



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**LÚCIO LAERTTI RIOS CAJAZEIRAS**

**O CENTRO DE MASSA E APLICAÇÕES À GEOMETRIA**

**FORTALEZA**

**2016**

**LÚCIO LAERTTI RIOS CAJAZEIRAS**

**O CENTRO DE MASSA E APLICAÇÕES À GEOMETRIA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

**FORTALEZA**

**2016**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

C139c      Cajazeiras, Lúcio Laertti Rios  
              O centro de massa e aplicações à geometria / Lúcio Laertti Rios Cajazeiras. – 2016.  
              41 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Momento de inércia. 2. Geometria euclidiana. 3. Problemas. I. Título.

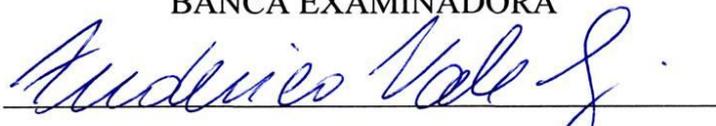
LÚCIO LAERTTI RIOS CAJAZEIRAS

“O CENTRO DE MASSA E APLICAÇÕES À GEOMETRIA”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

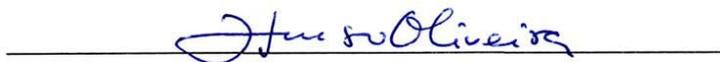
Aprovada em: 18 / 06 / 2016.

BANCA EXAMINADORA



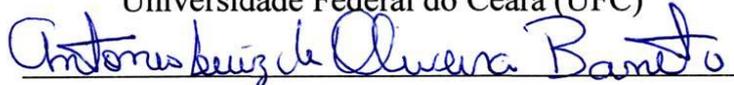
Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Me. José Afonso de Oliveira

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Antônio Luiz de Oliveira Barreto

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus, à minha esposa e aos meus filhos,  
companheiros de todas as horas.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pelo dom da vida.

À minha família, em especial à minha esposa, mãe e filhos.

Aos meus irmãos, por acreditaram em mim.

Aos professores José Afonso de Oliveira e Antônio Luiz de Oliveira Barreto, por aceitarem fazer parte da banca examinadora.

A todo corpo docente da Universidade Federal do Ceará (UFC), em especial ao professor Frederico Vale Girão.

“Por essas razões, o general sábio pondera, pesa o que há de favorável, de desfavorável, e decide o que é mais acertado. Ao levar em conta o que é favorável, torna o plano executável; ao levar em conta o que é desfavorável, soluciona as dificuldades.”  
(Sun Tzu)

## RESUMO

Muitas são as ferramentas desenvolvidas para a resolução de problemas de Geometria Euclidiana. O presente estudo apresenta uma ferramenta baseada no conceito físico de centro de massa, proporcionando o desenvolvimento de habilidades necessárias na resolução de problemas geométricos, principalmente em relação às questões apresentadas em Olimpíadas de Matemáticas, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Centro de Massa. Momento de Inércia. Geometria Euclidiana.

## **ABSTRACT**

There are many tools developed for solving Euclidean Geometry problems. This study presents a tool based on the physical concept of center of mass, allowing the development of the skills needed to solve geometric problems, especially the ones presented in Mathematics Olympiads, both in Elementary School and in High School.

**Keywords:** Center of Mass. Moment of Inertia. Euclidean Geometry.

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Duas esferas ligadas por varão de massa desprezível ..... | 11 |
| Figura 2 – Exemplo de ponto de equilíbrio (CM) .....                 | 11 |
| Figura 3 – Baricentro como centro de massa .....                     | 14 |
| Figura 4 – Incentro como centro de massa .....                       | 15 |
| Figura 5 – Ponto de Nagel como centro de massa.....                  | 16 |
| Figura 6 – Pontos colineares (Incentro, Baricentro e Nagel) .....    | 18 |
| Figura 7 – Problema 1 (a).....                                       | 20 |
| Figura 8 – Problema 1 (b).....                                       | 21 |
| Figura 9 – Problema 1 (c).....                                       | 22 |
| Figura 10 – Problema 2 .....   | 23 |
| Figura 11 – Problema 3 .....   | 24 |
| Figura 12 – Problema 4 .....   | 25 |
| Figura 13 – Problema 5 .....   | 26 |
| Figura 14 – Problema 6 .....   | 27 |
| Figura 15 – Problema 7 .....   | 29 |
| Figura 16 – Problema 8 .....   | 30 |
| Figura 17 – Problema 8 (a).....                                      | 31 |
| Figura 18 – Problema 8 (b).....                                      | 31 |
| Figura 19 – Problema 9 .....   | 32 |
| Figura 20 – Problema 10 .....  | 33 |
| Figura 21 – Problema 10 .....  | 34 |
| Figura 22 – Problema 11 .....  | 36 |
| Figura 23 – Problema 12 .....  | 37 |
| Figura 24 – Problema 13 .....  | 38 |
| Figura 25 – Problema 14 .....  | 39 |

## SUMÁRIO

|     |                             |    |
|-----|-----------------------------|----|
| 1   | INTRODUÇÃO .....            | 10 |
| 2   | CENTRO DE MASSA.....        | 11 |
| 2.1 | Momento de Inércia .....    | 18 |
| 3   | PROBLEMAS RELACIONADOS..... | 20 |
| 4   | CONSIDERAÇÕES FINAIS.....   | 40 |
|     | REFERÊNCIAS.....            | 41 |

## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo do presente estudo é apresentar uma proposta didática de resolução de problemas de Geometria baseada no centro de massa.

Os problemas de Geometria sempre encantaram os admiradores da Matemática. A Geometria é uma das mais antigas manifestações matemáticas da humanidade. Surgiu independentemente em várias civilizações antigas de forma prática para resolver problemas do cotidiano. Sua formalização teórica foi concretizada na Grécia Antiga. Após a teorização da geometria na Grécia, foram raras as descobertas neste campo nos séculos seguintes.

Originalmente, o centro de massa é utilizado para resolver problemas de Física Newtoniana. Este trabalho consiste em utilizar o conceito físico de centro de massa para resolver problemas de Geometria Euclidiana. No início do trabalho daremos definições matemáticas precisas de centro de massa e de momento de inércia. Depois de definir tais conceitos, mostraremos algumas de suas propriedades. Em seguida, para mostrar a aplicabilidade e a eficácia deste método, resolveremos vários problemas de Geometria Euclidiana (Plana e Espacial).

É muito interessante que um conceito de uma disciplina (Física) está sendo usado para resolver problemas de outra disciplina (Matemática; mais especificamente, Geometria Euclidiana). Tal interação ajuda na aprendizagem, pelos alunos, de ambas as disciplinas.

Olimpíadas de Matemática têm sido uma excelente maneira de incentivar alunos dos ensinos médio e fundamental a estudarem Matemática. Problemas de Geometria (Plana e Espacial) estão sempre presentes em tais competições. Muitos desses problemas podem ser resolvidos, algumas vezes de forma bem mais simples, utilizando-se o método do centro de massa.

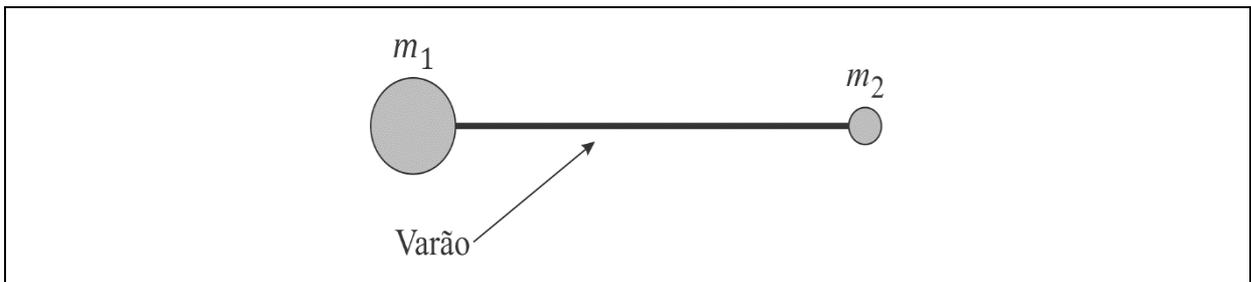
Esperamos que este trabalho ajude a difundir esta nova técnica e que também possa servir de texto em aulas preparatórias para competições de Matemática.

## 2 CENTRO DE MASSA

O que é centro de massa? Diz-se repetidamente que as estrelas duplas orbitam em redor do seu centro de massa (CM) comum. Terra e a Lua orbitam em torno do centro de massa respectivo, etc. Afinal, o que é o centro de massa de um sistema de “corpos”? (ALMEIDA; RÉ, 2000).

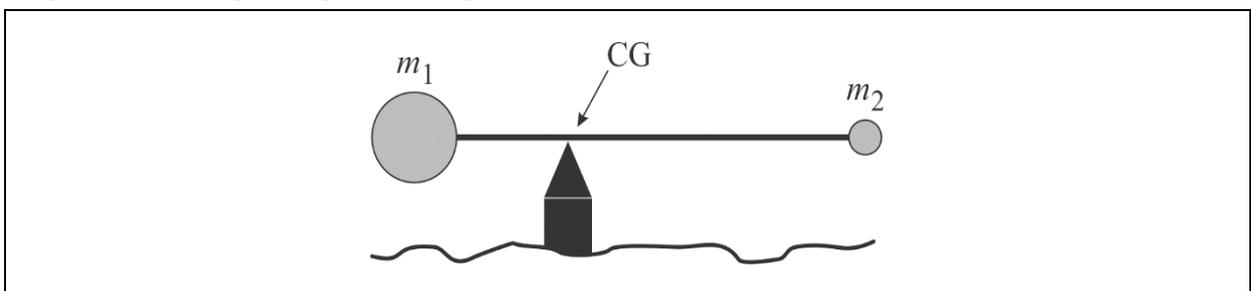
Liguemos duas esferas de massas diferentes ( $m_1$  e  $m_2$ ) por meio de um varão de massa muito pequena e insignificante (Figura 1). Por tentativa e erro podemos encontrar a posição onde colocar um apoio, de modo que o conjunto fique em equilíbrio, tendo-se então a situação ilustrada na Figura 2. O ponto de apoio, nessas condições, marca aproximadamente o centro de gravidade (CM) do sistema. Digo muito próximo, porque o CM em questão estará no eixo do varão e não na sua superfície lateral. Se a massa do varão não for insignificante, o que se encontra na Figura 2 é o CM do conjunto  $m_1 + m_2 + m_{\text{VARÃO}}$  (ALMEIDA; RÉ, 2000).

Figura 1 – Duas esferas ligadas por varão de massa desprezível



Fonte: Almeida e Ré (2000).

Figura 2 – Exemplo de ponto de equilíbrio (CM)



Fonte: Almeida e Ré (2000).

O CM encontra-se, portanto, numa localização tal que a distância entre os centros dos dois corpos é por ele dividida em duas partes de comprimentos inversamente proporcionais às respectivas massas. O CM fica, portanto, entre os centros dos dois corpos, mais próximo do que tiver maior massa (ALMEIDA; RÉ, 2000).

Faremos um conceito geométrico analítico, segundo Carneiro e Girão (2005).

**Definição 1.** Seja  $k$  um inteiro positivo. Um sistema de massas é um conjunto da forma

$$S = \{P_1[m_1], P_2[m_2], \dots, P_k[m_k]\},$$

onde  $P_1, P_2, \dots, P_k$  são pontos do plano, e ao ponto  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , está associada uma massa  $m_i \in \mathbb{R}$ , de modo que  $m_1 + m_2 + \dots + m_k \neq 0$ . O centro de massa (CM) do sistema de massas  $S$  é o ponto  $P = (x, y)$  dado por:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{m}$$

e

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ky_k}{m},$$

onde  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$  é a massa associada a ele, a qual também chamamos de massa total do sistema  $S$ .

**Definição 2.** Dizemos que os sistemas de massas  $S$  e  $S'$  são equivalentes se possuem o mesmo centro de massa e a mesma massa total.

**Observação 1.** A definição de centro de massa estende-se facilmente para um sistema de massas onde, no lugar de pertencerem ao plano, os pontos pertencem a um espaço euclidiano de dimensão maior.

