



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**PAULO DE OLIVEIRA MENESES**

**TEOREMA DE PICK E TEOREMA ESPACIAL TIPO-PICK:  
DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO**

**FORTALEZA**

**2016**

PAULO DE OLIVEIRA MENESES

TEOREMA DE PICK E TEOREMA ESPACIAL TIPO-PICK:  
DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

510 Meneses, Paulo de Oliveira  
Teorema de Pick e teorema espacial tipo-Pick: demonstrações e aplicações no ensino médio / Paulo de Oliveira Meneses. – 2016.  
84 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

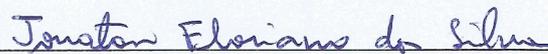
1. Teorema de Pick. 2. Área. 3. Teorema de Reeve. 4. Volume. I. Título.

“TEOREMA DE PICK E TEOREMA ESPACIAL TIPO-PICK: DEMONSTRAÇÕES  
E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

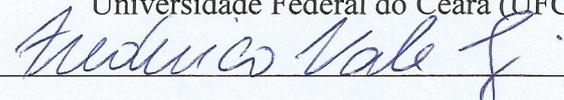
Aprovada em: 18 / 06 / 2016.

BANCA EXAMINADORA



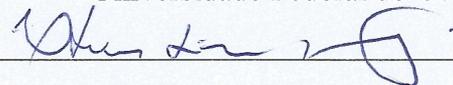
Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Frederico Girão Vale

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Ulisses Lima Parente

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que  
contribuíram direta ou indiretamente com a  
sua realização.

## AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Frederico Vale Girão e Prof. Dr. Ulisses Lima Parente pelo tempo dedicado, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores e alunos que participaram das atividades aplicadas, pelo tempo concedido.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões.

A minha esposa, pela compreensão e apoio.

“ Talvez seja bom ter uma mente bonita, mas um dom ainda maior é descobrir um coração bonito.”

John Forbes Nash

## RESUMO

Estudos mostram que o desempenho do aluno em Matemática não é satisfatório, pois apenas uma pequena parcela desses alunos tem os conhecimentos necessários para prosseguir nos estudos. O presente trabalho visa criar ferramentas que possam auxiliar e melhorar as práticas em sala de aula, mais precisamente nos estudos de Geometria. Apresentaremos o Teorema de Pick, que visa calcular a área de um polígono simples usando contagem, analisando os pontos do bordo e do interior da figura em uma rede fixada, tornando-se uma ferramenta de uso simples e poderosa para a compreensão do estudo de áreas. Logo em seguida, mostraremos o Teorema de Reeve que, de modo análogo a Pick, calcula o volume de um poliedro convexo contando os seus pontos de rede, trabalhando em uma rede secundária de pontos  $\mathbb{Z}_n^3$ , realizando um elo entre Geometria e contagem.

**Palavras-chave:** Teorema de Pick; Área; Teorema de Reeve; Volume.

## ABSTRACT

Studies show that the performance of students in Mathematics is not satisfactory, since only a small portion of these students has the knowledge needed to pursue studies. The present work aims to create tools that can assist and improve classroom practices, more precisely in the studies of Geometry. We will present by counting Pick's Theorem, which calculates the area of a simple polygon by counting the points of the boundary and of the interior of the figure on a fixed lattice, making it a powerful tool of simple use for the understanding of the study of areas. Then we will present Reeve's Theorem that, similarly to Pick's, calculates the volume of a convex polyhedron by counting their lattice points, working on a secondary lattice of points  $\mathbb{Z}_n^3$ , making a link between Geometry and counting.

**Keywords:** Pick's Theorem; Area; Reeve's Theorem; Volume.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pick . . . . .	16
Figura 2 – Rede . . . . .	18
Figura 3 – Hexágono . . . . .	18
Figura 4 – Triângulo retângulo . . . . .	19
Figura 5 – Triângulos fundamentais . . . . .	19
Figura 6 – Retângulo $OCHD$ . . . . .	20
Figura 7 – Divisão do polígono. . . . .	21
Figura 8 – Decomposição do triângulo $ABC$ . . . . .	22
Figura 9 – Decomposição do triângulo $DEF$ . . . . .	23
Figura 10 – Retângulo e triângulos retângulos . . . . .	25
Figura 11 – Retângulo subdividido . . . . .	26
Figura 12 – Justaposição . . . . .	27
Figura 13 – Polígono $P$ dividido em polígonos $P_1$ e $P_2$ . . . . .	29
Figura 14 – Poliedro com $F_t = F + 1$ . . . . .	30
Figura 15 – Subdivisão . . . . .	31
Figura 16 – Região $R$ com buracos . . . . .	34
Figura 17 – Região $R$ com 3 buracos . . . . .	35
Figura 18 – Triângulo $Q$ . . . . .	36
Figura 19 – Quadrado $Q$ . . . . .	37
Figura 20 – Tetraedro fundamental . . . . .	39
Figura 21 – Paralelepípedo . . . . .	39
Figura 22 – Tetraedro $T_1$ . . . . .	41
Figura 23 – Poliedro $P$ . . . . .	42
Figura 24 – Segmento $AB$ . . . . .	43
Figura 25 – Segmento $AB$ particionado para $n = 4$ . . . . .	44
Figura 26 – Uma face de um tetraedro fundamental . . . . .	46
Figura 27 – Tetraedro de Reeve particionado para $n = 4$ . . . . .	48
Figura 28 – Coluna entre as duas primeiras camadas . . . . .	50
Figura 29 – Colunas entre as duas primeiras camadas . . . . .	51
Figura 30 – Base de um tetraedro fundamental particionado para $n = 4$ . . . . .	52
Figura 31 – Parte do poliedro dividido em cubos . . . . .	54
Figura 32 – Interseção de $T_1$ e $T_2$ . . . . .	56
Figura 33 – Cubo . . . . .	57
Figura 34 – Tetraedro . . . . .	58
Figura 35 – Geoplano . . . . .	61
Figura 36 – Polígonos na rede . . . . .	62

Figura 37 –Malha . . . . .	63
Figura 38 –Polígono simples . . . . .	64
Figura 39 –Mapa de Fortaleza . . . . .	65
Figura 40 –Resposta do aluno 15 . . . . .	66
Figura 41 –Resposta do aluno 14 . . . . .	66
Figura 42 –Resposta do aluno 14 . . . . .	66
Figura 43 –Resposta do aluno 17 . . . . .	67
Figura 44 –Resposta do aluno 17 . . . . .	67
Figura 45 –Pirâmides na grade . . . . .	67
Figura 46 –Poliedro na grade . . . . .	69
Figura 47 –Pirâmide na grade . . . . .	70
Figura 48 –Resposta do aluno 1 . . . . .	71
Figura 49 –Resposta do aluno 1 . . . . .	71
Figura 50 –Resposta do aluno 3 . . . . .	71
Figura 51 –Resposta do aluno 1 . . . . .	72
Figura 52 –Resposta do aluno 3 . . . . .	72
Figura 53 –Construção da pirâmide . . . . .	73
Figura 54 –Grupo de professores . . . . .	74
Figura 55 –Resposta do professor 1 . . . . .	75
Figura 56 –Resposta do professor 1 . . . . .	75
Figura 57 –Resposta do professor 1 . . . . .	75
Figura 58 –Resposta do professor 1 . . . . .	76
Figura 59 –Resposta do professor 1 . . . . .	76
Figura 60 –Polígonos na rede . . . . .	79
Figura 61 –Malha . . . . .	80

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pontos para $n = 2$ . . . . .	40
Tabela 2 – Pontos para $n = 3$ . . . . .	41
Tabela 3 – Pontos para $n = 4$ . . . . .	41
Tabela 4 – Contagem e área . . . . .	63
Tabela 5 – Contagem e área . . . . .	79

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$B$	Pontos de bordo (fronteira) do polígono simples
$I$	Pontos internos do polígono simples
$P$	Polígono $P$
$S_P$	Área do polígono $P$
$S_i$	Soma dos ângulos internos de um polígono
$T$	Número de triângulos fundamentais de um polígono
$V$	Número de vértices de um polígono
$A$	Número de arestas de um polígono
$F$	Número de faces de um polígono
$A(R)$	Área do polígono $R$
$\mathbb{Z}_n^3$	Rede secundária de pontos de rede
$B_n$	Pontos de bordo da rede secundária
$I_n$	Pontos internos da rede secundária

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	14
2	APRESENTAÇÃO HISTÓRICA . . . . .	15
2.1	<i>Breve histórico sobre o cálculo de áreas</i> . . . . .	15
2.2	<i>Biografia de Georg Alexander Pick</i> . . . . .	16
3	O TEOREMA DE PICK . . . . .	18
3.1	<i>Rede no plano</i> . . . . .	18
3.2	<i>Apresentação do Teorema de Pick</i> . . . . .	18
3.3	<i>Triângulo fundamental</i> . . . . .	19
3.4	<i>Demonstrações do teorema de Pick</i> . . . . .	23
3.4.1	<i>Demonstração por triângulos fundamentais</i> . . . . .	24
3.4.2	<i>Demonstração por indução finita</i> . . . . .	28
3.5	<i>Relação entre o Teorema de Pick e o Teorema de Euler</i> . . .	29
3.6	<i>Extensões para o teorema de Pick</i> . . . . .	33
4	VOLUME DE POLIEDROS COM PONTOS DE REDE . . . . .	38
5	ATIVIDADES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PICK E O VOLUME DE POLIEDROS COM PONTOS EM $\mathbb{Z}_n^3$ . . . . .	61
5.1	<i>Atividade 1: Geoplano e o cálculo de área de polígonos simples</i>	61
5.2	<i>Atividade 2: Cálculo do volume de poliedros em uma grade</i> .	67
5.3	<i>Atividade 3: Oficina sobre o Teorema de Reeve</i> . . . . .	72
6	CONCLUSÃO . . . . .	77
	REFERÊNCIAS . . . . .	78
	ANEXOS . . . . .	79

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa apresentar um modo de calcular áreas de polígonos simples e volumes de poliedros convexos, usando somente contagem. Apresentaremos, inicialmente, o Teorema de Pick, formulado pelo austríaco Georg Alexander Pick, que visa trabalhar áreas de polígonos simples com vértices de coordenadas inteiras. Para uma rede fixada, é possível tal cálculo efetuando-se a contagem dos pontos que estão no seu perímetro e no seu interior.

Com a leitura de alguns trabalhos na área, como LIMA, E. L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*, fiquei conhecendo o Teorema de Pick, que apesar do seu enunciado simples, é fascinante, pois, com uma malha quadriculada (rede) e um polígono simples, é possível calcular sua área de modo lúdico, apenas contando os pontos da malha que estão no polígono. O Teorema de Pick mostra ser uma possibilidade a mais para o estudo de áreas de figuras planas, pois evita a utilização de muitas relações já existentes, e mostra uma liberdade para trabalhar em polígonos simples, sejam eles regulares ou não, convexos ou não.

Dando sequência ao estudo sobre o Teorema de Pick, fiquei curioso para saber se havia algo semelhante ao mesmo para calcular volume de poliedros. Foi aí que me deparei com alguns artigos que falavam sobre o Teorema Espacial Tipo-Pick, o Teorema de Reeve, que calcula o volume de poliedros convexos com vértices de coordenadas inteiras. É fato que precisamos de uma ferramenta nova, a rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ , que viabiliza a contagem dos pontos de rede para calcular o volume.

Realizando o estudo sobre o Teorema de Reeve, ele nos permite agregar assuntos, como estudo dos números racionais, álgebra linear e contagem. Isso faz uma associação importante entre alguns campos da Matemática.

No capítulo final, faremos aplicações do Teorema de Pick e do Teorema de Reeve, mostrando métodos interessantes que são úteis na sala de aula, dando liberdade para os participantes criarem as suas figuras, calculando a área e o volume com os teoremas propostos.

Neste trabalho, queremos criar novas possibilidades de abordagem sobre área e volume, novas ferramentas que possam ser utilizadas por professores brasileiros nas suas práticas em sala de aula, tornando o aprendizado de área e volume mais significativo, simples e objetivo.

## 2 APRESENTAÇÃO HISTÓRICA

### 2.1 *Breve histórico sobre o cálculo de áreas*

O estudo de áreas de figuras planas está diretamente ligado aos conceitos de geometria Euclidiana, que surgiu na Grécia antiga, e tinha objetos de estudo específicos: o ponto, a reta e o plano. Desde a antiguidade, o homem tinha a necessidade de determinar a medida da superfície de áreas, com o objetivo de plantar e construir moradias, organizando uma melhor ocupação do terreno. Analisando a palavra geometria, podemos chegar ao seu significado etimológico: geo (terra) e metria (medida). Resumidamente, a geometria foi criada para atender as necessidades do homem.

Linhas e formas sempre tinham sido importantes para as civilizações antigas, em particular para a demarcação de territórios e campos. Esse era um problema muito mais sério para os egípcios, pois o Nilo tinha o costume de encher todos os anos, varrendo os limites de fazendas e lotes. A cuidadosa divisão da terra com novos limites a cada ano tornou-se conhecida como geometria, que vem das palavras gregas *geo*, que significa terra, e *metrein*, que significa medida. Quando as ideias de usar números para definir linhas e formas se difundiram, a palavra também se espalhou, e hoje a geometria é associada unicamente a linhas e polígonos.

Linhas e formas simples eram tão comumente usadas que muitas das ideias foram exploradas por matemáticos que viveram em tempos tão remotos quanto 800 a.C. Os pitagóricos estudaram formas como os triângulos ao investigar e provar o teorema pitagórico. (Bentley, 2010, p.57)

Os sacerdotes eram encarregados de arrecadar impostos sobre a terra utilizada, e, provavelmente, o cálculo da área era feito de forma intuitiva com um golpe de vista. Certa vez, observando trabalhadores pavimentando com mosaicos quadrados uma superfície quadrangular, um sacerdote deve ter observado que, para conhecer o total de mosaicos, era necessário contar os mosaicos de uma fileira e repetir por quantas fileiras houvesse. Desse modo, nasce a fórmula da área do retângulo: *base x altura*. Logo depois, desenvolveram uma maneira para calcular a área de um triângulo usando quadrado e retângulo. A ideia era traçar a diagonal do quadrado ou retângulo e dividir por 2, encontrando, assim, a área do triângulo. Dessa forma, a área do triângulo é a metade da área do quadrado ou do retângulo. Quando o terreno não tinha forma retangular ou triangular, utilizavam triangulação, que era um método de divisão da área em triângulos. Desta maneira, a soma das áreas dos triângulos resulta na área do terreno.

O processo de triangulação apresentava algumas falhas, pois existiam terrenos não planos ou com curvas, surgindo, assim, a necessidade de calcular comprimento de circunferência e área de círculo. Com uma corda, fixava-se uma ponta e girava-se a corda esticada em torno desse ponto fixo, gerando uma circunferência. Essa corda, que hoje

chamamos de raio, tinha uma relação com o comprimento da circunferência, independente do tamanho da corda. Observou-se que essa corda caberia pouco mais de seis vezes e um quarto. Desse modo, concluíram que o comprimento da circunferência poderia ser dado por 6,28 vezes a medida da corda (raio), hoje conhecida como  $C = 2.\pi.R$ , onde  $\pi \approx 3,14$ . Logo em seguida, o homem, comparando um círculo de raio  $R$  e um quadrado de lado medindo  $R$ , conseguiu comprovar que a área do círculo era três vezes maior e quatro vezes menor que a área do quadrado, ou, aproximadamente, três vezes e um sétimo (atualmente 3,14)

O cálculo de áreas, que hoje está bem desenvolvido, exhibe métodos bem específicos para a sua realização. Resultados que antigamente eram mostrados com muita dificuldade, hoje se tornam mais práticos com o uso de ferramentas existentes, por exemplo, o cálculo diferencial e integral, que permite o cálculo de áreas entre curvas. O objetivo desse trabalho é mostrar para o leitor um importante teorema, que visa calcular a área de um polígono usando contagem dos pontos de rede: O Teorema de Pick.

## 2.2 *Biografia de Georg Alexander Pick*

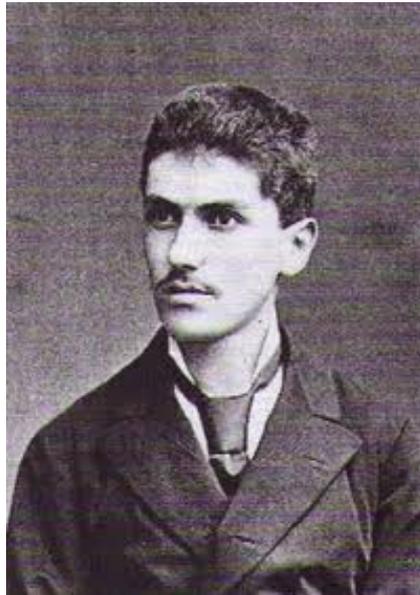


Figura 1: Pick

Georg Alexander Pick nasceu em uma família judia no ano de 1859, em Viena. Pick foi educado pelo seu pai até os 11 anos de idade, quando entrou no *Leopoldstaedter Communal Gymnasium*, ficando até o ano de 1875. No mesmo ano, fez exames e entrou para a universidade.

Em 1875, entrou na Universidade de Viena, publicando seu primeiro artigo matemático, no ano seguinte, com apenas 17 anos. Graduou-se em 1879, tendo quali-

ficação para ensinar Matemática e Física. Entrando para o doutorado, foi orientado por Leo Königsberger, concluindo em 16 de abril de 1880 com a dissertação *Über eine Klasse abelscher Intégrale*, tendo Emil Weyr como segundo examinador da tese.

Dos 67 trabalhos publicados, Pick é lembrado pelo teorema que leva o seu nome, em um trabalho de 8 páginas, lançado em 1899. O Teorema de Pick é a geometria reticular, tornando o plano em uma rede quadriculada, com o objetivo de calcular a área de um polígono reticular com coordenadas inteiras. O teorema nos diz que dado um polígono simples, sejam  $B$  o número de pontos da fronteira (bordo),  $I$  o número de pontos interiores, então a sua área  $S$  é dada pela seguinte fórmula:

$$S = \frac{B}{2} + I - 1.$$

A exemplificação e demonstração deste teorema será dada posteriormente.

Pick tornou-se reitor da faculdade Alemã de Praga, orientando cerca de vinte alunos para os seus doutoramentos. Em 1910, participou da comissão criada pela universidade de Praga para nomear Albert Einstein para a cadeira de Física. Pick foi o principal incentivador para tal nomeação, que aconteceu em 1911. Albert Einstein ocupou o cargo até 1913, e, durante estes anos, os dois se tornaram amigos, compartilhando interesses científicos.

Em 1927, aposentou-se de suas atividades acadêmicas e foi nomeado professor emérito da Universidade de Praga. Logo após a sua aposentadoria, voltou para Viena, sua cidade natal. Em 1938 ele retornou a Praga, quando as tropas alemãs marcharam pela Áustria. No fim de 1938, o governo de Praga foi obrigado a ceder todas as cidades dos estados da Boemia e Morávia para a Alemanha, já que cinquenta por cento da população era de origem alemã. Logo em seguida, Hitler invadiu o restante do país com seu exército. Em 1941, os nazistas criaram o campo de concentração theco de Theresienstadt, em Nordboehmen, para abrigar idosos, privilegiados e famosos judeus. Pick foi enviado para Theresienstadt em 13 de julho de 1942, e morreu em 26 de julho de 1942.

### 3 O TEOREMA DE PICK

#### 3.1 *Rede no plano*

Uma rede ou malha quadriculada é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente em linhas verticais e horizontais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou vertical é igual a 1.

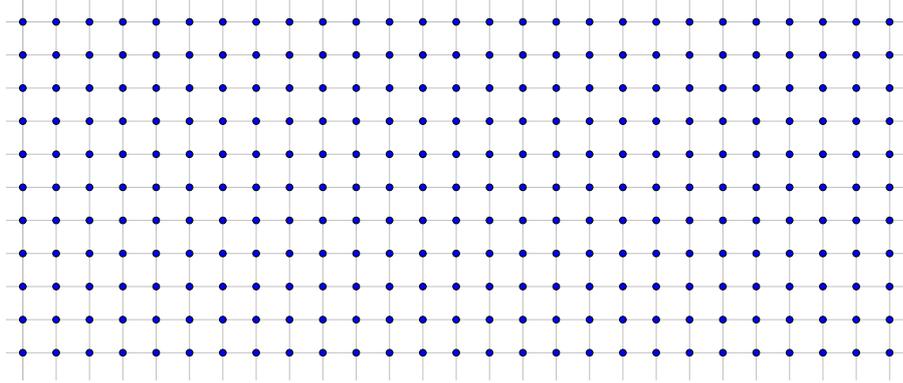


Figura 2: Rede

Todo o estudo sobre cálculo de área, com o uso do teorema de Pick, será desenvolvido com o uso da rede.

#### 3.2 *Apresentação do Teorema de Pick*

A área de um polígono simples cujos vértices são coordenadas inteiras de uma rede é dada pela fórmula  $S = B/2 + I - 1$ , em que  $S$  representa área,  $B$  o número de pontos localizados no bordo e  $I$  o número de pontos localizados no interior do polígono. Vejamos alguns exemplos:

##### **Exemplo 1.**

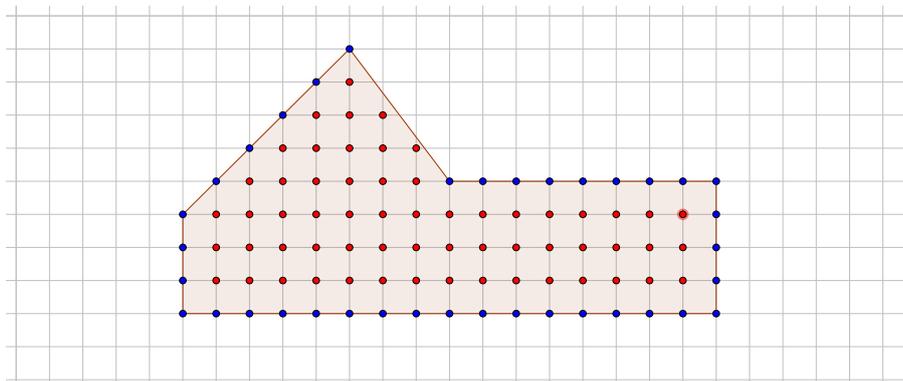


Figura 3: Hexágono

Os pontos azuis representam os pontos do bordo (B), e os pontos vermelhos representam os pontos do interior (I). Desse modo,  $B = 37$  e  $I = 60$ , temos:

$$S = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{37}{2} + 60 - 1 = 18,5 + 59 = 77,5 \text{ ua}$$

**Exemplo 2.**

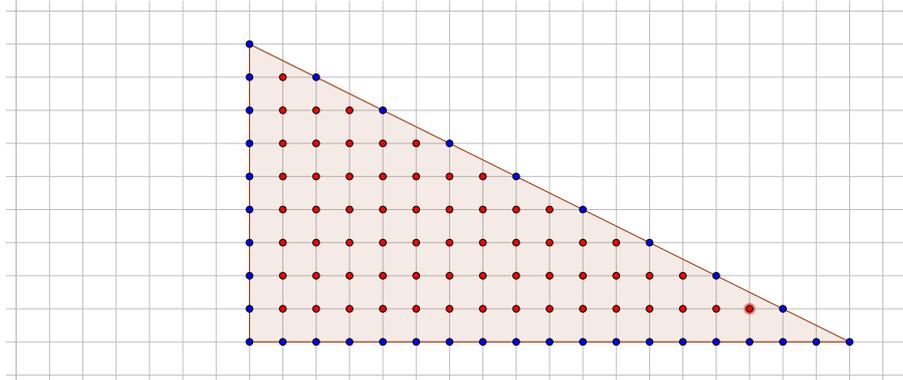


Figura 4: Triângulo retângulo

$B = 36$  e  $I = 64$ , temos:  $S = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{36}{2} + 64 - 1 = 18 + 63 = 81 \text{ ua}$

O Teorema de Pick, publicado em 1899, é um facilitador para o cálculo de áreas, pois deixamos de lado fórmulas já conhecidas para realizar uma contagem e determinar o valor de sua área. Vale lembrar que essa fórmula só é válida para polígonos simples e, para prová-la, precisamos de alguns teoremas e definições que facilitarão essa demonstração.

