes Conjugadas: “Se o número complexo $z = a - bi$ é raiz de uma equação algébrica com coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ é também raiz dessa equação”.

Figura 20: Uma raiz real negativa



Fonte: O Autor (2016).

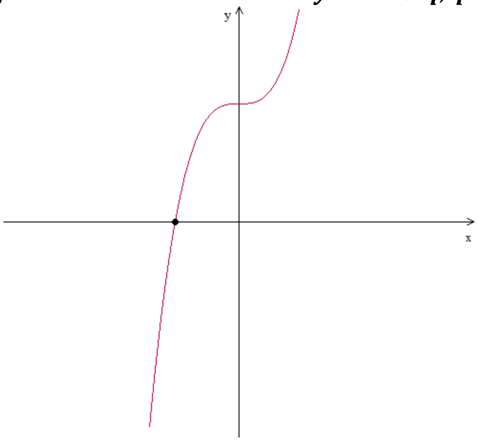
Figura 21: Uma raiz nula



Fonte: O Autor (2016).

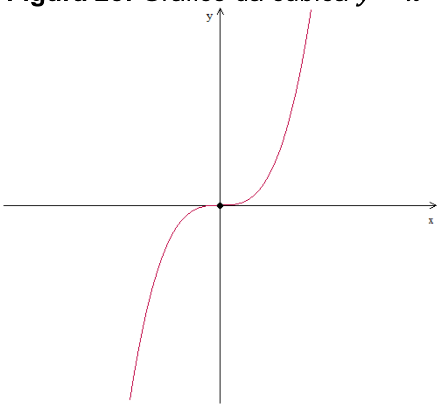
Quando $p = 0$, a equação reduz-se a $x^3 = -q$, logo, tem uma raiz real e duas complexas quando $q \neq 0$, e uma raiz real tripla (igual a zero) se $q = 0$. Os gráficos correspondentes são dados pela Figuras 22 e 23.

Figura 22: Gráfico da cúbica $\boldsymbol{y = x^3 + q, q \neq 0}$



Fonte: O Autor (2016).

Figura 23: Gráfico da cúbica $\boldsymbol{y = x^3}$



Fonte: O Autor (2016).

Consideremos agora o caso em que $p < 0$. Então podemos escrever $p = -3a^2$, $a > 0$. A função se torna $f(x) = x^3 - 3a^2x + q$, e sua derivada é $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$, que se anula nos pontos $x = \pm a$. Como a derivada a segunda $f''(x) = 6x$ é negativa no ponto $x = -a$, este é um ponto de máximo. Da mesma forma $f''(x) = 6x$ é positiva no ponto $x = a$, este é um ponto de mínimo.

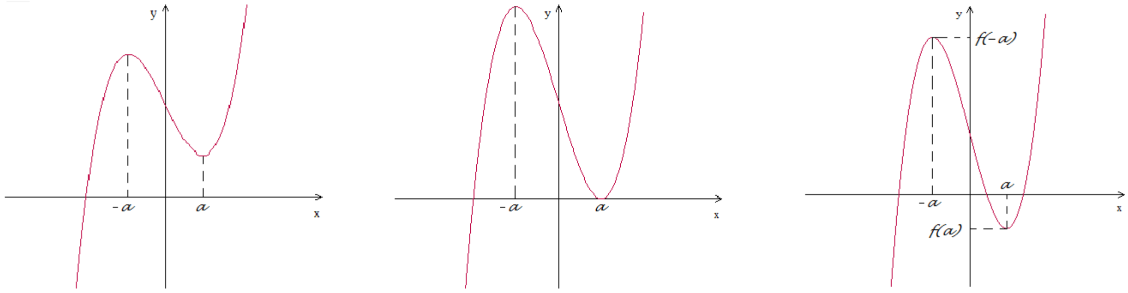
O gráfico de f representa uma das formas ilustradas na Figura 24, conforme a equação $x^3 + px + q = 0$ tenha uma raiz real e duas complexas, uma raiz real simples e uma dupla, ou três raízes reais distintas.

Estes três casos correspondem, respectivamente, a $f(a).f(-a) > 0$, $f(a).f(-a) = 0$ e $f(a).f(-a) < 0$. Temos:

$f(a).f(-a) = (q - 2a^3)(q + 2a^3) = q^2 - 4a^6 = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = 4D$, onde $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.

(Lembremos que $p = -3a^2$). Portanto, o sinal de $f(a).f(-a)$ é o mesmo do discriminante D.

Figura 24: Gráfico da cúbica $\boldsymbol{x^3 + px + q = 0}$ com uma, duas ou três raízes reais distintas



Fonte: O Autor (2016).

Concluímos então que a equação do terceiro grau $x^3 + px + q = 0$ tem uma, duas ou três raízes reais distintas, conforme $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ seja positivo, nulo, ou negativo, respectivamente.

- Se $D > 0$, então a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.
- Se $D = 0$, tem-se três raízes reais, sendo uma repetida (dupla).
- Se $D < 0$, a fórmula exprime $x = u + v$ como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. No entanto, é este o caso em que a equação possui três raízes reais distintas. Este é chamado tradicionalmente o "caso irredutível" porque, ao tentar eliminar os radicais, recai-se noutra equação do terceiro grau.

Exemplo. Considere a equação $x^3 - 6x - 40 = 0$, com $p = -6$ e $q = -40$ (MOREIRA, 1994).

Aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia, temos:

$$\sqrt[3]{\frac{40}{2} + \sqrt{\frac{40^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{40}{2} - \sqrt{\frac{40^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{400 - 8}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{400 - 8}}$$

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{2^3.7^2}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{2^3.7^2}}$$

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

Tem-se então, que $D = 392 > 0$, logo a equação $x^3 - 6x - 40 = 0$ possui uma raiz real $(x = 4)$ e duas raízes complexas e conjugadas.

Para obter as raízes complexas, basta dividir a $x^3 - 6x - 40$ por $(x - 4)$ e usar Bhaskara.

$$\frac{x^3 - 6x - 40}{x - 4} = x^2 + 4x + 10$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 40}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}i}{2} = -2 \pm \sqrt{6}i$$

Logo, as raízes complexas são: $-2 + \sqrt{6}i$ e $-2 - \sqrt{6}i$.

Portanto, as raízes desta cúbica são: 4, $-2 + \sqrt{6}i$ e $-2 - \sqrt{6}i$.

3 O CASO IRREDUTÍVEL

Os resultados publicados por Cardano na *Ars Magna* impulsionou grandemente a pesquisa em Álgebra em diversos campos, e era natural que estudos convergissem para a busca da solução de equações de quinto grau e também a generalização para equações polinomiais de grau n. Contudo, os matemáticos dos próximos dois séculos enfrentaram problemas algébricos decorrentes da fórmula de Cardano-Tartaglia que parecia insolúvel, assim como foram em seu tempo os três problemas clássicos da antiguidade (duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo).

A grande dificuldade encontrada com a fórmula de Cardano-Tartaglia,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e observada pelo próprio Cardano. Eram os denominados "*Casus Irreducibilis*", em que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Ou seja, os casos em que $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ a fórmula levava inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos, ou como denotadas mais tarde por Descartes, a números imaginários.

Cardano percebeu que, ao aplicar sua fórmula a $x^3 - 15x - 4 = 0$, se obtinha como resultado $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Ele sabia que não existia raiz quadrada de número negativo, e, no entanto, sabia por inspeção que 4 era uma solução da equação.

Girolano Cardano se referia às raízes quadradas de números negativos como "sofísticas" e concluía que o resultado obtido nesse caso era "tão sutil quanto inútil". Coube a Rafael Bombelli estudar as sutilezas desse resultado e propor uma nova abordagem ao problema (BOYER, 1996).

3.1 Rafael Bombelli e os números complexos

Rafael Bombelli foi um matemático italiano que nasceu em 1526 na cidade de Bologna e faleceu em 1572, provavelmente em Roma. Possivelmente foi um dos matemáticos mais importantes da Itália, sendo pioneiro em determinar regras algébricas dos números negativos e números complexos. Sua principal obra foi *L'Algebra*, composta de cinco volumes, e só foi publicada no ano seguinte à sua morte (1573).

Figura 25: Capa da edição bolonhesa de *L'Algebra* de 1579


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Fonte: http://www.people.iup.edu/gsstoudt/history/images/bombelli.html

Bombelli era o mais velho dentre os seis filhos de Antonio Mazzoli, cuja família havia chegado a Bolonha no século anterior (1443). A família Mazzoli era partidária da família Bentivoglio, governante da cidade, contudo, por ocasião do pontificado do papa Júlio II, Giovanni II Bentivoglio foi destituído de seu cargo e a família Mazzoli teve seus bens confiscados, e Bolonha passou a ser administrada pela Igreja Católica. Em 1506, os Bentivoglio's foram mandados para o exílio. Dois anos depois, em 1508, uma tentativa de golpe orquestrada pelos Bentivoglio's e apoiada pelo avô de Antonio Mazzoli foi debelada e todos os envolvidos foram executados. A família de Bombelli teve seus bens confiscados, passando por uma série de privações até terem suas propriedades devolvidas a Antonio Mazzoli (O'CONNOR, 2016).

Rafael trocou seu sobrenome Mazzoli para Bombelli, na tentativa de disfarçar sua descendência. Depois de várias atividades menores, e mesmo sem educação universitária, passou a trabalhar para um nobre romano, Alessandro Rufini, futuro bispo de Melfi. Neste período, interessou-se por matemática e envolveu-se com o assunto preeminente da época, que era a solução das cúbicas e quárticas, e os métodos de del Ferro, Fior, Tartaglia, Cardano e Ferrari.

Em 1557, partindo dos estudos de Cardano escreveu seu famoso livro de álgebra, *L'Algebra*. Composta de cinco livros, os três primeiros foram publicados em 1572. Infelizmente, Bombelli faleceu após a publicação do terceiro volume de sua obra, não sendo capaz de concluir a parte geométrica dos dois últimos volumes. No entanto, em 1923 o historiador da matemática Ettore Bortolotti (1866-1947) encontrou em Bolonha dois manuscritos inéditos do Tratado de Bombelli: o primeiro, mantido no *Archiginnasio*[11], é dividido em cinco livros - dois a mais que a versão impressa - enquanto o segundo, mantido na Biblioteca da Universidade de Bolonha, que inclui apenas o Livro III e o início do livro IV. Em 1929, Bortolotti republicou os cinco livros (1929), uma contribuição essencial para o estudo dos números complexos.

Em *L'Algebra,* Bombelli deu um panorama minucioso da álgebra, então conhecida e inclui sua importante contribuição: os números complexos. Bombelli foi a primeira pessoa a descrever as regras de operações para números negativos e também para os números complexos. Ele denota $\sqrt{-n}$ como "*plus* de *minus*" e $-\sqrt{-n}$ como "*minus* de *minus*" (O'CONNOR, 2016). As regras de operações definidas seguem conforme abaixo:

$MAIS\ vezes\ MAIS$ é $igual\ a\ MAIS, ou\ (+.+=+)$;

$MENOS\ vezes\ MENOS$ é $igual\ a\ MAIS, ou\ (-.-=+)$;

$MAIS\ vezes\ MENOS$ é $igual\ a\ MENOS, ou\ (+.-=-)$;

$MENOS\ vezes\ MAIS$ é $igual\ a\ MENOS, ou\ (-.+=-)$;

$MAIS\ RAIZ\ QUADRADA\ DE\ -n\ vezes\ MAIS\ RAIZ\ QUADRADA\ DE\ -n\ =$

[11]O *Archiginnasio* foi o edifício principal do "*Studium*", como foi chamada a Universidade de Bolonha, entre os anos de 1563 até 1803, quando se tornou a sede do Instituto de Ciência.

