Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Universidade Federal do Acre - UFAC

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Marcos Venícios Almeida Bezerra

Funções Pares e Ímpares

(Generalização de Conceitos)

Junho

2016

Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Universidade Federal do Acre - UFAC

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Funções Pares e Ímpares

(Generalização de Conceitos)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no Município de Rio Branco – AC, como requisito **para a obtenção do título de mestre em Matemática**.

Orientador: prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Junho

2016

Esta dissertação foi julgada suficiente como um dos requisitos para a obtenção do título de mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo programa de mestrado profissional em Matemática em rede Nacional, vinculado à Universidade Federal do Acre.

Rio Branco, 07 de junho de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos (UFAC - AC)
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva (UNIR - RO)
Membro Externo

Prof. Me. Josean Alves da Silva (UFAC – AC)
Membro

Prof. Dr. Marcos Aurélio de Alcântara (UFAC – AC)
Suplente

Dedico esta dissertação

À minha esposa Adriana; aos meus filhos: Luís, Marcos e Gabriel; à minha família, em especial a minha mãe Zulmira Almeida Bezerra e a meu pai Mamede Lopes Bezerra (*IN MEMORIAN*).

Agradecimentos

Ao meu pai, Mamede Lopes Bezerra (*IN MEMORIAM*) pela vida dedicada os seus filhos, transferindo grandes valores de dignidade e honra para minha vida.

À minha mãe, Zulmira Almeida Bezerra, a quem devo todos os valores morais e éticos que existem na minha pessoa.

À minha esposa, Adriana Gonçalves Galvão, que sempre esteve do meu lado, apoiando-me nas minhas decisões, sempre me motivando e levantando a minha autoestima. Depositando sua confiança, tendo paciência comigo nesse período de estudos para o mestrado e que fez com que nossos pensamentos sempre se voltassem para um mesmo objetivo.

Aos meus filhos: Luís Fernando Galvão Bezerra, Marcos Venícios Galvão Bezerra e Gabriel Gonçalves Galvão. Eles são a razão e motivação para que eu não desistisse desse sonho.

Ao Professor Dr. José Ivan da Silva Ramos, meu orientador, pela disponibilidade, competência, dedicação, amizade e paciência, idealizador do trabalho e grande parâmetro de excelência profissional.

Aos colegas de mestrado pela troca de experiências e conhecimentos que contribuíram muito para que eu relembrasse de muitos conteúdos, referentes ao curso PROFMAT, num período de tempo muito reduzido.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), à Universidade Federal do Acre (UFAC) e todos os professores do curso, por contribuírem com a minha formação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que permitiu a realização deste trabalho, concedendo-me bolsa de estudos.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que fosse possível a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Resumo

Desde que estejam definidas uma operação $*$ e uma operação $\square$ nos conjuntos não vazios A e B, respectivamente, podemos estabelecer uma correspondência entre esses conjuntos e, em relação às propriedades inerentes a essas operações, estender o conceito de $função\ par$ e de $função\ ímpar$ que comumente são definidos sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Palavras chave: Conjuntos, operações, propriedades, funções e generalizações.

Abstract

Provided they are defined an operation $*$ and a $\square$ operation in the non-empty sets A and B, respectively, we can establish a correspondence between these sets and, in relation to the properties inherent to these operations, extend the concept even function and odd function which commonly are defined on the body $\mathbb{R}$ of real numbers.

Keywords: Sets, operations, properties, functions and generalizations.

Lista de Símbolos

$<$: menor que.

$>$: maior que.

$\leq$: menor do que ou igual a.

$\geq$: maior do que ou igual a.

$\neq$: diferente.

$\cong$: isomorfo a.

$\forall$: para todo, qualquer que seja.

$\equiv$: idêntico a

$\Rightarrow$: então, implica.

$\Leftrightarrow$: equivalente, se e somente se, se e só se.

$/$: tal que.

$\exists$: existe.

$\nexists$: não existe.

$\in$: pertence a.

$\notin$: não pertence a.

$\subset$: está contido.

$\not\subset$: não está contido.

$\cup$: união.

$\cap$: interseção.

ϕ: conjunto vazio.

$\mathbb{N}$: Conjunto dos números naturais.

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos números racionais.

$\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais.

$\mathbb{C}$: Conjunto dos números complexos.

K: Corpo.

$M_{mxn}(K)$: Conjunto das matrizes de ordem m por n sobre um corpo K.

$M_n(K)$: Conjunto das matrizes quadradas de ordem n sobre um corpo K.

$P(A)$: Conjunto das partes de um conjunto A não vazio.

$\mathcal{F}(A)$: Conjunto de todas as funções de A em A.

Sumário

Introdução

O PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática, contribuiu bastante para o aperfeiçoamento da minha formação de professor de Matemática. Há muito tempo eu não me aprofundava em certos conteúdos que foram disponibilizados neste programa de mestrado. Como professor do Ensino Médio de Escola Pública, consigo ministrar aulas com muito mais segurança, relacionando a teoria matemática com situações práticas do cotidiano dos alunos.

No caso das funções, nos chamou atenção um resumo muito pequeno sobre as funções pares e ímpares, apresentado em um dos livros didáticos que adotamos na escola que eu ensino. Os alunos não davam muita importância para aquela parte do livro texto, acreditamos que isso se deu pela acanhada apresentação que o autor faz. Ao final, verificamos que isso é assim em todos os livros que examinamos. Mas, olhando com cuidado, percebemos que existia uma possibilidade de explorarmos aqueles pequenos conceitos, mostrando que, essencialmente, esses tipos de funções dependem diretamente da estrutura de seus domínios e contra domínios; já que, como mostraremos em nosso trabalho, as operações e propriedades inerentes a esses conjuntos é que definem essas funções.

Os babilônios, por volta do ano 2000 a.C., já utilizavam a ideia de função quando faziam tabelas colocando alguns números na primeira coluna e o produto desses números por um valor constante na segunda coluna. (ROQUE, [12]).

No decorrer da história, d.C., vários foram os matemáticos que contribuíram para que se chegasse ao conceito atual de função. As contribuições efetivas para a construção do conceito de função surgiram com os trabalhos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Em 1718 Bernoulli faz a primeira definição de função. (BOYER, [03]).

A representação de uma função pela notação $f(x)$ (lê-se: f de x) foi atribuída ao matemático suíço Euler, no século XVII. O matemático alemão Dirichlet escreveu uma primeira definição de função muito semelhante àquela que usamos atualmente:

"Uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se variável independente e y, variável dependente." (DANTE, [04]) .

No fim do século XIX, com a disseminação da teoria dos conjuntos, tornou-se possível a definição formal do conceito de função por meio de conjuntos:

"Dados os conjuntos X e Y, uma função $f : X \longrightarrow Y$ (lê-se: uma função de X em Y) é uma regra que determina como associar a cada elemento $x \in X$ um único $y = f(x) \in Y$." (DANTE, [04]) .

As funções são usadas por matemáticos e por cientistas para descrever as relações entre quantidades variáveis e, assim, desempenham um papel central no cálculo e nas aplicações (ANTON, [02]).

Funções pares e funções ímpares comumente são definidas sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números. Conforme podemos ver, inclusive nos cursos de cálculo básico. O que pretendemos esclarecer é que, com um pouco de imaginação, esses conceitos relacionados para as funções reais podem ser primeiramente estendidos para funções definidas sobre qualquer conjunto, no qual uma adição bem definida admita a existência de inversos. Isso faz com que outros conjuntos, como por exemplo, M_n ($\mathbb{R}$), o conjunto das matrizes quadradas de ordem n sobre $\mathbb{R}$, possam ser relacionados com esse assunto. Os vários exemplos que apresentamos mostram que a generalização dos conceitos de função par e função ímpar devem ser consideradas.

No capítulo 1 apresentamos alguns conceitos básicos da teoria dos conjuntos, dando destaque, principalmente, para as propriedades de uma operação definida em um conjunto A não vazio. Em seguida, relacionamos esses conceitos, apresentando a estrutura de alguns conjuntos, apontando operações e propriedades que lhes são inerentes.

Depois de relacionarmos os conjuntos numéricos e o conjunto dos números complexos, descrevemos o conjunto das matrizes, o que inclui o estudo das propriedades dos determinantes (de uma matriz quadrada), o conjunto dos polinômios e encerramos o capítulo, dentro do parágrafo das funções, com o conceito de homomorfismo.

No capítulo 2, parte central de nossas considerações, após apresentarmos o conceito de função real par e função real ímpar, concluímos que toda função real pode ser escrita como uma soma de uma função par e uma função ímpar. Terminamos as discussões deste capítulo apresentando um resultado análogo a esse, só que, nesse caso, para funções definidas em um conjunto abstrato A não vazio.

Na Escola Estadual de Ensino Médio, em que leciono, Lourival Pinho, escolhemos uma turma de 3º ano e, além dos assuntos planejados, trabalhamos os conceitos que norteiam este trabalho e aplicamos um pequeno teste com a finalidade de verificar se aquele grupo de alunos compreendeu minimamente as generalizações que foram propostas. Essa lista de problemas está incorporada a esse trabalho, no final deste texto, juntamente com a tabulação dos erros e acertos mediante as respostas dadas pelos alunos.

Encerramos o presente trabalho de conclusão de curso fazendo nossas considerações sobre o desenvolvimento de nossa pequena pesquisa e o nível de sucesso dos alunos nas discussões e na citada avaliação de desempenho.

Capítulo 1 – Conceitos Preliminares e Fundamentações

O presente capítulo trata das noções básicas e gerais da teoria dos conjuntos enfatizando essencialmente as propriedades de uma operação definida em um conjunto não vazio. Depois de definirmos o que é um corpo, construiremos o conjunto das matrizes e relacionaremos as operações comumente definidas e suas propriedades.

Os determinantes e suas propriedades e os polinômios também serão abordados de modo que os exemplos que ajudam a explicar as nossas ideias sejam abundantes.

Para finalizar, abordaremos os conceitos de funções pares e ímpares cuja generalização é parte da tarefa que pretendemos concluir.

§1. Algumas Noções da Teoria dos Conjuntos

Conjunto é toda e qualquer coleção de objetos (inclusive uma coleção sem objetos). Cada objeto de um conjunto será chamado de *elemento*.

Quase sempre representaremos um conjunto por uma letra maiúscula do nosso alfabeto, colocando os seus elementos entre chaves. E por letras minúsculas de nosso alfabeto representaremos os elementos de um conjunto.

Se a é um elemento do conjunto A, dizemos que "*a pertence ao conjunto A*" e anotamos isso por: $a \in A$. Caso contrário, se "*a não pertence ao conjunto A*", anotaremos: $a \notin A$.

Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A, é também elemento de B, dizemos que "*A está contido em B*" e anotamos $A \subset B$. Caso contrário, se pelo menos um elemento de A não pertence a B, dizemos que "*A não está contido em B*" e anotamos $A \not\subset B$.