**Observação 2.** Segue-se diretamente da definição que o centro de massa de um sistema de massas é único.

**Proposição 1.** Seja  $S = \{P_1[m_1], P_2[m_2], \dots, P_k[m_k]\}$  um sistema de massas. O centro de massa  $P$  do sistema  $S$  é o único ponto do plano que satisfaz à equação

$$m_1\overrightarrow{XP_1} + m_2\overrightarrow{XP_2} + \dots + m_k\overrightarrow{XP_k} = \overrightarrow{0}.$$

**Demonstração.**

Um cálculo direto mostra que o CM  $P$  satisfaz à equação do enunciado. Seja  $Q$  um ponto que satisfaz à equação do enunciado. Vamos mostrar que  $P = Q$ . Tem-se que

$$m_1\overrightarrow{QP_1} + m_2\overrightarrow{QP_2} + \dots + m_k\overrightarrow{QP_k} = \overrightarrow{0}$$

e

$$-(m_1 \overrightarrow{QP_1} + m_2 \overrightarrow{QP_2} + \dots + m_k \overrightarrow{QP_k}) = \overrightarrow{0}.$$

Somando estas duas equações, obtém-se

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_k) \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}.$$

Como  $(m_1 + m_2 + \dots + m_k) \neq 0$ , conclui-se que  $P = Q$ .

□

**Proposição 2.** Seja  $(x, y)[m]$  o centro de massa do sistema

$$S_1 = \{(x_1, y_1)[m_1], (x_2, y_2)[m_2], \dots, (x_k, y_k)[m_k]\},$$

e seja  $(a, b)[n]$  o centro de massa do sistema

$$S_2 = \{(a_1, b_1)[n_1], (a_2, b_2)[n_2], \dots, (a_l, b_l)[n_l]\}.$$

Então, se  $m + n \neq 0$ , o centro de massa do sistema  $S = S_1 \cup S_2$  é o centro de massa do sistema  $\{(x, y)[m], (a, b)[n]\}$ .

**Demonstração.**

Por definição, o centro de massa do sistema  $S = S_1 \cup S_2$  é o ponto  $(w, z)[m + n]$ , onde

$$w = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i + \sum_{j=1}^l n_j a_j}{m + n} = \frac{mx + na}{m + n},$$

e

$$z = \frac{\sum_{i=1}^k m_i y_i + \sum_{j=1}^l n_j b_j}{m + n} = \frac{my + nb}{m + n}.$$

Estas são justamente as coordenadas do centro de massa do sistema  $\{(x, y)[m], (a, b)[n]\}$ .

□

A proposição acima nos dá um algoritmo para calcular o centro de massa de um sistema com  $k$  pontos. Para isso, tomamos dois pontos  $(x_1, y_1)[m_1]$  e  $(x_2, y_2)[m_2]$  quaisquer desse sistema e os substituímos pelo seu centro de massa com a massa  $m_1 + m_2$ . Recaímos assim num sistema com  $k - 1$  pontos e continuamos o processo. Assim, o cálculo do centro de massa resume-se apenas ao caso  $k = 2$ , que estudamos a seguir.

**Proposição 3.** (Centro de massa de um sistema com duas massas). Seja  $P[m]$  o centro de massa do sistema  $\{P_1[m_1], P_2[m_2]\}$ . Valem as seguintes propriedades:

- (a) O ponto  $P$  é colinear com os pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

(b) Se  $m_1$  e  $m_2$  têm o mesmo sinal, então  $P$  está entre  $P_1$  e  $P_2$ . Além disso, tem-se

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = \frac{|m_2|}{|m_1|}.$$

(c) Se  $m_1 > 0$  e  $m_2 < 0$ , então  $P_1$  está entre  $P$  e  $P_2$ . Além disso, tem-se

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = \frac{|m_2|}{|m_1|}.$$

### Demonstração.

O centro de massa  $(x_1, y_1)[M]$  de um sistema  $\{(x_1, y_1)[m_1], (x_2, y_2)[m_2]\}$  é colinear com os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , pois

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} &= x_1y_2 + xy_1 + x_2y - xy_2 - x_2y_1 - x_1y \\ &= x_1y_2 + \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\right)y_1 + \left(\frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}\right)x_2 - \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\right)y_2 \\ &\quad - x_2y_1 - \left(\frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}\right)x_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto demonstra o item (a).

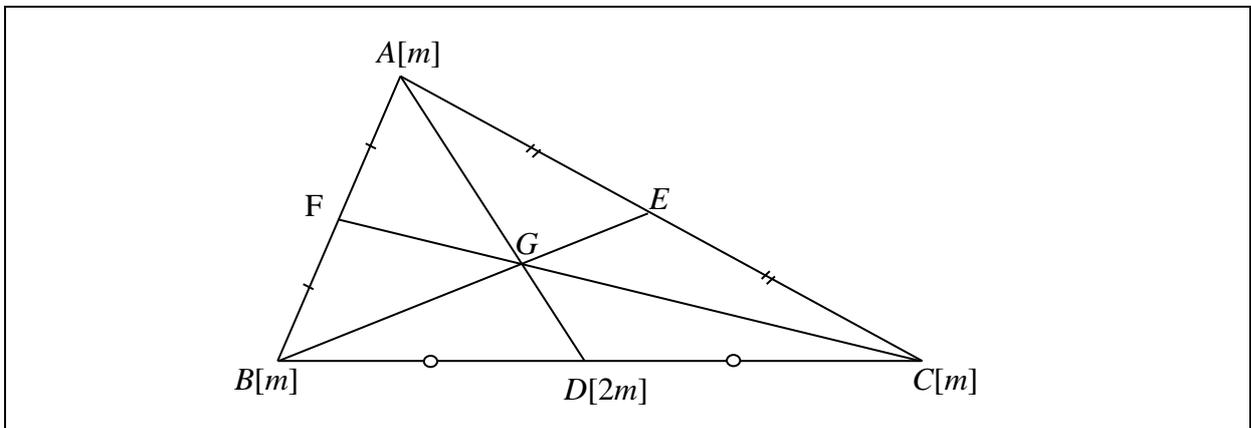
Os itens (b) e (c) seguem da identidade

$$m_1\overrightarrow{PP_1} + m_2\overrightarrow{PP_2} = 0.$$

□

**Exemplo 1.** Vamos tomar um triângulo  $ABC$  qualquer e pôr massas iguais em seus três vértices, ou seja, consideraremos o sistema  $\{A[m], B[m], C[m]\}$ . Chamaremos de  $G$  o centro de massa desse sistema. Como encontrar o ponto  $G$ ? Denotaremos o centro de massa por CM.

Figura 3 – Baricentro como centro de massa



Fonte: Elaboração própria.

Vamos usar a proposição da seção anterior. O CM de  $B[m]$  e  $C[m]$  é o seu ponto médio  $D$ . Podemos então trocar  $B[m]$  e  $C[m]$  por  $D[2m]$ . Logo, o ponto  $G$  será o CM de  $A[m]$  e  $D[2m]$  que está sobre  $\overline{AD}$  e divide  $\overline{AD}$  na razão

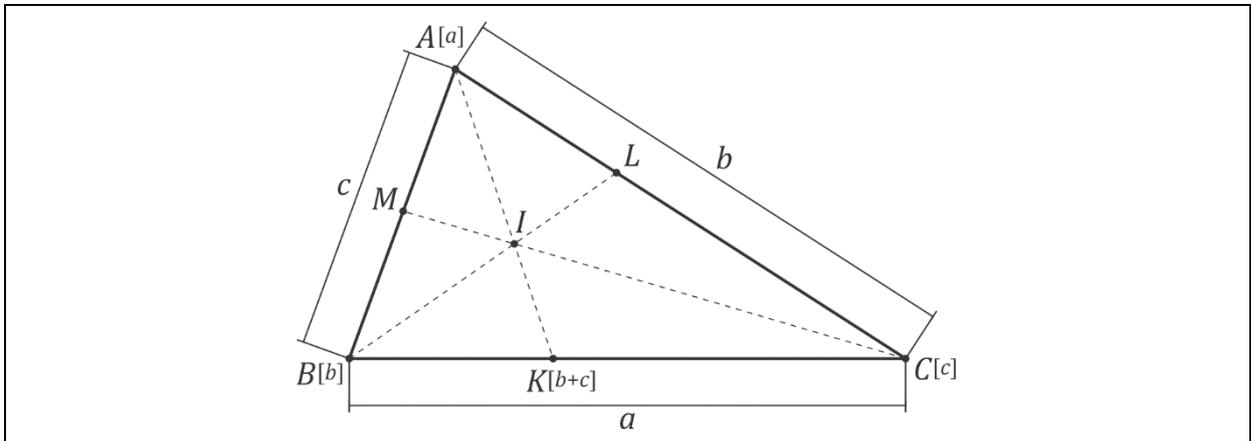
$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{2}{1}.$$

Sejam  $E$  e  $F$  os pontos médios de  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ . De modo análogo poderíamos ter provado que  $G \in \overline{BE}$  e que  $G \in \overline{CF}$ . Esta é uma demonstração diferente que as três medianas concorrem em  $G$ , que é, portanto, o baricentro do triângulo. Além disso, segue do exposto acima que

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GF}} = \frac{2}{1}.$$

**Exemplo 2.** Denote por  $a, b, c$ , os lados do triângulo  $ABC$  da maneira usual. Vamos pôr agora massas nos vértices do triângulo proporcionais aos lados opostos, ou seja, considere o sistema  $\{A[a], B[b], C[c]\}$ . Seja  $I$  o CM desse sistema.

Figura 4 – Incentro como centro de massa



Fonte: Carneiro e Girão (2005).

O raciocínio é igual ao do exemplo anterior. O CM de  $B[b]$  e  $C[c]$  é um ponto  $K$  no lado  $\overline{BC}$  tal que

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} = \frac{c}{b},$$

ou seja,  $K$  é o pé da bissetriz interna. Logo  $I$  será o CM de  $A[a]$  e  $K[b+c]$ . Tiramos daí que  $I \in \overline{AK}$  e que

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IK}} = \frac{b+c}{b}.$$

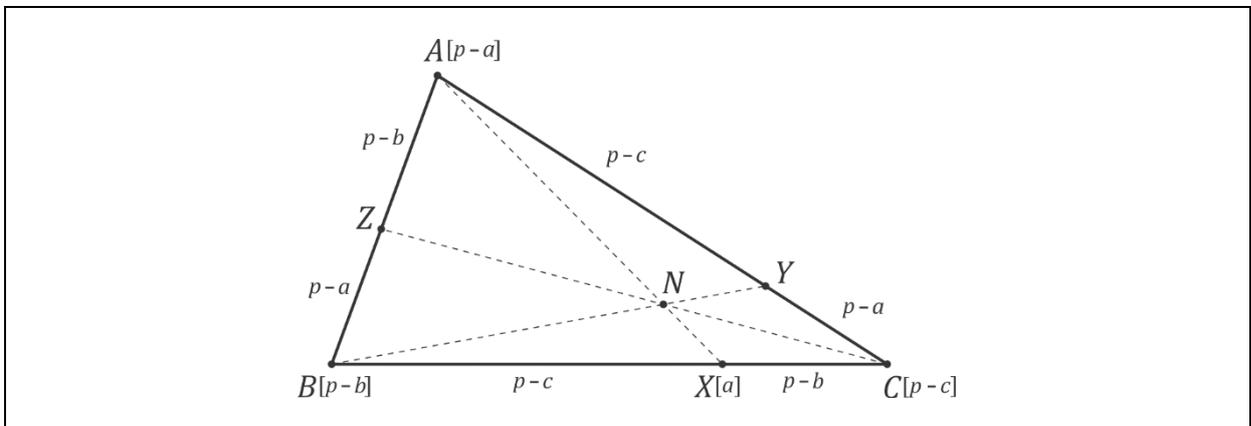
Sejam  $\overline{BL}$  e  $\overline{CM}$  bissetrizes internas. De modo análogo poderíamos ter provado que  $I \in \overline{BL}$  e que  $I \in \overline{CM}$ , o que mostra que  $I$  é o incentro. As razões saem de graça:

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{IL}} = \frac{a + c}{b}, \quad \frac{\overline{CI}}{\overline{IM}} = \frac{a + b}{c}.$$

**Exemplo 3** (Ponto de Nagel).

Seja  $p$  o semiperímetro do triângulo. Agora uma novidade: o sistema de massas será  $\{A[p - a], B[p - b], C[p - c]\}$ . Seja  $N$  o CM desse sistema.

Figura 5 – Ponto de Nagel como centro de massa



Fonte: Carneiro e Girão (2005).

