



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARINA BRUNEHILDE PINTO DA SILVA

**ANÁLISE COMBINATÓRIA: CONCENTRANDO O ENSINO NA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS**

FORTALEZA

2013

CARINA BRUNEHILDE PINTO DA SILVA

**ANÁLISE COMBINATÓRIA: CONCENTRANDO O ENSINO NA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S579a Silva, Carina Bruneilde Pinto da
Análise combinatória: concentrando o ensino na resolução de problemas / Carina Bruneilde
Pinto da Silva. – 2013.
52 f. : il., enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro

1. Análise combinatória. 2. Software. I. Título.

CDD 511.6

CARINA BRUNEHILDE PINTO DA SILVA

**ANÁLISE COMBINATÓRIA: CONCENTRANDO O ENSINO NA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: ____/____/_____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Antônio Caetano Ponte
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

Prof. Ms. Danilo Sousa Rocha
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Aos meus pais, irmãos, avós, tios e amigos,
com toda minha dedicação, com todo meu
amor, fiel e incondicional.

AGRADECIMENTOS

À força divina que sempre direciona meus passos para os caminhos do bem.

À minha família, à qual nem todas as palavras do mundo agraciariam justo agradecimento.

Aos meus amigos, tão fundamentais, que, de todas as formas possíveis, me encorajaram e ajudaram, sendo, portanto, pilares de minha vitória, em especial à Profa. Patrícia Batista, por todas as importantes dicas e criteriosas correções, e ao Prof. Danilo Rocha, pelas valiosas orientações referentes ao desenvolvimento do software apresentado.

Ao meu estimado orientador, Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro, por dedicar seu precioso tempo e conhecimento da melhor forma possível à minha orientação.

Ao Prof. Dr. Marcelo Melo, pelo acompanhamento constante e pela coordenação dedicada.

Ao Prof. Dr. Luiz Antônio Caetano Ponte, pelas pertinentes contribuições a este trabalho.

Aos professores Dr. José Afonso de Oliveira, Dr. Marcos Ferreira de Melo, Dr. Othon Dantas Lopes, Dr. Cleon da Silva Barros e Dr. Michel Pinho Rebouças, pelas aulas ministradas, pelos sábados de empenho e assiduidade.

Aos meus amados colegas do curso de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC), que dividiram comigo quase todos os sábados dos últimos dois anos, compartilhando alegrias, angústias, conquistas, sabedorias e sonhos.

A todos os idealizadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), pela importante contribuição no nível de instrução dos professores de matemática de todo país.

À UFC, instituição responsável por toda minha formação acadêmica.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Aos meus alunos, que no exercício do aprender muito me ensinam sobre amor à profissão, paciência, dedicação, responsabilidade, cuidado e profissionalismo.

Aos meus colegas de trabalho, que com sua vasta experiência e exemplo engrandecem minha prática diariamente.

E a todos que, direta ou indiretamente, foram de grande contribuição em mais este importante passo de minha carreira.

"Everybody in this country should learn how to program a computer, because it teaches you how to think."

Steve Jobs

RESUMO

A Análise Combinatória é o conjunto de técnicas para a resolução de problemas de contagem. É usada quando é preciso conhecer a quantidade de elementos de um conjunto finito, sem necessidade de elencar cada um. Neste trabalho, discute-se a maneira como este assunto tão importante é apresentado para os alunos que cursam o Ensino Médio, a fim de aprimorá-la. Ao final do trabalho, é sugerido um software educacional, de própria autoria, capaz de resolver problemas de contagem, com a finalidade de auxiliar e dinamizar o desempenho do professor em sala de aula.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Software Educacional, Resolução de Problemas.

ABSTRACT

The Combinatory Analysis is the technical set used to solve counting problems. It's useful when is necessary to know how much elements are in a set finite, without the need to list each one. In this work, let's discuss the way in which this important matter is taught to high school students, and give suggestions to make it better. At the end, is suggested an educational software, of our own authorship, which is able to solve counting problems. It was developed to help and to stimulate the teacher performance during the classes.

Keywords: Combinatory Analysis , Educational Software, Troubleshooting .

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	9
2	PÚBLICO ALVO	11
3	PRÉ-REQUISITOS	12
4	OBJETIVOS	13
4.1	Arranjos e Combinações	15
4.2	Permutações	18
5	RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS	22
6	DIFICULDADES PREVISTAS	26
7	MATERIAIS E TECNOLOGIAS	35
8	POSSÍVEIS DESDOBRAMENTOS	41
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICES	
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO I	45
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO II	46
	APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO III	47
	APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO IV	48
	APÊNDICE E – LINHAS DE CÓDIGO DO PROGRAMA ANÁLISE COMBINATÓRIA	49

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Observando o ensino da matemática para alunos do ensino médio como parte atuante do processo de aprendizagem que acontece em escolas públicas e privadas, percebe-se a dificuldade apresentada, tanto por parte dos alunos como por parte dos professores, em lidar com situações que envolvem conhecimentos combinatórios. Também é notória uma postura mecânica, voltada para o uso exaustivo de fórmulas, quando a análise mais profunda do raciocínio que desenvolveu aquela sentença seria mais importante.

Este trabalho configura um estudo sobre o ensino da Análise Combinatória para alunos nas séries finais da educação básica. Tal conteúdo representa um conhecimento importante, não apenas na vida escolar, mas também em situações variadas do cotidiano.

Nosso intuito é sugerir que as aulas referentes ao conteúdo citado tenham uma abordagem diferente. Na rotina escolar, é possível constatar que os problemas com a Análise Combinatória não partem apenas dos alunos. Muitos professores também apresentam dúvidas, tanto em relação ao conteúdo, como qual seria a melhor maneira de ministrá-lo.

Nesse contexto, nota-se também o quanto os aparatos tecnológicos envolvem a atenção dos alunos mais do que as aulas expositivas comuns e frequentes, por isso é importante que os profissionais docentes estejam sempre se reciclando para receber positivamente as vantagens que o avanço da tecnologia pode proporcionar ao ensino-aprendizado da matemática. Assim, neste trabalho apresentaremos três sugestões para o ensino da Análise Combinatória.

Primeiramente, serão abordados os principais conceitos apresentados aos alunos, procurando diferentes formas de abordagem, visando à criação de um ambiente que possa servir de reflexão para a prática docente no âmbito de aprendizagem de Análise Combinatória, sendo oportunizadas reflexões teóricas e práticas quanto à aprendizagem de Arranjo, Permutação e Combinação através do Princípio Fundamental de Contagem, baseando-se na resolução de situações-problema.

Em seguida, serão discutidos possíveis soluções e erros cometidos por alunos do 2º e do 3º ano do ensino médio. A sugestão é que as situações-problema sejam apresentadas antes dos conceitos, a fim de que os alunos possam raciocinar por conta própria. Posteriormente, e como última alternativa, as fórmulas serão apresentadas. Serão sugeridos ainda alguns questionários e problemas que podem ser usados na preparação de aulas sobre o assunto discutido.

Finalmente, será apresentado um software capaz de resolver alguns problemas de contagem, desenvolvido com a finalidade de auxiliar o professor no ensino da Análise Combinatória e despertar a atenção de alunos e professores para a grande ajuda que os recursos tecnológicos podem oferecer ao processo de ensino-aprendizagem.

2 PÚBLICO ALVO

De maneira geral, a Análise Combinatória é abordada no 2º ano do Ensino Médio. O assunto antecede os conteúdos de Probabilidade e Estatística, afinal é um conhecimento prévio de extrema importância para o entendimento das duas ciências citadas.

Por ser um conteúdo que não depende de conhecimentos muito aprofundados acerca de fórmulas ou definições, seria interessante que fosse gradativamente incorporado ao conteúdo de matemática desde o Ensino Fundamental II. Mas, a maioria dos livros didáticos utilizados na educação básica comenta de maneira bem superficial o assunto nas séries finais do segundo ciclo do ensino fundamental, protelando os conceitos principais para as séries finais do Ensino Médio.

Dessa forma, este trabalho é direcionado para os alunos do Ensino Médio, mais especificamente para os do 2º ano, que estão vendo esse conteúdo pela primeira vez, e os do 3º ano, que revisam o assunto durante a preparação para as provas de vestibulares.

3 PRÉ-REQUISITOS

A História da Matemática mostra-nos que o desenvolvimento desta ciência está diretamente relacionado à necessidade do homem em “contar”. A primeira técnica matemática aprendida pelas crianças em seu contato inicial com a disciplina é a contagem, inicialmente, contando elementos de um conjunto e, em seguida, aprendendo as operações aritméticas com o mesmo intuito (MORGADO *et al.*, 1991). A análise combinatória é uma extensão dessa necessidade, ela estabelece conceitos e técnicas que nos permitem a contagem em situações onde o conjunto de elementos apresenta uma grande quantidade de possibilidades.

O sucesso do aprendizado do conteúdo depende do conhecimento prévio do aluno acerca de problemas envolvendo as quatro operações básicas da aritmética, ou seja, um aluno que possui domínio de somas, subtrações, multiplicações e divisões, não apresentará dificuldades em aplicar técnicas de contagem para resolver os problemas propostos.

Outro ponto importante para a resolução de problemas de Análise Combinatória é que o aluno seja capaz de interpretar as diversas situações-problema. Portanto, é essencial que as competências linguísticas relacionadas à interpretação de texto tenham sido bem desenvolvidas.

Assim, tendo o aluno aprendido de fato o conhecimento aritmético e desenvolvido uma interpretação textual apurada, o professor de Análise Combinatória estará respaldado para introduzir o conteúdo, sabendo que seu aluno já possui todos os pré-requisitos necessários para um aprendizado satisfatório.

