UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

A MATEMÁTICA FINANCEIRA
E O ENSINO MÉDIO

Edmilson Nahass Franco

Uberaba - MG
2016

Edmilson Nahass Franco

A MATEMÁTICA FINANEIRA E O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, Departamento de Matemática, como parte das atividades para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Nelson Fernando Inforzato.

Uberaba - MG
2016

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Franco, Edmilson Nahass
F895m A matemática financeira e o ensino médio / Edmilson Nahass Franco. -- 2016.
136 f. : il., fig., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016
Orientador: Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato

1. Matemática financeira. 2. Títulos (Finanças). 3. Juros. 4. Ensino fundamental. I. Inforzato, Nelson Fernando. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51-7

Edmilson Nahass Franco

A MATEMÁTICA FINANEIRA E O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

10 de Junho de 2016

Banca Examinadora

Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato - Orientador.
UFTM - Universidade Federal do Triângulo Mineiro.

Bruno Nunes de Souza

Prof. Dr Bruno Nunes de Souza - Membro Interno.
UFTM - Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Ms. Arinaldo de Oliveira - Membro Externo.
IFTM - Instituto Federal do Triângulo Mineiro - Uberlândia.

Dedicatória

À minha mãe, Samira, que mostrou-nos que ensinar é a arte de aprender todos os dias.

Ao meu pai, Genebaldo, que nunca mediu esforços para que pudéssemos buscar o conhecimento.

Aos meus filhos: Laila, Lucas, e Lisa, que a cada dia de estudo e ausência, faziam-nos perceber nos olhos de cada um a paciência, a aceitação, a espera e, acima de tudo, o incentivo.

Aos colegas que nos apoiaram e instigaram a continuar, em especial, àqueles que, por algum motivo, ficaram ao longo dessa jornada.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida e pela oportunidade concedida.

Aos irmãos, Genezinho, Olivinha, Alexandre e Samir, que sempre estiveram ao nosso lado, direcionando e instigando na busca deste título.

À mãe de meus filhos, Kelly, pelo apoio e incentivo, bem como a colaboração durante todos os finais de semana de ausência dos filhos.

Aos colegas e amigos, Israel e Edson Jr, e à nossa querida Tia Darcy, pelo apoio incondiciaonal.

À família Nahass, da qual nos orgulhamos de pertencer e nos espelhamos na força, perseverança e garra dos nossos ascendentes, para levar com afinco, até ao final, este estudo.

Aos professores do curso, que traduziram o verdadeiro valor do conhecimento.

Ao povo brasileiro, que através da CAPES, deu-nos apoio financeiro.

De uma forma muito especial, ao meu Professor orientador, Doutor Nelson Fernando Inforzato que compartilhou comigo sua sabedoria, seu desprendimento e sua atenção durante todo o processo de elaboração deste trabalho.

"A Matemática não mente. Mente quem faz mal uso dela."

Albert Einstein.

Resumo

Neste trabalho procuramos desenvolver conceitos simples sobre os Sistemas de Capitalização e Regimes de Juros adotados universalmente. Estabelecemos um paralelo entre os Sistemas de Capitalização Contínua e Descontínua e os Regimes de Juros Simples e Compostos. Mostramos que os Cálculos das rendas e anuidades adotadas hoje no Brasil são anatocismo e que os interesses das Instituições Financeiras são estabelecidos em função dos Regimes de Juros que as favorecem unilateralmente. Desenvolvemos um procedimento para cálculo de Rendas e Anuidades pelo Regime de Juros Simples sem a presença do anatocismo, mostrando que o tempo não é cindível para tal regime. Ao final, propomos uma sugestão para introdução à Matemática Financeira no Ensino Médio.

Palavras-chave: Capitalização, Juros, Anatocismo.

Abstract

In this dissertation we aim at developing basic concepts regarding universally adopted capitalization systems and interest schemes. We establish a parallel between the continuous and the discontinuous accumulation systems, and simple and compound interest schemes. We intend to demonstrate that the calculations of income and annuities currently adopted in Brazil are made as anatocism and that the interests of the financial institutions are determined as a result of the interest schemes that favor them unilaterally. We have developed a procedure for the calculation of income and annuities by means of the simple interest scheme and avoiding anatocism, thus showing that time is not fissionable for such a scheme. In the end, we suggest a way of introducing Financial Mathematics in high school.

Keywords: Capitalization, Interest, Anatocism.

Lista de Figuras

2.1 Exponencial de uma capitalização contínua 15
2.2 Gráfico de uma capitalização descontínua 18
2.3 Gráfico de uma capitalização descontínua simples 19
4.4 Gráfico comparativo de uma função Afim e uma função Exponencial 30
4.5 Gráficos das funções de convenções Linear e Exponencial. 34
6.6 Eixo de tempo mostrando uma Renda Constante Imediata. . . . 45
6.7 Eixo de tempo mostrando uma Renda Constante Antecipada. . 46
6.8 Eixo de tempo mostrando uma Renda Constante Imediata Diferida de um tempo “m”. 46
6.9 Eixo de tempo mostrando uma Renda Constante Antecipada Diferida de um tempo “m”. 47
6.10 Eixo de tempo mostrando uma descapitalização e uma capitalização de uma mesma quantia no RJS. 48
6.11 Eixo de tempo mostrando uma descapitalização e uma capitalização de quantias diferentes que deveriam gerar o mesmo valor no RJS. 49
6.12 Evolução de um capital C_0 no RJS. 51
6.13 Descapitalização de um montante C_n no RJS. 54

6.14 Evolução de um capital C_0 e Descapitalização de um montante C_n no RJS 55

6.15 Capitalização de um capital C_0 e Descapitalização de um montante C_n para uma data p no RJS 56

6.16 Eixo de tempo mostrando uma dívida e a sua negociação. 58

6.17 n anuiades X gerando uma renda C no RJS 61

6.18 n anuidades X gerando uma renda C no RJS, antecipadamente. 65

6.19 n anuidades X gerando uma renda C no RJS, em anuidades imediatas diferidas de m períodos. 68

6.20 n anuidades X gerando uma renda C no RJS, em anuidades antecipadas diferidas de m períodos. 69

6.21 "n"anuidades “X” formando uma Renda Incial “C” no RJC - Rendas Imediatas. 73

6.22 “n” parcelas “X” pagando uma quantia “C”, no RJC 77

6.23 n anuidades X gerando uma renda C, no RJC, através de uma Renda Imediata Diferida de m períodos. 81

7.24 Comparação entre o Sistema Francês e o SAC. 89

25 Situação de um financiamento de uma dívida de $R\$ \ 2\ 500,00$ em 6 parcelas fixas 117

Lista de Tabelas

2.1 Tabela comparativa entre os dois tipos de capitalização e os dois sistemas de juros: 20

4.2 Tabela comparativa entre as conveções Linear e Exponencial: . . 32

6.3 Evolução de um capital C_0 no RJS 50

6.4 Descapitalização de um montante C_n no RJS 52

6.5 Evolução de um capital C_0 e Descapitalização de um montante C_n no RJS 53

6.6 Amortização de uma anuidade imediata no RJS 64

6.7 Amortização de uma anuidade antecipada no RJS 67

6.8 Amortização de uma anuidade diferida no RJS 72

6.9 Amortização de uma anuidade imediata no RJC 76

6.10 Amortização de uma anuidade antecipada no RJC 80

6.11 Amortização de uma anuidade antecipada diferida de 4 meses no RJS 83

7.12 Amortização de uma dívida C pelo Sistema Price e SAC 88

7.13 Valor das parcelas para uma dívida de R$ 10 000,00 em cinco vezes, à taxa de 3% a.m., nos sistemas Francês, SAC e Sacre . . 95

14 Amortização de uma dívida de $R\$ \ 2 \ 500,00$ em 6 parcelas fixas 118

Sumário

Introdução **1**

1 - Um pouco de História **4**

1.1 A origem do dinheiro 4

1.2 Os tipos de dinheiro 6

1.3 O dinheiro moderno 7

1.4 A origem do Juro 8

2 - Juros na atualidade e os Sistemas de Capitalização **10**

2.1 Juro 10

2.2 Os Sistemas de Capitalização 11

2.2.1 O Sistema de Capitalização Contínua - SCC 11

2.2.2 O Sistema de Capitalização Descontínua - SCD 16

2.2.3 A distinção entre o Regime de Juros Simples e o Regime de Juros Compostos 19

3 - O Regime de Juros Simples (RJS) **21**

3.1 Introdução 21

3.2 Juro Simples 21

3.3 Juro Exato e Juro Comercial 23
3.4 Valor Atual e Valor Futuro 24

4 - O Regime de Juros Compostos (RJC) 27
4.1 Introdução 27
4.2 Juros Compostos 27
4.3 Quando, no Sistema de Capitalização Descontínua, tempo não é uma variável discreta 31

5 - Os mais variados tipos de Taxas 36
5.1 Introdução 36
5.2 Taxa Nominal e Taxa Efetiva 36
5.3 Taxa Proporcional e Taxa Equivalente 37
5.3.1 Taxas Proporcionais 37
5.3.2 Taxas Equivalentes 38
5.3.3 Taxa de Juros em um sistema Inflacionário 42

6 - Rendas Costantes 44
6.1 Introdução 44
6.2 Classificação das rendas 45
6.3 Rendas Constantes no Regime de Juros Simples 47
6.3.1 Rendas ou Anuidades Imediatas 61
6.3.2 Rendas ou Anuidades Antecipadas 64
6.3.3 Rendas ou Anuidades Diferidas 68
6.4 Rendas Constantes no Regime de Juros Compostos 72
6.4.1 Rendas ou Anuidades Imediatas 73
6.4.2 Rendas ou Anuidades Antecipadas 76
6.4.3 Rendas ou Anuidades Diferidas 80

7 - Sistemas de Amortização **84**

7.1 Introdução 84

7.2 Tabela *Price* - Sistema Francês de Amortização 85

7.3 Sistema de Amortização Constante - SAC 86

7.4 Comparação entre o Sistema Francês - Price - e o SAC 87

7.5 Sistema de Amortização Crescente - Sacre 93

8 - Considerações Finais **97**

Referências **100**

APÊNDICE - O RJS, o RJC e o Ensino Médio **102**

.1 Introdução 102

.2 A função Afim, a Progressão Aritmética e o Juro Simples 104

.3 A Função Exponencial, a Progressão Geométrica e o Juro Composto 110

.4 Considerações 120

Introdução

É comum, dentro do estudo da Economia Contemporânea, depararmos na teoria com o termo *Capital* em situações bem diferentes. Uma delas diz respeito a um dos fatores básicos da produção, que serve como uma estratégia a ser utilizada pelas pessoas para extrair da natureza produtos em formas de bens. Noutra, o *Capital* se relaciona à distribuição dos bens; surge como fonte de fundos de renda e rendimentos. Mas numa ou noutra situação é senso comum que o *Capital*, como resultado do trabalho coletivo, faz com que gravite em torno de si uma grande parte do produto nacional, transpondo para o seu proprietário uma renda, que ousadamente, denominamos de juros.

É indiscutível que o *Capital*, quando bem administrado, produz bens, que por sua vez, transporta bens para o seu proprietário, mostrando a reciprocidade entre as duas referências: o *Capital* provoca a produção de bens a seu proprietário devido ao fato de ele ter produzido bens.

A transformação da Economia em Ciência mostrou que os três fatores básicos da produção: Terra (Natureza), Trabalho (Mão-de-obra) e *Capital* recebem suas respectivas remunerações como tipos de rendas: renda da terra, salário dos colaboradores e Juros do *Capital*, sendo o último, o pagamento adquirido pelos serviços produzidos devido ao *Capital* bem distribuído na transformação de bens e/ou serviços.

Entre todas as diferentes linhas de interpretação e de definição sobre os juros, a mais conhecida é a "teoria da produção", a qual argumenta que os juros do *Capital* são frutos naturais de uma força produtiva que é peculiar ao próprio *Capital*.

Neste caso, torna-se de suma importância que entendamos que a palavra *bens* também pode ser substituída pela palavra *serviços* e, neste caso, Juros seriam a remuneração de um *Capital* aplicado na produção de um *bem* ou *serviço*.

Na atualidade, quando solicitamos para a grande maioria das pessoas o que elas entendem por juros, a resposta encontrada e esperada é: O preço do dinheiro. Neste caso, se analisarmos friamente a resposta e cruzarmos com as definições científicas segundo vários autores, podemos aceitá-la e passá-la à frente como verdadeira.

Toda pessoa que faz a gravitação no entorno de um *Capital* estará sujeita a uma das duas situações: gasta-o levando renda a quem o recebeu ou emprega-o para obter um resgate futuro, evidentemente, maior que a quantia inicial aplicada.

Nossa questão não será explorar o "ganho" sobre um *Capital* investido num empreendimento que produz bens ou serviços. Nosso escopo será avaliar a remuneração de um *Capital* quando aplicado numa instituição financeira ou vice-versa, quando a instituição financeira o empresta, mostrando os dois tipos mais comuns de se valorizar o *Capital* e analisando quando um ou outro provoca o **anatocismo**, que é a incidência de juros sobre os juros acrescidos ao saldo devedor, em razão de não terem sido pagos. Os juros obtidos, por meio desta prática, são somados ao *Capital* e será a base para o cálculo da nova contabilização de juros.

O Artigo 192, §3º, da Constituição Federal (Brasil, 1988) que definia tais operações foi revogado em 2003 e, a partir daí, existem várias jurisprudências sobre a validade ou não dessa cobrança.

A finalidade não será analisar a legalidade ou não do anatocismo, mas sim, verificar ou não sua existência dentro de contratos ou validação de remunerações sobre o *Capital*.

Vamos procurar dar ênfase nas principais teorias que envolvem a Matemática Finaceira mais usual, estabelecendo um paralelo sobre os Sistemas de Capitalização e Regimes de Juros, bem como os tipos diferentes de anuidades (rendas).

Para tanto, faremos um confronto entre as opiniões de vários autores que trabalham o tema procurando desenvolver uma linguagem menos formal e mais usual dando subsídios aos professores do Ensino Básico para poderem trabalhar o mínimo da Matemática Financeira e fazerem aplicação dela nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio ao se abordar os temas: Sequências Numéricas, Funções Afim e Função Exponencial.

1 - Um pouco de História

1.1 A origem do dinheiro

Há mais de 5 000 anos antes de Cristo, carne salgada, peles de animais, sal, graõs, entre outras coisas, foram ferramentas de troca entre as pessoas, que faziam de acordo com as suas necessidades básicas. Para aqueles que tinham excesso de um, trocavam pela falta do outro. A este processo de trocas apareceu a primeira moeda: Escambo. [1]

Percebemos que na própria definição da primeira moeda deparamos-nos com a palavra "dinheiro" para defini-la.

Para Versignassi (2012, p. 97), "*(Dinheiro) ... Se não for escasso não tem grande valor; se não tem valor, não é dinheiro.*

O dinheiro foi uma criação feita com muito artifício e destreza. Permite que alguém que não tenha determinado produto troque por outro sem necessitar a realização do escambo; como por exemlo, permite que um médico compre carne sem precisar fazer a consulta com o açougueiro. Foi criado na Grécia antiga e nós nos valemos desta criação até os dias de hoje. Ele se resume na sua própria razão de ser e nós precisamos nos valer da certeza de que não vemos seu valor mas acreditamos nele. Acreditamos que quando substituimos um bem ou um serviço por um número expresso em um papel ou metal, este número (papel ou metal) será substituido novamente, e assim sucessivamente,

[1] Segundo *Dicio: Dicionário Online de Português*, [Escambo]: Troca de mercadorias sem que haja uso de dinheiro. P.ext. Qualquer tipo de troca e/ou permuta.

acreditando com veemência na sua veracidade. A isso, a certeza daquilo que não se vê, denominamos Fé.

Percebemos que para ser “dinheiro” é necessário que seja algo que todos necessitam e queiram e que seja algo escasso ou de difícil posse; e neste caso, “alimentos” se encaixa muito bem; pois desde a introdução do homem sobre a superfície do planeta, o alimento é um grande instrumento de troca.

É claro que na comparação entre a agricultura e a caça é mais do que óbvio que a segunda se submete às necessidades da primeira, uma vez que os proventos da caça eram consumidos em poucos dias, enquanto que os da agricultura podiam ser estocados. Por isso a nossa afirmação de que “à agricultura devemos a aparição do dinheiro”.

É de fácil entendimento que aqueles que cultivavam a terra e nela plantavam poderiam estocar os grãos e posteriormente negociá-los; enquanto com a caça era necessário consumir o produto final com mais rapidez, devido à sua perecividade. Neste caso, as pessoas que necessitavam de comida a trocavam pelo trabalho, mostrando desta maneira que a comida foi uma das primeiras formas de dinheiro.

Devido ao fato do incômodo em carregar os sacos de alimentos, os povos da Babilônia criaram depósitos onde guardavam os alimentos e registravam numa tábua de argila a quantidade de alimentos que haviam no estoque. Dessa forma surgiram os bancos e o dinheiro que temos hoje.

Tanto a argila quanto os alimentos eram de pouco durabilidade. Assim, tornou-se necessário a criação de outra coisa que pudesse substituí-los, mas que mantivesse a característica que seria necessária. Apareceu o “Sal”; difícil de adquirir e fácil de carregar. Daí a origem do termo “salário”, que perdura até os dias de hoje. Os romanos legionários recebiam seus salários em Sal.

Antes do surgimento do dinheiro como o conhecemos hoje, muitas coisas serviram como tal: peles curtidas, carne salgada, sal, grãos, tabaco, etc.

1.2 Os tipos de dinheiro

A necessidade de se obter algo de transporte mais fácil a fim de se fazer as trocas, a humanidade acabou por adotar o primeiro metal como dinheiro: o cobre. Porém, devido à facilidade de se encontrar o referido metal, este foi logo substituído pela prata, que se impôs por ser de mais difícil acesso que o cobre. Mas, devido à necessidade de se valorizar mais os objetos e as propriedades, chegaram-se ao ouro, que era de difícil aquisição.

Assim, por muito tempo, a utilização dos três metais ficaram definidas em função de sua raridade, não corrosão, praticidade de manuseio, beleza e, acima de tudo, valor econômico.

Segundo Weantherford (2005), em meados do século VII a.C. aparecem os primeiros objetos com características mais próximas das moedas, com valores pré-definidos na sua cunhagem e a garantia da marca de quem as imprimiu cunhadas em si mesmas.

No início da civilização babilônica seus sacerdotes eram apreciadores da astronomia e convenciam os seus seguidores de que o Sol estava ligado ao ouro assim como a prata estava ligada à Lua, e isso fez com que a humanidade se ligasse, de alguma forma, a esses metais, o que os levariam mais ainda a serem considerados como instrumentos de trocas e de penhor.

As moedas de prata, ouro e bronze eram ligadas diretamente ao seu valor real, isso durou por muito tempo. E durante este tempo, até o século passado, os paises cunhavam moedas desses metais, guardando-as e colocando para circular moedas com metais mais baratos, porém, mantendo em seu poder quantidade de ouro e prata equivalente às quantidades que eram lançadas no mercado.

Não demorou muito e surgiu o papel-moeda, e a cunhagem de moedas metálicas tornou-se restrita a valores pequenos, necessários para compra de mercadorias de baixo valor ou mesmo para troco.

Segundo a arqueóloga Maria Beatriz Florenzano, da Universidade de São Paulo (USP), a origem do papel-moeda é meio confusa. Sabe-se que já existiam moedas na China desde o ano de 960, porém estas não se disseminaram pelo mundo; por isso não foram mais utilizadas.

Historicamente os registros mostram que as notas apareceram na Suécia (Europa) no ano de 1661, e, de lá para cá, sofreram as evoluções e adequações necessárias a cada País.

Para Weatherford (1999, p. 210)

> [...] estamos entrando na terceira fase da revolução monetária: Com a informática, o dinheiro se transformou em impulsos eletrônicos invisíveis, livres do espaço, do tempo e do controle de governos e corporações.

Percebemos que, com um simples cartão, podemos fazer pagamentos e recebimentos, bem como, sem sair de nossas próprias residências, quase todas as operações bancárias, as quais, em tempos não tão remotos, reveríamos enfrentar filas e atendimento.

1.3 O dinheiro moderno

Na atualidade, todas as moedas e cédulas que um determinado país emite forma o seu sistema financeiro e monetário. Cada país tem um forma própria de legislar esta emissão e de valorizar sua unidade monetária a partir de um valor de referência.

É muito comum que os valores monetários mais elevados sejam expressos em cédulas e que os mais baixos, em moedas.

Com o término da indexação da emissão do dinheiro em função do lastro em ouro, o dinheiro vai deixando de circular e, em substituição a ele, aparecem os cheques e, ainda com maior frequência, os pagamentos com cartões de crédito/débito, hábito que a grande maioria da população já vem adquirindo em função da praticidade, do fácil manuseio e da segurança.

A globalização reporta-nos à comparação diária entre os valores monetários utilizados pelos países ditos desenvolvidos, países em fase de desenvolvimento e os países subdesenvolvidos. É claro que a supremacia entre eles é evidente e que na escala ascendente de cada um na sua inserção de desenvolvimento coloca a valorização de seu dinheiro em função da sua balança comercial e de seu produto interno bruto.

O bom senso leva o país a emitir dinheiro suficiente para cobrir seu PIB, de forma a poder fazer com que tudo o que seja produzido em bens e serviços tenha dinheiro suficiente para pagá-lo; é claro que existem duas situações adversas à realidade: se o mercado interno recebe mais dinheiro que o PIB haverá um excesso de dinheiro no mercado e, consequentemente, as pessoas comprarão mais; dessa forma, o consumismo levará a um aumento contínuo e generalizado dos preços dos bens e serviços, provocando o que é chamado de inflação. Caso ocorra o contrário e o país coloque no mercado uma quantidade menor de dinheiro que a produzida pelos bens e serviços, haverá uma falta de dinheiro no mercado e as pessoas, consequentemente, não terão poder de compra, fazendo com que as indústrias não produzam, provocando uma recessão.

Acreditamos que é de suma importância que se crie situações onde haja o equilíbrio da balança de pagamentos, importação/exportação, e, acima de tudo, um controle na emissão do dinheiro a fim de manter a economia estável e provocar um crescimento econômico no país.

1.4 A origem do Juro

Os indícios da origem do *Juro* remontam de 2000 a.C. na civilização babilônica, onde as negociações eram feitas através de grãos.

As mais remotas pesquisas sobre a origem do *Juro* nos remete exatamente à comparação entre os valores e as necessidades dos bens e serviços que fazem parte da época em estudo. A disponibilidade do bem ou serviço por uma parte e a necessidade do mesmo bem ou serviço pela outra parte é quem dá o valor presente do mesmo e a projeção para o valor futuro.

Segundo Bohrn - Bawerk, Eugen Von (1986, p.300)

> A relação de necessidade e cobertura no presente e no futuro, a subavaliação excessiva de alegrias e tristezas futuras, e a superioridade técnica de bens presentes fazem com que, para a grande maioria das pessoas, o valor de uso subjetivo de bens presentes seja maior do que o de bens futuros da mesma espécie. Dessa situação de avaliações subjetivas resulta, no mercado em geral, uma superioridade dos bens presentes relativamente a valor de troca objetivo e preço de mercado. Essa superioridade retroage e faz com que façam uma avaliação subjetiva (do valor de troca) mais alta dos bens presentes também aquelas pessoas que, por suas condições pessoais casuais, não atribuem a esses bens presentes um valor de uso subjetivo maior. Ao final, as tendências niveladoras do mercado fazem com que a inferioridade do valor dos bens futuros apresente uma proporção regular com o intervalo de tempo que os separa do presente. Por conseguinte, na Economia da nação há uma inferioridade geral dos bens futuros, no tocante ao valor subjetivo. de acordo com o intervalo de tempo que os separa do presente.

Podemos entender essa diferença entre bens futuros e presentes exatamente como o início do manancial que origina *Juro*. Como fator de relevância, tem como mais simples entendimento o empréstimo (verdadeira troca de bens presentes por bens futuros), onde uma determinada pessoa X (denominada credor) dá a uma pessoa Y (denominada devedora) uma determinada quantia de bens presentes, transferindo à segunda livre arbítrio sobre a quantia dada, porém, em oposição, o devedor Y dá a X uma garantia exata de mesma espécie (ou gênero), porém futuros, transferindo o livre arbítrio à X.

Nesta transferência biunívoca de propriedades fica claro que uma é remuneração da outra, diferindo simplesmente o fato de uma pertencer ao presente e a outra ao futuro. E, como citado anteriormente, o preço de mercado sempre favorece os bens presentes e, neste caso, Y deverá pagar uma quantia maior por eles (prêmio, ágio ou mesmo contrapartida), à qual denominamos *Juro*.

2 - Juros na atualidade e os Sistemas de Capitalização

2.1 Juro

A Matemática Financeira tem como alvo principal a análise de quantias monetárias que são permutadas em intervalos diferentes ao longo da linha do tempo. Apesar de alguns autores não concordarem que o dinheiro seja produtivo ao longo do tempo, a grande maioria concorda que sim e a prática do estudo de quantidades monetárias em tempos diferentes tornou-se alvo de estudos e debates calorosos entre autores. Porém, todos são unânimes em concordar que a Matemática Financeira pode ser descrita como o que afirma Faro (1982, p. 13) "[...] o estudo da evolução do dinheiro ao longo do tempo".

Segundo Siva (1992) os fatores básicos da produção se agrupam em três itens: Trabalho (Contribuição do ser humano, na produção, em forma de atividade física e mental); *Capital* (é o conjunto de equipamentos, ferramentas e máquinas, produzidos pelo homem, que não se destinam à satisfação das necessidades através do consumo, mas concorrem para a produção de bens e serviços, aumentando a eficiência do trabalho humano) e Recursos Naturais (elementos da natureza utilizados pelo homem com a finalidade de criar bens).

Para Faro (1982), do ponto de vista da economia, a remuneração a qualquer título atribuída ao fator *Capital* é denominada *Juro*.

Desta forma, ao tomarmos emprestado ou emprestarmos determinada quantia num determinado intervalo de tempo, costumamos cobrar uma certa importância, à qual chamamos *Juro*, de maneira que ao se findar o prazo estipulado, passaremos a ter não somente a quantia inicial emprestada, mas também os acréscimos que faça a compensação da não utilização do *Capital* por nós, exatamente durante todo o período em que não ficamos de posse dele.

O *Juro* a ser cobrado numa determinada transação financeira é efetuado mediante um índice, um coeficiente, que expressa o valor do *Capital* a ser empregado na transação. A este índice (coeficiente) damos o nome de *taxa de juros*, que será sempre referida a um determinado intervalo de tempo e que representa nada mais nada menos que o preço do *Capital* que está sendo negociado naquele período de tempo. Esta taxa de crescimento (ou decrescimento), TC, é obtida fazendo o quociente entre a diferença de valores (futuro menos atual) pelo valor atual:

$$TC = \frac{ValorFuturo - ValorAtual}{ValorAtual}.$$

As taxas de juros podem ser empregadas de duas formas: **forma unitária**, que mostra o valor de cada unidade do capital empregado naquele intervalo de tempo ou **forma percentual** (mais utilizada), que mostra o valor de cada 100 unidades do capital empregado no referido intervalo de tempo.

2.2 Os Sistemas de Capitalização

Entendemos por *Capitalização* o processo pelo qual os Juros são incorporados ao Capital que está sendo colocado em estudo. Universalmente temos dois tipos de *Sistemas de Capitalização*, a saber: O Sistema de Capitalização Contínua e o Sistema de Capitalização Descontínua.

2.2.1 O Sistema de Capitalização Contínua - SCC

No Sistema de Capitalização Contínua, como o próprio nome assim o define, os Juros são incorporados ao Capital a cada intervalo de tempo infinitesimal, ou seja, o Capital aumenta continuamente quando o intervalo de tempo deixa de ser uma variável discreta e tende a ser uma variável real. A cada segundo, a cada décimo de segundo, os juros são incorporados ao Capital.

A nomenclatura a ser utilizada em nossas considerações será:

$i =$ taxa de juros na forma unitária;

$n =$ tempo na mesma unidade a que se refere a taxa;

C ou $C_0 =$ Capital ou quantia inicial;

J ou $J_n =$ Juros referentes ao Capita C à taxa de Juros i no intervalo de tempo n;

$C_n =$ Montante (soma do Capital com os Juros referentes ao período considerado).

Vamos considerar C o valor de um certo Capital num determinado momento do tempo n.

Sabemos que no intervalo de tempo

$$n + \Delta_n$$

haverá uma incorporação de juros J_n referente à utilização do Capital C neste período, de forma que, ao final do período $n + \Delta_n$ teremos um montante

$$C_n = C + J_n.$$

Sabemos pela definição de *taxa de crescimento: TC* , que para um intervalo de tempo unitário, a taxa de crescimento TC, que será a taxa de juros i neste período, será dada por:

$$i = \frac{C_n - C}{C}.$$

Porém, $C_n - C$ é exatamente a quantidade de juros referentes a este período unitário; ou seja:

$$J_n = C_n - C.$$

Logo, a taxa de juros no período unitário considerado será dada por:

$$i = \frac{J_n}{C};$$

e, caso o período não seja unitário, mas seja um período n, a taxa de juros será dada por:

$$i = \frac{J_n}{(C).(n)}.$$

Considerando um intervalo infinitamente pequeno de tempo dn, podemos substituir o acréscimo J_n pela diferencial dC_n.