O CM de  $B[p - b]$  e  $C[p - c]$  é um ponto  $X$  sobre o lado  $\overline{BC}$  tal que

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{p - c}{p - b},$$

de onde concluímos que  $\overline{BX} = p - c$  e que  $\overline{CX} = p - b$ . Este ponto  $X$  é onde o exincírculo relativo ao lado  $a$  toca este lado. Logo  $N$  será o CM de  $A[p - a]$  e  $X[p - c + p - b] = X[a]$ .

Portanto  $N \in \overline{AX}$  e

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NX}} = \frac{a}{p - a}.$$

Se considerarmos os pontos  $Y$  e  $Z$  onde os exincírculos relativos aos lados  $b$  e  $c$  tocam estes lados, respectivamente, podemos mostrar que  $N \in \overline{BY}$  e  $N \in \overline{CZ}$ . Conclusão:  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes em  $N$ , que é chamado *Ponto de Nagel* do  $\Delta ABC$ . (note que poderíamos ter mostrado isso usando o teorema de Ceva). Tem-se também

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{NY}} = \frac{b}{p - b}, \quad \frac{\overline{CN}}{\overline{NZ}} = \frac{c}{p - c}.$$

Estabelecem-se, a seguir, algumas propriedades do Ponto de Nagel que também tem sua demonstração no trabalho de Johnson (1960).

**Teorema 1.** Se  $I$  é o incentro,  $G$  o baricentro e  $N$  o ponto de Nagel do  $\Delta ABC$ , então  $I$ ,  $G$  e  $N$  são colineares. Além disso,

$$\frac{\overline{NG}}{\overline{GI}} = \frac{2}{1}.$$

**Demonstração.**

Seja  $p$  o semiperímetro do triângulo. Considere o sistema de massas  $\{A[p], B[p], C[p]\}$ . Já sabemos que o CM desse sistema é o baricentro  $G$ . Fazendo uso da Proposição 2, podemos dividir esse sistema em dois subsistemas:  $S_1 = \{A[a], B[b], C[c]\}$  e  $S_2 = \{A[p - a], B[p - b], C[p - c]\}$ . O CM de  $S_1$  é o incentro  $I$  com massa  $[a + b + c] = [2p]$ , enquanto que o CM de  $S_2$  é o ponto da Nagel  $N$  com massa  $[p - a + p - b + p - c] = [p]$ . Logo,  $G$  será o CM de  $I[2p]$ ,  $N[p]$ , o que implica que  $I$ ,  $N$  e  $G$  colineares (com  $G$  entre  $I$  e  $N$ ). Além disso, pela Proposição 3, item (b),

$$\frac{\overline{NG}}{\overline{GI}} = \frac{2}{1}.$$

□

**Corolário 1.** Em um triângulo qualquer  $ABC$ , sejam  $I$ ,  $G$  e  $N$  como acima,  $O$  o circuncentro e  $H$  o ortocentro. Então os pontos  $I$ ,  $O$ ,  $N$  e  $H$  formam um trapézio.

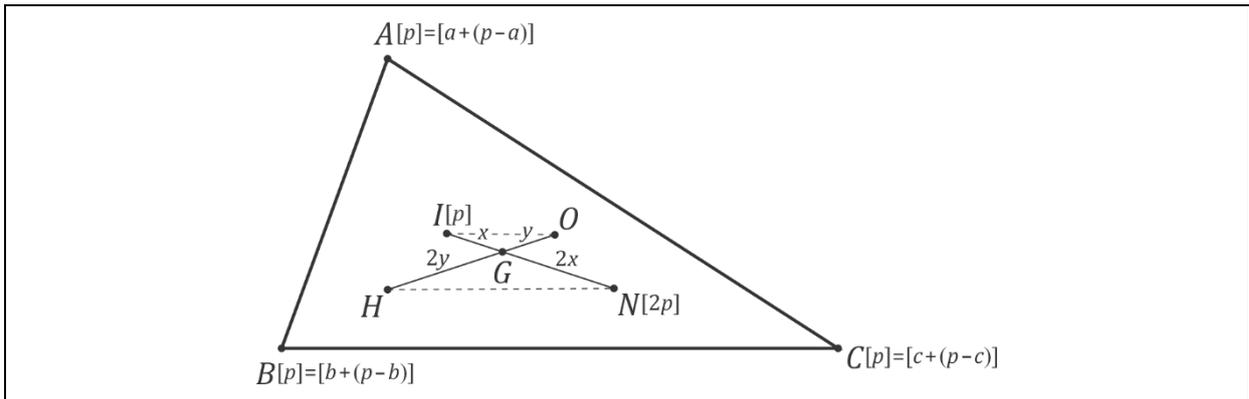
**Demonstração.**

Sabemos que  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares (reta de Euler) e que

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{GO}} = \frac{2}{1}.$$

Segue então do teorema anterior que  $\overline{IO}$  é paralelo a  $\overline{NH}$ , logo  $I$ ,  $O$ ,  $N$  e  $H$  formam um trapézio, cujo encontro das diagonais é  $G$ .

Figura 6 – Pontos colineares (Incentro, Baricentro e Nagel)



Fonte: Carneiro e Girão (2005).

□

Podemos aplicar também o método do centro de massa em problemas que envolvem o ortocentro, o circuncentro e os exincentros. Para saber que massas devem estar nos vértices, veja o Problema 1.

## 2.1 Momento de Inércia

Faremos a seguir a definição do Momento de Inércia, segundo Hernández Rodríguez (2008).

**Definição 3.** O momento de inércia de um sistema de massas

$$S = \{P_1[m_1], P_2[m_2], \dots, P_k[m_k]\}$$

em relação a um ponto  $X$ , denotado por  $I_X$ , é o número

$$I_X = m_1(\overline{XP_1})^2 + m_2(\overline{XP_2})^2 + \dots + m_k(\overline{XP_k})^2.$$

**Teorema 2.** Seja  $P$  o centro de massa do sistema de massas

$$S = \{P_1[m_1], P_2[m_2], \dots, P_k[m_k]\}.$$

Se  $X$  é um ponto qualquer do plano, então vale a identidade

$$I_X = I_P + m(\overline{XP})^2,$$

onde  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$  é a massa associada a  $P$ .

**Observação 3.** A identidade do Teorema 2 será chamada de *identidade do momento de inércia*.

**Demonstração** (do Teorema 2).

Para  $i = 1, 2, \dots, k$  tem-se

$$\overrightarrow{XP_i} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PP_i}.$$

Assim,

$$(\overrightarrow{XP_i})^2 = (\overrightarrow{XP})^2 + (\overrightarrow{PP_i})^2 + 2\langle \overrightarrow{XP}, \overrightarrow{PP_i} \rangle,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar. Multiplicando esta última equação por  $m_i$  e somando em  $i$  (de 1 até  $k$ ) obtém-se

$$\begin{aligned} I_X &= I_P + m(\overrightarrow{XP})^2 + 2\langle \overrightarrow{XP}, m_1\overrightarrow{PP_1} + \dots + m_k\overrightarrow{PP_k} \rangle \\ &= I_P + m(\overrightarrow{XP})^2, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

□

### 3 PROBLEMAS RELACIONADOS

#### Problema 1.

(a) Verifique que o sistema de massas

$$\left\{ A \left[ \frac{a}{\cos \hat{A}} \right], B \left[ \frac{b}{\cos \hat{B}} \right], C \left[ \frac{c}{\cos \hat{C}} \right] \right\}$$

tem como CM o ortocentro de triângulo.

(b) Verifique que o sistema de massas

$$\{ A[\text{sen } 2A], B[\text{sen } 2B], C[\text{sen } 2C] \}$$

tem como CM o circuncentro de triângulo.

(c) Verifique que o sistema de massas

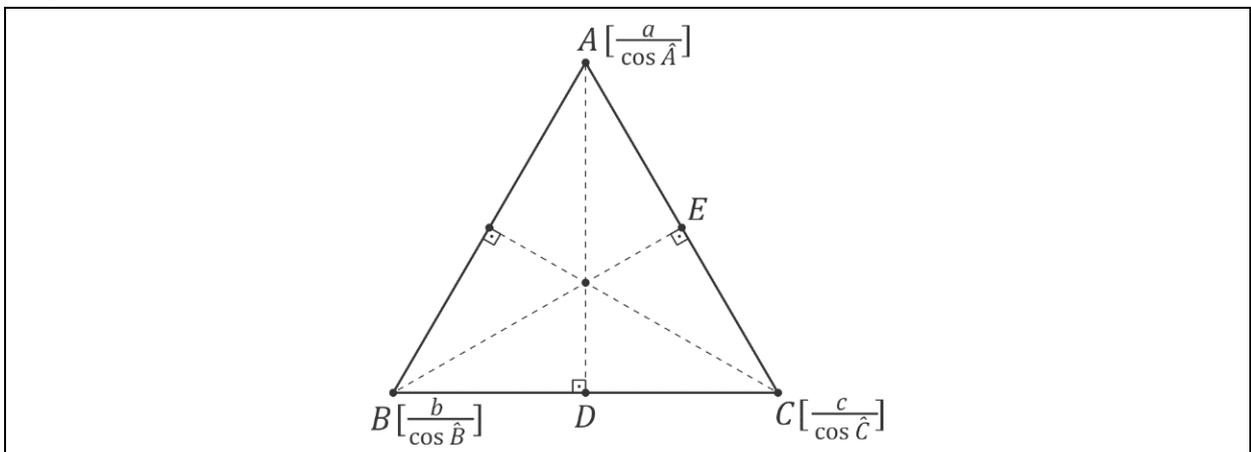
$$\{ A[-a], B[b], C[c] \}$$

tem como CM o exincentro relativo ao lado  $a$ .

#### Resolução do problema 1.

(a) Considere o  $\Delta ABC$  abaixo:

Figura 7 – Problema 1 (a)



Fonte: Elaboração própria.

Seja  $P$  o CM do sistema

$$\left\{ A \left[ \frac{a}{\cos \hat{A}} \right], B \left[ \frac{b}{\cos \hat{B}} \right], C \left[ \frac{c}{\cos \hat{C}} \right] \right\}.$$

Sejam  $D$  e  $E$ , respectivamente, os pés das alturas relativas aos vértices  $A$  e  $B$ . Tem-se

$$\overline{BD} = c \cdot \cos \hat{B} \text{ e } \overline{CD} = b \cdot \cos \hat{C}.$$

Assim,  $\overline{BD} \cdot \left( \frac{b}{\cos \hat{B}} \right) = \overline{CD} \cdot \left( \frac{c}{\cos \hat{C}} \right)$ , de onde se conclui que  $D$  é o CM do sistema

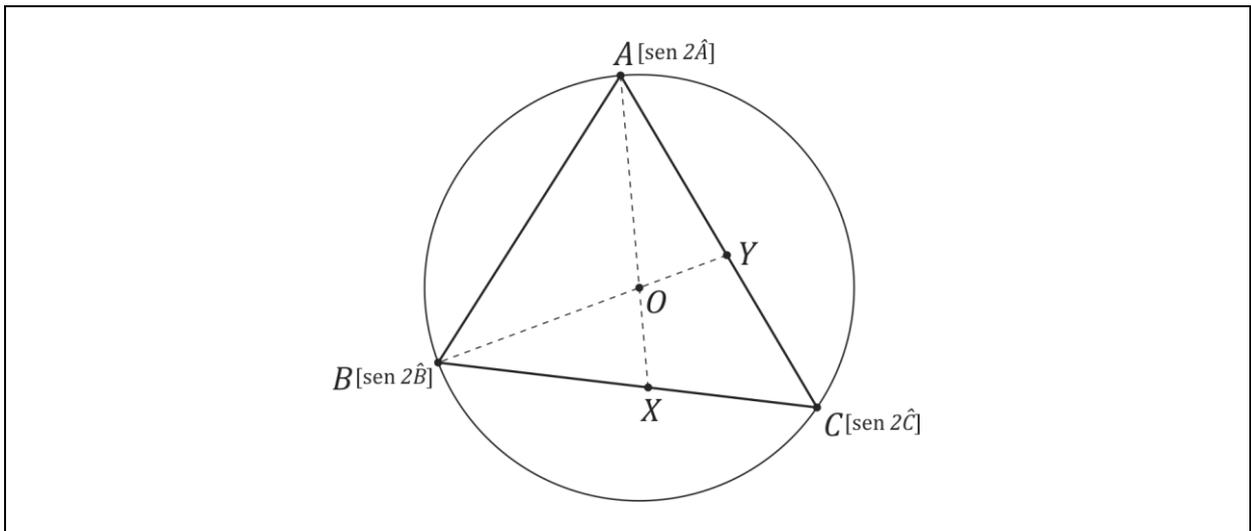
$$\left\{ B \left[ \frac{b}{\cos \hat{B}} \right], C \left[ \frac{c}{\cos \hat{C}} \right] \right\}.$$

Portanto,  $P \in \overrightarrow{AD}$ . Analogamente,  $P \in \overrightarrow{BE}$ .