4 OBJETIVOS

O nosso principal objetivo neste trabalho é solidificar o aprendizado da Análise Combinatória, seus conceitos e abordagens, por alunos das séries finais da educação básica.

A Análise Combinatória é o ramo da matemática que nos permite enumerar todas as possibilidades de que um evento aconteça, mesmo envolvendo grande quantidade de dados, sem a necessidade de contá-las uma a uma. Nas escolas do Ceará, geralmente, este conteúdo é abordado no 2º ano do Ensino Médio, sendo uma base importantíssima para a compreensão de assuntos subsequentes, como a Probabilidade e a Estatística.

Em nosso país, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio baseiam-se nos PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio), que são um documento que tem por objetivo nortear os educadores, apresentando propostas no que se refere às competências que devem ser desenvolvidas pelos alunos dos três últimos anos do ensino básico. De acordo com este documento, espera-se que os alunos desenvolvam as seguintes habilidades:

- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
- Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2006, p.127).

Alcançado o objetivo de desenvolver tais habilidades, teremos alunos não somente bem preparados para provas e avaliações externas, mas também com o raciocínio dedutivo e combinatório muito mais apurados, capazes de discernir e interpretar dados, sendo assim bons profissionais, com grandes chances de êxito no mercado de trabalho, além de cidadãos menos vulneráveis às enganações matemáticas que acontecem no dia a dia, seja na política, na economia ou no consumo.

O melhor aliado na resolução dos problemas de contagem é o Princípio Multiplicativo, que, segundo Morgado *et al.* (1991, p. 18), pode ser definido assim: “Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x.y$ ”.

De posse desta definição, aliado ao conhecimento básico das “4 operações”, todos os problemas de contagem podem ser resolvidos. Por exemplo, “Se uma sala tem 4 portas,

qual é o número de maneiras distintas de se entrar e sair da mesma por uma porta diferente?”.

A primeira decisão, d_1 , que deve ser tomada é qual porta será escolhida para entrar na sala. No caso, temos 4 portas, logo temos 4 maneiras distintas para d_1 . Agora devemos escolher a porta para a saída, que, de acordo com o problema, não pode ser a mesma para a entrada, logo para d_2 temos 3 maneiras distintas de tomar a decisão. Então, $4 \times 3 = 12$, ou seja, doze maneiras de entrar e sair nesta sala por portas diferentes.

A resolução fica ainda mais clara para os estudantes quando montamos um esquema que os faça visualizar todas as possibilidades. O método a seguir também é conhecido como *Árvore das Possibilidades*, é muito útil e facilita o entendimento dos alunos, porém é aconselhável seu uso em situações cuja lista de resultados não seja extensa ou trabalhosa, caso contrário a melhor opção é usar as técnicas e os conceitos combinatórios aqui apresentados. Assim, se chamarmos as quatro portas do exemplo acima de A, B, C e D, teremos:

ENTRADA	SAÍDA	POSSIBILIDADES
A	B	AB
	C	AC
	D	AD
B	A	BA
	C	BC
	D	BD
C	A	CA
	B	CB
	D	CD
D	A	DA
	B	DB
	C	DC

Tabela 1: Esquema *Árvore das Possibilidades*

Logo, são 12 maneiras distintas para entrar e sair usando portas diferentes. É válido salientar que, neste exemplo, a ordem em que a porta será escolhida resulta em situações diferentes, pois entrar pela porta A e sair pela B é uma situação diferente de entrar

pela porta B e sair pela A. Analisar se a mudança de ordem na escolha altera o resultado é uma atitude importante na resolução de problemas.

Quando o assunto é apresentado aos alunos, geralmente, é subdividido em três técnicas de contagem:

- Arranjo Simples
- Combinação Simples
- Permutação
 - Simples
 - Com repetição
 - Circular

4.1 Arranjos e Combinações

O Arranjo Simples e a Combinação Simples são técnicas de escolha de elementos a partir de um conjunto mais amplo. O que as diferencia é que o arranjo forma sequências e a combinação subconjuntos, ou seja, os resultados do arranjo serão diferentes se a ordem da escolha for modificada, já nas combinações isto não acontece, pois os subconjuntos se diferem pela natureza e não pela ordem. Por exemplo, “*Em uma sala de aula existem 10 alunos, a professora fará uma gincana de conhecimentos e premiará os três primeiros lugares. De quantas maneiras pode ocorrer a premiação desta gincana?*”.

Devemos calcular todas as maneiras de três alunos ganharem esta gincana. Analisando graficamente as possibilidades, teremos:

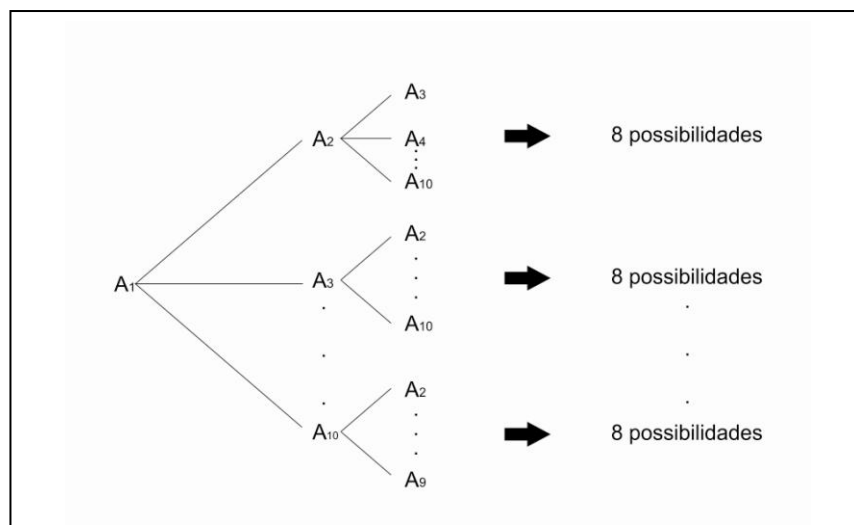


Figura 1: Árvore das possibilidades

É importante entender que as sequências A_1, A_2, A_3 e A_2, A_3, A_1 , por exemplo, são distintas, já que a mudança na ordem altera o resultado da gincana, pois no primeiro exemplo A_1 foi o vencedor, enquanto no segundo exemplo A_2 foi o vencedor, gerando assim duas situações diferentes, envolvendo os mesmos alunos.

Outra maneira mais simples e rápida é usar diretamente o Princípio Multiplicativo. Nesta situação, temos 10 possibilidades para escolher o aluno A_1 , escolhido este, teremos 9 possibilidades para escolher o aluno A_2 e 8 possibilidades para A_3 , totalizando $10 \times 9 \times 8 = 720$, são setecentas e vinte possibilidades.

Considere agora um problema parecido: *“Em uma sala de aula existem 10 alunos, a professora escolherá três para participar de uma aula de campo. De quantas maneiras este grupo de alunos pode ser escolhido?”*.

Temos uma situação aparentemente parecida com a anterior, e é bastante comum que os alunos se confundam e utilizem a mesma resolução, encontrando como resultado 720 possibilidades. Mas devemos analisá-la com mais cuidado, afinal, suponha que a professora tivesse escolhido, sucessivamente, os alunos A_1, A_2 e A_3 . O grupo de alunos assim formado é exatamente o mesmo se a professora tivesse selecionado, por exemplo, primeiro A_2 , depois A_3 , depois A_1 .

No entanto, quando consideramos 720 possibilidades estamos contabilizando as duas escolhas como se fossem distintas, mas este erro pode ser corrigido. Todos os possíveis grupos são repetidos o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, A_1, A_2 , e A_3 vão surgir, em nosso processo de enumeração, seis vezes, $3 \times 2 \times 1 = 6$, o mesmo ocorrendo com todos os outros possíveis grupos. Logo, o número correto de comissões é igual a $720/6 = 120$.

O ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) é uma avaliação que se baseia nas competências defendidas pelos PCNEM e tem por intuito constatar o nível de conhecimento dos alunos do ensino médio brasileiro, tentando identificar possíveis falhas em nosso processo educacional. Na prova de Matemática e suas Tecnologias do ano de 2009, por exemplo, foi apresentada uma questão que aborda exatamente essa diferença sucinta entre arranjos e combinações. Vejamos:

Questão 165

Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

- A uma combinação e um arranjo, respectivamente.
- B um arranjo e uma combinação, respectivamente.
- C um arranjo e uma permutação, respectivamente.
- D duas combinações.
- E dois arranjos.

Figura 2: Questão do ENEM/2009

Para a resolução desta questão, não há necessidade de cálculos ou fórmulas, apenas um conhecimento prévio da diferença entre escolhas ordenadas e não ordenadas, ou seja, arranjos e combinações. Na primeira situação apresentada pelo problema, deve-se escolher 4 times para a formação de grupos. Supondo que fossem escolhidos os times A, B, C e D, teríamos um grupo, se mudássemos a ordem da escolha para, por exemplo, C, D, B e A, apesar de escolhidos em ordem diferente, teremos o mesmo grupo, portanto trata-se de uma combinação.

Na segunda situação, devemos, dentre os quatro times do grupo A, sortear dois para o jogo inicial, o primeiro sorteado jogará em seu campo e o segundo será o visitante. Neste caso, se sortearmos os times B e C, nesta ordem, o jogo será realizado no “campo do time B”, se mudarmos a ordem da escolha, teremos o mesmo jogo, porém uma nova situação, pois o jogo será realizado no “campo do time C”. Portanto, em tal situação, a mudança de ordem gera resultados distintos, sendo assim um caso de arranjo.