Chamando a taxa de juros relativa a este intervalo de tempo infinitamente pequeno como *taxa instantânea de juro* e a representando por i, podemos escrever:

$$i = \frac{dC_n}{(C_n).(dn)}$$

$$dC_n{=}(i).(C_n).(dn),$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem, mostrando-nos com isso que a fração de juros correspondente à aplicação é diretamente proporcional ao intervalo de tempo infinitamente pequeno e também ao Capital em questão, e, mais ainda, a constante de proporcionalidade entre as grandezas é a taxa de juros instantânea i.

Resolvendo a equação diferencial teremos:

$$\int dC_n = \int (i).(C_n).dn \Longrightarrow \int \frac{dC_n}{C_n} = \int (i).dn \Longrightarrow ln(C_n) = (i).(n) + K.$$

Em que $ln(C_n)$ representa o logaritmo natural de C_n e K uma constante de integração.

Como K é uma constante de integração, se tomarmos $K = ln(K)$, poderemos escrever, sem perda de generalidade:

$$ln(C_n) = (i).(n) + ln(K).$$

Sabemos que na época zero ($n = 0$), o Capital é o inicial, que chamaremos de C_0, e que é um valor conhecido, pois é dele que se trata nosso estudo. Assim, tomando a solução da equação diferencial e fazendo $n = 0$ e $C_n = C_0$ teremos:

$$ln(C_0) = (i).0 + ln(K),$$

que nos leva em $C_0 = K$, mostrando que a constante de integração é o lagaritmo natural do capital inicial.
Voltando à fórmula, poderemos então escrever:

$$\begin{aligned}
ln(C_n) &= (i).(n) + ln(K) \\
ln(C_n) &= (i).(n) + ln(C_0) \\
ln(C_n) - ln(C_0) &= (i).(n) \\
ln(\frac{C_n}{C_0}) &= (i).(n) \\
\frac{C_n}{C_0} &= e^{(i).(n)} \\
C_n &= C_0.e^{(i).(n)}
\end{aligned}$$

em que "e" é o algarismo de Neper, número Irracinal, que pode ser obtido através da fórmula:

$$\mathbf{e} = \sum_{\mathbf{i=0}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n!}} = 2,718\ 281\ 828\ ....$$

Graficamente a função $C_n = C_0.e^{(i).(n)}$ é uma exponencial contínua crescente que, a partir de um capital inicial e uma determinada taxa de juros instantânea, permite-nos encontrar o montante formado em qualquer instante, dentro de um Sistema de Capitalização Contínua.

O gráfico que se segue mostra mais claramente a variação da função. Nas ordenadas temos o capital inicial para a data $n = 0$ e, a cada intervalo infinitesimal de acréscimo de tempo n (nas abscissas), teremos um montante C_n que é obtido através da função:

$$C_n = C_0.e^{(i).(n)}$$

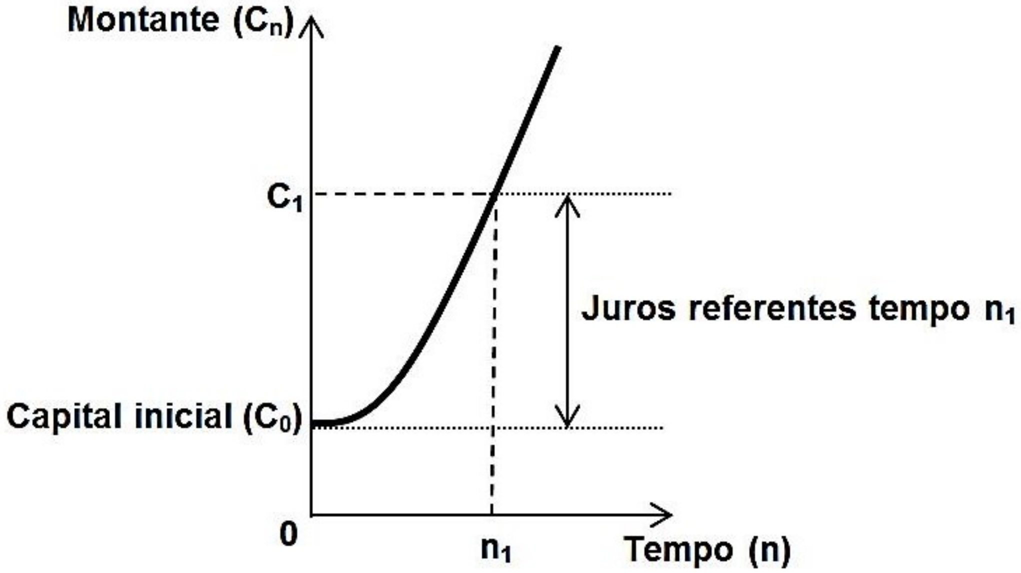

Figura 2.1: Exponencial de uma capitalização contínua

Note que os juros formados em qualquer instante será dado pela diferença entre o Montante C_n e o capital inicial C_0, levando-nos a:

$$\begin{aligned} J_n &= C_n - C_0 \\ J_n &= C_0.(e^{i.n}) - C_0 \\ J_n &= C_0.(e^{i.n} - 1). \end{aligned}$$

Como a taxa de juros é instantânea, no Sistema de Capitalização Contínua, o juro é formado a todo momento (o intervalo de tempo é infinitamente pequeno) e incorporado ao capital inicial instantaneamente e, tudo isso, passando a render juros no tempo infinitesimal seguinte, mostrando que, num intervalo de tempo perfeitamente definido com início e fim, os juros são formados de uma maneira contínua e ininterrupta, exponencialmente crescente.

2.2.2 O Sistema de Capitalização Descontínua - SCD

Este é o Sistema de Capitalização adotado realmente na prática. Os juros só são incorporados ao capital no final do período a que se refere a taxa ou a capitalização. O capital aplicado recebe ao final de cada período finito de tempo o acréscimo dos juros, que é diretamente proporcional a esse capital e, como no Sistema de Capitalização Contínua, a constante de proporcionalidade entre eles é a taxa de juros para o período considerado.

Seja C_n um capital considerado numa determinada época da linha do tempo n. Após um período a que se refere a taxa o novo tempo será $n+1$ e o capital que na época n era C_n sofrerá um acréscimo por unidade equivalente à taxa i, e neste caso, será acrescido de $C_n.i$, sendo este acréscimo os juros referentes a este período unitário; ou seja:

$$J = (C_n).(i).$$

Assim, o montante C_{n+1} formado na época $n+1$ será:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + C_n.i \\ C_{n+1} - C_n.(1+i) &= 0 \end{aligned}$$

que é uma uma recorrência linear de primeira ordem; e resolvendo-a, tomando C_0 como o capital inicial na data zero, teremos:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= C_0.(1+i)\\
C_2 &= C_1.(1+i)\\
C_3 &= C_2.(1+i)\\
C_4 &= C_3.(1+i)\\
... &= ...\\
C_n &= C_{n-1}.(1+i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(C_1).(C_2).(C_3). \ldots .(C_{n-1}).(C_n) &= C_0.(1+i).C_1.(1+i).C_2.(1+i). \ldots .C_{n-1}.(1+i)\\
C_n &= C_0.(1+i)^n
\end{aligned}
$$

fornecendo-nos o montante (a soma do capital mais os juros referentes ao período) no Sistema de Capitalização Descontínua aplicado a uma determinada taxa i por um período finito de n vezes a que se refere a taxa dada.

É muito importante salientar que os juros só são incorporados ao capital para formar um novo montante após vencido o tempo a que se refere a taxa. Caso haja interrupção no período, antes de finalizá-lo, os juros não são incorporados ao capital e, neste caso, retira-se somente a quantia inicial aplicada ou a quantia existente no início do período, salvo em casos em que é especificado o tempo de capitalização; como por exemplo, a taxa de juros é anual, mas a capitalização é mensal. Neste caso, os juros são incorporados mês a mês. Como os juros só são incorporados ao capital no final do período a que se refere a taxa ou capitalização, teremos um gráfico do tipo apresentado a seguir:

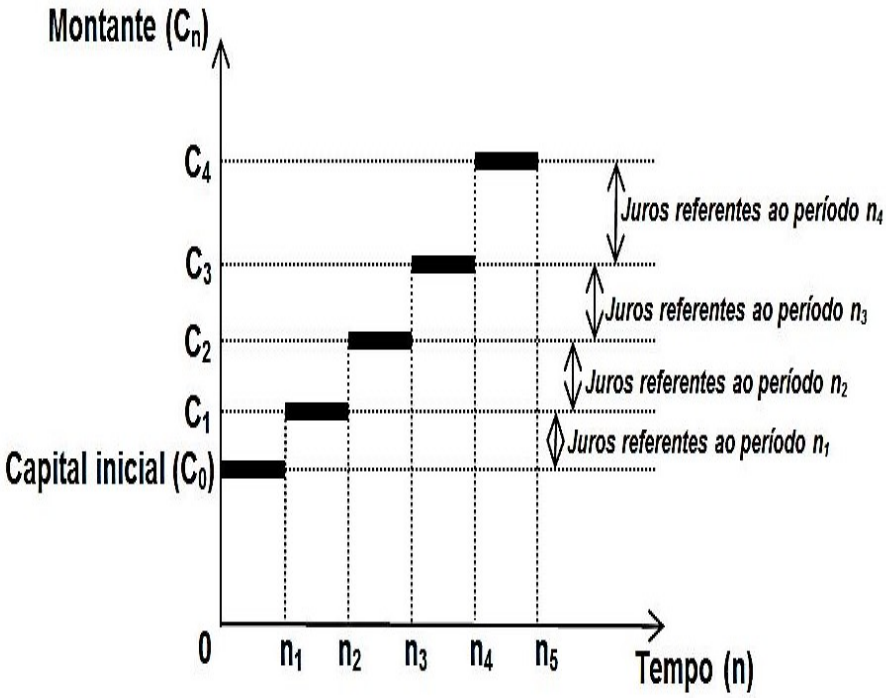

Figura 2.2: Gráfico de uma capitalização descontínua

Dessa forma, o total de juros formados entre o tempo $n = 0$ e o tempo igual a n será:

$$
\begin{aligned}
J_n &= C_n - C_0 \\
J_n &= C_0.(1+i)^n - C_0 \\
\\
J_n &= C_0.[(1+i)^n - 1].
\end{aligned}
$$

Mas é possível também que os juros não sejam incorporados ao capital para juntos renderem juros novamente. Neste caso, o Sistema de Capitalização se mantém Descontínua, porém os juros só são devidos ao principal e, de acordo com a definição de taxa, a qualquer momento, se C_0 é a quantia inicial aplicada, a cada período de tempo a que se refere a taxa, o valor dos juros será sempre constante e igual a $J_n = (C_0).i$, o que graficamente poderia ser representado como mostramos a seguir:

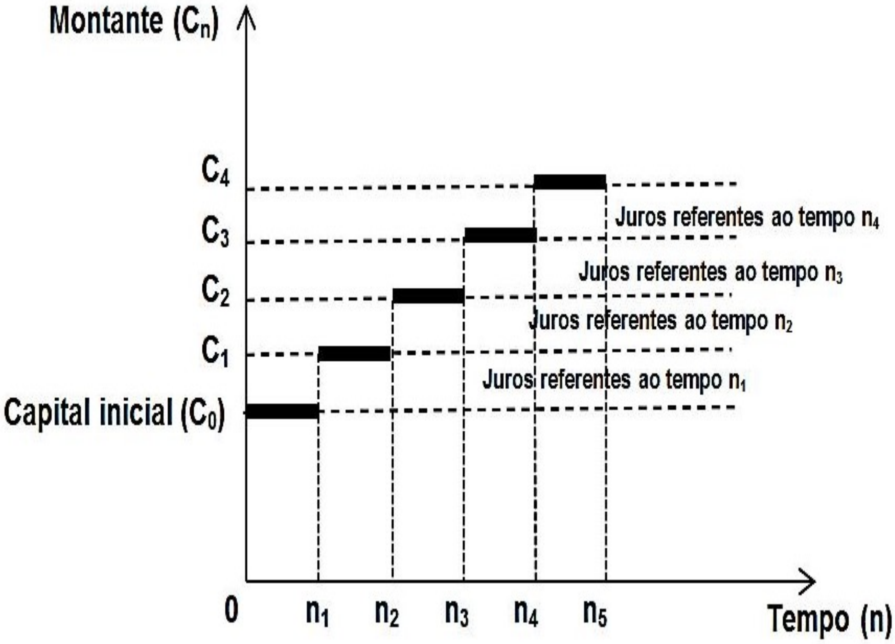

Figura 2.3: Gráfico de uma capitalização descontínua simples

2.2.3 A distinção entre o Regime de Juros Simples e o Regime de Juros Compostos

De acordo com as considerações da subseção anterior, o Sistema de Capitalização Descontínua pode acorrer de duas formas: os Juros são incorporados à quantia imediatamente anterior e ambos passam a render juros novamente ou os Juros são devidos somente à quantia inicial aplicada e constantes ao longo de todo processo. Estes casos são definidos, respectivamente, como: Regime de Juros Compostos (RJC) e o Regime de Juros Simples (RJS).

A principal diferença entre eles é que, no primeiro regime, os juros referentes a um período são incorporados ao capital anterior e, a partir daí, capital mais juros passam a render juros no período seguinte; é o famoso juro sobre juro. Já no segundo, os juros são sempre devidos somente sobre a quantia inicial aplicada, ou seja, são constantes durante todo o período de aplicação.

Para melhor entendimento sobre os Sistemas de Capitalização Contínua e o

Sistema de Capitalização Descontínua com juros simples e compostos, mostraremos um quadro onde a quantia inicial aplicada será a mesma ($R\$ \, 1\,000,00$), por um mesmo período e uma mesma taxa, que, para facilidade de entendimento, usaremos 1% ao período. Neste quadro poderá ser observado período a período e, com "saltos" de períodos, o montante C_n que é formado utilizando cada um dos Sistemas de Capitalização e Regime de Juros das formas citadas.

Tabela 2.1: Tabela comparativa entre os dois tipos de capitalização e os dois sistemas de juros:

C_n			
n	Capitalização Contínua	Capitalização Descontínua	
		Juros Compostos	Juros Simples
0	1 000,00	1 000,00	1 000,00
1	1 010,05	1 010,00	1 010,00
2	1 020,20	1 021,10	1 020,00
3	1 030,45	1 030,30	1 030,00
4	1 040,81	1 040,60	1 040,00
5	1 051,27	1 051,01	1 050,00
6	1 061,84	1 061,52	1 060,00
7	1 072,51	1 072,14	1 070,00
8	1 083,29	1 082,86	1 080,00
9	1 094,17	1 093,69	1 090,00
10	1 105,17	1 104,63	1 100,00
20	1 221,40	1 220,19	1 200,00
30	1 349,86	1 347,85	1 300,00
40	1 491,82	1 488,86	1 400,00
50	1 648,72	1 644,63	1 500,00
100	2 718,28	2 704,81	2 000,00

Observa-se a diferença entre os montantes e juros formados para cada um dos sistemas e regimes adotados. O confronto desses valores tumultua o mercado financeiro, principalmente no trocadilho de palavras e propagandas enganosas ao se oferecer empréstimos ou fazê-los.

Com o objetivo de apresentar ao final uma proposta para aprendizagem dos temas no Ensino Médio, descreveremos cada um separadamente: O Regime de Juros Simples (RJS) e o Regime de Juros Compostos (RJC).

3 - O Regime de Juros Simples (RJS)

3.1 Introdução

Como já foi dito, internacionalmente, trabalha-se com o Sistema de Capitalização Descontínua, adotando um dos dois regimes de juros: o Regime de Juros Simples (RJS) ou o Regime de Juros Compostos (RJC). Já demonstramos formalmente os Sistemas de Capitalização e os dois Regimes de Juros. Partiremos da definição de cada um e faremos as construções necessárias para melhor entendimento de ambos os regimes.

3.2 Juro Simples

No Sistema de Capitalização Descontínua e Regime de Juros Simples, os juros produzidos em vários períodos financeiros são constantes em cada período e proporcionais ao capital inicial aplicado, sendo a constante de proporcionalidade chamada de taxa de juros. Então, um capital C_0 colocado a render juros à taxa i no fim de um período financeiro $n = 1$ produzirá um juro tal que:

$$J_1 = (C_0).(i).$$

Como os juros são sempre os mesmos durante todos os períodos, teremos:

$$J_1 = J_2 = J_3 = ... = J_n = C_0.i$$

Portanto, no final de n períodos, a quantidade de juros simples formada será de:

$$\mathbf{J_n = C_0.i.n} \ ,$$

que é a fórmula fundamental para o cálculo dos Juros Simples.

OBSERVAÇÃO: Insistimos no fato de que na utilização de uma fórmula é necessário que as grandezas que se relacionam estejam num mesmo sistema de unidade de medida. Sabemos que a *taxa* sempre se refere a uma predeterminada unidade de tempo; na fórmula aparece a grandeza *tempo*. Neste caso, é necessário que *taxa* e *tempo* estejam na mesma unidade. Como a taxa é a constante de proporcionalidade que relaciona as duas grandezas, necessariamente o tempo de capitalização deverá estar na mesma unidade da taxa.

Como podemos observar pela própria fórmula do cálculo do Juro Simples, trata-se de uma função linear e, portanto, torna-se indiferente transformar a unidade da *taxa* para unidade do *tempo* ou vice-versa; mas o importante é que ambos estejam na mesma unidade.

Por exemplo:

Considere um capital de $R\$ \ 1 \ 000,00$ aplicado à taxa de 1% ao mês por um período de 1 ano. Qual será a quantidade de juros simples acumulada neste período?

RESOLUÇÃO:

Vejamos a resolução deixando a taxa de juros ao mês e transformando o tempo em meses:

$C_0 = 1000$

$i = 0,01$

$n = 1 \ ano = 12 \ meses$

Como $J_n = C_0.i.n \Longrightarrow J_{12} = 1000.0,01.12 \Longrightarrow J_{12} = 120$

e, portanto, os Juros Simples acumulados são de $R\$ \ 120,00$.

Vejamos agora a solução transformando a taxa mensal em taxa anual:
$C_0 = 1000$
$i = 0,01.12 = 0,12$
$n = 1\ ano$
Como $J_n = C_0.i.n$:
$J_1 = 1000.0,12.1 \Longrightarrow J_1 = 120$
e, portanto, os Juros Simples acumulados são de $R\$\ 120,00$, o que nos leva à mesma resposta.

Cabe ressaltar a relação de proporcionalidade dentro de Regime de Juros Simples (RJS) uma vez que, como os juros só são incorporados ao final do período a que se refere a taxa, caso a taxa seja anual e a pessoa desejar fazer o resgate em dez meses, por exemplo, ela não ficaria prejudicada, pois supõe-se que os Juros Simples se comportem de uma maneira linear ao longo do período, o que torna as duas taxas equivalentes (apesar de serem em períodos diferentes, traduzem o mesmo montante quando aplicadas no mesmo tempo).

3.3 Juro Exato e Juro Comercial

Para operações de curto prazo costuma-se utilizar o Regime de Juros Simples e, mais ainda, é frequente o uso de taxas anuais, motivo pelo qual analisaremos mais à frente as convenções: Linear e Exponencial. Neste caso, toma-se o tempo em dias e, para tanto, consida-se dois tipos de juros:
1-) Juro exato J_e: Se considerarmos o ano com 365 dias.
2-) Juro Comercial J_c: Se considerarmos o ano com 360 dias.
Em ambos, utiliza-se a mesma fórmula, porém, o tempo n é dado em dias d, e a taxa i é dada ao ano, ou seja:

$$J_e = \frac{C_0.i.d}{365} \qquad\qquad J_c = \frac{C_0.i.d}{360}$$

As divisões, repectivamente, por 365 e 360 são exatamente a transformação do tempo n dado em *dias* para a unidade da taxa *ano*.

Vejamos um exemplo numérico que distingue claramente os dois tipos de juros:

Uma pessoa tomou como empréstimo a quantia de $R\$\ 10\ 000,00$ no dia 12 de abril de 2015 e se propôs a pagá-lo em 24 de julho do mesmo ano à taxa de 19% ao ano. Qual foi o total de juros pagos, em se considerando Juro Exato e Juro Comercial?
RESOLUÇÃO:
Inicialmente precisamos verificar quantos dias existem entre as datas: empréstimo/pagamento.
Empréstimo em 12/04/2015 e pagamento em 24/07/2015.
Teremos:
Abril = 18 dias; Maio = 31 dias; Junho = 30 dias e Julho = 24 dias. (note que a data do empréstimo não é considerada. Porém a data do pagamento, sim).
Logo, $d = 103$ dias, $i = 10\%$ ao ano e $C = 10000$.

Juro Exato: $J_e = \dfrac{C_0.i.d}{365} = \dfrac{10000.0,19.103}{365} \Longrightarrow J_e = R\$\ 536,16;$

Juro Comercial: $J_c = \dfrac{C_0.i.d}{360} = \dfrac{10000.0,19.103}{360} \Longrightarrow J_c = R\$\ 543,61.$

A diferença entre as respostas se prende exatamente de haver diferença de dias, em se tratando de ano exato e ano comercial. Cabe a ressaltar que nas transações bancárias são utilizados os *Juros Comerciais* quando a parte interessada for a Instiutição Financeira e os *Juros Exatos* quando o interessado for o cliente.

3.4 Valor Atual e Valor Futuro

É muito comum entre diversos autores a utilização de nomenclaturas diferentes para traduzir a mesma coisa.

Na Matemática Financeira, entendemos por Capital o valor que será aplicado inicialmente numa determinada entidade financeira para render juros futuros.

Este valor pode ser tratado também como “Valor de Face” ou “Valor Atual” , e também pode assumir diversos símbolos que o represemtam:
Capital = C, Capital inicial = C_0, Valor de Face = VF, Valor Atual = VA, e assim por diante.

Da mesma forma, se quisermos fazer referência a um valor capitalizado no futuro (soma do capital inicial mais juros), podemos tratá-lo como:
Montante = M ou C_n, Valor Futuro = VF, Valor Nominal = VN, e assim por diante.

Na verdade, o que importa é que saibamos a qual quantia estamos fazendo referência e em qual linha do tempo ela se encontra.

Outro termo muito comum utilizado pelos autores é “capitalização”, que significa levar o dinheiro para datas futuras, ou seja, datas que estão à frente do valor monetário em estudo e “descapitalização”, que é levar o dinheiro para datas passadas, anteriores à data onde ele se situa.

Utilizaremos C_n quando quisermos fazer referência a determinada quantia na data n, C_0 ou simplesmente C para o dinheiro na data zero, i para a taxa de juros na forma unitária e n o intervalo tempo entre a data na qual se encontra a quantidade monetária e a data para onde se quer deslocá-la.
Assim sendo:

$$J_n = C_0.i.n \text{ e } C_n = C_0 + J_n$$

temos que:

$$C_n = C_0 + C_0.i.n \ ,$$

que nos leva em

$$\mathbf{C_n = C_0.(1 + i.n)} \ ,$$

que é a fórmula que nos permite transportar o dinheiro ao longo do eixo do tempo capitalizando-o ou descapitalizando-o, no Regime de Juros Simples.

A parcela multiplicativa $(1 + in)$ é denominada de fator de capitalização ou descapitalização para o RJS.

Caso queiramos capitalizar determinada quantia no RJS multiplicamos por $(1+i.n)$ e caso queiramos descapitalizar determinada quantia no RJS dividimos por $(1 + i.n)$.

É importante observar que, no Regime de Juros Simples a *capitalização* é uma função AFIM, ou seja, o montante formado obedece a um crescimento linear ao longo do tempo, como pode ser visto:

$$C_n = C.(1 + i.n)$$

enquanto que a *descapitalização* não é uma função com variação linear, ou seja, os valores atuais quando gerados por uma descapitalização são segundo uma função potência ($f(x) = x^a$ $, a = constante$) ao longo do tempo, podendo ser um arco de hipérbole.

$$C = C_n.(1 + i.n)^{-1}$$

No capítulo 6 teremos oportunidade de fazer uma abordagem mais profunda sobre o assunto.

4 - O Regime de Juros Compostos (RJC)

4.1 Introdução

Apesar de alguns autores considerarem o RJC como um Sistema de Capitalização Contínua (FARIA, 2000), discordamos de tal referência, pois mesmo no RJC, os juros só são incorporados ao capital após findado o tempo a que se refere a taxa ou ao tempo de capitalização, conforme poderá ser observado mais adiante. Portanto, o RJC também é um Sistema de Capitalização Descontínua, onde os juros devidos/recebidos ao final do período são incorporados à quantia inicial e a partir daí, ambos, quantia inicial mais juros, passam a render juros no período seguinte. É o famoso Juro sobre Juro ou também **anatocismo**.

Adotaremos as mesmas nomenclaturas utilizadas no Regime de Juros Simples, a fim de que possamos familiarizar com os mesmos e entender a que eles se referem, insistindo no fato de que o importante não são os nomes e nem os símbolos, mas, sim, saber quando a referência é feita sobre quantias futuras, passadas ou atuais.

4.2 Juros Compostos

Adotaremos:

J_n = juros formados numa determinada data n.
C_0 ou C = Capital inicial ou Valor de Face ou Valor Inicial.
i = Taxa de juros compostos na forma unitária num intervalo de tempo.
C_n = Montante ou Valor Nominal ou Valor Futuro numa determinada data n.

Sabemos que os juros de um determinado período são incorporados ao capital do período anterior, passando esta nova soma (capital + juros) a render juros no período seguinte, ou seja:

$$
\begin{array}{rcl}
n = 0 & \Longrightarrow & C_0 = C_0 \\
n = 1 & \Longrightarrow & C_1 = C_0 + C_0.i.1 = C_0.(1+i) \\
n = 2 & \Longrightarrow & C_2 = C_1 + C_1.i.1 = C_1.(1+i) \\
n = 3 & \Longrightarrow & C_3 = C_2 + C_2.i.1 = C_2.(1+i) \\
... & \Longrightarrow & ... = ... \\
n = n & \Longrightarrow & C_n = C_{n-1} + C_{n-1}.i.1 = C_{n-1}.(1+i),
\end{array}
$$

levando-nos à uma recorrência de primeira ordem e, para resolvê-la, basta que multipiquemos membro a membro os dois lados da igualdade a partir de C_1 chegando em:

$$
\begin{array}{rcl}
(C_1).(C_2).(C_3). \,...\, .(C_n) & = & C_0.(1+i).C_1.(1+i).C_2.(1+i). \,...\, .C_{n-1}.(1+i) \\
C_n & = & \dfrac{C_0.(1+i).C_1.(1+i).C_2.(1+i).....C_{n-1}.(1+i)}{(C_1).(C_2).(C_3). \,...\, .(C_{n-1})} \\
C_n & = & C_0.(1+i)^n,
\end{array}
$$

que é a fórmula que permite-nos calcular qualquer valor futuro no RJC conhecendo-se a taxa de juros, a quantia inicial e o tempo de aplicação.

A parcela multiplicativa: $(1+i)^n$ é denominada de *FATOR DE CAPITALIZAÇÃO no regime de Juros Compostos* e é exatamente este fator que nos permite deslocar o capital ao longo do eixo do tempo para o passado (descapitalizando-o, ou seja, dividindo pelo fator de capitalização) ou para o futuro (capitalizando-o, ou seja, multiplicando pelo fator de capitalização).

Como os Juros Compostos num determinado período n é dado por:

$$J_n = C_n - C_0, \text{ podemos escrever:}$$

$$J_n = C_n - C_0 \Longrightarrow J_n = C_0.(1+i)^n - C_0 \Longrightarrow J_n = C_0.[(1+i)^n - 1]$$

que é a fórmula que nos permite calcular os juros compostos a uma taxa i sobre um capital inicial C_0 por um período n.

Podemos mostrar agora que o Regime de Juros Compostos não é um Sistema de Capitalização Contínua.

Vimos imediatamente acima que os juros compostos referentes a um período n será:

$$J_n = C_0.[(1+i)^n - 1].$$

Vimos também, quando da definição do Sistema de Capitalização Contínua, que os juros referentes ao mesmo período n será:

$$J_n = C_0.(e^{i.n} - 1).$$

Pela tabela 2.1 da página 20 é de se conjecturar que os juros referentes a uma Capitalização Contínua sejam maiores que os juros formados pelo Regime de Juros Compostos. Provando-se isso, está claro que o Regime de Juros Compostos não é uma Sistema de Capitalização Contínua uma vez que traduzem resultados diferentes. Assim

$$C_0.(e^{i.n} - 1) > C_0.[(1+i)^n - 1] \Longrightarrow e^{i.n} > (1+i)^n$$

$$\text{como } n > 0 \text{ , } e^i > 1 + i \Longrightarrow e^i - (1+i) > 0$$

Analisando a função $h(i) = e^i - (1+i)$ com $i \epsilon R_+$, percebemos que:

$$h'(i) = e^i - 1$$

como $i > 0$ e $e^i > 1$ segue que $e^i - 1 > 0$, e portanto $h(i)$ e crescente.

Se $i = 0 \Longrightarrow h(0) = 0$, e portanto $e^i - (1+i) > 0$.

Logo, o Regime de Juros Compostos não é um Sistema de Capitalização Contínua.

Podemos fazer a interpretação gráfica das duas funções:

$$\text{chamando } g(i) = 1 + i \text{ e } f(i) = e^i, \text{ com } i \in R,$$

e tomando as duas num mesmo sistema de eixos cartesianos, observamos que $g < f$ sempre, sendo igual somente quando $i = 0$.