$-\,n, ou\left(\sqrt{-n}.\sqrt{-n} = -n\right)$;

$MAIS\ RAIZ\ QUADRADA\ DE\ \ -n\ vezes\ MENOS\ \ RAIZ\ QUADRADA\ DE\ \ -n\ =$
$+n, ou\ \left(\sqrt{-n}.\left(-\sqrt{-n}\right) = +n\right)$;

$MENOS\ RAIZ\ QUADRADA\ DE\ \ -n\ vezes\ MAIS\ RAIZ\ QUADRADA\ DE\ \ -n\ =$
$+n, ou\ \left(-\sqrt{-n}.\sqrt{-n} = +n\right)$;

$MENOS\ RAIZ\ QUADRADA\ DE\ \ -n\ vezes\ MENOS\ RAIZ\ QUADRADA\ DE\ \ -n\ = -n,$
$ou\left(\left(-\sqrt{-n}\right).\left(-\sqrt{-n}\right) = -n\right)$.

Depois de dar esta descrição da multiplicação de números complexos, Bombelli criou também uma regra para soma e subtração de dois números da forma $a + b\sqrt{-1}$:

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right) + \left(c + d\sqrt{-1}\right) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}$$

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right) - \left(c + d\sqrt{-1}\right) = (a - c) + (b - d)\sqrt{-1}$$

Em seguida, ele mostrou que mediante as operações estabelecidas para lidar com números complexos, que existe solução para a cúbica, mesmo quando o discriminante da fórmula de Cardano-Tartaglia fosse um número negativo (FERREIRA, 2009).

Finalmente, convém fazer alguns comentários sobre a notação de Bombelli ao descrever uma equação de 3º grau. Autores como Cardano não usaram nenhum símbolo em toda sua argumentação. Outros, como Luca Pacioli utilizaram uma notação limitada, no entanto, Bombelli desenvolveu uma sofisticada notação matemática, com diversos símbolos. Na tabela 3 segue alguns exemplos da notação de Bombelli.

Tabela 3: Notação matemática de Bombelli e a atual

Notação moderna	Publicada por Bombelli	Escrita por Bombelli
$5x$	$\overset{\overset{1}{\smile}}{5}$	$\overset{\overset{1}{\smile}}{5}$
$5x^2$	$\overset{\overset{2}{\smile}}{5}$	$\overset{\overset{2}{\smile}}{5}$
$\sqrt{4 + \sqrt{6}}$	Rq⌊4pRq6⌋	R⌊4pR6⌋
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{0 - 121}}$	Rc⌊2pRq⌊0m121⌋⌋	R^3⌊2pR⌊0m121⌋⌋

Fonte: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli.html

Parece ser muito justo considerar Bombelli como o inventor de números complexos. Ninguém antes havia dado as regras para trabalhar com tais números, nem tinham sugerido que o trabalho com tais números poderia ser útil (ao contrário do que afirmará Cardano).

Diante das ferramentas criadas por Bombelli foi possível demonstrar que a raiz encontrada por Cardano para a equação de terceiro grau $x^3 - 15x - 4 = 0$, $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, era igual a 4 (valor da raiz obtida por inspeção). Bombelli decidiu considerar que as raízes quadradas de números negativos fossem números verdadeiros. Ele concebeu que a raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$ seria um "número" do tipo $a + \sqrt{b}$ e a raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$ seria da forma $a - \sqrt{b}$. Neste caso, ter-se-ia que $x = a + \sqrt{b} + a - \sqrt{b} = 4$, donde é fácil deduzir que $a = 2$. Assumindo que se aplicam a estes números as regras usuais dos cálculos algébricos teremos

$$2 + \sqrt{b} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

$$\left(2 + \sqrt{b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

$$\left(2 + \sqrt{b}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$8 + 12\sqrt{b} + 6b + b\sqrt{b} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$(8 + 6b) + (12 + b)\sqrt{b} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

A partir desta última relação não foi difícil perceber que $b = -1$ e verificar que, de fato,

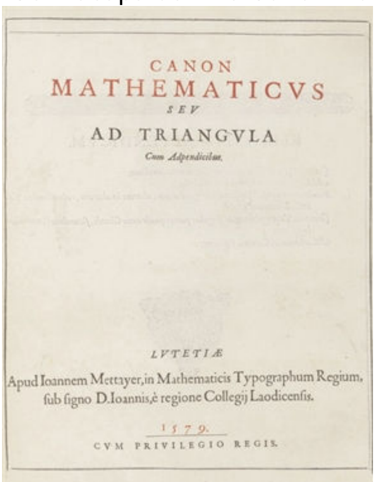
$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121} \text{ e } \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

3.2 François Viéte e o método trigonométrico

François Viète, ou François Viette, nascido em Fontenay-le-Comte em 1540 e morreu em Paris em 23 de fevereiro de 1603. Nascido em uma família burguesa, possuía formação jurídica, ele era o advogado de proeminentes famílias protestante na França. Como matemático não profissional fez contribuições significativas para a trigonometria, álgebra e geometria (STRUIK, 1997).

Sua primeira obra publicada em 1579, o *Canon Mathematicvs* tem tabelas trigonométricas computados até a nona casa decimal e uma coleção de fórmulas trigonométricas. Por causa de um mal-entendido com o editor e por conter inúmeros erros de impressão, este volume não foi incluído em suas obras completas.

Figura 26: Contracapa do livro *Canon Mathematicvs*

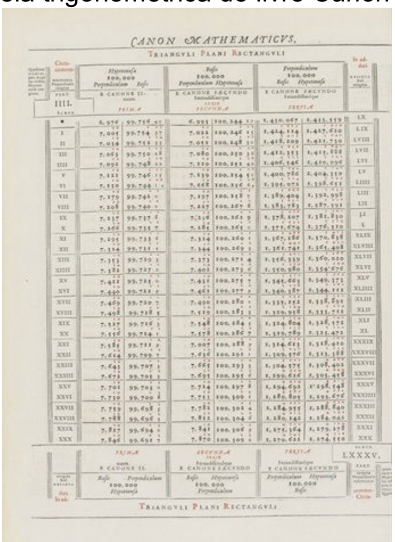


CANON
MATHEMATICVS
SEV
AD TRIANGVLA
Cum Adpendicibus.

LVTETIÆ
Apud Ioannem Mettayer, in Mathematicis Typographum Regium, ſub ſigno D.Ioannis, è regione Collegij Laodicenſis.
1579.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Fonte: http://www.christies.com/lotfinder/books-manuscripts/viete-francois-canon-mathematicus-seu-ad-5084361-details.aspx

Tabela 4: Tabela trigonométrica do livro *Canon Mathematicvs*



CANON MATHEMATICVS.
TRIANGVLI PLANI RECTANGVLI

Fonte: http://www.christies.com/lotfinder/books-manuscripts/viete-francois-canon-mathematicus-seu-ad-5084361-details.aspx

Na geometria François Viète deu uma solução para o *Problema de Apolônio*[12], desenvolvido estudos sobre os sólidos, e publicou métodos para a trisecção do ângulo e a construção do heptágono regular, utilizando além dos instrumentos euclidianos uma régua graduada.

Viète calculou também o valor de π, utilizando o *Método de Arquimedes*[13], até a décima casa decimal, e deu em seu livro *Opera Mathematica* um produto infinito como fórmula de obter o valor de π. Esta fórmula foi das primeiras ocorrências de um produto infinito:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}.\dots$$

Apesar dos diversos estudos em geometria Viète se destacou nas contribuições feitas à trigonometria e especialmente a álgebra. Em 1591 com a publicação de seu livro de referência, *Em Artem Isagoge Analyticem* (Introdução as Artes Analíticas) ou *Isagoge* (Introdução) há início uma revolução na forma de se escrever álgebra, e esta foi seguida por outros grandes matemáticos como Harriot, Oughtred, Girard e Descartes, os quais desenvolveram as bases para álgebra moderna. Além dos livros anteriormente mencionados Viète escreveu *De numerosa potestatum... resolutine, Variorum de rebus mathematicis, De aequationum recognitione et emandatione, Opera Mathematica, Responsum, Sectiones angulares, Varia responsa, Zeteticorum libri quinque*.

Viète foi o primeiro matemático a usar letras a fim de representar os parâmetros ou coeficientes constantes em uma equação. Assim, enquanto Cardano havia resolvido casos particulares, tais como as equações cúbicas

$$x^3+6x=45,$$

Viète poderia tratá-las em sua forma geral

---

[12]O enunciado do *Problema de Apolônio*: "Dados três objetos do plano: um ponto, uma reta ou uma circunferência, construir todas as retas e todas as circunferências tangentes aos três simultaneamente".

[13]O *Método de Arquimedes* consiste em encontrar o valor aproximado de π, a partir da construção de duas sequências de números, Sn e sn. A primeira, Sn, é construída pelo cálculo do valor dos lados da sequência de polígonos circunscritos no círculo de raio unitário, e a segunda sequência, sn, refere-se ao valor do lado dos polígonos inscritos. Os polígonos circunscritos se aproximam do círculo, por fora, e os polígonos inscritos se aproximam do círculo por dentro. O limite, das sequências dos perímetros destes polígonos e se aproximam do comprimento da circunferência, 2 π. Calculando assim boas aproximações para π, a maior e a menor.

$$x^3 + px = q$$

em que p *e* q são constantes.

A álgebra de Viète foi significativamente mais sistemática na manipulação formal das equações do que a de seus antecessores, mas ainda não atinge a facilidade de técnicas modernas, porque ele não considerou os números negativos, e ainda não possuía um símbolo para representar igualdade. Por exemplo, em seu livro *Opera Mathematica* ele escreve a equação cúbica da seguinte maneira:

$A\ cubus + B\ quad.in\ A, B\ aequetur\ quad.in\ Z$ (VIÈTE, 1646, p. 86).

Podemos escrever isso em grafia matemática moderna como:

$$A^3 + B^2A = B^2Z.$$

Ele usou vogais, como A, para representar incógnitas, e consoantes, como a B, Z, para denotar constantes.

Apesar do avanço em relação à notação, o tratamento de Viète as equações foi em alguns aspectos menos "moderno" do que Bombelli. Ele era avesso a números negativos, algo que ele não admitia como solução. Sua postura diante dos números complexos foi ainda mais retrógrada (DERBYSHIRE, 2006).

Segundo o mesmo autor, Viète foi o primeiro matemático a definir as relações entre os coeficientes das equações em função da soma e produto de suas raízes, para equações de até o quinto grau. Coube ao também francês, Albert Girard, generalizar a relação para equações de grau qualquer, que foi publicada em seu livro *L'Invention Nouvelle em L'Algebre* (Novas descobertas em álgebra), em 1629, 14 anos após a publicação do ensaio de Viète, sobre este tema, por seu amigo Alexander Anderson.

As relações entre os coeficientes de uma dada equação em função da soma e produto de suas raízes podem ser assim obtidas:

Considere primeiramente a equação quadrática $x^2 + px + q = 0$. Suponha que as duas soluções da equação sejam α e β. O trinômio $x^2 + px + q = 0$ pode ser escrito pela forma fatorada $(x - \alpha)$ $(x - \beta)$, pois temos:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

Comparando esta equação com a original, temos

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$$

De modo análogo pode ser definidas as relações para a equação cúbica $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Se $\propto$, $\beta \; e \; \gamma$ são as soluções desta equação então, temos

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -p \\ \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = q \\ \alpha\beta\gamma = -r \end{cases}$$

E também de modo semelhante em relação à quártica $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ temos:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = -p \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \gamma\alpha + \beta\delta + \alpha\delta = q \\ \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta + \alpha\beta\gamma = -r \\ \alpha\beta\gamma\delta = s \end{cases}$$

E para a quíntica $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = -p \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha + \alpha\gamma + \beta\delta + \gamma\varepsilon + \delta\alpha + \varepsilon\beta = q \\ \gamma\delta\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \beta\delta\varepsilon + \alpha\gamma\varepsilon + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\varepsilon + \alpha\gamma\delta = -r \\ \beta\gamma\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon\alpha + \delta\varepsilon\alpha\beta + \varepsilon\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma\delta = s \\ \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = -t \end{cases}$$

Viète também forneceu solução para algumas equações cúbicas enquadradas nos *casus irreducibilis*, contudo o fez em um livro sobre geometria, onde ele oferece uma solução trigonométrica com base na fórmula para $\cos(3\theta)$ em termos de $cos\theta$.