A alternativa que corresponde à resposta correta é o item A.

De modo geral, os livros mais adotados no Ensino Médio diferenciam arranjos e combinações pela relevância da ordem das escolhas. Processos de escolha em que a mudança de ordem altera os resultados são arranjos, caso não altere, trata-se de uma combinação. Aos alunos, são apresentadas as respectivas fórmulas:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (1)$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (2)$$

Nestas fórmulas, n representa o total de elementos e p o número de escolhas a serem realizadas.

4.2 Permutações

As Permutações, por sua vez, são técnicas para calcular todas as possibilidades de reorganizar os elementos de um conjunto, sem escolhas. Na verdade, permutações são arranjos especiais, onde $p=n$, ou seja, a quantidade de elementos escolhidos é igual ao total de elementos. Por exemplo, “*De quantas maneiras podemos organizar 4 pessoas em uma fila?*”.

Temos 4 possibilidades para escolher o primeiro lugar da fila, sobram 3 possibilidades para o segundo, 2 para o terceiro e finalmente 1 possibilidade para o último. Então $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, são vinte e quatro maneiras.

Como estamos formando uma fila, a ordem da escolha altera o resultado. Analisando pelo mesmo ponto de vista dos arranjos, temos 4 pessoas e devemos escolher 4, usando a fórmula teríamos $A_{4,4}$, lê-se “arranjo de 4 elementos, quatro a quatro”.

De modo geral, o número de permutações de n elementos é: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$. A fórmula apresentada nos livros é:

$$P_n = n! \tag{3}$$

Temos ainda duas situações que configuram permutações, porém com alguns detalhes especiais que devem ser corretamente analisados, são as **Permutações com Repetição** e as **Permutações Circulares**.

Quando devemos permutar um conjunto que possui elementos repetidos, é importante notar que, caso não sejam tomadas as devidas providências, algumas possibilidades serão contadas repetidas vezes. Esta situação caracteriza uma permutação com elementos repetidos.

Um exemplo muito comum de questões de combinatória são as que envolvem anagramas. Anagramas são palavras, com sentido ou não, formadas pelo rearranjo das letras de outra palavra. Por exemplo, dada a palavra **CASA**, vamos analisar todos os seus anagramas:

CASA	ACAS	SACA	ASCA
CASA	ACSA	SACA	ASAC
CAAS	ASCA	SAAC	ACAS
CAAS	ASAC	SCAA	ACSA
CSAA	AACS	SCAA	AASC
CSAA	AASC	SAAC	AACS

A palavra CASA possui 4 letras, permutando-as, $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, são vinte e quatro anagramas. Porém, a palavra possui duas letras repetidas. Quando permutamos apenas as letras A, encontramos dois anagramas iguais, apesar de, dentro dos 24 anagramas acima, terem sido contados como se fossem diferentes. Isso acontece com todos os anagramas, o raciocínio é igual ao que usamos nas combinações, e para consertar o problema devemos dividir o resultado por 2 (afinal, cada anagrama se repete duas vezes), portanto a palavra CASA tem apenas 12 anagramas.

Se, agora, quiséssemos encontrar a quantidade de anagramas da palavra BANANA, o raciocínio seria igual, porém é necessário um pouco mais de atenção, pois agora temos duas letras repetidas e cada uma com um número diferente de repetições. A palavra BANANA possui 6 letras, permutando-as, $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$, são setecentos e vinte anagramas.

Mais uma vez, percebemos que alguns anagramas se repetem. Temos uma situação bem parecida com a anterior. São duas letras N e três letras A. Permutando-se apenas as letras A, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$, seis anagramas iguais, porém contabilizados como se fossem diferentes, e o mesmo acontece com as letras N, sendo que são apenas dois anagramas iguais. Para corrigir a situação, devemos dividir pela quantidade de anagramas repetidos: $720/6=120/2=60$, são sessenta anagramas distintos.

De maneira geral, o número de sequências de n elementos tais que:

a_1 repete-se α_1 vezes

a_2 repete-se α_2 vezes

.

.

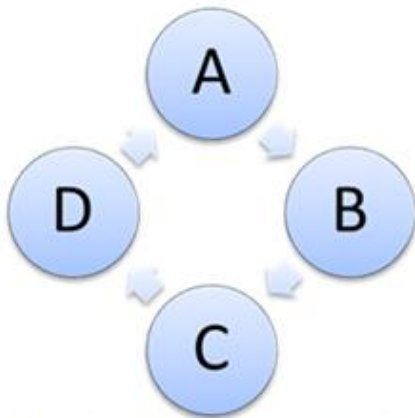
.

a_k repete-se α_k vezes

Pode ser calculado usando a fórmula:

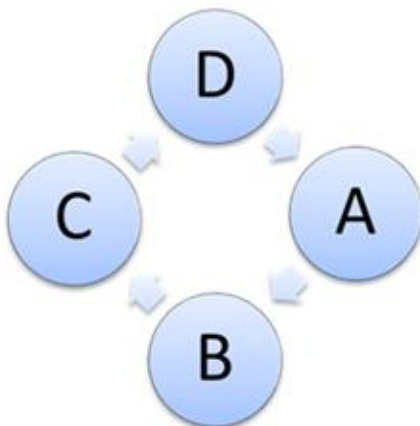
$$P_n^{oc_1, oc_2, \dots, oc_k} = \frac{n!}{oc_1! oc_2! \dots oc_k!} \quad (4)$$

Problemas envolvendo Permutações Circulares são aqueles nos quais desejamos calcular de quantas maneiras distintas podemos organizar elementos dispostos em círculo. Porém, quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, duas disposições só são consideradas distintas se, e somente se, ao percorrermos a circunferência, em sentido horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontrarmos elementos que formam seqüências iguais. Por exemplo, consideremos as permutações circulares das letras A, B, C e D:



Tomando como referência o elemento A, a seqüência encontrada é (A, B, C, D).

Figura 3: Disposição de elementos em organização circular.



Continuamos tomando a letra A como referência, e então encontramos a seqüência (D, A, B, C)

Figura 4: Outra disposição circular dos elementos

Logo, as duas permutações são iguais, e seguindo o raciocínio, sempre tendo a letra A como início, ainda teríamos as sequências (C, D, A, B) e (B, C, D, A), que também são iguais às iniciais. A igualdade das duas permutações circulares acima poderia ser observada tomando-se outro elemento como referência. É fácil ver que, para cada letra, temos 4 sequências iguais, listadas abaixo:

(A,B,C,D)	(A,C,B,D)	(A,D,B,C)	(A,D,C,B)	(A,C,D,B)	(A,B,D,C)
(D,A,B,C)	(D,A,C,B)	(C,A,D,B)	(B,A,D,C)	(B,A,C,D)	(C,A,B,D)
(C,D,B,A)	(B,D,A,C)	(B,C,A,D)	(C,B,A,D)	(D,B,A,C)	(D,C,A,B)
(B,C,D,A)	(C,B,D,A)	(D,B,C,A)	(D,C,B,A)	(C,D,B,A)	(B,D,C,A)

Se nossos cálculos ignorassem tal fato e o problema fosse considerado apenas um simples caso de permutação, a solução seria, $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, vinte e quatro permutações. Porém, como acabamos de constatar, cada permutação circular se repete 4 vezes, logo a verdadeira quantidade de anagramas é: $24/4 = 6$, seis anagramas distintos.

E se fossem 5 elementos, então cada um deles se repetiria 5 vezes, e assim sucessivamente. Generalizando, para um caso com **n** elementos, temos a fórmula:

$$P_n = \frac{n!}{n} \quad (5)$$

Desenvolvendo-se o numerador em (5), transformando-o em $n \cdot (n-1)!$ e fazendo as devidas divisões, teremos:

$$P_n = (n - 1)! \quad (6)$$

A Análise Combinatória não se resume apenas a permutações, arranjos e combinações, existem outras maneiras de resolução: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio da casa dos pombos, as funções geradoras, a teoria de Ramsey, são outros exemplos de técnicas eficazes para a resolução de alguns problemas. Mas não iremos nos deter a estes, pois além de não pertencerem à lista de tópicos abordados no Ensino Médio, os conceitos de permutações arranjos e combinações, em sua generalidade, resolvem a maioria das situações-problema.

Tendo o aluno absorvido tais conceitos, então nosso trabalho foi executado com êxito.

5 RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS

Depois de definidos os conceitos que serão apresentados aos alunos, devemos definir a melhor maneira de abordá-los.

Cada conceito ou fórmula deve ser conhecido por nós, professores, porém o aluno deve ser levado a desenvolver suas conclusões, as fórmulas não devem ser apenas apresentadas e impostas, assim a abordagem escolhida para a aula deve levar o estudante a analisar o problema e a compreendê-lo em sua essência. Sobre essa aprendizagem superficial que pauta o ensino da Análise Combinatória no emprego direto de fórmulas, Morgado *et al.* (1991, p.2) afirma:

Por outro lado, se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Focar nossas aulas na pura aplicação de leis e receitas é muitas vezes estimulado pelos livros didáticos e apoiado por vários professores. Porém, neste trabalho enfatizamos a importância de buscar desenvolver o raciocínio dos alunos, fazendo com que eles cheguem aos resultados esperados sem a necessidade do trabalho mecânico e limitado do uso exclusivo de fórmulas e mais fórmulas.