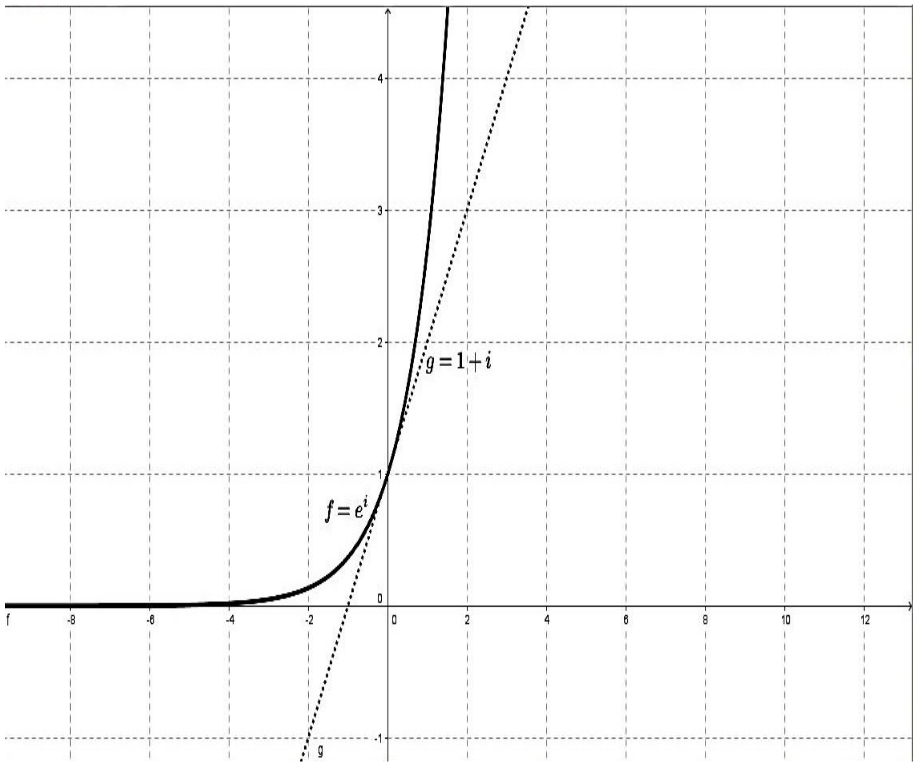

Figura 4.4: Gráfico comparativo de uma função Afim e uma função Exponencial

4.3 Quando, no Sistema de Capitalização Descontínua, tempo não é uma variável discreta

Por convenção, no sistema de capitalização descontínua, os juros só são incorporados ao capital no final do período de tempo a que se refere a taxa ou no final do tempo a que se refere o período de capitalização. Mas é muito comum nos países onde a economia é estável, as taxas serem dadas ao ano e, neste caso, em se retirando a quantia aplicada antes do intervalo considerado, torna-se injusto perder os juros referentes ao período. Vários autores sugerem dois tipos de ações: A convenção linear ou a convenção exponencial.

Na Convenção Linear, como no RJS, supõe-se que a taxa varie proporcionalmente ao tempo e, basta fazer a conversão proporcional, como por exemplo: taxa anual para mensal, divide-se por 12; taxa anual para semestral, divide-se por 2, e assim por diante. Toma-se a parte inteira da taxa e a capitaliza através do fator de capitalização composto $(1+i)^m$ e a parte fracionária $\frac{p}{q}$ com p e q números naturais, será capitalizada pelo RJS, ou seja:
Se n é o tempo que o capital fica aplicado, para calcularmos os juros referentes a este tempo procedemos da seguinte forma:
* Transforma-se este tempo na mesma unidade da taxa escrevendo-o sob a forma de uma fração mista, $n = m + \frac{p}{q}$.
* Os juros serão calculados: $J_n = [(1+i)^m.(1+i.\frac{p}{q}) - 1]$.

Na segunda, a Convenção Exponencial é a mais lógica, uma vez que o montante no RJC é obtido através de uma função exponencial. Neste caso, basta substituir n que está na forma discreta pelo seu respectivo valor $n = m + \frac{p}{q}$ diretamente no fator de capitalização, ou seja: $J_n = [(1+i)^{m+\frac{p}{q}} - 1]$. Analogamente, fazemos o mesmo para o cálculo de um determinado montante C_n a partir de um capital C_0 à uma taxa de juros compostos i por um período não discreto $n = m + \frac{p}{q}$:

$$\text{PELA CONVEÇÃO LINEAR: } C_n = C_0.(1+i)^m.(1+i.\frac{p}{q}).$$
$$\text{PELA CONVENÇÃO EXPONENCIAL: } C_n = C_0.(1+i)^{m+\frac{p}{q}}.$$

Vamos analisar o confronto direto entre os montantes formados pela convenção linear e pela convenção exponencial, observando as informações da tabela abaixo:
Consideremos um capital inicial de $R\$ \, 1\,000,00$ aplicado à taxa de 15% ao ano por um período de capitalização mensal (os juros serão incorporados mensalmente). Pela tabela observamos que a convenção linear gera um montante maior que a convenção exponencial. Apesar de não estarmos trabalhando com o tempo como uma variável discreta, esta desigualdade pode ser facilmente demonstrada através do cálculo diferencial e integral, como também da análise gráfica das funções envolvidas.

Tabela 4.2: Tabela comparativa entre as conveções Linear e Exponencial:

Montante formado (C_n)			
n = meses - (ano)	Convenção Linear	Convenção Exponencial	Diferença
0 - (0)	1 000,00	1 000,00	0,00
1 - (1/12)	1 012,50	1 011,71	0,79
2 - (2/12)	1 025,00	1 023,57	1,43
3 - (3/12)	1 037,50	1 035,56	1,94
4 - (4/12)	1 050,00	1 047,69	2,31
5 - (5/12)	1 062,50	1 059,96	2,54
6 - (6/12)	1 075,00	1 072,38	2,62
10 - (10/12)	1 125,00	1 123,52	1,48
20 - (20/12)	1 265,00	1 262,30	2,70
30 - (30/12)	1 421,69	1 418,22	3,47
40 - (40/12)	1 596,92	1 593,40	3,52
50 - (50/12)	1 792,73	1 790,23	2,50
100 - (100/12)	3 211,97	3 204,91	7,06

Precisamos comparar o montante formado pela convenção linear (L_n) com o montante formado pela convenção exponencial (E_n).

Pela análise da tabela acima, **podemos conjecturar que o montante formado pela convenção linear é maior que o formado pela convenção**

exponencial. Precisamos provar isso, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} L_n & > & E_n \\ L_n = C_0.(1+i)^m.(1+i.\dfrac{p}{q}) & > & E_n = C_0.(1+i)^{m+\frac{p}{q}}. \\ C_0.(1+i)^m.(1+i.\dfrac{p}{q}) & > & C_0.(1+i)^{m+\frac{p}{q}}. \\ (1+i)^m.(1+i.\dfrac{p}{q}) & > & (1+i)^m.(1+i)^{\frac{p}{q}}. \\ (1+i.\dfrac{p}{q}) & > & (1+i)^{\frac{p}{q}} \end{array}$$

Se provarmos a última desigualdadede acima, estaremos provando que o montante formado pela Convenção Linear (L_n) será maior que o montante formado pela Convenção Exponencial (E_n). Para isso faremos $\dfrac{p}{q} = k$ e substituiremos nela:

$$(1+i.\frac{p}{q}) \quad > \quad (1+i)^{\frac{p}{q}} \Longrightarrow 0 > (1+i)^k - (1+i.k) \Longrightarrow (1+i)^k - (1+i.k) < 0$$

Analisando a função:

$$f(i) = (1+i)^k - (1+i.k), \;\; i \,\epsilon\, R_+ \text{ e } 0 < k < 1,$$

sua derivada primeira em relação a i será:

$$\begin{array}{rcl} f'(i) & = & k.(1+i)^{k-1} - k \\ f'(i) & = & k\left(\dfrac{1}{(1+i)^{1-k}} - 1\right) \end{array}$$

sabemos que: $(1+i) > 1$ e $0 < 1-k < 1$. Portanto:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{(1+i)^{1-k}} & < & 1 \\ \dfrac{1}{(1+i)^{1-k}} - 1 & < & 0 \\ k(\dfrac{1}{(1+i)^{1-k}} - 1) & < & 0. \end{array}$$

Portanto, qualquer que seja o valor de $i \epsilon R_+$ e $0 < k < 1$, a função $f(i)$ será decrescente.

$$\text{Se } i = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \text{ e portanto } (1+i)^k - (1+i.k) < 0 \text{ se } i > 0$$
$$(1+i.k) > (1+i)^k$$
$$(1+i.\frac{p}{q}) > (1+i)^{\frac{p}{q}}$$

como queríamos demonstrar, a convenção linear sempre produzirá montantes maiores que a convenção exponencial.

Podemos confirmar a demonstração acima através de uma análise gráfica. A primeira função apresentada (Convenção Linear) é afim e seu coeficiente angular será $\frac{p}{q} > 0$ e portanto, é crescente com coeficiente angular máximo quando $\frac{p}{q}$ tende a 1.

A segunda função apresentada (Convenção Exponencial) é irracional com gráfico crescente muito lentamente (crescimento menor que a função afim).

Uma análise pode ser feita, observando-se o gráfico de ambas com variáveis reias dentro de seus intervalos de domínio. Nele podemos perceber que elas se igualam somente quando o tempo é zero, ou seja, no início do processo de capitalização. A partir daí, a função afim sempre será maior que a irracional, evidentemente, para valores de $0 < \frac{p}{q} < 1$.

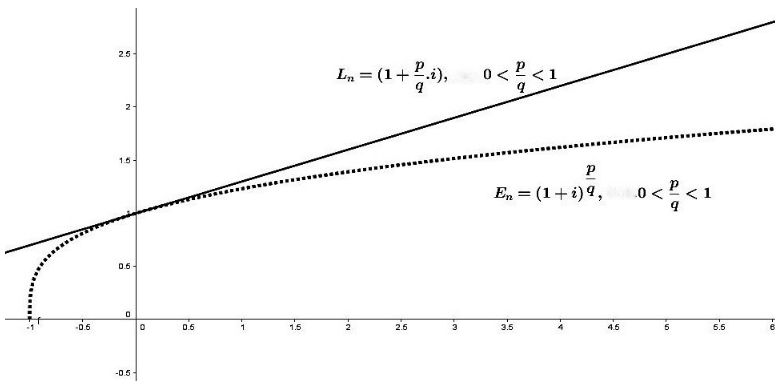

Figura 4.5: Gráficos das funções de convenções Linear e Exponencial.

Ressaltamos neste caso que as Instituições Financeiras, novamente, utilizam a duplicidade de relações com seu cliente. Caso o cliente faça uma aplicação de uma determinada quantia e queira resgatá-la antes do período a que se refere a taxa ou capitalização, ele fará o resgate sem a incorporação dos juros proporcionais ao tempo que a quantidade financeira ficou aplicada sem formar o período inteiro para capitalizá-la.

Por outro lado, caso o cliente queira fazer o pagamento de um empréstimo antes do período a que se refere a taxa, a Instituição Financeira fará o cálculo dos juros referentes a este período e, mais ainda, este cálculo será feito segundo a Convenção Linear, pois esta convenção, como mostrado acima, proporciona um juro maior.

Buscamos junto a algumas Instituições Financeiras uma legislação própria que legitima tal procedimento, mas foi-nos negado tal documento.

Ressaltamos também que tal regulamentação não consta na Constituição brasileira e muito menos, não há controle feito pelo Banco Central do Brasil.

Conforme citado no início de nosso trabalho, *"A Matemática não mente. Mente quem faz mal uso dela." - Albert Einstein.*

5 - Os mais variados tipos de Taxas

5.1 Introdução

Observemos a frase:

15% *ao ano com capitalização mensal.*

Se levarmos o enunciado ao pé da letra, ele se torna absurdo, pois como já vimos, no sistema de capitalização descontínua, os juros só são incorporados ao capital no final do período a que se refere a taxa; porém, frases desse tipo são muito utilizadas no dia-a-dia das instituições financeiras. Neste caso, convencionou-se diferenciar as taxas usadas numa transação financeira em função da forma com que ela é apresentada na situação em estudo.

Veremos a seguir as diferentes formas com que as taxas de juros podem se apresentar e, de acordo com sua situação, o nome recebido por elas.

5.2 Taxa Nominal e Taxa Efetiva

A taxa é denominada EFETIVA quando o período a que ela se refere coincide exatamente com o período de capitaliazação do capital aplicado. A taxa efetiva normalmente aparece nas situações em que não há referencia sobre o período de capitalização ou o período da taxa. Vejamos as frases a seguir:

* *taxa de* 10% *ao ano*
* *capitalização bimestral de* $3,5\%$
* *taxa de* $1,5\%$ *ao mês com capitalização mensal*

Em qualquer uma delas a taxa de referência é a taxa efetiva, sendo que na útima frase foi cometido uma “redundância”, pois se a taxa é mensal, não há necessidade de reafirmar a capitalização mensal.

Existem situações em que o período de capitalização não coincide com o período a que se refere a taxa ou vice-versa. Apesar de serem situações que fogem às definições de sistemas de capitalização, são muito utilizadas no dia-a-dia das instituições financeiras. Tais taxas são denominadas de Taxas NOMINAIS.

Para Faro (1982, p.67):

> Uma taxa nominal é aquela cujo período de capitalização não coincide com aquele a que ela se refere. Ainda por convenção, a taxa efetiva, que é aquela a ser considerada na aplicação das fórmulas, correspondente a uma dada taxa nominal é a taxa que, relativa ao período de capitalização mencionado, lhe seja proporcional - As razões entre os tempos e as taxas devem ser os mesmos.

5.3 Taxa Proporcional e Taxa Equivalente

5.3.1 Taxas Proporcionais

Duas taxas i_1 e i_2 , respectivamentes referentes aos tempos n_1 e n_2 serão ditas PROPORCIONAIS (tanto no Regime de Juros Simples quanto no Regime de Juros Compostos) se for verdadeira a proporção:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Por exemplo: Qual é a taxa mensal proporcional à taxa de 18% ao ano?
RESOLUÇÃO:

$$\frac{i_{a.a}}{i_{a.m.}} = \frac{n_{ano}}{n_{mes}}$$
$$1 \ \ ano = 12 \ \ meses \Longrightarrow 18\% \ \ ao \ \ ano$$
$$1 \quad mês \Longrightarrow i_{a.m.}$$
$$\text{Regra de três simples e direta} \Longrightarrow i_{a.m.} = 1,5\%$$

Observamos então que a proporcionalidade entre 1 ano e 12 meses é a mesma entre as taxas *1, 5* e *18*, provando a definição de Taxas Proporcionais.

5.3.2 Taxas Equivalentes

Duas taxas i_1 e i_2 serão ditas equivalentes se:
* i_1 numa unidade de tempo n_1 gerar um montante C_n num determinado tempo n.
*i_2 numa unidade de tempo n_2 gerar o mesmo montante C_n no mesmo intervalo de tempo n.

Ou seja, duas taxas serão equivalentes se gerarem o mesmo montante no mesmo intervalo de tempo estando ambas em unidades de tempo diferentes.

É fácil perceber que, em se tratando de montante, é necessário saber qual o regime de juros que está sendo adotado, pois o montante depende do regime de juros.

Neste caso, as taxas que são equivalentes no regime de juros simples não serão as mesmas do regime de juros compostos. Vamos analisar cada caso.

TAXAS EQUIVALENTES NO REGIME DE JUROS SIMPLES

Por definição, tomemos uma taxa i_1 numa determinada unidade k e, à esta taxa, aplicaremos um capital C_0 por um período n=*1* , na mesma unidade k a que se refere a taxa i_1. Neste caso, o montante C_n formado ao final do tempo n será:

$$C_n = C_0.(1 + i_1.1) \Longrightarrow C_n = C_0.(1 + i_1)$$

Tomaremos agora uma outra taxa i_2 em uma outra unidade de tempo p e, à esta taxa, aplicaremos o mesmo capital C_0 pelo mesmo período n=p. Neste caso, o montante C_n deverá ser dado por:

$$C_n = C_0.(1 + i_2.p).$$

Pela definição de taxas equivalentes os dois montantes devem ser iguais. Logo:

$$C_0.(1 + i_1) = C_0.(1 + i_2.p) \Longrightarrow 1 + i_1 = 1 + i_2.p \Longrightarrow i_2 = \frac{i_1}{p}.$$

Mostrando claramente que, no RJS as taxas equivalentes são iguais às proporcionais.

Exemplo1 : Qual é a taxa bimestral no Regime de Juros Simples equivalente à taxa de 36% ao ano?
RESOLUÇÃO:
Suponha uma quantia inicial C aplicada à taxa de 36% ao ano por um periodo de n anos, no Regime de Juros Simples. O Montante C_{n1} gerado ao final deste período de aplicação será dado por:

$$C_{n1} = C.(1 + 0,36.n).$$

Tomaremos agora a mesma quantia C aplicada por um período de n anos à taxa de i^*% ao bimestre. O Montante C_{n2} gerado ao final deste período de aplicação será dado por:

$$C_{n2} = C.(1 + i^*.(n.6)).$$

(lembre-se que n deverá ser expresso na mesma unidade de i^*, e, neste caso, $n\ anos = n.6\ bimestres$).
Pela definição de *taxas equivalentes*, os dois montantes deverão ser iguais, ou seja, $C_{n1} = C_{n2}$; logo:

$C.(1+0,36.n) = C.(1+i^*.(n.6)) \Longrightarrow 1+0,36.n = 1+6.i^*.n \Longrightarrow i^* = 0,06,$ ou seja, a taxa bimestral equivalente à taxa de 36% ao ano será a taxa de 6% ao bimestre; que, conforme a fórmula proposta, deveria ser dada diretamente por: $i^* = \dfrac{i}{p} \Longrightarrow i^* = \dfrac{0,36}{6} \Longrightarrow i^* = 0,06 = 6\%$ ao bimestre.

TAXAS EQUIVALENTES NO REGIME DE JUROS COMPOSTOS

Fazendo as mesmas considerações propostas para o RJS teremos:

$$\begin{aligned} C_0.(1+i_1)^1 &= C_0.(1+i_2)^p \\ \Longrightarrow 1+i_1 &= (1+i_2)^p \\ \Longrightarrow (1+i_2)^p &= (1+i_1) \\ \Longrightarrow (1+i_2) &= (1+i_1)^{\frac{1}{p}} \\ \Longrightarrow i_2 &= (1+i_1)^{\frac{1}{p}} - 1. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Qual é a taxa bimestral no Regime de Juros Compostos equivalente à taxa de 36% ao ano?

RESOLUÇÃO:

Suponha uma quantia inicial C aplicada à taxa de 36% ao ano por um período de n anos, no Regime de Juros Compostos. O Montante C_{n1} gerado ao final deste período de aplicação será dado por:

$$C_{n1} = C.(1+0,36)^n$$

Tomaremos agora a mesma quantia C aplicada por um período de n anos à taxa de $i^*\%$ ao bimestre. O Montante C_{n2} gerado ao final deste período de aplicação será dado por:

$$C_{n2} = C.(1+i^*)^{6.n}$$

(lembre-se que n deverá ser expresso na mesma unidade de i^*, e, neste caso, $n\ anos = 6.n\ bimestres$).

Pela definição de *taxas equivalentes*, os dois montantes deverão ser iguais, ou seja, $M_1 = M_2$; logo:

$$C.(1+0,36)^n = C.(1+i^*)^{6.n} \Longrightarrow (1+0,36)^n = (1+i^*)^{6.n}$$
$$(1,36)^{\frac{n}{6.n}} = (1+i^*)^{\frac{6.n}{6.n}} \Longrightarrow 1,36^{\frac{1}{6}} = 1+i^*$$
$$i^* = 1,05258 - 1 \Longrightarrow i^* = 0,05258$$
$$i^* = 5,258\%$$

ou seja, a taxa bimestral equivalente à taxa de 36% ao ano será a taxa de 5,258% ao bimestre; que, conforme a fórmula proposta, deveria ser dada diretamente por:

$$i^* = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \text{ , onde } p = 6, \text{ pois 1 ano} = 6 \text{ bimestres.}$$
$$i^* = (1+0,36)^{\frac{1}{6}} - 1 \longrightarrow i^* = 0,05258 = 5,258\% \text{ ao bimestre.}$$

Note que as *Taxas Equivalentes* são diferentes de acordo com o Regime de Juros que se adota. Tal fato se explica exatamente pela capitalização de juros. Como no Regime de Juros Compostos os Juros são incorporados ao Montante anterior e esta soma passa a render juros no período seguinte, já era de se esperar que a taxa equivalente no Regime de Juros Compostos seria menor que a taxa equivalente no Regime de Juros Simples.

Voltamos novamente aqui ao sistema unilateral adotado pelas Instituições Financeiras. Neste caso agora, quando as Instituições Financeiras dispõem de uma taxa em um período que seja maior que o de capitalização, para conseguirem a taxa que capitaliza no período solicitado, é utilizado o cálculo das *taxas proporcionais*, que tanto para o Regime de Juros Simples quanto para o Regime de Juros Compostos é a mesma. Porém, na realidade Matemática, a taxa a ser utilizada deveria ser a *taxa equivalente* para o Regime de Juros Compostos, uma vez que é este o Regime de Juros utilizado na maioria das vezes pelas Instituições Financeiras. Como no Regime de Juros Compostos a *taxa equivalente* é menor que a *taxa proporcional*, adota-se tal procedimento para majorar os possíveis ganhos.

Mais uma vez insistimos no fato de que não nos foi permitido acesso a nenhum tipo de documentação que regulamenta tal procedimento tampouco conseguimos alguma regulamentação do Banco Central do Brasil.

Tal procedimento unilateral por parte das Instituições Financeiras não é questionado pelos clientes e dessa forma, o efeito cidadania torna-se secundário.

5.3.3 Taxa de Juros em um sistema Inflacionário

Uma grande consideração a ser feita são as aplicações e empréstimos de quantidades financeiras num sistema inflacionário.

É muito comum nos Países subdesenvolvidos e em fase de desenvolvimento, a economia estar sujeita a uma inflação que extrapola a normalidade. Neste caso, torna-se importante a compreensão da influência da inflação nas taxas de juros que fazem parte do mercado financeiro a fim de que se possa estabelecer um quantificação entre o ganho e/ou perda, sobre o real e o fictício.

Para melhor ilustração de nossa proposta vamos imaginar uma situação hipotética.

Uma Instituição Financeira pagou, por uma aplicação, a taxa de 5% ao mês, Juros Compostos, e, neste País, a inflação neste mesmo mês foi de 4% . Se uma pessoa aplicou a quantia de $R\$ \ 10 \ 000,00$ neste mês, qual será o seu ganho real (ou prejuízo)?
RESOLUÇÃO: Considere duas aplicações simultâneas para a mesma quantia inicial $R\$ \ 10 \ 000,00$ para o período de um mês: Uma à taxa de 4% ao mês e a outra á taxa de 5% ao mês, gerando, respectivamente, dois montantes C_{n1} e C_{n2}. Teríamos:

$$C_{n1} = 10000.(1+0,04) = R\$ \ 10 \ 400,00 \quad \text{e,}$$
$$C_{n2} = 10000.(1+0,05) = R\$ \ 10 \ 500,00.$$

O Montantante C_{n1} refere-se à perda do poder de compra devido ao aumento contínuo e generalizado dos preços dos bens e serviços, enquanto o Montante C_{n2} refere-se ao resultado final da aplicação na Instituição Financeira.
Podemos observar claramente que, na verdade, o "ganho"real do investidor foi de:

$$G = 10500 - 10400 \Longrightarrow GR = R\$ \ 100,00.$$

que, na verdade, representa uma taxa de crescimento mensal real

$$i_R = \frac{100}{10400} = 0,009615 = 0,9615\%.$$

e não 1% como poderia ser analisada numa primeira leitura.

Podemos modelar a situação proposta acima. Considere:
i_i = taxa de inflação ao período k;
i_A = taxa de aplicação financeira (aparente) ao período k;
i_R = taxa de ganho real ao período total n;
n = tempo de aplicação na mesma unidade a que se referem as taxas k.
Se C é a quantia inicial aplicada, podemos escrever que o ganho real G após uma aplicação por um período n será de:

$$G = C.(1 + i_A)^n - C.(1 + i_i)^n \Longrightarrow G = C.[(1 + i_A)^n - (1 + i_i)^n]$$

Logo, a taxa de ganho real i_R será dada por:

$$i_R = \frac{C.[(1 + i_A)^n - (1 + i_i)^n]}{C.(1 + i_i)^n} \Longrightarrow i_R = \frac{(1 + i_A)^n - (1 + i_i)^n}{(1 + i_i)^n}$$
$$\mathbf{i_R = \left(\frac{1 + i_A}{1 + i_i}\right)^n - 1}$$

Para encontrarmos a taxa equivalente ou proporcional ao período k devemos lançar mão das ferramentas mostradas nos iten 5.3.1 e 5.3.2. .

Se retomarmos o exemplo inicial, teremos:
$i_A = 5\%$ ao mês;
$i_i = 4\%$ ao mês;
$n = k = 1$ mês;
$i_R = ?$

$$i_R = \left(\frac{1 + i_A}{1 + i_i}\right)^n - 1 = \left(\frac{1 + 0,05}{1 + 0,04}\right)^1 - 1 \Longrightarrow i_R = 0,009615$$
$$i_R = 0,9615\% \text{ ao mês.}$$

6 - Rendas Costantes

6.1 Introdução

Quando dispomos de vários capitais que ficam disponíveis em determinados intervalos de tempo, damos o nome a este conjunto numérico de capitais de "rendas", e a cada um desses capitais denominamos "anuidades" ou também "termos".

Essas anuidades podem ou não ser iguais. Caso elas sejam todas iguais, que é o mais normal, denominamos de rendas constantes ou termos constantes.

Caso as anuidades sejam diferentes nos diferentes intervalos de tempo, teremos o que chamamos de rendas de termos variáveis (ou simplesmente rendas variáveis).

Uma outra terminologia muito usada é o tratamento "Série de Anuidades Constantes" ou "Séries de Anuidades Variáveis".

Outra caracterização importante é que o intervalo de tempo entre duas anuidades deve ser sempre constante, ou seja, o intervalo de tempo entre duas anuidades consecutivas deve ser sempre o mesmo para todas as anuidades. Caso este intervalo for um mês a anuidade será denominada de anuidade mensal ou renda mensal. Caso o intervalo de tempo seja semestral a anuidade será denominada de anuidade semestral ou renda semestral. E assim por diante.

6.2 Classificação das rendas

De acordo com o vencimento do primeiro termo da renda ou anuidade, as rendas poderão ser classificadas em: Rendas Imediatas; Rendas Antecipadas e Rendas Diferidas, sendo esta última de Renda Diferida Imediata ou Renda Diferida Antecipada.

As Rendas são ditas Imediatas quando o seu primeiro termo vence exatamente um período após a data atual, ou seja, se o contrato é assinado na data de hoje, a primeira anuidade vencerá um período após a data de hoje (se for mensal, um mês após a data de hoje; se for bimestral, um bimestre após a data de hoje, e assim por diante). Numa linha do tempo, considerando a data $n = 0$ como sendo a data de hoje, as Rendas Imediatas poderiam ser assim representadas:

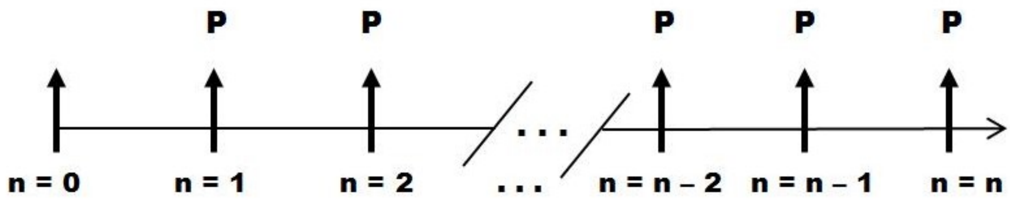

Figura 6.6: Eixo de tempo mostrando uma Renda Constante Imediata.

As Rendas serão consideradas *Antecipadas* quando a primeira anuidade vencer exatamente na data atual do início do contrato, ou seja, é quando a primeira Renda acontece na data zero. Na linha do tempo da figura abaixo apresentamos um esboço de uma Renda Antecipada. Perceba a diferença entre as duas linhas do tempo. Na anterior, na data zero, não há anuidade e há exatamente n rendas; enquanto que na *antecipada*, na data zero há uma renda e há também, n anuidades.

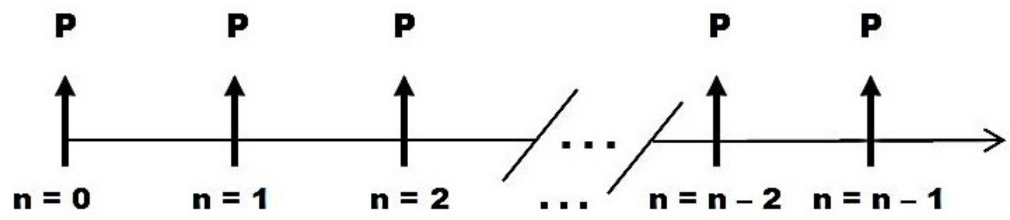

Figura 6.7: Eixo de tempo mostrando uma Renda Constante Antecipada.