### 3.3 Triângulo fundamental

**Definição 1.** *Dado uma rede no plano, um triângulo é dito fundamental quando possui os três vértices e mais nenhum outro ponto, da borda ou interior, sobre a rede.*

Vejamos alguns exemplos.

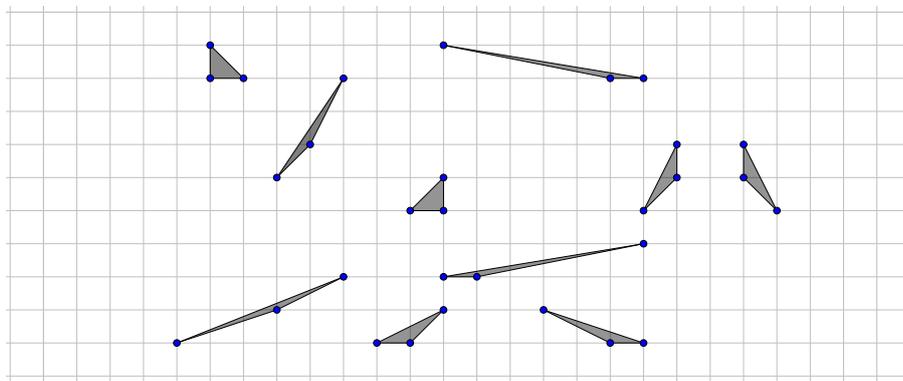


Figura 5: Triângulos fundamentais

**Proposição 1. (Área de um Triângulo fundamental)** A área de um triângulo fundamental é  $1/2$ .

*Demonstração.* Seja  $CDE$  um triângulo fundamental e seja  $OCHD$  um retângulo que contém  $CDE$ . Podemos supor que  $CD$  é uma diagonal do retângulo, como mostra a figura 6.

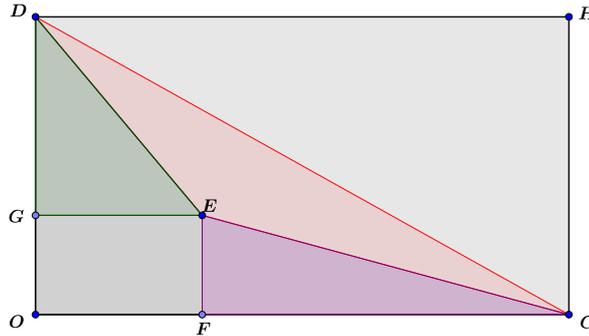


Figura 6: Retângulo  $OCHD$

Temos os segmentos  $EF$  e  $EG$ , perpendiculares a  $OC$  e  $OD$ , respectivamente; o ponto  $O$  é a origem e  $OC$  e  $OD$  são os eixos cartesianos;  $F(p, 0)$ ,  $C(q, 0)$ ,  $G(0, r)$  e  $D(0, s)$ .

$I_{(P)}$  representa o número de pontos interiores de um polígono, o que nos leva a concluir que  $I_{(OCHD)} = (q - 1)(s - 1)$ . Como  $CD$  é lado de um triângulo fundamental, não possui outros pontos de coordenadas inteiras além de  $C$  e  $D$  então,  $I_{(OCD)} = \frac{1}{2}I_{(OCDH)} = \frac{1}{2}(q - 1)(s - 1)$ . De modo análogo,  $I_{(CEF)} = \frac{1}{2}(q - p - 1)(r - 1)$  e  $I_{(DEG)} = \frac{1}{2}(p - 1)(s - r - 1)$ . Como  $CDE$  não contém nenhum ponto interior, pois é fundamental, então  $I_{(OCD)} - I_{(CEF)} - I_{(DEG)} = pr$  representa o número de pontos de  $OFEG$  excluindo os pontos dos segmentos  $OG$  e  $OF$ . Dessa forma, utilizando a última relação, temos:

$$I_{(OCD)} - I_{(CEF)} - I_{(DEG)} = pr$$

$$\frac{1}{2}(q - 1)(s - 1) - \frac{1}{2}(q - p - 1)(r - 1) - \frac{1}{2}(p - 1)(s - r - 1) = pr$$

Desenvolvendo a relação acima, obtemos:  $qs - ps - qr = 1$ .

Considerando que  $S_{(P)}$  representa a área de um polígono, então:

$$S_{(CDE)} = S_{(OCD)} - S_{(CEF)} - S_{(DEG)} - S_{(OFEG)}$$

$$S_{(CDE)} = \frac{1}{2}qs - \frac{1}{2}(q - p)r - \frac{1}{2}(s - r)p - pr$$

$$S_{(CDE)} = \frac{1}{2}(qs - ps - qr)$$

$$S_{(CDE)} = \frac{1}{2}.$$

Logo, a área de um triângulo fundamental é  $\frac{1}{2}$ . ■

A Proposição 2, muito usada na geometria plana, trata da decomposição de um polígono de  $n$  lados, em  $(n - 2)$  triângulos justapostos. Para fazer essa demonstração, usaremos indução finita.

**Proposição 2. (Decomposição do polígono de  $n$  lados)** *Todo polígono de  $n$  lados pode ser decomposto como a reunião de  $(n - 2)$  triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

*Demonstração.* Para  $n = 3$ , temos um triângulo, portanto a Proposição 2 vale. O mesmo acontece para  $n = 4$ , pois o quadrilátero se divide em dois triângulos.

Admitiremos como verdade que, se o polígono possui  $n$  lados, então divide-se em  $(n - 2)$  triângulos. Como no enunciado da proposição, queremos provar que, se  $P$  possui  $(n + 1)$  lados, então divide-se em  $(n - 1)$  triângulos.

Seja  $P$  um polígono com  $(n + 1)$  lados. Tomando dois vértices não consecutivos do polígono  $P$ , de tal forma que eles sejam as extremidades de um segmento contido em  $P$ , dividiremos o polígono simples  $P$  em dois polígonos simples  $A$  e  $B$ , como na figura 7. Ao dividir, o número de lados de cada um deles é menor do que ou igual a  $n$ .

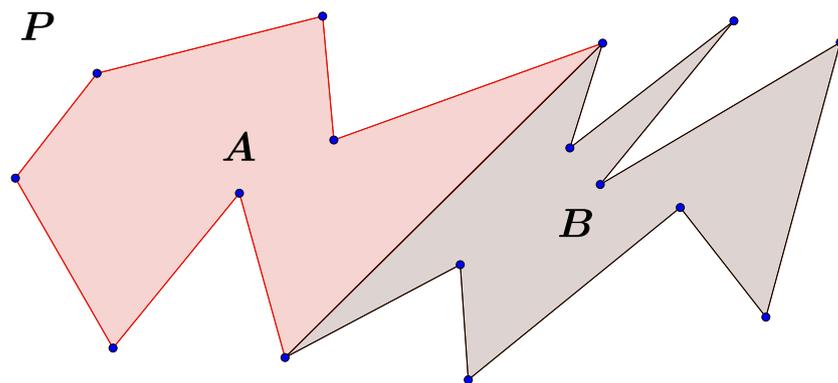


Figura 7: Divisão do polígono.

$A$  possui  $n_a$  lados e  $B$  possui  $n_b$  lados, onde  $n_a, n_b \leq n$ . Por hipótese de indução,  $A$  divide-se em  $(n_a - 2)$  triângulos e  $B$  em  $(n_b - 2)$  triângulos, com todos os vértices dos triângulos sendo vértices do polígono  $P$ .

Veja que o polígono  $P$  possui  $(n + 1)$  lados, onde  $n + 1 = n_a + n_b - 2$ , o que implica dizer que  $n_a + n_b = n + 3$ . O polígono  $P$  possui  $(n_a - 2 + n_b - 2)$  triângulos ao todo, e como  $n_a + n_b = n + 3$ , então  $P$  possui  $n_a + n_b - 4 = n + 3 - 4 = (n - 1)$  triângulos. Isso mostra que a Proposição 2 é válida para  $(n + 1)$ .

Logo, por indução finita, se  $P$  possui  $n$  lados, então pode ser decomposto em  $(n - 2)$  triângulos com vértices nos vértices do polígono  $P$ . ■

Nos próximos resultados, Corolário 1 e Proposição 3, usaremos a Proposição 2 para realizar suas demonstrações.

**Corolário 1. (Soma dos ângulos internos de um polígono)** *A soma dos ângulos internos ( $S_i$ ) de um polígono de  $n$  lados é igual a  $S_i = (n - 2)180^\circ$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2, um polígono de  $n$  lados pode ser decomposto em  $(n - 2)$  triângulos com vértices nos vértices do polígono, tendo em cada triângulo  $180^\circ$  como soma dos ângulos internos. Logo, a soma dos ângulos internos ( $S_i$ ) é dada por  $S_i = (n - 2)180^\circ$ . ■

**Proposição 3. (Decomposição de um polígono em triângulos fundamentais)** *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais*

*Demonstração.* Pela Proposição 2, podemos decompor o polígono de  $n$  lados em  $(n - 2)$  triângulos com vértices nos vértices do polígono, logo, analisaremos apenas um dos triângulos da decomposição do polígono, pois todas as etapas que serão colocadas nesta demonstração servirão para os demais triângulos.

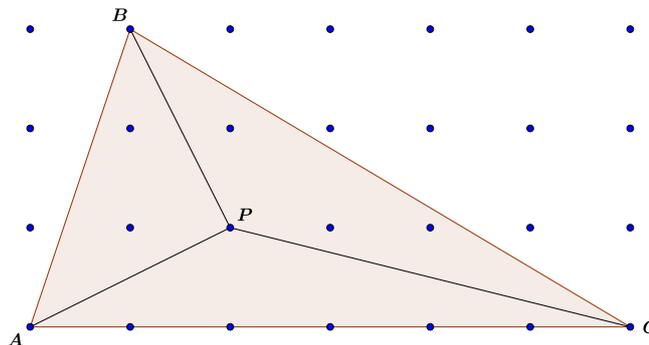


Figura 8: Decomposição do triângulo  $ABC$

Dado um triângulo  $ABC$ , com vértices inteiros e pontos de rede no seu interior, tome um desses pontos que chamaremos de  $P$ . Partindo de  $P$ , podemos traçar segmentos  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$  tendo assim os triângulos  $PAC$ ,  $PAB$  e  $PBC$ , como mostra a figura 8. Se existem pontos de rede no interior dos triângulos  $PAC$ ,  $PAB$  e  $PBC$ , tomaremos

um ponto de rede no interior de cada um dos triângulos e repetiremos o processo nos triângulos  $PAC$ ,  $PAB$  e  $PBC$ . Em cada triângulo formado do procedimento anterior, tomaremos sempre um ponto de rede interno, formando novos triângulos, até que não existam mais pontos internos nos triângulos formados, transformando o triângulo  $ABC$  em uma união de triângulos menores com vértices nos pontos de rede.

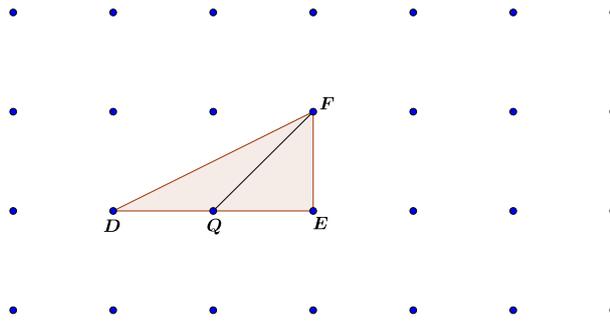


Figura 9: Decomposição do triângulo  $DEF$

Caso os triângulos menores, formados na decomposição citada, possuam algum ponto de rede na borda além dos seus vértices, tomando um desses triângulos, podemos decompor esse triângulo em dois triângulos tomando como referência o ponto de bordo citado, como mostra a figura 9. Repetindo o procedimento em todos os triângulos formados em um número finito de etapas, se ainda existirem pontos no bordo além dos seus vértices, formaremos triângulos fundamentais. Logo, todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais. ■

Demonstraremos, agora, o Teorema de Pick por triângulos fundamentais, utilizando a Proposição 3, que trata da decomposição do polígono simples em triângulos fundamentais.

### 3.4 *Demonstrações do teorema de Pick*

Apresentaremos agora duas demonstrações para o Teorema de Pick. Os resultados exibidos até agora servirão para provar o Teorema de Pick por triângulos fundamentais. A demonstração a seguir é baseada na demonstração do LIMA, E. L. no livro Meu professor de Matemática e outras histórias. A outra forma será por indução finita.

**Teorema 1. (Teorema de Pick)** *Se  $P$  é um polígono simples cujos vértices pertencem a uma rede, com  $B$  pontos de rede no bordo do polígono,  $I$  pontos de rede no interior do polígono e  $A(P)$  a área do polígono  $P$ , então  $A(P) = \frac{B}{2} + I - 1$ .*

### 3.4.1 Demonstração por triângulos fundamentais

*Demonstração.* Usando a Proposições 2 e 3,  $P$  pode ser decomposto em  $T$  triângulos fundamentais, em que a área de cada triângulo fundamental é  $1/2$ . Dessa forma, a área do polígono  $P$  é  $T/2$ . Devemos mostrar que  $T = B + 2I - 2$ .

Vamos calcular a soma dos ângulos internos dos  $T$  triângulos fundamentais que compõem o polígono  $P$ . Se temos  $T$  triângulos fundamentais, então, pelo Corolário 1, a soma dos seus ângulos internos é igual a  $180^\circ T$ . Por outro lado, temos  $S_b$  como a soma dos ângulos que têm vértices no bordo de  $P$ ;  $S_i$  a soma dos ângulos que têm vértices no interior de  $P$ ;  $B_1$  o número de vértices de  $P$ ;  $B_2$  o número de pontos da rede que estão sobre o bordo de  $P$  mas não são vértices de  $P$ . Veja que,  $B = B_1 + B_2$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} S_b &= (B_1 - 2)180^\circ + B_2 180^\circ \\ &= (B_1 + B_2 - 2)180^\circ \\ &= (B - 2)180^\circ \end{aligned}$$

Em cada ponto da rede interior a  $P$ , os ângulos que o têm como vértice somam  $360^\circ$ , logo  $S_i = 360^\circ I$ . Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} S_b + S_i &= (B - 2)180^\circ + 360^\circ I \\ &= (B + 2I - 2)180^\circ \end{aligned}$$

Veja que,  $S_b + S_i$  representa a soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais formados no polígono  $P$ . Assim, temos:

$$T180^\circ = (B + 2I - 2)180^\circ$$

$$T = B + 2I - 2$$

$$\frac{T}{2} = \frac{B}{2} + I - 1$$

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1. \quad \blacksquare$$

Uma outra maneira de provar o Teorema de Pick é usando indução finita. Antes de realizar a demonstração por indução, devemos mostrar que o teorema é válido para um triângulo qualquer.

**Proposição 4.** *Dado uma rede, seja  $T$  um triângulo qualquer com coordenadas inteiras, então é válido o Teorema de Pick.*

*Demonstração.* Iniciaremos provando o resultado para um triângulo retângulo. Considere  $R$  o retângulo de coordenadas inteiras obtidos a partir de  $T$ , como na figura 10. traçamos sua diagonal, determinamos dois triângulos retângulos com catetos medindo  $x$  e  $y$ . Sejam  $I$  o número de pontos do interior de  $T$ , “ $s$ ” o número de pontos interiores de  $R$  pertencentes à hipotenusa de  $T$  e  $B$  o número de pontos de bordo de  $T$ .

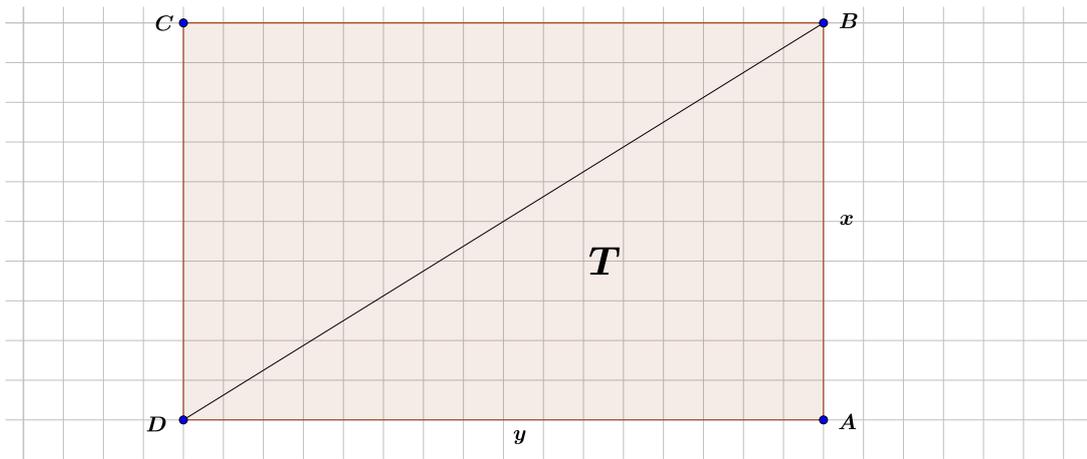


Figura 10: Retângulo e triângulos retângulos

O retângulo possui  $(y - 1)(x - 1)$  pontos no seu interior. Dessa forma, temos:

$$B = x + y + s + 1. \quad (1)$$

$$I = \frac{(y - 1)(x - 1) - s}{2}. \quad (2)$$

Substituindo (1) e (2) no número de Pick, temos:

$$\begin{aligned} \frac{B}{2} + I - 1 &= \\ &= \frac{(y - 1)(x - 1) - s}{2} + \frac{(x + y + s + 1)}{2} - 1 \\ &= \frac{xy}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema de Pick é válido para os triângulos retângulos. Agora, visto que todo retângulo é uma justaposição de dois triângulos retângulos, usando o Corolário 2 e o Teorema de Pick, vale para retângulos.

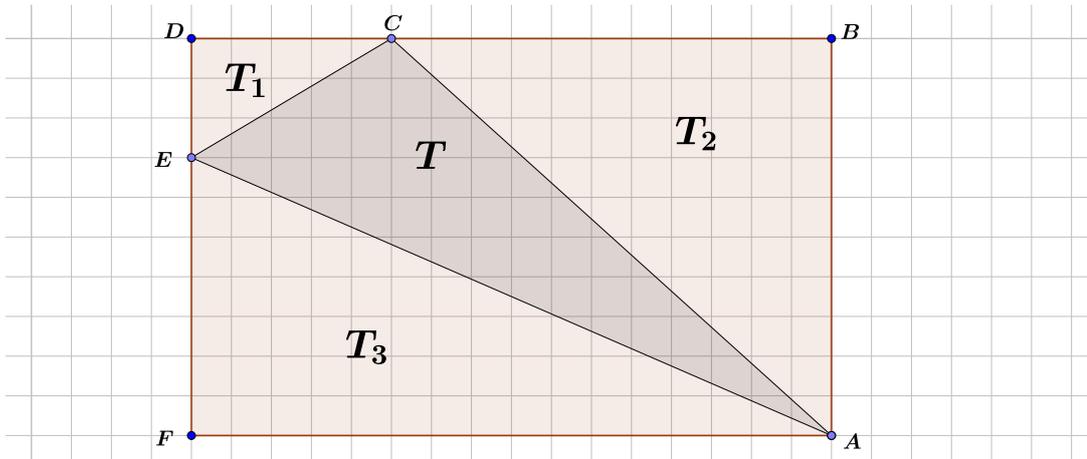


Figura 11: Retângulo subdividido

Usando o fato de que o número de Pick é válido para triângulos retângulos e retângulos, mostraremos que vale para um triângulo qualquer com coordenadas nos pontos de rede.

Dado  $T$  um triângulo qualquer, podemos construir três triângulos  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  tal que na justaposição é um retângulo  $R$ , como apresentado na figura 11. Visto que o Teorema de Pick vale para  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $R$ , considere  $A(P)$  como a área do polígono  $P$ ,  $B_P$  o número de pontos de rede no bordo do polígono  $P$  e  $I_P$  o número de pontos de rede no interior do polígono  $P$ . Veja que:

$$\begin{aligned} R &= T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \Rightarrow \\ A(R) &= A(T) + A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) \Rightarrow \\ A(T) &= A(R) - A(T_1) - A(T_2) - A(T_3). \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação acima, temos que:

$$\begin{aligned} A(T) &= \\ &= \left( \frac{B_R}{2} + I_R - 1 \right) - \left( \frac{B_{T_1}}{2} + I_{T_1} - 1 \right) - \left( \frac{B_{T_2}}{2} + I_{T_2} - 1 \right) - \left( \frac{B_{T_3}}{2} + I_{T_3} - 1 \right) \\ &= \frac{B_R - B_{T_1} - B_{T_2} - B_{T_3}}{2} + I_R - I_{T_1} - I_{T_2} - I_{T_3} + 2 \\ &= -\frac{(B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3}) - B_R}{2} + I_R - I_{T_1} - I_{T_2} - I_{T_3} + 2 \\ &= -\frac{B_T}{2} + (I_T + B_T - 3) + 2 \\ &= \frac{B_T}{2} + I_T - 1. \end{aligned}$$

Logo, o Teorema de Pick é válido para um triângulo  $T$  qualquer. ■

Aqui mostraremos a validade do Teorema de Pick para a justaposição de dois polígonos, ou seja, considerando que o Teorema de Pick vale para os dois polígonos justapostos, mostraremos que vale para a união.