Espera-se que o sucesso dos mesmos não venha apenas pela capacidade de memorização, ao contrário, desejamos valorizar a resolução de problemas e com isto a formação de conceitos através de construções cognitivas. Sobre a importância do uso de problemas no processo de aprendizagem, os PCNEM afirmam:

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2009, p.112).

Trabalhar com resolução de problemas envolve considerações linguísticas, psicológicas, conceituais e socioculturais dos indivíduos, o que exige do professor a criação de um ambiente de busca, de descoberta, de tranquilidade e de segurança para aprender, no qual o aluno não hesite em experimentar, levantar hipóteses e testá-las, mesmo correndo o risco de cometer erros.

Sabo (2007, p. 52), ao analisar o conteúdo de Análise Combinatória em livros didáticos do Ensino Médio, acrescentou:

Então, podemos concluir, com relação às técnicas analisadas nesses livros didáticos, que os alunos, apenas, manipulam os procedimentos, utilizando, para isso, algumas técnicas de resoluções que lhe são oferecidas de forma cabal, mas não são compreendidas de fato.

Finalizando, pretendemos minimizar o uso das fórmulas por parte de alunos e professores, pois colocá-las como único e exclusivo método de resolução dificulta o desenvolvimento da interpretação e o entendimento do problema por parte dos alunos. Defendemos, portanto, que inicialmente seja trabalhada a capacidade de interpretação e a livre resolução dos problemas. É extremamente importante para o processo de aprendizagem que eles possam raciocinar livremente sobre as situações combinatórias apresentadas. Depois que os conceitos forem introduzidos e entendidos, então apresentamos as fórmulas, apenas para que possam sintetizar alguns cálculos.

Nossa sugestão é que as aulas sejam iniciadas com uma lista de problemas cuja resolução fará uso de conceitos combinatórios, porém sem nenhuma introdução prévia. Nosso objetivo é deixar a criatividade dos alunos fluir.

É claro que, se eles conhecessem as fórmulas, a resolução seria bem mais rápida, mas nosso intuito é fazê-los raciocinar, usar os conhecimentos aritméticos que já possuem, se for preciso, deixá-los, inclusive, enumerar as possibilidades uma a uma, para que, à medida que eles forem ganhando intimidade com o assunto, enxerguem por si sós que talvez existam caminhos mais simples que os levem ao mesmo resultado.

Neste momento, é de suma importância a intervenção do professor, pois, usando as ideias dos próprios alunos, apresentará os conceitos, e por último, depois que cada situação tenha sido amplamente discutida, enfim indicará as fórmulas.

Dessa forma, o questionário inicial deve ser bem elaborado e conter questões simples, porém que envolvam as principais ideias que serão abordadas posteriormente. Achamos interessante também que as questões tenham valores relativamente pequenos para que, se sentir necessidade, o aluno possa enumerar as possibilidades uma a uma e sinta por ele mesmo o quanto esse método pode ser cansativo e trabalhoso.

Quanto à elaboração destes questionários (APÊNDICES), obedecemos a certo padrão. Inicialmente aplicamos questões que envolvem conceitos de permutação. Na quarta questão, comum a todos, é frequente que os alunos já saibam o resultado, afinal de contas, o dominó é um jogo bastante popular. O interessante neste momento é motivá-los a justificar

este resultado comumente aceito, demonstrando inclusive a presença da Análise Combinatória em qualquer segmento do nosso dia a dia. Por fim, a última questão, talvez a que traga mais dificuldade aos estudantes, envolve um problema de agrupamento, no qual a ordem não altera o resultado.

Neste momento o professor deve apenas observar, inclusive evitando tirar as dúvidas dos alunos, deixando-os, inclusive, cometer erros. Depois, a partir desses erros, poderemos identificar exatamente suas dificuldades e carências, e estudá-las com mais ênfase.

Quanto à aplicação, sugerimos que as duas primeiras aulas sejam destinadas apenas para a resolução dos questionários, levando-se em consideração aulas de 50 minutos, teremos então 100 minutos, que podem ser aplicados em aulas separadas ou geminadas, no segundo caso seria mais proveitoso pois os alunos não teriam acesso a nenhum tipo de pesquisa. É interessante também que os trabalhos sejam respondidos em pequenos grupos, pois é sempre positivo que eles possam discutir entre si os resultados.

Da terceira aula em diante, o professor apresenta a matéria, denominando as situações, expondo conceitos e finalizando com a apresentação das fórmulas. Como um dos nossos objetivos é contextualizar o conteúdo, é sempre bom citar exemplos de situações diárias e corriqueiras, como: as possibilidades de diferentes placas de veículos, as senhas usadas nos bancos, cartões ou até mesmo na internet, o caso recente em que um dígito foi acrescentado aos números de telefone celular da cidade de São Paulo, aplicações em jogos etc.

Já para os estudantes mais experientes, no caso os alunos do 3º ano, também é interessante mostrar a contribuição dos métodos de contagem na demonstração de fórmulas e técnicas utilizadas em outros ramos da matemática, como: determinar quantos tipos de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras podem ser formadas baseando-se na quantidade de elementos do domínio e do contradomínio; a demonstração da fórmula usada para calcular o número de diagonais de um polígono; a demonstração da fórmula usada para calcular o número de subconjuntos de um conjunto; apresentar uma técnica eficiente para encontrar o número de divisores de um número, entre outras.

Para auxiliá-los com uma gama de materiais que podem ser usados durante a elaboração das aulas com sugestões e recursos educacionais, sugerimos o site Portal do Professor, desenvolvido pelo Ministério da Educação em parceria com o Ministério de

Ciência e Tecnologia¹. Os materiais não só ajudaram na elaboração deste trabalho, como ajudam diariamente no planejamento de aulas dos mais variados conteúdos.

No próximo capítulo, avaliaremos alguns erros comuns cometidos pelos alunos. Inclusive, tais erros, podem resultar em um material de trabalho bastante valioso. É interessante trazê-lo para a sala de aula, pois sua observação leva a uma profunda reflexão, proporcionando um aprendizado mais significativo.

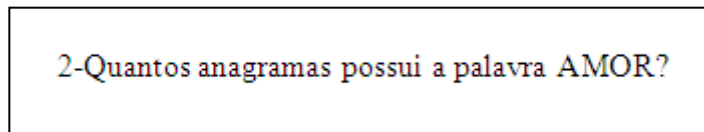
¹ O site citado é: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>

6 DIFICULDADES PREVISTAS

O estudo de algumas possíveis soluções criadas pelos alunos, corretas ou não, ajuda-nos a entender um pouco a maneira como os mesmos encaram as situações-problema comumente propostas, bem como nos torna capazes de prever alguns erros que se tornam repetitivos e comuns. Arquivos pessoais de resoluções de alunos, no decorrer de anos de prática docente, fornecem-nos um rico material de análise. Tentar compreender a maneira como os jovens pensam as resoluções de questões auxilia justamente para que possamos nos anteceder a possíveis dificuldades e a focá-las com mais empenho.

Apresentaremos, ao longo deste capítulo, algumas destas soluções, primeiramente problemas propostos a alunos do 2º ano do Ensino Médio, antes que os mesmos fossem apresentados aos conceitos de Arranjos, Combinações e Permutações.

O problema dos anagramas, por exemplo, é sempre um clássico em livros e avaliações. A questão abaixo foi proposta aos alunos.



2-Quantos anagramas possui a palavra AMOR?

Figura 5: anagramas da palavra AMOR

Alguns alunos tem um ímpeto de querer resolver esta questão enumerando todas as possibilidades, neste caso nem seria assim tão trabalhoso, afinal de contas são apenas 24 anagramas. Porém, escolhendo este método, existe uma grande chance de que algum anagrama seja esquecido, como na solução abaixo, na qual foram pospostos 5 anagramas:

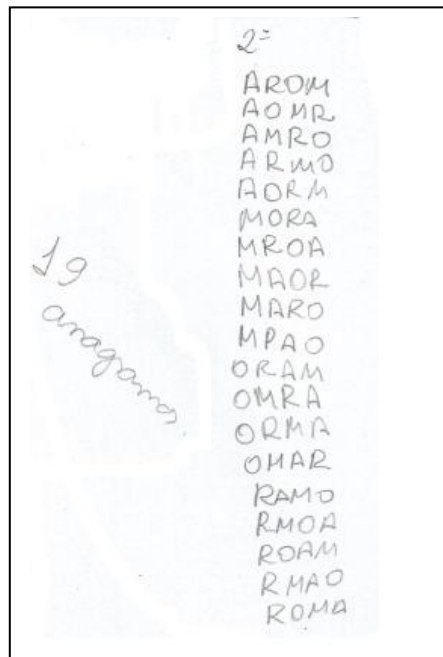


Figura 6: Solução 1 (anagramas de AMOR)

Os alunos que desenvolveram a solução a seguir começaram a enumerar todas as possibilidades, porém notaram que, fixando a primeira letra, a quantidade de anagramas seria constante, então usaram a multiplicação para chegar ao resultado final, diminuindo o esforço. Vejamos:

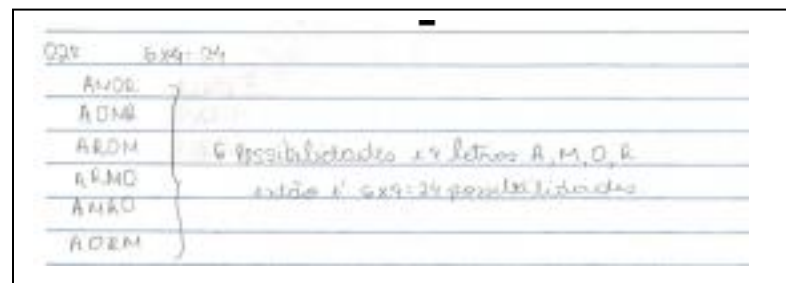


Figura 7: Solução 2 (anagramas de AMOR)

O nível de dificuldade da próxima questão é um pouco maior porque o problema exige que a primeira letra seja O.