Logo,  $P$  é o ortocentro do  $\Delta ABC$ .

(b) Considere o  $\Delta ABC$  abaixo, cujo circuncentro é  $O$  e cujo raio da circunferência circunscrita é  $R$ .

Figura 8 – Problema 1 (b)



Fonte: Elaboração própria.

Seja  $P$  o CM do sistema

$$\{A[\text{sen } 2\hat{A}], B[\text{sen } 2\hat{B}], C[\text{sen } 2\hat{C}]\}.$$

Tem-se que  $\angle AOC = 2\hat{B}$ . Como  $\Delta AOC$  é isósceles, encontra-se  $\angle OAC = 90^\circ - \hat{B}$ .

Analogamente, tem-se que:  $\angle OAB = 90^\circ - \hat{C}$ .

Seja  $X = \overrightarrow{AO} \cap \overrightarrow{BC}$ , tem-se

$$2 \cdot \text{área}(\Delta XAB) = \overline{AX} \cdot b \cdot \text{sen}(90^\circ - \hat{B}) = \overline{AX} \cdot b \cdot \text{sen } \hat{B}$$

e

$$2 \cdot \text{área}(\Delta XAC) = \overline{AX} \cdot c \cdot \text{sen}(90^\circ - \hat{C}) = \overline{AX} \cdot c \cdot \text{sen } \hat{C}.$$

Utilizando a Lei dos Senos, tem-se

$$b = 2R \cdot \text{sen } \hat{B} \text{ e } c = 2R \cdot \text{sen } \hat{C}.$$

Assim,

$$2 \cdot \text{área}(\Delta XAB) = \overline{AX} \cdot 2R \cdot \text{sen } \hat{B} \cdot \cos \hat{B} = \overline{AX} \cdot R \cdot \text{sen}(2\hat{B})$$

e

$$2 \cdot \text{área}(\Delta XAC) = \overline{AX} \cdot 2R \cdot \text{sen } \hat{C} \cdot \cos \hat{C} = \overline{AX} \cdot R \cdot \text{sen}(2\hat{C}).$$

Então, tem-se que

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\text{área}(\Delta XAB)}{\text{área}(\Delta XAC)} = \frac{\text{sen}(2\hat{B})}{\text{sen}(2\hat{C})},$$

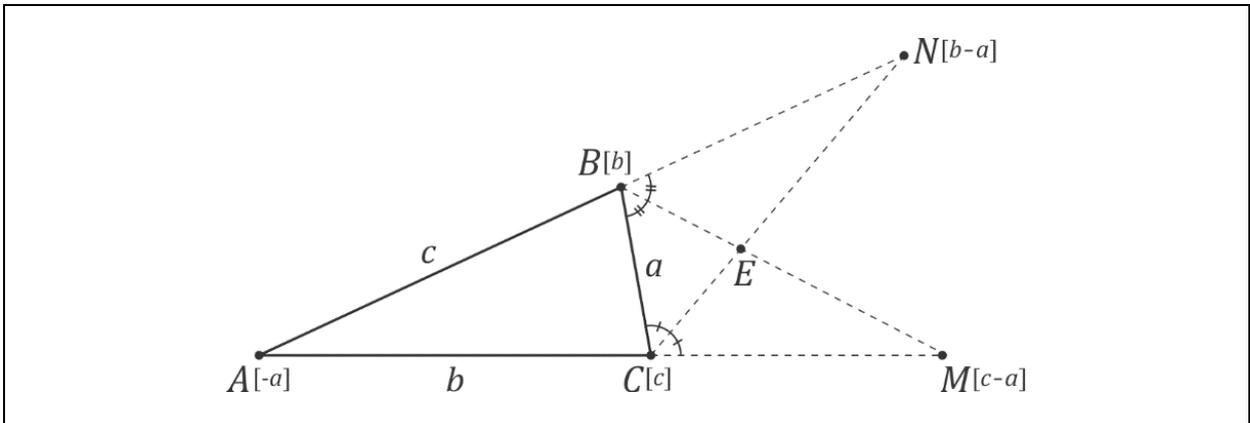
de onde obtém-se que  $X$  é o CM do sistema  $\{B[\text{sen } 2\hat{B}], C[\text{sen } 2\hat{C}]\}$ . Portanto,  $P \in \overrightarrow{AX}$ .

De modo análogo, se  $Y = \overrightarrow{BO} \cap \overrightarrow{CA}$ , encontra-se que  $P \in \overrightarrow{BY}$ .

Logo,  $P = O$ .

(c) Considere o  $\Delta ABC$  abaixo, onde  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  são bissetrizes externas relativas ao vértice  $A$ .

Figura 9 – Problema 1 (c)



Fonte: Elaboração própria.

Seja  $P$  o CM do sistema

$$\{A[-a], B[b], C[c]\}$$

(note que, pela desigualdade triangular,  $-a + b + c > 0$ ).

Pelo Teorema da Bissetriz Externa, tem-se

$$a \cdot \overline{AM} = c \cdot \overline{CM}.$$

Como  $-a < 0$ ,  $b > 0$  e  $C$  está entre  $A$  e  $M$ , conclui-se  $M$  é o CM do sistema

$$\{A[-a], C[c]\}.$$

Portanto,  $P \in \overrightarrow{BM}$ . De maneira análoga conclui-se que  $P \in \overrightarrow{CN}$ .

Logo,  $P$  é o exincentro relativo ao vértice  $A$ .

### Problema 2.

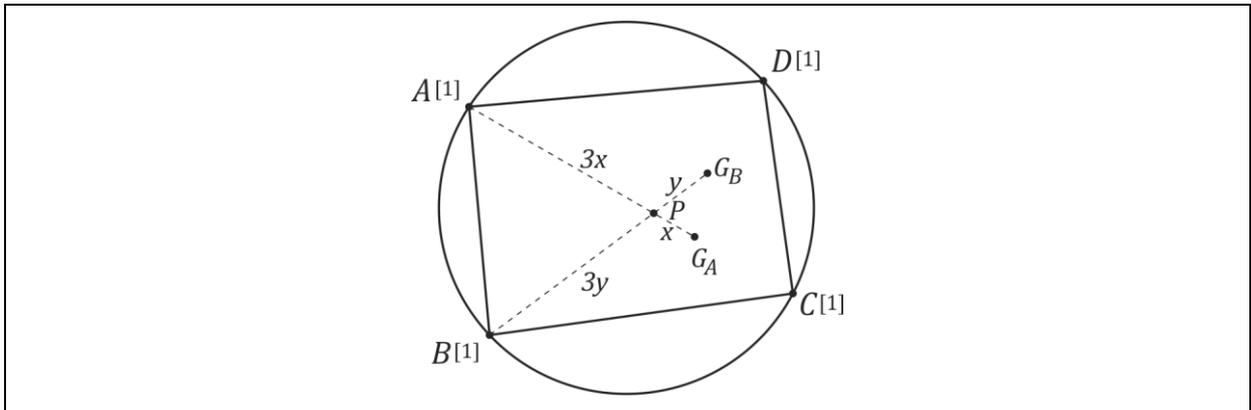
Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  pontos concíclicos. Sejam  $G_A$ ,  $G_B$ ,  $G_C$  e  $G_D$ , respectivamente, os baricentros dos triângulos  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  e  $ABC$ . Prove que  $G_A$ ,  $G_B$ ,  $G_C$  e  $G_D$  são concíclicos.

### Resolução do problema 2.

Seja  $P$  o CM do sistema de massas

$$S = \{A[1], B[1], C[1], D[1]\}.$$

Figura 10 – Problema 2



Fonte: Elaboração própria.

O ponto  $P$  também é o CM do sistema

$$S_A = \{A[1], G_A[3]\},$$

e portanto,

$$\overline{PA} = 3 \cdot \overline{PG_A}.$$

De forma análoga, tem-se que

$$\overline{PB} = 3 \cdot \overline{PG_B}, \overline{PC} = 3 \cdot \overline{PG_C} \text{ e } \overline{PD} = 3 \cdot \overline{PG_D}.$$

Tem-se, então, que o quadrilátero  $G_A G_B G_C G_D$  é a imagem do quadrilátero  $ABCD$  por uma homotetia de centro  $P$  e razão  $-\frac{1}{3}$ . Assim, como  $A, B, C$  e  $D$  são concíclicos, tem-se que  $G_A, G_B, G_C$  e  $G_D$  são concíclicos.

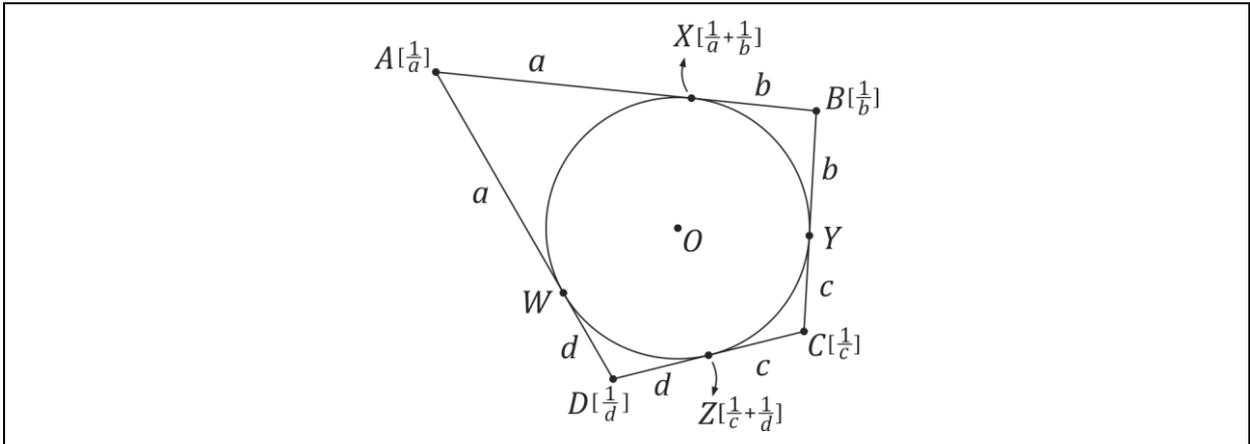
### Problema 3.

Seja  $ABCD$  um quadrilátero no espaço de forma que  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  sejam tangentes a uma esfera  $\gamma$  nos pontos  $X, Y, Z$  e  $W$ . Prove que estes pontos são coplanares.

### Resolução do problema 3.

Denote por  $a$  o comprimento dos segmentos  $\overline{AX}$  e  $\overline{AW}$ , por  $b$  o comprimento dos segmentos  $\overline{BX}$  e  $\overline{BY}$ , por  $c$  o comprimento dos segmentos  $\overline{CY}$  e  $\overline{CZ}$ , e por  $d$  o comprimento dos segmentos  $\overline{DZ}$  e  $\overline{DW}$ .

Figura 11 – Problema 3



Fonte: Elaboração própria.

Seja  $P$  o CM do sistema

$$\left\{ A \left[ \frac{1}{a} \right], B \left[ \frac{1}{b} \right], C \left[ \frac{1}{c} \right], D \left[ \frac{1}{d} \right] \right\}.$$

Como

$$\frac{1}{a} \cdot \overline{AX} = \frac{1}{b} \cdot \overline{BX}$$

e

$$\frac{1}{c} \cdot \overline{CZ} = \frac{1}{d} \cdot \overline{DZ},$$

tem-se que  $P$  também é o CM do sistema

$$\left\{ X \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right], Z \left[ \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right] \right\},$$

e portanto,  $P \in \overline{XZ}$ . Analogamente,  $P \in \overline{YW}$ .

Seja  $\pi$  o plano que contém os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Como  $P \in \overline{XZ}$ , tem-se que  $P \in \pi$ . Como  $W \in \overline{PY}$ , tem-se que  $W \in \pi$ .

Logo, os pontos  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  e  $W$  são coplanares.