A demonstração obtida por Viète que apresentaremos segue os passos descritos por (GARBI, 2007).

Demonstração: Dada a equação cúbica reduzida

$$x^3 + px + q = 0$$

Tomando

$$x = z - \frac{p}{3z}$$

E substituindo em $x^3 + px + q = 0$, temos

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0$$

$$z^3 - 3z^2\frac{p}{3z} + 3z\frac{p^2}{9z^2} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

$$z^3 - zp + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

$$z^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 . \frac{1}{z^3} + q = 0$$

Multiplicando a equação acima por z^3 teremos

$$z^6 + qz^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

$$(z^3)^2 + q(z^3) - \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Que é uma equação do 2º grau em z^3 e, assim, tomando $z^3 = z'$

$$(z')^2 + qz' - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Aplicando Bhaskara nesta última equação temos

$$z' = z^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}4\left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Substituindo em $x = z - \frac{p}{3z}$, temos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3.\sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}.$$

Embora a equação obtida seja diferente da encontrada por Tartaglia, ambos os métodos fornecem resultados equivalentes. Contudo permaneciam as dúvidas sobre o número de raízes e as operações com números complexos, quando o discriminante $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ era negativo ($\Delta < 0$).

Viète procurou encontrar a solução para a famosa equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, a qual tanto atormentava os matemáticos até então. Era sabido que esta equação possuía todas suas raízes reais, entretanto não podiam ser encontradas pela fórmula de Cardano-Tartaglia ou pela fórmula que ele próprio deduzira, pois implicavam em trabalhar com números "imaginários". Em um instante de genialidade ele encontrou uma solução trigonométrica para o problema.

O caminho, como não poderia de deixar de ser, tratando-se de Viète, foi uma substituição de incógnitas. Enquanto que a fórmula de Cardano-Tartaglia fazia a substituição $x = a + t$, onde $t = -\frac{a}{3}$, no método trigonométrico de Viète, utiliza-se a substituição $x = k\cos\theta$.

Seja

$$x^3 + px + q = 0.$$

Realizando a substituição de $x = k\cos\theta$ temos

$$(k\cos\theta)^3 + p(k\cos\theta) + q = 0$$

$$k^3\cos^3\theta + pk\cos\theta + q = 0\ (\div\ k^3)$$

$$\cos^3\theta + \frac{p}{k^2}\cos\theta + \frac{q}{k^3} = 0\ (1)$$

Viète como grande conhecedor de trigonometria sabia que

$$\cos(3\theta) = \cos\theta(4cos^2\theta - 3) \text{ ou}$$

$$cos^3\theta - \frac{3}{4}cos\theta - \frac{cos\theta}{4} = 0 \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), estabeleceu as seguintes equivalências:

$$\frac{p}{k^2} = -\frac{3}{4} \rightarrow k^2 = -\frac{4p}{3} \rightarrow k = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad (3)$$

$$\frac{q}{k^3} = -\frac{cos3\theta}{4} \rightarrow cos3\theta = -\frac{4q}{k^3} = \frac{-4q}{\left(\pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3} = \frac{-4q}{\pm 8\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}}$$

$$cos3\theta = \pm\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}} \quad (4)$$

Portanto obteve $cos3\theta$ como função de p e q, logo era possível determinar $cos\theta$ através de tábuas trigonométricas. Como $x = k\cos\theta$, basta apenas multiplicar o valor de k obtido em (3) por $cos\theta$ e obter o valor de x, mesmo quando $\Delta < 0$. Assim Viète descobriu uma forma de driblar os números complexos, já que era relutante em trabalhar com eles.

Voltemos agora para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ e vejamos que resultados obtidos pela aplicação do método trigonométrico descrito acima.

Neste caso,

$$p = -15 \; e \; q = -4$$

Assim aplicando em (3) temos

$$k = \pm 2\sqrt{-\frac{(-15)}{3}} = \pm 2\sqrt{5}.$$

Para $k = 2\sqrt{5}$, aplicando em (4)temos

$$cos3\theta = \frac{-4(-4)}{8\sqrt{\left(\frac{15}{3}\right)^3}} = \frac{16}{40\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25} \approx 0{,}178885438$$

Ele deduziu como $cos3\theta \approx 0{,}17888543$, então pelas tabelas trigonométricas construídas, 3θ só poderia ser $79°41'57"$, logo $\theta \approx 26°33'59"$ e $cos\theta \approx 0{,}894427$, e portanto,

$$x \approx 2\sqrt{5}.\,0{,}894427 \approx 3{,}999999 \text{ (o valor exato é 4).}$$

Para $k = -2\sqrt{5}$, aplicando em (4) temos

$$cos3\theta = \frac{-4(-4)}{-8\sqrt{\left(\frac{15}{3}\right)^3}} = -\frac{16}{40\sqrt{5}} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{25} \approx -0{,}178885438$$

Se $cos3\theta \approx -0{,}178885438$, ignorando a multiplicidade de ângulos que satisfazem esta relação, $3\theta \approx 100°18'03"$, $\theta \approx 33°26'01"$, $cos\theta \approx 0{,}834512$ e, portanto,

$$x \approx \left(-2\sqrt{5}\right)(0{,}834512) \approx -3{,}732051 \text{ (o valor exato de } x \text{ é } -2-\sqrt{3} \approx -3{,}7320508\text{).}$$

Acabamos de encontrar os valores de duas raízes da equação, com grande aproximação, contudo restaram duas perguntas. Como encontrar a terceira raiz, sabido que ela existe? E o porquê este método não a exibiu?

Neste ponto Viète cometeu um pequeno engano, pois sabemos que a equação trigonométrica $cos\theta = m$, $-1 \leq m \leq 1$, tem infinitas soluções do tipo $\theta = 2\pi n \pm \alpha$, onde α é o menor dos arcos positivos para os quais $cos\alpha = m$.

Tivessem sido corretamente resolvidas as duas equações trigonométricas $cos3\theta = \frac{2\sqrt{5}}{25} \; e \; cos3\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$, levando-se em conta a multiplicidade de arcos que as satisfazem, as três raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ teriam sido encontradas (embora em valores aproximados e não exatos).

Retomando. Seja $k = 2\sqrt{5}$ e $cos3\theta \approx 0{,}17888543$, então

$$3\theta \approx 2n\pi + 79°41'57", \text{ com } n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta \approx 2n\frac{\pi}{3} + 26°33'59"$$

$$\cos\theta \approx cos\left(\frac{2\pi n}{3} + 26°33'59"\right)$$

Variando os valores de n, existem exatamente três valores diferentes para $\cos\theta$, ou seja,

$$cos(26°33'59") \approx 0{,}894427$$

$$cos\left(\frac{2\pi}{3} + 26°33'59"\right) \approx -0{,}834512$$

$$cos\left(\frac{4\pi}{3} + 26°33'59"\right) \approx -0{,}059915$$

E, assim as três raízes são:

$x_1 \approx 2\sqrt{5}.\,0{,}894427 \approx 3{,}999999$ (o valor exato é $x = 4$);

$x_2 \approx 2\sqrt{5}.\,(-0{,}834512) \approx -3{,}722051$ (o valor exato é $x = -2 - \sqrt{3} \approx -3{,}7320508$); e

$x_3 \approx 2\sqrt{5}.\,(-0{,}059915) \approx -0{,}267948$ (o valor exato é $x = -2 + \sqrt{3} \approx -0{,}267949$)

Se trabalhássemos com $k = -2\sqrt{5}$ e $cos3\theta \approx -0{,}17888543$, encontraríamos os mesmos resultados.

Viète encontrou uma solução belíssima para o problema, contudo ela, além de não ser algébrica, não considerava os números complexos, cuja à existência era incontestável. Além disto, a fórmula não se aplicava a alguns casos, como na equação $x^3 - 11x - 20 = 0$, com $q = -11$ e $p = -20$.

Aplicando a relação (4), obtemos

$$cos3\theta = \pm\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}} = \pm\frac{\frac{-11}{2}}{\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^3}} \approx \pm 1{,}42427.$$

E não existe ângulo que satisfaça tal igualdade, pois $-1 \leq cos\theta \leq 1$.

A fórmula trigonométrica encontrada para a solução de equações cúbicas não fora publicada em vida. Somente após doze anos de sua morte, seu amigo Alexander Anderson publicou dois de seus trabalhos sobre a teoria das equações. No segundo livro, intitulado *De Equationem Emendatione* ("sobre o aperfeiçoamento de equações"), Viète abriu a linha de investigação que conduziu ao estudo das simetrias de soluções de uma equação e daí a teoria de Galois, a teoria dos grupos e todas as demais teorias da álgebra moderna.

4 SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO 4º GRAU

Encontrada a solução para as equações do terceiro grau demorou apenas cerca cinco anos para que o jovem matemático Lodovico Ferrari (1522 – 1565) obtivesse uma fórmula para a obtenção de raízes de uma equação de quarto grau. O método consistia em reduzir em um o grau da equação original, por meio de substituições, e em seguida aplicar os mesmos procedimentos utilizados por Tartaglia.

Após a solução apresentada por Ferrari vários outros matemáticos buscaram formas próprias de resolver as quárticas por radicais, entre eles está o matemático francês René Descartes (1596 – 1650). A solução apresentada por Descartes fazia uso não só de substituições para reduzir o grau da quártica, como também, de um teorema conhecido como Regra dos Sinais de Descartes e de um Lema que garantia que todo polinômio de coeficientes reais de grau ímpar possui uma raiz real.

O grande Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) da mesma forma propõe um algoritmo para a resolução das equações de quarto grau. O método dele, como dos demais, era baseado em substituições convenientes, e além destas, em relações entre os coeficientes das equações e suas raízes. Essas relações foram definidas em 1629 pelo francês Albert Girard (1595 – 1633).

4.1 Lodovico Ferrari e o método para as quárticas

Lodovico Ferrari nascido em 1522 em Bologna – Itália era filho de Alexandre Ferrari. Após a morte de seu pai foi morar com seu tio Vicente Ferrari. Vincente Ferrari tinha um filho chamado Lucas, que decidiu fugir de casa e procurar emprego. Lucas foi para Milão e lá passou a trabalhar como empregado de Girolamo Cardano. O trabalho acabou não atendendo as expectativas de Lucas e depois de trabalhar com Cardano por um tempo, ele resolveu retornar para casa sem ao menos comunicar a seu patrão sua decisão. Cardano contacta Vincente

Ferrari solicitando que envie seu filho de volta para continuar servindo-o. Vincente, no entanto, viu sua chance de manter seu próprio filho em casa e tirar de sua responsabilidade seu sobrinho, então envia Lodovico a Milão para trabalhar com Cardano.

Cardano ao receber o jovem descobriu que Lodovico sabia ler e escrever e o coloca na condição de seu secretário pessoal, redigindo todos os seus manuscritos. Ele notou também que Ferrari tinha grande facilidade em aprender e começa então a ensinar-lhe matemática. Aos 18 anos, Ferrari passou a ensinar matemática por conta própria em Milão e sob a proteção do Cardeal de Mantôva, aferiu posição que lhe proporcionou boa renda.

Ferrari e Cardano estudaram a solução da cúbica que Tartaglia havia descoberto, então eles resolveram o problema proposto pelo matemático Zuanne de Tonini da Coi, uma questão que envolvia a equação quártica $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$. Neste processo, em 1540 Ferrari também encontrou a solução geral da quártica, usando um belo argumento, reduziu o problema a resolução de uma equação cúbica, a qual poderia ser resolvida pelo método construído por Tartáglia. Apesar da incrível descoberta nem Cardano, nem Ferrari publicam seu feito, pois a resolução da equação do quarto grau dependia do método de Tartaglia, e Cardano havia jurado a este que jamais o divulgaria.

No entanto, em 1545 Cardano quebrou seu juramento e publicou em *Ars Magna* tanto o método de Tartaglia para a resolução da equação cúbica, como o de Ferrari para à quártica convencido de que poderia quebrar seu juramento uma vez que fora del Ferro, e não Tartaglia, o primeiro a resolver as equações de terceiro grau. Tartaglia furioso publica sua versão dos fatos insultando Cardano e o acusando de ter quebrado seu juramento sagrado. Ferrari saiu em defesa de seu mentor e escreveu a Tartaglia, repreendendo-o impiedosamente e desafiando-o para um debate público.