Admitimos que, para qualquer objeto ou elemento x e um conjunto A dados, ocorra exatamente uma das duas possibilidades, ou $x \notin A$ ou $x \in A$. Além disso, se os elementos a_1 e a_2 pertencem a A, temos como verdadeira somente uma das duas possibilidades: $a_1 = a_2$ ou $a_1 \neq a_2$.

Dois conjuntos A e B são *iguais* se, e somente se, A e B possuem os mesmos elementos ou se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Uma coleção sem objetos é denominada de *conjunto vazio*. Tal conjunto será denotado pela letra grega ϕ. Vale que $\phi \subset X$, para todo X imaginável. Se X é qualquer conjunto, só teríamos $\phi \not\subset X$, se existisse pelo menos um elemento $a \in \phi$, tal que $a \notin X$. Como em ϕ não existem elementos, admitiremos por falta de argumentos, que $\phi \subset X$, independentemente da natureza dos elementos de X.

Por $\# A$, denotaremos a quantidade de elementos do conjunto A. Se $\# A = 1$, diremos que o conjunto A é unitário. O conjunto vazio tem, exatamente, $\# \phi = 0$ elementos.

Nossas considerações será sobre a estrutura (interna) dos conjuntos e como ela pode interferir no conceito de uma função. Particularmente, nos conceitos de função par e função ímpar.

1.1.1 Definição: Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma *operação* $*$ está (*bem*) *definida* em A se, e somente se, $\forall\, x, y \in A$ vale que $x * y \in A$.

São exemplos de operações bem definidas em um conjunto não vazio:

− a adição "$+$" em $\mathbb{N}$;

− a união $\cup$ em $P(A) = \{X / X \subset A\}$, sendo A um conjunto não vazio;

− a multiplicação "$\cdot$" no conjunto $M_2\ (\mathbb{R})$ das matrizes de ordem 2.

A adição "$+$" definida em $\mathbb{N}$ não está definida no conjunto I dos números ímpares, já que a soma de dois números ímpares é um número par.

Vamos relacionar algumas propriedades que comumente são satisfeitas por certas operações definidas em um conjunto não vazio A.

1.1.2 Definição: Seja A um conjunto não vazio e $*$ uma operação definida em A.

a) Dizemos que esta operação tem a *propriedade associativa* se, e somente se, $\forall\, a, b, c \in A$, vale que $a * (b * c) = (a * b) * c$.

b) Dizemos que esta operação tem a *propriedade comutativa* se, e somente se, $\forall\, a, b \in A$, vale que $a * b = b * a$.

c) Dizemos que $e \in A$ é *elemento neutro* em relação à operação $*$ se, e somente se, vale que $\forall\, a \in A$, vale que $a * e = e * a = a$.

d) Se a operação $*$ admite elemento neutro e, dizemos que um elemento $a \in A$ possui *inverso* com respeito à operação $*$ se, e somente se, $\exists\, a^{-1} \in A$, tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

1.1.3 Definição: (As Leis do Cancelamento): Seja A um conjunto não vazio e $*$ uma operação definida em A. Se para a, b, $c \in A$, temos:

a) $a * b = a * c \Leftrightarrow b = c$ (cancelamento à esquerda);

b) $b * a = c * a \Leftrightarrow b = c$ (cancelamento à direita).

Dizemos que valem as *leis do cancelamento* para a operação $*$ definida em A.

1.1.4 Exemplos:

a) Do fato de que não existem divisores de zero, juntamente com o fato de a multiplicação ser comutativa no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, podemos verificar que as leis do cancelamento valem quase sempre para a multiplicação nesse conjunto: $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Z}$, com $x \neq 0$, $xy = yx = xz = zx \Leftrightarrow y = z$.

b) Seja A um conjunto não vazio e $P(A) = \{X/X \subset A\}$ o conjunto das partes de A. Claramente a interseção "$\cap$" está bem definida em $P(A)$. Mas, para os conjuntos A, B, C em $P(A)$ com $A \cap B = A \cap C$, em geral, não vale que $B = C$.

1.1.5 Observação: O elemento neutro e inverso, relativo à operação $*$ definida em um conjunto A não vazio, quando existem, são únicos.

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que e seja o elemento neutro para a operação $*$ definida em A. Então, para todo $a \in A$, vale que $a * e = e * a = a$. Agora, se para $e' \in A$, também vale que $a * e' = e' * a = a$, vemos que $e = e' * e = e * e' = e'$, o que prova a unicidade de e em A.

A unicidade do elemento inverso é provada de maneira semelhante.

Utilizando essa observação podemos justificar o funcionamento da regra de "divisão" entre duas frações. Você se lembra? A regra é "cantada" da seguinte forma: *para dividirmos uma fração por outra, repetimos a primeira e multiplicamos pelo inverso da segunda*.

Assim, $\dfrac{a}{b}\Big/\dfrac{c}{d} = {}^{a}/_{b}\ {}^{d}/_{c} = {}^{ad}/_{bc}$.

1.1.6 Definição (Potências): Seja A um conjunto não vazio, "$*$" uma operação bem definida em A e e o elemento neutro para essa operação. Então, definimos as potências inteiras para um elemento a em A, da seguinte maneira:

$a^0 = e$

$a^1 = a$

$a^2 = a * a$

$a^3 = a * a * a$

....

$a^n = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n \text{ vezes}}$

$a^{-n} = a^{-1n} = (a^{-1})^n = \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}}_{n \text{ vezes}}$, se existir a^{-1}, o inverso de a com respeito à operação $*$.

1.1.7 Definição: Seja $S \neq \phi$ um conjunto e $*$ uma operação definida em S. Dizemos que um elemento $a \in S$ é *idempotente* se, e somente se, valer que $a^2 = a * a = a$.

1.1.8 Exemplos:

a) Considerando o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e a operação de multiplicação nesse conjunto, temos que os únicos elementos idempotentes, com relação a essa operação, são 0 e 1.

b) Considerando $\cup$, a união de conjuntos em $P(A)$, vemos que todo elemento em $P(A)$ é idempotente. A mesma coisa acontece se considerarmos a operação $\cap$ no conjunto das partes de A.

§2. O Conjunto dos Números Reais

As discussões que faremos no capítulo 2, explicam porque neste parágrafo deixaremos de fora o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ dos números naturais. Quase não existe inverso para um número natural, tanto com relação à operação de adição como à multiplicação definidas em $\mathbb{N}$.

A descrição que faremos sobre os conjuntos numéricos será mínima. Essencialmente, relacionaremos as operações definidas nesses conjuntos, evidenciando conceitos e as propriedades que comumente são relacionadas.

É comum definir o conjunto $\mathbb{R}$ dos *números reais* como o conjunto constituído de todos os números racionais e de todos os números irracionais.

No conjunto $\mathbb{R}$ dos números, estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação: admitiremos que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $x + y, xy \in \mathbb{R}$.

Além disso, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, admitiremos que sejam válidas as seguintes propriedades:

A: $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(yz) = (xy)z$ (associatividade);

C: $x + y = y + x$ e $xy = yx$ (comutativa);

N: $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$ e $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ tal que $x.1 = 1.x = x$ (existência de elemento neutro da adição e da multiplicação);

I: $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tal que $a + x = x + a = 0$, sendo a denotado por $a = -x$ e, se temos $x \neq 0, \exists\, b \in \mathbb{R}$ tal que $xb = bx = 1$, sendo b denotado por $b = x^{-1}$ ou $b = \frac{1}{x}$ (existência de inversos para a adição e quase sempre para a multiplicação);

D: $x(y + z) = xy + xz = yx + zx = (y + z)x$ (distributividade da multiplicação em relação à adição).

O efeito da multiplicação do elemento neutro da adição por cada número real r, juntamente com a propriedade ***I***, citada acima, permite que concluamos que não existem divisores de zero em $\mathbb{R}$.

1.2.1 Observação: Sejam x e y quaisquer elementos em $\mathbb{R}$. Então:

a) $x0 = 0$;

b) se tivermos $x\, y = 0$, é porque $x = 0$ ou $y = 0$.

Demonstração: a) Temos $0 + 0 = 0 \Leftrightarrow x(0 + 0) = x0 \Leftrightarrow x0 + x0 = x0$, aplicando a propriedade ***D***. Usando a propriedade ***I***, vem que $-x0 + (x0 + x0) = -x0 + x0$ e, assim, usando ***A*** e ***N***, temos $(-x0 + x0) + x0 = 0 \Leftrightarrow 0 + x0 = 0 \Leftrightarrow x0 = 0$.

b) Se $xy = 0$ e $x \neq 0$, por ***I***, existe x^{-1} em $\mathbb{R}$ de modo que $x^{-1}(xy) = x^{-1}0$ $\Leftrightarrow (x^{-1}x)y = 0 \Leftrightarrow 1y = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Se $xy = 0$ e $y \neq 0$, concluímos de maneira análoga que $x = 0$.

Antes de "descermos" dentro do conjunto dos números relacionaremos algumas propriedades ou características gerais do conjunto $\mathbb{R}$.

O conjunto $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado* (FIGUEIREDO, [05]) contendo um conjunto $P = \{x \in \mathbb{R} /\ x > 0\}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{P_1}$: Se $x \in P$ e $y \in P$, então $x + y \in P$ e $xy \in P$;

$\boldsymbol{P_2}$: Se $x \in \mathbb{R}$, ocorre somente uma das possibilidades: $x \in P$ ou $-x \in P$ ou $x = 0$.

Em geral, os elementos do subconjunto P de um corpo ordenado são chamados de *elementos positivos*.

Dentro de $\mathbb{R}$, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é um corpo ordenado. Qual é o conjunto P dos elementos positivos de $\mathbb{Q}$?

Além disso, em $\mathbb{R}$ podemos determinar ou definir uma relação de ordem entre seus elementos da seguinte forma: $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$.

1.2.2 Observação: Estabelecida a relação de ordem acima, temos que $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, valem as seguintes relações:

a) $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow x.y > 0$

b) $x < 0$ e $y > 0 \Rightarrow x.y < 0$

c) $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow x.y > 0$

d) $x > 0$ e $y < 0 \Rightarrow x.y < 0$

e) Se $x \neq 0$, x e x^{-1} têm o mesmo sinal;

f) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

g) $0 > x > y \Rightarrow 0 > y^{-1} > x^{-1}$

h) se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$

i) se $x < y$, então $x + z < y + \mathrm{z}$

j) se $x < y$ e $0 < z$, então $xz < yz$

k) se $x < y$ e $\mathrm{z} < 0$, então $\mathrm{yz} < xz$

Demonstração: É imediata!

As relações abaixo são, muitas vezes, denominadas de regras dos sinais. Aqui as relacionamos como propriedades dos inversos aditivos em $\mathbb{R}$.

1.2.3 Observação: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então, valem:

a) $(-1)x = -x$;

b) $x = -(-x)$;

c) $(-x)(-y) = xy$;

d) $-xy = (-x)y = x(-y)$.

Demonstração: É imediata!