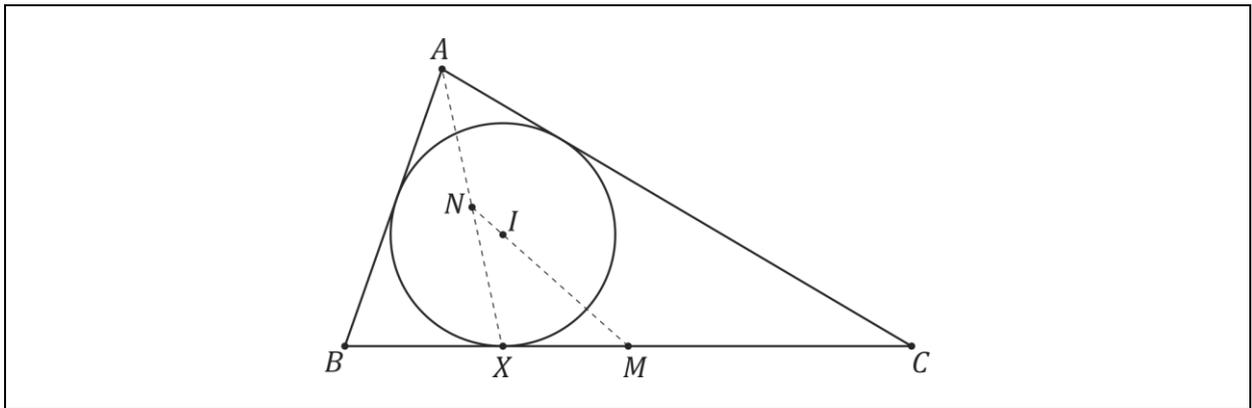
#### Problema 4.

Seja  $X$  o ponto onde o incírculo do triângulo  $ABC$  toca o lado  $\overline{BC}$ . Mostre que o incentro do  $\Delta ABC$  está sobre a reta que passa pelos pontos médios de  $\overline{BC}$  e  $\overline{AX}$ .

#### Resolução do problema 4.

Considere o  $\Delta ABC$  abaixo:

Figura 12 – Problema 4



Fonte: Elaboração própria.

Denote por  $p$  o semiperímetro do  $\triangle ABC$  e denote os pontos médios de  $\overline{BC}$  e  $\overline{AX}$ , respectivamente, por  $M$  e  $N$ .

Considere o sistema de massas

$$S = \{A[a], B[b], C[c]\}.$$

Sabe-se (Exemplo 2) que o CM de  $S$  é o incentro  $I$ . O sistema  $S$  por ser escrito como  $S = S_1 \cup S_2$ , onde

$$S_1 = \{A[a], B[p - c], C[p - b]\}$$

e

$$S_2 = \{B[b + c - p], C[b + c - p]\}.$$

Como

$$\overline{BX} \cdot (p - c) = \overline{CX} \cdot (p - b)$$

e

$$(p - c) + (p - b) = a,$$

tem-se que o sistema  $S_1$  é equivalente ao sistema

$$S_3 = \{A[a], X[a]\},$$

o qual, por sua vez, é equivalente ao sistema

$$S_4 = \{N[2a]\}.$$

Tem-se também que o sistema  $S_2$  é equivalente ao sistema

$$S_5 = \{M[b + c - a]\}.$$

Portanto, o sistema  $S$  pode ser escrito como

$$S = S_4 \cup S_5 = \{N[2a], M[b + c - a]\}.$$

Logo, o CM de  $S$ , que é o incentro  $I$ , pertence à reta  $\overline{NM}$ . Além disso, tem-se que

$$\frac{\overline{IN}}{\overline{IM}} = \frac{b + c - a}{2a}.$$

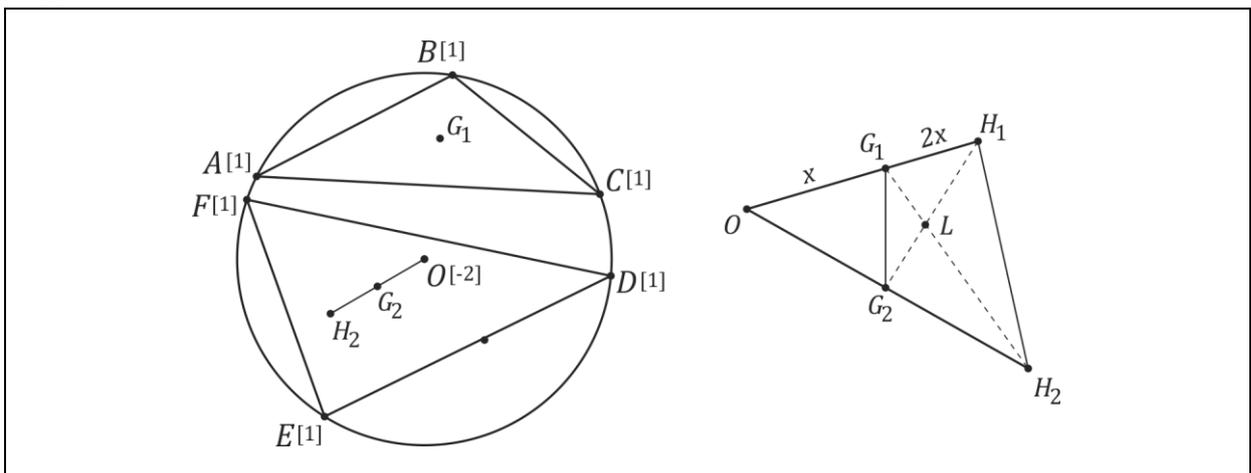
**Problema 5.**

Considere 6 pontos em uma dada circunferência. Tomamos três destes pontos e marcamos seu baricentro  $G_1$ . Em seguida, marcamos o ortocentro  $H_2$  dos outros três pontos e traçamos o segmento  $\overline{G_1H_2}$ . Mostre que todos os  $\binom{6}{3} = 20$  possíveis segmentos  $\overline{G_1H_2}$  passam por um ponto fixo.

**Resolução do problema 5.**

Sejam  $A, B$  e  $C$  três dos seis pontos, sendo  $G_1$  o baricentro do  $\Delta ABC$ . Sejam  $D, E$  e  $F$  os três pontos restantes e denote por  $G_2$  e  $H_2$ , respectivamente, o baricentro e o ortocentro do  $\Delta DEF$ . Denote por  $O$  o centro do círculo que contém os pontos  $A, B, C, D, E$  e  $F$ .

Figura 13 – Problema 5



Fonte: Elaboração própria.

Considere o sistema de massas

$$S = \{A[1], B[1], C[1], D[1], E[1], F[1], O[-2]\}$$

e denote por  $L$  o CM desse sistema.

Tem-se que o sistema

$$\{A[1], B[1], C[1]\}$$

é equivalente ao sistema

$$\{G_1[3]\},$$

e que o sistema

$$\{D[1], E[1], F[1], O[-2]\}$$

é equivalente ao sistema

$$\{G_2[3], O[-2]\}.$$

Sabe-se (reta de Euler) que  $O$ ,  $G_2$  e  $H_2$  são colineares, com  $G_2$  entre  $O$  e  $H_2$  e

$$\overline{G_2H_2} = 2 \cdot \overline{OG_2}.$$

Assim, o sistema

$$\{D[1], E[1], F[1], O[-2]\}$$

é equivalente ao sistema

$$\{H_2[1]\}.$$

Portanto, o sistema  $S$  é equivalente ao sistema

$$\{G_1[3], H_2[1]\}.$$

Em particular, o CM  $L$  do sistema  $S$  pertence à reta  $\overrightarrow{G_1H_2}$ .

Note que o CM  $L$  do sistema de massas  $S$  não depende de como se divide os seis pontos em dois triângulos. Conclui-se então que todos os possíveis segmentos  $\overline{G_1H_2}$  passam pelo ponto  $L$ .

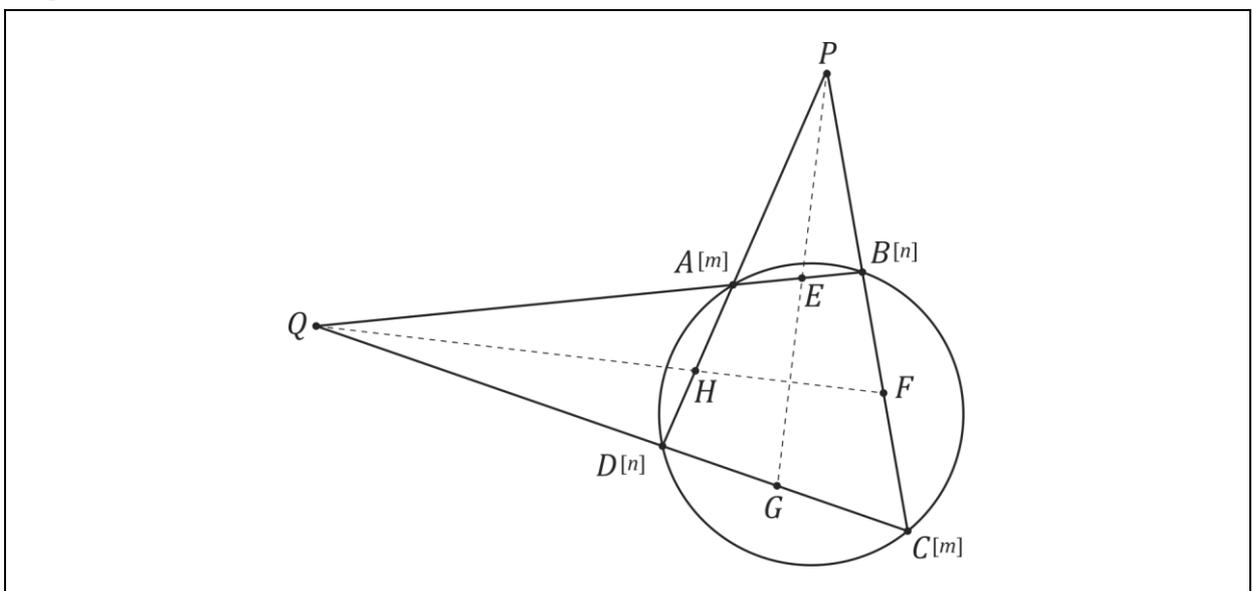
### Problema 6.

Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo inscritível, com os lados opostos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  se encontrando em  $P$ , e  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  em  $Q$ . Prove que o quadrilátero  $EFGH$ , determinado em  $ABCD$  pelas bissetrizes de  $\angle DPC$  e  $\angle CQB$ , é um losango.

### Resolução do problema 6.

Considere a figura abaixo:

Figura 14 – Problema 6



Fonte: Elaboração própria.

Sejam  $\overline{PD} = m$  e  $\overline{PC} = n$ . Considere o sistema de massas

$$S = \{A[m], B[n], C[m], D[n]\}.$$

Denote por  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ , respectivamente, os ângulos  $\angle DAB$ ,  $\angle ABC$ ,  $\angle BCD$  e  $\angle CDA$ . Como  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ , tem-se que  $\angle PAB = \hat{C}$ . Analogamente,  $\angle PBA = \hat{D}$ .

Pela Lei dos Senos tem-se que

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\text{sen } \hat{D}}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{n}{m}.$$

Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, obtém-se que o CM do sistema  $S$  coincide com o CM do sistema

$$\{E[m+n], G[m+n]\}.$$

Portanto, o CM do sistema  $S$  é o ponto médio do segmento  $\overline{EG}$ .

Tem-se  $\angle QAD = 180^\circ - \hat{A} = \hat{C}$  e  $\angle QDA = 180^\circ - \hat{D}$ .

Pela Lei dos Senos tem-se que

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen}(180^\circ - \hat{D})} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{D}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \frac{m}{n}.$$

Pela mesma regra, tem-se que

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen}(180^\circ - \hat{B})} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{D}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \frac{m}{n}.$$

Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, tem-se que o CM do sistema  $S$  coincide com o CM do sistema

$$\{F[m+n], H[m+n]\}.$$

Portanto, o CM do sistema  $S$  é o ponto médio do segmento  $\overline{FH}$ .

Pela unicidade do CM, tem-se que os segmentos  $\overline{EG}$  e  $\overline{FH}$  se intersectam em seus pontos médios e, portanto,  $EFGH$  é um paralelogramo. Para mostrar que  $EFGH$  é um losango, basta mostrar que  $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ .

Tem-se

$$\angle DPG = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \hat{D} - \hat{C}).$$

Como a soma dos ângulos do  $\triangle DPG$  é  $180^\circ$ , tem-se que

$$\angle PGQ = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \hat{D} + \hat{C}).$$

Seja  $R = \overline{EG} \cap \overline{FH}$ . Como a soma dos ângulos do  $\triangle QRG$  é  $180^\circ$ , tem-se que

$$\angle QRG = \frac{1}{2} \cdot (\hat{B} + \hat{D}) = 90^\circ.$$

Logo,  $EFGH$  é um losango.