As Anuidades ou Rendas Diferidas acontecem quando o primeiro termo da mesma tem vencimento $(k + 1)$ períodos após a data zero. As Anuidades ou Rendas Diferidas, que possuem um tempo de carência, podem ser Imediatas ou Antecipadas, dependendo da data da primeira Anuidade. Caso a primeira anuidade esteja $(m + 1)$ períodos após a data zero a Renda é denominada Diferida Imediata de m períodos. Caso a primeira anuidade esteja m períodos após a data zero a Renda é denominada Diferida Antecipada. Observemos no eixo do tempo apresentado abaixo:

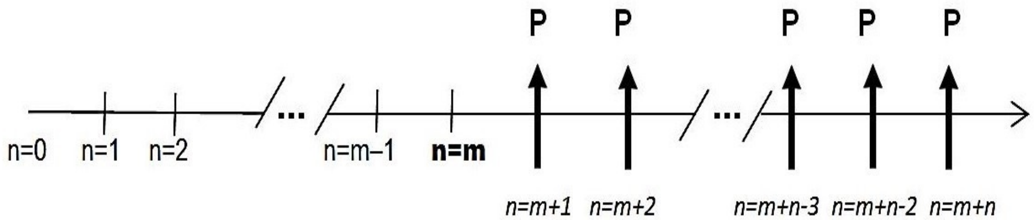

Figura 6.8: Eixo de tempo mostrando uma Renda Constante Imediata Diferida de um tempo "m".

Neste outro eixo do tempo podemos observar uma Renda ou Anuidade Diferida Antecipada de um tempo "m".
Note que, neste caso, a primeira anuidade antecede a anterior em um período "k":

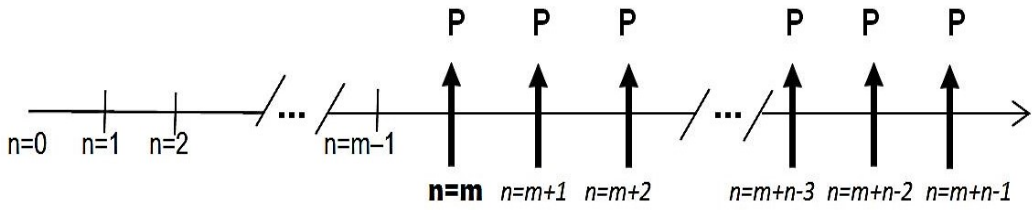

Figura 6.9: Eixo de tempo mostrando uma Renda Constante Antecipada Diferida de um tempo “m”.

6.3 Rendas Constantes no Regime de Juros Simples

No regime de Juros Simples são poucos os trabalhos sobre Rendas. Ousamos fazê-lo exatamente por não termos conseguido acesso a este tipo de comentário, uma vez que todas as rendas são trabalhadas no Regime de Juros compostos.

Mostramos a seguir como poderiam se apresentar as Rendas ou Anuidades citadas no item anterior dentro do Regime de Juros Simples.

Faz-se necessário esclarecer que ao trabalhar com quantidades monetárias é preciso fazê-lo numa mesma data. Não se pode operar dinheiro em datas diferentes uma vez que, como já dito anteriormente, todo capital tem seu preço.

Quando se utiliza o Regime de Juros Simples, se a quantidade monetária inserida na transação for maior que uma, deve-se tomar muito cuidado com a data a ser escolhida para se trabalhar, pois neste sistema, devido à variação dos juros ser linear, ele não é cindível ao longo do período. Isto é fácil de se perceber através de um exemplo numérico.

Vamos considerar uma Nota Promissória com Valor Nominal de $R\$ \ 5 \ \ 000,00$ vencível de hoje a 6 meses, numa situação onde os juros financeiros estão na média de 4% ao mês.
Se descapitalizarmos esta NP para a data de hoje encontraremos:

$$C_0 = \frac{5000}{1 + (0,04).(6)} \Longrightarrow C_0 = 4032,26$$

Se capitalizarmos estes mesmos $R\$ \ 5\ \ 000,00$ da data 6 meses para a data 12 meses obteremos:

$$C_{12} = 5000.[1 + (0,04).(6)] \Longrightarrow C_{12} = 6200,00$$

Num eixo do tempo teríamos a situação abaixo:

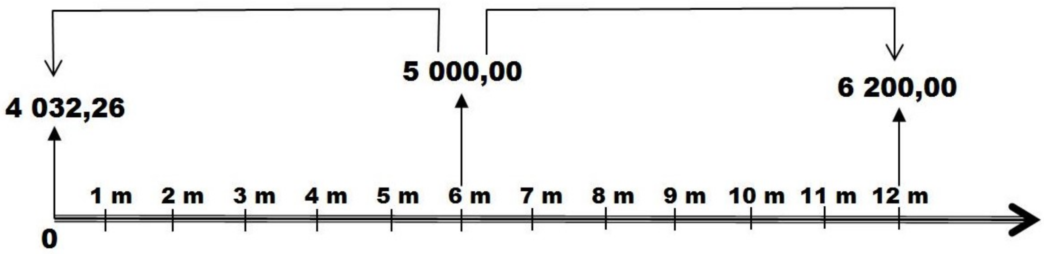

Figura 6.10: Eixo de tempo mostrando uma descapitalização e uma capitalização de uma mesma quantia no RJS.

Podemos observar que a quantia de $R\$ \ 5\ \ 000,00$ na data 6 meses é equivalente às quantias de $R\$ \ 4\ \ 032,26$ e $R\$ \ 6\ \ 200,00$, respectivamente, nas datas de hoje e na data 12 meses.

Como essas quantias são equivalentes, se levarmos a quantia que está na data de hoje ($R\$ \ 4\ \ 032,26$) para a data, por exemplo, 8 meses e se levarmos a quantia que está na data 12 meses para esta data (8 meses), é de se esperar que os resultados sejam iguais, pois traduzem a mesma equivalência financeira.

Assim, teremos que a quantia de $R\$ \ 4\ \ 032,26$ que está na data de hoje quando levada para a data 8 meses será:

$$C_{0-8} = 4032,26.[1 + (0,04).(8)] \Longrightarrow C_{0-8} = 5322,58$$

a quantia de $R\$ \ 6\ \ 200,00$ que está na data 12 meses quando levada para a data 8 meses será:

$$C_{12-8} = \frac{6200}{1 + (0,04).(4)} \Longrightarrow C_{12-8} = 5344,83$$

Podemos notar que os resultados encontrados são diferentes, o que contraria a equivalência de capitais, pois eles deveriam ser iguais, uma vez que partiram do mesmo valor e são transferidos de uma data para outra com a mesma taxa.

Num eixo de tempo teríamos a situação abaixo:

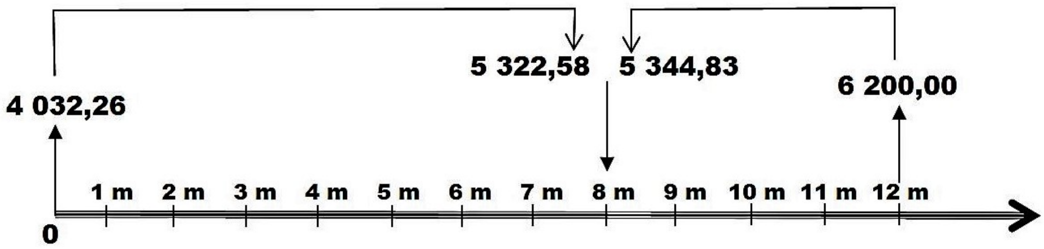

Figura 6.11: Eixo de tempo mostrando uma descapitalização e uma capitalização de quantias diferentes que deveriam gerar o mesmo valor no RJS.

Segundo Faro (1989), a diferença dos resultados se prende ao fato de que, no Regime de Juros Simples, o montante se forma e, reciprocamente, o valor atual também, sobre um tempo que é não cindível, no sentido de que não se fraciona o tempo de aplicação, ou seja, colocando-se o montante de um certo capital C, calculado à taxa i e por um período n_1, à mesma taxa i e por um prazo n_2, o montante final será diferente do calculado considerando-se o capital C colocado à taxa i, durante o prazo total $n = n_1 + n_2$, visto que:

$$C.(1 + i.n) \neq C.(1 + n_1).(1 + n_2)$$

o segundo membro da igualdade acima será maior, pois estaremos considerando juros sobre juros, e não só os devidos ao capital inicial C.

Para Samanez (2002), a equivalência de capitais no Regime de Juros Simples não é mantida se houver mudança de data base (data na qual os capitais são comparados); ou seja, capitais equivalentes numa determinada época não serão equivalentes em outra época. Essa conclusão é resultado do processo de cálculo adotado no regime linear ou de juros simples, em que não se pode fracionar o tempo de aplicação.

Faremos uma interpretação algébrica e gráfica para o exposto pelos dois autores a fim de facilitar o entendimento de tal *cindibilidade do tempo.*

Para tanto vamos considerar um *capital inicial* C_0 aplicado a uma taxa de $i\%$ ao período k por n períodos k, no Regime de Juros Simples. Ao final dos n períodos k o montante formado será:

$$\begin{aligned} C_n &= C_0.(1+i.n) \\ C_n &= C_0 + (C_0.i).n \end{aligned}$$

Podemos perceber claramente que o montante C_n a ser formado é uma função AFIM, crescente, de domínio $n \in \mathbb{Z}_+$ e imagem $C_n \in \ R_+$. Seu crescimento é linear, pois $(C_0.i) \geq 0$, sempre.

A seguir apresentamos uma tabela de valores fazendo o *tempo* variar de 0 a n e calculando o montante C_n para cada período

$$n \,\epsilon \, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., n-4, n-3, n-2, n-1, n\},$$

e um gráfico onde os valores de

$$n \,\epsilon \, \{0, 2, 4, 6..., n-, n-2, n\}$$

Tabela 6.3: Evolução de um capital C_0 no RJS

$TEMPO$	$MONTANTE$
0	C_0
1	$C_1 = C_0 + (C_0.i).1$
2	$C_2 = C_0 + (C_0.i).2$
3	$C_3 = C_0 + (C_0.i).3$
4	$C_4 = C_0 + (C_0.i).4$
5	$C_5 = C_0 + (C_0.i).5$
6	$C_6 = C_0 + (C_0.i).6$
. . .	. . .
$n-4$	$C_{n-4} = C_0 + (C_0.i).(n-4)$
$n-3$	$C_{n-3} = C_0 + (C_0.i).(n-3)$
$n-2$	$C_{n-2} = C_0 + (C_0.i).(n-2)$
$n-1$	$C_{n-1} = C_0 + (C_0.i).(n-1)$
n	$C_n = C_0 + (C_0.i).(n)$

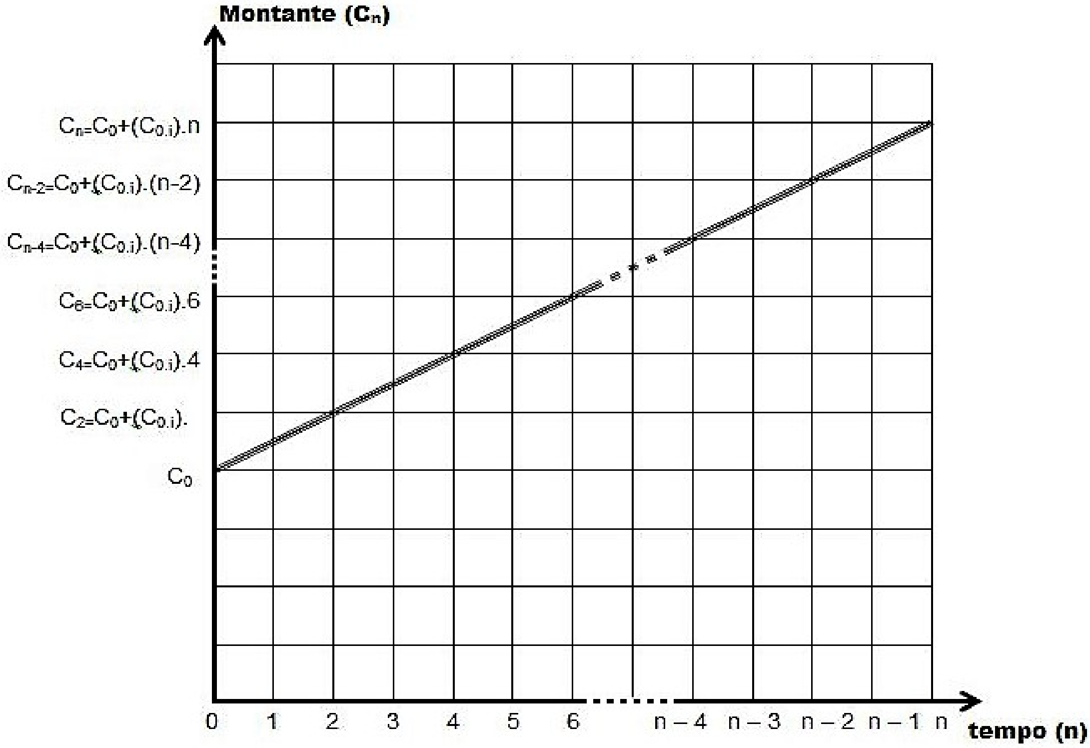

Figura 6.12: Evolução de um capital C_0 no RJS.

Vamos considerar agora um montante $C_n = C_0 + (C_0.i).(n)$ que está na data n e será descapitalizado período a período à mesma taxa de $i\%$ na qual o capital C_0, anterior, foi capitalizado, também no Regime de Juros Simples.

Haverá uma inversão na tabela, uma vez que partiremos da data n e faremos a descapitalização período a período.

Se compararmos os valores numa mesma data, qualquer que seja ela, diferente da data "zero" e da data "n", podemos perceber claramente que estes valores são diferentes; e mais ainda, o valor descapitalizado é menor que o valor capitalizado.

Tabela 6.4: Descapitalização de um montante C_n no RJS

$TEMPO$	$MONTANTE$
n	$C_n = C_0 + (C_0.i).(n)$
$n-1$	$C_{n-1} = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.1} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.1}$
$n-2$	$C_{n-2} = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.2} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.2}$
$n-3$	$C_{n-3} = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.3} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.3}$
$n-4$	$C_{n-4} = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.4} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.4}$
$\cdots$	$\cdots$
6	$C_6 = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.(n-6)} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-6)}$
5	$C_5 = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.(n-5)} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-5)}$
4	$C_4 = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.(n-4)} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-4)}$
3	$C_3 = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.(n-3)} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-3)}$
2	$C_2 = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.(n-2)} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-2)}$
1	$C_1 = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.(n-1)} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-1)}$
0	$C_0 = \dfrac{C_0 + (C_0.i).(n)}{1+i.(n)} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n)} = C_0$

Apresentaremos a seguir uma tabela para a comparação citada anteriormente. Na segunda coluna está o valor obtido através da capitalização do valor inicial C_0 e na terceira coluna está o valor obtido através da descapitalização do montante C_n, ambos na mesma data.

Tabela 6.5: Evolução de um capital C_0 e Descapitalização de um montante C_n no RJS

$TEMPO$	$MONTANTE$ *capitaliz*	$MONTANTE$ *descapitaliz*
0	C_0	C_0
1	$C_1 = C_0 + (C_0.i).1$	$C_1 = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-1)}$
2	$C_2 = C_0 + (C_0.i).2$	$C_2 = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-2)}$
3	$C_3 = C_0 + (C_0.i).3$	$C_3 = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-3)}$
4	$C_4 = C_0 + (C_0.i).4$	$C_4 = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-4)}$
5	$C_5 = C_0 + (C_0.i).5$	$C_5 = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-5)}$
6	$C_6 = C_0 + (C_0.i).6$	$C_6 = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.(n-6)}$
. . .	. . .	. . .
$n-4$	$C_{n-4} = C_0 + (C_0.i).(n-4)$	$C_{n-4} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.4}$
$n-3$	$C_{n-3} = C_0 + (C_0.i).(n-3)$	$C_{n-3} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.3}$
$n-2$	$C_{n-2} = C_0 + (C_0.i).(n-2)$	$C_{n-2}C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.2}$
$n-1$	$C_{n-1} = C_0 + (C_0.i).(n-1)$	$C_{n-1} = C_0.\dfrac{1+i.n}{1+i.1}$
n	$C_n = C_0 + (C_0.i).(n)$	$C_n = C_0 + (C_0.i).(n)$

Vamos considerar o $montante \ \ final$ C_n obtido pela capitalização da quantia inicial C_0 à taxa de $i\%$ ao período k por n períodos k, no Regime de Juros Simples. Este montante será descapitalizado período a período até chegar à data $zero$. A descapitalização deste montante é feita segundo a função:

$$\begin{aligned} C_n &= C_0.(1+i.n) \\ C_0 &= \frac{C_n}{1+i.n} \end{aligned}$$

Se $p \leq n$ é a data para a qual se deseja a descapitalização de C_n, então o tempo de descapitalização será $n-p$, e teremos:

$$C_{n-p} = \frac{C_n}{1+i.(n-p)}$$

Esta função é de Domínio nos Inteiros não negativos e Imagem nos Reais; porém, para sua iterpretação gráfica, vamos considerá-la de $R_+ \longrightarrow R_+$.

O esboço de seu gráfico para $0 \leq (n-p) \leq n$ será o que segue abaixo:

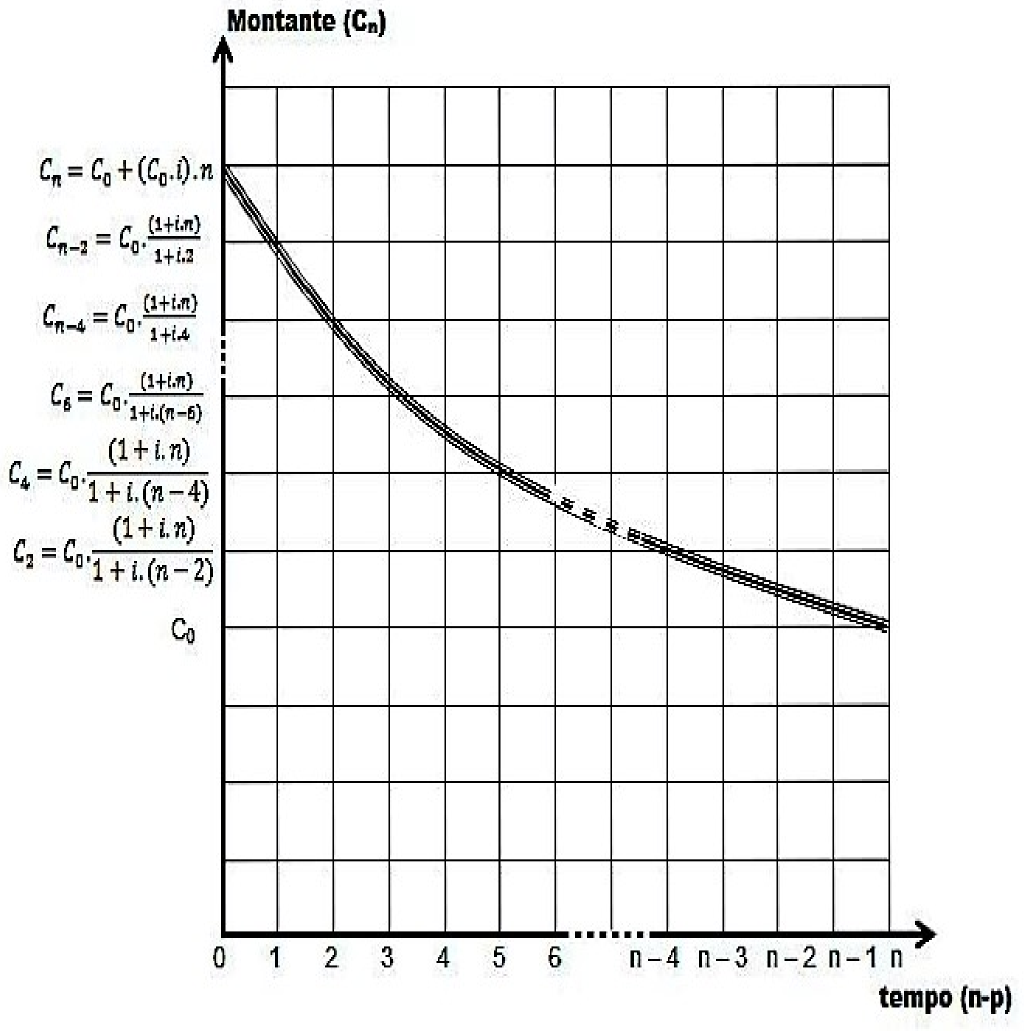

Figura 6.13: Descapitalização de um montante C_n no RJS.

Se tomarmos os dois gráficos num mesmo sistema de eixos, com inversão do eixo do tempo para o segundo gráfico, poderemos fazer uma análise direta da situação. Notamos que tanto na capitalização quanto na descapitalização, os valores se igualam somente nas datas inicial e final. Nas demais datas o valor obtido quando da descapitalização é inferior ao da capitalização.

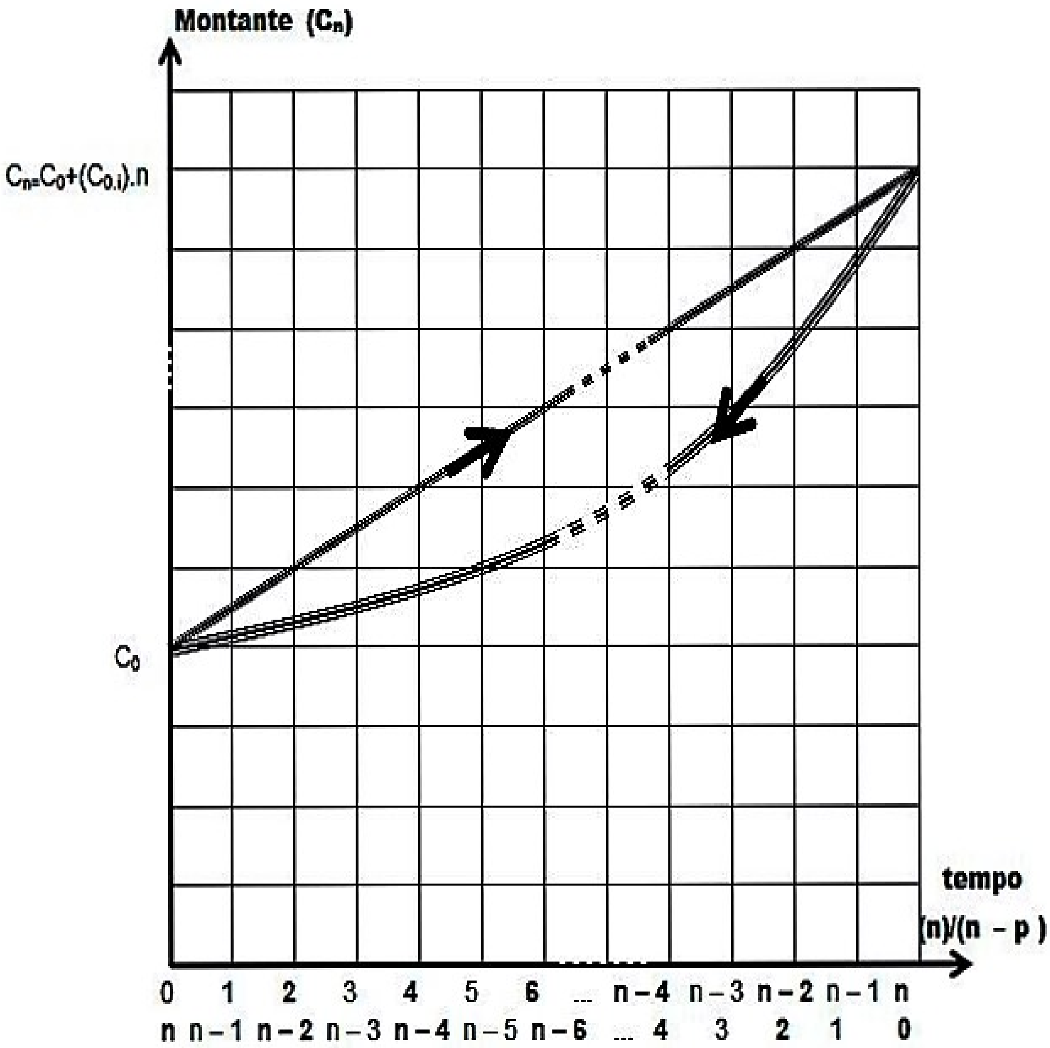

Figura 6.14: Evolução de um capital C_0 e Descapitalização de um montante C_n no RJS

Sabendo que os valores de capitalização e descapitalização só se igualam no início e no final do processo, vejamos, algebricamente, o que ocorre se capitalizarmos da data *zero* até a data p e se descapitalizarmos da data n até a mesma data p.

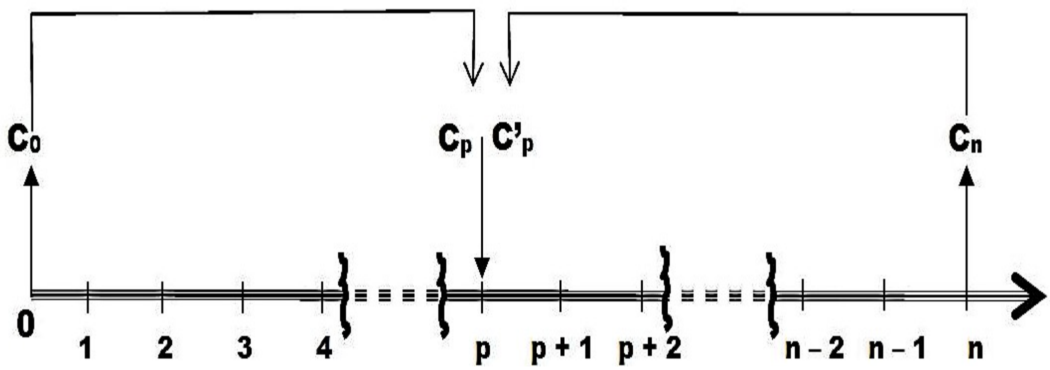

Figura 6.15: Capitalização de um capital C_0 e Descapitalização de um montante C_n para uma data p no RJS

Sabemos que:

$$C_p = C_0.(1 + i.p) \text{ e que } C'_p = \frac{C_n}{1 + i.(n - p)}, \text{ com } C_n = C_0.(1 + i.n).$$

Considerando i, n e C_0 dados, com: $i \in R_+$, $n \in N$, $C_0 \in R_+$, e $p \in N$ com $p < n$, devemos provar que:

$$C_P > C'_p \Longrightarrow C_0.(1 + i.p) > \frac{C_0.(1 + i.n)}{1 + i.(n - p)} \Longrightarrow (1 + i.p) > \frac{1 + i.n}{1 + i.(n - p)}$$

Como $1 + i.(n - p) > 0$, pois $n > p$, podemos multiplicar ambos os lados da desigualdade por este fator. Daí teremos:

$$\begin{aligned} (1 + i.p).(1 + i.n - i.p) &> 1 + i.n \\ 1 + i.n - i.p + i.p + i^2.n.p - i^2.p^2 &> 1 + i.n \\ 1 + i.n + i^2.p.(n - p) &> 1 + i.n \end{aligned}$$

Como $p < n \Longrightarrow (n - p) > 0 \Longrightarrow i^2.p(n - p) > 0$, assim,

$$\begin{aligned} 1 + i.n - i.p + i.p + i^2.n.p - i^2.p^2 &> 1 + i.n \\ 1 + i.n + i^2.p.(n - p) &> 1 + i.n \\ (1 + i.p) &> \frac{1 + i.n}{1 + i.(n - p)}, \end{aligned}$$

demonstrando que $C_P > C'_p$.

Neste caso, está provado então que no Regime de Juros Simples a equivalência de capitais só é válida para as datas iniciais e finais. Para datas intermediárias, os valores serão diferentes e, portanto, traduzirão quantidades monetárias diferentes, onde a descapitalização provoca um valor menor que a capitalização para uma mesma data. Daí a terminologia “no Regime de Juros Simples o tempo não é cindível”.

Insistimos novamente no fato de as Instituições Financeiras efetuarem os famosos *Descontos Bancários* através do Regime de Juros Simples, uma vez que, ao se descapitalizar uma quantia, se o fizermos através do Regime de Juros Simples o valor encontrado na descapitalização será superior ao valor que se encontra se a descapitalização for feita no Regime de Juros Compostos.

Tal fato poderá ser observado fazendo-se a comparação entre as funções:
$C_0 = \dfrac{C_n}{1+i.n}$, que é a descapitalização no RJS e
$C_0 = \dfrac{C_n}{(1+i)^n}$, que é a descapitalização no RJC.
Tanto graficamente, quanto algebricamente, teremos sempre que:

$$\frac{C_n}{1+i.n} \geq \frac{C_n}{(1+i)^n} \Longrightarrow (1+i.n) \leq (1+i)^n \ , \quad \textit{(desigualdade de Bernoulli).}$$

$$\begin{aligned}
(1+i.n) &\leq (1+i)^n \\
\Longrightarrow (1+i)^n &\geq (1+i.n) \\
\Longrightarrow (1+i)^n.(1+i) &\geq (1+i.n).(1+i) \\
\Longrightarrow (1+i)^n.(1+i) &\geq 1+i+i.n+i^2.n \\
\Longrightarrow (1+i)^n.(1+i) &\geq 1+(n+1).i+i^2.n \\
\Longrightarrow (1+i)^{n+1} &\geq 1+(n+1).i+i^2.n
\end{aligned}$$

Fazendo $(n+1)=k$ e sabendo que $i^2.n$ é sempre positivo, teremos então que:

$$(1+i)^k \ \geq \ 1+i.k+i^2.(k-1),$$

sendo igual para $k=1$.