2-Quantos anagramas, começando com O, possui a palavra FILHO?

Figura 8: Anagramas da palavra FILHO

Seguindo um raciocínio parecido com o anterior, os alunos fixaram também a segunda letra e encontraram o resultado correto.

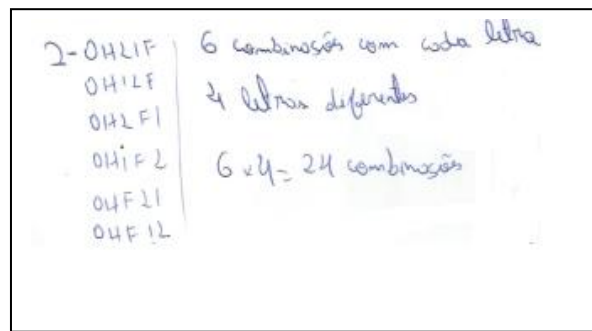


Figura 9: Solução similar a que resolveu o problema dos anagramas da palavra AMOR

Já na questão a seguir, os alunos preferiram enumerar cada uma das possibilidades, como eram poucas e eles foram atenciosos, chegaram ao valor preciso.

5- Um estudante precisa selecionar, entre as disciplinas A, B, C, D, E e F, quatro disciplinas para cursar no próximo semestre letivo, sendo que uma necessariamente precisa ser a disciplina E. O número que indica de quantas maneiras o estudante pode escolher as quatro disciplinas é?

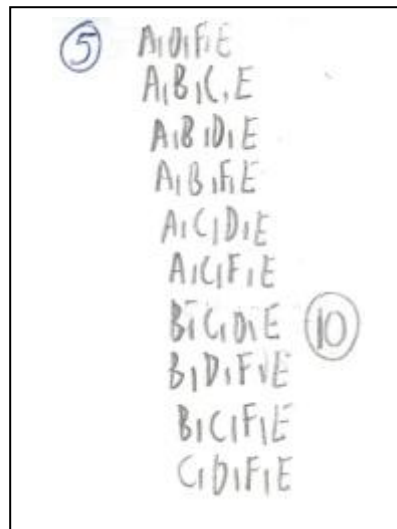


Figura 11: Solução enumerando todas as possibilidades

O exercício proposto a seguir é uma questão de Arranjo, busca saber de quantas maneiras distintas pode ocorrer o pódio de um concurso de beleza.

3- As 5 finalistas de um concurso para Miss Universo são: Miss Japão, Miss Brasil, Miss Finlândia, Miss Argentina e Miss EUA. De quantas formas os juízes poderão escolher o primeiro, o segundo e o terceiro lugares nesse concurso?

Figura 12: Problema concurso de beleza

Na solução destacada, os alunos julgaram quantas possibilidades diferentes existiam para cada colocação e aplicaram o princípio fundamental da contagem. Esta seria uma maneira correta de resolver a situação, porém os alunos consideraram que para cada posição existiam 5 possibilidades diferentes, já que são 5 misses.

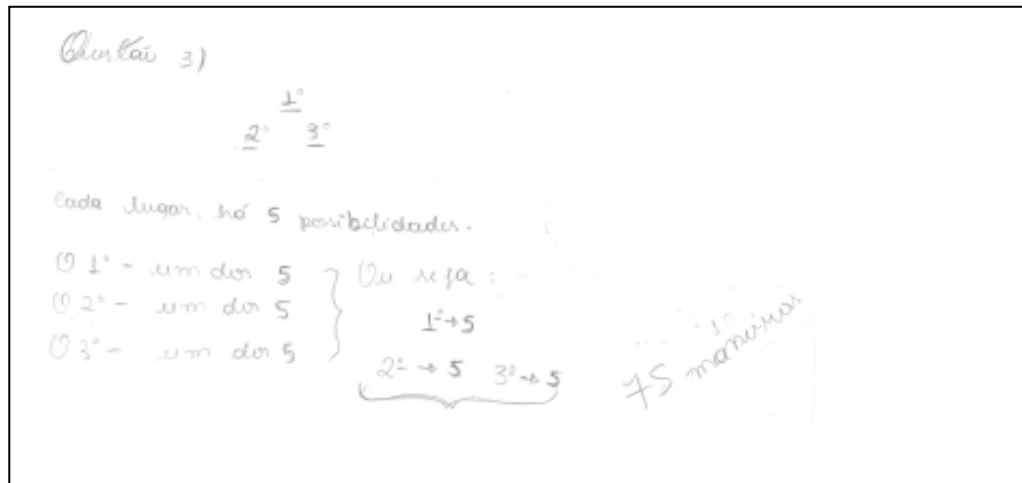


Figura 13: Solução do problema das misses.

Porém, esqueceram-se de considerar que são 5 possibilidades distintas para a escolha do primeiro lugar, mas, uma vez feita esta escolha, restariam apenas 4 possibilidades para o segundo lugar e 3 para o terceiro, e não 5 para cada, como propõe a solução, pois, se uma miss foi escolhida para o primeiro lugar, por exemplo, ela deixa de ser uma possibilidade para as demais colocações. Neste caso, o resultado correto seria $5 \times 4 \times 3 = 60$. Logo, sessenta possibilidades diferentes deste pódio acontecer.

A questão proposta a seguir trata da escolha de 3 sabores de sorvete de um total de 12 disponíveis, a mesma exige dos alunos atenção pela presença da palavra *distintos*, e pela questão da ordem fazer diferença ou não.

5-Em uma sorveteria existem 12 tipos de sorvete, Joana vai escolher dois sabores distintos, de quantas maneiras diferentes ela poderá realizar esta escolha?

Figura 14: Problema proposto

Durante a resolução, os alunos imaginaram que seriam 12 possibilidades para o primeiro sabor, e o mesmo aconteceria para o segundo e para o terceiro. Finalmente, já que o 12 apareceria três vezes, decidiram somá-lo, ou como representaram, fizeram $3 \times 12 = 36$.

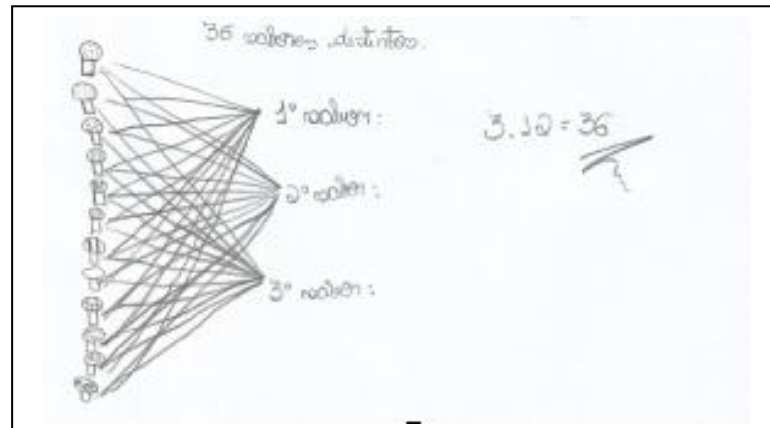


Figura 15: Solução incorreta para o problema da figura 10.

A solução, porém, desconsidera vários aspectos importantes da situação apresentada, e nos faz refletir sobre dois possíveis erros bem clichês. Um deles refere-se à dúvida sobre quando se deve somar ou multiplicar e o outro quanto à questão de a ordem da escolha não alterar o resultado final, caracterizando as Combinações.

Primeiro, os alunos consideram que são 12 possibilidades de sabores para cada escolha e, em seguida, somam este “12” que aparece três vezes, encontrando 36 como resultado.

Esta é uma confusão comum entre os jovens. Em algumas situações, a resolução de um problema é facilitada se for particionada, o problema é que os alunos se atrapalham com os resultados que encontram, e eis que surge uma pergunta clássica: “Professora é pra somar ou pra multiplicar?”.

É importante que eles aprendam que quando a resolução é dividida em situações que podem ocorrer ou não, trazendo uma ideia de alternativa, os resultados devem ser somados, ao contrário, quando se trata de situações que ocorrem simultaneamente, deve-se multiplicá-los. Neste momento delicado, pode-se lançar mão de uma estratégia para tentar amenizar este dilema, chamamos de “Regra do e/ou”. Quando, durante a leitura da questão, as situações analisadas forem interligadas por “ou” deve-se somá-las, caso sejam interligadas por “e”, deve-se multiplicá-las.

No caso discutido, a escolha dos sabores será simultânea, ou seja, seriam escolhidos “o primeiro e o segundo e o terceiro” sabores, portanto, se tivessem este discernimento, os alunos deveriam ter pensado em multiplicar $12 \times 12 \times 12$, e não somar.

Ainda sim, não teríamos o resultado correto, pois o problema fala que a moça irá escolher sabores *distintos*, portanto não teríamos 12 possibilidades para cada sabor, ao contrário, se existem 12 possibilidades para o primeiro sabor, seriam apenas 11 para o segundo e 10 para o terceiro, já que os sabores não podem se repetir, levando ao cálculo $12 \times 11 \times 10 = 1320$. Mas, o

resultado continuará errado, pois a ordem de escolha não altera o resultado, escolher, por exemplo, sorvete de morango, chocolate e creme é a mesma circunstância de escolher creme, chocolate e morango. Porém quando admitimos 1320 como o resultado certo, estamos contando as duas situações descritas acima como se fossem diferentes, contudo são iguais. O resultado encontrado conta, não apenas esta, mas várias sequências de escolhas repetidas vezes, como já foi comentado, é um caso típico de Combinação. Logo, como cada sequência de três sabores pode ser reorganizada 6 vezes, os alunos deveriam ter dividido o resultado por 6, encontrando assim 220 possibilidades, apenas.