1.2.4 Definição (módulo de um número real): Denominamos *valor absoluto* ou *módulo* de um número real x, o número não negativo $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \text{ ou} \\ -x \text{ se } x < 0. \end{cases}$

Podemos interpretar esse valor como sendo a distância de x para a origem 0 da reta real. Assim, por exemplo: $|6| = 6 = -(-6) = |-6|$ e $|-10| = -(-10) = 10 = |10|$.

Conforme a definição de $|x|$, temos: $|x| \geq 0, |x|^2 = x^2, |-x| = |x|$ e $x \leq |x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Além disso, o valor absoluto de um número real x também pode ser definido pelas igualdades: $|x| = \sqrt{x^2}$ ou $|x| = máx(-x, x)$; onde $\sqrt{x^2}$ denota a raiz quadrada (não negativa) de x^2e $máx(-x, x)$ indica o maior dos números $-x$ e x. Por exemplo: $|-2| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = máx(2, -2)$.

1.2.5 Observação: Dados x e y números reais valem e são de fácil verificação as seguintes propriedades:

a) $|x| = |-x|$

b) $|x - y| = |y - x|$

c) $|x.y| = |x|.|y|$

d) $-|x| \leq x \leq |x|$

e) $|x + y| \leq |x| + |y|$

f) $|x - y| \leq |x| + |y|$

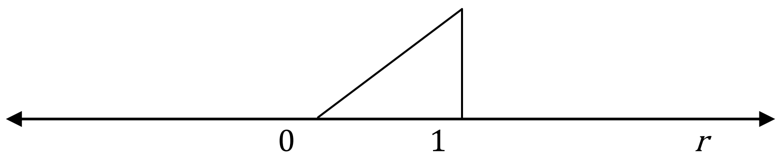
Demonstração: Vejamos a demonstração de alguns itens. Por definição, temos $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$. Isso prova o item c).

Agora, vale que $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Somando ordenadamente estas desigualdades, obtemos $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$; o que implica na desigualdade $|x + y| \leq |x| + |y|$ e o item e) também fica demonstrado.

Por fim, vale que $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$ e concluímos a validade de f).

É claro que, “para baixo”, os elementos de todo subconjunto de $\mathbb{R}$ ficam “subordinados” a essas propriedades quando são somados ou multiplicados.

Considere o triângulo retângulo com base e altura medindo 1, onde dois dos vértices são os pontos 0 e 1 na reta r, conforme a figura a seguir:



A hipotenusa desse triângulo é o número $x = \sqrt{2} > 0$, obtido através do teorema de Pitágoras, tal que $x^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Já sabiam os matemáticos da antiguidade que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma de fração $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, q $\neq 0$, i.e., $\sqrt{2}$ não é um número racional. Isso mostra que, embora valha a propriedade arquimediana no conjunto $\mathbb{Q}$: *entre dois números racionais* r *e* s *existe sempre um número racional*, por exemplo, $\frac{r+s}{2}$, os números racionais não cobrem toda a reta real.

1.2.6 Observação: $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Demonstração: Suponhamos que $\sqrt{2}$ pode ser escrito na forma (I): $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$. Então, podemos supor que $mdc(p, q) = 1$.

Da equação (I) segue que $2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow$ (II): $p^2 = 2q^2$. Isso mostra que p^2 é par. Consequentemente, p é par, digamos $p = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo esse valor na equação (II), temos $(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$. Daí vem que q^2 é par. Consequentemente, q é par e vemos que, assim, temos $mdc(p, q) \geq 2$. Uma contradição como o fato de que temos $mdc(p, q) = 1$. Portanto, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Usando a teoria dos números primos e a divisibilidade em $\mathbb{Z}$, argumentos análogos aos que fizemos para provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional (FIGUEIREDO, [05]), podemos provar que $\sqrt{p}$ não é um número racional, qualquer que seja o número primo p. Estes números são chamados de *irracionais*.

Extensão dos Racionais

1.2.7 Observação (Extensão dos Racionais por $\sqrt{p}$, p primo): Consideremos o conjunto $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right] = \{a + b\sqrt{p} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}$ e p primo$\}$ é chamado de Extensão dos Racionais por $\sqrt{p}$, p primo. Nele, $\forall \ a + b\sqrt{p}, c + d\sqrt{p} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$, estão definidas as operações:

$+$: $\left(a + b\sqrt{p}\,\right) + \left(c + d\sqrt{p}\,\right) = (a + c) + (b + d)\sqrt{p}$;

$\cdot: \left(a+b\sqrt{p}\,\right).\left(c+d\sqrt{p}\,\right)=ac+pbd+(ad+bc)\sqrt{p}.$

Em $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ a adição e a multiplicação definidas anteriormente satisfazem as propriedades $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$, por herança de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$. Além disso, vale que $0=0+0\sqrt{p}$ e $1=1+0\sqrt{p}$ são, respectivamente, os elementos neutros para a adição e multiplicação. E ainda, $-\left(a+b\sqrt{p}\right)=-a-b\sqrt{p}$ é o inverso aditivo de $a+b\sqrt{p}$ e, se $0\neq a+b\sqrt{p}$ vale que $\left(a+b\sqrt{p}\right)^{-1}=\frac{1}{a+b\sqrt{p}}=\frac{a-b\sqrt{p}}{(a-b\sqrt{p})(a+b\sqrt{p})}=\frac{a-b\sqrt{p}}{a^2-(b\sqrt{p})^2}=\frac{a-b\sqrt{p}}{a^2-pb^2}=\frac{a}{a^2-pb^2}+\left(-\frac{b}{a^2-pb^2}\right)\sqrt{p}$ é o inverso de $a+b\sqrt{p}$ com relação à operação de multiplicação. Isso mostra que as propriedades $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{I}$ se verificam localmente dentro de $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$.

1.2.8 Observação: Não existem divisores de zero em $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$.

Demonstração: Segue do fato de que os elementos de $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ são elementos do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e que vale a observação em 1.2.1.

O Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$

O conjunto $\mathbb{Q}=\ \{x=\frac{p}{q}\,/\,p,q\in\mathbb{Z}\text{ e }q\neq 0\}$ das frações de $\mathbb{Z}$ é denominado *conjunto dos números racionais*. Claro que $\mathbb{Q}\ \subsetneq\ \mathbb{Q}[\sqrt{p}]\ \subsetneq\ \mathbb{R}$.

Em $\mathbb{Q}$ estão definidas operações de adição e de multiplicação da seguinte forma: $\forall\,\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$,

$+: \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a.d+b.c)}{b.d}.$

$\cdot: \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$

Em $\mathbb{Q}$, a adição e a multiplicação, definidas acima, satisfazem as propriedades $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$, por herança de $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ para $\mathbb{Q}$. Além disso, vale que $0=\frac{0}{1}$ e $1=\frac{1}{1}$ são, respectivamente os elementos neutros para a adição e multiplicação. Mais ainda, $-\frac{a}{b}$ é o inverso aditivo de $\frac{a}{b}$ e, se $0\neq\frac{a}{b}$ vale que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$ é o inverso de $\frac{a}{b}$ com relação à operação de multiplicação. Isso mostra que as propriedades $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{I}$ se verificam localmente dentro de $\mathbb{Q}$.

1.2.9 Observação: Não existem divisores de zero em $\mathbb{Q}$.

Demonstração: Segue do fato de que os elementos de $\mathbb{Q}$ são elementos do conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ e que vale a observação em 1.2.8.

Observemos que para cada $0 < p$ inteiro primo vale que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \subsetneq \mathbb{R}$. Dado que existem infinitos números primos (GONÇALVES, [08]), são infinitos os conjuntos $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, que são extensões dos racionais por $\sqrt{p}$, para cada p primo.

O Conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$

Todo número inteiro z pode ser escrito como um quociente de dois números inteiros. Temos que $z = \frac{z}{1}$. Isso mostra que $\mathbb{Z}$ está contido no conjunto $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q} \,/\, p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$.

O conjunto $\mathbb{Z}$ é uma base para a construção dos números racionais e a álgebra dos inteiros que são de fundamental importância para o estudo das estruturas algébricas. Mas, o motivo pelo qual também vamos relacionar o conjunto desses números é que, aditivamente, todo número inteiro possui inverso.

Por $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ denotaremos o *conjunto dos números inteiros*. A soma e o produto de dois números inteiros são números inteiros. Assim, estão definidas as operações de adição " $+$ " e multiplicação " $\cdot$ " em $\mathbb{Z}$.

A adição e a multiplicação, definidas em $\mathbb{Z}$, satisfazem as propriedades $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$, como herança de $\mathbb{Q}$. Além disso, vale que 0 e 1 são, respectivamente os elementos neutros para a adição e multiplicação. Mais ainda, $-z$ é o inverso aditivo de z. No entanto, poucos são os elementos inversíveis em $\mathbb{Z}$ quando a operação é a multiplicação. Isso mostra que a propriedade $\boldsymbol{N}$ se verifica localmente dentro de $\mathbb{Z}$. Enquanto a propriedade $\boldsymbol{I}$ só se verifica localmente dentro de $\mathbb{Z}$ para a adição.

1.2.10 Observação: Não existem divisores de zero em $\mathbb{Z}$.

Demonstração: Segue do fato de que os elementos de $\mathbb{Z}$ são elementos do conjunto $\mathbb{Q}$ e que vale a observação em 1.2.9.

§3. O Conjunto dos Números Complexos $\mathbb{C}$

O conjunto $\mathbb{C} = \{x + yi \,/ x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}, \text{com } i^2 = -1\}$ é denominado de conjunto dos *números complexos*.

Claro que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais está contido em $\mathbb{C}$, pois $\forall\, r \in \mathbb{R}$, temos que $r = r + 0i \in \mathbb{C}$.

Em $\mathbb{C}$ estão bem definidas uma operação de *adição* e uma operação de *multiplicação*, da seguinte forma: $\forall\, z = a + bi, h = c + di \ \in \mathbb{C}$

$+$: $z + h = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

$\cdot$: $zh = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

1.3.1 Observação: $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, valem as seguintes propriedades:

A: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ e $z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3$ (associatividade);

C: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1.z_2 = z_2.z_1$ (comutatividade);

N: $\exists\, 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$, tal que $0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1$ e $\exists\, 1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$, tal que $1z_1 = z_1 1 = z_1$ (existência de elemento neutro);

I: Para $z_1 = a + bi, \exists\, -z_1 = -a + (-b)i \in \mathbb{C}$ com $z_1 + (-z_1) = -z_1 + z_1 = 0$ e, se $z_1 \neq 0, \exists\, {z_1}^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 {z_1}^{-1} = {z_1}^{-1} z_1 = 1$ (existência do inversos);

D: $z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3 = z_2.z_1 + z_3.z_1 = (z_2 + z_3).z_1$ (distributividade da multiplicação em relação à adição);

Se $z_1.z_2 = 0$, então $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ (inexistência de divisores de zero).

Demonstração: Demonstraremos somente algumas dessas propriedades. Dados $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$ quaisquer elementos em $\mathbb{C}$. Temos que $z_1 + (z_2 + z_3) = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi) = (a + bi) + [(c + e) + (d + f)i]$ $= \{a + (c + e)] + [b + (d + f)]i$. Como a adição dos números é associativa, esse número é igual a $[(a + c) + e] + [(b + d) + f]i = [(a + c) + (b + d)i] + (e + fi)$ $= [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = (z_1 + z_2) + z_3$. Isso prova a associatividade da adição.