Não conseguimos nenhuma regulamentação das Instituições Financeiras e nem do Banco Central do Brasil sobre o motivo que levam a capitalizar pelo Regime de Juros Compostos e descapitaizar pelo Regime de Juros Simples. Mas realçamos o fato de que, ao se fazer dessa forma, as quantidades monetárias adquiridas pelas Instituições são maiores.

Podemos afirmar claramente que neste caso, também, a Matemática Financeira dos Regimes de Juros é selecionada de maneira a privilegiar os detentores do interesse monetário.

Para melhor ilustração do exposto acima faremos a resolução de um exemplo com a utilização da equivalência de capitais no Regime de Juros Simples selecionando como DATA BASE várias datas, fazendo a comprovação que, de acordo com a data escolhida o resultado será diferente.

Considere uma pessoa que tem uma dívida a pagar de $R\$ \ 1 \ 000,00$ de hoje a 2 meses e $R\$ \ 2 \ 000,00$ de hoje a 5 meses. Desejando reformular esses compromissos ela renegociou a dívida inicial de forma a efetuar três pagamentos mensais e iguais, vencícel o primeiro de hoje a 2 meses e os demais em cada mês subsequente, à taxa de 2% ao mês e no Regime de Juros Simples. Qual é o valor de cada parcela?
RESOLUÇÃO:
Analisemos a dívida e os pagamentos numa linha do tempo, em cuja parte superior observamos a dívida atual e na parte inferior a proposta feita.

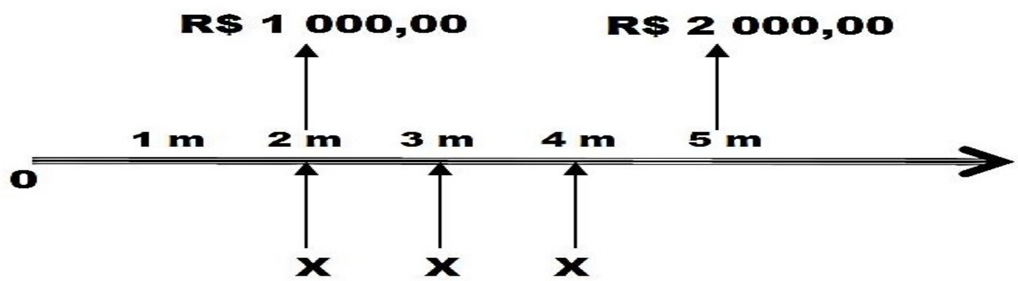

Figura 6.16: Eixo de tempo mostrando uma dívida e a sua negociação.

Vamos tomar como data base a data de hoje, ou seja, vamos buscar todas as quantidades monetárias e levá-las para a data de hoje. Quando estivermos com todas as quantidades monetárias nesta data, montamos a equação de valores, na qual a soma das obrigações devem ser iguais à soma dos pagamentos.

A Soma das Obrigações (SO) na data de hoje será dada por:

$$SO = \frac{1000}{1+(0,02).(2)} + \frac{2000}{1+(0,02).(5)} \Longrightarrow SO = 961,54 + 1818,18 \Longrightarrow$$
$$\mathbf{SO = 2779,72}.$$

Os pagamentos na data de hoje serão:

$$\begin{aligned} SP &= \frac{P}{1+(0,02).(2)} + \frac{P}{1+(0,02).(3)} + \frac{P}{1+(0,02).(4)} \\ SP &= 0,961538461.P + 0,943396226.P + 0,925925925.P \\ \Longrightarrow SP &= 2,830860613.P \end{aligned}$$

Como ambos estão na mesma data (data zero), podemos igualar as quantias, pois uma deve compensar a outra. Assim teremos:

$$SP = SO \Longrightarrow 2,830860613.P = 2779,72 \Longrightarrow \mathbf{P = 981,93}.$$

Concluimos então que para quitar as duas dívidas: a primeira de mil reais e a segunda de dois mil reais com os vencimentos citados, ele deverá fazer três pagamentos iguais de $R\$$ $981,93$.

Vamos tomar como data base agora a data 2 meses e vejamos o que ocorre: Vejamos a Soma das Obrigações (SO):

$$SO = 1000 + \frac{2000}{1+(0,02).(3)} \Longrightarrow SO = 1000 + 1886,79 \Longrightarrow \mathbf{SO = 2886,79}.$$

Vejamos agora a soma dos pagamentos (SP):

$$SP = P + \frac{P}{1+(0,02).(1)} + \frac{P}{1+(0,02).(2)} =$$
$$P + 0,980392156.P + 0,961538461.P$$
$$\Longrightarrow \mathbf{SP = 2,941930617.P}.$$

Com ambos somatórios na data base podemos montar a equação de valores:

$$SP = SO \Longrightarrow 2,941930617.P = 2886,79 \Longrightarrow \mathbf{P = 981,26}.$$

Note que chegamos a um valor para o pagamento bem próximo ao pagamento que calculamos quando usamos como data base a data zero.

Vejamos agora o que ocorrerá se adotarmos como data base a data do último pagamento (4 meses).
A soma das Obrigações (SO) será:

$$SO = 1000.[1 + (0,02).(2)] + \frac{2000}{1 + (0,02).(1)} \Longrightarrow SO = 1040 + 1960,78 \Longrightarrow$$
$$\mathbf{SO = 3000,78}.$$

A Soma dos Pagamentos (SP) será:

$$SP = P.[1 + (0,02).(2)] + P.[1 + (0,02).(1)] + P \longrightarrow \mathbf{SP = 3,06.P}.$$

Montando a equação de valores na data base encontraremos:

$$SP = SO \longrightarrow 3,06.P = 3000,78 \longrightarrow \mathbf{P = 980,65}$$

Vamos analisar os valores encontrados:
Data zero: $P = 981,93$
Data 2 meses: $P = 981,26$
Data 4 meses: $P = 980,65$

Percebemos que os valores são diferentes dependendo da data base escolhida. Isso ocorre devido à cindibilidade do tempo no RJS. Neste caso, quando se negocia dívidas no RJS é comum adotar como data-base a data “zero” do eixo do tempo, também denominada como “data de hoje”, na qual se faz a equivalência financeira entre as quantidades monetárias.

A esta equivalência financeira denominamos EQUAÇÃO DE VALORES, em que o somatório de todas as obrigações deve ser igual ao somatório de todos os pagamentos.

Nós adotaremos para efeito de cálculo das rendas ou anuidades constantes e periódicas no Regime de Juros Simples a data base como sendo a data "zero" (alguns autores chamam esta data base de "data focal").

6.3.1 Rendas ou Anuidades Imediatas

Vamos considerar uma quantia inicial C que foi tomada numa determinada data zero à taxa de $i\%$ ao período k e será dividida em n parecelas iguais, X, que serão tomadas em períodos de k em k, no RJS, sendo que a primeira parcela X vencerá um período após a quantia C ser tomada. A essas parcelas X denominamos de "anuidade" e à quantia inicial C, denominamos "renda". Nossa questão é:

Qual será o valor de cada uma das parcelas X que amortiza esta dívida inicial sendo adotado o Regime de Juros Simples?

Vejamos no eixo do tempo a visualização da situação proposta:

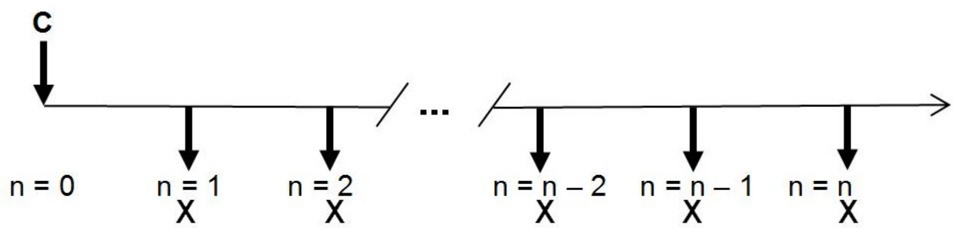

Figura 6.17: n anuiades X gerando uma renda C no RJS

Nossa data-base (data focal) será a data zero (data em que a quantia C foi tomada).

Levando todas as quantias envolvidas para a data base "zero" e montando a equação de valores (Soma das obrigações - SO, igual à Soma dos Pagamentos - SP) teremos:

$$\begin{aligned}
SO &= SP \\
C &= \frac{X}{1+1.i} + \frac{X}{1+2.i} + ... + \frac{X}{1+(n-2).i} + \frac{X}{1+(n-1).i} + \frac{X}{1+n.i} \\
C &= X.(\frac{1}{1+1.i} + \frac{1}{1+2.i} + ... + \frac{1}{1+(n-2).i} + \frac{1}{1+(n-1).i} + \frac{1}{1+n.i}) \\
C &= X.\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{1}{1+v.i}\right)
\end{aligned}$$

A fórmula acima permite-nos calcular o valor inicial da Renda C em função do valor da Anuidade a ser paga X, da quantidade de anuidades n e da taxa i na unidade k, que é exatamente o intervalo entre as anuidades.

Manipulando a fórmula, podemos encontrar a anuidade X em função da quantia inicial (renda) C, da quantidade de anuidades n e da taxa dada i ao período k, como a seguir:

$$X = \frac{C}{\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{1}{1+v.i}\right)}$$

É importante salientar que a série gerada no somatório é uma Série Harmônica e, portanto, não há uma fórmula matemática que defina a sua soma. Daí a necessidade de se utilizar a soma acumulada.

Vejamos um exemplo:

Uma determinada pessoa faz um financiamento retirando uma quantia inicial de $R\$ \ 10\ 000,00$ para pagá-la em 10 parcelas mensais iguais, vencível a primeira um mês após a retirada da quantia e as demais em cada mês subsequente, sendo o financiamento feito à taxa de 3% ao mês no Regime de Juros Simples. Calcule o valor das parcelas.
RESOLUÇÃO:

Neste caso, a Renda será o valor financiado: $C = R\$ \ 10 \ 000,00$;

O número de anuidades será a quantidade de parcelas, $n = 10$;

$i = 3\%$ a.m.;

É uma *Renda imediata*, pois a primeira anuidade tem vencimento exatamente um período após a Renda.

Utilização direta da fórmula:$X = \dfrac{C}{\sum\limits_{v=1}^{n}\left(\dfrac{1}{1+v.i}\right)}$

$$\text{As parcelas serão de: } X = \frac{10000}{\sum\limits_{v=1}^{10}\left(\dfrac{1}{1+v.0,03}\right)}$$

Cálculo do somatório:

$$\begin{aligned}
\sum_{v=1}^{10}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) &= \frac{1}{1+0,03}+\frac{1}{1+(2).(0,03)}+\frac{1}{1+(3).(0,03)}+\\
&\quad \frac{1}{1+(4).(0,03)}+\frac{1}{1+(5).(0,03)}+\frac{1}{1+(6).(0,03)}+\\
&\quad \frac{1}{1+(7).(0,03)}+\frac{1}{1+(8).(0,03)}+\frac{1}{1+(9).(0,03)}+\\
&\quad \frac{1}{1+(10).(0,03)} \Longrightarrow\\
\sum_{v=1}^{10}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) &= \frac{1}{1,03}+\frac{1}{1,06}+\frac{1}{1,09}+\frac{1}{1,12}+\frac{1}{1,15}+\frac{1}{1,18}+\frac{1}{1,21}+\\
&\quad \frac{1}{1,24}+\frac{1}{1,27}+\frac{1}{1,3} \Longrightarrow\\
\sum_{v=1}^{10}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) &= 8,631111431
\end{aligned}$$

Voltando no cálculo da anuidade:

$$X = \frac{10000}{8,631111431} \Longrightarrow \mathbf{X = R\$ \ 1 \ 158,60}$$

Neste caso, como são 10 parcelas iguais, o Montante da dívida será de:

$$C_n = (10).(1158,06) \Longrightarrow C_n = R\$ \ 11 \ 586,00$$

que nos leva a uma quantidade de juros de

$$J = 11586 - 10000 \Longrightarrow J = R\$\ 1\ 586,00$$

e como é o Regime de Juros Simples, os mesmos devem ser constantes em todo período e também sem capitalização, ou seja, mês a mês, os juros do financiamento serão:

$$J = \frac{1586}{10} \Longrightarrow J = R\$\ 158,60 \text{ por mês.}$$

Em uma tabela podemos ter uma melhor visualização da evolução e amortização do financiamento. Nela apresentamos o valor do financiamento e dos juros simples devidos a ele, período a período, até a útima anuidade.

Tabela 6.6: Amortização de uma anuidade imediata no RJS

n	C	X	C - X	J
0	10 000,00	0,00	10 000,00	158,60
1	10 158,60	1 158,60	9 000,00	158,60
2	9 158,60	1 158,60	8 000,00	158,60
3	8 158,60	1 158,60	7 000,00	158,60
4	7 158,60	1 158,60	6 000,00	158,60
5	6 158,60	1 158,60	5 000,00	158,60
6	5 158,60	1 158,60	4 000,00	158,60
7	4 158,60	1 158,60	3 000,00	158,60
8	3 158,60	1 158,60	2 000,00	158,60
9	2 158,60	1 158,60	1 000,00	158,60
10	1 158,60	1 158,60	0,00	0,00

TOTAL DE JUROS PAGOS: $J = R\$\ 1\ 586,00$

6.3.2 Rendas ou Anuidades Antecipadas

Neste caso, a primeira parcela da anuidade X coincide com a data atual da Renda C; ou seja, tem-se a Renda C na data zero e nesta mesma data já incide a primeira anuidade X.

A visualização no eixo do tempo seria como a seguir:

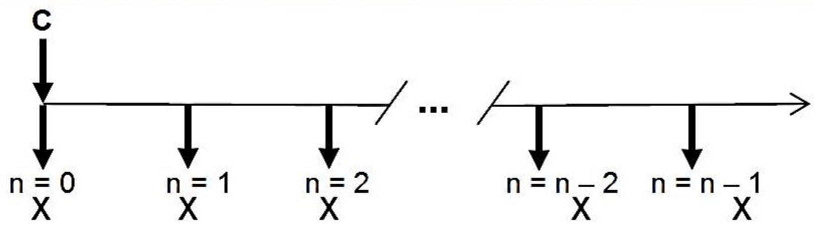

Figura 6.18: n anuidades X gerando uma renda C no RJS, antecipadamente.

A análise para se chegar a uma fórmula que permita encontrar uma relação entre as Anuidades X com vencimentos em períodos constantes k, a quantidade de Anuidades n, a taxa de juros simples i relativa ao período k e a Renda na data inicial C, segue a mesma linha de raciocínio das Rendas ou Anuidades Imediatas, porém, devemos lembrar que a Renda inicial C está na data zero juntamente com a primeira Anuidade X. Assim, a quantidade de Anuidades a serem levadas para a data base (data zero) serão $(n-1)$.

Devemos levar em consideração também que, como são n anuidades X e a primeira está na data zero, então a última deverá estar na data $(n-1)$ e não na data n, como a Renda Imediata.

Montemos a equação de valores: Soma das obrigações (SO) deve ser igual à Soma dos Pagamentos (SP):

$$\begin{aligned}
SO &= SP \\
C &= X + \frac{X}{1+1.i} + \frac{X}{1+2.i} + ... + \frac{X}{1+(n-2).i} + \frac{X}{1+(n-1).i} \\
C &= X.\left(\frac{1}{1+0.i} + \frac{1}{1+1.i} + \frac{1}{1+2.i} + ... + \frac{1}{1+(n-2).i} + \frac{1}{1+(n-1).i}\right) \\
C &= X.\sum_{v=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+v.i}\right)
\end{aligned}$$

Manipulando a fórmula podemos calcular o valor das anuidades "X":

$$X = \frac{C}{\sum_{v=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+v.i}\right)}$$

Tomemos o mesmo exemplo resolvido em rendas imediatas:

Uma determinada pessoa faz um financiamento retirando uma quantia inicial de $R\$$ $10\ 000,00$ para pagá-la em 10 parcelas mensais iguais, vencível a primeira no ato da retirada da quantia e as demais em cada mês subsequente, sendo o financiamento feito à taxa de 3% ao mês no Regime de Juros Simples. Calcule o valor das parcelas.
RESOLUÇÃO:
A renda é o valor financiado: $C = 10000$;
O total de Anuidades será $n = 10$;
$i = 3\%$a.m. JS;
Trata-se de *anuidade antecipada*, uma vez que na data zero da Renda já incide uma Anuidade;
Utilização direta da fórmula:

$$X = \frac{10000}{\sum\limits_{v=0}^{10-1}\left(\dfrac{1}{1+v.0,03}\right)}$$

Calculando o somatório:

$$\begin{aligned}
\sum_{v=0}^{9}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) &= \frac{1}{1+(0).(0,03)} + \frac{1}{1+(1).(0,03)} + \frac{1}{1+(2).(0,03)} + \\
&+ \frac{1}{1+(3).(0,03)} + \frac{1}{1+(4).(0,03)} + \frac{1}{1+(5).(0,03)} + \\
&\frac{1}{1+(6).(0,03)} + \frac{1}{1+(7).(0,03)} + \frac{1}{1+(8).(0,03)} + \\
&\frac{1}{1+(9).(0,03)} \\
\sum_{v=0}^{9}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) &= 1 + \frac{1}{1,03} + \frac{1}{1,06} + \frac{1}{1,09} + \frac{1}{1,12} + \frac{1}{1,15} + \frac{1}{1,18} + \\
&\frac{1}{1,21} + \frac{1}{1,24} + \frac{1}{1,27} \\
\sum_{v=0}^{9}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) &= 8,861880662
\end{aligned}$$

Voltando à equação:

$$X = \frac{10000}{8,861880662} \longrightarrow \mathbf{X = R\$ \ 1 \ 128,43}.$$

Considerando o mesmo racicínio do exemplo anterior, teremos que o montante da dívida será:

$$C_n = (10).(1128,43) \Longrightarrow C_n = R\$ \ 11 \ 284,30$$

Assim, os juros do financiamento serão:

$$J = C_n - C \Longrightarrow J = 11284,30 - 10000 \Longrightarrow J = R\$ \ 1 \ 284,30.$$

Como a primeira parcela conincide com a data do empréstimo, sobre esta parcela não haverá incidência de juros; logo, os juros a serem pagos serão referentes a 9 períodos. Assim, os juros referentes a cada período serão:

$$J' = \frac{1284,30}{9} \Longrightarrow J' = R\$ \ 142,70.$$

Montemos agora a tabela de amortização, como fizemos em anuidade imediatas, e analisemos a incidência dos Juros Simples e o fechamento do financiamento:

Tabela 6.7: Amortização de uma anuidade antecipada no RJS

n	C	X	C - X	J
0	10 000,00	1 128,43	8 871,57	142,70
1	9 014,27	1 128,43	7 885 84	142,70
2	8 028,54	1 128,43	6 900,11	142,70
3	7 042,81	1 128,43	5 914,38	142,70
4	6 057,08	1 128,43	4 928,65	142,70
5	5 071,35	1 128,43	3 942,92	142,70
6	4 085,62	1 128,43	2 957,19	142,70
7	3 099,89	1 128,43	1 971,46	142,70
8	2 114,16	1 128,43	985,73	142,70
9	1 128,43	1 128,43	0,00	0,00

TOTAL DE JUROS PAGOS: $J = R\$ \ 1 \ 284,30$

Fica claro que o total de juros pagos nas rendas imediatas são maiores que nas antecipadas, uma vez que nas antecipadas, na data da recepção da renda, já se efetua o pagamento de uma anuidade.

6.3.3 Rendas ou Anuidades Diferidas

No caso das Rendas Diferidas existe um prazo de carência entre a data zero (data do financiamento) e o vencimento da primeira anuidade (carência m); e este prazo tem que ser maior que o intervalo de tempo k entre cada uma das anuidades.

Podemos ter dois tipos de anuidades diferidas:
1ª-) As Anuidades ou Rendas Diferidas Imediatas - Quando a primeira anuidade tem data $m+1$ períodos após a data zero.
2ª-) As Anuidades ou Rendas Diferidas Antecipadas - Quando a primeira anuidade tem data m períodos após a data zero. Porém este caso se enquadra no primeiro, bastando para isso tomarmos a carência como sendo $m-1$.

Vejamos num eixo do tempo uma Anuidade ou Renda Imediata Diferida de

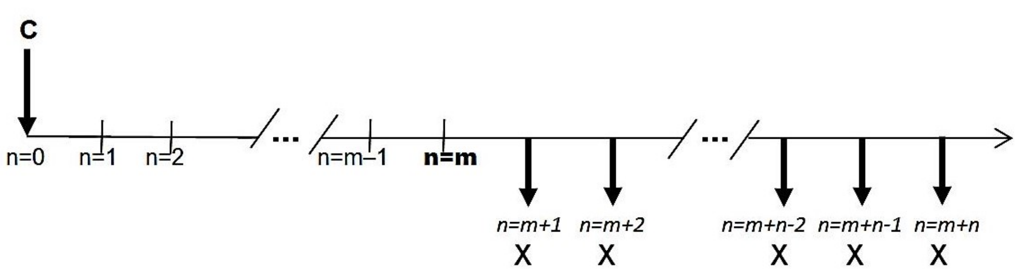

Figura 6.19: n anuidades X gerando uma renda C no RJS, em anuidades imediatas diferidas de m períodos.

Vamos levar todas as quantidades monetárias envolvidas para a data base que será a data zero e, nesta data, montaremos a equação de valores, onde a soma de todas as obrigações (SO) deverá ser igual à soma de todos os pagamentos (SP).

$$\begin{aligned}
SO &= SP \\
C &= \frac{X}{1+(m+1).i} + \frac{X}{1+(m+2).i} + \frac{X}{1+(m+3).i} + ... \\
&\quad ... + \frac{X}{1+(m+n-2).i} + \frac{X}{1+(m+n-1).i} + \frac{X}{1+(m+n).i} \\
C &= X.(\frac{1}{1+(m+1).i} + \frac{1}{1+(m+2).i} + \frac{1}{1+(m+3).i} + ... \\
&\quad + \frac{1}{1+(m+n-2).i} + \frac{1}{1+(m+n-1).i} + \frac{1}{1+(m+n).i}) \\
C &= X.\sum_{v=m+1}^{m+n}\left(\frac{1}{1+v.i}\right) \Longrightarrow X = \frac{C}{\sum_{v=m+1}^{m+n}\left(\frac{1}{1+v.i}\right)}
\end{aligned}$$

Permitindo-nos calcular, respectivamente, a quantia inicial da anuidade e o valor de cada uma das parcelas que a amortiza.

A Anuidade ou Renda Antecipada, no eixo do tempo, fica como a figura mostrada abaixo:

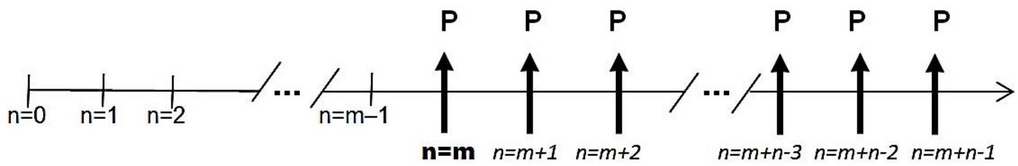

Figura 6.20: n anuidades X gerando uma renda C no RJS, em anuidades antecipadas diferidas de m períodos.

De maneira análoga às anteriores poderemos chegar a uma fórmula que permite encontrar tanto o valor atual da renda C quanto o valor de sua anuidade X, em função uma da outra, da quantidade de anuidades n, da taxa ao período k, i e do tempo de carência m:

$$C = X.\sum_{v=m}^{m+n-1}\left(\frac{1}{1+v.i}\right) \Longrightarrow X = \frac{C}{\sum_{v=m}^{m+n-1}\left(\frac{1}{1+v.i}\right)}$$

Tomaremos o mesmo exemplo que fizemos para anuidades imediatas e anuidades antecipadas.

Uma pessoa faz um financiamento para pagá-lo em 10 parcelas mensais e iguais, retirando uma quantia inicial de $R\$\ 10\ 000,00$, vencível a primeira após 5 períodos do financiamento e as demais em cada mês subsequente, sendo o financiamente feito à taxa de 3% ao mês no Regime de Juros Simples. Calcule o valor das parcelas.
RESOLUÇÃO:
A renda na data de hoje será: $C = 10000$;
A quantidade de anuidades é de $n = 10$;
$i = 3\%$ a.m. JS;
É uma *anuidade diferida imediata* $m = 4$, pois a primeira anuidade está na data 5 meses; ou seja, utilização direta da fórmula, $X = \dfrac{C}{\sum\limits_{v=m+1}^{m+n}(\dfrac{1}{1+v.i})}$
inicalmente o somatório:

$$\sum_{v=m+1}^{m+n}\left(\frac{1}{1+v.i}\right) = \sum_{v=4+1}^{4+10}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) = \sum_{v=5}^{14}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{v=5}^{14}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) &= \frac{1}{1+(5).(0,03)} + \frac{1}{1+(6).(0,03)} + \frac{1}{1+(7).(0,03)} + \\
&\quad \frac{1}{1+(8).(0,03)} + \frac{1}{1+(9).(0,03)} + \frac{1}{1+(10).(0,03)} + \\
&\quad \frac{1}{1+(11).(0,03)} + \frac{1}{1+(12).(0,03)} + \frac{1}{1+(13).(0,03)} + \\
&\quad \frac{1}{1+(14).(0,03)} \\
\sum_{v=5}^{14}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) &= \frac{1}{1,15} + \frac{1}{1,18} + \frac{1}{1,21} + \frac{1}{1,24} + \frac{1}{1,27} + \frac{1}{1,30} + \frac{1}{1,33} + \\
&\quad \frac{1}{1,36} + \frac{1}{1,39} + \frac{1}{1,42} \\
\sum_{v=5}^{14}\left(\frac{1}{1+v.0,03}\right) &= 7,817376712
\end{aligned}$$

Voltando à equação de valores:

$$X = \frac{10000}{7,817376712} \Longrightarrow X = R\$ \ 1 \ \ 279,20$$

Considerando o mesmo racicínio do exemplo anterior, temos que o montante da dívida será:

$$C_n = (10).(1279,20) \Longrightarrow C_n = R\$ \ 12 \ \ 792,00$$

Assim, os juros do financiamento serão:

$$J = C_n - C \Longrightarrow J = 12792 - 10000 \Longrightarrow J = R\$ \ 2 \ \ 792,00$$

Como a primeira parcela vence 5 períodos após a data do empréstimo, os juros a serem pagos serão referentes a 14 períodos. Assim, em cada período, os juros serão de:

$$J' = \frac{2792}{14} \Longrightarrow J' = R\$ \ 199,43$$

Montando a tabela de amortização do financiamento podemos perceber melhor o que ocorre período a período do mesmo:

Ressaltamos que a diferença ao final de **R\$ 0,02** é referente aos arredondamentos durante o processo de operações e que o total de juros pagos foi de $J = R\$ \ 2 \ \ 792,00$, ultrapassando os dois outros tipos de anuidades, uma vez que a carência provoca este acúmulo de juros.

Frente às situações problemas geradas, podemos perceber que as anuidades no sistema de Juros Simples são tão eficientes quanto eficazes na amortização de uma dívida e principalmente, não provocam anatocismo.

Devemos sempre que possível, ao se trabalhar com o sistema de juros simples, utilizar a data base (data focal) igual à data zero, uma vez que, como já mostrado anteriormente, é a data onde a diferença entre capitalização e descapitalização é a mínima obtida. Para este trabalho, as fórmulas demonstradas foram todas utilizando como data-base a data zero.

Conforme já exposto anteriormente as jurisprudências divergem quanto à utilização do Regime de Juros Simples no cálculo de anuidades ou rendas e a

Tabela 6.8: Amortização de uma anuidade diferida no RJS

n	C	X	C - X	J
0	10 000,00	0	10 000,00	199,43
1	10 199,43	0	10 199,43	199,43
2	10 398,86	0	10 398,86	199,43
3	10 598,29	0	10 598,29	199,43
4	10 797,72	0	10 797,72	199,43
5	10 997,15	1 279,20	9 717,95	199,43
6	9 917,38	1 279,20	8 638,17	199,43
7	8 837,61	1 279,20	7 558,41	199,43
8	7 757,84	1 279,20	6 478,64	199,43
9	6 678,07	1 279,20	5 398,87	199,43
10	5 598,30	1 279,20	4 319,10	199,43
11	4 518,53	1 279,20	3 239,33	199,43
12	3 438,76	1 279,20	2 159,56	199,43
13	2 358,99	1 279,20	1 079,79	199,43
14	1 279,22	1 279,20	**0,02**	

Constituição Federal não define claramente qual Regime de Juros a ser adotado nas Instituições Financeiras.

Quando das ações judiciais em litígio contra o anatocismo, várias jurisprudências concordam que o correto é a Correção Monetária ao longo do período e Juros Simples para as Multas e Moras.

6.4 Rendas Constantes no Regime de Juros Compostos

Quando trabalhamos com Juros Compostos, as capitalizações obedecem a uma função exponencial. Neste caso, não há a cindibilidade do tempo sobre as quantidades financeiras. Desta forma, é indiferente a data base para o cálculo da equivalência das quantidades monetárias, independendo da data escolhida.