**Definição 2.** Um polígono simples  $P$  é a justaposição de polígonos simples  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , se tivermos  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ , em que, tomando dois polígonos distintos  $P_i$  e  $P_j$ , com  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , eles tem os interiores disjuntos dois a dois.

**Corolário 2.** Dado o polígono  $P = P_1 \cup P_2$ , se  $P$  é a justaposição de dois polígonos  $P_1$  e  $P_2$  ao longo de pelo menos uma aresta, então o número de Pick do polígono  $P$  é igual à soma dos números de Pick dos dois polígonos  $P_1$  e  $P_2$ .

*Demonstração.* Para realizar essa demonstração, usaremos justaposição de dois polígonos ao longo de pelo menos uma aresta comum. Consideremos dois polígonos  $P_r$  (polígono rosa) e  $P_a$  (polígono azul).

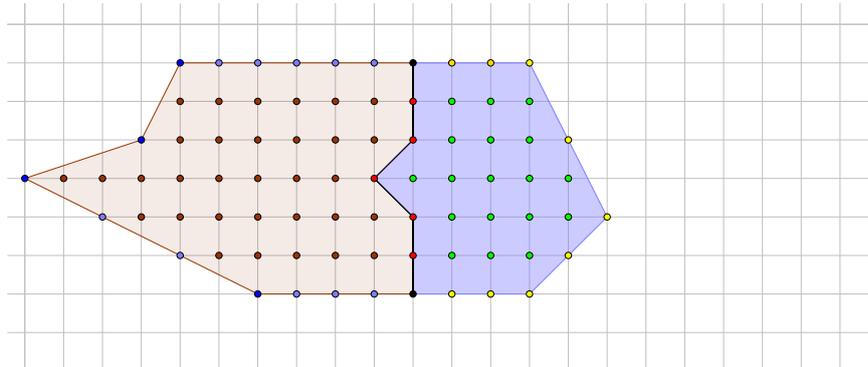


Figura 12: Justaposição

Suponhamos que o número de pontos do interior e de bordo dos polígonos  $P_r$  e  $P_a$  são  $I_r$  e  $B_r$ ;  $I_a$  e  $B_a$  respectivamente. Considerando a união de  $P_r$  e  $P_a$ , obtemos um polígono  $P$  com  $I$  pontos interiores e  $B$  pontos de bordo, como temos na figura 12. Se  $A(P_k)$  representa a área do polígono  $P_k$ , então é fato que,  $A(P) = A(P_r) + A(P_a)$ . Dessa forma, devemos provar que:

$$\frac{B}{2} + I - 1 = \left( \frac{B_r}{2} + I_r - 1 \right) + \left( \frac{B_a}{2} + I_a - 1 \right). \quad (3)$$

Justapondo os polígonos  $P_r$  e  $P_a$ , os pontos de rede situados nas arestas comuns de  $P_r$  e  $P_a$  serão pontos interiores do polígono  $P$ , com exceção de dois deles, que serão

pontos de bordo de  $P$ . Seja  $k$  o número de pontos comuns de  $P_r$  e  $P_a$  internos a  $P$  (na figura 12 temos  $k = 5$ ), então:

$$I = I_r + I_a + k. \quad (4)$$

Calculando  $B$ , devemos retirar  $k$  de  $B_r$  e de  $B_a$ , pois depois da justaposição dos polígonos  $P_r$  e  $P_a$ , esses  $k$  pontos ficaram no interior de  $P$ . Devemos observar o fato de que dois desses pontos (pretos) estão sendo contado duas vezes, portanto retiraremos 2 da contagem final.

$$B = (B_r - k) + (B_a - k) - 2 = B_r + B_a - 2k - 2. \quad (5)$$

Desenvolvendo a expressão  $A(P_r) + A(P_a)$  e usando os resultados obtidos em (4) e (5), temos:

$$\begin{aligned} A(P_r) + A(P_a) &= \\ &= \left( \frac{B_r}{2} + I_r - 1 \right) + \left( \frac{B_a}{2} + I_a - 1 \right) \\ &= \frac{B_r + B_a}{2} + I_r + I_a - 2 \\ &= \frac{B + 2k + 2}{2} + I - k - 2 \\ &= \frac{B}{2} + k + 1 + I - k - 2 \\ &= \frac{B}{2} + I - 1. \end{aligned}$$

Portanto, provamos que o Teorema de Pick é aditivo. ■

Usando a Proposição 4 e o Corolário 2, mostraremos que o Teorema de Pick é válido por indução finita.

### 3.4.2 Demonstração por indução finita

*Demonstração.* Seja  $n$  é o número de lados de um polígono simples com vértices inteiros em uma rede. Para  $n = 3$ , temos um triângulo qualquer, portanto é válida a fórmula de Pick, como foi mostrado na Proposição 4.

Admitiremos que à fórmula de Pick é válida para qualquer polígono simples de coordenadas inteiras com  $t$  vértices, tal que  $t \leq n$  com  $n, t \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 3$ . Queremos provar que à fórmula de Pick é válida para qualquer polígono com  $(n + 1)$  vértices com coordenadas inteiras.

Seja  $P$  um polígono com vértices de coordenadas inteiras  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ .

Podemos dividi-lo em dois polígonos,  $P_1$  e  $P_2$ , traçando um segmento que une dois vértices não consecutivos, de tal forma que esse segmento não faça intersecção com nenhum lado do polígono. Tomemos, então, sem perda de generalidade,  $A_1A_k$  esse segmento. Assim, temos o polígono  $P_1$  com vértices  $A_1, A_2, \dots, A_k$  e  $P_2$  com vértices  $A_1, A_k, A_{k+1}, \dots, A_{n+1}$ , como mostra a figura 13.

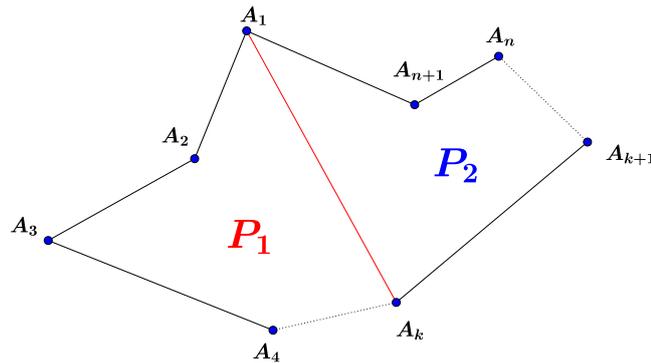


Figura 13: Polígono  $P$  dividido em polígonos  $P_1$  e  $P_2$

$P_1$  e  $P_2$  possuem, no máximo,  $n$  vértices, portanto, por hipótese de indução, vale à fórmula de Pick para  $P_1$  e  $P_2$ . Agora, visto que o polígono  $P$  é a justaposição de  $P_1$  e  $P_2$ , pelo Corolário 2, a área de um polígono simples de  $n$  lados com coordenadas inteiras é  $\frac{B}{2} + I - 1$ . ■

Associaremos, agora, o Teorema de Pick com o Teorema de Euler para poliedros planos.

### 3.5 Relação entre o Teorema de Pick e o Teorema de Euler

Para mostrar a relação entre o Teorema de Pick e o Teorema de Euler para poliedros planos, devemos inicialmente provar o Teorema de Euler. A demonstração a seguir é baseada no livro Fundamentos de Matemática Elementar, volume 10, dos autores Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo.

**Teorema 2. (Teorema de Euler)** Para todo poliedro plano com  $F$  faces,  $V$  vértices e  $A$  arestas, temos  $V - A + F = 1$ .

*Demonstração.* Provaremos o teorema por indução finita referente ao número de faces. Para  $F = 1$ , temos um polígono com  $n$  arestas e  $n$  vértices. Assim, temos:  $V - A + F =$

$n - n + 1 = 1$ , portanto para  $F = 1$  o teorema é válido. Para um poliedro plano  $P$  com  $F$  faces ( $F \geq 1$ ),  $V$  vértices e  $A$  arestas, admitiremos como verdade que  $V - A + F = 1$ . Queremos provar que para um poliedro plano com  $F_t$  faces,  $V_t$  vértices e  $A_t$  arestas, onde  $F_t = F + 1$ , vale  $V_t - A_t + F_t = 1$ .

Acrescentando ao poliedro plano  $P$  uma face com  $r$  arestas e considerando que  $s$  dessas arestas coincidem com as arestas já contabilizadas, obtemos uma nova superfície com  $F_t$  faces,  $V_t$  vértices e  $A_t$  arestas tais que  $F_t = F + 1$ ,  $V_t = V + r - (s + 1)$  e  $A_t = A + r - s$ , como mostra a figura 14.

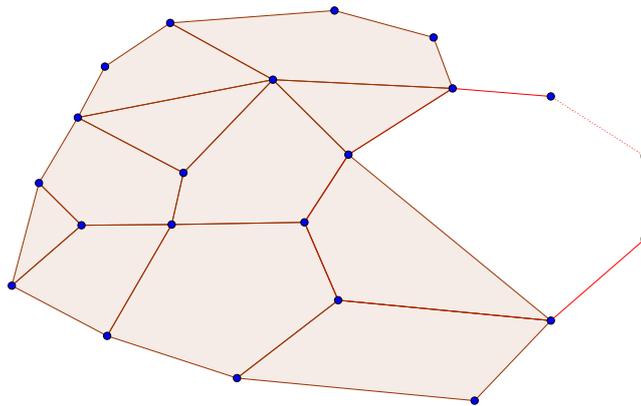


Figura 14: Poliedro com  $F_t = F + 1$

Substituindo  $F_t$ ,  $V_t$  e  $A_t$  em  $V_t - A_t + F_t$ , temos:

$$\begin{aligned}
 V_t - A_t + F_t &= \\
 &= V + r - (s + 1) - (A + r - s) + F + 1 \\
 &= V + r - s - 1 - A - r + s + F + 1 \\
 &= V - A + F.
 \end{aligned}$$

Como, por hipótese de indução,  $V - A + F = 1$ , então  $V_t - A_t + F_t = 1$ . Logo, por indução finita, todo poliedro plano de  $F$  faces,  $V$  vértices e  $A$  arestas satisfaz a relação  $V - A + F = 1$ . ■

Usando o Teorema de Euler, que foi provado acima, podemos mostrar a relação que existe entre o Teorema de Euler e o Teorema de Pick.

**Teorema 3.** *O Teorema de Pick implica o Teorema de Euler para poliedros planos.*

*Demonstração.* Suponha um polígono  $P$ , em uma rede, com vértices de coordenadas inteiras. Utilizando a Proposição 3, podemos dividir o polígono  $P$  em triângulos fundamentais, como na figura 15.

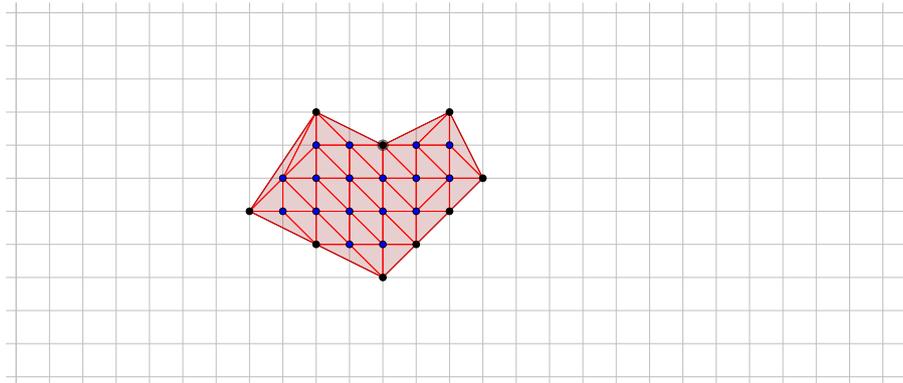


Figura 15: Subdivisão

Ao dividir, temos um poliedro plano com  $F$  Faces,  $A$  Arestas e  $V$  Vértices. O número de triângulos fundamentais é igual a  $F$ , e, como já foi provado na Proposição 1, a área de cada triângulo fundamental é  $\frac{1}{2}$ . Desse modo, a área do polígono  $P$  é  $\frac{F}{2}$ . De acordo com o Teorema de Pick, temos:

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1 \Rightarrow \frac{F}{2} = \frac{B}{2} + I - 1 \Rightarrow F = B + 2I - 2. \quad (6)$$

Analisando a figura 15, sabemos que cada face do poliedro plano (triângulos fundamentais) possui 3 arestas, em que cada aresta que se encontra na parte interna da figura será chamada de aresta interna, pertencendo, cada uma, a duas faces. Cada aresta que se encontra no bordo da figura será chamada de aresta do bordo, pertencendo, cada uma, a somente uma face. O total de arestas internas e do bordo serão representados por  $a_i$  e  $a_b$ , respectivamente. Dessa forma, quando triplicamos o número de faces do poliedro plano, cada aresta interna será contada duas vezes e cada aresta do bordo será contada uma vez, obtendo

$$3F = 2a_i + a_b. \quad (7)$$

O número de pontos do bordo ( $B$ ) é igual ao número de arestas do bordo ( $a_b$ ), e o número de arestas interiores é igual ao número total de arestas ( $A$ ) menos o número de arestas do bordo ( $a_b$ ). Assim,

$$B = a_b \quad e \quad a_i = A - B. \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), temos:

$$3F = 2(A - B) + B \Rightarrow A = \frac{1}{2}(3F + B). \quad (9)$$

É fácil ver que, depois da divisão do polígono  $P$  em triângulos fundamentais pela Proposição 3, geramos um poliedro de  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces, em que o número de vértices é a soma dos pontos do bordo com os pontos interiores, portanto

$$V = B + I. \quad (10)$$

Substituindo as informações (10), (9) e (6) na expressão  $V - A + F$ , temos:

$$\begin{aligned} V - A + F &= \\ &= (B + I) - \frac{1}{2}(3F + B) + (B + 2I - 2) \\ &= (B + I) - \frac{1}{2}[3(B + 2I - 2) + B] + (B + 2I - 2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, o Teorema de Pick implica o Teorema de Euler ■

**Teorema 4.** *O Teorema de Euler para poliedros planos implica o Teorema de Pick.*

*Demonstração.* Dado um polígono  $P$  em uma rede, com vértices de coordenadas inteiras, considere uma divisão em triângulos fundamentais, como na figura 15, gerando um poliedro plano de  $F$  Faces,  $A$  Arestas e  $V$  Vértices, em que  $F$  é igual ao número de triângulos fundamentais. Já sabemos, pelo Teorema 3, que a área do polígono é dada por  $A(P) = \frac{F}{2}$ . É fato que  $V = B + I$ , onde  $B$  e  $I$  são os pontos de bordo e interiores, respectivamente. Agora, pelo Teorema de Euler e usando a relação  $A = \frac{1}{2}(3F + B)$ , já vista no Teorema 3, temos:

$$\begin{aligned} V - A + F = 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow F = A - V + 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow F = \frac{1}{2}(3F + B) - (B + I) + 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow F = \frac{3}{2}F + \frac{B}{2} - B - I + 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{F}{2} = \frac{B}{2} + I - 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow A(P) = \frac{B}{2} + I - 1. \end{aligned}$$

Logo, o Teorema de Euler implica a fórmula de Pick. ■

### 3.6 Extensões para o teorema de Pick

Mostraremos, agora, como calcular, através do Teorema de Pick, a área de um polígono simples  $R$ , em que os seus vértices são coordenadas inteiras em uma rede, sabendo que tal polígono possui “buracos” que são polígonos simples  $H_1, H_2, \dots, H_n$  com vértices de coordenadas inteiras, como na figura 16. O objetivo, agora, é obter a área de  $R$ , e para isso, aplicaremos o Teorema de Pick em todos os polígonos, considerando  $R$  sem “buracos”, calculando sua área, e depois subtraindo todas as área dos “buracos”, obtendo  $R$  com “buracos”.

#### **Teorema 5. (Teorema de Pick com buracos)**

Se  $R$  é uma região poligonal com vértices de coordenadas inteiras, em uma rede fixada, com  $n$  “buracos”  $H_1, H_2, \dots, H_n$  de vértices com coordenadas inteiras, então a área do polígono é dada por  $A(R) = \frac{B}{2} + I - 1 + n$ , onde  $B$  e  $I$  são, respectivamente, os números de pontos do bordo e do interior de  $R$ .

*Demonstração.* Seja  $R$  uma região poligonal de vértices com coordenadas inteiras em uma rede e  $n$  “buracos”  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , também de vértices com coordenadas inteiras em uma rede, como apresentado na figura 16. Chamaremos de  $R_0$  o polígono  $R \cup H_1 \cup H_2 \dots \cup H_n$ , ou seja,  $R$  sem buracos. O Teorema de Pick pode ser aplicado em  $R_0$  e também em  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , pois são polígonos simples de vértices com coordenadas inteiras e fechados. Para ter a área de  $R$ , devemos calcular a área de  $R_0$  e subtrair a área dos buracos  $H_1, H_2, \dots, H_n$ . Assim, a área que queremos é dada por:

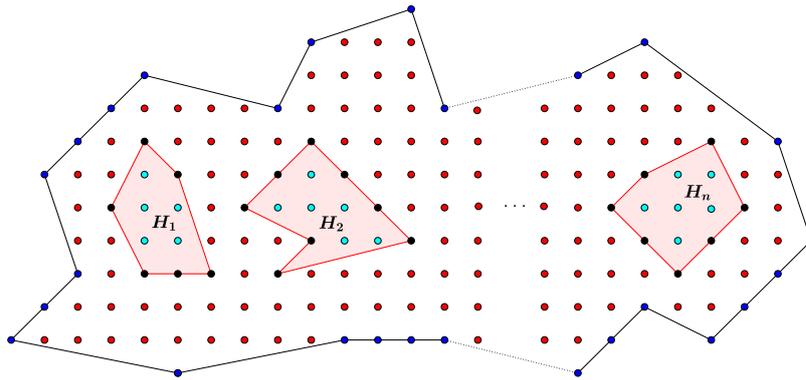
$$A(R) = A(R_0) - A(H_1) - A(H_2) - \dots - A(H_n) \quad (\alpha)$$

$$\text{onde } A(R_0) = \frac{B_0}{2} + I_0 - 1.$$

Agora, usando o Teorema de Pick em cada  $H_i$ , temos:

$$A(H_i) = \frac{B_i}{2} + I_i - 1 \quad (\beta)$$

onde  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , e os pontos localizados no bordo e no interior do polígono  $H_i$  são  $B_i$  e  $I_i$ , respectivamente.

Figura 16: Região  $R$  com buracos

Assim, substituindo  $(\beta)$  em  $(\alpha)$ , temos:

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \\
 &= \left( \frac{B_0}{2} + I_0 - 1 \right) - \left( \frac{B_1}{2} + I_1 - 1 \right) - \dots - \left( \frac{B_n}{2} + I_n - 1 \right) \\
 &= \frac{B_0}{2} + I_0 - 1 - \frac{B_1}{2} - I_1 + 1 - \dots - \frac{B_n}{2} - I_n + 1 \\
 &= \frac{B_0}{2} - \frac{B_1}{2} - \dots - \frac{B_n}{2} + I_0 - I_1 - \dots - I_n - 1 + n
 \end{aligned}$$

Chamaremos  $I_0 - I_1 - \dots - I_n$  por  $I_X$  e substituiremos na fórmula acima.

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \\
 &= \frac{B_0}{2} - \frac{B_1}{2} - \dots - \frac{B_n}{2} + I_X - 1 + n \\
 &= \frac{B_0}{2} - \frac{B_1}{2} + B_1 - \dots - \frac{B_n}{2} + B_n - B_1 - \dots - B_n + I_X - 1 + n \\
 &= \frac{B_0}{2} + \frac{B_1}{2} + \dots + \frac{B_n}{2} - B_1 - \dots - B_n + I_X - 1 + n \\
 &= \frac{B_0 + B_1 + \dots + B_n}{2} - B_1 - \dots - B_n + I_X - 1 + n
 \end{aligned}$$

Observe que  $B_0, B_1, \dots, B_n$  representam todos os pontos do bordo do polígono  $R$ , tendo assim

$$B_0 + B_1 + \dots + B_n = B.$$

Por outro lado,  $I_X - B_1 - \dots - B_n$  são os pontos internos do polígono  $R$ , pois já tínhamos retirado do  $I_0$  os pontos internos dos buracos e agora os pontos dos bordos dos buracos, restando os pontos internos do polígono  $R$ . Portanto  $I_X - B_1 - \dots - B_n = I$ . Logo, a área do polígono  $R$  é dada por  $A(R) = \frac{B}{2} + I - 1 + n$ . ■

Exibiremos agora um exemplo do Teorema de Pick com buracos, considerando o polígono abaixo com 3 buracos, como mostra a figura 17.

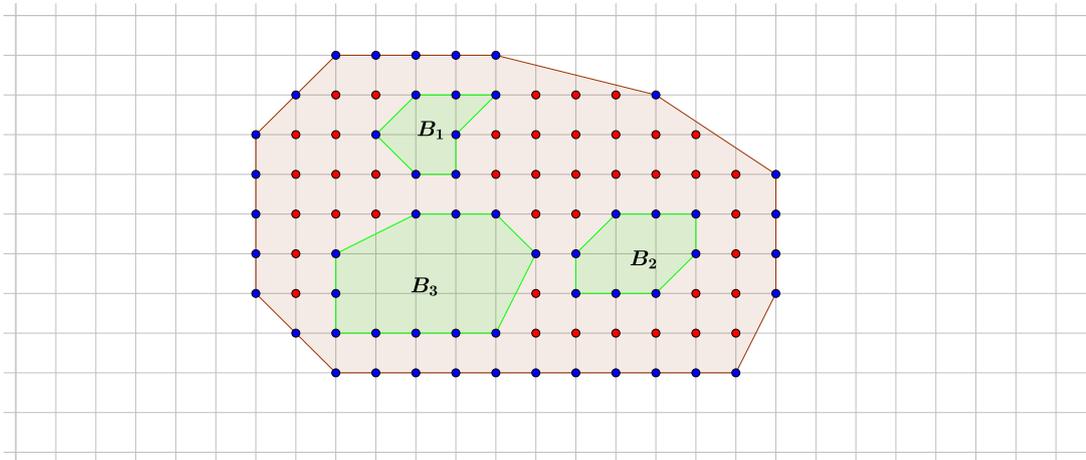


Figura 17: Região  $R$  com 3 buracos

De acordo com a figura 17,  $B = 54$  são os pontos de bordo, representado pelos pontos azuis e  $I = 41$  os pontos internos, representado pelos pontos vermelhos. Assim, pelo teorema 5, temos:

$$A(R) = \frac{B}{2} + I - 1 + n = \frac{54}{2} + 41 - 1 + 2 = 27 + 41 + 2 = 70 \text{ ua.}$$

Até agora trabalhamos com polígonos com coordenadas inteiras, como sugere o Teorema de Pick, para o cálculo de áreas de polígonos em uma rede. Analisando um polígono com coordenadas racionais, em uma rede dada, podemos fazer uso do Teorema de Pick, desde que se façam adaptações nos pontos que representam os vértices para calcular uma área.