O número complexo $0 = 0 + 0i$ é tal que $\forall\, r + si \in \mathbb{C}$, $(0 + 0i) + (r + si) =$ $(0 + r) + (0 + s)i = (r + 0) + (s + 0) = r + si$. Portanto, $0 = 0 + 0i$ é o elemento neutro da adição.

Considerando $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, vale que $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) =$ $(ac - bd) + (bc + ad)i = (ca - db) + (ad + bc)i = (c + di)(a + bi) = z_2 z_1$. Isso prova a comutatividade da multiplicação.

Admitindo que $\forall\, 0 \neq z \in \mathbb{C}$, $\exists\, z^{-1} \in \mathbb{C}$ com $z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$ e que $\forall\, z \in \mathbb{C}$, vale que $z0 = 0$, se $z_1 z_2 = 0$ e $z_1 \neq 0$, podemos escrever $z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1^{-1}(z_1 z_2) = z_1^{-1}0$. Usando a associatividade da multiplicação, concluímos que $z_1^{-1}(z_1 z_2) = z_1^{-1}0 \Leftrightarrow (z_1^{-1}z_1)z_2 = 0 \Leftrightarrow 1z_2 = z_2 = 0$. Se for $z_2 \neq 0$, argumentos análogos mostram que então $z_1 = 0$. Isso prova a validade de ***C***.

1.3.2 Definições: Consideremos o $\mathbb{C}$ dos números complexos. Então:

a) o número complexo $i = 0 + i$ é denominado de *unidade imaginária*.

b) para todo $z = a + bi$ em $\mathbb{C}$, os números reais $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$ são, respectivamente, a *parte real* e a *parte imaginaria* do número complexo z.

c) dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \in \mathbb{C}$, dizemos que $z_1 = z_2 \Leftrightarrow Re(z_1) = Re(z_2)$ e $Im(z_1) = Im(z_2)$.

d) Para todo $z = a + bi$ em $\mathbb{C}$, definimos $\bar{z} = a - bi$ como sendo o *conjugado* do número complexo *z*. Vale que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$; onde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o *módulo* de *z*.

Com relação ao conjugado $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ de um número complexo $z = a + bi$ podemos relacionar algumas propriedades principais.

1.3.3 Observação: Sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$ quaisquer elementos em $\mathbb{C}$. Então, valem, e são de fácil verificação, que:

a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;

b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$;

c) $\overline{-z} = -\bar{z}$;

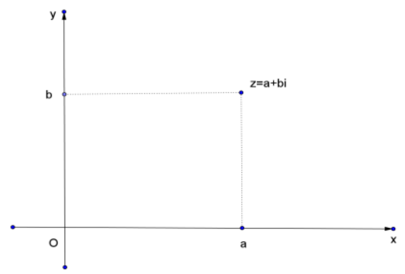
d) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$;

e) $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Demonstração: Faremos somente os itens b) e d). Temos, primeiramente, que $\overline{zw} = \overline{(x + yi)(a + bi)} = \overline{(xa - yb) + (xb + ya)i} = (xa - yb) - (xb + ya)i$. Por comparação, temos $\bar{z}\bar{w} = (x - yi)(a - bi) = (xa - yb) - (xb + ya)i = \overline{zw}$, o que prova d). Agora, usando o item e), podemos escrever $\overline{z^{-1}}\bar{z} = \overline{z^{-1}z} = \overline{1 + 0i} = 1.(\overline{1 + 0i}) = (1 + 0i)(\overline{1 + 0i}) = 1^2 + 0^2 = 1$. Isso mostra que, de fato, $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$.

Devido as igualdades do item c), em 1.3.2, é possível pensarmos que, concretamente, o conjunto dos números complexos pode ser visto como o como sendo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)/x, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\}$, o conjunto dos pontos do plano cartesiano.

Figura1: Representação geométrica de um número complexo

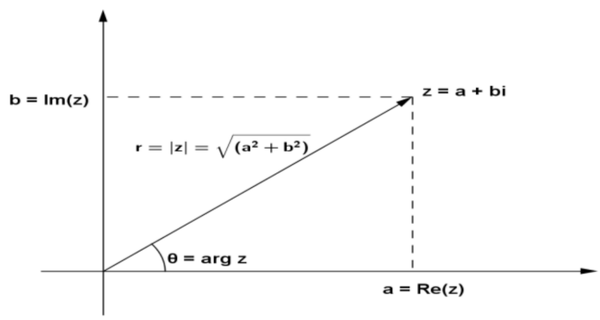


O inverso de um número complexo $z = a + bi \neq 0$ pode ser obtido pela simples resolução da equação $zw = 1$; onde $w = x + yi$ é a "variável". A igualdade de complexos revela que $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$. Deste modo, vemos que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$; onde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Representação polar de um número complexo

Sejam $z = a + bi$ um número complexo não nulo e (a, b) o par que o representa no plano cartesiano (ou de Argand – Gauss). Usando o triângulo retângulo cuja a medida da hipotenusa é igual à distância de $P = (a, b)$ a $O = (0,0)$, origem do plano cartesiano, temos as relações $a = |z|cos\theta$ e $b = |z|sen\theta$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, onde $r = |z|$ é a distância do ponto $P = (a, b)$ ao ponto $O = (0,0)$, e θ é o ângulo que o segmento PO faz com o eixo horizontal do plano cartesiano, no sentido anti-horário.

Figura 2: Módulo e Argumento de um número complexo



Todo número $\varphi = \theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também é chamado de *argumento de z*. Contudo, denominamos de *argumento* (*principal*) *do número complexo z*, o único ângulo $\theta = arg(z) \in]-\pi, \pi]$.

Por fim, podemos escrever $z = a + bi = |z|(cos\theta + isen\theta)$ que é chamada a *forma trigonométrica* ou *forma polar do número complexo z.*

Usando as propriedades da adição de arcos trigonométricos é fácil ver que vale a seguinte relação: Se z, w são dois números complexos, então, $arg(zw) = (arg\ z + arg\ w) + 2\pi n$, para $n \in \mathbb{Z}$.

1.3.4 Exemplo: Para termos uma ideia de como podemos calcular as potências de um número complexo $z = a + bi$, vamos considerar os números complexos $z = |z|(cos\alpha + isen\alpha)$ e $w = |w|(cos\beta + isen\beta)$, cada um na sua forma polar.

Temos:

$$zw = \big(|z|(cos\alpha + isen\alpha)\big)\big(|w|(cos\beta + isen\beta)\big) =$$
$$|z||w|(cos\alpha cos\beta + isen\alpha cos\beta + isen\alpha cos\beta + isen\alpha isen\beta) =$$
$$|z||w|\big(cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta + i(sen\alpha cos\beta + sen\alpha cos\beta)\big) =$$
$$|z||w|\big(cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta)\big).$$

Esses cálculos simples mostram que o produto de dois números complexos, na forma polar, é igual a um número complexo cujo módulo é o produto dos módulos e cujo argumento é a soma dos argumentos desses números complexos.

1.3.5 Lema de De Moivre (1677-1754): Consideremos em sua forma polar o número complexo $z = |z|(cos\ \theta + isen\ \theta)$. Então, para todo inteiro positivo n, vale que $z^n = |z|^n(cos\ n\theta + isen\ n\theta)$.

A fórmula $z^n = |z|^n(cos\ n\theta + isen\ n\theta)$ permite que calculemos as raízes de um dado número complexo de maneira prática e mais precisa. A demonstração desse fato pode ser feita por indução. Depois do passo indutivo os cálculos são idênticos aos que fizemos ao calcular o produto zw na forma polar, no exemplo em 1.3.4. calculamos $z^{n+1} = zz^n = \big(|z|(cos\theta + isen\theta)\big)(|z|^n(cos\ (n\theta) + isen\ (n\theta)))$ $= |z||z|^n(cos\theta + isen\theta)(cos\ n\theta + isen\ n\theta)$. Daí, vemos que $z^{n+1} = zz^n =$ $|z|^{n+1}\big(cos\theta cos(n\theta) - sen\theta sen(n\theta) + cos\theta sen(n\theta) + sen\theta icos(n\theta)\big)$. Desse modo, $z^{n+1} = |z|^{n+1}\Big(cos\big((n+1)\theta\big)\Big) + i\Big(sen\big((n+1)\theta\big)\Big)$.

Portanto, concluímos que a igualdade $z^n = |z|^n\big(cos\ (n\theta) + isen\ (n\theta)\big)$ vale para todo natural n.

A fórmula de De Moivre também se verifica para todo inteiro $n < 0$. Usando o fato de $-n > 0$, novamente por indução, concluímos, ao final, que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, vale a igualdade $z^n = |z|^n\big(cos\ (n\theta) + isen\ (n\theta)\big)$.

1.3.6 Observação: Consideremos o número complexo $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$. Então, vale que $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\,\frac{\theta+2k\pi}{n} + isen\ \frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$; com $k = 0, 1, \cdots, n-1$, são as n raízes distintas (de ordem n) de z, para todo $0 < n \in \mathbb{N}$. Particularmente, $w_k = cos\,\frac{2k\pi}{n} + isen\ \frac{2k\pi}{n}$; com $k = 0, 1, \cdots, n-1$, são as n raízes distintas (de ordem n) da unidade $1 = 1 + 0i$ em $\mathbb{C}$.

Demonstração: Uma raiz enésima de $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$ é um número complexo $w = |w|(cos\varphi + isen\varphi)$ tal que $w^n = \big(|w|(cos\varphi + isen\varphi)\big)^n = |w|^n(cos\varphi + isen\varphi)^n = |w|^n\big(cos(n\varphi) + isen(n\varphi)\big)$. Como $w = \sqrt[n]{z}$, temos que $w^n = z$; ou seja, temos $|w|^n\big(cos(n\varphi) + isen(n\varphi)\big) = |z|(cos\theta + isen\theta)$. Segue então que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ e $n\varphi = \theta + 2k'\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\theta+2k'\pi}{n}$. Pondo $k' = pn + k$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $k = 0, 1, \cdots, n-1$, temos que $\varphi = \frac{\theta+2k'\pi}{n} = \frac{\theta+2(pn+k)\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2pn\pi+2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2p\pi$. Daí, entendemos que $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ e as n raízes de z são $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\,\frac{\theta+2k\pi}{n} + isen\ \frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$; com $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Note que, se $z = 1 + 0i = 1$, os números w_0, w_1,$\cdots$, w_{n-1} são distintos entre si, pois a diferença entre os argumentos de dois quaisquer deles não é um múltiplo de 2π. Essa diferença é igual a $\frac{2(k_1-k_2)\pi}{n}$, com k_1,$k_2 \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Dessa forma, o número $\frac{(k_1-k_2)}{n}$ não é inteiro; pois, $0 < \frac{(k_1-k_2)}{n} \leq \frac{n-1}{n} < 1$.