As principais Rendas ou Anuidades são as mesma citadas para o Regime de Juros Simples.

Mostraremos a seguir cada uma delas e faremos um exemplo numérico.

6.4.1 Rendas ou Anuidades Imediatas

Conforme já citado anteriormente as Anuidade ou Rendas imediatas são aquelas em que a primeira Anuidade C vence no primeiro período imediatamente depois da Renda C.

Como já mostrado no RJS, o eixo do tempo fica representado como a figura abaixo:

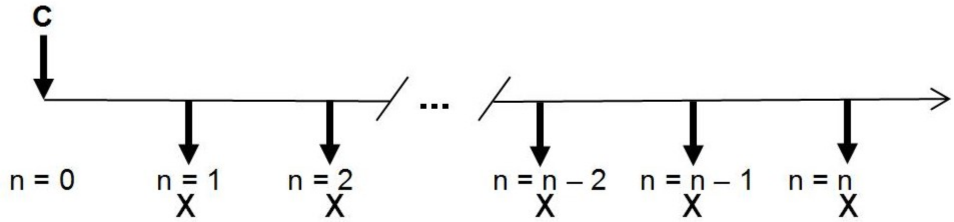

Figura 6.21: "n"anuidades “X” formando uma Renda Incial “C” no RJC - Rendas Imediatas.

Em que:

$C = RENDA \;\; inicial.$

$X = valor \;\; de \;\; cada \;\; ANUIDADE.$

$i = taxa \;\; de \;\; juros \;\; compostos \;\; no \;\; mesmo \;\; periodo \;\; de \;\; tempo \;\; que \;\; os \;\; intervalos \;\; das \;\; anuidades.$

$n = quantidade \;\; de \;\; anuidades.$

Adotaremos como data-base (Data Focal) a data da última anuidade (n), e nesta data montaremos a Equação de Valores (Equivalência de Capitais), em que a Soma das Obrigações (SO) é igual à Soma dos Pagamentos (SP):

$$\begin{aligned} SO &= SP \\ C.(1+i)^n &= X.(1+i)^{(n-1)} + X.(1+i)^{(n-2)} + ... + X.(1+i)^1 + X.(1+i)^0 \\ C.(1+i)^n &= X.[(1+i)^0 + (1+i)^1 + ... + (1+i)^{(n-2)} + (1+i)^{(n-1)}] \end{aligned}$$

Podemos observar que a série:

$$(1+i)^0 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{(n-2)} + (1+i)^{(n-1)}$$

é a soma de uma Progressão Geométrica (PG) de:
Primeiro termo $a_1 = (1+i)^0 = 1$, Razão $q = (1+i)$, possui n termos e último termo $a_n = (1+i)^{(n-1)}$.

Sua soma é dada pela fórmula: $S_n = \dfrac{a_1.(q^n - 1)}{q-1}$
Assim:

$$S_n = \frac{1.((1+i)^n - 1)}{(1+i)-1} \Longrightarrow S_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Voltando na equação de valores, obtemos:

$$\begin{aligned} C.(1+i)^n &= X.S_n \\ C.(1+i)^n &= X.\frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ C &= \frac{X.[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n} \end{aligned}$$

Como já citado anteriormente, a parcela $(1+i)^n$ é denominada de FATOR DE CAPITALIZAÇÃO no Regime de Juros Compostos. Se tomarmos o fator de capitalização como sendo F, a fórmula anterior poderá ser escrita:

$$C = \frac{X.(F-1)}{F.i}.$$

Manipulando a fórmula, podemos obter o valor das anuidades X em função da Renda inicial C:

$$X = \frac{C.F.i}{F-1}.$$

Vamos tomar o exemplo que estamos resolvendo desde o início do estudo de rendas e anuidades:

Uma determinada pessoa faz um financiamento retirando uma quantia inicial de $R\$$ 10 000,00 para pagá-la em 10 parcelas mensais iguais, vencível a primeira um período após o financiamento e as demais em cada mês subsequente, sendo o financiamente feito à taxa de 3% ao mês no Regime de Compostos. Calcule o valor das parcelas.

RESOLUÇÃO:

Utilização direta da fórmula: $X = \dfrac{C.F.i}{F-1}$

A renda será: $C = R\$ \ 10 \ \ 000,00$

A quantidade de anuidades é $n = 10$

$i = 3\%$ a.m.

$renda \ \ imediata$

$$\begin{aligned} X &= \frac{(10000).(1+0,03)^{10}.(0,03)}{(1+0,03)^{10}-1} \\ X &= \frac{403,1749138}{0,343916379} \\ X &= R\$ \ 1 \ \ 172,31. \end{aligned}$$

De imediato podemos fazer uma comparação entre os resultados encontrados nas Rendas Imediatas nos dois regimes de juros. No Regime de Juros Simples a anuidade encontrada foi no valor de $X = R\$ \ 1 \ \ 145,37$, enquanto do Regime de Juros Compostos a anuidade encontrada foi no valor de $X = R\$ \ 1 \ \ 172,31$.

Podemos perceber a diferença de $R\$ \ 26,94$ em favor do Regime de Juros compostos, evidentemente em função da diferença entre os dois regimes de juros, no qual, no primeiro, os juros são devidos somente em relação ao prinicpal, enquanto que no segundo, os juros são devidos em relação à soma (CAPITAL + JUROS) do período anterior.

Vamos observar agora a tabela que mostra a amortização dessa dívida e a quantidade de juros cobrada por ela:

Tabela 6.9: Amortização de uma anuidade imediata no RJC

n	C	X	C - X	J
0	10 000,00	0	10 000,00	300,00
1	10 300,00	1 172,31	9 127,69	273,83
2	9 401,52	1 172,31	8 229,21	246,88
3	8 476,09	1 172,31	7 303,78	219,11
4	7 522,89	1 172,31	6 350,58	190,52
5	6 541,10	1 172,31	5 368,79	161,06
6	5 529,85	1 172,31	4 357,54	130,73
7	4 488,27	1 172,31	3 315,96	99,48
8	3 415,44	1 172,31	2 243,13	67,29
9	2 310,42	1 172,31	1 138,11	34,14
10	1 172,25	1 172,31	**- 0,06**	0,00

É claro que o erro de fechamento ao final da planilha é de arredondamento, pois no caso das quantidades monetárias, trabalha-se somente até centavos, exceto algumas exceções, como o preço dos combustíveis.

O Total de Juros pagos na Renda Imediata em se adotando o RJC é de $R\$ \ 1 \ 723,04$, enquanto que na Renda Imediata pelo RJS o total de juros foi de $R\$ \ 1 \ 586,00$.

Agora fica bem claro o motivo pelo qual não se adota o Regime de Juros Simples para o cálculo de Rendas ou Anuidades. São dois os motivos fundamentais:
1º-) Não existe a cindibilidade do tempo (as anuidades ou rendas depende da data base - Data Focal - adotada).
2º-) A quantidade de juros a serem pagos no RJC será bem superior, o que leva as Instituições Financeiras a optarem por este Regime de Juros, pois necessariamente os ganhos serão maiores.

6.4.2 Rendas ou Anuidades Antecipadas

Segue a mesma definição para Rendas ou Anuidades Antecipadas no Regime de Juros Simples. É quando a primeira anuidade está na data zero, ou seja, coincide com a data atual da Renda.

Neste tipo de renda, se a quantidade de anuidades for n, o vencimento da última anuidade ocorrerá na data $(n-1)$, uma vez que a primeira está na data zero.

Já apresentamos a figura quando das rendas antecipadas no RJS, porém, apresentaremos novamente para que não haja a necessidade de voltar à mesma para interpretação.

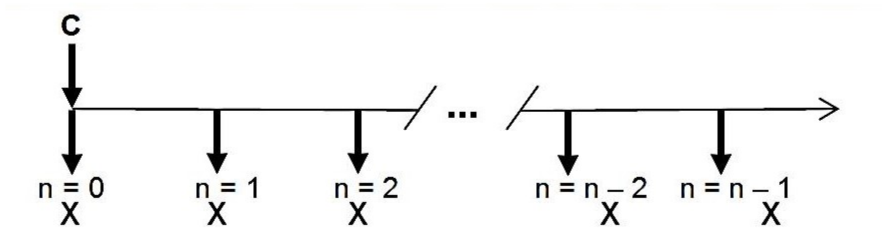

Figura 6.22: "n" parcelas "X" pagando uma quantia "C", no RJC

Precisamos descobrir uma fórmula que nos pemita encontrar tanto o valor atual da Renda, C, quanto suas Anuidades, X, em função da quantidade de parcelas n e da taxa de juros compostos i.

Para isso, vamos utilizar como data base (Data Focal), a data do vencimento da última Anuidade *n - 1*, lembrando que é indiferente a data escolhida, uma vez que no Regime de Juros Compostos o tempo é cindível devido à sua variação exponencial.

Montemos a equação de valores na data base adotada:

$$\begin{aligned}
SO &= SP \\
C.(1+i)^{(n-1)} &= X.(1+i)^{(n-1)} + X.(1+i)^{(n-2)} + ... + X.(1+i)^{1} + X.(1+i)^{0} \\
C.(1+i)^{(n-1)} &= X.[(1+i)^{(n-1)} + (1+i)^{(n-2)} + ... + (1+i)^{1} + (1+i)^{0}] \\
C.(1+i)^{(n-1)} &= X.[(1+i)^{0} + (1+i)^{1} + ... + (1+i)^{(n-2)} + (1+i)^{(n-1)}]
\end{aligned}$$

Note que a série:

$$(1+i)^{0} + (1+i)^{1} + (1+i)^{2} + ... + (1+i)^{(n-3)} + (1+i)^{(n-2)} + (1+i)^{(n-1)}$$

representa a soma de uma Progressão Geométrica de:
$a_1 = (1+i)^0 = 1;$
$a_n = (1+i)^{(n-1)};$
$q = (1+i);$
e possui n termos;
Logo sua soma poderá ser dada por:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \Longrightarrow S_n = \frac{1.[(1+i)^n - 1]}{(1+i) - 1} \Longrightarrow S_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Voltando à equação de valores teremos:

$$\begin{aligned} C.(1+i)^{(n-1)} &= X.\frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ C &= \frac{X.[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^{(n-1)}} \end{aligned}$$

Lembrando que $(1+i)^n = F$ (fator de capitalização), poderemos melhorar a fórmula, escrevendo-a assim:

$$C = \frac{X.[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^{(n-1)}} = \frac{X.[(1+i)^n - 1]}{i.(1+i)^n.(1+i)^{-1}} = \frac{X.[(1+i)^n - 1].(1+i)}{i.(1+i)^n}$$

$$\Longrightarrow C = \frac{(1+i).X.(F-1)}{F.i}$$

Podemos isolar a parcela da anuidade X na equação acima. Neste caso enontraremos:

$$X = \frac{C.F.i}{(1+i).(F-1)}$$

Voltemos ao nosso exemplo:

Uma determinada pessoa faz um financiamento retirando uma quantia inicial de $R\$$ $10\ 000,00$ para pagá-la em 10 parcelas mensais iguais, vencível a primeira no ato do financiamento e as demais em cada mês subsequente, sendo o financiamente feito à taxa de 3% ao mês no Regime de Compostos. Calcule o valor das parcelas.
RESOLUÇÃO:
$C = R\$\ 10\ 000,00$;
$n = 10$;
$i = 3\%$ a.m. ;
anuidade antecipada;
utilização direta da fórmula: $X = \dfrac{C.F.i}{(1+i).(F-1)}$, com $F = (1+i)^n$.
Assim

$$X = \frac{C.F.i}{(1+i).(F-1)} \Longrightarrow X = \frac{(10000).(1+0,03)^{10}.(0,03)}{(1+0,03).[(1+0,03)^{10}-1]}$$

$$X = R\$\ 1\ 138,16$$

O valor da anuidade antecipada encontrada no RJS foi de $X = R\$\ 1\ 128,94$, o que mostra uma diferença para mais em favor do RJC.

Vamos ver no quadro de amortização da dívida o comportamento dos juros a serem pagos:

Tabela 6.10: Amortização de uma anuidade antecipada no RJC

n	C	X	C - X	J
0	10 000,00	1 138,16	8 861,84	265,86
1	9 127,70	1 138,16	7 989,54	239,69
2	8 229,23	1 138,16	7 091,07	212,73
3	7 303,80	1 138,16	6 165,64	184,97
4	6 350,61	1 138,16	5 212,45	156,37
5	5 368,82	1 138,16	4 230,66	126,92
6	4 357,58	1 138,16	3 219,42	96,58
7	3 316,00	1 138,16	2 177,84	65,34
8	2 243,18	1 138,16	1 105,02	33,15
9	1 138,17	1 138,16	**0,01**	0,00

O não fechamento da planilha é devido ao arredondamento, como já explicado anteriormente.

Podemos notar que o Total de Juros pagos na renda antecipada pelo RJC foi de $R\$\ 1\ 381,61$, enquanto que o Total de Juros pagos na renda antecipada pelo RJS foi de $R\$\ 1\ 284,30$.

O porquê desta diferença já foi explicado quando da resolução do exemplo imediatamente anterior.

6.4.3 Rendas ou Anuidades Diferidas

As Rendas ou Anuidades Diferidas são aquelas que possuem um tempo de carência para a primeira anuidade; ou seja, entre a data zero a e data da primeira anuidade existe um intervalo de tempo maior que o período de vencimento entre cada anuidade.

Conforme já citado, as Rendas ou Anuidades Diferidas podem ser Imediatas ou Antecipadas. Doravante vamos trabalhar somente com as imediatas, lembrando que as antecipadas somente se diferem por um período de antecedência.

Através de um eixo do tempo podemos ter uma melhor visualização da situação:

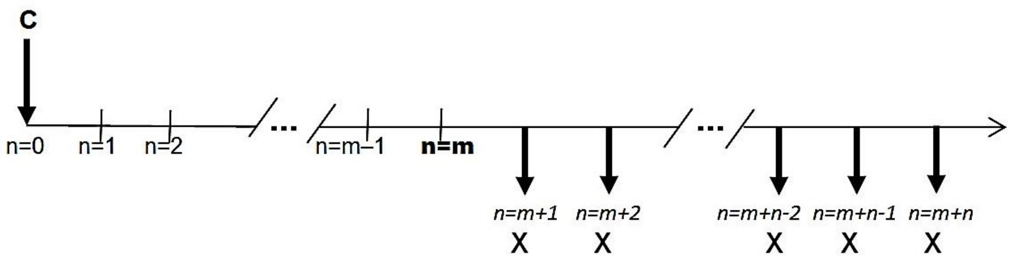

Figura 6.23: n anuidades X gerando uma renda C, no RJC, através de uma Renda Imediata Diferida de m períodos.

Para deduzirmos uma fórmula basta que levemos a renda inicial C para a data $n = m$. Neste caso, a fórmula seguinte passa a ser a da Renda Imediata.

Se A for o valor de C na data m, então podemos escrever, através da fórmula das anuidades imediatas que:
$A = \dfrac{X.(F-1)}{F.i}$, com $F = (1+i)^n$, pois de $m+1$ a $m+n$ existem n períodos

e, em cada um deles, uma anuidade X. Porém, $A = C.(1+i)^m$, logo:

$$C.(1+i)^m = \frac{X.(F-1)}{F.i} \Longrightarrow C = \frac{X.(F-1)}{F.i.(1+i)^m}.$$

Para obtermos o valor da anuidade X em função da renda inicial C basta tomarmos a fórmula:

$$X = \frac{C.F.i.(1+i)^m}{F-1}.$$

Insistimos no fato de que não há a necessidade de se decorar uma quantidade tão grande de fórmulas. Basta que saibamos manipular as informações e trabalhar com as quantidades monetárias ao longo de um eixo do tempo; lembrando sempre que no Regime de Juros Composto, a Data Base (Data Focal) escolhida para fazer a equivalência entre as quantidades financeiras não altera o resultado final, como ocorre no Regime de Juros Simples.

Retomaremos o exemplo que estamos seguindo desde o início desta unidade:

Uma pessoa faz um financiamento hoje, retirando uma quantia inicial de $R\$ \ 10 \ 000,00$ para pagá-la em 10 parcelas mensais iguais, vencível a primeira de hoje a 5 meses e as demais em cada mês subsequente, sendo o financiamento feito à taxa de 3% ao mês no Regime de Compostos. Calcule o valor das parcelas.

RESOLUÇÃO:

$C = 10000$;

$n = 10$;

$i = 3\%$a.m. JC;

Anuidade Antecipada Diferida de $m = 4$;

Aplicação direta da fórmula: $X = \dfrac{C.F.i.(1+i)^m}{F-1}$

$$X = \frac{(10000).(1+0,03)^{10}.(0,03).(1+0,03)^4}{(1+0,03)^{10}-1} \Longrightarrow X = R\$ \ 1 \ 319,44.$$

Montando o quadro de amortização da dívida proposta pelo exercícios poderemos fazer uma análise dos juros compostos cobrados bem como o comportamento da amortização ao longo do tempo.

Tabela 6.11: Amortização de uma anuidade antecipada diferida de 4 meses no RJS

n	C	X	C - X	J
0	10 000,00	0	10 000,00	300,00
1	10 300,00	0	10 300,00	309,00
2	10 609,00	0	10 609,00	318,27
3	10 927,27	0	10 927,27	327,82
4	11 255,09	0	11 255,09	337,65
5	11 592,74	1 319,44	10 273,30	308,20
6	10 581,50	1 319,44	9 262,06	277,86
7	9 539,92	1 319,44	8 220,48	246,61
8	8 467,09	1 319,44	7 147,65	214,43
9	7 362,08	1 319,44	6 042,64	181,27
10	6 223,91	1 319,44	4 904,47	147,13
11	5 051,60	1 319,44	3 732,16	111,96
12	3 844,12	1 319,44	2 524,68	75,74
13	2 600,42	1 319,44	1 280,98	38,43
14	1 319,41	1 319,44	**- 0,03**	0,00

Lembrando que a diferença no fechamento é arredondamento.

Podemos observar que a mesma situação acima descrita quando resolvida pelo Regime de Juros Simples gerou uma prestação de $R\$\ 1\ 279,20$ e um total de juros de $R\$\ 2\ 792,00$.

Este valores quando comparados com o resultado encontrado no Regime de Juros Compostos reforça nossa idéia de que o anatocismo realmente se faz presente.

7 - Sistemas de Amortização

7.1 Introdução

De acordo com Samanez(2002, p.207):

> A amortização é um processo financeiro pelo qual uma dívida ou obrigação é paga progressivamente por meio de parcelas de modo que ao término do prazo estipulado o débito seja liquidado. Essas parcelas ou prestações são a soma de duas partes: a amortização ou devolução do principal emprestado e os juros correspondentes aos saldos de empréstimos ainda não amortizados.

A prestação referente a uma dívida ou obrigação é a soma "Juros" mais "Amortização", mostrando assim que é possível separar o que se devolve como sendo a parte que amortiza o Capital e a parte referente aos Juros que estão sendo pagos, ambos em relação à quantia inicial tomada e o remanescente a ser pago; torna-se importante esta distinção, principalmente nos efeitos de tributação, onde as cobranças incidem entre ganho ou entre os próprios capitais.

Destacam-se no Brasil como principais sistemas de amortização: Sistema *Price* ou também chamado Sistema Francês, Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Americano (SAA) e o Sistema Misto (também chamado de Sistema de Amortização Crescente - Sacre). Existem outros tipos de amortização, inclusive sendo facultado às Instituições Financeiras criarem o seu próprio sistema em função do momento e circunstância; porém daremos ênfase aos três mais usados: *Price*, SAC e Sacre.

7.2 Tabela *Price* - Sistema Francês de Amortização

É o mais utilizado pelo comércio em geral e pelas Instiutições Financeiras. Seu nome se deve ao fato de ter sido introduzido na França em meados do século XIX, e o termo *Price* ao seu idealizador, o filósofo Inglês Richard Price (1723 - 1791).

Neste sistema as anuidades são constantes; os juros incidem sobre o saldo devedor, ou seja, a cada anuidade que é paga o saldo devedor diminui e, consequentemente a amortização da dívida aumenta à medida que o pagamento de juros diminui.

Normalmente é dada uma taxa Nominal, mas a taxa utilizada deverá ser aquela que seja proporcional ao intervalo de tempo das prestações.

O Sistema Francês, pela sua própria definição, segue as mesmas demonstrações das Rendas ou Anuidades no Regime de Juros Compostos.

Caso o financiamento seja "Imediato", utiliza-se as fórmulas para Rendas ou Anuidades imediatas:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{X.(F-1)}}{\mathbf{F.i}} \Longrightarrow \mathbf{X} = \frac{\mathbf{C.F.i}}{\mathbf{F-1}}, \text{ com } F = (1+i)^n$$

Onde:
C = Quantia inicial financiada;
X = Valor de cada parcela;
i = Taxa de juros do financiamento na mesma unidade de vencimento das parcelas.
n = Quantidade de parcelas.

Caso o empréstimo seja feito "Antecipado" ou "Diferido", basta que seja feito a transposição do valor inicial financiado para um período antes da data do primeiro pagamento.

Neste caso, existe o anatocismo uma vez que a dedução da fórmula é feita através da soma de uma Progreesão Geométrica, e pela definição de PG percebemos o crescimento exponencial dos juros, que remetendo-nos às definições iniciais, chegamos em Juro Composto.

7.3 Sistema de Amortização Constante - SAC

Nesse sistema, a quantia inicial financiada é dividida pelo número de prestações e, a cada prestação, são incorporados os juros da dívida, ou seja, a quantia inicial é paga em prestações constantes, porém os juros, que são cobrados em relação ao saldo devedor, são variáveis e decrescentes ao longo do período.

Neste caso, as prestações são variáveis e decrescentes, uma vez que os juros diminuem com cada amortização. Processo muito utilizado nos dias de hoje pelo Sistema Financeiro de Habitação.

Nosso problema: *Como demonstrar uma fórmula que permite este cálculo? Este sistema é um anotocismo?*

Vamos considerar uma quantia inicial C financiada em n parcelas à taxa de $i\%$ ao período (mesmo período de intervalo de tempo entre as prestações), sendo que a primeira parcela vencerá um período após a data do empréstimo.

Se a quantia inicial é C, então a quantidade da dívida Q amortizada por cada parcela será: $Q = \dfrac{C}{n}$ e sobre o remanescente desta quantia incidirá os juros relativos a ela em cada período.

Dessa forma, a quantidade da dívida após cada anuidade decresce em Progressão Aritmética de razão $r = Q$, pois como os juros são amortizados período a período, eles não são incorporados à dívida, dando a falsa impressão de que a amortização não é um anatocismo. Assim, a quantidade da dívida na data $n = 0$ será C;
a quantidade da dívida na data $n = 1$ será $C - Q$;

a quantidade da dívida na data $n = 2$ será $C - 2.Q$;
e assim sucessivamente, sendo que a quantidade da dívida na data k será

$$C_k = C - k.Q$$

Como $Q = \frac{C}{n}$, teremos então: $C_k = C - k.\frac{C}{n} \Longrightarrow C_k = C.(1 - \frac{k}{n})$.

Além da amortização da dívida deve-se pagar os juros referentes ao período, evidentemente, sobre o remanescente imediatamente anterior. Mas como o remanescente imediatamente anterior é termo de uma PA, concluimos que os juros, a partir da data $n = 1$, também formarão uma PA.
A quantidade de juros pagas na data $n = 0$ será $J_0 = 0$;
a quantidade de juros paga na data $n = 1$ será $J_1 = i.(C - 0.Q)$;
a quantidade de juros paga na data $n = 2$ será $J_2 = i.(C - 1.Q)$;
a quantidade de juros paga na data $n = 3$ será $J_3 = i.(C - 2.Q)$;
e assim sucessivamente, sendo que na data k serão pagos $J_k = i.C_{k-1}$.
Sabemos que $C_k = C.(1 - \frac{k}{n})$.
Logo, $C_{k-1} = C.(1 - \frac{k-1}{n})$.
e assim, os juros na data k será dado por: $J_k = i.C.(1 - \frac{k-1}{n})$.
Consequentemente, o valor X a ser desembolsado no perído k para amortizar a dívida inicial C será dado por:

$$X = Q + J_k \Longrightarrow X = \frac{C}{n} + i.C.(1 - \frac{k-1}{n}) \Longrightarrow X = \frac{C}{n}.[1 + i.n - i.(k-1)]$$

7.4 Comparação entre o Sistema Francês - Price - e o SAC

Geram-se especulações sobre qual é o melhor sistema de financiamento. Alguns autores preferem não se manifestarem, enquanto outros opinam. Na verdade, ambos podem ser considerados razoáveis, mas de qualquer forma, existe o anatocismo nos dois, como poderemos mostrar no exemplo a seguir:

Considere um financiamento de $R\$$ 10 000,00 em cinco parcelas, vencível a primeira um mês após o financiamento e as demais em cada mês subsequente, sendo que os juros foram negociados a $i = 3\%$ a.m.. Determine a parcela a se pagar pelo Sistema Francês e as parcelas a serem pagas pelo SAC. Monte um quadro comparativo entre os dois sistemas de amortização.

Tabela 7.12: Amortização de uma dívida C pelo Sistema Price e SAC

	Dívida antes de X		X		Dívida após X		J para a próxima data	
n	Price	SAC	Price	SAC	Price	SAC	Price	SAC
0	10 000,00	10 000,00	0	0	10 000,00	10 000,00	300,00	300,00
1	10 300,00	10 300,00	2 183,53	2 300,00	8 116,47	8 000,00	243,49	240,00
2	8 359,96	8 240,00	2 183,53	2 240,00	6 176,43	6 000	185,29	180,00
3	6 361,72	6 180,00	2 183,53	2 180,00	4 178,19	4 000,00	125,35	120,00
4	4 303,54	4 120,00	2 183,53	2 120,00	2 120,01	2 000	63,60	60,00
5	2 183,61	2 060,00	2 183,53	2 060,00	0,08	0,00	0,00	0,00

Podemos observar que a soma dos juros totais pagos pelo Sistema Francês é de $R\$$ 917,73, enquanto o total de juros pagos pelo SAC é de $R\$$ 900,00.

Já sabemos que o Sistema Francês é anatocismos pois na própria dedução da fórmula tivemos que utilizar ferramentos da Progressão Geométrica.

Para podermos provar que SAC é anatocismo, vamos colocar num mesmo eixo de tempo, na parte superior, as parcelas do financiamento obtido pelo SAC e, na parte inferior, as parcelas do financiamento obtido pelo Sistema Francês; levaremos todas essas parcelas para uma mesma Data-Base (Data Focal) através do regime de Juros Compostos e faremos a comparação entre os dois resultados financeiros encontrados. Para tanto utilizaremos como Data-Base a data do financiamento (data zero):

Levando as parcelas obtidas pelo Sistema Francês para a Data Zero, através da descaptalização pelo Regime de Juros Compostos, obteremos como valor

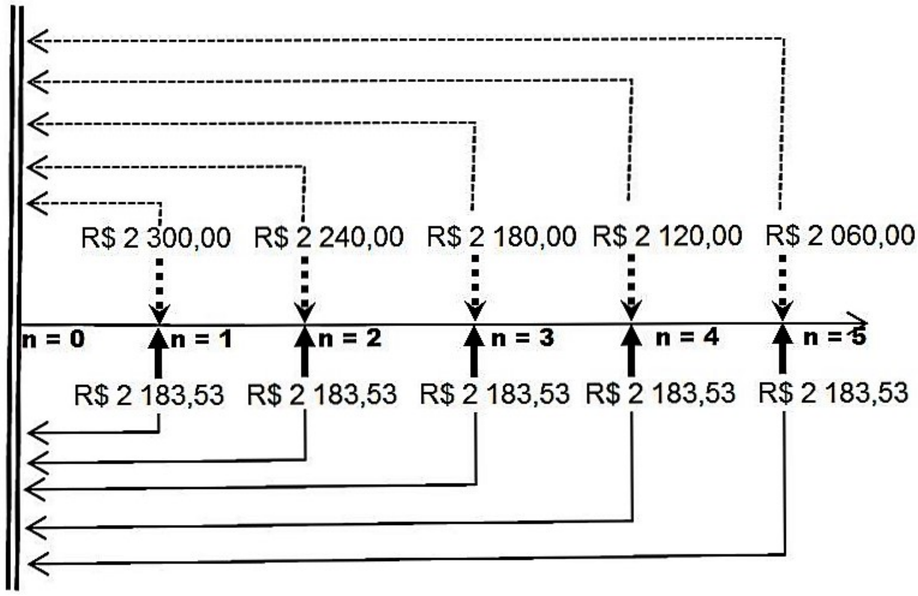

Figura 7.24: Comparação entre o Sistema Francês e o SAC.

atual F tal que:

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{2183,53}{1+0,03}+\frac{2183,53}{(1+0,03)^2}+\frac{2183,53}{(1+0,03)^3}+\frac{2183,53}{(1+0,03)^4}+\frac{2183,53}{(1+0,03)^5}\\
F &= 2183,53.\left(\frac{1}{1,03}+\frac{1}{1,03^2}+\frac{1}{1,03^3}+\frac{1}{1,03^4}+\frac{1}{1,03^5}\right)\\
F &= R\$\ 9\ 999,93,
\end{aligned}
$$

que é praticamente $R\$\ 10\ 000,00$. O erro se deu por arredondamentos.