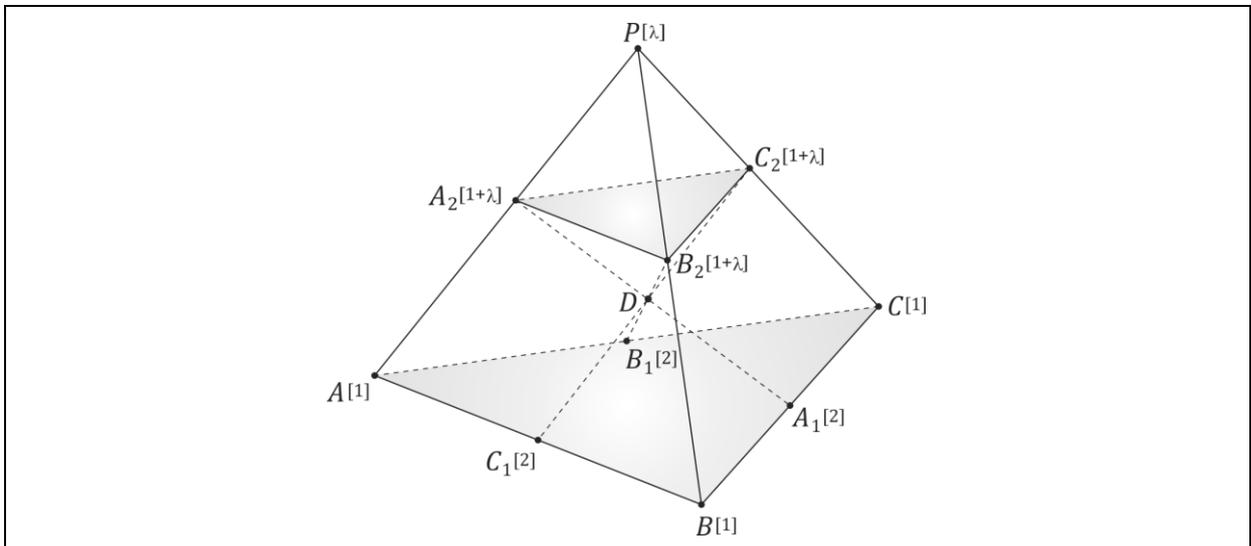
**Problema 7.**

Seja  $PABC$  um tetraedro e sejam  $A_1, B_1$  e  $C_1$  os pontos médios das arestas  $\overline{BC}, \overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Seja  $\alpha$  um plano paralelo à face  $ABC$  que intercepta as arestas  $\overline{PA}, \overline{PB}$  e  $\overline{PC}$  nos pontos  $A_2, B_2$  e  $C_2$ , respectivamente.

- (a) Prove que  $\overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}$  e  $\overline{C_1C_2}$  concorrem em um ponto  $D$ .  
 (b) Determine o lugar geométrico dos pontos  $D$  quando  $\alpha$  varia.

**Resolução do problema 7.**

Figura 15 – Problema 7



Fonte: Elaboração própria.

(a) Seja

$$\lambda = \frac{\overline{A_2A}}{\overline{A_2P}}.$$

Como o plano  $\alpha$  é paralelo à face  $ABC$ , tem-se:

$$\lambda = \frac{\overline{B_2B}}{\overline{B_2P}} = \frac{\overline{C_2C}}{\overline{C_2P}}.$$

Seja  $D$  o CM do sistema

$$S = \{A[1], B[1], C[1], P[\lambda].\}$$

Como

$$1 \cdot \overline{A_1B} = 1 \cdot \overline{A_1C}$$

e

$$1 \cdot \overline{A_2A} = \lambda \cdot \overline{A_2P},$$

tem-se que o ponto  $D$  também é o CM do sistema

$$\{A_1[2], A_2[1 + \lambda]\}.$$

De modo análogo,  $D$  é o CM dos sistemas

$$\{B_1[2], B_2[1 + \lambda]\} \text{ e } \{C_1[2], C_2[1 + \lambda]\}.$$

Portanto, os segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{B_1B_2}$  e  $\overline{C_1C_2}$  concorrem em  $D$ .

(b) Seja  $G$  o baricentro do triângulo  $ABC$ . Note que  $D$  é o CM do sistema

$$\{G[3], P[\lambda]\},$$

e portanto,  $D$  pertence ao segmento  $\overline{GP}$  e satisfaz

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{DP}} = \frac{\lambda}{3}.$$

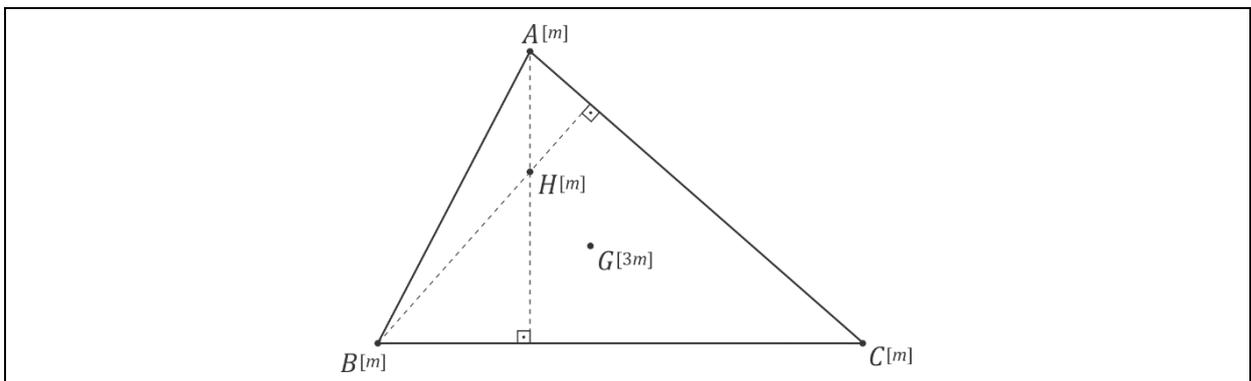
Ao ser variado o plano  $\alpha$ , varia-se também o parâmetro  $\lambda$ , o qual pode assumir qualquer valor do intervalo  $(0, \infty)$ . Portanto, o lugar geométrico dos pontos  $D$  quando  $\alpha$  varia é o interior do segmento  $\overline{GP}$ .

### Problema 8.

- (a) Considere 4 pontos que formam um sistema ortocêntrico (cada um é o ortocentro do triângulo formado pelos outros três). Ponha massas iguais nesses 4 pontos. Prove que o centro de massa é o centro do círculo dos nove pontos de cada um desses 4 triângulos.
- (b) (Beltrami) Prove que o CM do sistema formado pelo incentro e pelos três exincentros com massas iguais é o circuncentro.

### Resolução do problema 8.

Figura 16 – Problema 8



Fonte: Elaboração própria.

(a) Denota-se por  $G$  e  $O$ , respectivamente, o baricentro e o circuncentro do triângulo  $ABC$ .

Seja  $P$  o CM do sistema

$$S = \{A[m], B[m], C[m], H[m]\}.$$

Tem-se que  $P$  também é o CM do sistema

$$\{G[3m], H[m]\}.$$

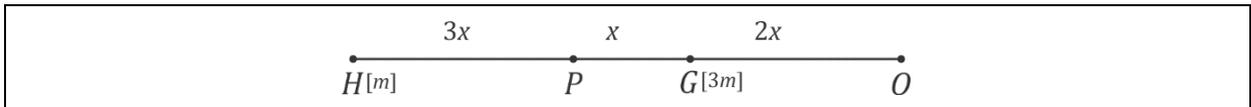
Assim,  $P$  é o ponto do segmento  $\overline{GH}$  tal que

$$\overline{PH} = 3 \cdot \overline{PG}. \quad (1)$$

Sabe-se que  $G$  pertence ao segmento  $\overline{HO}$ , com

$$\overline{GH} = 2 \cdot \overline{GO}. \quad (2)$$

Figura 17 – Problema 8 (a)

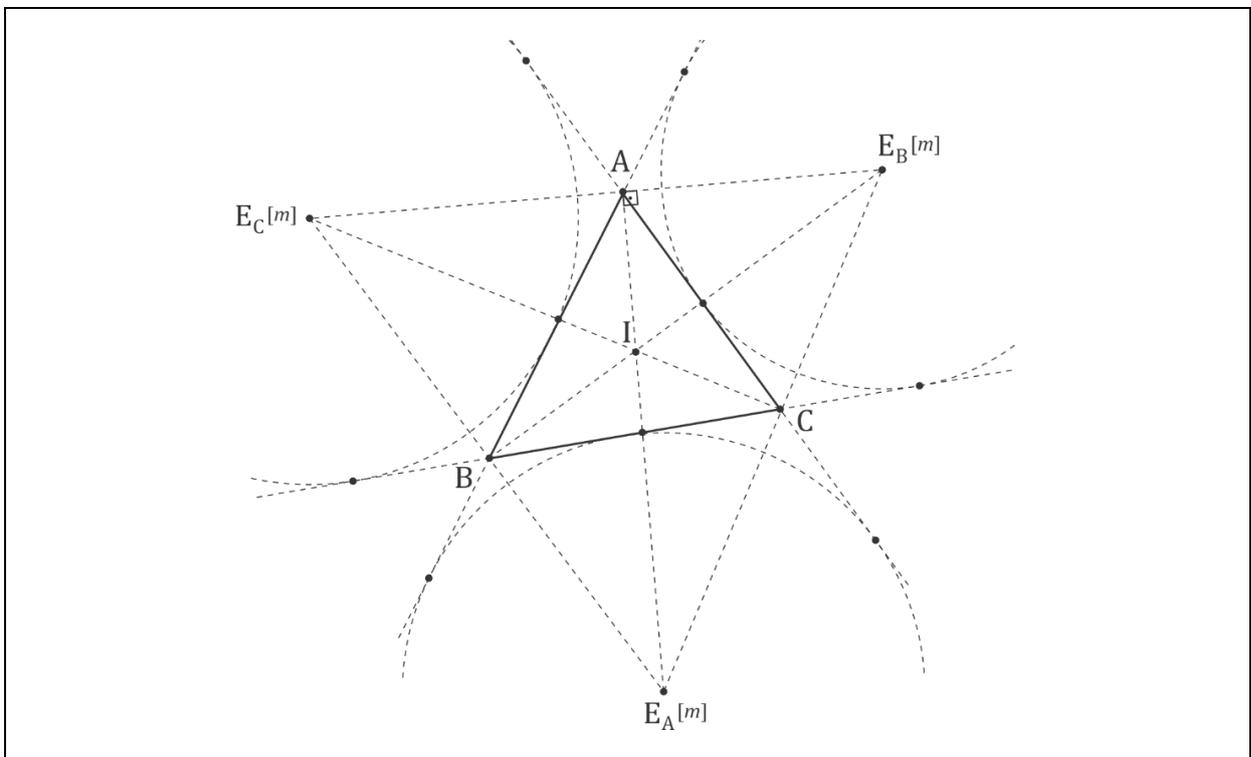


Fonte: Elaboração própria.

De (1) e (2), conclui-se que  $P$  é o ponto médio de  $\overline{HO}$ , ou seja,  $P$  é o centro do círculo dos nove pontos do triângulo  $ABC$ .

(b)

Figura 18 – Problema 8 (b)



Fonte: Elaboração própria.

Denote por  $I$  o incentro do  $\Delta ABC$  e denote por  $E_A$ ,  $E_B$  e  $E_C$ , respectivamente, os excentros do  $\Delta ABC$  relativos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Tem-se

$$\angle E_A A C = \frac{\hat{A}}{2} \text{ e } \angle C A E_B = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}.$$

Assim,  $\angle E_A A E_B = 90^\circ$ .

De forma análoga, conclui-se que  $\angle E_A A E_C = 90^\circ$ . Portanto,  $A$  é o pé da altura, relativa ao vértice  $E_A$ , do  $\Delta E_A E_B E_C$ . De modo semelhante, conclui-se que  $B$  e  $C$  são, respectivamente, os pés das alturas relativas aos vértices  $E_B$  e  $E_C$  do  $\Delta E_A E_B E_C$ . Como  $\overline{E_A A}$ ,  $\overline{E_B B}$  e  $\overline{E_C C}$  se encontram em  $I$ , temos que  $I$  é o ortocentro do  $\Delta E_A E_B E_C$ .

Como o círculo dos nove pontos de um triângulo passa pelos pés das alturas desse triângulo, tem-se que o círculo dos nove pontos do  $\Delta E_A E_B E_C$  passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Portanto, o círculo dos nove pontos do  $\Delta E_A E_B E_C$  coincide com o circuncírculo do  $\Delta ABC$ .