A questão a seguir é resolvida de maneira semelhante a que acabamos de discutir.

5-Maria ganhou uma promoção e teve que escolher dois brindes dentre 9 possíveis. De quantas maneiras ela pode fazer esta escolha?

Figura 16: Problema proposto

Das soluções apresentadas, destaco esta:

5. 1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
(8)

(7)

$R = 7+6+5+4+3+2+1 = 36$

Figura 17: Solução correta para o problema anterior

Sem o uso de fórmulas, até mesmo porque eles ainda não as conheciam, os alunos calcularam o resultado corretamente, lembrando de observar que a mudança da ordem da escolha não alteraria o resultado, o que nos mostra que este grupo de estudantes já tem a noção do que virá a ser uma Combinação.

Analisando agora resoluções de alunos do 3º ano do Ensino Médio, temos outras situações para explorar. É importante frisar que os alunos já tinham aprendido todo o conteúdo de Análise Combinatória no ano anterior, inclusive as fórmulas, o exercício seria apenas uma revisão.

O problema proposto foi o seguinte:

A vez das mulheres

Os dados do Censo 2009 sobre o ensino superior no Brasil revelam uma grande evolução do país. Cerca de 1 milhão de brasileiros estão se formando por ano, número que equivale ao dobro do registrado em 2002. O estudo mostrou também que o perfil predominante nas salas de aula é o de mulheres na faixa dos 20 anos.

Considere uma sala de aula com 50 calouros do curso de Comunicação Social. Como, nessa turma, a maioria dos estudantes é do sexo feminino, vão ser escolhidas duas meninas de 21 anos e um menino de 19 para representarem a classe. De acordo com os perfis destes alunos expostos abaixo, calcule o número das diferentes combinações para esse trio.

Turma de Calouros 2011.1 de Comunicação Social

	18 anos	19 anos	20 anos	21 anos
Mulheres	6	8	5	12
Homens	4	6	4	5

Figura 18: Problema proposto aos alunos do 3º ano

As soluções dos alunos foram as mais variadas, separamos algumas que nos mostram o grau de criatividade e também as principais dificuldades enfrentadas para serem comentadas.

Handwritten student solution showing a grid of combinations and calculations:

$JK|KL = 66$
 $JK|JL$
 $66.6 = 396$
 $A-L \rightarrow MULHERES \rightarrow 66$
 $M-R \rightarrow HOMENS \rightarrow 6$
 $M|N|O|P|Q|R = 6$

Figura 19: Solução 1

Na solução 1, os alunos usaram um método bem trivial, a enumeração parcial dos casos. O estudo da Análise Combinatória é importante, justamente, para que não seja necessária tal prática, facilitando a busca pelo resultado. Para alunos iniciantes, seria um bom começo, porém para alunos do 3º ano, os quais já tinham estudado o conteúdo, foi uma solução correta, porém precária.

mulheres

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times 6 \\ \hline 396 \end{array}$$

homens: 6

Total

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times 6 \\ \hline 396 \end{array}$$

Combinações

Figura 20: Solução 2

Os alunos aplicaram a ideia da combinação, calculando as maneiras de escolher duas mulheres e um homem, depois multiplicando ambas chegaram ao resultado final, porém sem usar fórmulas. Este é um de nossos objetivos, fazê-los raciocinar e diferenciar conceitos, sem a necessidade de decorar regras.

M1

M2

M3

M4

M5

M6

M7

M8

M9

M10

M11

H1

H2

H3

H4

H5

H6

$\rightarrow 6 \times 11$

M1 $\rightarrow 6 \times 11 = 66$

M2 $\rightarrow 6 \times 10 = 60$

M3 $\rightarrow 6 \times 9 = 54$

M4 $\rightarrow 6 \times 8 = 48$

M5 $\rightarrow 6 \times 7 = 42$

M6 $\rightarrow 6 \times 6 = 36$

M7 $\rightarrow 6 \times 5 = 30$

M8 $\rightarrow 6 \times 4 = 24$

M9 $\rightarrow 6 \times 3 = 18$

M10 $\rightarrow 6 \times 2 = 12$

Soma de todos os resultados:

396 Combinações diferentes.

Figura 21: Solução 3

Esta solução é bem interessante, principalmente pela criatividade. Os alunos fixaram uma das mulheres e calcularam todas as maneiras de escolher a outra mulher e o outro rapaz. Depois, variaram a escolha da primeira mulher, mas tendo o cuidado de sempre retirar os casos em que esta já tinha sido contada no cálculo anterior, mostrando que tinham a devida noção de

que a ordem na escolha das mulheres não alteraria o resultado. No fim, somaram os resultados de cada mulher.

A solução é um pouco trabalhosa, porém boa. Mostra que a dupla, cuja solução foi única na classe, conhece os conceitos, mas não se prenderam exclusivamente ao uso das fórmulas. Depois que eles entregaram o trabalho, foram questionados: “Por que vocês não usaram as fórmulas?”. A aluna respondeu: “Ah professora, porque eu não lembrava mais como era!”.

Finalizamos este capítulo enfatizando a importância de estarmos em constante avaliação e aperfeiçoamento. Os professores precisam estar sempre dispostos a aprimorar seus conhecimentos e métodos de ensino, e o desempenho dos alunos funciona como um espelho que nos retorna erros e acertos de nossa prática docente. Uma análise das soluções dos alunos, como a que desenvolvemos aqui, pode ser de grande valia no desenvolvimento de futuras atividades, aulas, avaliações e métodos de abordagem do conteúdo, tornando a sala de aula um espaço ainda mais eficiente.

7 MATERIAIS E TECNOLOGIAS

Com a revolução tecnológica e científica a sociedade mudou muito nos mais diversos segmentos, sejam eles culturais, empresariais ou educacionais. Computadores, notebooks, *tablets* e celulares estão cada vez mais modernos e cheios de funções, conseqüentemente, mais inseridos nas nossas atividades diárias. A rapidez nas interações e na transmissão de informações, a conectividade com o mundo inteiro em poucos segundos, a possibilidade de saber o que acontece em qualquer lugar a qualquer hora, enfim, a ideia de “viajar sem sair do lugar” é fascinante, especialmente para os jovens.

Diante de tantas inovações tecnológicas, fica cada vez mais difícil para o professor conseguir a atenção e o interesse dos alunos, não é fácil disputar espaço com tantas novidades. Não podemos esquecer que todos esses recursos foram desenvolvidos para facilitar a vida do homem, portanto, no ramo educacional, não poderia ser diferente.

Neste contexto, ampliam-se as discussões sobre o uso destes novos aparatos em sala de aula. A utilização das novas tecnologias de informação e comunicação como ferramenta que auxilia o processo de aprendizagem ainda é bastante polêmica. De um lado, professores conservadores, presos a tendências antigas, defendem que tanta modernidade ameaça o trabalho do professor, podendo inclusive torná-lo obsoleto. Contrários a este pensamento, estão os que defendem que as transformações nas formas de comunicação e intercâmbio de conhecimentos, desencadeados pelo avanço do uso de tecnologias em diversos âmbitos da sociedade, devem ser acompanhados pelas escolas e pelos professores.

Esta discussão nos traz a reflexão sobre o papel do professor no processo educacional. Em seu livro *Pedagogia da Autonomia*, Paulo Freire (1996, p. 28) apresenta características que traduzem um bom professor:

O professor que pensa certo deixa transparecer aos educandos que uma das bonitezas de nossa maneira de estar no mundo e com mundo, como seres históricos, é a capacidade de, intervindo no mundo, conhecer o mundo. [...] Ao ser produzido, o conhecimento novo supera outro que antes foi novo e se fez velho e se “dispõe” a ser ultrapassado por outro amanhã.

Assim, faz parte da prática docente estar em constante atualização, é uma de nossas atribuições formarmos cidadãos, e não poderíamos cumprir isto dissociando nossa prática dos recursos tecnológicos trazidos pela modernidade, eles estão presentes na vida cotidiana de todos os cidadãos, portanto não podem ser ignorados.

Em nenhum momento, porém, devemos pensar que o professor se fará desnecessário neste segmento, ao contrário, o professor se faz presente como peça fundamental para a elaboração dos materiais, métodos de abordagem, liderança, enfim, ele continua sendo o principal mediador das relações e da aprendizagem em sala de aula, é ele detentor do conhecimento, embora não seja o único, pois não podemos ignorar a bagagem cultural que os alunos nos trazem, porém é o principal.

Finalmente, devemos ter em mente que as máquinas são criadas, desenvolvidas, programadas e manuseadas por seres humanos, são apenas coadjuvantes de um “espetáculo” muito maior que deve ser a aula, não poderiam nunca substituir o trabalho fundamental do mestre. Norteados por este pensamento, devemos fazer das novas tecnologias de informação e comunicação uma ferramenta aliada da Educação.