**Teorema 6.** *Seja  $P$  um polígono simples de  $n$  vértices com suas coordenadas racionais  $B_1 \left( \frac{c_1}{d_1}, \frac{e_1}{f_1} \right), B_2 \left( \frac{c_2}{d_2}, \frac{e_2}{f_2} \right), \dots, B_n \left( \frac{c_n}{d_n}, \frac{e_n}{f_n} \right)$  pertencentes ao  $\mathbb{R}^2$ . A área do polígono  $P$  é dada por*

$$A(P) = \frac{\frac{B_Q}{2} + I_Q - 1}{t^2}.$$

$B_Q$  e  $I_Q$  são os pontos de bordo e internos do polígono  $Q$ , respectivamente.  $Q$  é obtido multiplicando todas as coordenadas de  $P$  por  $t$ , sendo  $t = \text{mmc}(d_1, f_1, d_2, f_2, \dots, d_n, f_n)$ .

*Demonstração.* Seja  $P$  o polígono de coordenadas racionais

$$B_1 \left( \frac{c_1}{d_1}, \frac{e_1}{f_1} \right), B_2 \left( \frac{c_2}{d_2}, \frac{e_2}{f_2} \right), \dots, B_n \left( \frac{c_n}{d_n}, \frac{e_n}{f_n} \right) \text{ com } t = \text{mmc}(d_1, f_1, d_2, f_2, \dots, d_n, f_n).$$

Efetuando-se a multiplicação das coordenadas de  $P$  por  $t$ , obtemos um polígono  $Q$  de coordenadas inteiras. Como  $Q$  é obtido por uma multiplicação das coordenadas de  $P$  por  $t$ , então  $P$  e  $Q$  são semelhantes, e sua razão de semelhança é igual a  $t$ . De acordo com DOLCE, O., **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**, v. 9. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005, p.341, a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, ou seja,  $t^2$ . Assim, temos:

$$\frac{A(Q)}{A(P)} = t^2 \Rightarrow A(P) = \frac{A(Q)}{t^2} = \frac{\frac{B_Q}{2} + I_Q - 1}{t^2}. \quad \blacksquare$$

Nos exemplos a seguir, consideraremos um triângulo e um quadrado com coordenadas racionais.

**Exemplo 1:** Seja  $P$  um triângulo de coordenadas racionais

$$B_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right), B_2 \left( \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \right) \text{ e } B_3 \left( \frac{5}{2}, \frac{2}{3} \right).$$

De acordo com a Teorema 6,  $t = \text{mmc}(2, 3) = 6$ . O triângulo  $Q$ , da figura 18, é obtido multiplicando todas as coordenadas racionais de  $P$  por  $t = 6$ . Assim, temos:

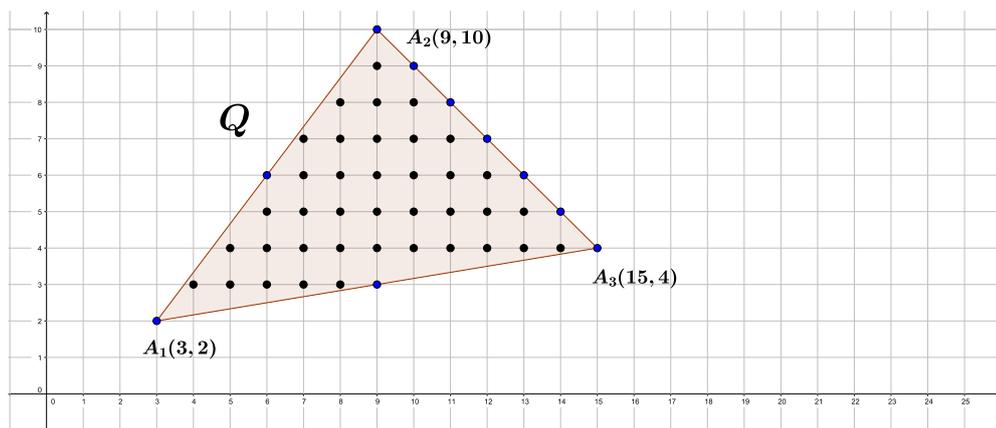


Figura 18: Triângulo  $Q$

De acordo com o Teorema de Pick,  $B_Q = 10$  são os pontos de bordo, representados pelos pontos azuis e  $I_Q = 38$  os pontos internos, representados pelos pontos em negrito. Aplicando o Teorema 6, a área do polígono  $P$  é igual a:

$$A(P) = \frac{B_Q + I_Q - 1}{t^2} = \frac{\frac{10}{2} + 38 - 1}{t^2} = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}.$$

**Exemplo 2:** Seja  $P$  um quadrado de coordenadas

$$B_1 \left( \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right), B_2 \left( \frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right), B_3 \left( \frac{10}{3}, \frac{8}{3} \right) \text{ e } B_4 \left( \frac{10}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

De acordo com o Teorema 6,  $t = 3$ . O quadrado  $Q$ , da figura 19, é obtido multiplicando todas as coordenadas de  $P$  por  $t = 3$ . Assim, temos:

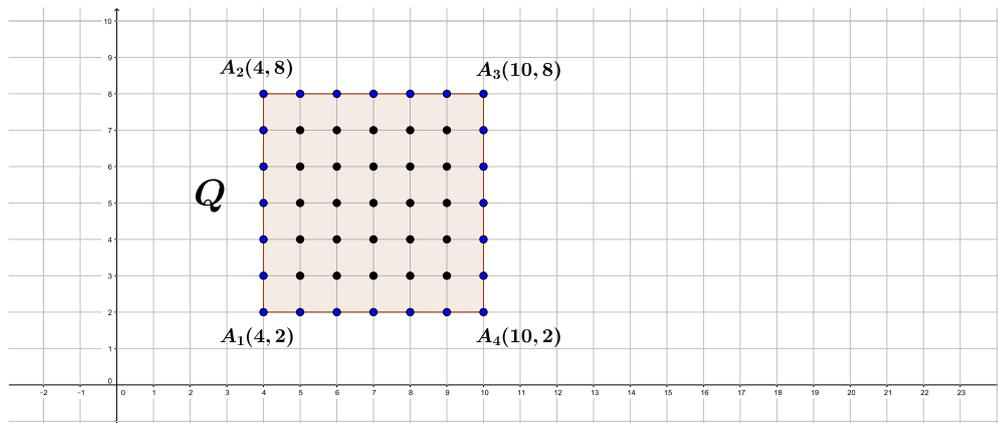


Figura 19: Quadrado  $Q$

De acordo com o Teorema de Pick,  $B_Q = 24$  são os pontos de bordo, representados pelos pontos azuis e  $I_Q = 25$  os pontos internos, representados pelos pontos em negrito. Aplicando o Teorema 6, a área do polígono  $P$  é igual a:

$$A(P) = \frac{A(Q)}{t^2} = \frac{\frac{B_Q}{2} + I_Q - 1}{t^2} = \frac{\frac{24}{2} + 25 - 1}{t^2} = \frac{36}{9} = 4.$$

O capítulo seguinte visa realizar um estudo sobre o volume de poliedros com pontos de rede, onde seus vértices são coordenadas inteiras. A ideia é buscar alguma relação semelhante à fórmula de Pick, em que tal relação seria capaz de calcular o volume utilizando apenas contagem dos pontos de bordo e do interior. Durante o estudo apresentaremos uma rede de pontos secundária ( $\mathbb{Z}_n^3$ ) extremamente necessária, que servirá para auxiliar a rede já conhecida ( $\mathbb{Z}^3$ ).

## 4 VOLUME DE POLIEDROS COM PONTOS DE REDE

Uma pergunta muito comum, quando se estuda o Teorema de Pick, é se existe uma fórmula simples, como a fórmula de Pick, para calcular o volume de um poliedro com pontos de rede. Na verdade, existe uma fórmula que realiza esse trabalho, mas sua aplicação exige alguns conhecimentos. Faremos, agora, um estudo sobre o cálculo de volume de poliedros pertencentes ao  $\mathbb{R}^3$  com vértices pertencentes ao  $\mathbb{Z}^3$ , ou seja, os vértices do poliedro tem suas coordenadas inteiras. A ideia é buscar uma alternativa semelhante à fórmula de Pick, que calcula a área de um polígono simples usando apenas contagem. No entanto, esse trabalho não é tão simples. Antes de iniciarmos esse estudo, apresentaremos algumas definições.

### Definição 3. ( $\mathbb{Z}^3$ )

Definimos o conjunto  $\mathbb{Z}^3$  por

$$\mathbb{Z}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x, y, z \in \mathbb{Z}\}.$$

### Definição 4. (Poliedro no $\mathbb{R}^3$ )

Um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos tal que cada polígono está em um plano distinto, onde cada lado de um destes polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. Cada um destes polígonos chama-se face do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado vértice do poliedro.

### Definição 5. (Poliedro convexo)

Consideremos um número finito  $n$  ( $n \geq 4$ ) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

- i) dois polígonos não estão no mesmo plano;
- ii) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- iii) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Dessa forma, ficam determinados  $n$  semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semi-espaços é chamado poliedro convexo.

Um poliedro convexo possui faces que são os polígonos convexos; arestas, que são os lados dos polígonos e vértices, que são os vértices dos polígonos.

### Definição 6. (Tetraedro fundamental)

São todos os tetraedros, polígonos de 4 faces, pertencentes ao  $\mathbb{R}^3$ , onde a interseção com o  $\mathbb{Z}^3$  é igual aos vértices do tetraedro, ou seja, de todos os pontos do tetraedro, internos ou de bordo, apenas os vértices possuem coordenadas inteiras.

A figura 20 mostra um exemplo de um tetraedro fundamental, usado por J.E.Reeve para mostrar que é possível calcular o volume de um poliedro de rede, que definiremos a seguir.

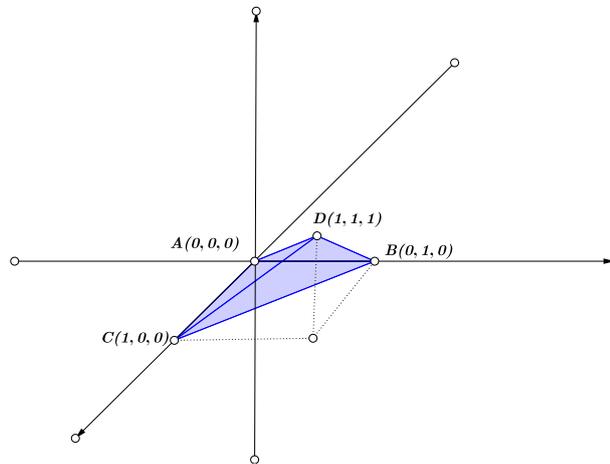


Figura 20: Tetraedro fundamental

Todas as faces de um tetraedro fundamental são triângulos fundamentais, como visto no capítulo 2, definição 1.

A definição a seguir trata do objeto de estudo deste capítulo, que é o poliedro de rede.

**Definição 7. (*Poliedro de rede*)**

*São poliedros convexos com vértices em  $\mathbb{Z}^3$ .*

A figura 21 mostra um exemplo de poliedro de rede.

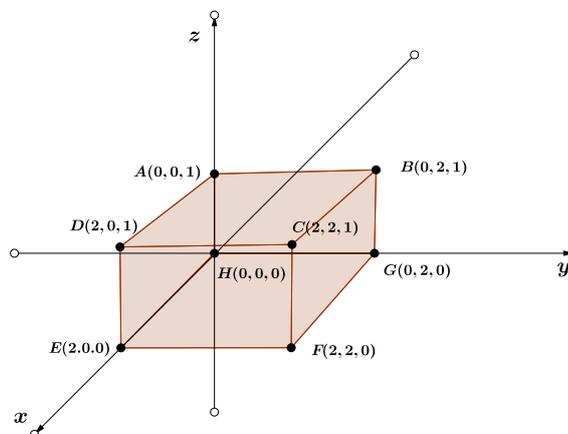


Figura 21: Paralelepípedo

Reeve observou que precisava de mais elementos para calcular o volume do poliedro com pontos de rede pertencentes ao  $\mathbb{R}^3$ , apresentando uma rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  dada por:

**Definição 8. (Rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ )**

$$\mathbb{Z}_n^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 / n.x \in \mathbb{Z}^3\}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$

O  $\mathbb{Z}_n^3$  tornou-se uma fonte suficiente para determinar o volume de poliedros de rede. Para compreender melhor o que é o  $\mathbb{Z}_n^3$ , podemos usar como exemplo o  $\mathbb{Z}_2^3$ , ou seja, quando  $n = 2$ . Veja que o ponto  $A \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2} \right) \in \mathbb{Z}_2^3$ , pois multiplicando-se  $A$  por 2 temos:

$$2 \cdot \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2} \right) = (1, 2, 5) \in \mathbb{Z}^3.$$

De forma análoga, podemos descrever pontos pertencentes ao  $\mathbb{Z}_n^3$  com o  $n$  escolhido. Dessa forma, todo  $x \in \mathbb{R}^3$  também pertencerá a  $\mathbb{Z}_n^3$ , se  $n.x \in \mathbb{Z}^3$ .

Para um dado poliedro de rede  $P \subset \mathbb{R}^3$ , representaremos por  $B_n$  e  $I_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , os números de pontos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$  na borda e no interior do poliedro, respectivamente, isto é  $B_n = |\mathbb{Z}_n^3 \cap \partial P|$  e  $I_n = |\mathbb{Z}_n^3 \cap \text{int}P|$ , onde  $\partial P$  e  $\text{int}P$  representam a borda e o interior do poliedro, respectivamente.

Reeve começou a busca por uma fórmula, semelhante à fórmula de Pick, usando tetraedros fundamentais  $T_r$ , com vértices  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$  e  $D(1, 1, r)$ , com  $r \geq 1$  ( $r \in \mathbb{Z}$ ). Tais tetraedros serão chamados de tetraedros de Reeve, como apresentado na figura 21.

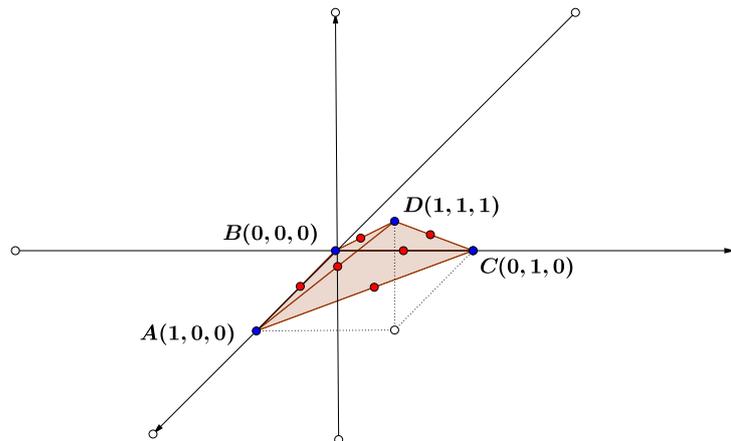
Investigando os pontos de  $\mathbb{Z}_n^3$  para os tetraedros de Reeve  $T_1, T_2, \dots, T_r$ , com  $n = 2$ , observamos que  $B_1, B_2$  e  $I_1$  são valores fixos, independentes do tetraedro. Já  $I_2$  segue uma progressão aritmética de razão 1.

Tabela 1: Pontos para  $n = 2$

<b>Tetraedros fundamentais</b>					
Tipo	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_r$
$B_1$	4	4	4	4	4
$B_2$	10	10	10	10	10
$I_1$	0	0	0	0	0
$I_2$	0	1	2	3	r-1
<i>Volume</i>	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{r}{6}$

A justificativa dos resultados apresentados na tabela 1, e posteriormente, nas tabelas 2 e 3, será dada com as relações **I** e **II** mostradas logo após a tabela 3.

A figura 22 representa o tetraedro  $T_1$ , em que os pontos em azul representam os pontos  $B_1$  e a união dos pontos em azul e vermelho representam  $B_2$ .

Figura 22: Tetraedro  $T_1$ 

Investigando os pontos de  $\mathbb{Z}_n^3$  para os tetraedros  $T_1, T_2, \dots, T_r$ , para  $n = 3$ , observamos também que  $B_1, B_3$  e  $I_1$  são valores fixos, independente do tetraedro. Já  $I_3$  segue uma progressão aritmética de razão 4.

Tabela 2: Pontos para  $n = 3$ 

Tetraedros fundamentais					
Tipo	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_r$
$B_1$	4	4	4	4	4
$B_3$	20	20	20	20	20
$I_1$	0	0	0	0	0
$I_3$	0	4	8	12	$4(r-1)$
<i>Volume</i>	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{r}{6}$

Seguindo a mesma ideia, os pontos de  $\mathbb{Z}_n^3$  para os tetraedros  $T_1, T_2, \dots, T_r$ , para  $n = 4$ , observamos também que  $B_1, B_4$  e  $I_1$  são valores fixos, independente do tetraedro. Já  $I_4$  segue uma progressão aritmética de razão 10.

Tabela 3: Pontos para  $n = 4$ 

Tetraedros fundamentais					
Tipo	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_r$
$B_1$	4	4	4	4	4
$B_4$	34	34	34	34	34
$I_1$	0	0	0	0	0
$I_4$	1	11	21	31	$10r-9$
<i>Volume</i>	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{r}{6}$

Para um tetraedro fundamental  $T$ , o número do total de pontos do bordo  $B_n(T)$  e os pontos internos  $I_n(T)$  são dados pelas fórmulas:

$$\text{(I)} \quad B_n(T) = 2n^2 + 2$$

$$\text{(II)} \quad I_n(T) = (n - 1) \cdot \left[ n(n + 1) \cdot \frac{r}{6} - (n - 1) \right]$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

As relações **(I)** e **(II)** serão provadas posteriormente, nas proposições 6 e 7.

Usando como base os tetraedros fundamentais, Reeve imaginou o poliedro de rede como a união de finitos tetraedros fundamentais com interiores disjuntos dois a dois. Utilizando esse raciocínio, qualquer poliedro de rede pode ser dividido em finitos tetraedros fundamentais, processo semelhante ao que Pick usou para dividir um polígono em triângulos fundamentais. O processo de decomposição de poliedro de rede em tetraedros fundamentais será detalhado posteriormente. A figura 23 mostra essa situação para um poliedro  $P$  como união de dois tetraedros fundamentais  $T_1$  e  $T_2$ .

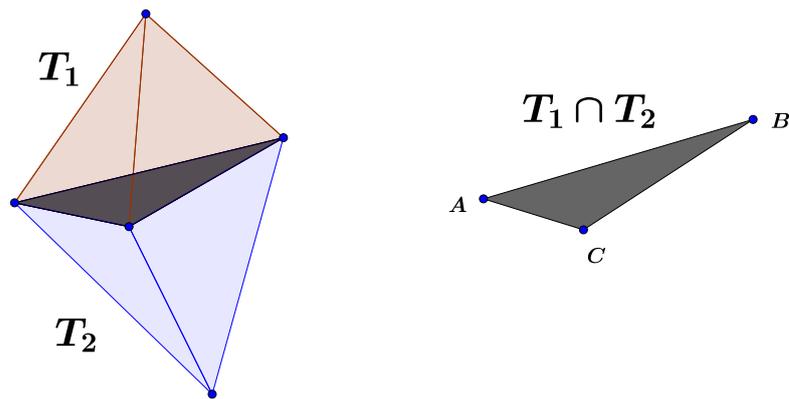


Figura 23: Poliedro  $P$

Analisando a intersecção de  $T_1$  e  $T_2$  na figura 23, obtemos um triângulo  $ABC$  de uma face de cada um dos tetraedros fundamentais. Por definição, não existem pontos com coordenadas inteiras nos segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ , com exceção dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Utilizando esse argumento, apresentaremos a seguinte proposição.

**Proposição 5.** *Seja o triângulo  $ABC$  uma face de um tetraedro fundamental com vértices  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$ ,  $C(c_1, c_2, c_3)$ . O número de pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  em cada aresta menos seus extremos é igual a  $(n - 1)$ , em que todos são equidistantes. Em particular, denotando por  $|t_n|$  o número total de pontos que pertencem ao perímetro do triângulo, temos que  $|t_n| = 3.n$*

*Demonstração.* Analisando os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , é fato que não existem pontos

pertencentes a  $\mathbb{Z}^3$  entre  $A$  e  $B$ ;  $A$  e  $C$ ;  $B$  e  $C$ , pois o  $\triangle ABC$  é face de um tetraedro fundamental e, por definição, os pontos de coordenadas inteiras são apenas os vértices.