1.3.7 Proposição: Seja w um número complexo não nulo com a representação polar $w = |w|(cos\ \alpha + isen\ \alpha)$. Então, as enésimas raízes de w são dadas pela fórmula $w_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\ \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + isen\ \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], k = 0, \dots, n-1$.

A fórmula de De Moivre é fundamental para que possamos observar a validade das propriedades das potências no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. E importante para os números que não são puramente reais, sejam representados em coordenadas polares.

§4 Matrizes – Operações e Propriedades

A matemática é repleta de regras e fórmulas, onde cada uma foi criada visando facilitar a vida do ser humano. Os estudos sobre matrizes vêm desde o século XIX e trazem novas experiências para o campo da matemática. Hoje, mesmo sem percebermos, os sistemas que utilizam o conceito de matriz vão, desde os cálculos feitos por um computador, até a construção de estruturas importantes para o ser humano.

Um sistema matricial é comumente utilizado na resolução de sistemas lineares que ajudam a resolver os cálculos mais complexos que surgem nas áreas de física, engenharia e economia.

Formalização do Conceito

Para entendermos o conceito de *matriz* é importante observar primeiramente como as mesmas são formadas. Uma matriz é formada pelo que chamamos de linhas (os valores ordenados na horizontal), e o número delas é comumente representado pela letra "m", e o que chamamos de colunas (os valores ordenados na vertical); onde o número delas é representado pela letra "n". A *ordem* dessa matriz, então, é exatamente m por n; que denotamos por mxn.

Então, se nos é dado uma sequência de valores, podemos "montar" uma matriz disponibilizando esses valores de cima para baixo, em forma de colunas e, da esquerda para a direita, em forma de linhas.

Quando precisamos identificar um valor nessa "tabela", observamos sua posição de linha "i" e de coluna "j" na matriz. Nesse caso, esse elemento comumente é representado por a_{ij}. Por exemplo, se nos referirmos ao elemento a_{24} de uma matriz, estamos falando do elemento que se encontra na 2ª linha e na 4ª coluna dessa matriz.

1.4.1 Definição: Consideremos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números. Por $M_{mxn}(\mathbb{R})$ definimos o conjunto de todas as matrizes de ordem mxn com entradas no conjunto $\mathbb{R}$. Cada elemento em $M_{mxn}(\mathbb{R})$ é denotado por

$$A = [a_{ij}]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Se e $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$ e $m = n$, o conjunto $M_{nxn}(\mathbb{R})$ será denotado por $M_n(\mathbb{R})$, simplesmente.

Outras representações de uma matriz podem ser feitas colocando os seus elementos entre parênteses ou entre duas barras. Nós adotaremos a representação acima, colocando os elementos da matriz entre colchetes.

Tipos de Matrizes

Algumas matrizes recebem um nome de acordo com a ordem ou as características de seus elementos. Apresentamos a seguir a definição de algumas desses tipos de matrizes.

Matriz quadrada: é toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas. Sendo de ordem nxn, os elementos a_{ii}; com $i = 1, 2, \cdots, n$ e $1 \leq n \in \mathbb{N}$, formam a *diagonal principal* da matriz.

Matriz triangular inferior (*superior*): é toda matriz quadrada em que todos os elementos acima (abaixo) da diagonal principal são nulos.

Matriz diagonal: é toda matriz quadrada em que os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

Matriz identidade (de ordem n): é a matriz diagonal representada por I_n e cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1.

Matriz nula: é toda matriz cujos elementos são todos nulos. Geralmente denotamos essa matriz pela letra O.

Matriz linha: é toda matriz que possui apenas uma linha.

Matriz coluna: é toda matriz que possui apenas uma coluna.

Antes de definir as operações, vamos estabelecer a *igualdade* entre matrizes. Dizemos que as matrizes A e B são iguais se, e somente se, A e B possuem a mesma ordem mxn e $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{0, 1, \cdots, m\}$ e todo $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$.

Operações e Propriedades

As operações com matrizes são induzidas pelas operações definidas em $\mathbb{R}$. Muitas das propriedades que observamos na adição e na multiplicação de números nos ajudam a estabelecer regras para operacionalizarmos as matrizes.

Sejam $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$ quaisquer elementos em $M_{mxn}(\mathbb{R})$. Então, definimos a *adição* de A com B como sendo $A + B = [a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij}]_{mxn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}$ uma matriz de ordem mxn e tal que suas entradas são as somas das entradas correspondentes de A e B.

1.4.2 Observação: $\forall\, A, B, C \in M_{mxn}(\mathbb{R})$, valem as seguintes propriedades:
$\boldsymbol{A_1}$: $A + (B + C) = (A + B) + C$;
$\boldsymbol{A_2}$: $A + B = B + A$;
$\boldsymbol{A_3}$: $\exists\, O \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ tal que $O + A = A + O = A$;
$\boldsymbol{A_4}$: $\exists - A = [-a_{ij}]_{mxn} \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ tal que $A + (-A) = -A + A = O$.
Demonstração: Vejamos a comutatividade. Temos $A + B = [a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij}]_{mxn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn} = [b_{ij} + a_{ij}]_{mxn} = [b_{ij}]_{mxn} + [a_{ij}]_{mxn} = B + A$.

Notemos que essencialmente usamos a comutatividade da adição definida no conjunto dos números reais. Por isso, observando as propriedades da adição em $\mathbb{R}$, as conseguimos concluir facilmente que valem as outras propriedades da adição de matrizes.

Dado qualquer elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer matriz $A = [a_{ij}]_{mxn} \in M_{mxn}(\mathbb{R})$, podemos definir a *multiplicação por escalar* $\alpha A = \alpha[a_{ij}]_{mxn} = [\alpha a_{ij}]_{mxn}$.

1.4.3 Observação: $\forall\, A, B, C \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ e $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:
$\boldsymbol{P_1}$: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
$\boldsymbol{P_2}$: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
$\boldsymbol{P_3}$: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
$\boldsymbol{P_4}$: $1A = A$; $(-1)A = -A$ e $0A = O$.
Demonstração: É imediata!

Agora, $\forall\ A\ \in M_{mxl}(\mathbb{R})$ e $\forall\ B \in M_{lxn}(\mathbb{R})$, podemos definir a matriz produto $AB = [c_{ij}]_{mxn}$; onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ikb_{kj}}$.

A *multiplicação* que define a matriz produto acima, só é possível de ser realizada se *o número de colunas da matriz A* for *igual ao número de linhas da matriz* B. Nesse caso, a matriz produto AB tem ordem igual ao número de linhas de A pelo número de colunas de B.

1.4.4 Observação: Se A, B e C são compatíveis para a multiplicação definida acima, valem as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{M_1}$: $A(BC) = (AB)C$;

$\boldsymbol{M_2}$: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists\ I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$ com $AI_n = I_nA = A$; $\forall\ 1 \leq n \in \mathbb{N}$. A matriz I_n é denominada de matriz identidade. Ela é o elemento neutro da multiplicação definida acima.

$\boldsymbol{D}$: $A(B + C) = AB + AC$;

1.4.5 Exemplo: Em geral, se A e B são compatíveis para a multiplicação e $AB = 0$, não vale que $A = 0$ ou $B = 0$. Por exemplo, as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2x2}$ não são nulas. No entanto, temos que $AB = 0$.

Existindo I_n como elemento neutro da multiplicação em $M_n(\mathbb{R})$, temos a motivação para verificar se, dada a matriz A em $M_n(\mathbb{R})$, $\exists\ A^{-1}$ em $M_n(\mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

1.4.6 Definição: Dada matriz A em $M_n(\mathbb{R})$, $\exists\ A^{-1}$ em $M_n(\mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, dizemos que A é inversível com inversa A^{-1}.

Notemos que uma matriz inversível deve ser quadrada, pois comuta com a sua inversa. Existem alguns métodos de obtenção da inversa de uma matriz, no caso dessa matriz existir. No próximo parágrafo relacionaremos um desses métodos fazendo uso do determinante da matriz.

Seja $A = [a_{ij}]_{mxn}$ uma matriz em $M_{mxn}(\mathbb{R})$. Então, a matriz $A^t = [a_{ji}]_{nxm}$, cujas linhas são as colunas da matriz A, é denominada de *transposta* da matriz A.

1.4.7 Observação: Sejam A e B matrizes "compatíveis", no sentido de que podem ser somadas e multiplicadas. Seja α um número qualquer. Então, vale que:
$\boldsymbol{T_1}$: $(A+B)^t = A^t + B^t$;
$\boldsymbol{T_2}$: $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;
$\boldsymbol{T_3}$: $(AB)^t = B^t A^t$;
$\boldsymbol{T_4}$: $(A^t)^t = A$.
Demonstração: Vejamos a demonstração de T$_2$. Temos $(\alpha A)^t = (\alpha\, [a_{ij}]_{mxn})^t = ([\alpha a_{ij}]_{mxn})^t = [\alpha a_{ji}]_{nxm} = \alpha\, [a_{ji}]_{nxm}$.

A veracidade das outras propriedades é deixada para que o leitor interessado verifique.

Um comportamento parecido com a ação da transposta no produto de matrizes, conforme relacionamos em T$_3$, pode ser percebido para a inversa de um produto de matrizes. De fato, $AB\,(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I_n)\,A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Além disso, $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\,(I_n)B = (B^{-1}I_n)\,B = B^{-1}B = I_n$. Portanto, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (dado que a unicidade do elemento inverso é garantida).

Seja A uma matriz quadrada de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Dizemos que A é uma matriz *simétrica* se, e somente se, valer que $A^t = A$. E, dizemos que A é uma matriz *antissimétrica* se, e somente se, $A^t = -A$.

1.4.8 Observação: Toda matriz A em $M_n(\mathbb{R})$ pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.
Demonstração: Podemos escrever $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}\,(A - A^t)$; onde $\frac{1}{2}(A + A^t)$ é uma matriz simétrica e $\frac{1}{2}\,(A - A^t)$ é uma matriz antissimétrica.

§5 Determinantes e Matrizes Inversíveis

Antes de falar sobre o que é o *determinante* de uma matriz de $M_n(\mathbb{R})$, podemos antecipar que o mesmo pode ser entendido como uma função de $M_n(\mathbb{R})$

para o corpo $\mathbb{R}$. O número natural n, ordem da matriz, interfere diretamente no cálculo desse número.

1.5.1 Definições:

a) Sejam n objetos ($1 \leq n \in \mathbb{N}$). Consideremos as *permutações* desses objetos que são as possíveis maneiras de dispormos (ou os ordenar).