Tartaglia escreveu de volta à Ferrari, tentando trazer Cardano para o debate. Os dois trocam insultos por um ano e em 10 de agosto 1548, o concurso entre estes dois grandes matemáticos é organizado, tendo o governador de Milão, Dom Fernando di Gonzaga, como árbitro. Após uma troca de insultos de ambas as partes Tartaglia deixou Milão naquela mesma noite e, assim, a competição não teve um desfecho, contudo a vitória ficou para o único debatedor que não se ausentara da disputa, Ferrari. Com a repercussão deste desafio, a fama de Ferrari cresceu vertiginosamente assim como as propostas de emprego, incluindo uma oferta do próprio imperador, que o queria como tutor para seu filho.

Ferrari assumiu um cargo como assessor de imposto do governador de Milão, Dom Fernando di Gonzaga. Depois passa a trabalhar a serviço da igreja, aposentando-se como um homem jovem e muito rico. Ele retorna a sua cidade natal, Bolonha, onde viveu com sua irmã viúva Madalena. Lá chegando foi convidado a ocupar o cargo de professor de matemática na Universidade de Bolonha em 1565. Neste mesmo ano Ferrari faleceu, supostamente envenenado por sua irmã, que herdou sua fortuna.

4.1.1 Dedução da Fórmula de Ferrari

Dada a equação quártica, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a \neq 0$.

Primeiramente é necessário eliminar o termo bx^3, assim como cancelamos o termo bx^2 nas equações cúbicas, e para fazer isso, o procedimento adotado será também, o mesmo procedimento utilizado na solução da equação cúbica. Ou seja, substituir $x = y + m$.

$$a(y+m)^4 + b(y+m)^3 + c(y+m)^2 + d(y+m) + e = 0$$

Desenvolvendo a equação acima tem-se

$$a(y^4 + 4my^3 + 6m^2y^2 + 4m^3y + m^4) + b(y^3 + 3my^2 + 3my + m^3)$$
$$+ c(y^2 + 2my + m^2) + d(y+m) + e = 0$$

$$ay^4 + 4amy^3 + 6am^2y^2 + 4am^3y + am^4 + by^3 + 3bmy^2 + 3bmy + bm^3 + cy^2$$
$$+2cmy + cm^2 + dy + dm + e = 0$$

Agrupando as potências de y em ordem decrescente

$$ay^4 + (4am + b)y^3 + (6am^2 + 3bm + c)y^2 + (4am^3 + 3bm + 2cm + d)y$$
$$+(am^4 + bm^3 + cm^2 + dm + e) = 0.$$

Tomando $4am + b = 0 \leftrightarrow m = -\frac{b}{4a}$, a fim de anular o termo em y^3, e dividindo a equação acima por a tem-se

$$y^4 + \frac{\left(4a\left(-\frac{b}{4a}\right) + b\right)}{a} y^3 + \frac{\left(6a\left(-\frac{b}{4a}\right)^2 + 3b\left(-\frac{b}{4a}\right) + c\right)}{a} y^2$$
$$+ \frac{\left(4a\left(-\frac{b}{4a}\right)^3 + 3b\left(-\frac{b}{4a}\right) + 2c\left(-\frac{b}{4a}\right) + d\right)}{a} y$$
$$+ \frac{\left(a\left(-\frac{b}{4a}\right)^4 + b\left(-\frac{b}{4a}\right)^3 + \left(-\frac{b}{4a}\right) + d\left(-\frac{b}{4a}\right) + e\right)}{a} = 0$$

Realizando as operações chegamos a seguinte expressão:

$$y^4 + \left(\frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}\right) y^2 + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}\right) y + \left(\frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}\right) = 0.$$

Tomando

$$A = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}, B = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3} \text{ e } C = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}.$$

Tem-se a equação reduzida

$$y^4 + Ay^2 + By + C = 0.$$

Se somarmos e subtrairmos $2sy^2 + s^2$ ao primeiro membro de $y^4 + Ay^2 + By + C = 0$ (por razões que se tornarão evidentes mais abaixo) obtemos a equação equivalente:

$$y^4 + 2sy^2 + s^2 - [(2s - A)y^2 - By + s^2 - C] = 0, \text{ com}$$
$$y^4 + 2sy^2 + s^2 = (y^2 + s)^2 \quad (1)$$

Desenvolvemos a parcela $(2s - A)y^2 - By + s^2 - C$ em fatores lineares

$$(2s - A)y^2 - By + s^2 - C = (2s - A)(y - y_+)(y - y_-)$$

em que y_+ e y_- são as soluções da equação do 2.º grau

$$(2s - A)y^2 - By + s^2 - C = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara

$$y_+ = \frac{\mathrm{B} + \sqrt{B^2 - 4(2s - A)(s^2 - C)}}{2(2s - A)}$$

$$y_- = \frac{\mathrm{B} - \sqrt{B^2 - 4(2s - A)(s^2 - C)}}{2(2s - A)}$$

Assim se o discriminante $B^2 - 4(2s - A)(s^2 - C)$, ou equivalente $-8s^3 + 4As^2 + 8Cs - 4AC + B^2$, for zero então se verifica a cúbica:

$$8s^3 - 4As^2 - 8Cs + (4AC - B^2) = 0$$

E as raízes de $(2s - A)y^2 - By + s^2 - C = 0$ serão $y_+ = y_- = \frac{B}{2(2s-A)}$.

Note que $(2s-A)y^2 - By + s^2 - C = 0$ pode ser escrita da forma $\alpha(y - y_+)(y - y_-)$, logo

$$(2s-A)\left(y - \frac{B}{2(2s-A)}\right)\left(y - \frac{B}{2(2s-A)}\right) = (2s-A)\left(y - \frac{B}{2(2s-A)}\right)^2 = 0$$

Isto é,

$$(2s-A)y^2 - By + s^2 - C = (2s-A)\left(y - \tfrac{B}{2(2s-A)}\right)^2 \quad (2).$$

A equação (1), $[(2s-A)y^2 - By + s^2 - C] = y^4 + 2sy^2 + s^2 = (y^2+s)^2$, transforma (2) em

$$(y^2+s)^2 = (2s-A)\left(y^2 - \frac{2By}{2(2s-A)} + \frac{B^2}{4(2s-A)^2}\right)$$

$$= (2s-A)y^2 - \frac{By(2s-A)}{(2s-A)} + \frac{B^2(2s-A)}{4(2s-A)^2}$$

$$= (2s-A)y^2 - By + \frac{B^2}{4(2s-A)} = \left(\sqrt{2s-A}\,y - \frac{B}{2\sqrt{2s-A}}\right)^2$$

ou seja, $(y^2+s)^2 - \left(\sqrt{2s-A}\,y - \frac{B}{2\sqrt{2s-A}}\right)^2 = 0.$

Esta equação é a diferença de dois quadrados e pode ser reescrita da forma

$$\left[(y^2+s) + \left(\sqrt{2s-A}\,y - \tfrac{B}{2\sqrt{2s-A}}\right)\right]\left[(y^2+s) - \left(\sqrt{2s-A}\,y - \tfrac{B}{2\sqrt{2s-A}}\right)\right] = 0.$$

Ou rearranjando os termos, tem-se

$$\left[y^2 + \sqrt{2s-A}\,y + \left(s - \tfrac{B}{2\sqrt{2s-A}}\right)\right]\left[y^2 - \sqrt{2s-A}\,y + \left(s + \tfrac{B}{2\sqrt{2s-A}}\right)\right] = 0.$$

A equação acima é verdadeira se, e somente se, um dos fatores for igual a zero, isto é, para a equação acima ser igual a zero, basta encontrar as raízes das equações quadráticas

$$\begin{cases} y^2 + \sqrt{2s-A}\,y + \left(s - \dfrac{B}{2\sqrt{2s-A}}\right) = 0 \ (3) \\ y^2 - \sqrt{2s-A}\,y + \left(s + \dfrac{B}{2\sqrt{2s-A}}\right) = 0 \ (4). \end{cases}$$

Ou seja, as raízes da equação reduzida, $y^4 + Ay^2 + By + C = 0$, são as raízes das equações quadráticas (3) e (4).

Aplicando Bhaskara em (3) temos as seguintes soluções:

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s-A} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s-A+\frac{2B}{\sqrt{2s-A}}} \\ y_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s-A} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s-A+\frac{2B}{\sqrt{2s-A}}} \end{cases}$$

Realizando o mesmo procedimento em (4), obtemos as seguintes soluções:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2s-A} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s-A-\frac{2B}{\sqrt{2s-A}}} \\ y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2s-A} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s-A-\frac{2B}{\sqrt{2s-A}}} \end{cases}$$

em que s é uma solução da cúbica $8s^3 - 4As^2 - 8Cs + (4AC - B^2) = 0$.

As soluções da equação do 4º grau inicial $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ serão dadas por

$$x_k = y_k - \frac{b}{4a}, \text{ com } k = 1, 2, 3, 4.$$

Agora para exemplificar o método propomos a seguinte questão.

Exemplo. Resolva a equação $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Vemos que $a = 1, b = 2, c = 3, d = -2$ e $e = -1$.

Pela demonstração acima sabemos que o valor de m é dado por $m = -\frac{b}{4a}$, logo $m = -\frac{1}{2}$. Além do mais sabemos que os coeficientes da equação reduzida $y^4 + Ay^2 + By + C = 0$ podem ser calculados pelas equações

$$A = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}, B = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3} \text{ e } C = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}.$$

Logo

$$A = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2} = \frac{3}{1} - \frac{3.2^2}{8.1^2} = \frac{3}{2}$$

$$B = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3} = -\frac{2}{1} - \frac{2.3}{2.1^2} + \frac{2^3}{8.1^3} = -4 \text{ e}$$

$$C = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4} = -\frac{1}{1} + \frac{2.2}{4.1^2} + \frac{2^2.3}{16.1^3} - \frac{3.2^4}{256.1^4} = \frac{9}{16}.$$

A equação cúbica auxiliar é, pois:

$$8s^3 - 4As^2 - 8Cs + (4AC - B^2) = 0$$

Que substituindo os valores encontrados de A, B e C temos

$$8s^3 - 6s^2 - \frac{9}{2}s - \frac{101}{8} = 0\ (1).$$

Os coeficientes dessa cúbica são $a' = 8, b' = -6, c' = -\frac{9}{2}$ e $d' = -\frac{101}{8}$.

Tomando$s = t + m$ e substituindo em (1) teremos

$$8(t+m)^3 - 6(t+m)^2 - \frac{9}{2}(t+m) - \frac{101}{8} = 0$$

$$8t^3 + 24mt^2 + 24m^2t + 8m^3 - 6t^2 - 12mt - 6m^2 - \frac{9t}{2} - \frac{9m}{2} - \frac{101}{8} = 0$$

$$8t^3 + (24m-6)t^2 + \left(24m^2 - 12m - \frac{9}{2}\right)t + \left(8m^3 - 6m^2 - \frac{9m}{2} - \frac{101}{8}\right) = 0\ (5)$$

Para obter a equação reduzida em t basta tomar $24m - 6 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{4}$ e $s = t + \frac{1}{4}$.

Substituindo o valor de m em (5) temos

$$8t^3 - 6t - 14 = 0.$$

Dividindo a equação anterior por 8

$$t^3 - \frac{3}{4}t - \frac{7}{4} = 0.$$

Tomando $p = -\frac{3}{4}$ e $q = -\frac{7}{4}$ e substituindo na fórmula de Cardano-Tartaglia

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

temos

$$t = \sqrt[3]{\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{49}{64} - \frac{1}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{49}{64} - \frac{1}{64}}}$$

$$t \approx 1{,}411.$$

Como $s = t + \frac{1}{4}$ segue que $s \approx 1{,}411 + 0{,}25 \rightarrow s \approx 1{,}661$ é uma solução da cúbica.