Seja  $P$  um ponto pertencente a  $\overline{AB}$  que não seja  $A$  ou  $B$ . Sabendo que  $P$  pode ser escrito na forma  $P = A + t(B - A)$ , com  $0 < t < 1$ . Sendo  $\overline{AB}$  é lado de um triângulo fundamental,  $P \notin \mathbb{Z}^3$ . Por outro lado, Veja que

$$P \notin \mathbb{Z}^3 \Rightarrow (P - A) \notin \mathbb{Z}^3 \Rightarrow t(B - A) \notin \mathbb{Z}^3.$$

Por definição, se  $P \in \mathbb{Z}_n^3$ , então  $nP \in \mathbb{Z}^3$ . Assim, multiplicando  $P$  por  $n$ , temos:

$$nP = nA + nt(B - A) \in \mathbb{Z}^3. \quad (11)$$

Como  $t.(B - A) \notin \mathbb{Z}^3$  e  $A, B \in \mathbb{Z}^3$ , concluímos que  $t$  é racional. Para satisfazer a relação (11), devemos ter  $t = \frac{k}{n}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Desse modo, todo ponto  $P \in \mathbb{Z}_n^3$  entre  $A$  e  $B$  tem a forma:

$$P = A + \frac{k}{n}(B - A), \text{ com } 0 < \frac{k}{n} < 1.$$

Observe que

$$0 < \frac{k}{n} < 1 \Leftrightarrow 0 < k < n \Leftrightarrow k \in \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}.$$

Em resumo, os pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  entre  $A$  e  $B$  são da forma:

$$P = A + \frac{k}{n}(B - A), \text{ com } k \in \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}.$$

Dessa forma, particionando o segmento  $AB$ , em que somente  $A, B \in \mathbb{Z}^3$ , com coordenadas  $A(a_1, a_2, a_3)$  e  $B(b_1, b_2, b_3)$ , teremos os seguintes pontos, todos equidistantes:

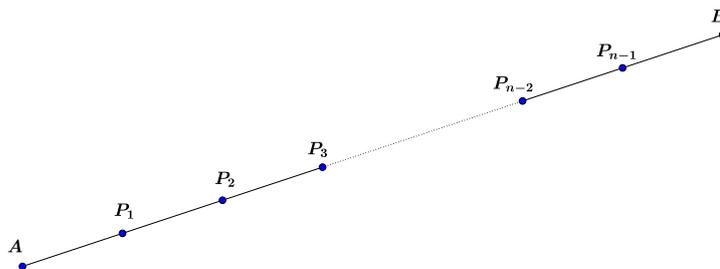


Figura 24: Segmento  $AB$

$$\begin{aligned}
& P_1 \left( a_1 + \frac{(b_1 - a_1)}{n}, a_2 + \frac{(b_2 - a_2)}{n}, a_3 + \frac{(b_3 - a_3)}{n} \right) \\
& P_2 \left( a_1 + \frac{2(b_1 - a_1)}{n}, a_2 + \frac{2(b_2 - a_2)}{n}, a_3 + \frac{2(b_3 - a_3)}{n} \right) \\
& P_3 \left( a_1 + \frac{3(b_1 - a_1)}{n}, a_2 + \frac{3(b_2 - a_2)}{n}, a_3 + \frac{3(b_3 - a_3)}{n} \right) \\
& \quad \cdot \\
& \quad \cdot \\
& \quad \cdot \\
& P_{n-1} \left( a_1 + \frac{(n-1)(b_1 - a_1)}{n}, a_2 + \frac{(n-1)(b_2 - a_2)}{n}, a_3 + \frac{(n-1)(b_3 - a_3)}{n} \right).
\end{aligned}$$

$P_i \in \mathbb{Z}_n^3, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ , pois  $n \cdot P_i \in \mathbb{Z}^3$ . Assim, entre os pontos  $A$  e  $B$ , no segmento  $AB$ , temos  $(n-1)$  pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ . De forma análoga, teremos  $(n-1)$  pontos de  $\mathbb{Z}_n^3$  entre  $A$  e  $C$ , no segmento  $AC$ , e  $(n-1)$  pontos de  $\mathbb{Z}_n^3$  entre  $B$  e  $C$ , no segmento  $BC$ . Acrescentando a esses pontos os vértices  $A, B$  e  $C \in \mathbb{Z}_n^3, \forall n \in \mathbb{Z}$ , temos:  $|t_n| = (n-1)3 + 3 = 3n$ .

Logo, o número de pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  que estão no perímetro do triângulo  $ABC$  é igual a  $3n$ . ■

Exemplificando a Proposição 5, tomaremos um segmento de extremidades  $A(1, 2, 3)$  e  $B(2, 3, 4)$  e vamos descrever, como apresentado na figura 25, os pontos que pertencem a este segmento e à rede secundária  $\mathbb{Z}_4^3$ .

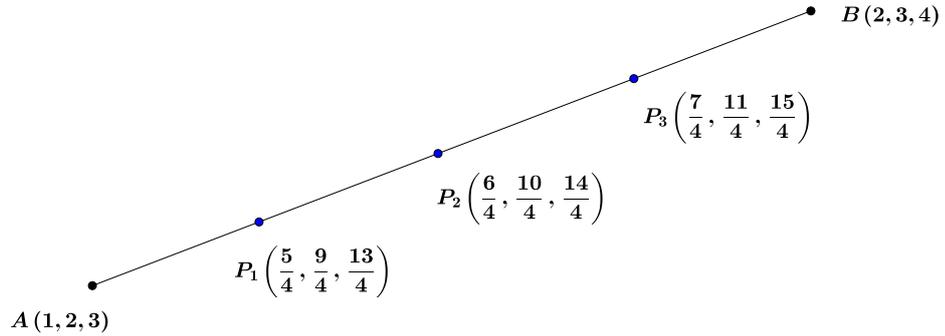


Figura 25: Segmento  $AB$  particionado para  $n = 4$

$$P_1 \left( 1 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{4} \right) = \left( \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4} \right)$$

$$P_2 \left( 1 + \frac{2}{4}, 2 + \frac{2}{4}, 3 + \frac{2}{4} \right) = \left( \frac{6}{4}, \frac{10}{4}, \frac{14}{4} \right)$$

$$P_3 \left( 1 + \frac{3}{4}, 2 + \frac{3}{4}, 3 + \frac{3}{4} \right) = \left( \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4} \right)$$

Queremos exibir uma fórmula que nos ajude a calcular o volume do tetraedro fundamental, efetuando a contagem do pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  existentes no tetraedro. Para conseguir tal demonstração, apresentaremos algumas proposições necessárias. A Proposição 6 calcula todos os pontos de bordo de um tetraedro fundamental, em particular para o tetraedro de Reeve.

**Proposição 6.** *O número de pontos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$  no bordo de um tetraedro fundamental é dado por*

$$B_n(T) = 2n^2 + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Para calcular  $B_n(T)$ , devemos inicialmente considerar em cada aresta de uma face  $(n - 1)$  pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ , igualmente espaçados entre os vértices, como foi provado da Proposição 5.

Os argumentos que apresentaremos aqui servirão para todas as faces de um tetraedro fundamental, independente de sua posição no espaço, pois todas elas são triângulos fundamentais.

Na figura 26, em que usamos  $n = 4$ , temos o triângulo fundamental  $ABC$ , que representará uma das faces de um tetraedro fundamental. Veja que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow D = (B - A) + (C - A) + A$$

Os vértices do triângulo  $ABC$  pertencem ao  $\mathbb{Z}^3$ , então  $D \in \mathbb{Z}^3$ . Visto que,  $ABCD$  é um paralelogramo, os vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{A_i B_i}$ , em que  $A_i$  e  $B_i$  pertencem a  $\mathbb{Z}_n^3$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , dados pela Proposição 5, são equipolentes, logo  $D - C = B - A = B_i - A_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .

Se  $Y_i \in \overline{A_i B_i}$  e não é nenhum dos extremos, então  $Y_i$  pode ser escrito na forma:  $Y_i = A_i + t(B_i - A_i)$ , com  $0 < t < 1$ . Buscamos os pontos, de  $\overline{A_i B_i}$ , que pertençam a  $\mathbb{Z}_n^3$ . Para garantir que o ponto  $Y_i$  pertença a  $\mathbb{Z}_n^3$ , devemos ter, por definição,  $nY_i \in \mathbb{Z}^3$ . Veja que

$$nY_i = nA_i + nt(B_i - A_i) = nA_i + nt(B - A).$$

Note que  $nA_i \in \mathbb{Z}^3$  e foi visto na demonstração da Proposição 5 que  $t(B - A) \notin \mathbb{Z}^3$ . Como  $(B - A) \in \mathbb{Z}^3$ , então para que  $nt(B - A) \in \mathbb{Z}^3$ , devemos ter  $t = \frac{k}{n}$ , com

$k \in \mathbb{Z}$ . Como  $0 < t < 1$ , temos que  $0 < \frac{k}{n} < 1$ , de modo que  $0 < k < n$ , isto é,  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ . Portanto, para que o ponto  $Y_i \in \mathbb{Z}_n^3$ , devemos ter  $t = \frac{k}{n}$  com  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Dessa forma, acrescentando os dois extremos, temos que  $\overline{A_i B_i}$  possui a mesma quantidade de pontos, da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ , que  $\overline{AB}$ , ou seja,  $(n+1)$  pontos.

Analisando o caso  $n = 4$ , todos os segmentos  $\overline{A_i B_i}$ , onde  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , possuem a mesma quantidade de pontos pertencentes a  $\mathbb{Z}_n^3$ , que no caso são 5 pontos da rede secundária em cada. Assim, o total de pontos da rede secundária no paralelogramo é igual a  $5 \cdot 5 = 25$ . Como estamos interessados apenas nos pontos do triângulo  $ABC$ , excluiremos os pontos do segmento  $BC$  e dividiremos o resto por dois. Ao resultado, devolveremos os pontos do segmento  $BC$ , obtendo assim 15 pontos.

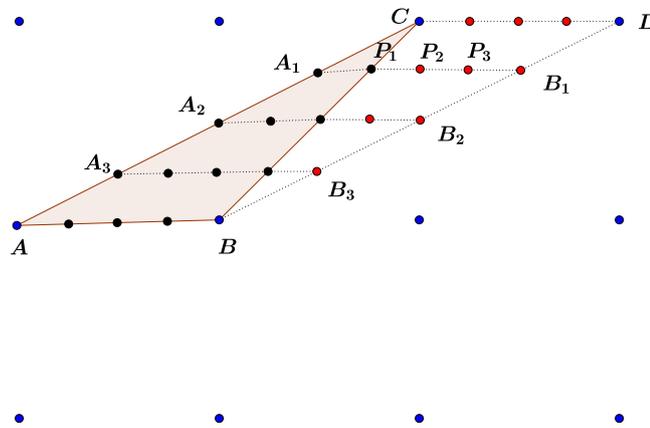


Figura 26: Uma face de um tetraedro fundamental

De forma análoga ao que foi exposto para  $n = 4$ , calcularemos os pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  de uma face do tetraedro fundamental.

Em cada segmento, temos  $(n-1)$  pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  entre os vértices. Dessa forma, em cada um dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{A_1 B_1}$ ,  $\overline{A_2 B_2}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{A_{n-1} B_{n-1}}$  temos  $(n+1)$  pontos da rede secundária.

Assim, o paralelogramo  $ABCD$  possui  $(n+1)^2$  pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ . Usando a mesma ideia do cálculo de pontos da rede secundária para  $n = 4$ , o triângulo  $ABC$  possui:

$$\frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Suponhamos, por absurdo, que exista um ponto  $X \in \mathbb{Z}_n^3$  no paralelogramo  $ABCD$  além dos pontos  $A, B, C, D$  e  $Y_i$  com  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Visto que  $X$  está no paralelogramo  $ABCD$ , então  $X$  é combinação linear dos vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ . Dessa forma,

temos:

$$X = t_1 \overrightarrow{AB} + t_2 \overrightarrow{AC} = t_1(B - A) + t_2(C - A), \text{ onde } t_1, t_2 \in [0, 1].$$

Como  $A, B$  e  $C \in \mathbb{Z}^3$ , então para que  $X \in \mathbb{Z}_n^3$ , devemos ter  $t_1 = \frac{k_1}{n}$  e  $t_2 = \frac{k_2}{n}$  com  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Veja que:

$$t_1, t_2 \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq k_1, k_2 \leq n \Leftrightarrow k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}.$$

Absurdo, pois os valores atribuídos a  $k_1$  e  $k_2$  nos levam aos pontos, da rede  $\mathbb{Z}_n^3$ ,  $A, B, C, D$  e  $Y_i$ . Como o paralelogramo é a justaposição de duas faces do tetraedro fundamental, então não há nas faces do tetraedro fundamental pontos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$  além dos pontos  $A, B, C, D$  e  $Y_i$ .

Dessa forma, as quantidades dos pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ , no bordo, de um tetraedro fundamental, se comportam da seguinte forma:

1) Cada face:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2) Cada face retirando o seu perímetro ( $|t_n| = 3n$ ):

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 3n.$$

3) Todas as faces retirando as arestas:

$$\left[ \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 3n \right] 4 = \\ = 2(n+2)(n+1) - 12n.$$

4) Todas as arestas, com exceção dos vértices:

$$6(n-1).$$

Por 3) e 4), e adicionando os 4 vértices do tetraedro fundamental, temos:

$$B_n(T) = 2(n+2)(n+1) - 12n + 6n - 6 + 4 \\ = 2n^2 + 6n + 4 - 12n + 6n - 2 \\ = 2n^2 + 2$$

Logo, todos os pontos de bordo de um tetraedro fundamental  $T$  é dado por  $B_n(T) = 2n^2 + 2$ . ■

A Proposição 7 apresenta a contagem de todos os pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  e internos a um tetraedro de Reeve  $T_r$ .

**Proposição 7.** *A quantidade de pontos internos de um tetraedro de Reeve em  $\mathbb{Z}_n^3$  é dado por*

$$I_n(T_r) = (n - 1) \left[ n(n + 1) \frac{r}{6} - (n - 1) \right], \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Calcularemos todos os pontos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$  em um tetraedro de Reeve de altura  $r$ . Inicialmente, marcaremos os pontos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$  nas arestas do tetraedro, traçando triângulos, tomando como referência os pontos de bordo, como mostra a figura 27. Para auxiliar na nossa demonstração, mostraremos que os triângulos traçados (camadas) são paralelos a base e, para isso, tomaremos três pontos nas arestas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BD}$  e  $\overline{CD}$ .

Considere os pontos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 0)$  e  $D(1, 1, r)$  no tetraedro da figura 27.

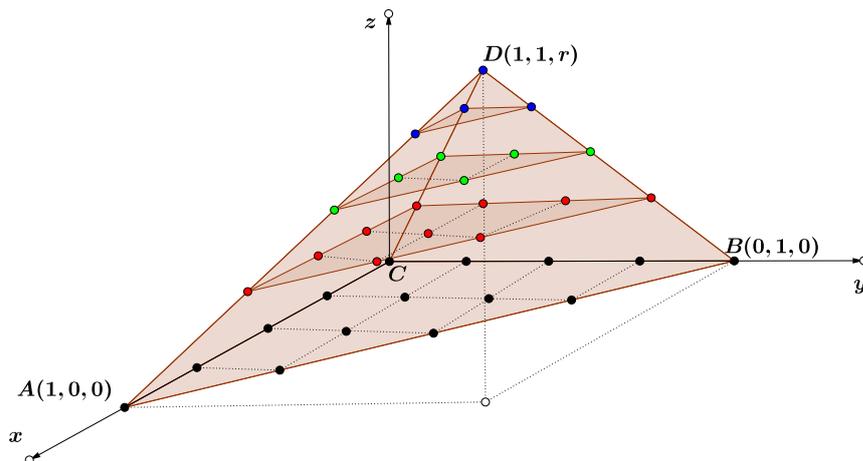


Figura 27: Tetraedro de Reeve particionado para  $n = 4$

Imaginemos  $X_t \in \overline{AD}$ ,  $Y_t \in \overline{BD}$  e  $Z_t \in \overline{CD}$ , com  $t \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Os pontos exibidos podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned} X_t &= A + \frac{t}{n}(D - A). \\ Y_t &= B + \frac{t}{n}(D - B). \\ Z_t &= C + \frac{t}{n}(D - C). \end{aligned}$$

Para analisar as alturas dos pontos  $X_t$ ,  $Y_t$  e  $Z_t$  em relação ao plano  $xy$ , devemos calcular a coordenada  $z$  de cada ponto. Observe, na figura 27, que  $z_A = z_B = z_C = 0$ .

Pelas fórmulas acima, temos:

$$\begin{aligned} z_{X_t} &= z_A + \frac{t}{n}(z_D - z_A) = \frac{t}{n}z_D. \\ z_{Y_t} &= z_B + \frac{t}{n}(z_D - z_B) = \frac{t}{n}z_D. \\ z_{Z_t} &= z_C + \frac{t}{n}(z_D - z_C) = \frac{t}{n}z_D. \end{aligned}$$

Isso mostra que as alturas dos três pontos, para uma mesma variável  $t$ , é a mesma. Logo, o triângulo formado pelos pontos  $X_t$ ,  $Y_t$  e  $Z_t$  é paralelo à base.

Dado um triângulo  $X_tY_tZ_t$  (camada), calcularemos o número de pontos do conjunto  $\mathbb{Z}_n^3 \cap \overline{X_tY_t}$ . Provaremos que, fixando uma variável  $t$ , o número de pontos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$  em  $\overline{X_tY_t}$  é dado por  $\#(\mathbb{Z}_n^3 \cap \overline{X_tY_t}) = (n - t) + 1$ .

Considere  $\beta_{X_tY_t}$  um ponto da rede  $\mathbb{Z}_n^3$  que está em  $\overline{X_tY_t}$ . Dessa forma, com  $\lambda \in [0, 1]$ , temos:

$$\begin{aligned} \beta_{X_tY_t} &= X_t + \lambda(Y_t - X_t) \\ &= X_t + \lambda \left[ (B - A) + \frac{t}{n}(-B + A) \right] \\ &= X_t + \lambda \left( 1 - \frac{t}{n} \right) (B - A) \\ &= X_t + \lambda \frac{(n - t)}{n} (B - A). \end{aligned}$$

Veja que,

$$\beta_{X_tY_t} \in \mathbb{Z}_n^3 \Leftrightarrow n\beta_{X_tY_t} \in \mathbb{Z}^3 \Leftrightarrow nX_t + \lambda(n - t)(B - A) \in \mathbb{Z}^3 \Leftrightarrow \lambda(n - t)(B - A) \in \mathbb{Z}^3.$$

Visto que  $\lambda \frac{(n - t)}{n} (B - A) \notin \mathbb{Z}^3$  e  $\lambda(n - t)(B - A) \in \mathbb{Z}^3$ , podemos concluir que  $\lambda \frac{(n - t)}{n} = \frac{\alpha}{n}$ , com  $\alpha$  inteiro. Desse modo,  $\lambda = \frac{\alpha}{n - t}$ , onde  $\alpha \in \{0, 1, \dots, n - t\}$ . Logo,  $\#(\mathbb{Z}_n^3 \cap \overline{X_tY_t}) = (n - t) + 1$ . De modo análogo,  $\#(\mathbb{Z}_n^3 \cap \overline{X_tZ_t}) = (n - t) + 1$  e  $\#(\mathbb{Z}_n^3 \cap \overline{Z_tY_t}) = (n - t) + 1$ .

Usando os mesmos critérios apresentados na Proposição 6, quando montamos um paralelogramo com pontos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$ , temos que o total de pontos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$  na camada  $X_tY_tZ_t$  é:

$$\frac{[(n - t) + 1]^2 - [(n - t) + 1]}{2} + (n - t) + 1 = \frac{[(n - t) + 1][(n - t) + 2]}{2}.$$

Analisando os valores de  $t$ , se  $t = \theta$ , então estamos na  $(\theta + 1)^{\text{a}}$  camada. Veja que se  $t = n$ , a camada vai degenerar em um ponto, que no caso é o vértice. Assim, os pontos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$  em cada camada são:

$$\begin{aligned}
 t = 0 : & \quad \frac{(n+1)(n+2)}{2} = [1 + 2 + 3 + \dots + (n+1)]. \\
 t = 1 : & \quad \frac{n(n+1)}{2} = (1 + 2 + 3 + \dots + n). \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 t = n : & \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

Somando os pontos dos triângulos formados, obtemos todos os pontos de bordo e alguns dos pontos internos do tetraedro de Reeve. Essa soma é igual a soma de números triangulares (considerando o vértice do tetraedro) e temos como resultado:

$$\begin{aligned}
 & [1 + 2 + 3 + \dots + (n+1)] + (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \dots + 1 \\
 & = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.
 \end{aligned}$$

Além dos pontos descritos, existem pontos internos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  entre os triângulos traçados que ainda não foram contados, como mostra a figura 28.

A figura 28 mostra o comportamento dos pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  nas colunas entre a primeira e a segunda camada (triângulos), onde os pontos pretos pertencem à primeira camada e os pontos vermelhos à segunda camada. Os pontos em amarelo pertencem à região interna das duas camadas.

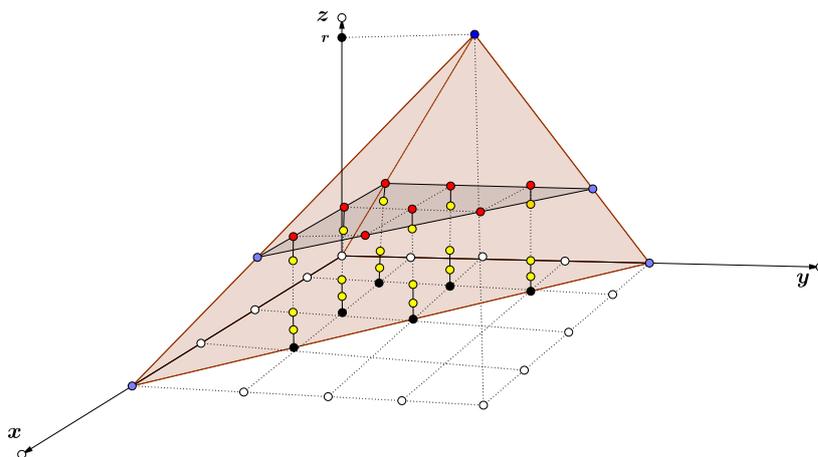


Figura 28: Coluna entre as duas primeiras camadas

Os pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  de cada coluna entre as duas primeiras camadas (triângulos) se comportam como mostra a figura 29.

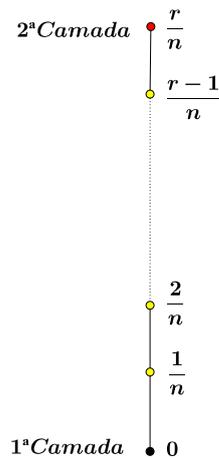


Figura 29: Colunas entre as duas primeiras camadas

O comportamento das colunas de pontos entre as demais camadas de triângulos é sempre o mesmo. Em cada coluna temos  $(r - 1)$  pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  entre as camadas.

Observando a figura 28, veja que os pontos que não serão base de colunas estão nos catetos do triângulo retângulo, isso por conta da inclinação do tetraedro de Reeve. Esse comportamento se dará em todas as camadas. Dessa forma, o número de pontos internos (colunas) entre o primeiro e o segundo triângulo (camadas), ou seja, depois da base e antes do ponto de altura  $\frac{1}{n}r$  é  $[1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)](r - 1)$ . De modo análogo, o número de pontos internos (colunas) entre o segundo e o terceiro triângulo, depois do ponto de altura  $\frac{1}{n}r$  e antes do ponto de altura  $\frac{2}{n}r$  é  $[1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2)](r - 1)$ . Seguindo esse raciocínio até o topo da figura, temos que a soma dos pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  nas colunas é igual a

$$\begin{aligned} & \{[1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)] + [1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2)] + \dots + 1 + 0\} (r - 1) = \\ & = \frac{(n - 1)n(n + 1)}{6} (r - 1). \end{aligned}$$

Considerando o cálculo das camadas (triângulos) e o cálculo entre as camadas (colunas), o total de pontos ( $T_p$ ) do tetraedro de Reeve com altura  $r$  é igual a

$$T_p = \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{6} + \frac{(n - 1)n(n + 1)}{6} (r - 1).$$

Já provamos, na Proposição 6, que  $B_n(T_r) = 2n^2 + 2$  para qualquer tetraedro fundamental. Dessa forma, Como  $T_p = B_n(T_r) + I_n(T_r)$ , então

$$I_n(T_r) = T_p - B_n(T_r)$$

$$I_n(T_r) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6}(r-1) - (2n^2+2).$$

Desenvolvendo a expressão acima, teremos:

$$I_n(T_r) = (n-1) \left[ n(n+1) \frac{r}{6} - (n-1) \right].$$

Logo, a quantidade de pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ , na região interna do tetraedro de Reeve, é dada por :

$$I_n(T_r) = (n-1) \left[ n(n+1) \frac{r}{6} - (n-1) \right]. \quad \blacksquare$$

A Proposição 8 explica a relação que podemos estabelecer entre os pontos de  $\mathbb{Z}_n^3$  internos a um tetraedro de Reeve e de um tetraedro fundamental qualquer.