Ainda sobre o uso de recursos tecnológicos no ensino desta disciplina, Polato (2009, p.23) afirma:

Nenhuma das inovações tecnológicas substitui o trabalho clássico na disciplina, centrado na resolução de problemas. Estratégias como cálculo mental, contas com algoritmos e criação de gráficos e de figuras geométricas com lápis, borracha, papel, régua, esquadro e compasso seguem sendo essenciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Também faz parte das atribuições do docente envolver e estimular o aprendizado dos alunos, tentando ao máximo transformar a ideia de conhecimento inalcançável em praticidade contextualizada com a realidade diária e acessível a todos. Estes novos recursos devem estar a nossa disposição, ajudando a tornar nossas aulas mais interativas e estimulantes.

Neste cenário, softwares educacionais, jogos interativos, apresentação de slides, filmes, planilhas e qualquer outro recurso tecnológico que esteja disponível serão úteis. É sabido que o professor precisa de um treinamento, para que possa ser capaz de lidar com tais aparatos, planejando sua aula com mais eficiência, focando nos pontos principais os quais deseja desenvolver com os estudantes. Assim, todos ganham, teremos professores preparados para ampliar o entendimento e o interesse dos estudantes e fazendo-os, cada vez mais, partes atuantes do projeto pedagógico da escola, e alunos mais interessados, desenvolvidos, detentores de um aprendizado rico e valoroso que os ajudará tanto na vida profissional, como na pessoal.

A fim de colaborar ainda mais com esse processo, apresentamos neste trabalho um software capaz de resolver problemas de Análise Combinatória. Este sistema é capaz de

resolver problemas relativos ao conteúdo, porém precisa que o aluno faça uma interpretação prévia do mesmo.

Ao ser aberto, o programa apresenta a seguinte tela:

```

*****
*
*
* ANALISE COMBINATORIA
*
*
*****
> Ajudaremos voce a resolver problemas de Analise Combinatoria.
> Seu problema representa uma situacao de:
[1] Arranjo
[2] Combinacao
[3] Permutacao

```

Figura 22: Menu inicial do programa.

O menu inicial apresenta as três técnicas que estamos discutindo ao longo deste trabalho. Para escolher uma das opções, o aluno deve ter compreendido previamente a diferença entre as técnicas propostas e, principalmente, deve ter lido o problema o qual deseja resolver e ser capaz de enquadrá-lo em alguma das opções apresentadas. Note que o programa só é útil se o aluno tiver desenvolvido o raciocínio e o devido conhecimento das características que diferenciam Arranjos, Combinações e Permutações.

No caso de escolher o Arranjo, o aluno deverá informar o número total de elementos e o número de “escolhas” que devem ser feitas, como mostra a próxima figura.

```

* Voce escolheu um ARRANJO

Determine o numero total de elementos: 8
Determine o numero de escolhas: 4

┌-----┐
│ Voce tera 1680 possibilidades ! │
└-----┘

```

Figura 23: Exemplo de um Arranjo resolvido pelo programa.

Na imagem temos um exemplo de $A_{8,4}$, ou seja, um arranjo de oito elementos com quatro escolhas, então o programa calcula o total de maneiras distintas nas quais esta escolha pode ser feita.

No caso de escolher uma Combinação, o aluno também deverá informar o total de elementos e o total de escolhas, e o programa mais uma vez calculará o total de possibilidades. Abaixo mostraremos um exemplo cujo programa está calculando a expressão $C_{10,4}$, ou seja, uma combinação de dez elementos com quatro escolhas.

```
* Voce escolheu uma COMBINACAO
Determine o numero total de elementos: 10
Determine o numero de escolhas: 4

-----
A combinacao de 10 elementos 4 a 4 gera 210 possibilidades !
-----
```

Figura 24: Exemplo de uma Combinação resolvida pelo programa.

Se a escolha for uma Permutação, novamente teremos outro menu que apresentará as três possibilidades a seguir:

```
* Voce escolheu uma PERMUTACAO
Determine o tipo de Permutacao:

[1] Permutacao simples
[2] Permutacao com elementos repetidos
[3] Permutacao circular
```

Figura 25: Menu para escolha do tipo de Permutação.

Então o aluno poderá decidir se o problema que deseja resolver é um caso de Permutação Simples, com Elementos Repetidos ou Circular. Sendo uma Permutação Simples, o estudante deverá informar a quantidade de elementos que deseja permutar. No exemplo a seguir, o programa calculou uma permutação de seis elementos.


```
* Voce escolheu uma PERMUTACAO SIMPLES.
Determine a quantidade de elementos:6
┌-----┐
│       O total de permutacoes e 720 !       │
└-----┘
```

Figura 26: Exemplo Permutação Simples resolvido pelo programa.

A situação que exige maior atenção do aluno certamente é a Permutação com Elementos Repetidos, pois ele deverá informar a quantidade de elementos, quantos deles se repetem e quantas vezes cada um dos elementos repetidos aparece, daí então o sistema calculará quantas possibilidades distintas existem. No exemplo abaixo, o cálculo é de uma permutação de seis elementos, com um elemento que aparece duas vezes

```
* Voce escolheu uma PERMUTACAO COM ELEMENTOS REPETIDOS.
Determine a quantidade de elementos: 6
Determine a quantidade de elementos repetidos: 1
Determine o numero de repeticoes de cada elemento:
Elemento 1: 2
┌-----┐
│       O total de permutacoes e 360 !       │
└-----┘
```

Figura 27: Exemplo Permutação com Elementos Repetidos resolvido pelo programa.

Finalmente, sendo uma Permutação Circular deve apenas ser informada a quantidade de elementos. Abaixo, temos uma Permutação Circular de seis elementos.

```
* Voce escolheu uma PERMUTACAO CIRCULAR.
Determine a quantidade de elementos:6
┌-----┐
│       O total de permutacoes e 120!       │
└-----┘
```

Figura 28: Exemplo Permutação Circular resolvido pelo programa.

Utilizando este programa em sala de aula será maior a interação entre os alunos e, principalmente, entre os alunos e o computador, justificando nosso maior objetivo que é

resolver problemas de Combinatória, abreviando o trabalho mecânico das contas que levariam ao resultado. Dispomos aqui de uma excelente maneira de mostrarmos aos nossos alunos que os computadores foram feitos para auxiliar o homem nas mais diversas tarefas do cotidiano, porém, se não dispusermos do conhecimento prévio essencial para programá-los, de nada suas complexas funções irão nos servir.

Sobre isto, Valente (1998, p. 30) afirma:

Diante de uma situação problema, o aprendiz tem que utilizar toda sua estrutura cognitiva para descrever para o computador os passos para a resolução do problema, utilizando uma linguagem de programação, realizando o ciclo descrição – execução – reflexão – depuração – descrição, que é de extrema importância na aquisição de novos conhecimento.

Também pode ser interessante usar o programa como uma maneira de certificar-se quanto aos cálculos, se estão sendo feitos corretamente. O aluno pode resolver a questão em seu caderno e, em seguida, usar o programa para garantir a veracidade de sua solução, tornando-o até um pouco mais independente.

Depois de seguida a sequência sugerida por este trabalho de resolução inicial de problemas, apresentação dos conceitos e apresentação do programa, esperamos que os alunos terminem este ciclo dominando a resolução de questões que envolvem a Análise Combinatória, cientes de sua aplicabilidade no dia a dia.

8 POSSÍVEIS DESDOBRAMENTOS

Finalmente, depois de todas as conclusões, deixo três possíveis encaminhamentos para este trabalho.

Primeiramente, apresentamos neste trabalho os conceitos básicos da Combinatória: Arranjos Simples, Combinações Simples e Permutações. Depois que os alunos aprendem o assunto com segurança, o professor pode ampliar ainda mais o conhecimento dos mesmos, a partir daqui podem ser exploradas diferentes situações envolvendo diversas técnicas mais apuradas que exigem um conhecimento mais aprofundado, além de maior familiaridade com o conteúdo que discutimos. Uma boa sugestão seria dedicar-se aos princípios das Combinações Completas e o de Inclusão-Exclusão.

Combinações completas são aquelas nas quais elementos podem ser escolhidos repetidas vezes. Por exemplo, se uma pessoa vai a uma sorveteria e dispõe de dez sabores diferentes e pode escolher três, esta escolha é uma combinação, que será Simples se os sabores escolhidos forem diferentes entre si, ou Completa, se a escolha dos sabores puder ser repetida. De um modo geral, $C_{n,p}$ é o número de modos de escolher p objetos distintos entre n objetos dados, e $CR_{n,p}$ (Combinação Completa) é o número de modos distintos ou não entre n objetos distintos dados (MORGADO *et al.*, 1991).

O Princípio da Inclusão-Exclusão é útil não apenas na Análise Combinatória, como também na resolução de problemas envolvendo Conjuntos ou Probabilidade. É importante quando queremos contar elementos de conjuntos não necessariamente disjuntos, situação na qual precisamos ter cuidado para não contabilizar os elementos da interseção dos conjuntos mais de uma vez.

As outras duas sugestões referem-se ao programa apresentado. O software proposto neste trabalho poderia, além de calcular todas as possibilidades de algo acontecer, enumerá-las. É comum que os alunos fiquem um pouco desconfiados quanto aos resultados de quantidades de anagramas de uma palavra ou maneiras distintas de formar comissões, mas se sentem convencidos se puderem comprovar situação por situação. Obviamente, na maioria dos casos, seria inviável mostrá-las individualmente, logo, se o computador pudesse expor estes resultados, seria bem interessante.