Levando as parcelas obtidas pelo SAC para a Data Zero, através da descaptalização pelo Regime de Juros Compostos, obteremos como valor atual S tal que:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{2300}{1+0,03}+\frac{2240}{(1+0,03)^2}+\frac{2180}{(1+0,03)^3}+\frac{2120}{(1+0,03)^4}+\frac{2060}{(1+0,03)^5}\\
S &= 2233,01+2111,41+1995,01+1883,59+1776,97\\
S &= R\$\ 9\ 999,99
\end{aligned}
$$

que é praticamente $R\$ \ 10 \ 000,00$. O erro se deu por arredondamentos.

Note que ao fazer a descapitalização pelo **Regime de Juros Compostos** de ambos sistemas obtivemos o mesmo valor inicial. Logo, concluimos que, pela definição de Juros Compostos, ambos os sistemas adotados geram o **anatocismo**.

Se fizermos a descapitalização pelo Regime de Juros Simples obteremos, para o Sistema Francês um valor inicial de F' tal que:

$$\begin{aligned} F' &= \frac{2183,53}{1+0,03} + \frac{2183,53}{1+(0,03).(2)} + \frac{2183,53}{1+(0,03).(3)} + \frac{2183,53}{1+(0,03).(4)} + \\ &\quad \frac{2183,53}{1+(0,03).(5)} \\ F' &= 2183,53.\left(\frac{1}{1,03} + \frac{1}{1,06} + \frac{1}{1,09} + \frac{1}{1,12} + \frac{1}{1,15}\right) \\ F' &= R\$ \ 10 \ 031,41 \end{aligned}$$

que é diferente da quantia inicial de $R\$ \ 10 \ 000,00$.

Se fizermos a descapitalização pelo Regime de Juros Simples para as prestações obtidas pelo SAC teremos um valor inicial S' tal que:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{2300}{1+0,03} + \frac{2240}{1+(0,03).(2)} + \frac{2180}{1+(0,03).(3)} + \frac{2120}{1+(0,03).(4)} + \\ &\quad \frac{2060}{1+(0,03).(5)} \\ S' &= 2233,01 + 2113,21 + 2000,00 + 1892,86 + 1791,30 \\ S' &= R\$ \ 10 \ 030,38 \end{aligned}$$

que é diferente de $R\$ \ 10 \ 000,00$.

Quando fazemos a descapitalização de ambos pelo Regime de Juros Simples, obtemos valores muito próximos para ambos, concluindo que os comportamentos são iguais.

Generalizando, se tivermos um valor inicial a ser financiado C, à uma taxa i e em n parcelas, pelo sistema SAC vimos que as parcelas são variáveis e podem ser calculadas aravés da fórmula:

$$X = \frac{C}{n}.[1 + i.n - i.(k - 1)], \text{ em que } k \text{ é o número da parcela.}$$

Podemos pressupor que se, ao descapitalizarmos as parcelas pelo Regime de Juros Compostos, conseguirmos voltar ao seu valor inicial, então trata-se de uma capitalização composta e, consequetemente, há o anatocismo.

Faremos alguns casos particulares e depois generalizaremos para n parcelas.

Para uma parcela, $n = 1 \Longrightarrow k = 1$ o valor da parcela será:

$$X_1 = \frac{C}{1}.(1 + i.1 - i.(1 - 1)) \Longrightarrow X_1 = C.(1 + i)$$

Se descapitalizarmos esta única parcela através do Regime de Juros Compostos para a data do financiamento (data zero) obteremos o valor atual A dado por:

$$A = \frac{X_1}{(1+i)^1} = \frac{C(1+i)}{(1+i)^1} \Longrightarrow A = C$$

Portanto, voltamos ao valor inicial do financiamento.

Para um financiamento em duas parcelas, $n = 2$ e $k \, \epsilon \{1, 2\}$ as parcelas serão:

$$X_1 = \frac{C}{2}.(1 + 2.i), \;\; X_2 = \frac{C}{2}(1 + i)$$

Descapitalizando as duas parcelas pelo Regime de Juros Compostos para a data do financiamento (data zero):

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\frac{C}{2}.(1+2i)}{(1+i)^1} + \frac{\frac{C}{2}.(1+i)}{(1+i)^2} \\
A &= \frac{C}{2}.\frac{(1+2.i).(1+i)+(1+i)}{(1+i)^2} \\
A &= \frac{C}{2}.\frac{(1+i).(1+2i+1)}{(1+i)^2} \\
A &= \frac{C}{2}.\frac{2.(1+i)^2}{(1+i)^2} \\
A &= C
\end{aligned}$$

Podemos perceber que, ao fazer a descapitalização pelo Regime de Juros Compostos das duas parcelas do financiamento SAC voltamos à quantia inicial.

Para um financiamento em três parcelas, $n = 3$ e $k \in \{1, 2, 3\}$ as parcelas serão:

$$X_1 = \frac{C}{3}.(1+3.i), \;\; X_2 = \frac{C}{2}(1+2i), \;\; X_3 = \frac{C}{3}.(1+i)$$

Descapitalizando as três parcelas pelo Regime de Juros Compostos para a data do financiamento (data zero):

$$\begin{aligned}
A &= \frac{C}{3}.\frac{1+3i}{(1+i)^1} + \frac{\frac{C}{3}.(1+2i)}{(1+i)^2} + \frac{\frac{C}{3}.(1+i)}{(1+i)^3} \\
A &= \frac{C}{3}.\frac{(1+3.i).(1+i)^2+(1+2.i).(1+i)+(1+i)}{(1+i)^3} \\
A &= \frac{C}{3}.\frac{(1+i).[(1+3.i).(1+i)+1+2.i+1]}{(1+i)^3} \\
A &= \frac{C}{3}.\frac{(1+i).[(1+3.i)(1+i)+2.(1+i))}{(1+i)^3} \\
A &= = \frac{C}{3}.\frac{(1+i)^2.(1+3.i+2)}{(1+i)^3} \\
A &= \frac{C}{3}.\frac{(1+i)^2.3(1+i)}{(1+i)^3} \\
A &= C
\end{aligned}$$

Podemos perceber que, ao fazer a descapitalização pelo Regime de Juros Compostos das três parcelas obtidas pelo método do financiamento SAC voltamos à quantia inicial C.

Generalizando para n parcelas teremos:

$$X_1 = \frac{C}{n}.(1+n.i);\ \ X_2 = \frac{C}{n}.[1+(n-1).i];\ \ X_3 = \frac{C}{n}.[1+(n-2).i];\ \ ...$$
$$X_{n-2} = \frac{C}{n}.(1+3.i);\ \ X_{n-1} = \frac{C}{n}.(1+2i);\ \ X_n = \frac{C}{n}(1+i)$$

Fazendo a descapitalização das n parcelas obtidas através do sistema de amortização SAC para a data do financiamento (data zero), obteremos:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{X_1}{(1+i)^1} + \frac{X_2}{(1+i)^2} + \frac{X_3}{(1+i)^3} + ... + \frac{X_{n-2}}{(1+i)^{n-2}} + \frac{X_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{X_n}{(1+i)^n} \\
A &= \frac{\frac{C}{n}.(1+n.i)}{(1+i)^1} + \frac{\frac{C}{n}.[1+(n-1).i]}{(1+i)^2} + ... + \frac{\frac{C}{n}.(1+2.i)}{(1+i)^{n-1}} + \frac{\frac{C}{n}.(1+i)}{(1+i)^n} \\
A &= \frac{C}{n}.\left[\frac{1+n.i}{(1+i)^1} + \frac{1+(n-1).i}{(1+i)^2} + ... + \frac{1+2i}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1+i}{(1+i)^n}\right]
\end{aligned}$$

Se efetuarmos a adição dentro dos colchetes de maneira análoga às primeiras chegaremos à expressão:

$$A = \frac{C}{n}.\frac{n.(1+i)^n}{(1+i)^n} \Longrightarrow A = C$$

Mostrando claramente que as parcelas calculadas pelo sistema SAC quando descapitalizadas através do Regime de Juros Compostos para a data do financiamento (data zero) produz uma quantia exatamente igual à quantia inicial, e portanto, o Sistema de Amortização SAC é anatocismo.

7.5 Sistema de Amortização Crescente - Sacre

Também adotado pelo Sistema Financeiro de Habitação, é uma junção, um engendramento, entre o Sistema Francês (Price) e o Sistema de Amortização Constante (SAC). Neste caso a prestação do financiamento é calculada fazendo-se a média aritmética simples entre a prestação obtida no Sistema francês (constante em todas as parcelas) e a prestação obtida pelo Sistema de Amortização Constante - SAC (decrescente a partir da primeira).

Considerando:
C = quantia inicial financiada;
n = número de parcelas do financiamento;
X = valor de cada uma das parcelas do finciamento;
i = taxa de juros do finciamento;
k = o número da prestação a ser paga, sendo que a primeira após o financiamento será $k = 1$, a segunda, $k = 2$, e assim sucessivamente;
teremos:
1-) Pelo Sistema Francês:$X_F = \dfrac{C.i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$
2-) Pelo SAC: $X_S = \dfrac{C}{n}.[1 + i.n - (k-1)]$
3-) Pelo Sistema de Amortização Crescente - Sacre: $X = \dfrac{X_F + X_S}{2}$

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{X_F + X_S}{2} \\
X &= \frac{1}{2}.\left[\frac{C.i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \frac{C}{n}.(1 + i.n - (k-1))\right] \\
X &= \frac{C}{2}.\left[\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \frac{1 - i.(k-1)}{n} + i\right]
\end{aligned}
$$

Vamos refazer o último exemplo pelo Sacre.
Teremos então:
$C = 10000$;
$i = 3\%$ a. m.;
$n = 5$;
$k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
$X = \dfrac{C}{2}.\left[\dfrac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \dfrac{1 - i.(k-1)}{n} + i\right]$;
Substituindo os valores na fórmula encontraremos:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{10000}{2}.\left[\frac{0,03.(1+0,03)^5}{(1+0,03)^5-1}+\frac{1-0,03.(k-1)}{5}+0,03\right]\\
X &= 5000.\left[\frac{0,034778222}{0,159274074}+\frac{1-0,03.k+0,03}{5}+0,03\right]\\
X &= 2271,77-30.k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k=1 &\longrightarrow X_1 = 2241,77\\
k=2 &\longrightarrow X_2 = 2211,77\\
k=3 &\longrightarrow X_3 = 2181,77\\
k=4 &\longrightarrow X_4 = 2151,77\\
k=5 &\longrightarrow X_5 = 2121,77.
\end{aligned}
$$

Se observarmos a tabela do exercício anterior perceberemos que as médias aritméticas das duas parcelas referentes a cada sistema na mesma data nos dá o resultado esperado. Colocando as parcelas numa tabela poderemos observar mais claramente isto:

Tabela 7.13: Valor das parcelas para uma dívida de R$ 10 000,00 em cinco vezes, à taxa de 3% a.m., nos sistemas Francês, SAC e Sacre

n	PRICE	SAC	Sacre
0	0	0	0
1	2 183,53	2 300,00	2 241,77
2	2 183,53	2 240,00	2 211,77
3	2 183,53	2 180,00	2 181,77
4	2 183,53	2 120,00	2 151,77
5	2 183,53	2 060,00	2 121,77

Se levarmos estas parcelas obtidas pelo Sacre para a Data Zero, fazendo uma descapitalização pelo Regime de Juros Compostos, obteremos o valor do financiamento V_S', dado por:

$$\begin{aligned} V'_S &= \frac{2241,77}{1,03} + \frac{2211,77}{1,03^2} + \frac{2181,77}{1,03^3} + \frac{2151,77,77}{1,03^4} + \frac{2121,77}{1,03^5} \\ V'_S &= 2176,48 + 2084,81 + 1996,63 + 1911,82 + 1830,26 \\ V'_S &= R\$\ 10\ \ 000,00 \end{aligned}$$

Isso mostra claramente que o Sistema de Amortização Crescente (Sacre) também é um **anatocismo**, uma vez que sua descapitalização pelo Regime de Juros Compostos gera o valor inicial financiado.

Deixamos aqui uma pequena observação no sentido de que, ao somarmos as 5 parcelas em cada um dos sistemas de amortização obteremos valores diferentes para o total; porém é importante lembrar que a prória Matemática Financeira nos mostra que não podemos somar quantidades monetárias em datas diferentes. Evidentemente o Sistema Francês mostrará um total maior que todos, seguido pelo Sistema Sacre e por último o Sistema SAC. Mas também salta aos olhos que as parcelas do Sistema Price é constante, enquanto que as demais decrescem.

Fica claro a presença do Anatocismo e da falsa impressão de que uma sobrepõe vantagens às outras. Isso não é verdade. Independente do Sistema a ser adotado, estaremos pagando Juros sobre os próprios Juros, o que seria constitucionalmente incorreto.

8 - Considerações Finais

Percebemos, no decorrer da pesquisa, nas entrevistas com a gerência das Instituições Financeiras que visitamos (Banco do Brasil, Caixa Econômica Federal, Bradesco e Banco Itaú), que cada uma legisla em sua própria causa. Não há fundamentação legal na Constituição Brasileira e muito menos no Código Civil brasileiro que universaliza os procedimentos. Quando da solicitação da legislação de cada Instituição, por todas, nos foi negado.

Sabemos que a linguagem matemática é universal, apesar de que a cada dia, existem novas descobertas e mais estudos; Porém, a Matemática Financeira tem sistemas de capitalização (contínua e descontínua) e regimes de capitalização (simples e composta), que faculta às Instituições Financeiras a sua utilização.

Quando o beneficiado é a Instituição, há a utilização do Regime de Juros Compostos, provocando os anatocismos; enquanto que, quando o beneficiado é o cliente, há a utilização do Regime de Juros Simples.

Faz-se urgente uma legislação que universalize essas situações e, mais ainda, que possa prevalecer a igualdade de direitos e ganhos.

Nos contratos entre Pessoa Física e Instituição Financeira, na sua grande maioria, a Instituição Financeira o faz através da Capitalização Descontínua e do Regime de Juros Compostos. Porém, caso a Pessoa Física tenha o desejo de saldar a dívida antes da data de seu vencimento, se o desconto for feito segundo o Regime de Juros Compostos, a taxa será menor que a do empréstimo e, caso a taxa seja a mesma do empréstimo, adota-se o Regime de Juros Simples. Uma grande incoerência financeira.

As mudanças na educação e na matemática ocorrem a todo o momento e a relação ensino/aprendizagem deve se adequar às mudanças.

Os professores devem ser vetores para a cidadania e, a todo instante, estarem conscientizando os discentes quanto aos ganhos e perdas financeiros sugerindo problemas geradores que instigam os próprios alunos a perceberem esta situação. É necessário que a Matemática Financeira se faça presente nas séries finais do Ensino Fundamental (8º e 9º anos) e nas três séries do Ensino Médio.

No Apêndice desta fazemos a sugestão para a introdução à Matemática Financeira no Ensino Básico concomitante com outros conteúdos que são propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacional, dando oportunidade ao discente de contextualizar o que está sendo aprendido e perceber a aplicabilidade no seu cotidiano.

Aprendemos muito com este trabalho e, mais ainda, conseguimos entender a cindibilidade do tempo no Regime de Juros Simples, situação esta que sempre foi uma dúvida para nós e também para muitos professores da área.

Torna-se cada vez mais importante o uso racional e consciente do dinheiro no dia a dia, tanto pessoal quanto familiar.

Pode-se dizer, então, que a educação financeira é fundamental em toda sociedade isto porque ela faz parte da vida econômica de toda população quer jovem ,quer adulta.

Um dos objetivos principais da educação financeira é a orientação de como as pessoas podem conviver melhor com o dinheiro.

Sendo assim, as pessoas passam a evitar de se endividar, como também aprendem a economizar, pensando nos dias vindouros.

Portanto, é necessário que se faça um planejamento financeiro, envolvendo anotações de despesas diárias, mensais e anuais; redução de gastos supérfluos; reserva de uma determinada quantia com a finalidade de se preparar para o futuro e/ou para uma eventualidade.

Sendo assim, torna-se necessário a inclusão da educação financeira nas escolas de educação infantil, de ensino fundamental e de ensino médio, para que, desde cedo, os alunos possam ter uma formação consciente e responsável do uso do dinheiro.

Terminamos dá mesma forma que iniciamos: *"A Matemática não mente. Mente quem faz mal uso dela." - Albert Einstein.*

Referências

BOHRN-BAWERK, Eugen Von. **Teoria Positiva do Capital**. Tradução de Luiz João Baraúna. São Paulo: Nova Cultural, 1986.

BRASIL. **Constituição Federal de 1988**. Emenda Constitucional nº 40, de 29 de maio de 2003. Altera o inciso V do art. 163 e o art. 192 da Constituição Federal, e o caput do art. 52 do Ato das Disposições Constitucionais Transitórias. In: CONSTITUIÇÃO DA REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL. 17.ed. São Paulo: Atlas, 2009

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

FARIA, Rogério Gomes de. **Matemática Comercial e Financeira**. 5ª edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2000.

FARO, Clóvis de. **Matemática Financeira**. 9ª edição. São Paulo: Atlas, 1982.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MORGADO, Augusto César e outro. **Matemática Disicreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SAMANEZ, Carlos Patrício. **Matemática Financeira**: Aplicações à Análise de Investimentos 3ª edição. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

SILVA, César Roberto Leite da. **Economia e Mercados**: Introdução à Economia. 10ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 1992.

TUFANO, Douglas. Dicio: **Dicionário Online de Português**. Disponível em <http://www.dicio.com.br/escambo/> Acesso: 15 nov 2015.

VERSIGNASSI, Alexandre. **Crash** - Porque é que as Economias vão ao fundo. Editora Livros d Hoje, Lisboa, 2012.

WEANTHERFORD, **Jack - A História do Dinheiro**. Editora Campus, São Paulo, 2005.

APÊNDICE - O RJS, o RJC e o Ensino Médio

.1 Introdução

Acredita-se que a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos e atitudes cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria disciplina, procurando formar nos estudantes capacidades como as de resolver problemas genuínos, gerar hábitos de investigação, adquirindo confiança e desprendimento para analisar e enfrentar novas situações, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. Acerca desse fato, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000, p. 41) informam:

> Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento.

Contudo, é evidente a grande dificuldade de nossos alunos das séries finais do Ensino Fundamental e as três do Ensino Médio, em se trabalhar com porcentagens e juros.

Com efeito, o alvo da educação brasileira é preparar o jovem para o exercício da cidadania. Porém, é impossível se falar em cidadania se o jovem não consegue manipular o básico do sistema financeiro em que vivemos; e, por isso, é de extrema necessidade que todos saibam manipular porcentagem e entender o mínimo sobre Juros Simples e Juros Compostos.

Os professores de todas as áreas do Ensino Básico devem, diuturnamente, colocar o aluno frente às porcentagens e mostrar como é fácil sua interpretação e discernimento.

Cabe aos professores de Matemática servirem de vetores nessa transformação, ministrando cursos de aprofundamento e extensão fornecendo subsídios aos demais professores, a fim de que os mesmos possam executar com firmeza e consistência o trabalho com porcentagem.

Todos devem saber calcular porcentagens diretas, tais como, para encontrar:
* 10%, basta dividir o todo por 10, ou seja, tira-se um zero ou desloca-se a vírgula uma casa para esquerda;
* 1%, basta dividir o todo por 100, ou seja, tira-se dois zeros ou desloca-se a vírgula duas casas para esquerda;
* 5% é a metade de 10%;
* 20% é a quinta parte do todo, ou o dobro de 10%;
* 25% é a quarta parte do todo ou 10% duas vezes e mais 5%;
* 50% é a metade do todo.
e assim por diante.

Contextualizar a porcentagem no dia a dia de cada um de forma que ela e suas operações básicas possam ser incorporadas ao linguajar constante dos estudantes.

É de suma importância que os estudantes possam perceber que dar um aumento de $a\%$ é o mesmo que multiplicar o todo por $(1+\dfrac{a}{100})$ e que dar um desconto de $d\%$ é o mesmo que multiplicar o todo por $(1-\dfrac{d}{100})$.

Neste contexto, deixar bem claro que um aumento de $a\%$ gera um valor que se, sobre ele, efetuar um desconto de $a\%$, não o trás ao valor inicial, e mais ainda, justificar o porquê desse fato.

Partindo da premissa de que os alunos possuam domínio suficiente sobre o básico de porcentagem, apresentaremos a seguir uma sugestão para a introdução, no Ensino Médio, dos Regimes de Juros considerados fundamentais dentro da economia, sem que haja o truncamento da matéria e/ou conteúdo e aproveitando as definições que são parte integrante dos Parâmetros Curriculares Nacional.

.2 A função Afim, a Progressão Aritmética e o Juro Simples

Para a introdução do estudo da Função Afim, das Progressões Aritméticas e do Regime de Juros Simples, sugerimos Situações Problema Geradoras (SPG) em que, a partir das mesmas, os alunos são instigados a desenvolverem o raciocínio para resolução do problema e, posteriormente, criarem uma modelagem para o mesmo.

Consideramos a heterogeneidade das abordagens um *looping* a fim de que possam ser visualizadas aplicações em situações cotidianas totalmente adversas, porém, matematicamente semelhantes, a fim de que o aluno possa perceber que, com uma mesma ferramenta, ele tem a capacidade de resolver situações distintas.

Algumas sugestões tradicionais são aquelas envolvendo:
* Corridas de táxis com bandeirada e preço fixo por quilômetro rodado;
* Cálculo de perímetro ou área de triângulos e quadriláteros notáveis;
* Transformação de temperaturas Celcius e Fahrenheit;
* Determinação do Custo Total de produção para determinado custo fixo e custo unitário;
* Determinação da Receita Total de produção para determinado preço de venda;
* Determinação do Lucro/Prejuízo em função do Custo e da Receita de produção;
* Projeção de preços para estacionamento em função de fixado o preço por hora;
* Estimativa de número de espectadores em função da disposição homogênea das cadeiras da platéia;
* Previsão de acúmulo de dinheiro em função de depósitos constantes em um cofre;
* Previsão de reserva de Capital em função de juros fixos sobre o principal;
entre outras mais.

Após introdução das SPG, apresentar as definições da Função Afim, da Progressão Aritemética e do Regime de Juros Simples, deixando bem claro que tanto a Progressão Aritmética quanto o Regime de Juros Simples são de Domínios Discretos, enquanto que a Função Afim pode assumir Domínio Real. Não esquecer de mostrar a extensão da Função Afim, nas situações em que ela é Constante e Linear.

É importante que neste momento os alunos já tenham o conhecimento histórico da origem do dinheiro e, principalmente, os conceitos Econômicos dos

Fatores Básicos da Produção, que podem ser introduzidos pelos professores das áreas de História, Sociologia e Filosofia. Caso isso não tenha ocorrido, cabe ao Professor de Matemática fazer este histórico, dando muita ênfase na crença da verdade que mostra um pedaço de papel em função do valor escrito nele. Ao final, o aluno deve ter pleno domínio da história sobre a origem do dinheiro, das duas definições de *Capital* e a definição de *Juros* como remuneração do Capital (ou preço do dinheiro).

Em seguida, mostrar que existem dois Regimes de Juros: Simples e Composto e mostrar que no Regime de Juros Simples, a incidência de Juros é somente sobre a quantia inicial aplicada e é uma Função Afim de Domínio em N e, consequentemente, uma Progressão Aritmética. Já, no Regime de Juros Compostos, a incidência dos Juros é feita, além de sobre a quantia inicial, também sobre os juros que são incorporados a ela no período anterior, fazendo os juros incidirem também sobre os juros anteriores.

Mostraremos a seguir um roteiro como sugestão a ser seguida.

SPG 1 - Numa cidade os taxis cobram R$ 5,00 de bandeirada e mais R$ 3,00 o quilômetro rodado. Complete a tabela abaixo e levando em consideração o raciocínio feito em seu preenchimento, responda qual será a expressão que fornece o preço (P) em reais a se pagar por uma corrida de (D) quilômetros.

distância percorrida (Km)	Preço pago pela corrida (R$)
0	$(3).(0) + 5 = 5$
1	$(3).(1) + 5 = 8$
2	$(3).(2) + 5 = 11$
3	$(3).(3) + 5 = 14$
4	$(3).(4) + 5 = 17$
5	$(3).(5) + 5 = 20$
6	$(3).(6) + 5 = 23$

$$P = 3.D + 5$$

Observe a sequência numérica formada pelos resultados a partir da distância D = 0 até a distância D = 8. É possível, observando somente a sequência, fazer uma previsão dos próximos números da mesma? Por quê?

$$(5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29...)$$

Sim; É possível. A Sequência é crescente de 3 em 3 unidades.

DEFINIÇÃO 1: Segundo LIMA (2012, p.90) ,

> " Uma função $f : R \longrightarrow R$ é chamada de AFIM quando existem constantes a e b reais tais que $f(x) = a.x + b$, para todo $x \in R$.
> A *função identidade* $f : R \longrightarrow R$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in R$, é afim. Também são afins as *translações* $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = x + b$. São ainda casos particulares de funções afins as funções *lineares*, $f(x) = ax$ e as funções *constantes* $f(x) = b$."

DEFINIÇÃO 2: Para MORGADO, (1999, p.1),

> " Uma Progressão Aritmética é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ...a_n...)$ de números a_n, na qual é constante a diferença entre cada termo a_{n+1} e seu antecedente a_n. Essa diferença constante é chamada de razão e será representada por r. Assim, uma progressão aritmética de razão r é uma sequência (a_n) na qual $a_{n+1} - a_n = r$, para todo n Natural "

Percebemos então que a função $P = 3.D + 5$ é uma Função Afim, com parâmetros $a = 3$ e $b = 5$ e seu Domínio são para todos os valores de $D \in N$.

Notamos também que a Imagem da Função Afim $P = 3.D + 5$, para cada Domínio Natural consecutivo, forma uma Progressão Aritmética de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão $r = 3$.

SPG 2 - Uma pessoa empresta R$ 1 000,00 a um colega e cobra do mesmo uma quantia fixa equivalente a 3% ao mês sobre o valor emprestado inicialmente. Preencha a tabela abaixo de modo a torná-la verdadeira:

tempo (mês)	Juros devidos (R$)	Empréstimo mais juros
0	(0).(0,03).(1000) = 0	1000 + 0 = 1000
1	(1).(0,03).(1000) = 30	1000 + 30 = 1030
2	(2).(0,03).(1000) = 60	1000 + 60 = 1060
3	(3).(0,03).(1000) = 90	1000 + 90 = 1090
4	(4).(0,03).(1000) = 120	1000 + 120 = 1120
5	(5).(0,03).(1000) = 150	1000 + 150 = 1150
6	(6).(0,03).(1000) = 180	1000 + 180 = 1180

Determine a fórmula matemática que permite encontrar os Juros (J) a serem pagos em função da quantidade de meses (n) que o amigo fica de posse da quantia inicial.

$$J = n.(0,03).(1000) \Longrightarrow J = 30.n$$

Determine a fórmula matemática que permite encontrar o montante da dívida (M) decorridos (n) meses de sua aquisição.

$$M = J + 1000 \Longrightarrow M = 30.n + 1000$$

Escreva as duas sequências numéricas obtidas na tabela anterior: a formada pelos juros mensais e a advinda do Montante mensal da dívida (quantia inicial somada aos juros devidos).

JUROS: $(0, 30, 60, 90, 120, 150, 180...)$
MONTANTE: $(1000, 1030, 1060, 1090, 1120, 1150, 1180, ...)$

Observamos que as duas fórmulas matemáticas encontradas podem ser consideradas Função Afim, de acordo com a Definição 1, proposta. No caso dos juros formados encontramos a função $J = 30.n$, onde os parâmetros são $a = 30$ e $b = 0$ e a função $M = 30.n + 1000$ tem como parâmetros $a = 30$ e $b = 1000$.

Notamos também que as duas sequências obtidas das imagens de Domínios consecutivos de ambas funções formam Progressão Aritmética. A referente aos juros é uma PA de primeiro termo zero e razão 30. A referente ao Montante da dívida é uma PA de primeiro termo 1000 e razão 30.

DEFINIÇÃO 3: Os Juros Simples (J) devidos a uma determinada quantia inicial (C) na taxa de $i\%$ ao período n é uma função linear do tipo: $J = C.i.n$, com i na forma unitária e n na mesma unidade de i.

DEFINIÇÃO 4: O Montante (M) de uma quantia inicial (C) é dado pela soma da quantia inicial (C) com os Juros (J) devidos até o período considerado (n), e é uma Função Afim do tipo: $M = C.i.n + C$, com i na forma unitária e n na mesma unidade de i.

SPG 3 - Uma pessoa faz um empréstimo no Regime de Juros Simples (são devidos somente à quantia inicial) no valor inicial de R$ 2 000,00 e à taxa mensal de 2%, e se compromete a pagá-lo após 5 meses da data do empréstimo. Monte um quadro demonstrativo da evolução mês a mês do empréstimo, apresentando os juros e o montante. Escreva a PA referente aos Juros da dívida e a PA referente ao Montante da dívida. Escreva a Função Linear que permite encontrar os juros formados (J) em um determinado tempo (n). Escreva a Função Afim que permite encontrar o Montante da dívida (M) em um determinado tempo (n).

tempo (mês)	Juros devidos (R$)	Emprestimo mais juros
0	(0).(0,02).(2000) = 0	2000 + 0 = 2000
1	(1).(0,02).(2000) = 40	2000 + 40 = 2040
2	(2).(0,02).(2000) = 80	2000 + 80 = 1080
3	(3).(0,02).(2000) = 120	2000 + 120 = 2120
4	(4).(0,02).(2000) = 160	2000 + 160 = 2160
5	(5).(0,02).(2000) = 200	2000 + 200 = 2200

PA dos Juros: $(0, 40, 80, 120, 160, 200)$
PA dos Montantes: $(2000, 2040, 2080, 2120, 2160, 2200)$
A Função Linear que permite calcular os Juros (J) no período (n) será:

$$J = (2000).(0, 02).n \Longrightarrow J = 40.n$$

A Função Afim que permite calcular o Montante da dívida (M) no período (n) será:

$$M = J + C \Longrightarrow M = 40.n + 2000$$

Como contextualizar três conteúdos em um mesmo problema?