**Proposição 8.** *Os pontos internos de um tetraedro fundamental, sendo  $r$  sua altura, com uma base de área  $1/2$  fixada em uma rede, são dados por*

$$I_n(T) = (n-1) \left[ n(n+1) \frac{r}{6} - (n-1) \right], \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Inicialmente, tomaremos a base de um tetraedro fundamental particionado na rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ . Fixamos os vértices do triângulo, como mostra a figura 30, mas isso não é determinante para a contagem dos pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ , pois o importante é que o triângulo da base seja fundamental, ou seja, admita apenas os seus vértices com coordenadas inteiras.

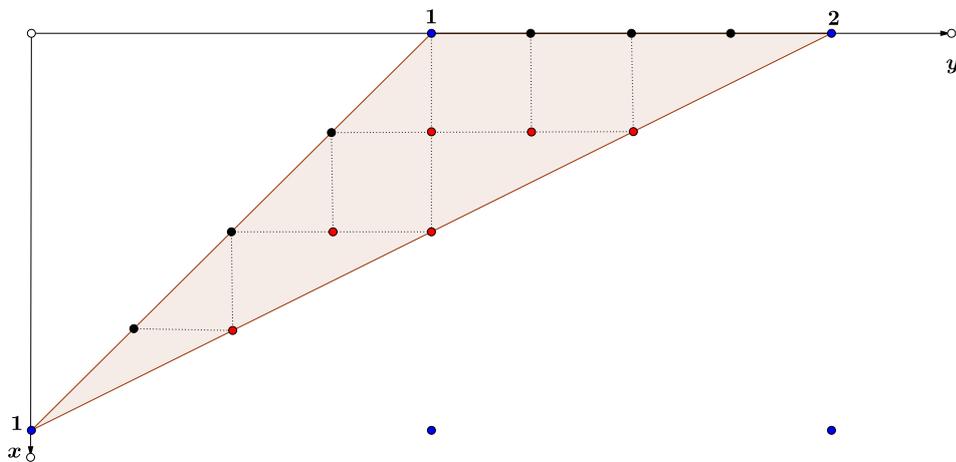


Figura 30: Base de um tetraedro fundamental particionado para  $n = 4$

Considerando que o tetraedro fundamental tenha altura  $r$ , para calcular o to-

tal de pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  de um tetraedro fundamental, seguiremos os mesmos critérios apresentados na Proposição 7, quando abordamos os tetraedros de Reeve, construindo as camadas de triângulos e as colunas entre as camadas, como foi exposto nas figuras da Proposição 7.

Particionando essa base com um  $n$  natural, os critérios para a contagem dos pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  são os mesmos da Proposição 7, criando as camadas de triângulos e as colunas entre as camadas. O total de pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  em cada camada (triângulos), o número de colunas, bem como o total de pontos da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  existentes em cada coluna, seguem os mesmos passos que foram dados no tetraedro de Reeve. Portanto, pelos motivos expostos, a contagem do total de pontos internos de um tetraedro fundamental é a mesma de um tetraedro de Reeve. ■

A Proposição 9 estabelece uma relação que calcula o volume de um tetraedro fundamental usando a rede secundária de pontos  $\mathbb{Z}_n^3$ .

**Proposição 9.** *O volume de um tetraedro fundamental  $T$  com uma face de área  $1/2$  fixada em uma rede, que denotaremos por  $V(T)$ , satisfaz*

$$2n(n^2 - 1)V(T) = B_n(T) - nB_1(T) + 2[I_n(T) - nI_1(T)], \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

*Demonstração.* Em todo tetraedro fundamental  $T$ , os pontos de bordo  $B_n(T)$  e os pontos internos  $I_n(T)$  obedecem às relações exibidas nas proposições 6, 7 e 8. Assim, temos

$$(I) B_n(T) = 2n^2 + 2.$$

(II)  $I_n(T) = (n - 1) \left[ n(n + 1) \frac{r}{6} - (n - 1) \right]$ , onde  $r$  é a altura do tetraedro para uma base fixada em uma rede.

Veja que se  $n = 1$ , então  $B_1(T) = 4$  e  $I_1(T) = 0$ .

Dado um tetraedro fundamental  $T$ , fixada uma base em uma rede, seja  $r$  a altura desse tetraedro. Como essa base é um triângulo fundamental fixada em uma rede, pela Proposição 1, sua área é igual a  $1/2$ . Dessa forma, utilizando conhecimentos de geometria espacial, de acordo com as tabelas 1, 2 e 3, seu volume é igual a  $V(T_r) = \frac{r}{6}$ . Utilizando esse argumento, temos

$$\begin{aligned} 2n(n^2 - 1)V(T) &= \\ &= 2n(n^2 - 1) \frac{r}{6} \\ &= 2n(n + 1)(n - 1) \frac{r}{6} - 2(n - 1)^2 + 2(n - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(n-1)^2 + 2(n-1) \left[ n(n+1) \frac{r}{6} - (n-1) \right] \\
&= 2n^2 - 4n + 2 + 2 \left\{ (n-1) \left[ n(n+1) \frac{r}{6} - (n-1) \right] - nI_1(T) \right\} \\
&= (2n^2 + 2) - 4n + 2[I_n(T) - nI_1(T)] \\
&= B_n(T) - nB_1(T) + 2[I_n(T) - nI_1(T)].
\end{aligned}$$

Logo, à fórmula  $2n(n^2 - 1)V(T) = B_n(T) - nB_1(T) + 2[I_n(T) - nI_1(T)]$  vale para todo tetraedro com face de área  $1/2$ . ■

A Proposição 10 será importante para a demonstração do Teorema 7, mostrando como é possível subdividir um poliedro de rede em tetraedros fundamentais.

**Proposição 10.** *Todo poliedro de rede é a união de tetraedros fundamentais onde pelo menos uma das faces tem área  $1/2$ .*

*Demonstração.* Consideremos todos os pontos de coordenadas inteiras pertencentes ao poliedro. Como estamos trabalhando com pontos do  $\mathbb{Z}^3$ , podemos dividir parte do poliedro de rede em cubos de aresta 1, dividindo posteriormente cada cubo em 6 tetraedros fundamentais, onde pelo menos uma das faces possui área  $1/2$ . A figura 31 mostra o início do processo de divisão de parte do poliedro em cubos.

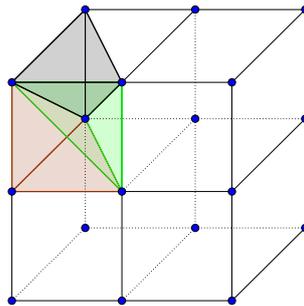


Figura 31: Parte do poliedro dividido em cubos

As regiões que não podem ser divididas em cubos de aresta 1, terão, no mínimo, faces comuns aos cubos já formados. Essas faces comuns podem ser divididas em triângulos fundamentais, dando origem as faces de novos tetraedros fundamentais que serão formados com essas faces e os pontos do poliedro de rede, onde a área de pelo menos uma de suas faces vale  $1/2$ . Dessa forma, seguindo esse processo em um número

finito de etapas, o poliedro de rede será todo decomposto em tetraedros fundamentais com pelo menos uma face de área  $1/2$ . ■

Utilizando as informações apresentadas até aqui, podemos fazer a extensão da Proposição 9 para os poliedros de rede, utilizando como base da demonstração os tetraedros fundamentais.

**Teorema 7. (Teorema de Reeve)** *O volume  $V(P)$  de um poliedro  $P$  de rede em  $\mathbb{R}^3$  pode ser expresso em termos dos números de pontos de rede  $\mathbb{Z}^3$  e  $\mathbb{Z}_n^3$  da seguinte forma:*

$$2n(n^2 - 1)V(P) = B_n(P) - nB_1(P) + 2[I_n(P) - nI_1(P)], \text{ para todo } n \in \mathbb{N} (n \geq 2) \quad (12)$$

*Demonstração.* Consideremos um poliedro  $P$  qualquer com pontos de rede  $P \subset \mathbb{R}^3$ . Pela Proposição 10, podemos escrever  $P = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r$  com  $T_1, T_2, \dots, T_r$  tetraedros fundamentais com interiores disjuntos dois a dois, ou seja,  $P$  é a união de um número finito de tetraedros fundamentais com interiores disjuntos dois a dois. Procedendo de forma indutiva, provaremos a fórmula (12) para dois tetraedros fundamentais de rede  $T_i$  com  $i \in \{1, 2\}$ . Assim, mostraremos que se  $P = T_1 \cup T_2$ , então vale a fórmula (12). Nesse caso, é fato que  $V(P) = V(T_1) + V(T_2)$ , visto que  $P$  é a união disjunta de  $T_1$  e  $T_2$ . Devemos provar que a fórmula (12) é aditiva, ou seja, se vale para  $T_1$  e  $T_2$ , como foi provado na Proposição 9, também vale para  $P$ . Para prosseguirmos com essa demonstração, faremos algumas observações importantes.

(I)  $M_n = T_1 \cap T_2 \cap \mathbb{Z}_n^3$  representa os pontos de  $\mathbb{Z}_n^3$  na face comum de  $T_1$  e  $T_2$ .

(II)  $W_n = M_n \setminus \partial P$  representa os pontos de  $\mathbb{Z}_n^3$  na região interna de  $M_n$ , ou seja,  $M_n$  subtraindo a borda do poliedro  $\partial P$ .

(III) O contorno de  $M_n$  é representado por  $t_n$  e é dado por  $t_n = M_n \setminus W_n$ .

Dessa forma, representando por  $|A|$  o número de elementos de um conjunto  $A$ , onde  $A$  pode ser qualquer um dos conjuntos citados em (I), (II) e (III), temos que:

$$|t_n| = |M_n| - |W_n|. \quad (13)$$

Usaremos uma relação importante, referente à aresta do tetraedro fundamental, que foi mostrada na Proposição 5;

$$|t_n| = 3n. \quad (14)$$

Analisando a figura 32, podemos verificar que:

$$I_n(P) = I_n(T_1) + I_n(T_2) + |W_n|. \quad (15)$$

$$B_n(P) = B_n(T_1) + B_n(T_2) - |M_n| - |W_n|. \quad (16)$$

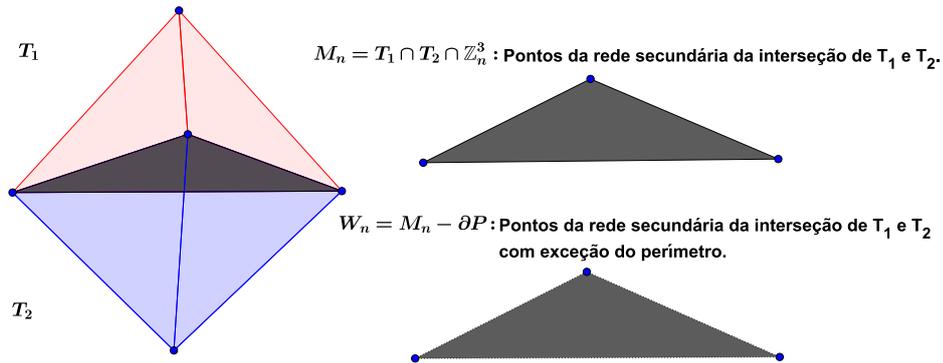


Figura 32: Interseção de  $T_1$  e  $T_2$

Usando as relações (16), (15), (13) e (14), o fato de que  $V(P) = V(T_1) + V(T_2)$  e a hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned}
& 2n(n^2 - 1)V(P) \\
&= 2n(n^2 - 1)V(T_1) + 2n(n^2 - 1)V(T_2) \\
&= B_n(T_1) - nB_1(T_1) + 2(I_n(T_1) - nI_1(T_1)) + B_n(T_2) - nB_1(T_2) + 2(I_n(T_2) - nI_1(T_2)) \\
&= [B_n(T_1) + B_n(T_2)] - n[B_1(T_1) + B_1(T_2)] + 2[I_n(T_1) + I_n(T_2)] - 2n[I_1(T_1) + I_1(T_2)] \\
&= B_n(P) + |M_n| + |W_n| - n[B_1(P) + |M_1| + |W_1|] + 2[I_n(P) - |W_n|] - 2n[I_1(P) - |W_1|] \\
&= B_n(P) - nB_1(P) + 2[I_n(P) - nI_1(P)] + |M_n| + |W_n| - n|M_1| - n|W_1| - 2|W_n| + 2n|W_1| \\
&= B_n(P) - nB_1(P) + 2[I_n(P) - nI_1(P)] + |M_n| - |W_n| - n|M_1| + n|W_1| \\
&= B_n(P) - nB_1(P) + 2[I_n(P) - nI_1(P)] + |t_n| - n|t_1| \\
&= B_n(P) - nB_1(P) + 2[I_n(P) - nI_1(P)] + |t_n| - 3n \\
&= B_n(P) - nB_1(P) + 2[I_n(P) - nI_1(P)].
\end{aligned}$$

Portanto,  $2n(n^2 - 1)V(P) = B_n(P) - nB_1(P) + 2(I_n(P) - nI_1(P))$ . Isso mostra que (12) é aditivo, ou seja, (12) é válido para  $P = T_1 \cup T_2$ .

Assumindo que (12) seja válido para todo poliedro  $P_a = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$  com  $k \leq r$ ,  $r \geq 2$ , devemos provar que (12) vale também para  $P_b = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k \cup T_{k+1}$ .

Veja que,  $P_b = (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k) \cup T_{k+1} = P_a \cup T_{k+1}$ . Por hipótese de indução, à fórmula (12) vale para  $P_a$ . Como foi provado que à fórmula (12) é aditiva, então (12) vale para  $P_b$ . Logo, por indução finita, à fórmula (12) é válida para qualquer poliedro de rede em  $\mathbb{R}^3$ . ■

Apresentaremos, agora, duas aplicações do Teorema 7. A primeira aplicação é dada em um cubo de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(1, 1, 1)$ , como mostra a figura 33, tomando  $n = 2$ .

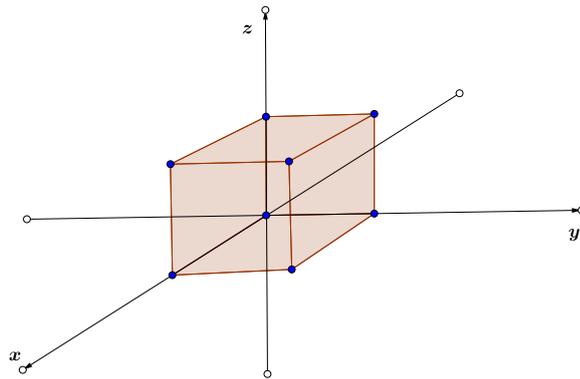


Figura 33: Cubo

Para calcular o volume, devemos detalhar os conjuntos  $B_1(P)$ ,  $B_2(P)$ ,  $I_1(P)$  e  $I_2(P)$ .

O cálculo de  $B_1(P)$  e  $I_1(P)$  é simples, pois estamos trabalhando com coordenadas inteiras. Já em  $B_2(P)$  e  $I_2(P)$ , o cálculo é mais trabalhoso, pois dependem da investigação na rede secundária  $\mathbb{Z}_2^3$ .

Dessa forma, investigando a figura 33, podemos concluir que:

$$(i) B_1(P) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

O conjunto  $B_1(P)$  possui 8 elementos. Usaremos a notação  $B_1$  para representar o número de elementos de  $B_1(P)$ , portanto  $B_1 = 8$ .

$$(ii) B_2(P) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1),$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(1, \frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right),$$

$$\left(0, \frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \left(1, 1, \frac{1}{2}\right), \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, 1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)\}.$$

O conjunto  $B_2(P)$  possui 26 elementos. Usaremos a notação  $B_2$  para representar o número de elementos de  $B_2(P)$ , portanto  $B_2 = 26$ . Já para os pontos internos, precisamos dos conjuntos  $I_1(P)$  e  $I_2(P)$ .

$$(iii) I_1(P) = \emptyset.$$

O conjunto  $I_1(P)$  não possui elementos. Usaremos a notação  $I_1$  para representar o número de elementos de  $I_1(P)$ , portanto  $I_1 = 0$ .

$$(iv) I_2(P) = \left\{ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

O conjunto  $I_2(P)$  possui 1 elemento. Usaremos a notação  $I_2$  para representar o número de elementos de  $I_2(P)$ , portanto  $I_2 = 1$ .

Usando os resultados de (i), (ii), (iii) e (iv) na fórmula do volume descrita em (1) com  $n = 2$ , temos:

$$2 \cdot 2 \cdot (2^2 - 1)V(P) = B_2 - 2B_1 + 2(I_2 - 2I_1)$$

$$12V(P) = 26 - 2 \cdot 8 + 2(1 - 2 \cdot 0)$$

$$12V(P) = 26 - 16 + 2$$

$$12V(P) = 12$$

$$V(P) = 1.$$

Caso queiramos usar outro valor para  $n$ , com  $n \geq 2$ , é perfeitamente possível o cálculo do volume, mas qualquer  $n$  maior do que 2 precisará de uma investigação maior. Se tomarmos  $n = 3$ , precisaremos dos conjuntos  $B_1(P)$ ,  $B_3(P)$ ,  $I_1(P)$  e  $I_3(P)$ . No caso do cubo da figura 30, já foi visto que  $B_1 = 8$  e  $I_1 = 0$  e a investigação do  $B_3$  e  $I_3$  nos levará a  $B_3 = 56$  e  $I_3 = 8$ . Assim, temos:  $2 \cdot 3 \cdot (3^2 - 1)V(P) = B_3 - 3 \cdot B_1 + 2(I_3 - 3 \cdot I_1)$

$$48 \cdot V(P) = 56 - 3 \cdot 8 + 2 \cdot (8 - 3 \cdot 0)$$

$$48 \cdot V(P) = 56 - 24 + 16$$

$$48 \cdot V(P) = 48$$

$$V(P) = 1.$$

É aconselhável trabalhar sempre com  $n = 2$ , pois vai gerar uma investigação menor para o cálculo do volume do poliedro com pontos de rede.

A segunda aplicação do Teorema 7 trata de um tetraedro com vértices nos pontos  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , como na figura 34.

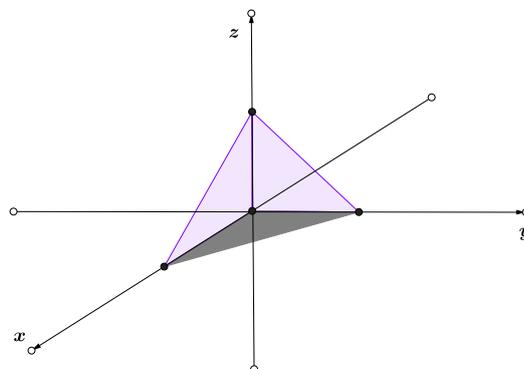


Figura 34: Tetraedro

Seguiremos os mesmos passos da aplicação anterior, quando tomamos  $n = 2$ , precisando investigar os conjuntos  $B_1(P)$ ,  $B_2(P)$ ,  $I_1(P)$  e  $I_2(P)$ . Realizando a busca pelos conjuntos descritos acima, temos:

$$(i) B_1(P) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}.$$

O conjunto  $B_1(P)$  possui 4 elementos. Usaremos a notação  $B_1$  para representar o número de elementos de  $B_1(P)$ , portanto  $B_1 = 4$ .

$$(ii) B_2(P) = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0), (1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)\}.$$

O conjunto  $B_2(P)$  possui 10 elementos. Usaremos a notação  $B_2$  para representar o número de elementos de  $B_2(P)$ , portanto  $B_2 = 10$ .

$$(iii) I_1(P) = \emptyset$$

O conjunto  $I_1(P)$  não possui elementos. Usaremos a notação  $I_1$  para representar o número de elementos de  $I_1(P)$ , portanto  $I_1 = 0$ .

$$(iv) I_2(P) = \emptyset$$

O conjunto  $I_2(P)$  não possui elementos. Usaremos a notação  $I_2$  para representar o número de elementos de  $I_2(P)$ , portanto  $I_2 = 0$ .

Aplicando os resultados descritos na fórmula (12), temos:

$$2 \cdot 2 \cdot (2^2 - 1)V(P) = B_2 - 2 \cdot B_1 + 2(I_2 - 2 \cdot I_1)$$

$$12 \cdot V(P) = 10 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot (0 - 2 \cdot 0)$$

$$12 \cdot V(P) = 10 - 8$$

$$12 \cdot V(P) = 2$$

$$V(P) = \frac{1}{6}.$$

Para calcular o volume do tetraedro com  $n = 3$ , temos que ter os conjuntos  $B_1(P)$ ,  $B_3(P)$ ,  $I_1(P)$  e  $I_3(P)$ . Como já temos  $B_1(P)$  e  $I_1(P)$ , devemos fazer a investigação do  $B_3(P)$  e  $I_3(P)$ . Tal investigação nos levará a  $B_3 = 20$  e  $I_3 = 0$ . Dessa forma, o cálculo do volume é dada por:

$$2n(n^2 - 1)V(P) = B_n - nB_1 + 2(I_n - nI_1)$$

$$2 \cdot 3(3^2 - 1)V(P) = B_3 - 3B_1 + 2(I_3 - 3I_1)$$

$$48 \cdot V(P) = 20 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot (0 - 3 \cdot 0)$$

$$48 \cdot V(P) = 8$$

$$V(P) = \frac{1}{6}.$$

Concluimos que, com a demonstração e as aplicações vistas, é possível calcular o volume de um poliedro com pontos de rede utilizando contagem. O processo torna-se interessante, pois ampliamos nosso conhecimento, introduzindo a rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ , estudando pontos de rede no bordo e no interior do poliedro.

O capítulo seguinte apresenta aplicações, referente a área e volume, feitas com alunos e um grupo de professores de Matemática, tendo como objetivo, criar estratégias para o estudo de Geometria, visto que os nossos alunos apresentam pouco interesse e, conseqüentemente, dificuldades no estudo de Geometria.