Finalmente, caso o professor tenha uma turma mais seleta de alunos dispostos a aprofundar cada vez mais seu domínio tanto de conhecimentos matemáticos, como de suas aplicações, é muito válido apresentar a eles as linhas de código do programa apresentado. Todo o software foi desenvolvido na linguagem C++, considerada de médio nível, e bastante

poderosa na criação de sistemas. São utilizadas poucas funções e de fácil entendimento, principalmente para quem possui um raciocínio lógico e matemático aprofundado. É necessário que no computador esteja instalado um Ambiente de Desenvolvimento Integrado, nele o programa poderá ser desenvolvido e compilado. Com uma leitura inicial das funções básicas e uma análise detalhada das linhas de código, em anexo, quem sabe não estaremos estimulando os engenheiros e programadores do amanhã?

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Adriana Luziê de; FERREIRA, Ana Cristina. Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com Ênfase na Comunicação Matemática. **Coleção Cadernos de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática**. s/d. Disponível em: <http://www.pppedmat.ufop.br/arquivos/livreto_Adriana_Luzie.pdf>. Acesso em: 08 fev. 2013.
- BEZERRA, Edson Alves. **A Educação e as Novas Tecnologias**. Mato Grosso: s/ ed. 2007. Disponível em: <<http://www.webartigos.com/artigos/a-educacao-e-as-novas-tecnologias/3050/#ixzz2MODQCzNx>>. Acesso: 16 fev. 2013.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. v. 2. Brasília: MEC, 2006. 135 p.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010. p. 274-293.
- FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**. 30. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. p. 26-32.
- GIMENES, Rafael Schaffer. **Enciclopédia do estudante: Matemática II**. São Paulo: Moderna, 2008. p. 252-269.
- HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar: combinatória e probabilidade**. vol. 5. 5 ed. São Paulo: Atual, 1985. p. 1-45.
- LAGES LIMA, Elon. *et al.* **Temas e problemas elementares**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. p.123-134.
- LEITE, Maici Duarte. *et al.* Softwares Educativos e Objetos de Aprendizagem: um olhar sobre a Análise Combinatória. *In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 10., 2009, Ijuí. **Anais...** Ijuí: UNIJUÍ, 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_46.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2012.
- MORGADO, Augusto César. *et al.* **Análise combinatória e probabilidade**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991. p. 1-81.
- POLATO, Amanda. Ferramentas tecnológicas nas aulas de matemática. **Revista Nova Escola**, São Paulo, n. 223, jun./jul. 2009. Disponível em: <<http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/ferramentas-tecnologicas-aulas-matematica-476002.shtml>> Acesso em: 2 mar. 2013.
- SABO, Ricardo Dezso. **Análise de livros didáticos do ensino médio: um estudo dos conteúdos referentes à combinatória**. 2007. 54 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Centro Universitario Fundação Santo André, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Santo André, 2007.

SCHILDT, Herbert. **C, completo e total**. Tradução de Marcos Ricardo Alcântara Morais. São Paulo: Makron Books: McGraw-Hill, 1990. p. 3-276.

STURN, Wilton. **As possibilidades de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa**. 1999. 132 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000224683&opt=1>>. Acesso em: 02 nov. 2012.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO I

1. Ana vai a uma sorveteria e pede uma bola de sorvete e uma cobertura. Existem cinco sabores de sorvete e três tipos de calda, quantos tipos diferentes de combinação sorvete-cobertura ela poderá pedir?

2- Quantos anagramas possui a palavra AMOR?

3- Um campeonato de futsal será decidido em um quadrangular final envolvendo as seguintes seleções: Brasil, Itália, Espanha e Argentina. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser formado?

4- Quantas pedras existem em um jogo de Dominó?

5- Maria ganhou uma promoção e teve que escolher dois brindes dentre nove possíveis. De quantas maneiras ela pode fazer esta escolha?

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO II

1- Uma sala possui três portas. Quantas possibilidades existem para que uma pessoa possa entrar e sair desta sala?

2-Quantos anagramas, começando com O, possui a palavra FILHO?

3-João, Ana, Pedro e Maria disputam as vagas de síndico, subsíndico e tesoureiro do prédio onde moram. De quantas maneiras distintas estes cargos podem ser ocupados?

4-Quantas pedras existem em um jogo de Dominó?

5-A professora irá escolher três, dentre sete alunos, para fazer um passeio. De quantas maneiras ela poderá realizar esta escolha?

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO III

1-Maria possui três saias e duas blusas, de quantas maneiras diferentes ela pode formar conjuntos (saia e blusa)?

2-De quantas maneiras diferentes podemos organizar quatro pessoas em uma fila?

3-As cinco finalistas de um concurso para Miss Universo são: Miss Japão, Miss Brasil, Miss Finlândia, Miss Argentina e Miss EUA.De quantas formas os juízes poderão escolher o primeiro, o segundo e o terceiro lugares nesse concurso?

4- Quantas pedras existem em um jogo de Dominó?

5-Em uma sorveteria existem doze tipos de sorvete, Joana vai escolher dois sabores distintos, de quantas maneiras diferentes ela poderá realizar esta escolha?

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO IV

1.Existem quatro caminhos que levam da cidade A até a cidade B, e dois cominhos que levam de B a A. Quantos caminhos diferentes João pode fazer para ir de A para B e em seguida voltar para a cidade A?

2-De quantas maneiras podemos distribuir três presentes para três pessoas, de modo que cada uma ganhe exatamente um presente?

3- Um mapa de quatro regiões deve ser colorido com uma cor diferente para cada região. Se dispomos de seis cores distintas,de quantos modos diferentes o mapa pode ser colorido?

4- Quantas pedras existem em um jogo de Dominó?

5-Um estudante precisa selecionar, entre as disciplinas A, B, C, D, E e F, quatro disciplinas para cursar no próximo semestre letivo, sendo que uma necessariamente precisa ser a disciplina E. O número que indica de quantas maneiras o estudante pode escolher as quatro disciplinas é?

APÊNDICE E – LINHAS DE CÓDIGO DO PROGRAMA ANÁLISE COMBINATÓRIA

```

#include <stdio.h>

#include <stdlib.h>

int fatorial(int x) {
    if (x==0) return 1;
    return x*fatorial(x-1);
}

int main() {

    /* Definição de variáveis */

    long int n, p, repet[50];

    long int arr, comb, permut;

    long int menu, i, m;

    /* Cabeçalho do programa */

    printf("*****\n");
    printf("                *\n");
    printf("                *\n");
    printf("          ANALISE COMBINATORIA          *\n");
    printf("                *\n");
    printf("                *\n");
    printf("*****\n");
    printf("%c",16);
    printf(" Ajudaremos voce a resolver problemas de Analise Combinatoria.\n\n");
    printf("%c",16);

```

```
printf(" Seu problema representa uma situacao de:\n\n");
printf("[1] Arranjo\n");
printf("[2] Combinacao\n");
printf("[3] Permutacao\n\n");
scanf("%u", &menu);

system("cls");

switch (menu) {

    case 1:

        printf("\n\n* Voce escolheu um ARRANJO\n");
        printf("\n\nDetermine o numero total de elementos: ");
        scanf("%u", &n);
        printf("Determine o numero de escolhas: ");
        scanf("%u", &p);

        arr = fatorial(n)/fatorial(n-p);
        printf("\n%c-----%c", 457,443);
        printf("\n      Voce tera %d possibilidades !\n", arr);
        printf("%c-----%c\n", 456,444);

        break;

    case 2:

        printf("\n\n* Voce escolheu uma COMBINACAO\n");
        printf("\n\nDetermine o numero total de elementos: ");
        scanf("%u", &n);
```

```

printf("Determine o numero de escolhas: ");
printf("\n  A combinacao de %d elementos %d a %d gera %d possibilidades !\n",n,p,p,comb );
    printf("%c-----%c\n\n", 456,444);
    break;

case 3:
    printf("\n\n* Voce escolheu uma PERMUTACAO\n");
    printf("\n\nDetermine o tipo de Permutacao:\n");
    printf("\n\n[1] Permutacao simples\n");
    printf("[2] Permutacao com elementos repetidos\n");
    printf("[3] Permutacao circular\n\n");
    scanf("%u", &menu);
    system("cls");

    switch (menu) {

        case 1:
            printf("\n\n* Voce escolheu uma PERMUTACAO SIMPLES.\n\n");
            printf("Determine a quantidade de elementos:");
            scanf("%u", &n);
            permut=fatorial(n);
            printf("\n%c-----%c", 457,443);
            printf("\n  O total de permutacoes e %d !", permut);
            printf("\n%c-----%c\n\n", 456,444);
            break;

        case 2:
            printf("\n\n* Voce escolheu uma PERMUTACAO COM ELEMENTOS REPETIDOS.\n\n");
            printf("Determine a quantidade de elementos: ");

```

```

printf("Determine a quantidade de elementos repetidos: ");
scanf("%u", &p);

printf("Determine o numero de repeticoes de cada elemento:\n");
m =1;
for (i=0;i<p;i++){
    printf("\nElemento %d: ", i+1);
    scanf("%d", &repet[i]);

    permut = m*fatorial(repet[i]);
    m = permut
}
permut = fatorial(n)/m;
printf("\n%c-----%c", 457,443);
printf("\n    O total de permutacoes e %d !\n", permut);
printf("%c-----%c\n\n", 456,444);
break

case 3:
    printf("\n\n* Voce escolheu uma PERMUTACAO CIRCULAR.\n\n");
    printf("Determine a quantidade de elementos:");
    scanf("%u", &n);
    permut=fatorial(n-1);
    printf("\n%c-----%c", 457,443);
    printf("\n    O total de permutacoes e %d!", permut);
    printf("\n%c-----%c\n\n", 456,444);
    break;
}
}

system("PAUSE");
return 0;

```