Por exemplo, se $n = 2$, temos $\varrho_1 = (1\ 2)$ e $\varrho_2 = (2\ 1)$ que são as 2!=2.1=2 permutações possíveis de 1 e 2. Se $n = 3$, os símbolos são 1, 2 e 3 e assim, δ_1 =(1 2 3); δ_2 =(1 3 2); δ_3= (3 2 1); δ_4= (3 1 2); δ_5= (2 1 3) e δ_1= (2 3 1) são as 3!=3.2.1=6 permutações possíveis de 1, 2 e 3. Se n aumenta, o número de permutações a serem consideradas é muito grande. Se $n = 5$ já serão 5!=5.4.3.2.1=120 permutações.

b) Uma *inversão* (ou *transposição*) é uma permutação de n símbolos na qual, somente dois símbolos estão permutados (ou fora de ordem).

c) Seja $\delta = (t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$ uma permutação de n objetos. O *sinal* de δ é dado por $sin(\delta) = (-1)^l$; onde l é o número de inversões que ocorrem na ordem natural dos n objetos que estão permutados. Contamos l inversões para levar cada símbolo para o seu lugar correto.

Todas as regras e cálculos práticos para obtermos o determinante de uma matriz quadrada têm origem na definição a seguir.

1.5.2 Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$ com entradas em $\mathbb{R}$. Então, o determinante de A é dado por

$$\det(A) = \det\left(\left[a_{ij}\right]_{nxn}\right) = \sum_{\rho=1}^{n!} (-1)^l \, a_{1t_1} a_{2t_2} \cdots a_{nt_n}.$$

Nesse somatório destacamos:

a) Em cada parcela, cada linha e cada coluna contribuem com um único fator.

b) l é o número de inversões observáveis na ordem dos índices de coluna.

c) O sinal de cada parcela depende do “ número l de inversões ” na ordem dos índices de coluna (ou do sinal de cada permutação desses índices).
d) ρ varia de 1 até $n!$ indicando que somamos as $n!$ parcelas, cada uma correspondente a uma permutação n objetos índices das colunas de A.

1.5.3 Exemplo: A conhecida regra de Sarrus agora pode ser vista como uma forma de economizar os esforços que fazemos para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem $n = 3$, usando a definição. Os cálculos são: $\det(A) =$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}\right) = \sum_{\rho=1}^{3!}(-1)^l a_{1t_1}a_{2t_2}a_{2t_3} = \sum_{\rho=1}^{6}(-1)^l a_{1t_1}a_{2t_2}a_{2t_3}$$

$$= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + (-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}).$$

A seguir apresentaremos algumas propriedades comumente estudadas e que são suficientes para desenvolvermos cálculos com determinantes.

1.5.4 Observação: Sejam A e B elementos em $M_n(\mathbb{R})$ com $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Então:
$\mathbf{P_1}$: Se $a_{ij} = 0$ para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ou para algum $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$; vale que $\det(A) = 0$.

$\mathbf{P_2}$: Se A^t é a transposta de A, vale que $\det(A^t) = \det(A)$.

$\mathbf{P_3}$: Se $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$ é uma matriz obtida da matriz A ao multiplicarmos uma das linhas de A por um elemento k em $\mathbb{R}$; então vale que $\det(B) = k\det(A)$.

$\mathbf{P_4}$: Se B é obtida de A permutando duas de suas linhas; então vale que $\det(B) = -\det(A)$. Consequentemente, se A possui duas linhas iguais, vale que $\det(A) = 0$.

P$_5$: Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ k_1 + l_1 & k_2 + l_2 & \cdots & k_n + l_n \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$; com k_r e l_s em $\mathbb{R}$ e r e s variando em $\{1, 2, \cdots, n\}$; então vale que $\det(A) = \det(M) + \det(N)$; onde as matrizes são exatamente $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$ e

$$N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_n \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}.$$

P$_6$: Vale que $= \det(AB) = \det(A)\det(B)$. Particularmente, "det" pode ser visto como um homomorfismo de $M_n(\mathbb{R})$ para $\mathbb{R}$; $\forall\ 1 \leq n \in \mathbb{N}$.

P$_7$: Se $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ ka_{h1} + a_{i1} & ka_{h2} + a_{i2} & \cdots & ka_{hn} + a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$; onde $k \in \mathbb{R}$ e h e i são índices que variam em $\{1, 2, \cdots, n\}$ com $h \neq i$; então vale que $\det(B) = \det(A)$.

Demonstração: São de imediata verificação! Note que em cada parcela da soma definida em 1.5.2 aparece somente um elemento da linha i que está multiplicado por k. Isso justifica imediatamente a validade de P$_1$ e P$_3$. Como na transposta de A suas próprias linhas viram colunas, A e A^t possuem o mesmo determinante. Ao trocarmos a posição entre duas linhas os índices de linha sofrem uma alteração e isso mexe uma vez no sinal de cada parcela da soma em 1.5.2. Isso prova P$_4$. Veja como os cálculos se desenvolvem no caso das matrizes terem ordem 3 para perceber a validade de P$_5$ e P$_7$. Investigue como demonstrar a validade de P$_6$. Isso pode ser visto em [07]; pág. 104 e 105.

Reescrevendo o determinante de uma matriz A de ordem 3, vem que $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ $= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$. Portanto, $\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{33} \end{bmatrix}_{2x2}\right) + a_{12}(-1)^{1+2}\det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{33} \end{bmatrix}_{2x2}\right) +$

$a_{13}(-1)^{1+3}\det\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{2x2}\right)$.

Isso mostra que os cálculos podem ser reduzidos para cálculos de determinantes de matrizes de ordem 2.

Olhando com cuidado você poderá perceber que esse determinante também pode ser feito isolando os elementos da linha 2. Temos também que $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$

$a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) - a_{22}(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})$. Portanto, $\det(A) = a_{21}(-1)^{2+1}\det\left(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{2x2}\right) + a_{22}(-1)^{2+2}\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}_{2x2}\right) +$

$a_{23}(-1)^{2+3}\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{2x2}\right)$.

E, se olhar novamente, podemos perceber que esse determinante também pode ser feito se isolarmos os elementos da linha 3 ou de qualquer coluna de A.

1.5.5 Exemplo: O determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$ pode ser calculado imediatamente se usarmos a 3ª linha dessa matriz. Temos que $\det(M) = 1.(-1)^{3+3}\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2x2}\right) = 1.1.(1.4 - (-1).3) = 7$.

Claro que podemos calcular o determinante de M usando outra linha ou coluna e verificaríamos que $\det(M) = 7$. Porém, demoraríamos mais do que se usássemos a 3ª linha como fizemos.

Devido ao matemático francês Pierre Simon Laplace, temos o seguinte:

1.5.6 Teorema: Seja A uma Matriz de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Então, vale que:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}), \text{para um qualquer } i \in \{1, 2, \cdots, n\}; \text{ onde } A_{ij}$$

é a matriz obtida de A ao suprimirmos a linha i e a coluna j.

Ou

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}), \text{para um qualquer } j \in \{1, 2, \cdots, n\}; \text{ onde } A_{ij}$$

é a matriz obtida de A ao suprimirmos a linha i e a coluna j.

Demonstração: Se $n = 2$ ou $n = 3$ a demonstração pode ser obtida de forma direta por meio de pequenos cálculos.

Faça alguns cálculos nos casos em que $n = 4$ ou $n = 5$, escolhendo matrizes particulares. Depois faça uma consulta para obter uma prova para o caso geral.

Matrizes Multiplicativamente Inversíveis

Vamos considerar duas problemáticas. A primeira é saber quando que uma matriz é multiplicativamente inversível. A outra é saber qual é a inversa dessa matriz, caso ela seja inversível.

Daqui em diante quando nos referirmos a uma matriz inversível será sempre com relação à operação de multiplicação. Isso porque, indiferentemente da ordem, toda matriz sobre o corpo $\mathbb{R}$ possui inversa com relação à operação de adição.

1.5.7 Observação: Seja S uma matriz de ordem n sobre um corpo $\mathbb{R}$. Então:
i) se S é inversível, vale que $\det(S) \neq 0$;
ii) se S é inversível com inversa S^{-1}, vale que $\det(S^{-1}) = \frac{1}{\det(S)}$.

Demonstração: Decorre imediatamente da equação $S^{-1}S = SS^{-1} = I_n$ e da propriedade P_6.

Juntando a necessidade de que o determinante de S seja diferente de zero para que S seja inversível com a validade da propriedade P_1, concluímos que existem muitos elementos não inversíveis em M_n ($\mathbb{R}$).

Mesmo que A seja uma matriz quadrada de ordem pequena, digamos $n = 2$, caso exista a matriz A^{-1}, Já não é imediata a determinação dessa matriz.

1.5.8 Exemplo: Admitindo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x2}$ é inversível em $M_2(\mathbb{R})$, podemos nos “aventurar” na direção de obtermos a sua inversa. Pondo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2}$, temos $AA^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ a + 4c = 0 \\ b + 4d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2, b = -1, c = -\frac{1}{2}$ e $d = \frac{1}{2}$. Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{2x2}$.

A palavra “aventurar” é porque, caso a matriz não seja inversível, todo o esforço no sentido de obter a sua inversa será em vão. Pense no tanto de relações que surgem quando a ordem da matriz aumenta para $n = 3$.

Ainda, para os casos em que a ordem da matriz é pequena, relacionamos a seguir mais um método de obtenção da inversa de uma matriz que depende diretamente do seu determinante.

1.5.9 Definições: Consideremos o conjunto M_n ($\mathbb{R}$); com $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

a) Para cada par de índices $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, o escalar $\mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{ij}}) = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{i+j}}\mathbf{det}(\boldsymbol{A_{ij}})$; onde A_{ij} é a matriz obtida de A ao suprimirmos a linha i e a coluna j, é chamado de *cofator* do elemento a_{ij}.

b) A matriz $\mathbf{cof}(\boldsymbol{A_{ij}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{11}}) & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{12}}) & \cdots & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{1n}}) \\ \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{21}}) & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{22}}) & \cdots & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{2n}}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{n1}}) & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{n2}}) & \cdots & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{nn}}) \end{bmatrix}_{\boldsymbol{nxn}}$ é denominada de *matriz cofatora* (ou matriz dos cofatores de A).

c) A matriz $\left(\mathbf{cof}(\boldsymbol{A})\right)^{\boldsymbol{t}} = \mathbf{Adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{11}}) & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{21}}) & \cdots & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{n1}}) \\ \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{12}}) & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{22}}) & \cdots & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{n2}}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{1n}}) & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{2n}}) & \cdots & \mathbf{cof}(\boldsymbol{a_{nn}}) \end{bmatrix}_{\boldsymbol{nxn}}$, transposta da matriz cofatora de A, é denominada de *matriz adjunta* de *A.*

1.5.10 Observação: Seja A uma matriz quadrada de ordem $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Então, $\forall\ i, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ com $i \neq k$, vale que:

$$a_{i1}\text{cof}(a_{k1}) + a_{i2}\text{cof}(a_{k2}) + \cdots + a_{in}\text{cof}(a_{kn}) = 0.$$

A soma dos produtos dos elementos de uma linha pelos cofatores dos correspondentes elementos de outra linha de A é igual a zero.