## 5 ATIVIDADES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PICK E O VOLUME DE POLIEDROS COM PONTOS EM $\mathbb{Z}_n^3$

Apresentaremos três atividades para alunos e professores de Matemática em duas escolas de Fortaleza: uma referente ao Teorema de Pick, e a outra envolvendo o volume de um poliedro convexo com vértices de coordenadas inteiras em uma rede. Nas três atividades, os alunos e os professores trabalharão contagem de pontos de rede para o cálculo de área e volume. O objetivo é mostrar uma alternativa diferente para os dois cálculos, trabalhando apenas duas relações que foram mostradas nesse trabalho. O baixo rendimento e a falta de interesse dos alunos, no estudo de Geometria, motivou a elaboração de estratégias para melhorar esse rendimento, tornando o estudo mais interessante e produtivo, pois estamos utilizando material concreto, trabalhando de maneira lúdica, tornando o estudo de geometria mais prático e objetivo. Dessa forma, espera-se que o rendimento dos alunos melhore e o aprendizado seja significativo para eles, pois antes das aplicações, tentavam decorar fórmulas para calcular área e volume apenas para a realização de uma prova, e não viam significado naquilo que estudavam, gerando um resultado insatisfatório no estudo de Geometria.

### 5.1 *Atividade 1: Geoplano e o cálculo de área de polígonos simples*

Na atividade 1, utilizaremos o geoplano, que é uma malha quadriculada com 45 *cm* de lado, dividida em 81 quadrados de 5 *cm* de lado com pregos nos seus vértices, como mostra a figura 35.

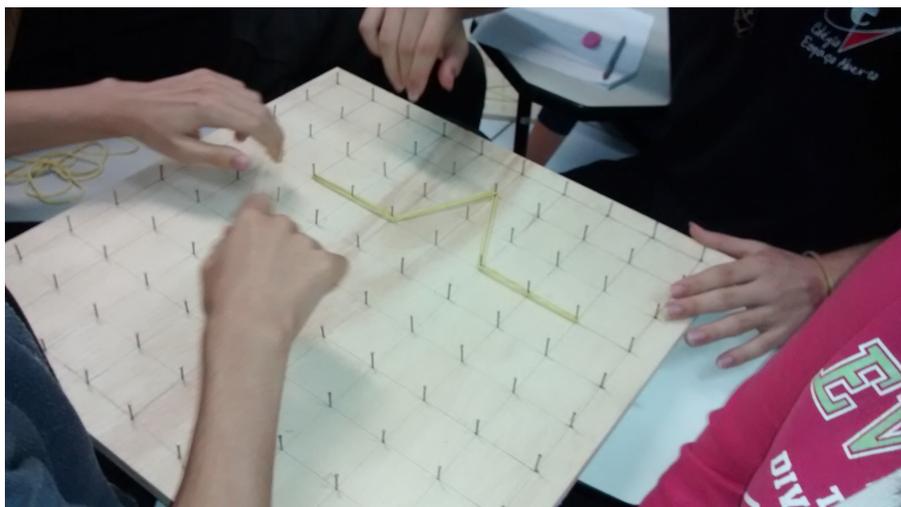


Figura 35: Geoplano

No início da atividade, relembramos algumas relações importantes da geometria plana, referente ao cálculo da área do triângulo, quadrado, retângulo e trapézio. Logo

em seguida, apresentamos o Teorema de Pick, comentando um pouco sobre sua história.

**Público alvo:** Alunos do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Espaço Aberto (sede Cocó).

**Objetivo:** Calcular a área de polígonos simples e a área de uma cidade, fazendo uso de um mapa, com a fórmula de Pick.

**Material utilizado:** Atividade impressa, geoplano, elástico e caneta.

**Tempo de aplicação:** Duas horas/aula.

**Metodologia:** Os alunos formarão grupos com 4 alunos, e cada um dos alunos formará, com o elástico e o geoplano, um polígono simples e, logo em seguida, contará seus pontos de bordo e internos, calculando a área do polígono.

A atividade 1 foi aplicada no Colégio Espaço Aberto, localizado na rua Bento Albuquerque, 1671, bairro Cocó, Fortaleza-ce, na turma de 3º ano do Ensino Médio. Na atividade, estavam presentes 24 alunos que foram divididos em 6 grupos, com 4 alunos cada, e, tiveram como referência a atividade, como apresentado a seguir:

### ATIVIDADE SOBRE O TEOREMA DE PICK

Observe a malha com os polígonos abaixo:

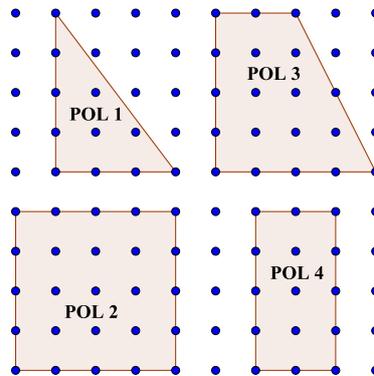


Figura 36: Polígonos na rede

1) Calcule a área de cada polígono aplicando as fórmulas utilizadas na geometria plana.

2) Calcule a área de cada polígono usando o Teorema de Pick ( $A = \frac{F}{2} + I - 1$ ).

Tabela 4: Contagem e área

Tipo	$F$	$I$	$F/2 + I - 1$
$POL1$			
$POL2$			
$POL3$			
$POL4$			

3) Sobre as duas formas de cálculo apresentadas, qual foi a melhor para o grupo? Por que?

4) Crie um polígono simples qualquer, sem usar formas já conhecidas, e calcule sua área usando o teorema de Pick.

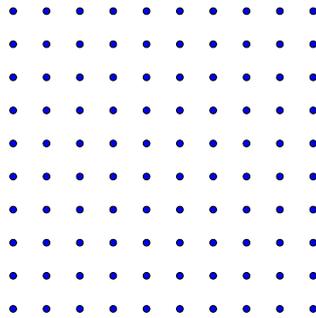


Figura 37: Malha

5) Calcule a área do município de Fortaleza utilizando o geoplano, mapa e escala.

A primeira questão consistia em calcular, com o uso das relações da geometria plana, as áreas das figuras que estavam na atividade impressa. A ideia era reproduzir no geoplano essas figuras e calcular suas respectivas áreas. Os alunos resolveram a questão, mas disseram que os cálculos dependiam de 4 fórmulas e isso não era nada atrativo, pois tais fórmulas se prendiam a figuras pré-determinadas e não funcionariam bem com as variações das figuras, ou seja, em figuras mais complexas eles teriam que subdividi-las para calcular a área, tornando o cálculo mais trabalhoso.

Na segunda questão, os alunos usaram os mesmos polígonos da atividade impressa, que foi reproduzida no geoplano, e fizeram uso do Teorema de Pick, contando os pontos de fronteira (bordo) e os pontos internos. Perceberam que, com o Teorema de Pick, não precisariam se prender às fórmulas da geometria plana e podiam variar o polígono como quisessem, que funcionaria do mesmo modo.

A terceira questão abordou essa diferença de cálculo, e foi perguntado para

o grupo qual era a melhor forma de calcular a área, com as fórmulas já conhecidas da geometria plana ou com o Teorema de Pick. Os seis grupos responderam que preferiam trabalhar com o teorema, pois Pick fugiria de todas as fórmulas convencionais e serviria para qualquer polígono simples de coordenadas inteiras.

Na quarta questão, o grupo teve liberdade para criar o próprio polígono simples de coordenadas inteiras, calculando sua área com o Teorema de Pick. Um dos grupos errou a contagem dos pontos de fronteira, comprometendo o resultado. Os outros cinco grupos realizaram a atividade com sucesso.

Um dos grupos criou o polígono da figura 38, e obtiveram 26 pontos de fronteira, 32 pontos internos e área igual a 44.

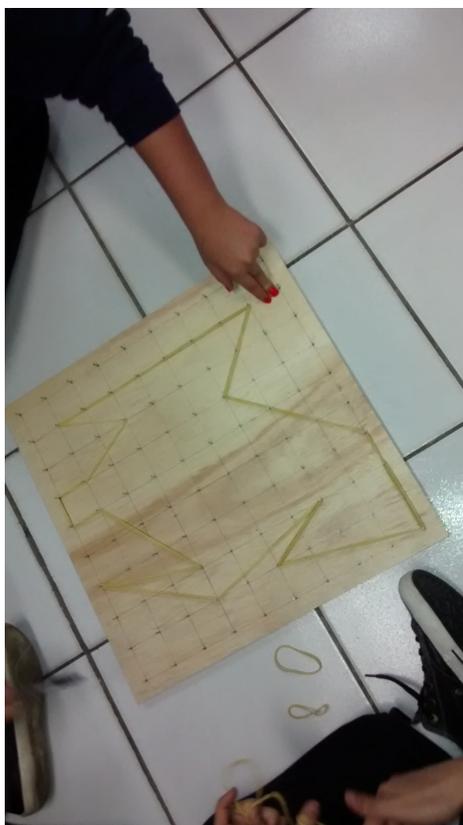


Figura 38: Polígono simples

Na quinta e última questão, os alunos tinham em mãos o mapa da cidade de Fortaleza, que teriam que prender ao geoplano para calcular a sua área. Cada grupo marcou um polígono no mapa na tentativa de aproximar o mapa da cidade de Fortaleza em um polígono, para logo em seguida usar o Teorema de Pick e calcular sua área. Como cada unidade de área do geoplano utilizado tinha  $25 \text{ cm}^2$ , imediatamente eles efetuaram a multiplicação e obtiveram a área do polígono, que representava o mapa, em  $\text{cm}^2$ . Assim, usando a escala do mapa, encontraram a área da cidade em  $\text{km}^2$ . Foi explicado para os

grupos que os cálculos que eles estavam efetuando se tratava de um aproximação, em que poderia haver erros por falta ou por excesso, pois os polígonos eram uma aproximação do mapa da cidade. Eles entenderam que, se o geoplano tivesse os pontos mais próximos, a aproximação seria melhor e o erro menor. A área oficial da cidade de Fortaleza é de  $313,8 \text{ km}^2$  e quatro grupos encontraram  $313 \text{ km}^2$ , outro  $322 \text{ km}^2$  e o último  $304 \text{ km}^2$ . O cálculo da área da cidade de Fortaleza foi satisfatório para todos os grupos, pois está relativamente próximo da área real.

A figura 39 mostra o polígono gerado, pelo mapa da Fortaleza, por uma das equipes.

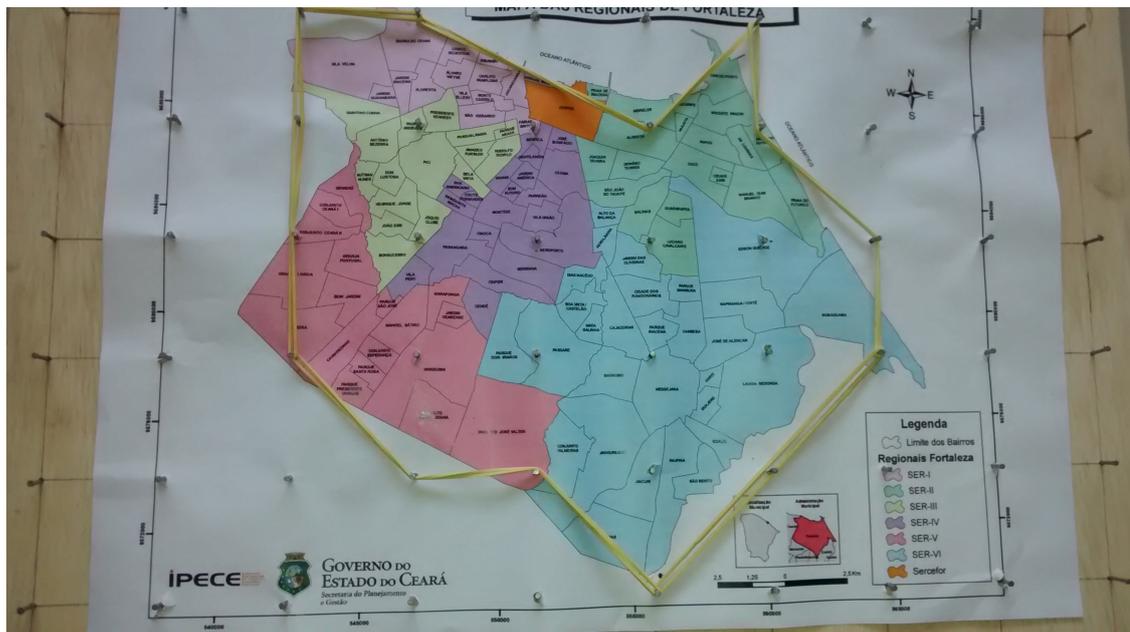


Figura 39: Mapa de Fortaleza

No final da atividade, os 24 alunos responderam um questionário referente à atividade realizada. O questionário trazia as seguintes perguntas:

### QUESTIONÁRIO SOBRE O TEOREMA DE PICK

1) Realizando um comparativo com os cálculos realizados, com fórmulas já conhecidas da geometria plana, qual foi a importância da utilização do Teorema de Pick na atividade aplicada?

2) O Teorema de Pick é uma alternativa viável para o ensino de áreas de figuras planas? Por que?

3) Sobre o cálculo da área da cidade de Fortaleza, o Teorema de Pick permitiu tal cálculo encontrando um resultado próximo da realidade?

- 4) Comente sobre vantagens e desvantagens do Teorema de Pick.
- 5) O que você achou da atividade? Acrescentou algo ao seu aprendizado?

Sobre os resultados do questionário, a primeira questão pedia que ele fizesse um comparativo entre as fórmulas já usadas na geometria plana e o Teorema de Pick. Na figura 40, temos a resposta do aluno 15, mas o resultado foi unânime em dizer que o Teorema de Pick torna o processo mais prático, realizando o cálculo da área apenas com contagem e uma só fórmula para todos os casos.

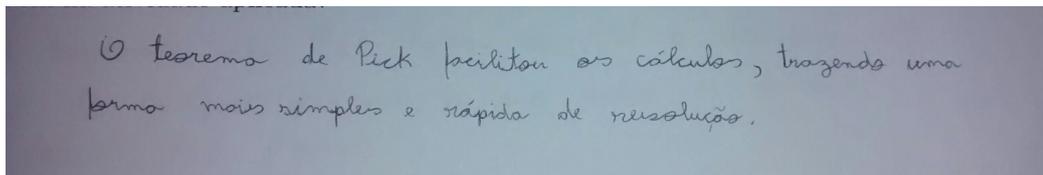


Figura 40: Resposta do aluno 15

Na segunda questão, eles avaliaram se o Teorema de Pick seria viável para o ensino de áreas. Em resumo, todos responderam que sim, pois existe a liberdade de aplicar em um polígono simples qualquer e torna o processo de cálculo mais rápido. A figura 41 mostra a resposta do aluno 14.

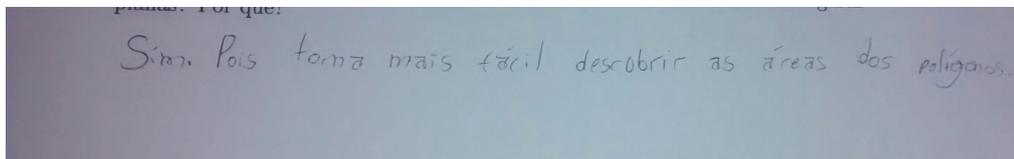


Figura 41: Resposta do aluno 14

Sobre a terceira questão, que pedia um relato sobre a área do mapa de Fortaleza e depois a transformação para as medidas reais, eles disseram ser interessante, pois o mapa trata de uma figura completamente irregular, além do que nem polígono é. A utilização dos elásticos para formar um polígono em torno do mapa, a utilização de escala, foi julgada como interessante e eficiente, pois permitia uma aproximação da área oficial. Perceberam também que, se o geoplano tivesse os pregos mais próximos, tal aproximação teria um erro menor, pois o polígono formado teria um formato mais próximo do mapa, tornando seu valor mais próximo da área oficial. A figura 42 mostra a resposta do aluno 14.

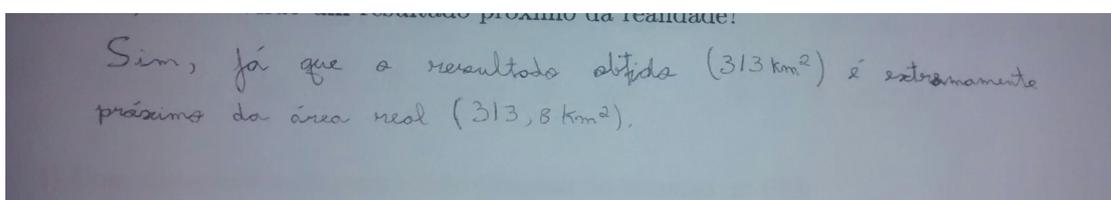


Figura 42: Resposta do aluno 14

A quarta questão pedia vantagens e desvantagens do Teorema de Pick e o uso do geoplano. Sobre vantagens, eles relataram praticidade, uso de uma só fórmula e a liberdade para criar o polígono simples. Disseram também que é mais um método que pode ser associado aos conhecimentos que já possuem. Sobre desvantagens, relataram que, como o geoplano foi confeccionado com pregos, em algum momento podiam se machucar se não tivessem o devido cuidado. Também relataram que o teorema não funciona se eles cruzassem as ligas, ou seja, se o polígono não fosse simples. A figura 43 mostra a resposta do aluno 17.

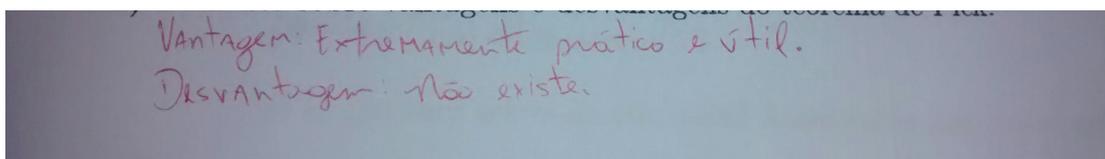


Figura 43: Resposta do aluno 17

Na quinta e última questão, foi perguntado o que eles tinham achado da atividade, e se acrescentou algo ao seu aprendizado. Disseram ser uma atividade divertida, interessante, prática, produtiva e diferente do que eles estavam acostumado, pois se viram interessados e motivados, e que agregou conhecimento sobre o estudo de áreas. A figura 44 mostra a resposta do aluno 17.

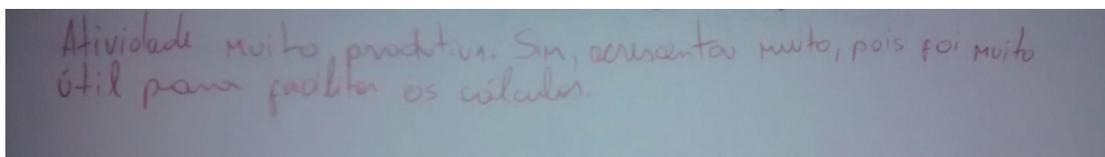


Figura 44: Resposta do aluno 17

## 5.2 Atividade 2: Cálculo do volume de poliedros em uma grade



Figura 45: Pirâmides na grade

Na atividade 2, utilizaremos a grade, que é um cubo de 40 *cm* de lado que tem uma malha quadriculada com quadrados de 10 *cm* de lado no bordo e no interior do cubo, como mostra a figura 45.

A atividade 2 foi aplicada no Colégio Espaço Aberto, localizado na rua Bento Albuquerque, 1671, bairro Cocó, Fortaleza-Ce, com um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio. Na atividade estavam presentes 5 alunos, que tiveram como referência a atividade a seguir:

**Público alvo:** Grupo de 5 alunos do 3º ano do ensino médio do Colégio Espaço Aberto (sede Cocó).

**Objetivo:** Calcular volume de poliedros de rede com o Teorema de Reeve.

**Material utilizado:** Grade(cubo), elásticos, fita adesiva e atividade impressa

**Tempo de aplicação:** Duas horas/aula.

**Metodologia:** Montar poliedros de rede na grade (cubo) e, com a contagem dos seus pontos de bordo e internos, calcular o seu volume.

### ATIVIDADE SOBRE O VOLUME NA REDE SECUNDÁRIA $\mathbb{Z}_n^3$

1) Calcule o volume dos dois sólidos expostos na grade com o uso dos conhecimentos de geometria espacial.

2) Calcule o volume dos mesmos sólidos da questão 1 usando contagem, fazendo uso da relação  $2n(n^2 - 1)V(P) = B_n(P) - nB_1(P) + 2(I_n(P) - nI_1(P))$  para  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 2$ ). Para um sólido, adote  $n = 2$  e, para o outro,  $n = 4$ .

3) Sobre as duas formas de cálculo apresentadas, qual foi a melhor para o grupo? Por que?

4) Crie um poliedro convexo qualquer e calcule seu volume usando a relação exposta na questão 2.

5) Uma pirâmide do Egito foi reproduzida na grade com uma escala 1 : 250. Sabendo que estamos trabalhando no  $\mathbb{Z}_2^3$ , calcule o volume da pirâmide exposta na grade e, usando escala e o Teorema de Reeve, obtenha o volume da pirâmide do Egito.

No início da atividade, foi apresentado a grade (cubo), os elásticos e as fitas que eles utilizariam para realizar a atividade. Relembramos conceitos importantes da geometria espacial já estudados, e foi explicado como funciona a localização de um ponto no espaço, apresentando o sistema de eixos e a rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ . Apesar de ser uma novidade, os alunos não mostraram dificuldades com o uso da rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$ , pois

aprenderam, com facilidade, que uma simples multiplicação de um ponto da rede por  $n$  tornava o ponto pertencente a  $\mathbb{Z}^3$ . Assim, com esse conhecimento, a contagem dos pontos de rede no poliedro de rede ficaria simples.

Na 1ª questão, foi apresentado duas pirâmides e pedido que eles utilizassem as fórmulas usuais da geometria espacial. O grupo realizou a atividade e não apresentou dificuldades.

Na 2ª questão, eles utilizaram as mesmas pirâmides da 1ª questão e, com o uso de contagem, calcularam o volume das duas com o Teorema de Reeve. Para a contagem, escolheram contar primeiro os pontos do bordo (faces) para depois contar os internos. Para a pirâmide maior, usaram  $n = 4$ , contando os pontos  $B_1, B_4, I_1$  e  $I_4$ . Para a pirâmide menor, usaram  $n = 2$ , contando  $B_1, B_2, I_1$  e  $I_2$ . Eles decidiram usar as fitas para tornar a contagem dos pontos mais simples, destacando os pontos de bordo. Mostraram facilidade para contar os pontos internos e diferenciar o  $I_1$  do  $I_n$ , para  $n \neq 1$ . A figura 38 mostra o momento da utilização da fitas para destacar o bordo (faces) do poliedro.