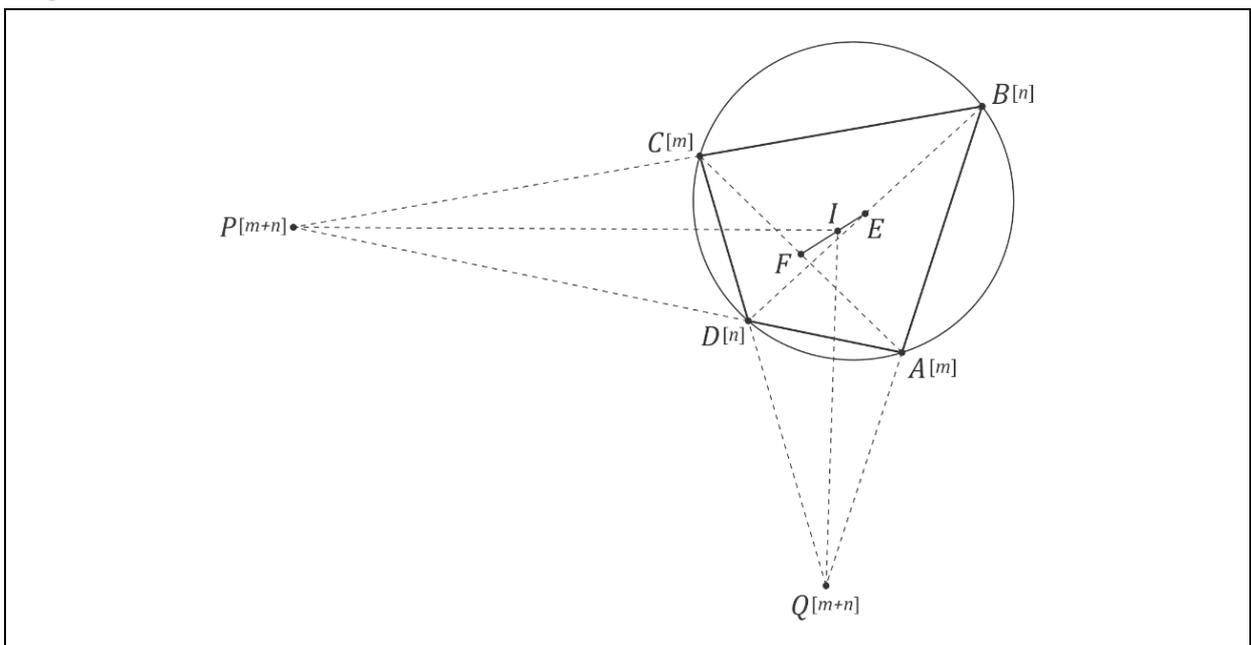
Pelo item (a), o CM do sistema  $\{E_A[m], E_B[m], E_C[m], I[m]\}$  é o ponto  $O$ , o circuncentro de  $\Delta ABC$ .

### Problema 9.

Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo inscritível com os lados opostos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  se encontrando em  $P$ , e  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  em  $Q$ . Prove que as bissetrizes dos ângulos  $\angle DPC$  e  $\angle CQB$  e a reta que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero  $ABCD$  (diagonal de Euler) concorrem.

### Resolução do problema 9.

Figura 19 – Problema 9



Fonte: Elaboração própria.

Sejam  $\overline{PD} = m$  e  $\overline{PC} = n$ . Considere o sistema de massas

$$S = \{A[m], B[n], C[m], D[n]\}.$$

Pela solução do Problema 6, tem-se que o CM de  $S$  é o ponto de interseção  $R$  das bissetrizes dos ângulos  $\angle DPC$  e  $\angle CQB$ .

Denote por  $K$  e  $L$ , respectivamente, os pontos médios das diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ . O sistema  $S$  é equivalente ao sistema

$$S_1 = \{K[2m], L[2n]\}.$$

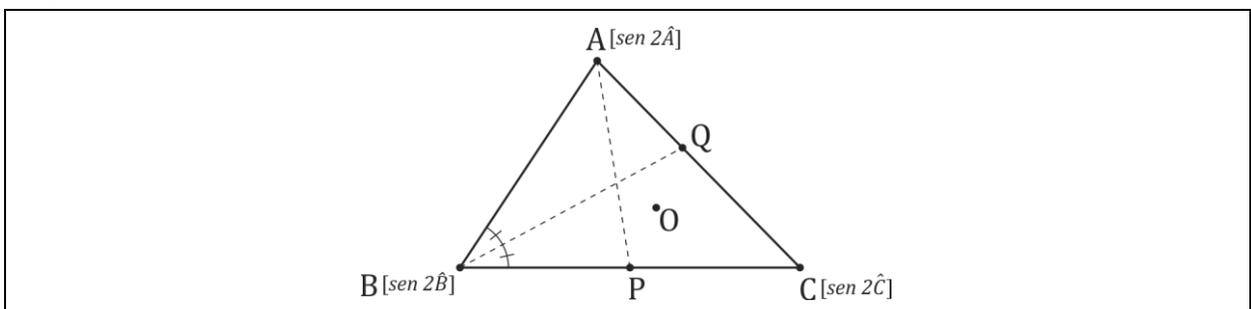
Portanto, como  $R$  é o CM de  $S_1$ , tem-se que  $R \in \overline{KL}$ .

### Problema 10.

(Banco IMO/97) No  $\triangle ABC$  acutângulo, sejam  $AD, BE$  alturas e  $AP, BQ$  bissetrizes internas. Sejam  $I$  e  $O$  o incentro e o circuncentro do triângulo  $ABC$ , respectivamente. Prove que os pontos  $D, E$  e  $I$  são colineares se e somente se  $P, Q$  e  $O$  são colineares.

### Resolução do problema 10.

Figura 20 – Problema 10



Fonte: Elaboração própria.

Mostra-se primeiramente que  $P, Q$  e  $O$  são colineares se, e somente se,

$$\cos(\hat{C}) = \cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}).$$

Considere o sistema de massas

$$S = \{A[\text{sen}(2\hat{A})], B[\text{sen}(2\hat{B})], C[\text{sen}(2\hat{C})]\}.$$

Pelo Problema 1, o CM de  $S$  é o circuncentro  $O$ . Tem-se

$$\text{sen}(2\hat{C}) = n_0 + n_1 + n_2,$$

onde

$$n_1 = 2 \cdot \text{sen}(\hat{C}) \cdot \cos(\hat{A}),$$

$$n_2 = 2 \cdot \text{sen}(\hat{C}) \cdot \cos(\hat{B})$$

e

$$n_0 = \text{sen } 2(\hat{C}) - n_1 - n_2 = 2 \cdot \text{sen}(\hat{C}) \cdot (\cos(\hat{C}) - \cos(\hat{A}) - \cos(\hat{B})).$$

Invocando a Lei dos Senos, tem-se

$$\frac{n_1}{\text{sen}(2\hat{A})} = \frac{n_1}{2 \text{sen}(\hat{A}) \cos(\hat{A})} = \frac{\text{sen}(\hat{C})}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{c}{a}.$$

Como, pelo Teorema da Bissetriz interna,

$$a \cdot \overline{QA} = b \cdot \overline{QB},$$

tem-se que  $Q$  é o CM do sistema

$$\{A[\text{sen}(2\hat{A})], C[n_1]\}.$$

De forma análoga, conclui-se que o CM do sistema

$$\{B[\text{sen}(2\hat{B})], C[n_2]\}$$

é o ponto  $P$ .

Seja  $X$  o CM do sistema

$$\{Q[\text{sen}(2\hat{A}) + n_1], P[\text{sen}(2\hat{B}) + n_2]\}.$$

O CM de  $S$  pertence à reta  $\overline{XC}$ .

Suponha que  $P$ ,  $Q$  e  $O$  são colineares. Tem-se então que  $X \in \overline{PQ}$ ,  $O \in \overline{XC}$  e  $O \in \overline{PQ}$ . Como  $P$ ,  $Q$  e  $C$  não são colineares, estas três coisas só podem ocorrer simultaneamente se  $O = X$  e  $n_0 = 0$ .

Logo,

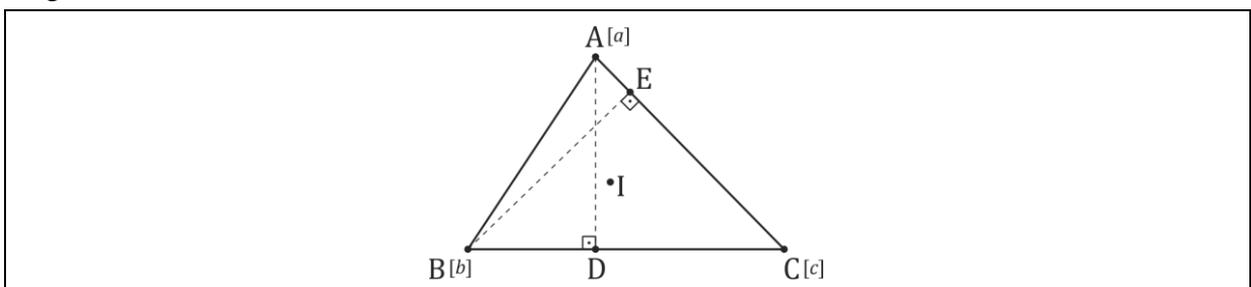
$$\cos(\hat{C}) = \cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}).$$

Suponha agora que

$$\cos(\hat{C}) = \cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}).$$

Neste caso, como  $n_0 = 0$ , tem-se que  $O$ , o CM de  $S$ , coincide com  $X$ . Assim,  $P$ ,  $Q$  e  $O$  são colineares.

Figura 21 – Problema 10



Fonte: Elaboração própria.

Mostra-se agora que  $D$ ,  $E$  e  $I$  são colineares se, e somente se,

$$\cos(\hat{C}) = \cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}).$$

Considere o sistema de massas

$$T = \{A[a], B[b], C[c]\}.$$

Sabe-se que o CM de  $T$  é o incentro  $I$ . Dividindo a massa do vértice  $C$  em três, tem-se:

$$c = m_0 + m_1 + m_2,$$

onde

$$m_1 = c \cdot \frac{\cos \hat{A}}{\cos \hat{C}}, m_2 = c \cdot \frac{\cos \hat{B}}{\cos \hat{C}}.$$

e

$$m_0 = c - m_1 - m_2 = \frac{c}{\cos \hat{C}} \cdot (\cos \hat{C} - \cos \hat{A} - \cos \hat{B}).$$

Como  $\overline{AE} = c \cdot \cos \hat{A}$  e  $\overline{CE} = a \cdot \cos \hat{C}$ , tem-se que

$$a \cdot \overline{AE} = m_1 \cdot \overline{CE}.$$

Assim,  $E$  é o CM do sistema

$$\{A[a], C[m_1]\}.$$

Semelhantemente,  $D$  é o CM do sistema

$$\{B[b], C[m_2]\}.$$

Seja  $Y$  o CM do sistema

$$\{E[a + m_1], D[b + m_2]\}.$$

O CM de  $T$  pertence à reta  $\overline{XY}$ .

Suponha que  $D$ ,  $E$  e  $I$  são colineares. Tem-se então que  $Y \in \overline{DE}$ ,  $I \in \overline{YC}$  e  $I \in \overline{DE}$ . Como  $D$ ,  $E$  e  $C$  não são colineares, estas três coisas só podem ocorrer simultaneamente se  $I = Y$  e  $m_0 = 0$ .

Logo,

$$\cos(\hat{C}) = \cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}).$$

Suponha agora que

$$\cos(\hat{C}) = \cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}).$$

Neste caso, como  $m_0 = 0$ , tem-se que  $I$ , o CM de  $T$ , coincide com  $Y$ . Assim,  $D$ ,  $E$  e  $I$  são colineares. Portanto,  $P$ ,  $Q$  e  $O$  são colineares se, e somente se,  $D$ ,  $E$  e  $I$  também o são.