SPG 4 - Uma empresa tem um custo fixo mensal de $R\$ \ 5\ 000,00$ e mais $R\$ \ 50,00$ por unidades produzidas. Qual será o custo mensal para se produzir: 0 unidades, 1 unidade; 2 unidades; 3 unidades; 4 unidades; 5 unidades? Qual

é a Função Afim que relaciona o Custo Total (C) da empresa em função da quantidade de unidades produzidas (x) ?
RESOLUÇÃO:
$x = 0 \Longrightarrow C = (0).(50) + 5000 \Longrightarrow C = R\$\ 5\ 000,00$
$x = 1 \Longrightarrow C = (1).(50) + 5000 \Longrightarrow C = R\$\ 5\ 050,00$
$x = 2 \Longrightarrow C = (2).(50) + 5000 \Longrightarrow C = R\$\ 5\ 100,00$
$x = 3 \Longrightarrow C = (3).(50) + 5000 \Longrightarrow C = R\$\ 5\ 150,00$
$x = 4 \Longrightarrow C = (4).(50) + 5000 \Longrightarrow C = R\$\ 5\ 200,00$
$x = 5 \Longrightarrow C = (5).(50) + 5000 \Longrightarrow C = R\$\ 5\ 250,00$
para x unidades produzidas o Custo Total C será $\Longrightarrow C = 50.x + 5000$

SPG 5 - Escreva uma PA de 6 termos onde o primeiro termo é 5 000 e a razão é 50. Encontre a expressão geral que permite encontrar qualquer termo dessa PA (T) em função da posição (n) ocupada por ele na PA.
RESOLUÇÃO:
Pela Definição 2, se $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ é uma PA, então podemos afirmar que $a_{n+1} = a_n + r$.
Logo, se $a_1 = 5000$ e $r = 50$, teremos:
$a_2 = 5000 + 50 \Longrightarrow a_2 = 5050$
$a_3 = 5050 + 50 = 5000 + 50 + 50 \Longrightarrow a_3 = 5000 + (2).(50) \Longrightarrow a_3 = 5100$
$a_4 = 5100 + 50 = 5000 + 50 + 50 + 50 \Longrightarrow a_4 = 5000 + (3).(50) \Longrightarrow a_4 = 5150$
$a_5 = 5150+50 = 5000+50+50+50+50 \Longrightarrow a_5 = 5000+(4).(50) \Longrightarrow a_5 = 5200$
$a_6 = 5150 + 50 = 5000 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 \Longrightarrow a_6 = 5000 + (5).(50) \Longrightarrow$
$a_6 = 5250$
Para encontrar o termo T da posição n devemos ter:
$T = 5000 + (n - 1).50 \Longrightarrow T = 5000 + 50.n - 50 \Longrightarrow T = 50.n + 4950$

OBSERVAÇÃO: É importante deixar claro a diferença entre as fórmulas da função afim encontrada nas duas SPG. Na primeira, a fórmula obtida foi:

$$C = 50.x + 5000,$$

enquanto que na segunda a fórmula obtida foi:

$$T = 50.n + 4950.$$

Neste caso há de se frisar que, na primeira situação, quando nos referimos ao tempo $x = 0$, estamos fazendo referência ao primeiro termo, enquanto que, para a Progressão Aritmética, este primeiro termo é obtido quando faz-se $n = 1$; simplesmente uma questão de nomenclatura. No caso das sequências numéricas evita-se tratar o primeiro termo como sendo a_0, por uma questão de estrutura.

SPG 6 - Uma pessoa fez um empréstimo de R\$ 5 000,00 e se compromete a pagá-lo à taxa mensal de 1% ao mês. Qual será o montante a se pagar se

a posse da dívida for: de um mês? de dois meses? de três meses? de quatro meses? de cinco meses? Qual é a função Afim que relaciona o Montante da dívida (M) em função do número de meses (n) que ficar de posse dela?
RESOLUÇÃO:
Para $n = 0$, estaremos na data do empréstimo. Logo o montante M da dívida será o valor inicial da mesma, ou seja:
$n = 0 \Longrightarrow M = 5000$;
$n = 1 \Longrightarrow M = 5000 + (5000).(0,01).(1) \Longrightarrow M = 5000 + 50 \Longrightarrow M = 5050.$
$n = 2 \Longrightarrow M = 5000 + (5000).(0,01).(2) \Longrightarrow M = 5000 + 100 \Longrightarrow M = 5100.$
$n = 3 \Longrightarrow M = 5000 + (5000).(0,01).(3) \Longrightarrow M = 5000 + 150 \Longrightarrow M = 5150.$
$n = 4 \Longrightarrow M = 5000 + (5000).(0,01).(4) \Longrightarrow M = 5000 + 200 \Longrightarrow M = 5200.$
$n = 5 \Longrightarrow M = 5000 + (5000).(0,01).(5) \Longrightarrow M = 5000 + 250 \Longrightarrow M = 5250.$
A função afim que permite encontrar M em função de n será dada por:

$$M = 50.n + 5000.$$

Analisando os resultados encontrados nas três últimas SPG podemos concluir que as Progressões Aritméticas e O Regime de Juros Simples se comportam como uma *Função Afim* de Domínio Discreto e Imagem Real.

.3 A Função Exponencial, a Progressão Geométrica e o Juro Composto

Neste tópico é necessário que o aluno tenha pleno domínio da álgebra elementar, principalmente em potenciação e radiciação. Sabemos da grande dificuldade dos alunos nesta manipulação de números e da fundamental importância em se trabalhar tais operações.

Após a definição da Função Exponencial e da Função Logarítmica, fazemos a introdução de Situações Problemas Geradoras (SPG) a fim de que o aluno se sinta instigado a resolvê-las, principalmente pela utilização de raciocínio lógico e analítico.

As sugestões para a introdução do estudo dos Juros Compostos juntamente com Progressão Geométrica se baseia na própria definição de Juros Compostos: São juros devidos, além do principal, também aos juros do período anterior: Juros sobre juro.

As Situações Problemas poderão se integrar com a multidisciplinaridade, principalmente dentro da Geografia (crescimento populacional, taxa de natalidade, taxa de mortalidade, crescimento da produção mundial de alimentos, etc), passando pela Biologia (divisão celular: Mitose e meiose, multiplicação de células cancerígenas, etc), passando pela Física(distância entre corpos tanto na Física Quântica quanto na Física Espacial, velocidade da luz, Teoria da Relatividade, Lei de Coulomb, etc) e chegando à Química (Radioatividade, Desintegração, Química Orgânica, etc).

Segue abaixo algumas sugestões de temas a serem abordados:
* Quantidade de células que se dividem por mitose após determindado tempo e dado o tempo de divisão;
* Quantidade de células que se reproduzem por meiose após determinado tempo e dado o tempo de divisão;
* Projeção de população futura em função de uma expressão atual de crescimento populacional;
* Crescimento da produção de grãos em função de uma projeção atual de crescimento;
* Vida útil de um isótopo de caborno em função de sua meia-vida;
* Estimativa de tempo pós-morte em função da temperatura do cadáver;
* tempo necessário para equilíbrio térmico entre corpos a diferentes temperaturas;
* Estimativa de depósito hoje numa instituição financeira, fixado os juros e a quantia que se deseja retirar no futuro;
* Estimativa de financiamento a curto e longo prazos.
Entre outras mais.

Abordaremos abaixo algumas Situações Problema Geradoras a fim de que possamos sugerir formas de se engendrar os conteúdos sem a necesidade de truncamento entre eles.

SPG 1 - Considere uma população de bactérias na qual elas dobram a uma hora de experimento. Se a população inicial, às 11 horas, são de três indivíduos, mostre, no quadro abaixo, o comportamento deste crescimento e faça uma estimativa de uma sentença matemática que permita determinar o número de indivíduos (Y) nesta amostra após "x"horas do início do experimento.

tempo (hora do dia)	quantidade de indivíduos
11 h	$3.2^0 = 3$
12 h	$3.2^1 = 6$
13 h	$3.2^2 = 12$
14 h	$3.2^3 = 24$
15 h	$3.2^4 = 48$
16 h	$3.2^5 = 96$

O número de indivíduos após "x"horas do início do experimento será de:

$$Y = 3.2^x$$

Observando a sequência numérica: $(3, 6, 12, 24, 48, 96, ...)$ percebemos que ela é uma recorrência, onde o termo posterior é obtido através do termo anterior multiplicando-o por 2, ou seja, $a_{n+1} = a_n.q$, onde $q = 2$.
A este tipo de recorrência damos o nome de Progressão Geométrica (PG) e q é denominado de razão da PG.
Neste caso, a sequência encontrada é uma PG de razão $q = 2$.

DEFINIÇÃO 1: Segundo MORGADO (1999, p.18),

> " Uma Progressão Geométrica, PG, é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente. Esse quociente constante é representado por q e chamado de razão da PG; ou seja, se $(a) = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ é uma PG, então, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \longrightarrow a_{n+1} = a_n.q$."

DEFINIÇÃO 2: LIMA (2012, p.179) define a Função Exponencial:

> " Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A *função exponencial de base a*, $f : R \longrightarrow R^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \ \epsilon \ R$:
> 1) $a^x.a^y = a^{x+y}$;
> 2) $a^1 = a$;
> 3) $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Longrightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$."

TEOREMA 1 : Ainda segundo LIMA (1999, p.187):

> " Seja $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = b.a^x$, uma função tipo exponencial. Se $(X) = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...)$ é uma Progressão Aritmética de razão r, isto é, $x_{n+1} = x_n + r$, então os valores:
>
> $$f(x_1) = b.a^{x_1}, f(x_2) = b.a^{x_2}, ..., f(x_n) = b.a^{x_n}, f(x_{n+1}) = b.a^{x_{n+1}}, ...$$
>
> formam uma Progressão Geométrica de razão $q = a^r$, pois:
>
> $$f(x_{n+1}) = b.a^{x_{n+1}} \Longrightarrow f(x_{n+1}) = b.a^{x_n+r}, \text{ pois } x_{n+1} = x_n + r.$$
> $$f(x_{n+1}) = (b.a^{x_n}).a^r \Longrightarrow f(x_{n+1}) = f(x_n).a^r \Longrightarrow f(x_{n+1}) = f(x_n).q."$$

DEFINIÇÃO 3: Segundo MORGADO (1999, p.17),

> " A *TAXA DE CRESCIMENTO* - TC de uma grandeza, que passa do valor a para o valor b, é definido por: $TC = \dfrac{b-a}{a}$, isto é, a taxa de crescimento é a razão entre o aumento da grandeza e seu valor inicial, que se, multiplicado por 100, é expresso em porcentagem. Se a taxa de crescimento é um número negativo, então trata-se de um decrescimento."

SPG 2 - Determine a taxa de crescimento no salário de um colaborador que recebia $R\$\ 800,00$ e passou a receber $R\$\ 1\ 000,00$.

$$TC = \frac{1000-800}{800} = \frac{200}{800} \Longrightarrow TC = 0,25 \Longrightarrow TC = 25\%.$$

A taxa de crescimento foi de 25%.

TEOREMA 2 - Para MORGADO (1999, p.18),

> "Se uma grandeza tem uma taxa de crescimento constante TC (ou decrescimento), os números que expressam este crescimento (ou decrescimento) num mesmo intervalo de tempo representam uma PROGRESSÃO GEOMÉTRICA de razão $q = 1 + TC$ para $TC > 0$ ou $q = 1 - TC$ para $TC < 0$."

DEMONSTRAÇÃO: Seja a_1 e a_2 dois números reais. Sua taxa de crescimento TC será dada por: $TC = \dfrac{a_2 - a_1}{a_1}$.
Se existe a_3 tal que $TC = \dfrac{a_3 - a_2}{a_2}$, poderemos escrever:

$$\frac{a_2-a_1}{a_1} = \frac{a_3-a_2}{a_2} \Longrightarrow a_1.(a_3-a_2) = a_2.(a_2-a_1) \Longrightarrow a_2^2 - a_1.a_2 = a_1.a_3 - a_1.a_2.$$

$$a_2^2 = a_1.a_3$$

Pela definição de PG, se (a_1, a_2, a_3) formam, nessa ordem, uma PG, teremos:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Longrightarrow a_2^2 = a_1.a_3.$$

Mostrando que os termos iniciais formam a PG proposta.

Precisamos mostrar agora que a razão da PG será a $q = 1+TC$ ou $q = 1-TC$.

Vejamos o caso em que $TC > 0$; o outro segue de forma análoga.
Consideremos a sequência numérica (a_1, a_2, a_3) como sendo uma PG.
Se a taxa de crescimento de a_1 para a_2 é TC e de a_2 para a_3 é também TC. Podemos escrever:

$$a_2 = a_1 + TC.a_1 \Longrightarrow a_2 = a_1.(1 + TC).$$
$$a_3 = a_2 + TC.a_2 \Longrightarrow a_3 = a_2.(1 + TC).$$
$$\text{e, portanto, } (1 + TC) = q.$$

Outro grande problema encontrado quando se trabalha com *Função Exponencial*, *Progressão Geométrica* e *Juros Compostos* é a potenciação ou radiciação para, respectivamente, expoentes ou índices muito grandes. É muito comum depararmos com potências de bases decimais e expoentes grandes, como por exemplo $(1,04)^{12}$. Nessas situações, como a utilização da calculadora eletrônica ainda não é permitida em concursos, existem duas formas de proceder: efetuar a operação ou utilizar logarítmos.
Evidentemente, efetuar a operação torna-se inviável, pois demanda muito tempo. Neste caso, resta a utilização de logaritmos, sendo o mais utilizado os logaritmos decimais.
O aluno deverá ter domínio das propriedades básicas bem como da utilização da tábua, na busca da "mantissa"e no cálculo da "característica".
Para os logaritmos decimais, em todos os livros didáticos estão disponíveis a tábua e, nos concursos, são informados os valores de mantissas ou são informadas ferramentas adicionais que permitam o cálculo da potência desejada.
Nas SPG a seguir procuraremos desenvolver a resolução das potências através da utilização de logaritmos.

SPG 3 - Uma pessoa tem, na data de hoje, a quantia de $R\$ \ 1\ 000,00$. Uma Instituição Financeira paga a taxa de 3% ao mês. Esta pessoa aplica seu dinheiro nesta I.F. por um período de 6 meses. Mostre o crecimento M da quantia aplicada mês a mês para os 6 meses de aplicação, a partir de hoje (os arredondamentos deverão serem feitos para baixo). Escreva a fórmula matemática que permite calcular a quantia M a ser retirada daqui a n meses. Escreva a sequência numérica que mostra a quantia a ser retirada a partir de hoje, mês a mês. Verifique se esta sequência numérica é uma Progressão Geométrica.
$\mathbf{n = 0} \Longrightarrow M = 1000,00;$
$\mathbf{n = 1} \Longrightarrow M = 1000 + (1000).(0,03) = 1000(1 + 0,03) \Longrightarrow M = 1030,00;$
$\mathbf{n = 2} \Longrightarrow M = 1000(1 + 0,03) + (1000)(1 + 0,03).(0,03) \Longrightarrow$
$M = 1000(1 + 0,03)(1 + 0,03) = 1000(1 + 0,03)^2 \Longrightarrow M = 1060,90;$
$\mathbf{n = 3} \Longrightarrow M = 1000(1 + 0,03)^2 + 1000(1 + 0,03)^2.(0,03) \Longrightarrow$
$M = 1000(1 + 0,03)^2.(1 + 0,03) = 1000(1 + 0,03)^3 \Longrightarrow M = 1092,72;$
$\mathbf{n = 4} \Longrightarrow M = 1000(1 + 0,03)^3 + 1000(1 + 0,03)^3.(0,03) =$
$M = 1000(1 + 0,03)^3.(1 + 0,03) = 1000(1 + 0,03)^4 \Longrightarrow M = 1125,50;$
$\mathbf{n = 5} \Longrightarrow M = 1000(1 + 0,03)^4 + 1000(1 + 0,03)^4.(0,03) =$
$M = 1000(1 + 0,03)^4.(1 + 0,03) = 1000(1 + 0,03)^5 \Longrightarrow M = 1159,27;$
$\mathbf{n = 6} \Longrightarrow M = 1000(1 + 0,03)^5 + 1000(1 + 0,03)^5.(0,03) =$

$M = 1000(1 + 0,03)^5.(1 + 0,03) = 1000(1 + 0,03)^6 \Longrightarrow M = 1194,04$;
Observando a sequência de cálculos teremos:
$n = 0 \Longrightarrow M = 1000.(1 + 0,03)^0$;
$n = 1 \Longrightarrow M = 1000.(1 + 0,03)^1$;
$n = 2 \Longrightarrow M = 1000.(1 + 0,03)^2$;
$n = 3 \Longrightarrow M = 1000.(1 + 0,03)^3$;
$n = 4 \Longrightarrow M = 1000.(1 + 0,03)^4$;
$n = 5 \Longrightarrow M = 1000.(1 + 0,03)^5$;
$n = 6 \Longrightarrow M = 1000.(1 + 0,03)^6$;
que nos leva à conjectura de:
$M = 1000(1 + 0,03)^n \Longrightarrow M = 1000.1,03^n$
A sequência numérica formada pelas quantias a serem retiradas mês a mês será:

$$(1000,00;\ \ 1030,00;\ \ 1060,90;\ \ 1092,72;\ \ 1125,50;\ \ 1159,27;\ \ 1194,04)$$

que representa uma PG de razão $q = 1,03$, confirmando o TEOREMA 2, demonstrado anteriormente.

SPG 4 - Uma quantia de $R\$ \ 10\ 000,00$ foi aplicada a Juros Compostos com uma taxa mensal de 4% ao mês por um período de 2 anos. Qual é o montante formado ao final deste período? Conjecturando a fórmula poderemos escrever:
$n = 0 \Longrightarrow M = 10000$;
$n = 1 \Longrightarrow M = 10000 + (10000).(0,04) = 10000(1 + 0,04) = 10000.(1,04)$;
$n = 2 \Longrightarrow M = 10000.(1,04) + 10000.(1,04).(0,04) = 10000.(1,04)(1 + 0,04) \Longrightarrow M = 10000.(1,04)^2$;
$n = 3 \Longrightarrow M = 10000.(1,04)^2 + 10000.(1,04)^2.(0,04) = 10000.(1,04).(1 + 0,04) \Longrightarrow M = 10000.(1,04)^3$
podemos escrever então que $M = 10000.(1,04)^n$, sendo n o tempo em meses.
Outra forma de conjecturar a fórmula é simplesmente observar o TEOREMA 2 e mostrar que o crescimento se faz segundo uma PG de razão $q = 1 + TC$, sendo $TC = 0,04$.
Se $n = 24$ meses, $M = 10000.1,04^{24}$.
Nosso problema agora torna-se calcular a potência $1,04^{24}$.
A primeira opção seria desmebrar os expoentes, fazendo:

$$1,04^{24} = (((1,04)^2)^4)^3 \text{ e efetuar os cálculos.}$$

Outra opção seria a utilização de logaritmos decimais:

$$x = (1,04)^{24} \Longrightarrow \log(x) = \log(1,04^{24})$$
$$log(x) = 24.log(1,04)$$

a característica de 1,04 será $c = 1 - 1 = 0$ e a mantissa será 0170 (retirada da tábua de logaritmos).

$$log(x) = (24).(0,0170) \Longrightarrow log(x) = 0,408$$

A característica de x é 0, e portanto possui 1 algarismo na parte inteira; e a mantissa é 4080, que pela táboa de logaritmos decimais nos leva em:

$$\begin{array}{c} 255 \Longrightarrow 4055 \\ 256 \Longrightarrow 4082 \end{array}$$

Fazendo a interpolação simples teremos:

$$\begin{array}{c} 255 \Longrightarrow 4055 \\ x \Longrightarrow 4080 \\ 256 \Longrightarrow 4082 \end{array}$$

$$\frac{x - 255}{256 - 255} = \frac{4080 - 4055}{4082 - 4055} \Longrightarrow x = \frac{25}{27} + 255 \Longrightarrow x = 255,93$$

Como deve ter apenas um algarismo na parte inteira, $x = 2,5593$.
Assim, concluimos que $(1,04)^{24} = 2,5593$.
Pela calculadora científica, o resultado deveria ser $(1,04)^{24} = 2,5633$
Portanto, o montante formado ao final dos 24 meses será:

$$M = (10000).(2,5593) \Longrightarrow M = R\$ \ 25 \ 593,00$$

Com a utilização da calculadora eletrônica o valor encontrado seria de

$$M = R\$ \ 25 \ 633,00$$

Uma diferença de $D = R\$ \ 40,00$.

SPG 5 - Uma televisão cujo preço à vista é $R\$ \ 2 \ 500,00$ é vendida no crediário por 6 parcelas mensais iguais e consecutivas, sendo que a primeira vence com 30 dias da compra. Determine o valor da prestação sabendo que a empresa responsável pelo crediário cobra uma taxa de Juros Compostos de 5% ao mês.

Para a resolução deste tipo de exercício aconselha-se utilizar um eixo de tempo que mostre os valores a serem pagos em suas respectivas datas. No caso, na data de hoje tem-se o valor de $R\$ \ 2 \ 500,00$ e, nas datas 1 mês, 2 meses, 3 meses, 4 meses, 5 meses e 6 meses, teremos o valor das parcelas fixas que chamaremos de X.

É preciso deixar claro que não se opera quantidades monetárias em datas diferentes. É necessário escolher uma data qualquer (chamada de DATA-BASE ou DATA FOCAL) e "levar"todas as quantidades monetárias para esta data, fazendo a capitalização ou descapitalização das quantias.

Aconselhamos adotar como DATA-BASE a do último pagamento ou obrigação, uma vez que é mais fácil se efetuar multiplicação que divisão; porém isto não é uma obrigatoriedade.
Vejamos no eixo do tempo abaixo um resumo da situação descrita:

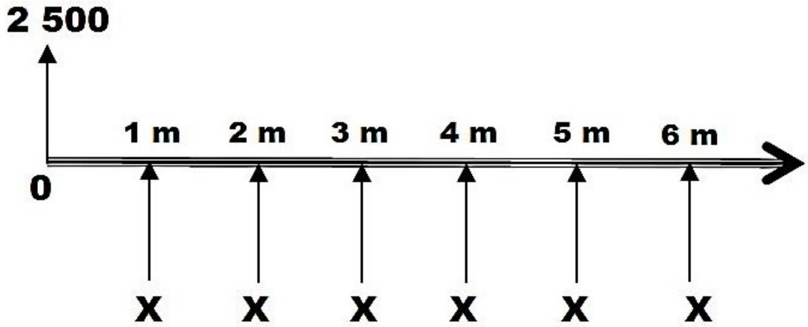

Figura 25: Situação de um financiamento de uma dívida de $R\$ \ 2\ 500,00$ em 6 parcelas fixas .

Levando-se as quantidades monetárias para a data 6 meses e montando a igualdade (a soma de todos os pagamentos devem quitar as obrigações) teremos:

$$X.(1+0,05)^5+X.(1+0,05)^4+X.(1+0,05)^3+X.(1+0,05)^2+X.(1+0,05)^1+X = 2500.(1+0,05)^6 \Longrightarrow$$
$$X.(1,05^5+1.05^4+1,05^3+1,05^2+1,05^1+1) = 2500.1,05^6$$

A sequência: $(1,05^5+1.05^4+1,05^3+1,05^2+1,05^1+1)$ é a soma de uma PG onde: $a_1 = 1$, $q = 1,05$ e $n = 6$, dada por: $S_n = \dfrac{a_1.(q^n-1)}{q-1}$.
Assim:
$(1,05^5+1.05^4+1,05^3+1,05^2+1,05^1+1) = \dfrac{1.(1,05^6-1)}{1,05-1} = \dfrac{0,34009564}{0,05} = 6,8019128$
voltando à equação de valores:

$$6,8019128.X = 3350,24 \Longrightarrow X = R\$\ 492,54$$

Portanto, ao se financiar a televisão, serão feitos seis pagamentos de $R\$\ 492,54$.

Para melhor visualização da amortização da dívida pode ser montada uma tabela como a que segue abaixo.
É importante salientar que o não fechamento da dívida se deve ao processo de

Tabela 14: Amortização de uma dívida de $R\$\ 2\ 500,00$ em 6 parcelas fixas

n	Dívida antes do Pagamento	Pagamento	Dívida após pagamento	Juros para o período segionte
0	2 500,00	0,00	2 500,00	125,00
1	2 625,00	492,54	2 132,46	106,62
2	2 239,08	492,54	1 746,54	87,33
3	1 833,87	492,54	1 341,33	67,07
4	1 408,40	492,54	915,86	45,79
5	961,65	492,54	469,11	23,46
6	492,57	492,54	0,03	0

arredondamento e erro acumulado no decorrer dos cálculos e, mais importante ainda, que o aluno perceba que realmente os valores calculados amortizam a dívida.

Neste momento é necessário que seja entendido o contexto do problema. Aconselha-se a utilização de calculadora a fim de que possa ter uma maior rapidez nos cálculos; porém, caso seja percebido dificuldade por parte dos alunos em manipular operações básicas, deve-se insistir nas operações manuais (sem calculadora). Por mais que se pense em retrocesso na adequação e relação ensino/aprendizagem, nunca é demais a fixação dos elementos fundamentais da taboada bem como as operações fundamentais.

SPG 6 - A qual taxa mensal de Juros Compostos fica aplicada a quantia de $R\$\ 1\ 000,00$ por um ano a fim de que se retire ao final um montante de $R\$\ 1\ 500,00$?
Lembrando que quando uma grandeza tem uma taxa de crescimento TC ela forma em seus termos consecutivos uma PG de razão $q = 1 + TC$, poderemos escrever que se a taxa de crescimento for i ao mês, a PG formada será:

$n = 0 \Longrightarrow M = 1000$
$n = 1 \Longrightarrow M_1 = 1000.(1+i)$
$n = 2 \Longrightarrow M_2 = 1000.(1+i)^2$
$n = 3 \Longrightarrow M_3 = 1000.(1+i)^3$
e assim sucessivamente, até $n = 12 \Longrightarrow M_{12} = 1000.(1+i)^{12}$
Pelo enunciado, $M_{12} = 1500$, e portanto,

$$1000.(1+i)^{12} = 1500 \Longrightarrow (1+i)^{12} = 1,5$$

Novamente precisamos da utilização de logaritmos para podermos resolver a equação proposta.
Aplicando logaritmo decimal em ambos os lados da igualdade (permitido devido à bijetividade da função), teremos:

$$log(1+i)^{12} = log(1,5) \Longrightarrow 12.log(1+i) = log(1,5)$$

$log(1,5) \Longrightarrow$ característica $c = 1 - 1 = 0$ e mantissa $m = 1761$
$log(1,5) = 0,1761$
voltando à equação:

$$log(1+i) = \frac{0,1761}{12} \Longrightarrow log(1+i) = 0,0147$$

$0,0147$: característica $c = 0$ (possui um algarismo na parte inteira) e mantissa $m = 0147$, que na tábua de logaritmos nos leva em:
$103 \Longrightarrow 0128$
$104 \Longrightarrow 0170$
montando a interpolação teremos:
$103 \Longrightarrow 0128$
$x \Longrightarrow 0147$
$104 \Longrightarrow 0170$
$\frac{x - 103}{104 - 103} = \frac{0147 - 0128}{0170 - 0128} \Longrightarrow x = \frac{19}{42} + 103 \Longrightarrow x = 103,45$
voltando à equação:

$$log(1+i) = 0,0147 \Longrightarrow 1 + i = 1,0345 \Longrightarrow i = 0,0345$$
$$i = 3,45\% \text{ ao mês,}$$

É muito importante que o professor insista nos cálculos através de logaritmos uma vez que nas provas de acesso às universidades e no Exame Nacional do Ensino Médio não é permitida a utilização de calculadoras. Mas é importante também desenvolver exercícios onde os expoentes são números pequenos, inferiores a 7, a fim de que o aluno exercite as operações básicas e, na maioria dos concursos, quando se cobra Juros Compostos, o mesmo é feito em intervalos de tempo pequenos.

.4 Considerações

É de suma importância a contextualização dos conteúdos propostos pelos livros didáticos com a Matemática Financeira.

É necessário que o aluno esteja em contato diariamente com cálculos financeiros ligados à porcentagem e, acima de tudo, quando essas porcentagens são numeros percentuais inteiros, possa fazê-lo mentalmente, sem a utilização de calculadoras científicas ou dispositivos similares.

É necessário que nossos jóvens despertem o interesse pela Matemática Financeira e, a partir daí, possam questionar e participar das decisões econômicas que envolvem, a nível nacional, a utilização da matemática como um instrumento que engrandece e enobrece o ser humano.