Na 3ª questão, foi perguntado para o grupo qual era a melhor maneira de calcular o volume. Relataram que, no caso das figuras apresentadas terem formas bem definidas, como as pirâmides, o uso da geometria espacial foi mais prático. No entanto, no caso de uma figura com muitas faces, que não apresenta uma fórmula bem definida na geometria espacial para calcular o seu volume, o uso do Teorema de Reeve é absolutamente viável, pois a contagem, nesse caso, seria melhor.

Na 4ª questão, foi dada a liberdade para o grupo criar o seu poliedro e, com a contagem no  $\mathbb{Z}_2^3$ , calcular o seu volume. O grupo criou um poliedro com 9 faces, como mostra a figura 46. Na contagem encontraram com facilidade;  $B_1 = 10$ ,  $B_2 = 34$ ,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 11$  e volume é igual a  $\frac{8}{3}$ .



Figura 46: Poliedro na grade

Na 5ª questão, por ser um assunto muito presente no ENEM, utilizamos escala. Foi dada uma pirâmide na grade e uma escala de 1 : 250, e o grupo teria que calcular o volume da pirâmide na grade com o uso de contagem dos pontos de rede no  $\mathbb{Z}_2^3$  e, o volume da pirâmide do Egito. Realizaram a atividade com sucesso, pois já dominavam o uso de escala e a contagem dos pontos de rede. A figura 47 mostra a pirâmide utilizada na 5ª questão. Com a contagem dos pontos, obtiveram  $\frac{64000}{3} \text{cm}^3$  de volume para a pirâmide na grade e, usando escala, obtiveram  $\frac{10^6}{3} \text{m}^3$  para a pirâmide do Egito.



Figura 47: Pirâmide na grade

Depois da atividade, aplicamos o questionário a seguir:

### QUESTIONÁRIO SOBRE O TEOREMA DE REEVE

- 1) Realizando um comparativo com os cálculos realizados, com fórmulas já conhecidas da geometria espacial, qual foi a importância da utilização do Teorema de Reeve na atividade aplicada?
- 2) O Teorema de Reeve é uma alternativa viável para o ensino de volume? Por que?
- 3) Comente sobre a utilização do Teorema de Reeve e o uso de escala na

pirâmide.

4) Comente sobre vantagens e desvantagens do Teorema de Reeve.

5) O que você achou da atividade? Acrescentou algo ao seu aprendizado?

Sobre a 1ª questão, os alunos relataram que o Teorema de Reeve foi melhor, pois, se o poliedro for convexo com coordenadas inteiras, não importa quantas faces ele tenha, com o uso de uma fórmula apenas, podemos calcular o seu volume realizando contagem. A figura 48 mostra a resposta do aluno 1.

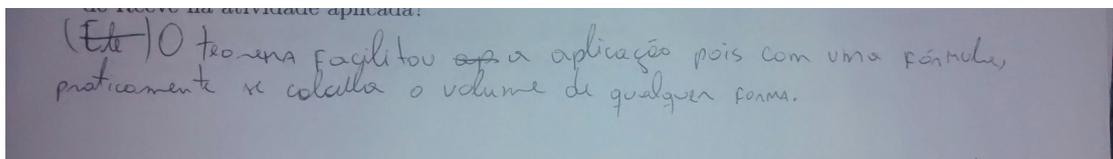


Figura 48: Resposta do aluno 1

Na 2ª questão, disseram ser uma alternativa viável, pois é interessante manipular a figura realizando contagem e não ficam restrito as formas tridimensionais mais conhecidas. A figura 49 mostra a resposta do aluno 1.

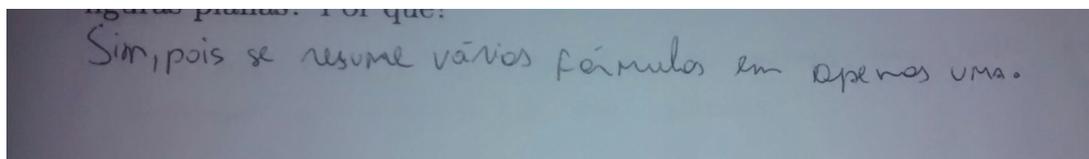


Figura 49: Resposta do aluno 1

Na 3ª questão, comentaram sobre a utilização de Teorema de Reeve e o uso de escala. Relataram que o uso do Teorema de Reeve, na contagem, para calcular o volume da pirâmide na grade, foi rápido. O uso da escala por meio de uma equação também foi imediato, tornando o exercício rápido. A figura 50 mostra a resposta do aluno 3.

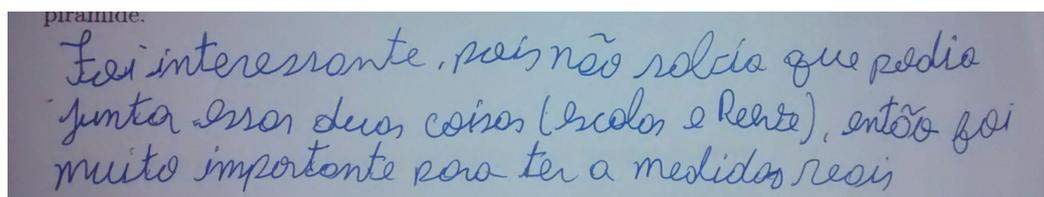


Figura 50: Resposta do aluno 3

Na 4ª questão, falaram sobre vantagens e desvantagens do Teorema de Reeve. Sobre vantagens, disseram que simplifica o processo, trazendo uma alternativa que pode

ser aliada ao estudo já existente de geometria espacial. Sobre desvantagens, alguns disseram que, dependendo da figura, a contagem pode demorar, já outros disseram não ter desvantagens. A figura 51 mostra a resposta do aluno 1.

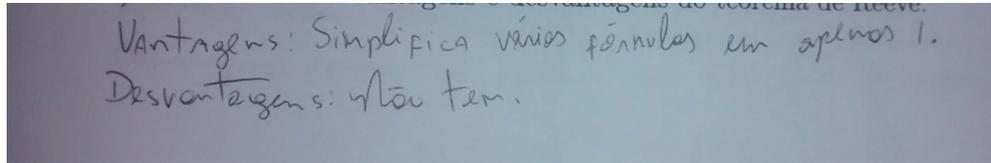


Figura 51: Resposta do aluno 1

Na 5ª questão, os alunos deram suas opiniões sobre a atividade aplicada. No geral, relataram que a Atividade 2 trouxe algo novo para o cálculo de volume e, trabalhando com material concreto e contagem, calcular volume fica mais interessante. Disseram que as Atividades 1 e 2 foram interessantes, mas a atividade 2, relativa ao volume, deu uma liberdade maior de criação, pois trabalhavam em três dimensões. A figura 52 mostra a resposta do aluno 3.

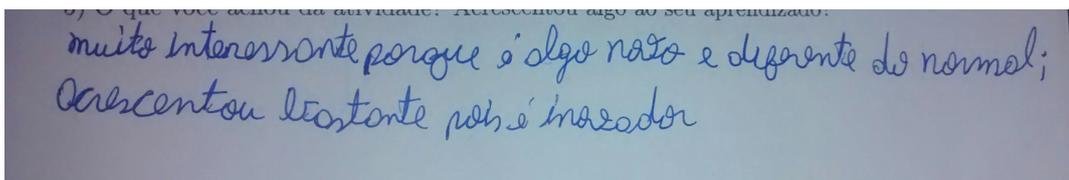


Figura 52: Resposta do aluno 3

### 5.3 Atividade 3: Oficina sobre o Teorema de Reeve

A atividade 3 aconteceu na Escola Estadual João Mattos, localizada no bairro Montese, rua Almirante Rubim 1014, Fortaleza-ce, com um grupo de cinco professores de matemática, que apreciaram e avaliaram o tema proposto. A ideia é mostrar uma alternativa que possa ser utilizada por eles nas suas aulas de geometria, criando uma nova metodologia prática e simples de aplicar. Para os professores foi apresentada a seguinte atividade:

**Público alvo:** Grupo de 5 professores de Matemática da Escola Estadual João Mattos.

**Objetivo:** Calcular volume de poliedros de rede com o Teorema de Reeve.

**Material utilizado:** Grade (cubo), elásticos, fita adesiva e atividade impressa

**Tempo de aplicação:** Duas horas/aula.

**Metodologia:** Montar poliedros de rede na grade (cubo) e, com a contagem dos seus pontos de bordo e internos, calcular o seu volume.

#### ATIVIDADE SOBRE O VOLUME NA REDE SECUNDÁRIA $\mathbb{Z}_n^3$

1) Calcule o volume dos sólidos expostos na grade usando contagem, fazendo

uso da relação  $2n(n^2 - 1)V(P) = B_n(P) - nB_1(P) + 2(I_n(P) - nI_1(P))$  para  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 2$ ). Para um sólido, adote  $n = 2$  e, para o outro,  $n = 4$ .

2) Sobre a forma usual, usada na geometria espacial, e o Teorema de Reeve, qual foi o método mais interessante? Por que?

3) Crie um poliedro convexo qualquer, na rede  $\mathbb{Z}_2^3$ , e calcule seu volume usando a relação exposta na questão 2.

4) Uma pirâmide do Egito foi reproduzida na grade com uma escala 1 : 250. Sabendo que estamos trabalhando no  $\mathbb{Z}_2^3$ , calcule o volume da pirâmide exposta na grade e, usando escala e o teorema de Reeve, obtenha o volume da pirâmide do Egito.

Antes de trabalhar o roteiro, foi feita uma explanação geral do trabalho, explicando o Teorema de Pick para o cálculo de áreas e como se daria a expansão para o cálculo do volume. Mostramos a rede secundária  $\mathbb{Z}_n^3$  e as condições para que um ponto pertença a ela. Feito isso, passamos as impressões que os alunos tiveram nas atividades 1 e 2, mostrando os pontos de vista.

Na 1ª questão, foram trabalhadas duas pirâmides, uma na rede secundária  $\mathbb{Z}_2^3$ , e a outra na rede secundária  $\mathbb{Z}_4^3$ . Todos conseguiram identificar os pontos de bordo e internos da rede  $\mathbb{Z}_n^3$ , calculando os volumes das duas pirâmides sem problemas.

Na 2ª questão, tinham que julgar o método aplicado. Acharam o processo interessante e curioso, por conseguir calcular o volume realizando apenas contagem e fazendo uso de uma só fórmula. Tomaram conhecimento, durante a explanação, que só era possível a utilização de tal fórmula se os vértices tivessem as coordenadas inteiras. Disseram que, apesar dessa limitação dos vértices, o tema poderia ser muito útil em uma prática na sala de aula, pois dava liberdade para o aluno manipular a figura, construir os seus poliedros e aprender de fato o que significa calcular um volume.



Figura 53: Construção da pirâmide

Na 3ª questão, foi dada liberdade ao grupo de professores para criar um poliedro, como mostra a figura 53. Criaram um poliedro na rede  $\mathbb{Z}_2^3$ , contando os seus pontos e calculando o seu volume. Avaliaram que o Teorema de Reeve dava essa liberdade de criação, pois a única exigência eram vértices com coordenadas inteiras.

Na 4ª questão, eles resolveram o mesmo exercício, que envolvia escala, proposto aos alunos. Julgaram ser um exercício bem interessante, pois proporciona associar dois temas que são cobrados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), trabalhando de uma forma diferente da aula expositiva. A figura 54 mostra o grupo de professores e o autor deste trabalho.



Figura 54: Grupo de professores

Logo após o término da atividade, foi aplicado o mesmo questionário da atividade 2, modificando apenas 5ª pergunta.

**5) O que você achou da atividade? Poderia acrescentar algo na sua prática?**

Sobre a 1ª questão, eles entenderam que com esse teorema apresenta-se aos alunos e professores outro método inovador para o cálculo de volume de poliedros, trabalhando de modo prático, construindo os poliedros. A figura 55 mostra a resposta do professor 1.

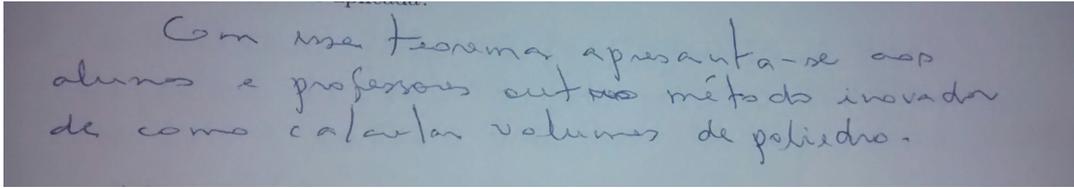


Figura 55: Resposta do professor 1

Na 2ª questão, disseram que o tema abordado é uma boa alternativa para o ensino de geometria espacial, trabalhando de forma prática e tendo uma visão sobre os pontos, permitindo criar estratégias para a contagem. Também relataram que, assim como o Teorema de Pick, é de fácil entendimento para os alunos, deixando de ser um conteúdo monótono e cansativo. A figura 56 mostra a resposta do professor 1.

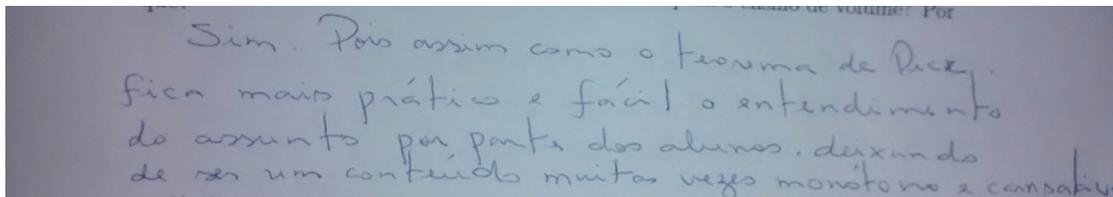


Figura 56: Resposta do professor 1

Na 3ª questão, comentaram sobre o uso de escala depois da aplicação do Teorema de Reeve. Relataram que, por ser um tema que está diretamente ligado ao cotidiano de muitas pessoas, foi muito oportuno essa associação, pois cobrava dos nossos alunos um conhecimento importante que foi visto por eles no ensino fundamental. Disseram que foi importante a associação de escala e volume, pois permite lembrar, para o aluno do ensino médio, proporcionalidade. A figura 57 mostra a resposta do professor 1.

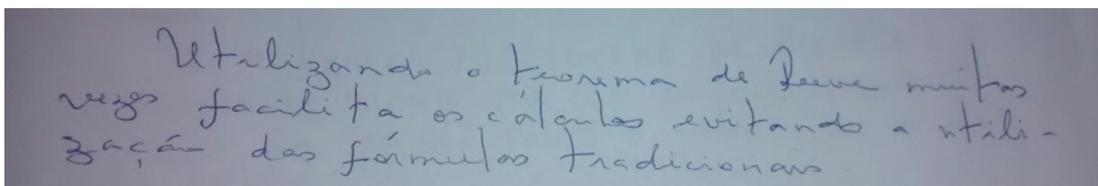


Figura 57: Resposta do professor 1

Na 4ª questão, avaliaram as vantagens e desvantagens do método aplicado. Sobre vantagens, relataram que aumenta a percepção dos alunos com relação a contagem, permite utilizar outras áreas da matemática, é um processo dinâmico e prático. Sobre desvantagens, disseram que em alguns momentos, a contagem dos pontos pode ficar confusa se não for elaborada uma estratégia para isso. A figura 58 mostra a resposta do professor 1.

Uma vantagem é que se trabalha outras áreas da matemática, como teoria dos números. A desvantagem é a questão de ser trabalhado com pontos ~~inteiros~~ números inteiros.

Figura 58: Resposta do professor 1

Na 5ª questão, deram suas opiniões sobre a atividade aplicada. Disseram ser uma atividade interessante, pois mostra ao aluno que ele é capaz de calcular volume de poliedro apenas com contagem, tornando a atividade lúdica. Em outra opinião, foi citado que as atividades 1 e 2 podem ser agregadas ao laboratório de matemática da escola, enriquecendo as aulas. A figura 59 mostra a resposta do professor 1.

A atividade foi muito interessante, pois faz com que o aluno seja motivado a calcular o volume de um poliedro se ele sabe apenas contar, não se atentando a fórmulas de geometria espacial tradicional.

Figura 59: Resposta do professor 1

## 6 CONCLUSÃO

No final deste estudo, que tem o objetivo de proporcionar métodos inovadores para auxiliar no ensino de geometria plana e espacial, conclui-se que os resultados foram satisfatórios, tendo em vista a excelente participação dos alunos e que eles sentem uma grande deficiência com o ensino de geometria.

Por meio das atividades propostas no trabalho, foi possível proporcionar aos alunos dois métodos de cálculo na geometria. O primeiro para a área, trabalhando qualquer polígono simples com vértices de coordenadas inteiras, onde podemos aplicar o Teorema de Pick. O segundo para o volume, mostrando que o Teorema de Reeve é uma extensão do Teorema de Pick, pois tem como objetivo usar as mesmas ideias, ou seja, usar a contagem para o cálculo do volume.

Os dois teoremas propostos servirão como aliados a tudo que já existe para o cálculo de área e volume, mostrando alternativas práticas e baratas para uso nas escolas. Com a manipulação dos objetos e o uso dos teoremas, as atividades atingiram seus objetivos, pois os alunos, que mostraram ter dificuldades com a geometria plana e espacial, foram bem nas atividades, tornando as atividades mais significativas para o seu aprendizado.

Nas atividades aplicadas, poucos conheciam o Teorema de Pick e, dos alunos e professores que participaram, ninguém conhecia o Teorema de Reeve. Como esse teorema mostrou ser útil, tem todas as possibilidades de ser explorado nas aulas de geometria, até porque o Teorema de Reeve nos permite explorar assuntos como estudo dos números racionais e uma pouco de álgebra linear. Do mesmo modo, o Teorema de Pick, mostra ser uma boa alternativa, no ensino de área, para professores em suas aulas.

A oficina realizada com os professores foi muito produtiva, pois tivemos a oportunidade de compartilhar teoremas importantes na geometria, expondo práticas que o grupo não conhecia. Na oficina, o grupo entendeu que a atividade com o Teorema de Reeve é uma opção viável para o estudo de volume, pois trabalhar com contagem é mais simples para o aluno.

Concluimos que se faz necessário repensar nossas práticas educacionais, mostrando alternativas atrativas que possam viabilizar o estudo de geometria, trazendo resultados positivos para os nossos alunos. O ideal é utilizarmos de práticas educacionais que possam estar relacionadas ao cotidiano do nosso aluno, contribuindo para o seu desenvolvimento cognitivo e social. Acreditamos que, tais atividades atingiram os seus objetivos, contribuindo como opções viáveis para o ensino de geometria, proporcionando a todos os nossos alunos uma aprendizagem significativa.

## REFERÊNCIAS

- BENTLEY, P., **O livro dos números: Uma história ilustrada da matemática**, 1972; tradução maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica Samuel Jurkiewicz - Rio de Janeiro: Jorge Zahar ed., 2009.
- DOLCE, O., **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**, v. 9. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005.
- DOLCE, O., **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica**, v. 10. 6ª ed. São Paulo: Atual, 2005.
- HEFEZ, A., **Introdução à Álgebra Linear**, 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM., 2012.
- KOŁODZIEJCZYK. K. **An odd formula for the volume of three-dimensional lattice polyhedra**, *Geom. Dedicata* 61 (1996) 271–278.
- KOŁODZIEJCZYK. K. **The boundary characteristic and the volume of lattice polyhedra**, *Discrete Math.* 190(1998) 137–148.
- LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**, Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- WIKIPEDIA. **Teorema de Pick**. Disponível em:  
<[http://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_de\\_Pick](http://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pick)>, Acesso em: 20/01/2016.

## ANEXOS

## ATIVIDADE SOBRE O TEOREMA DE PICK

Observe a malha com os polígonos abaixo:

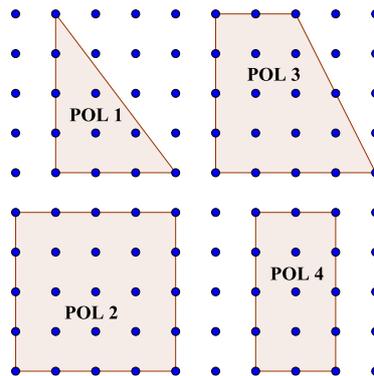


Figura 60: Polígonos na rede

- 1) Calcule a área de cada polígono aplicando as fórmulas utilizadas na geometria plana.
- 2) Calcule a área de cada polígono usando o Teorema de Pick ( $A = \frac{F}{2} + I - 1$ ).

Tabela 5: Contagem e área

Tipo	$F$	$I$	$F/2 + I - 1$
$POL1$			
$POL2$			
$POL3$			
$POL4$			

- 3) Sobre as duas formas de cálculo apresentadas, qual foi a melhor para o grupo? Por que?

4) Crie um polígono simples qualquer, sem usar formas já conhecidas, e calcule sua área usando o teorema de Pick.

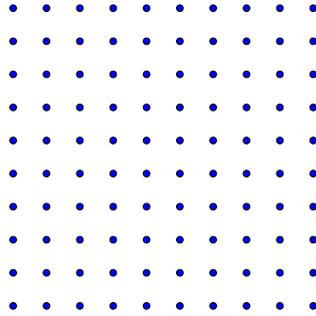


Figura 61: Malha

5) Calcule a área do município de Fortaleza utilizando o geoplano, mapa e escala.





## QUESTIONÁRIO SOBRE O TEOREMA DE REEVE

1) Realizando um comparativo com os cálculos realizados, com fórmulas já conhecidas da geometria espacial, qual foi a importância da utilização do Teorema de Reeve na atividade aplicada?

2) O Teorema de Reeve é uma alternativa viável para o ensino de volume? Por que?

3) Comente sobre a utilização do Teorema de Reeve e o uso de escala na pirâmide.

4) Comente sobre vantagens e desvantagens do Teorema de Reeve.

5) O que você achou da atividade? Acrescentou algo ao seu aprendizado?

## QUESTIONÁRIO SOBRE O TEOREMA DE REEVE

1) Realizando um comparativo com os cálculos realizados, com fórmulas já conhecidas da geometria espacial, qual foi a importância da utilização do Teorema de Reeve na atividade aplicada?

2) O Teorema de Reeve é uma alternativa viável para o ensino de volume? Por que?

3) Comente sobre a utilização do Teorema de Reeve e o uso de escala na pirâmide.

4) Comente sobre vantagens e desvantagens do Teorema de Reeve.

5) O que você achou da atividade? Poderia acrescentar algo na sua prática?