Dado que $x_k = y_k - \frac{b}{4a}$ e

$$y_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s - A} + \frac{1}{2}.\sqrt{-2s - A + \frac{2B}{\sqrt{2s - A}}}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s-A} - \frac{1}{2}.\sqrt{-2s - A + \frac{2B}{\sqrt{2s-A}}}$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2s-A} + \frac{1}{2}.\sqrt{-2s - A - \frac{2B}{\sqrt{2s-A}}}$$

$$y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2s-A} - \frac{1}{2}.\sqrt{-2s - A - \frac{2B}{\sqrt{2s-A}}}$$

então as soluções da equação $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ serão dadas por $x = y - m = y - \frac{b}{4a}$ logo:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2(1{,}661) - \frac{3}{2}} + \frac{1}{2}.\sqrt{-2(1{,}661) - \frac{3}{2} + \frac{2(-4)}{\sqrt{2(1{,}661) - \frac{3}{2}}}} - \frac{2}{4(1)}$$

$$x_1 \approx -1{,}1748 + 1{,}6393i$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2(1{,}661) - \frac{3}{2}} - \frac{1}{2}.\sqrt{-2(1{,}661) - \frac{3}{2} + \frac{2(-4)}{\sqrt{2(1{,}661) - \frac{3}{2}}}} - \frac{2}{4(1)}$$

$$x_2 \approx -1{,}1748 - 1{,}6393i$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2(1{,}661) - \frac{3}{2}} + \frac{1}{2}.\sqrt{-2(1{,}661) - \frac{3}{2} - \frac{2(-4)}{\sqrt{2(1{,}661) - \frac{3}{2}}}} - \frac{2}{4(1)}$$

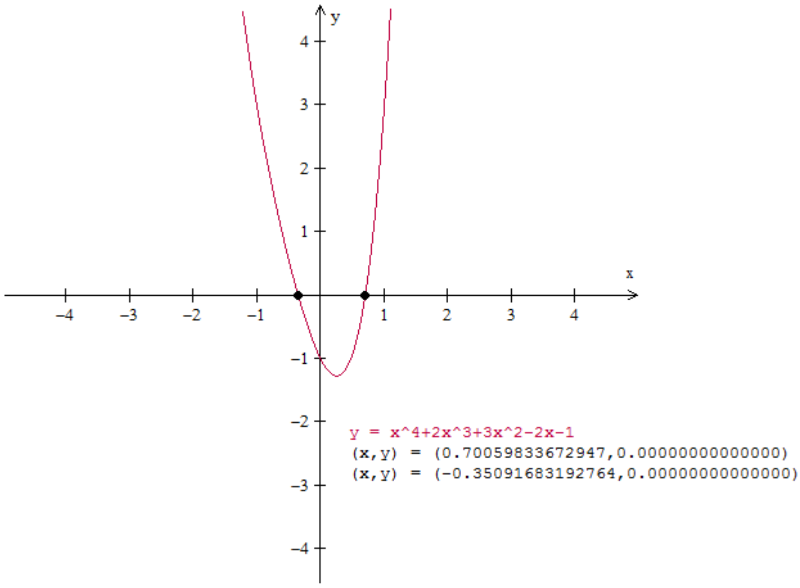
$$x_3 \approx 0{,}7006$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2(1{,}661) - \frac{3}{2}} - \frac{1}{2}.\sqrt{-2(1{,}661) - \frac{3}{2} - \frac{2(-4)}{\sqrt{2(1{,}661) - \frac{3}{2}}}} - \frac{2}{4(1)}$$

$$x_3 \approx -0{,}3509$$

A assertividade do método pode ser observada a partir do gráfico da quártica $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$, (Figura 27).

Figura 27: Gráfico da quártica $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$



Fonte: O Autor (2016).

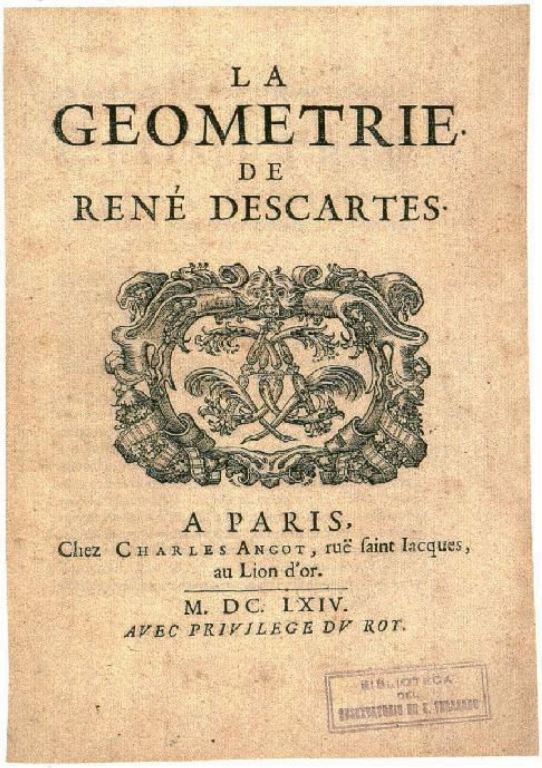
4.2 Descartes e o método para as quárticas

René Descartes filho de Joachim Descartes e Jeanne Brochard nasceu em 1596 na cidade francesa de La Haye e faleceu em 1650 em Estocolmo - Suécia. Descartes iniciou seus estudos no colégio jesuíta de La Flèche em Anjou, e entre 1614 e 1618 cursou a Universidade de Poitiers, onde se graduou em Direito. Em 1618 se alista como voluntário no exército do príncipe holandês Maurício de Nassau desenvolvendo pesquisas na área de matemática.

Além de ser considerado o fundador da filosofia moderna, desenvolveu trabalhos importantes na área da matemática, e o mesmo é tido como o co-inventor da Geometria Analítica, juntamente com Pierre de Fermat. Nessa área estudou a resolução de cúbicas através a intersecção de cônicas, porém foi além do que fora Omar Khayyam, pois percebeu que certos pontos de intersecção representam raízes negativas da equação. E ainda, tomando uma parábola e uma circunferência, concluiu que "se a circunferência não corta nem toca a parábola em algum ponto, isto é uma indicação de que a equação não tem raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas), mas que todas as raízes são imaginárias". René

Descartes, com esta citação presente em seu livro *La Géométrie*[14], foi o primeiro a nomear esta nova classe de números, descoberta por Bombelli, de números imaginários.

Figura 28: Capa do livro La Géométrie de René Descartes



Fonte: http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Descartes3.asp.htm

Descartes também transpôs problemas da geometria para a álgebra, abordando-os por meio de um sistema de coordenadas. E sua teoria forneceu os fundamentos para o cálculo de Newton e Leibniz.

[14]*La Géométrie* é um apêndice do mais famoso livro de Descartes, Discurso sobre o Método de Bem Utilizar a Razão e de Encontrar a Verdade nas Ciências, publicado em 1637, o qual lança a base para a Geometria Analítica moderna.

4.2.1 Dedução da Fórmula de Descartes

A solução desenvolvida por Descartes em 1637 tinha como primeiro passo reduzir a equação completa de quarto grau $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ para sua forma reduzida $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, eliminando o termo x^3, por meio da substituição $x = z - \frac{b}{4}$.

Em seguida, ele tentou encontrar t, u e v tal que a equação quártica fosse o produto de duas quadráticas, como segue.

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 = (z^2 - tz + u)(z^2 + tz + v) \quad (1)$$

Ao desenvolver o lado direito da igualdade obteve

$$z^4 + (u + v - t^2)z^2 + (ut - vt)z + uv = 0$$

$$z^4 + (u + v - t^2)z^2 + t(u - v)z + uv = 0$$

E agora ao comparar os coeficientes encontrou as seguintes relações:

$$\begin{cases} p = u + v - t^2 \\ q = t(u - v) \\ r = uv \end{cases}$$

ou equivalente,

$$\begin{cases} u + v = p + t^2 & (2) \\ u - v = \dfrac{q}{t} & (3) \\ uv = r & (4) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema composto pelas equações (2) e (3) obteve

$$2u = t^2 + p + \tfrac{q}{t} \quad (5) \text{ e}$$

$$2v = t^2 + p - \frac{q}{t} \quad (6)$$

Ele percebeu que a relação (4), $uv = r$, é equivalente a $2u.2v = 4(uv) = 4(r)$

$$2u.2v = 4(r)$$

$$\left(t^2 + p + \frac{q}{t}\right)\left(t^2 + p - \frac{q}{t}\right) = 4r$$

$$p^2 + 2t^2p + t^4 - \frac{q^2}{t^2} = 4r$$

$$t^2p^2 + 2t^4p + t^6 - q^2 = 4rt^2$$

Com isto encontrando a equação

$$t^6 + 2pt^4 + (p^2 - 4r)t^2 - q^2 = 0$$

Tomando $t^2 = y$ obteve a equação de terceiro grau

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$$

Descartes percebeu que independente do resultado de $(p^2 - 4r)$ ser positivo ou negativo há somente uma mudança de sinal entre os coeficientes da equação, logo pelo Teorema ou *Regra dos Sinais de Descartes*[15]*,* criada por ele, a equação cúbica acima possui pelo menos uma raiz positiva.

Teorema (Regra dos sinais de Descartes) *— O número de raízes positivas de um polinomio $p(x)$ com coeficientes reais não excede o número de mudanças de sinais de seus coeficientes. Um coeficiente zero não é contado como uma mudança de sinal.*

E como pelo lema:

Lema - *Todo polinômio de coeficientes reais de grau ímpar tem uma raiz real.*

A equação de terceiro grau possui ao menos uma raiz real, então é possível encontrar um t tal que satisfaça a igualdade $y = t^2$.

Substituindo em (1) os valores de u e v obtidos respectivamente em (5) e (6), tem-se

$$z^4 + pz^2 + qz + r = \left[z^2 + tz + \frac{1}{2}\left(t^2 + p + \frac{q}{t}\right)\right]\left[z^2 - tz + \frac{1}{2}\left(t^2 + p - \frac{q}{t}\right)\right].$$

Como os valores de t, p e q eram conhecidos podia-se calcular pela fórmula de Bhaskara as raízes dos fatores quadráticos, que são consequentemente as raízes da quártica reduzida $z^4 + pz^2 + qz + r$.

[15]A *Regra dos sinais de Descartes* enunciada no seu trabalho *La Géométrie* consiste de um teorema que determina o número máximo de raízes negativas e positivas de um dado polinômio. Para determinar o número máximo de raízes positivas basta dispor os termos da equação em ordem crescente e verificar o número de mudanças de sinais entre os coeficientes. O número de mudanças de sinais constitui no número máximo de raízes positivas da equação. Para se obter o número máximo de raízes negativas basta substituir a variável, digamos x, por $-x$, e do mesmo modo analisar as mudanças de sinais dos coeficientes. Por exemplo, $x^3 + x^2 - x - 1$ tem pelo menos uma raiz positiva. Substituindo x por $-x$ encontra $-x^3 + x^2 + x - 1$, definindo que o polinômio original tem ao menos duas raízes negativas. Por estas duas afirmações se conclui, que neste caso, a equação tem duas raízes negativas e uma positiva. De fato, as raízes da equação $x^3 + x^2 - x - 1$ são $x = -1$ (dupla) e $x = 1$.

Dado que $x = z - \frac{b}{4}$, basta subtrairmos $-\frac{b}{4}$ das raízes encontradas da quártica $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ para obtermos as raízes da equação original $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

4.3 Leonhard Euler e o método para as quárticas

Leonhard Paul Euler filho de Paul Euler e Margaret Brucker nasceu em 1707, em Basiléia, na Suíça, faleceu em 1783 em São Petesburgo na Prússia, atualmente Rússia. O seu brilhantismo matemático foi reconhecido por Laplace que dizia aos postulantes a grandes matemáticos da época: “Leiam Euler, leiam Euler, é o mestre de todos nós” (GARBI, 2007).