Demonstração: A soma $a_{i1}\text{cof}(a_{k1}) + a_{i2}\text{cof}(a_{k2}) + \cdots + a_{in}\text{cof}(a_{kn})$ pode ser entendida como o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$ se, e somente se, $a_{ij} = a_{kj}$; $\forall\, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Nesse caso, veja a propriedade P_4, vale que $\det(A) = a_{i1}\text{cof}(a_{k1}) + a_{i2}\text{cof}(a_{k2}) + \cdots + a_{in}\text{cof}(a_{kn}) = 0$.

Como consequência desse resultado, temos mais um método de obtenção da inversa de uma matriz. Vale a seguinte

1.5.11 Observação: Seja A uma matriz quadrada de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Então, se $\det(A) \neq 0$, vale que $\frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}\left(\text{cof}(A)\right)^t = A^{-1}$.

Demonstração: Temos que

$$A\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn} \begin{bmatrix} \text{cof}(a_{11}) & \text{cof}(a_{21}) & \cdots & \text{cof}(a_{n1}) \\ \text{cof}(a_{12}) & \text{cof}(a_{22}) & \cdots & \text{cof}(a_{n2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{cof}(a_{1n}) & \text{cof}(a_{2n}) & \cdots & \text{cof}(a_{nn}) \end{bmatrix}_{nxn} =$$

$\begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix}_{nxn} = \det(A) I_{\text{n}}$. Portanto, vemos que $A\text{Adj}(A) = \det(A)\, I_{\text{n}} \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A)\right) = I_{\text{n}}$ e concluímos que $\frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A)$ é a inversa da matriz A.

Voltemos ao exemplo em 1.5.8. O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\text{x}2}$ é igual a 2. Daí, temos $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(\text{cof}(A)\right)^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\text{x}2}^{\text{t}}$. Portanto, temos $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\text{x}2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{2\text{x}2}$.

Observemos que por esse método a quantidade de cálculos é enorme, já para obtermos a inversa de uma matriz de ordem $n = 3$. Além do determinante temos que calcular 9 cofatores.

Agora, juntando os fatos em 1.4.6 e 1.5.7, podemos formular o seguinte:

1.5.12 Teorema: Seja A uma matriz quadrada de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Então, vale que A é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Todas essas considerações permitem que reconheçamos quando uma matriz quadrada é inversível ou não e, no caso em que a matriz é inversível, ainda fornecem um método para exibirmos a sua inversa, mesmo que, no caso em que a ordem da matriz é “grande”, os cálculos sejam demasiados. Por exemplo, já no caso em que a matriz quadrada tem ordem 4 e seu determinante é não nulo, podemos encontrar sua inversa calculando os cofatores dos 16 elementos dessa matriz, sendo que cada cofator depende do cálculo de um determinante de uma matriz de ordem 3.

§6 Polinômios

Os polinômios têm também uma significativa importância dentro da Matemática e demais áreas. As abordagens que faremos são introdutórias sobre as operações com polinômios e suas propriedades.

1.6.1 Definição: Uma sequência quase nula $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, 0{,}0, \cdots)$ cujos termos são números reais não necessariamente distintos, obtidos como imagens de uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, é denominada de *polinômio* f. A função real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ é denominada *função polinomial real de grau* n. Dizemos, ainda, que $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ é a *forma algébrica* do polinômio $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, 0{,}0, \cdots)$.

Podemos e vamos nos referir muitas vezes à expressão $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ como sendo um polinômio, sem necessariamente fazermos referência à sequência $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, 0{,}0, \cdots)$ ou à função real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por ela.

Os números $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são denominados *coeficientes* e as parcelas a_0, a_1x, a_2x^2, ... , a_nx^n são chamados *termos* do polinômio $f(x)$.

1.6.2 Definição: Dados $r \in \mathbb{R}$ e $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, chama-se *valor numérico* de f em r, a imagem $f(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \cdots + a_nr^n$, de r pela função f.

1.6.3 Exemplos: Se $h(x) = 1 + 2x + x^2$, temos que $h(2) = 1 + 2.2 + 2^2 = 9$ é a imagem de 2 pelo polinômio h.

1.6.4 Definição: Dizemos que um *polinômio* f é *nulo* (ou *identicamente nulo*) quando f assume o valor numérico zero para todo número r. Simbolicamente, temos $f \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Claro que um polinômio f é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de f forem nulos: $f \equiv 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

1.6.5 Definição: Dizemos que dois polinômios f e g são *iguais* (ou *idênticos*) quando assumem valores numéricos iguais para todo número r. Em símbolos, indicamos: $f = g \Leftrightarrow f(r) = g(r), \forall \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente, temos que f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem ordenadamente iguais. Isso significa que temos $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ +...+ a_nx^n igual a $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ +...+ b_nx^n se, e somente se, $a_i = b_i$, $\forall\, i \in \{0, 1, 2,..., n\}$.

Escolhemos definir as operações com polinômios olhando esses objetos como sequências quase nulas. Isso economiza muito o espaço dos cálculos que iremos desenvolver.

1.6.6 Observação: Consideremos $\mathbb{P} = \{ (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) / a_i \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$, o conjunto de todas as sequências quase nulas, juntamente com a sequência nula. Então, em $\mathbb{P}$ estão bem definidas as seguintes operações: $\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}$:

$+$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $c_n = a_n + b_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\cdot$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $d_n = \sum\limits_{n=k+j} a_kb_j$, com $k + j = n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

1.6.7 Exemplo: Para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 0, 2, 0, 0, \cdots)$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, \dots)$, temos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 4, 2, 2, 0, 0, \dots)$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$d_0 = a_0 b_0 = -2$$

$$d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -2$$

$$d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 2$$

$$d_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = -2 + 0 + 4 + 0 = 2$$

$$d_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = -2 + 0 + 4 + 0 + 0 = 2 \text{ e}$$

$$d_5 = a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_0 = 0 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 = 4.$$

Continuando com esses cálculos, vemos $d_6 = d_5 = 4$ e $d_7 = d_8 = \cdots = 0$. Logo, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-2, -2, 2, 2, 2, 4, 4, 0, 0, \dots)$.

Considere as sequências

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = (-1)^n + 3 \end{aligned} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto g(n) = \begin{cases} n(n-1)(n-2); se\ n \leq 3 \\ 0, se\ n > 3 \end{cases} \end{aligned}.$$

Temos

$$\begin{aligned} f + g\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto (f+g)(n) = f(n) + g(n) = \begin{cases} (-1)^n + 3 + n(n-1)(n-2); \text{se } n \leq 3 \\ (-1)^n + 3; n > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Esta “função soma” determina a sequência $(4, 2, 4, 8, 4, 2, 4, 2, \dots)$, cujo 7º termo é o número 4. De outra forma: Tomando a sequência $(4, 2, 4, 2, \dots)$ definida por f e a seqüência $(0, 0, 0, 6, 0, 0, \dots)$ definida por g, a soma $(4, 2, 4, 8, 4, 2, 4, 2, \dots)$ é a sequência definida pela função $f + g$.

1.6.8 Observação: Para as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{P}$, $\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}};\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}};\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}$, valem as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{A_1}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + [(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}] + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{A_2}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{A_3}$: $\exists\ 0 = (0, 0, 0, 0, \dots) \in \mathbb{P}$ tal que $0 + (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + 0 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{A_4}$: $\exists -(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}$ tal que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + [-(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = -(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

$\boldsymbol{M_1}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}.(c_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}}].(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{M_2}$: $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{M_3}$: $\exists\ 1 = (1,0,0,0,\dots) \in \mathbb{P}$ tal que $1.(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.1 = (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{D}$: $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.[(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} + (c_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}] = (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} + (a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}.(c_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$

Demonstração: Essas propriedades são de imediata verificação.

1.6.9 Definição: O conjunto $\mathbb{P}$ munido das operações de adição e multiplicação definidas em 1.6.8 é chamado de *conjunto dos polinômios*.

Os elementos de $\mathbb{P}$ serão representados por letras minúsculas de nosso alfabeto. Além disto, para $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, o, o, \dots) = (a_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = 0\ se\ n > m$, temos:

i) Se $a_n \neq 0$, então a_n é o *coeficiente dominante* de f.

ii) Se a_n é o coeficiente dominante de f, dizemos que n é o *grau* do polinômio f.

iii) Por $\partial f = n$ denotamos o grau do polinômio f

iv) Não se define o grau do polinômio nulo $0 = (0,0,0,\dots)$, já que não existe $a_n \neq 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos em $\mathbb{P}$ o elemento $x = (0,1,0,0,\dots)$. Este elemento é denominado de *identidade*. Precisamente, a identidade x é um polinômio de grau um, cujo coeficiente dominante é um e mais

$x^0 = 1 = (1,0,0,\dots)$

$x^1 = x = (0,1,0,0,\dots)$

$x^2 = x.x = (0,1,0,0,\dots).(0,1,0,0,\dots) = (0,0,1,0,0,\ \dots)$

$x^3 = x^2.x = (0,0,1,0,0,\dots).(0,1,0,0,\dots) = (0,0,0,1,0,0,\dots)$

$x^n = (0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)$, onde 1 é o coeficiente dominante e aparece na posição n.

1.6.10 Observação: No conjunto $W = \{f \in \mathbb{P}/f = (r,0,0,\dots)$ com $r \in \mathbb{R}$ ou $\partial f = 0\}$ estão bem definidas a adição e a multiplicação definidas em 1.6.4. Além disso, definimos W como sendo o conjunto dos *polinômios constantes*, já que podemos identificar cada elemento de W como um elemento de $\mathbb{R}$, isto é, $(0,0,0,\dots) \equiv 0$, $(1,0,0,\dots) \equiv 1$, $(2,0,0,\dots) \equiv 2, \cdots, (r,0,0,\dots) \equiv r$.

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{P}$ o conjunto dos polinômios. Podemos definir a multiplicação: $\forall\ t \in \mathbb{R}$ e $\forall\ f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0{,}0, \dots) \in \mathbb{P}$,

$\because t.f = t.(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots) = (ta_0, ta_1, ta_2, \dots, ta_n, 0, \dots) \in \mathbb{P}$.

1.6.11 Observação: Para as operações de multiplicação por escalar definida acima valem as seguintes propriedades: $\forall\, r, s \in \mathbb{R}$ e $\forall\, f, g \in \mathbb{P}$,

$\boldsymbol{P_1}$: $r.(f.g) = (r.f).g = f.(r.g)$;

$\boldsymbol{P_2}$: $(r.s).f = r.(s.f)$;

$\boldsymbol{P_3}$ $(r+s).f = r.f + s.f$;

$\boldsymbol{P_4}$ $r.(f+g) = r.f + r.g$.

Demonstração: É imediata!

Esta multiplicação (externa) de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{P}$ ajuda a descrever melhor o conjunto dos polinômios. Para todo $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0,0, \dots) \in \mathbb{P}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} f &= (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0,0, \dots) = \\ &= (a_0, 0,0, \dots) + (0, a_1, 0,0, \dots) + \cdots + (0, 0, \dots, a_n, 0,0, \dots) \\ &= a_0(1, 0,0, \dots) + a_1(0, 1, 0,0, \dots) + \cdots + a_n(0, 0, \dots, 1, 0,0, \dots) \\ &= a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^x \end{aligned}$$ que é a *forma algébrica* do polinômio f.