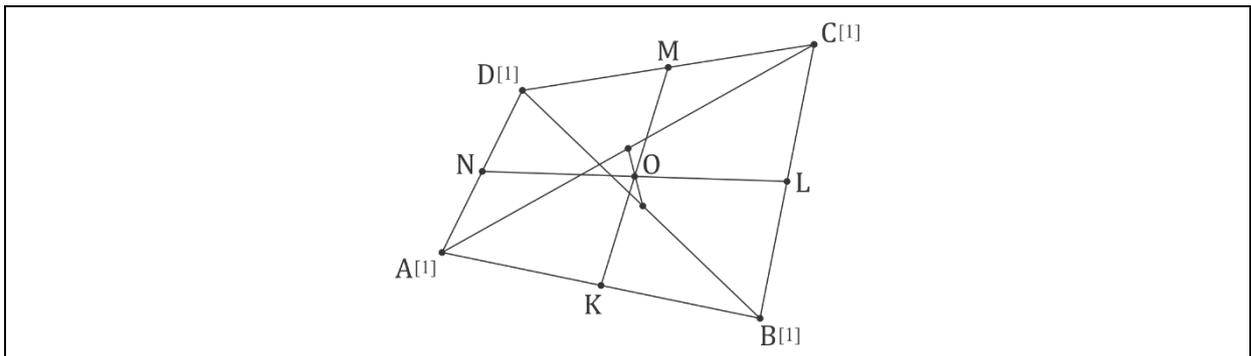
### Problema 11.

Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo e sejam  $K$ ,  $L$ ,  $M$  e  $N$ , os pontos médios dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ , respectivamente.

- (a) Demonstrar que o ponto de interseção dos segmentos  $\overline{KM}$  e  $\overline{LN}$  coincide com os pontos médios destes segmentos.
- (b) Demonstrar que o ponto de interseção de  $\overline{KM}$  e  $\overline{LN}$  é o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero.

### Resolução do problema 11.

Figura 22 – Problema 11



Fonte: Rodríguez (2008).

Seja  $O$  o CM do sistema

$$S = \{A[1], B[1], C[1], D[1]\}.$$

(a) Como  $K$  é o CM do sistema

$$\{A[1], B[1]\}$$

e  $L$  é o CM do sistema

$$\{C[1], D[1]\},$$

tem-se que  $O$  também é o CM do sistema

$$\{K[2], M[2]\}.$$

Portanto,  $O$  é o ponto médio do segmento  $\overline{KM}$ . De forma análoga mostra-se que  $O$  é o ponto médio do segmento  $\overline{LN}$ .

(b) Sejam  $P$  e  $Q$ , respectivamente, os pontos médios dos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ . Como  $P$  é o CM do sistema

$$\{A[1], C[1]\},$$

e  $Q$  é o CM do sistema

$$\{B[1], D[1]\}$$

tem-se que  $O$  também é o CM do sistema

$$\{P[2], Q[2]\}.$$

Logo,  $O$  é o ponto médio de  $\overline{PQ}$ .

**Problema 12.**

Seja  $G$  o baricentro do triângulo  $ABC$  e seja  $X$  um ponto qualquer do plano. Mostre que

$$3 \cdot \overline{GX}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 + \overline{CX}^2 - \frac{1}{3}(\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2).$$

**Resolução do problema 12.**

Denote por  $a$ ,  $b$  e  $c$  os comprimentos dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Sabe-se que o baricentro  $G$  do  $\Delta ABC$  é o CM do sistema

$$S = \{A[1], B[1], C[1]\}.$$

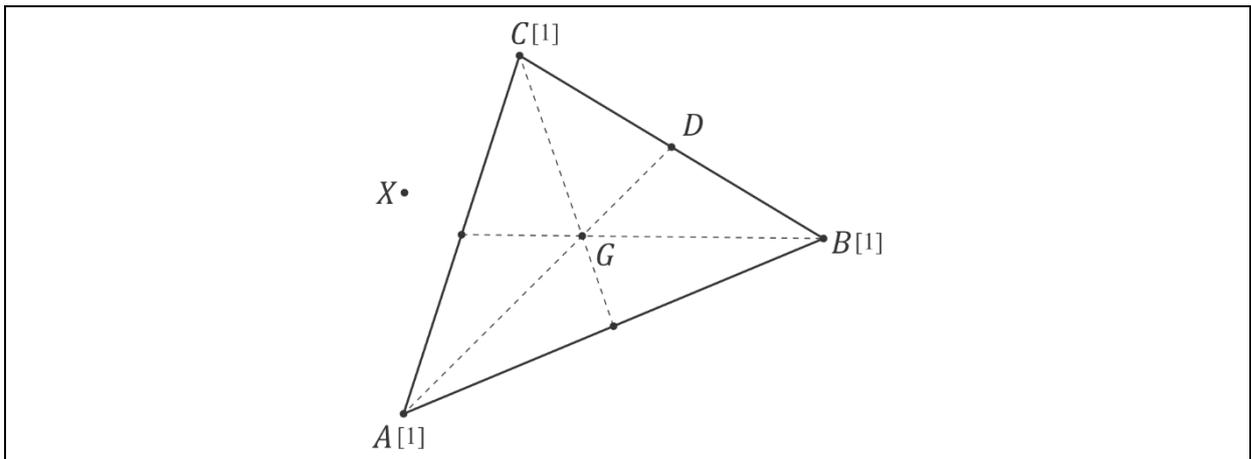
Tem-se, pela identidade do momento de inércia, que

$$I_X = I_G + 3 \cdot \overline{GX}^2,$$

ou seja,

$$\overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 + \overline{CX}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3 \cdot \overline{GX}^2.$$

Figura 23 – Problema 12



Fonte: Rodríguez (2008).

Seja  $D$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ . A relação de Stewart deduz que

$$\overline{AD}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Assim, como

$$\overline{AG}^2 = \frac{2 \cdot \overline{AD}^2}{3},$$

encontra-se

$$\overline{AG}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}.$$

Analogamente, tem-se

$$\overline{BG}^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9}$$

e

$$\overline{BG}^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{9}.$$

Somando estas igualdades, encontra-se

$$\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Portanto,

$$\overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 + \overline{CX}^2 = 3 \cdot \overline{GX}^2 + \frac{1}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

### Problema 13.

Sejam  $O$  e  $H$ , respectivamente, o circuncentro e o ortocentro do  $\Delta ABC$ . Demonstrar que

$$\overline{OH}^2 = 9 \cdot R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

onde  $R$  denota o raio do círculo circunscrito ao  $\Delta ABC$ .

### Resolução do problema 13.

Como

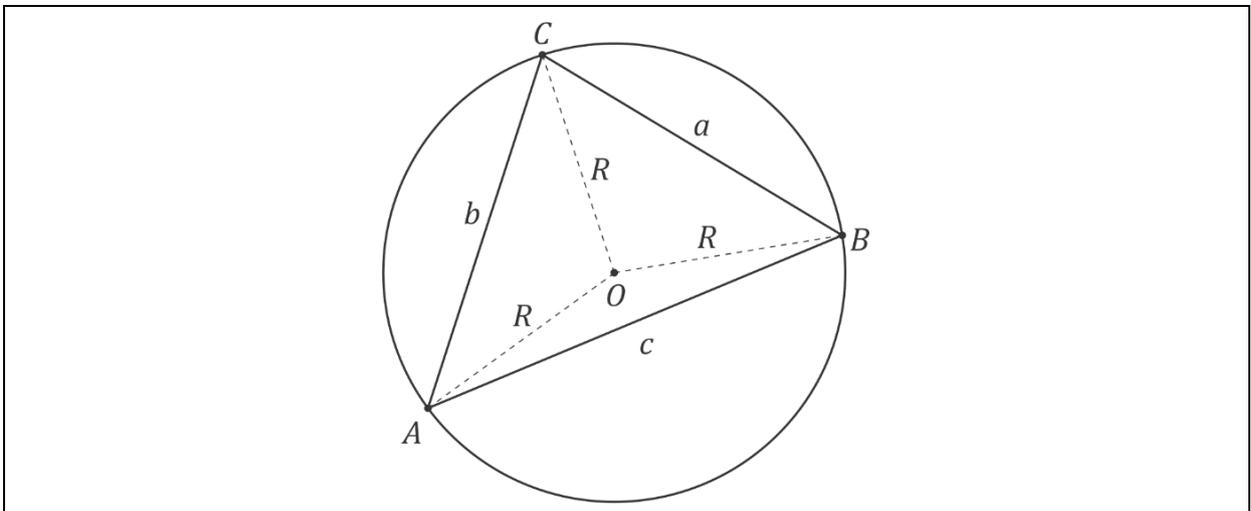
$$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = R,$$

se utilizarmos a fórmula do problema anterior com  $X = O$ , encontramos

$$3 \cdot \overline{GO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = 3 \cdot R^2 - \frac{1}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

onde  $G$  denota o baricentro do  $\Delta ABC$ .

Figura 24 – Problema 13



Fonte: Rodríguez (2008).

Usando agora que  $\overline{HO} = 3 \cdot \overline{OG}$ , obtém-se

$$(3 \cdot \overline{GO})^2 = 9 \cdot R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

ou seja,

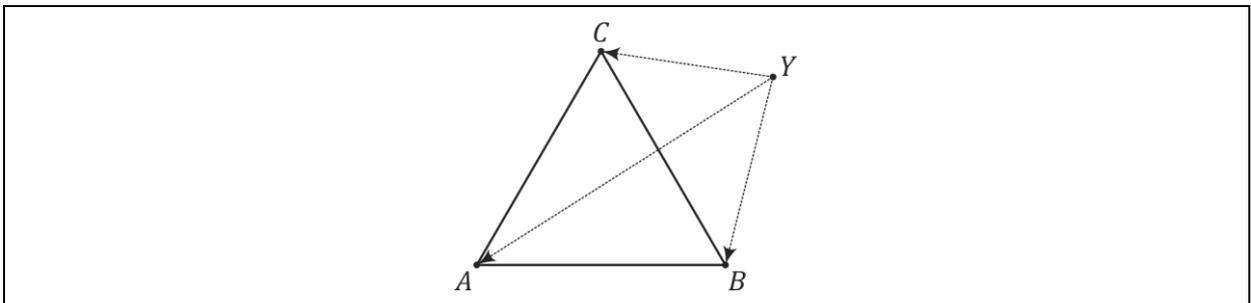
$$\overline{OH}^2 = 9 \cdot R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

#### Problema 14.

Seja  $ABC$  um triângulo equilátero. Encontre o lugar geométrico dos pontos  $X$  para os quais

$$\overline{XA}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{XC}^2.$$

Figura 25 – Problema 14



Fonte: Rodríguez (2008).

#### Resolução do problema 14.

Seja  $Y$  o simétrico de  $A$  em relação ao lado  $\overline{BC}$ . Como

$$\overline{YB} + \overline{YC} - \overline{YA} = \overline{0},$$

tem-se que o ponto  $Y$  é o CM do sistema

$$\{A[-1], B[1], C[1]\}.$$

A identidade do momento de inércia nos dá

$$\begin{aligned} -\overline{XA}^2 + \overline{XB}^2 + \overline{XC}^2 &= -\overline{YA}^2 + \overline{YB}^2 + \overline{YC}^2 + (-1 + 1 + 1) \cdot \overline{YX}^2 \\ &= -3l^2 + l^2 + l^2 + \overline{YX}^2 \\ &= -l^2 + \overline{YX}^2, \end{aligned}$$

onde  $l$  denota o lado do triângulo  $ABC$ .

Portanto,

$$-\overline{XA}^2 + \overline{XB}^2 + \overline{XC}^2 = 0$$

se, e somente se,

$$\overline{YX}^2 = l^2.$$

Logo, o lugar geométrico dos pontos  $X$  para os quais

$$\overline{XA}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{XC}^2$$

é a circunferência de centro  $Y$  e raio  $l$ .

#### **4 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Diante do que foi exposto acima, conclui-se que o método do centro de massa é uma ferramenta importante na solução de problemas de Geometria Euclidiana, tanto plana como espacial. Há inúmeros exemplos de problemas que podem ser resolvidos de forma mais simples e elegante usando-se tal técnica.

Espera-se que a presente dissertação se torne um instrumento valioso na preparação de estudantes dos ensinos médio e fundamental que participam de olimpíadas de Matemática, como a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Espera-se ainda que esta dissertação possa difundir o método aqui apresentado entre professores, alunos e amantes da Matemática.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, G.; RÉ, P. **Observar o céu profundo**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2000.
- CARNEIRO, E.; GIRÃO, F. Centro de massa e aplicações à geometria. **Revista Eureka!**, v. 21, p. 29-37, 2005.
- HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, Y. Momento de Inercia: aplicaciones a la geometría. **Foro RED-Mat**, UNAM, México, v. 25, p. 1-6, 2008. Disponível em: <<http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol025/MomentoDeInercia-a.pdf>>. Acesso em: 20 abr. 2016.
- JOHNSON, R. A. **Advanced euclidean geometry**. New York: Dover Publications, 1960.