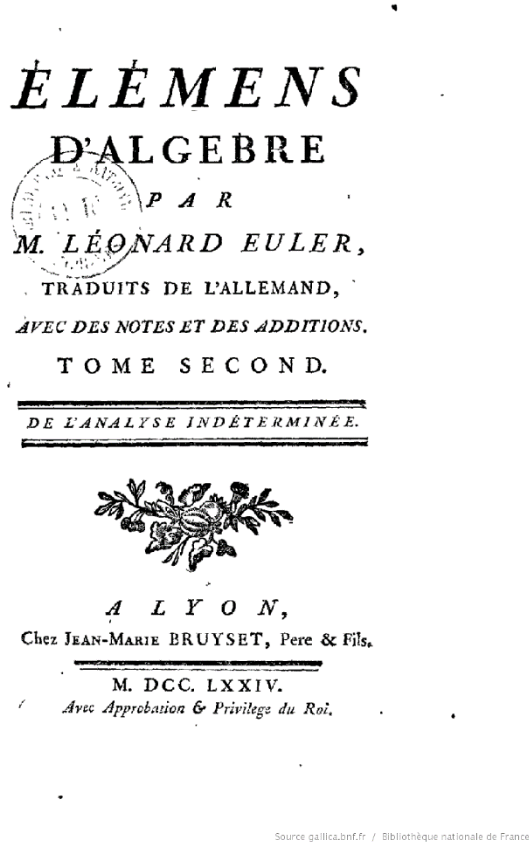
Sua mente privilegiada deu vazão a mais de oitocentos trabalhos versando sobre temas nos campos da física, astronomia, matemática aplicada, teoria dos números, teoria dos grafos, álgebra, topologia, óptica, cálculo, teoria das probabilidades, entre outros.

Após a inovadora ideia de Bombelli foi Euler, quase dois séculos depois, o responsável pela obtenção de um método para se extrair raízes de números complexos. Segundo Garbi (2007) apesar de outros grandes matemáticos realizarem contribuições no estudo dos números complexos foi Euler quem desenvolveu quase toda a teoria conhecida atualmente referente a esta classe de números. Construiu entre outras, a relação entre funções trigonométricas e função exponencial através da fórmula $e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$ (Fórmula de Euler) e a relação entre os cinco mais famosos números da matemática: $0, 1, \pi, e$ e $\sqrt{-1}$, por meio da fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$.

O matemático também estudou equações algébricas propondo um método para a resolução das equações do quarto grau. A solução aparece pela primeira vez como uma breve seção em um trabalho sobre raízes de equações, e foi mais tarde expandido em um capítulo intitulado de *D’une nouvelle méthode de résoudre les équations du quartrième degré* (Um novo método de resolução de equação de equações do quarto grau) em seu livro *Élémens D’Algebre* (Elementos de Álgebra).

A solução de Euler para a quártica foi um avanço importante, na qual ele mostrou que cada uma das raízes de uma equação de quarto grau pode ser representada como a soma de três raízes quadradas, $\pm\sqrt{r_1}, \pm\sqrt{r_2}$ e $\pm\sqrt{r_3}$, que são as raízes de uma cúbica resolvente (ou seja, de uma equação quártica que foi reduzida para uma cúbica).

Figura 29: Capa do livro *Élémens D'Algebre* de Euler



ÉLÉMENS
D'ALGEBRE
PAR
M. LÉONARD EULER,
TRADUITS DE L'ALLEMAND,
AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.
TOME SECOND.
DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

A LYON,
Chez JEAN-MARIE BRUYSET, Pere & Fils.
M. DCC. LXXIV.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k123306p

4.3.1 Dedução da Fórmula de Euler

Vamos esboçar uma variante do método de resolução das quárticas atribuído a Lagrange.

Para resolver

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

tomamos

$$x = u + v + w \quad (1),$$

com u, v e w quaisquer.

Elevando o quadrado, obtemos

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw) \quad (2)$$

Elevando ao quadrado novamente, encontramos

$$(x^2)^2 = \{[u^2 + v^2 + w^2] + [2(uv + uw + vw)]\}^2$$

$$x^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + uw + vw)$$

$$+4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw\big(u + v + w\big) \quad (3)$$

Em seguida, ele substitui na equação original $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ os valores encontrados para x, x^2 e x^4 em (1), (2) e (3) obtendo a expressão:

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + uw + vw) + 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)$$

$$+8uvw\big(u + v + w\big) + p[u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw)] + q\big(u + v + w\big) + r$$

E logo após, reuniu os termos que tem um fator de $u + v + w$, bem como os termos que têm um fator de $uv + uw + vw$.

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + p(u^2 + v^2 + w^2) + 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)$$

$$+[4(u^2 + v^2 + w^2) + 2p](uv + uw + vw) + [8uvw + q]\big(u + v + w\big) + r$$

O "coeficiente" de $u + v + w$ é $8uvw + q$ e o coeficiente de $uv + uw + vw$ é $4(u^2 + v^2 + w^2) + 2p$. Ele quer que estes termos sejam eliminados, então ele necessita que

$$8uvw + q = 0 \text{ e } 4(u^2 + v^2 + w^2) + 2p = 0 \quad (4).$$

Se estas equações são satisfeitas, a equação original torna-se

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + p(u^2 + v^2 + w^2) + 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + r = 0 \quad (5).$$

A partir de (4) obtemos

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2} \quad (6).$$

Substituindo em (5), obtemos

$$\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{2} + 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + r = 0$$

$$4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = -\frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{2} - r$$

$$u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4} \quad (7).$$

E novamente a partir de (4) encontramos

$$u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64} \quad (8).$$

As equações (6), (7) e (8) são exatamente as *Relações de Girard*[16] para uma equação de terceiro grau do tipo

$$y^3 + \frac{p}{2}(y)^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)y - \frac{q^2}{64} = 0 \quad (9).$$

Isto é, segundo as Relações de Girard u^2, v^2 e w^2 são as raízes r_1, r_2 e r_3 da cúbica resolvente (9). Isso equivale dizer que

$$\begin{cases} r_1 = u^2 \rightarrow u = \pm\sqrt{r_1} \\ r_2 = v^2 \rightarrow v = \pm\sqrt{r_2} \\ r_3 = w^2 \rightarrow w = \pm\sqrt{r_3} \end{cases}$$

Substituindo em (1) os valores de u, v e w obtemos $x = \pm\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3}$. Euler concluiu então que cada raiz da equação original do quarto grau pode ser representada como a soma de três raízes quadradas da cúbica resolvente (9). Além do mais, ao reduzir a equação quártica para uma cúbica esta poderia ser resolvida pelo método de Cardano-Tartaglia.

Apesar de ser um método mais complexo do que o de Ferrari, Euler na verdade o desenvolveu na esperança de encontrar um método uniforme que fosse capaz de resolver não só as equações cúbicas e quárticas, como pudesse ser generalizado para as de graus mais elevados.

16 O matemático Albert Girard em 1629 aprofundou os estudos das equações algébricas estabelecendo relações entre seus coeficientes e suas raízes. No caso das equações do terceiro grau do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ as relações encontradas por Girard, são as seguintes: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ e $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

5 AS EQUAÇÕES DO 5º GRAU

Após o surgimento do método de Ferrari para resolução da equação do quarto grau, inúmeros matemáticos empreenderam esforços na busca de uma fórmula que resolvesse o caso geral para as quínticas. O desafio foi aceito por muitos por acreditarem que era possível por meio de radicais reduzir em um grau a equação de quinto grau, isto é, utilizar os mesmos procedimentos para resolução de equações de graus inferiores.

A primeira tentativa efetiva, contudo sem sucesso de resolução da quíntica, é atribuída ao escocês James Gregory (1638 – 1675). Em 1674 ele começou a duvidar da existência de uma fórmula resolvente para tais equações, e apesar de não encontrar a solução para o problema, ele descobriu importantes relações obtidas a partir das equações de terceiro, quarto e quinto grau (PERUZZO, 2013).

O matemático alemão Ehrenfried Walther Von Tschirnhaus, ou simplesmente Tschirnhausen (1651 – 1708), também trabalhou durante anos, sem sucesso, num possível método que pudesse reduzir o grau das equações do quinto.

Renomados matemáticos como Leonhard Euler (1707 - 1783) se empenharam igualmente na obtenção de métodos que pudessem solucionar o caso geral das quínticas, ele faz até algumas descobertas, contudo sem obter uma equação resolvente. Outro expoente a tentar resolvê-las foi Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), utilizando métodos de redução do grau da equação diferentes dos empregados por Ferrari ele aferiu sucesso em resolver até o quarto grau, contudo ao aplicar o mesmo método numa equação quíntica, ao invés de se obter como o esperado uma quártica, obtém uma sêxtica. Fato este, que o faz suspeitar da impossibilidade de se obter um método para a resolução das equações de grau 5. (PERUZZO, 2013).

Ainda no século XVIII os matemáticos franceses Étienne Bézout (1730 – 1783), Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 - 1796), e o inglês Edward Waring (1736 - 1798) também empreenderam vigorosos esforços para a resolução da equação do quinto por meio radicais, sem obterem sucesso.

A afirmação de que as quínticas não poderiam ser resolvidas por radicais somente foi proferida no final do século XVIII pelo matemático italiano Paolo Ruffini

(1765 - 1822), com a publicação em 1799 do seu livro *La teoria generale dele equazioni in cui è provato che la soluzione algébrica di equazioni di grado maggiore di 4 è impossible.* A introdução do livro começa com o teorema: “A solução algébrica de equações gerais de grau maior que quatro é sempre impossível”. Apesar deste trabalho atualmente ser considerado como incompleto e em sua época ser praticamente ignorado ele foi o responsável pela mudança de paradigma no trato das equações algébricas (STEWART, 1945). E coube a Niels Henrik Abel (1802 – 1829) em 1824 provar rigorosamente a impossibilidade da resolução por radicais das equações do quinto grau.

5.1 Niels Abel e a impossibilidade de resolução de equações do 5º grau por meio de radicais

Niels Henrik Abel segundo de sete filhos de Sören Georg Abel, um político e pastor protestante, e de Ane Marie Simonson, nasceu em 1802 em Frindöe na Noruega. O pai de Abel era uma figura importante da política local, como membro do *Storting*, o órgão legislativo da Noruega.

Em 1815, Abel e seu irmão mais velho foram enviados para a *Cathedral School*em Christiania. Sem muita motivação para os estudos foi tido como um aluno bastante comum com algum talento para a matemática e física. Abel começou a ler por conta própria as obras de Euler, Legendre, Newton e D’Alembert quando seu talento para a matemática foi descoberto por seu professor Bernt Holmboe. Holmboe incentivou Abel a estudar também as obras de Laplace e Lagrange.

Após fazer falsas acusações contra seus correligionários, o que ocasionou a destruição de sua carreira política, o pai de Abel comete suicídio em 1820. Com a morte do patriarca da família, Abel assume então a responsabilidade de sustentar sua mãe e irmãos, o que impossibilitou momentaneamente de concluir sua educação escolar e de cursar uma universidade.

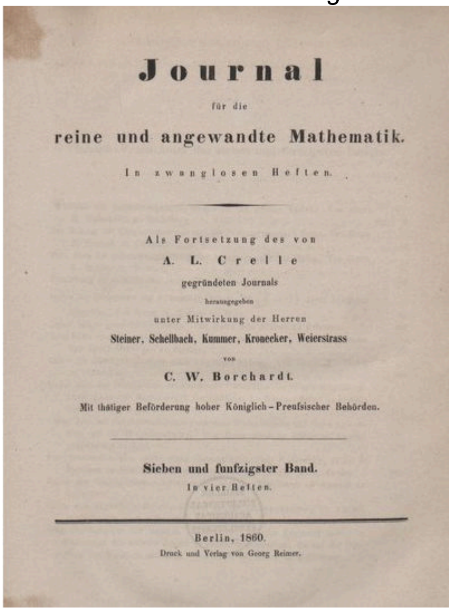
Em 1821, Abel começa a frequentar a Universidade de Christiania, isto só foi possível porque Holmboe o ajudou a obter uma bolsa de estudos. Neste mesmo ano começou a trabalhar na solução de equações de quinto grau por radicais. Ele acreditava ter resolvido esta equação e apresentou sua resolução ao matemático dinamarquês Ferdinand Degen, para publicação na *Royal Society of Copenhagen*. Degen pediu para Abel dar um exemplo numérico de seu método e, ao tentar fazê-lo, percebeu o erro em seu trabalho.

Na Universidade de Christiania Abel encontrou um patrono, o professor de astronomia Christopher Hansteen, que lhe forneceu apoio financeiro. Em 1823, Abel publicou trabalhos sobre equações funcionais e integrais na recém-fundada revista científica de Hansteen. No terceiro artigo de Abel, *Soluções de alguns problemas por meio de integrais definidas,* ele deu a primeira solução para a integral de uma equação. Em 1824 provou a impossibilidade de resolver a equação geral do quinto grau por meio de radicais. Ele publicou a obra em francês às suas próprias custas.

Abel enviou este trabalho para vários matemáticos, incluindo Gauss, contudo nunca foi lido por Gauss, visto que depois de sua morte o documento foi encontrado fechado entre seus objetos pessoais. Em agosto 1825 Abel recebeu uma bolsa de estudos do governo norueguês o que lhe permitiu viajar para a Dinamarca.

Em Copenhague Abel recebeu uma carta de apresentação de matemáticos noruegueses o referendando ao matemático August Leopold Crelle. Abel viaja para Berlim onde conhece Crelle e os dois se tornam grandes amigos. Crelle estava prestes a começar a publicar um periódico dedicado à investigação matemática, o *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ou como também era conhecido *Crelle's Journal,* ou simplesmente *Crelle*. Abel incentivado por Crelle escreveu uma versão mais clara do seu trabalho sobre a insolubilidade da equação de quinto grau e isso resultou no artigo *Recherches sur les fonctions elliptiques* que foi publicado em 1827 no primeiro volume do Jornal de Crelle, juntamente com seis outros textos de Abel.

Figura 30: Capa do *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de 1860



Journal
für die
reine und angewandte Mathematik.
In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von
A. L. Crelle
gegründeten Journals
herausgegeben
unter Mitwirkung der Herren
Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass
von
C. W. Borchardt.
Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Sieben und funfzigster Band.
In vier Heften.

Berlin, 1860.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

Fonte: http://www.deutschestextarchiv.de/book/show/helmholtz_luftschwingungen _1860

Figura 31: Três textos matemáticos escritos por Abel – Dois deles publicados no *Crelle's Journal*

Fonte: http://www.abelprize.no/c53683/artikkel/vis.html?tid=53891

Em Berlim Abel não consegue emprego, endividado e acometido de tuberculose ele retorna para a Noruega. Apesar da saúde frágil e da pobreza, ele continuou a escrever artigos sobre teoria da equação, grupos abelianos e funções elípticas. Este trabalho teve grande importância no desenvolvimento de toda a teoria das funções elípticas.

Abel faleceu em abril de 1829. Em 1830, após a sua morte, Cauchy encontra o trabalho de Abel sobre a insolubilidade da equação de quinto grau, este foi impresso em 1841, contudo o trabalho voltou a se perder e só foi reencontrado em 1952. Também depois de sua morte foi encontrada uma obra inédita de Abel sobre a solução de equações algébricas, em uma carta que Abel tinha endereçado a Crelle, datada de 18 de Outubro 1828 (ORE, 1957).

5.1.1 Teorema de Abel-Ruffini e a irresolubilidade das equações de grau maior que quatro

É um teorema enunciado e demonstrado pela primeira vez pelo matemático italiano Paolo Ruffini em 1799 possuía em sua demonstração um pequeno erro. Somente em 1824 que o norueguês Niels Henrik Abel o demonstra rigorosamente. O teorema diz:

“A equação algébrica genérica de grau superior a quatro não é resolúvel por radicais, ou seja, não existem fórmulas para expressar as raízes de uma equação genérica de grau superior a quatro em termos de seus coeficientes por meio de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz de grau natural”.

.ou simplesmente,

“*Existem polinômios de grau 5 que não são resolúveis por radicais”.*

Para demonstrar este teorema, Abel considerou a equação geral de quinto grau

$$x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0,$$

e supôs, por contradição, que ela é resolúvel por radicais, isto é, x pode ser expresso por uma sequência finita de operações racionais e extrações de raiz aplicadas aos coeficientes que produz uma raiz da equação. Abel mostrou que, neste caso

$$x = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}},$$

onde m é um número primo e $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$, e R também são expressos por operações racionais e de extrações de raízes aplicadas aos coeficientes, a, b, c, d, e, e. Disso ele concluiu que $m = 2$ ou $m = 5$ e, por inspeção, ele mostra que $m \neq 2$

ou $m \neq 5$, com essa contradição ele conclui a demonstração. A demonstração completa do Teorema de Abel-Ruffini pode ser encontrada em Ng (2006).

Percebemos que o teorema não afirma que as equações polinomiais de ordem cinco ou superior não possuem solução por radicais, mas sim, que não é possível obter solução para essas equações a partir dos coeficientes e usando simplesmente as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Na verdade, se o polinômio tiver coeficientes reais ou complexos e se forem permitidas soluções complexas, então todas as equações polinomiais têm solução. Essa é, aliás, a proposição do *Teorema Fundamental da Álgebra*[17]. Embora que essas soluções não possam ser a rigor calculadas, podem ser obtidas utilizando métodos numéricos como o de Newton com um grau de precisão exigido.

A Teoria da Irresolubilidade Algébrica, desenvolvida por Galois (1811 – 1832), alguns anos depois das descobertas de Abel, não só demonstra que é impossível estabelecer uma fórmula resolvente geral para as equações de grau $n > 4$, com $n \in \mathbb{N}$, como também, através da demonstração do teorema que leva seu nome apresenta os critérios para que uma equação polinomial possa ou não ser resolvida por radicais. Explicando assim o porquê *é* possível resolver equações de 2º, 3º e 4º graus respectivamente pelas fórmulas de Bhaskara, Cardano-Tartaglia e Ferrari e porque estas soluções assumem as formas que têm. A aplicação do Teorema explica, por exemplo, porque a equação $x^5 - x + 1 = 0$ não pode ser resolvida por meio de radicais e a equação $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$ pode ser resolvida por este método.

A teoria desenvolvida por Galois, que mais tarde receberia seu nome, utilizou o conceito de *grupo de permutações*[18] para descrever como as várias raízes de uma equação polinomial se relacionam entre si. A ideia principal da teoria foi admitir que permutações dessas raízes possuíssem a propriedade de que qualquer equação algébrica satisfeita pelas raízes é ainda satisfeita após a permutação destas raízes. O conjunto destas permutações forma um grupo de

---

[17]*Teorema Fundamental da Álgebra* – Todo polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ possui raízes complexas, ou equivalentemente, $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado.

[18]Um *grupo de permutação* é um grupo os quais os elementos são permutações de elementos de um conjunto K, com a operação binária de composição de funções.

permutação, conhecido como grupo de Galois de polinômios em relação aos números racionais.

Assim, Galois fecha a página da história da busca de métodos para a resolução de equações, por meio de radicais, e inicia a página seguinte com o desenvolvimento da Teoria de Grupos. A partir da segunda metade do século XIX a Álgebra conhece uma evolução profunda e a atenção dos matemáticos se volta para estruturas abstratas como grupo, espaço vetorial, corpo e anel, assuntos que compõem os elementos centrais da Álgebra Moderna.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A fascinante história da resolução das equações com grau maior que dois e seus personagens não podem ser contidos em apenas algumas poucas páginas como foi realizado neste trabalho, por este motivo alguns personagens e suas contribuições neste tema foram suprimidos, ou apenas mencionados ocasionalmente, ou mesmo desconsiderados devido a relativa insipiência histórica do autor. Mesmo assim, não poderia deixar de relacionar alguns outros matemáticos que colaboraram decisivamente para o desenvolvimento da temática e tecer exíguos comentários sobre suas realizações.

Leonardo de Pisa ou Fibonacci – Itália (1170- 1250)

Ele dá uma aproximação precisa para uma raiz da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, um dos problemas que lhe fora proposto por Johannes de Palermo. Fibonacci prova que a raiz dessa equação não é um número inteiro ou uma fracção, nem a raiz quadrada de uma fração. Sem explicar os seus métodos, Fibonacci, dá a solução aproximada na base sexagesimal (base 60) empregando a seguinte notação como $1.22.7.42.33.4.40$, ou seja, $1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \cdots$. Este número convertido na base decimal é aproximadamente $1{,}3688081075$, igual ao valor real da raiz da equação até a nona casa decimal, um feito notável.

Albert Girard - França (1595 - 1633)

Em 1629, no livro *Invention Nouvelle em L'Algèbre,* Albert Girard foi a primeira pessoa que mostrou, para o caso geral, que as raízes e os coeficientes de uma equação polinomial (algébrica) se relacionam, a partir de somas e produtos. Ainda em 1629, especulou que uma equação de grau n sempre possuiria n soluções no domínio dos números complexos. Matemáticos como Descartes, Leibniz, Euler, d'Alembert e Lagrange tentaram provar este teorema, contudo este foi provado rigorosamente somente em 1799, e sua demonstração publicada em 1801, pelo matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss. Girard mostrou, também, que as funções trigonométricas são eficazes na obtenção de soluções quando a fórmula cúbica produz resultados irredutíveis (3 raízes reais distintas). Por conseguinte, os matemáticos após os dias de Galois conceberam a ideia de que as funções elípticas, que generalizam funções trigonométricas comuns, podem oferecer um meio de expressar soluções de algumas equações de grau superior que não são solucionáveis algebricamente.

Paolo Ruffini – Itália (1765 -1822)

Criador do algoritmo que leva seu nome, Ruffini desenvolveu um algoritmo ou dispositivo prático para efetuar a divisão de um polinômio de grau ≥ 1 por um binômio do tipo $x - \alpha$, fazendo cálculos com apenas os coeficientes dos polinômios. Foi o primeiro matemático a afirmar que a *“solução algébrica de equações gerais de grau maior que quatro é sempre impossível”* e realizar sua demonstração, mesmo com algumas lacunas. Sobre este tema escreveu três tratados: *Teoria generale dele equazioni, in cui si demostra impossibile la soluzione algebraica dele equazioni generali di grado superiore al 4º*, *Della soluzione dele equazioni alg. Determinate particolari di grado superiore; e Della insolubilità etc. qualunque metodo si adoperi, algebraico esso sia o transcendente.*

Joseph Louis Lagrange – Itália (1736 – 1813)

Em 1767 Lagrange escreve o livro *Sur la résolution des équations numériques*, no qual “apresentou métodos para separar as raízes reais de uma equação algébrica e para as aproximar por meio de frações contínuas” (STRUIK, 1997. p.216). Três anos após publica o livro de memórias *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* o qual propunha examinar os diversos métodos para a solução para a solução algébrica que foram encontradas até aquele momento, reduzi-los a princípios gerais e mostrar porque esses métodos são bem sucedidos para obtenção de soluções para as equações do terceiro e quarto grau e falham para os graus mais elevados. Na verdade, a análise realizada dos métodos de resolução das equações algébricas, conduziu Lagrange “às funções racionais das raízes e seu comportamento em relação a permutações das raízes”

(STRUIK, 1997. p.216) e alicerçou as investigações de Abel e Galois sobre a impossibilidade de resolver por radicais as quínticas, para o caso geral, além de conduzir Galois à sua teoria dos grupos.

Johann Carl Friedrich Gauss – Alemanha (1777 – 1855)

Em 1801 Gauss publica *Disquisitiones arithmeticae*, como resultado de sua tese de doutorado pela Universidade de Helmstedt, esse trabalho contém a primeira prova rigorosa do Teorema Fundamental da Álgebra - TFA (enunciado pela primeira vez por Albert Girard) que afirma que qualquer equação algébrica de grau n com coeficientes reais têm, pelo menos uma raiz, e consequentemente, n raízes. Gauss era tão fascinado por este teorema que mais tarde publicou mais duas demonstrações dele.

7 CONCLUSÃO

A história da resolução de equações de terceiro, quarto e quinto levou quase quatro mil anos para ser escrita por meio de inúmeras mãos de matemáticos brilhantes e sagazes. O que possibilitou o avanço do processo investigatório foi a construção ao longo do tempo de um arcabouço conceitual e ferramental, que oportunizou a transformação do conhecimento retórico, como por exemplo, o vivenciado na matemática babilônica, em conhecimento essencialmente algébrico.

Preponderantemente, a busca por desenvolver métodos de resoluções de equações algébricas impeliu o estabelecimento de conjuntos numéricos que não o dos números naturais, em especial os números inteiros e os números complexos, a construção de uma simbologia própria para representar operações matemáticas e a adoção dos números arábicos, possibilitando assim a consolidação da notação matemática que conhecemos atualmente.

Cabe também lembrar, que ao se tentar desenvolver fórmulas a fim de obter as raízes das equações algébricas, houve o aprofundamento do estudo em diferentes campos da matemática como na Trigonometria, Aritmética, Álgebra, Geometria Analítica, Teoria dos Números, Teoria de Galois, Teoria de Grupos, entre outros.

Este trabalho ao apresentar alguns métodos algébricos, geométricos e trigonométricos para a resolução de equações de terceiro e quarto graus e o aparente fracasso de grandes matemáticos, como James Gregory, Ehrenfried Walther Von Tschirnhaus, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange, Étienne Bézout, Alexandre-Théophile Vandermonde e Edward Waring, em encontrar um método geral para resoluções das equações de quinto grau mostrou que dentro do percurso histórico não existem campos matemáticos isolados, mas se inter-relacionam e se complementam. A matemática, assim como toda ciência, é construída gradualmente sobre bases já postas ou que ainda precisam ser construídas, isto é, a construção de conhecimento, ou, a construção de saberes.

REFERÊNCIAS

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda, 2005.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BURTON, D. M. **The History of Mathematics**. 7. ed. New York: Mc-Graw Hill, 2006.

CARVALHO, J. P**. Os três problemas clássicos da matemática grega**. In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Salvador. Anais eletrônicos. Disponível em: < http://www.bienasbm.ufba.br/>.

DERBYSHIRE. J. **Unknown quantity***:* a real and imaginary history of algebra. Washington: Joshep Henry Press, 2006.

ESTRADA, M. F. **História da Matemática**. 1. ed. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** 2. ed. São Paulo: Unicamp, 1997.

FERREIRA, W. J. **História das soluções das equações por meio de radicais**. Brasília: 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Católica de Brasília.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda, 2007.

KRANTZ, S. G. **An episodic History of Mathematics**. London: Dover, 2006.

LIMA. E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM,1991. pp.11-27.

LIMA, R. N. **Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas**. São Paulo: 1999. Tese (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MARDIA, K. V. **Omar Khayyam, René Descartes and Solutions to Algebric Equations***.* Paper presented at the International Congress in Commemorating Hakim Omar Khayyam Neyshabuori" (900^{th} death anniversary), 1999.

MILLES, C. P. **A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau**. Revista do professor de matemática. Rio de Janeiro: n. 25, 1994.

MOREIRA, C. G. T. A. **Uma solução das equações do 3º e do 4º graus**. Revista do professor de matemática. Rio de Janeiro: n. 25, 1994.

NG, T. W. **Solving Polynomial Equations**. Hong Kong: 2006. Seminar on Advanced Topics in Mathematics**.** University of Hong Kong.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E.F. **Rafael Bombelli**. Artigo. University of St Andrews. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli.html>. Acesso em: 4 fev. 2016.

____. John O'Connor's Home Page. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~john/>. Acesso em: 15 jan. 2016.

ORE, O. **Niels Henrik Abel**: Mathematician Extraordinary. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1957.

PERUZZO, Jucimar. **Evolução dos Métodos de Resolução de Equações Algébricas**.1. ed. Irani / SC: Edição do Autor, 2013.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books Editora Ltda.1996.

SOUSA, J. M. R. **Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo**: as Soluções na Antiga Grécia. Porto: 2001. Tese (Mestrado em Matemática). Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. 3. ed. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1997.

STEWART, I. **Galois Theory**. 3. ed. United Kingdon. Conventry: Chapman & Hall/CRC, 1945.

VIÈTE, F. **Opera Mathematica**, collected by F. Van Schooten. Leyde: Elzévir, 1646.

BIBLIOGRAFIA

ALVES, F. R. V. **Discussão dos Métodos Arábicos para a Resolução da Cúbica com Suporte Computacional.** In: IX Seminário Nacional de História da Matemática, 2011. Aracaju. Anais eletrônicos. Disponível em: <http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Alves_F_R_V_Discuss%C3%A3o_dos_M%C3%A9todos_Ar%C3%A1bicos_para_a_Resolu%C3%A7%C3%A3o_da_C%C3%BAbica.pdf>.

ASSIS, C. A. M.; OLIVEIRA C. M. M. **Equações algébricas de grau 3:** um passeio pela história. Disponível em: <http://www.uff.br/var/www/htdocs/dalicenca/images/artigo4.pdf>.

BROWN, E.; BRUNSON, J. C. **Fibonacci's Forgothen Number**. The College Mathematics Journal. Washington: mar. 2008. The Mathematical Association of America, Vl. 39, n. 2.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2005.

FITZGERALD, E. **Rubaiyat of Omar Khayyam**, edited with an introduction by Dick Davis. London: Penguin, 1989.

LEVIN, S. A. **Descartes' Rule of Signs** – How hard can it be? Stanford: Stanford Exploration Project, 2002.

MARTINS, C. R. P. **Resolução de equações algébricas por radicais**. São Paulo: 2006. Tese (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista.

MORO, M. O. **Um estudo sobre polinômios.** Santa Catariana: 2000. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina.

NICKALLS, R.W.D. **The quartic equation**: invariants and Euler's solution revealed. Mathematical Gazette. 2009.

SHMAKOV, S. L. **A universal method of solving quartic equations**. International Journal Pure and Applied Mathematics. Sofia: vl. 71, n. 2, 251–259 p. 2011.

TARTAGLIA, N. **Quesiti et invention diverse**. Venedig, 1554.

ANEXO A - SECÇÕES CÔNICAS

Origem

Apolônio de Perga (262 – 190 a. C.) conhecido como o Grande Geômetra foi um matemático grego da escola alexandrina. Pouco se sabe sobre sua vida, mas suas obras tiveram uma grande influência no desenvolvimento da matemática, em particular, seu famoso livro “As Cônicas”, um tratado de oito livros, introduziu termos que são familiares para nós hoje, como parábola, hipérbole e elipse.

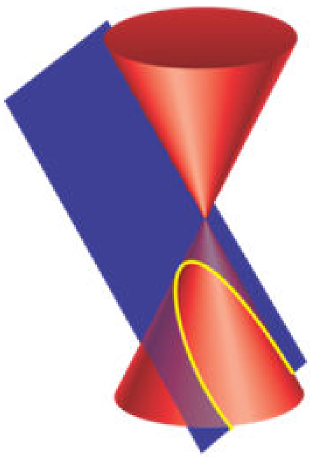
Mais de um século antes de “As Cônicas” serem escritas as secções cônicas já eram conhecidas com Aristeu e Euclides. Contudo, devido ao caráter mais abrangente, o tratado de Apolônio acabou suplantando os demais, incluindo o do próprio Euclides.

Método de Obtenção de Cônicas

Parábola

Obtém-se pela intersecção de uma clepsidra circular reta com um plano paralelo a sua geratriz.

Figura 32: Obtenção da parábola por secção cônica

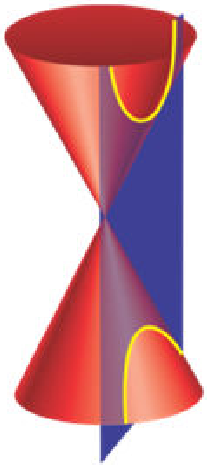


Fonte: https://csa.caltech.edu/cseActivities

Hipérbole

Obtém-se quando da intersecção de uma clepsidra circular reta com um plano oblíquo ou perpendicular à sua base.

Figura 33: Obtenção da hipérbole por secção cônica

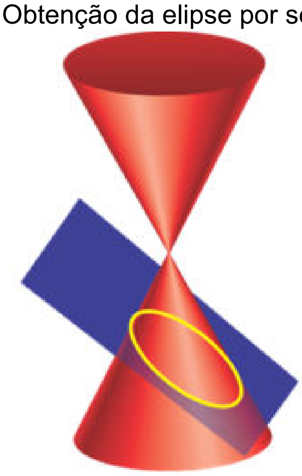


Fonte: https://csa.caltech.edu/cseActivities

Elipse

Obtém-se quando da interseção de uma clepsidra circular reta com um plano oblíquo a sua base.

Figura 34: Obtenção da elipse por secção cônica



Fonte: https://csa.caltech.edu/cseActivities

Definições

Parábola

Consideremos num plano π um ponto F e uma reta r, $F \notin r$, fixos, e com $F = (f, 0)$. Ao conjunto de pontos de π equidistantes de F e r se dá o nome de parábola.

A equação reduzida da parábola é dada por $y^2 = 4fx$ (BOULOS, 2005).

Hipérbole

Consideremos num plano π dois pontos F_1 e F_2, distantes $2c > 0$ entre si, com $0 < a < c$. Ao conjunto dos pontos $P \in \pi$, tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

se dá o nome de hipérbole. Com equação reduzida $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = 1$ (BOULOS, 2005).

Elipse

Consideremos num plano π dois pontos F_1 e F_2, distantes $2c > 0$ entre si, com $a > c$. Ao conjunto dos pontos $P \in \pi$, tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

se dá o nome de elipse. Com equação reduzida $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = 1$ (BOULOS, 2005).

Cônicas no Caso Geral

Dado num plano π um sistema ortogonal de coordenadas, e dada a equação

$$G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Com $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, chama-se cônica ao conjunto dos pontos $P = (x, y)$ de π tais que a equação acima se verifica.

Exemplo de cônicas

A. O conjunto vazio: $G(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$
B. Um ponto: $G(x, y) = x^2 + y^2 = 0$
C. Uma reta: $G(x, y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 0$
D. Reunião de duas retas paralelas: $G(x, y) = (x + y)(x + y + 1) = x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$
E. Reunião de duas retas concorrentes: $G(x, y) = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 0$
F. Elipse: $G(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$
G. Hipérbole: $G(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$
H. Parábola: $G(x, y) = x^2 - y^2 = 0$
I. Circunferência: $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

ANEXO B - POEMA DE TARTAGLIA E SUA INTERPRETAÇÃO

Descrição do método de resolução da equação $x^3 + ax = b$	
Quando o cubo com a coisa em apreço	$x^3 + px$
Se igualam a qualquer número discreto	$= q$
Acha dois outros diferentes nisso	$u - v = q$
Depois terás isto por consenso Que seu produto seja sempre igual	$uv =$
Ao cubo do terço da coisa certo	$(p/3)^3$
Depois, o resíduo geral	Resolve-se o sistema de u, v
Das raízes cúbicas subtraídas	$\sqrt[3]{\{u\}} - \sqrt[3]{\{v\}}$; "lado" no original equivale a raiz cúbica
Será tua coisa principal	$= x$
Descrição do método de resolução da equação $x^3 = ax + b$	
Na segunda destas operações,	Os 14 casos de Khayyam se tornam em 3
Quando o cubo estiver sozinho Observarás estas outras reduções	$x^3 = px + q$
Do número farás dois, de tal forma	$q = u + v$
Que um e outro produzam exatamente	$uv =$
O cubo da terça parte da coisa	$(p/3)^3$

Depois, por um preceito comum Toma o lado dos cubos juntos	$\sqrt[3]{\{u\}} + \sqrt[3]{\{v\}}$
E tal soma será teu conceito	$= x$
Descrição do método de resolução da equação $x^3 + b = ax$.	
Depois, à terceira destas nossas contas	$x^3 + q = px$
Se resolve como a segunda, se observas bem Que suas naturezas são quase idênticas	Opostos
Verso final do poema	
Isto encontrei, e não com passo lento	
Em mil quinhentos e trinta e quatro	
Com fundamentos bem firmes e sólidos	
Na cidade que o mar rodea	Veneza