1.6.12 Exemplos:

1. O polinômio $t = (2, 0, 1, 3, -1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ tem a forma algébrica: $2(1,0,0,\dots) + 0(0,1,0,\dots) + 1(0,0,1,0,\dots) + 3(0,0,0,1,0,\dots) + (-1)(0,0,0,0,1,0,\dots) + 1(0,0,0,0,0,1,0,\dots) = t \equiv t(x) = 2x^0 + 0x + 1x^2 + 3x^3 + (-1)x^4 + 1x^5$.

2. Consideremos os elementos $l = (2, 1, 0, 0, \dots)$ e $J = (0, 1, 0, 4, 0, 0, \dots)$. Temos que:

i) O polinômio (produto) é $l.j = (2,1,0,0,\dots).(0,1,0,4,0,0,\dots) = (0,2,1,8,4,0,\dots)$.

ii) A forma algébrica de l é $l = (2,1,0,0,\dots) = 2x^0 + 1x^1 = 2 + x$ e forma algébrica de j é $j = (0,1,0,4,0,0,\dots) = 0x^0 + 1x^1 + 0x^2 + 4x^3 = x + 4x^3$.

Daí, temos
$$\begin{aligned} l.j &= (2 + x^1).(0x^0 + x^1 + 0x^2 + 4x^3) \\ &= 0x^0 + 2x^1 + 0x^2 + 8x^3 + 0x^1 + 1x^2 + 0x^3 + 4x^4 \\ &= 0x^0 + 2x^1 + 1x^2 + 8x^3 + 4x^4 \\ &= 2x + x^2 + 8x^3 + 4x^4. \end{aligned}$$

Comparando i) e ii), obtemos: $l.j = (0,2,1,8,4,0,\dots) = 2x + x^2 + 8x^3 + 4x^4$.

1.6.13 Observação: (Teorema do grau): Sejam f, g elementos quaisquer não nulos em $\mathbb{P}$. Então, valem e são de fácil verificação que:

i) $\partial(f+g) \leq max\{\partial f, \partial g\}$

ii) $\partial(f.g) = \partial f + \partial g$

Demonstração: É imediata!

1.6.14 Observação: Seja $F = \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/ f$ é uma função polinomial de grau $n\}$, o conjunto de todas as funções polinomiais reais de grau n. Consideremos o conjunto $\mathbb{P}$, de todos os polinômios de grau no máximo n, juntamente com o polinômio nulo. Então, a função p que a cada função polinomial $\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \end{array}$ em F, associa um polinômio $g = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ no conjunto $\mathbb{P}$, é uma bijeção que permite que cada função polinomial f de grau n, seja identificada como um polinômio $g(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ de grau n.

1.6.15 Exemplo: Dados os polinômios $f \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ e $g \equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$, temos que $f + g$ é igual à soma

$f + g = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_n + b_n)x^n + (0 + b_{n+1})x^{n+1} + \cdots + (0 + b_m)x^m$, se $n < m$.

Ou

$f + g = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_m + b_m)x^m + (a_{m+1} + 0)x^{m+1} + \cdots + (a_n + 0)x^n$, se $m < n$.

Isso mostra que o $\partial(f+g) \leq max\{\partial f, \partial g\}$.

§7 Noções de Funções

O conceito de função é um dos mais importantes e ocupa lugar de destaque em vários ramos da Matemática, bem como em outras áreas do conhecimento. É muito comum e conveniente expressarmos fenômenos físicos, biológicos e sociais por meio de funções. No ensino médio já é possível desenvolvermos estudos detalhados, a partir dos vários tipos de funções e propriedades que elas apresentam.

Neste pequeno parágrafo incluímos, essencialmente, a formalização do conceito e apresentamos alguns tipos especiais de função.

1.7.1 Definições: Sejam A e B conjuntos não vazios. Dizemos que f é uma *função* de A em B se, e somente se, f é uma regra que a cada elemento em A associa um único elemento em B.

Escrevemos $\begin{array}{l} f: A \longrightarrow B \\ \quad x \rightsquigarrow f(x) \end{array}$ para denotar que f é uma função de A em B. Nesse caso,

a) A é chamado de *domínio* da função f e é indicado por $D(f)$.
b) B é chamado de *contra domínio* de f e é indicado por $CD(f)$.
c) $Im(f) = f(A) = \{f(x) \;/\; x \in A\}$ é chamado de *conjunto imagem* (ou *imagem direta*) de f.

Comumente, para cada $x \in A$, dizemos que o elemento $y = f(x) \in B$ chama-se imagem de x pela função f e temos: "y é igual a f de x".

1.7.2 Exemplo: A função

$$\begin{array}{rcl} d: M_2\,(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \rightsquigarrow & d(A) \;=\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{array}$$

é tal que para $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$ e $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2x2}$, vale que $d(M) = d(N) = -2$. Além disso, $\forall\, r \in \mathbb{R} = CD(d)$, existe uma matriz $R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} \in M_2\,(\mathbb{R}) = D(d)$ tal que $d(R) = r$.

1.7.3 Definições:

a) Uma função $f: A \rightarrow B$ é *sobrejetiva* se, e somente se, o conjunto imagem de f coincide com o seu contra domínio B. Isso significa que $Im(f) = f(A) = B$ e assim, $\forall\, b \in B$, existe ao menos um $a \in A = D(f)$ tal que $f\,(a) = b$.

É importante notar que, se os conjuntos A e B são finitos e f é sobrejetiva o contradomínio B nunca tem mais elementos que o domínio A.

b) Uma função $f: A \rightarrow B$, é *injetiva* (ou injetora) se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 elementos em $A = D(f)$, se x_1 é diferente de x_2, implica que $f(x_1)$ é diferente de $f(x_2)$. Equivalentemente, $\forall\, x_1, x_2 \in A = D(f)$, se $f(x_1) = f(x_2)$; então, vale que $x_1 = x_2$.

c) Uma função é denominada *bijetiva* se, e somente se, é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

1.7.4 Exemplo: A função $\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x) = ax \end{array}$, em que a é um número real não nulo, é denominada de *função linear*. Em particular, quando $a = 1$, essa função é chamada de *função identidade* em $\mathbb{R}$ que denotamos por $\begin{array}{l} I_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow I_{\mathbb{R}}(x) = x. \end{array}$

Nesse caso, o "batismo" dessa função faz menção às operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{R}$. Temos que f é linear devido ao fato de que: $\forall\, x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R} = D(f)$, vale que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ e $f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1)$.

Um exemplo presente em nosso cotidiano pode ser visto na seguinte situação: Ao abastecer o veículo no posto de combustíveis, onde o preço p, em média, é R$4,00, o valor v a ser pago depende da quantidade l de litros colocados no tanque. Dessa forma, observamos que o preço a ser pago está em função da quantidade de litros. Então, $v = 4l$ reais, pagos pelo combustível.

1.7.5 Exemplos:

1) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é injetiva, pois $f(a) = f(-a)$; $\forall\, 0 \neq a \in \mathbb{R}$.

2) A função $\begin{array}{l} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow g(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}$, recebe o nome de $função\ modular$.

Notemos que tanto f quanto g não são injetivas. Além disso, vale que $Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}^+$.

Comparando as funções f e g, em 1.7.5, vemos que $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, $CD(f) = CD(g) = \mathbb{R}$ e, como já mencionamos, $Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}^+$. Porém essas funções não agem da mesma maneira ponto a ponto. Por exemplo, vale que $f(3) = 9 \neq 3 = g(3)$. Isso motiva a definição a seguir.

1.7.6 Definição: Dizemos que as funções f e g, são *iguais* se, e somente se, tivermos $D(f) = D(g), CD(f) = CD(g)$ e $f(x) = g(x); \forall\, x \in D(f) = D(g)$.

Parte do estudo sobre as funções recai sobre as qualidades ou propriedades que elas apresentam. Mas podemos olhar as funções como elementos de um conjunto e, dentro desse conjunto, definir uma maneira de operacionalizar esses objetos.

1.7.7 Definição: Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} /\ f$ é uma função$\}$ o conjunto de todas as funções reais. Podemos definir, $\forall\, f, g \in F$, as operações:

$+: f + g : \begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x) \end{matrix}$

$\cdot: f\,.\,g : \begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow (f.g)(x)=f(x).g(x). \end{matrix}$

Voltando ao exemplo 1.7.5, temos $\begin{matrix} f+g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow (f+g)(x)= \begin{cases} x^2+x, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2-x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{matrix}$ como sendo a função soma e $\begin{matrix} fg: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow (fg)(x)= \begin{cases} x^3, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^3, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{matrix}$ como sendo a função produto das funções f e g.

Não é difícil perceber que essas operações são induzidas diretamente das operações de adição e multiplicação no conjunto $\mathbb{R}$ dos números.

1.7.8 Observação: Consideremos as operações de adição e multiplicação definidas em F. Então, $\forall\, f, g, h\ \in \mathcal{F}$, valem as seguintes propriedades:

A: $f + (g + h) = (f + g) + h$ e $f(gh) = (fg)h$ (associatividade).

C: $f + g = g + h$ e $fg = gf$ (comutativa).

N: Em $\mathcal{F}$ existem as funções $\begin{matrix} o: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow o(x) = 0 \end{matrix}$ e $\begin{matrix} 1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow 1(x) = 1 \end{matrix}$ que são, respectivamente, os elementos neutros da adição e da multiplicação.

I: A função $\begin{matrix} -f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow (-f)(x)= -f(x) \end{matrix}$ é o inverso aditivo da função f. E, se valer que $0 \neq b \in \mathbb{R}$, a função $\begin{matrix} \frac{1}{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow \left(\frac{1}{f}\right)(x)= \frac{1}{b} \end{matrix}$ é o inverso multiplicativo da função $\begin{matrix} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x)= b. \end{matrix}$

Isso significa a existência de elemento inverso para a adição e existência de inverso para quase todas as funções constantes.

D: $f(g+h) = fg + fh = gf + hf = (g+h)f$ (distributividade da multiplicação em relação à adição).

Demonstração: Todas essas propriedades são de fácil verificação. Para isso é necessário considerar a definição de igualdade de funções.

1.7.9 Definição: Dado qualquer elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer função f em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, podemos a *multiplicação (por) escalar* $\begin{array}{l} \alpha f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \rightsquigarrow (\alpha f)(x) = \alpha f(x). \end{array}$

Essa definição de multiplicação por escalar permite que realizemos decomposições de uma função como soma de funções que são produtos de uma função por um escalar. Faremos referência a isso no capítulo 2 deste trabalho.

1.7.10 Observação: $\forall\, f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{P_1}$: $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$;

$\boldsymbol{P_2}$: $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$;

$\boldsymbol{P_3}$: $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$;

$\boldsymbol{P_4}$: $1f = f$; $(-1)f = -f$ e $0f = o$.

Demonstração: Também é imediata e é necessário considerar a definição de igualdade de funções.

Agora é mais fácil imaginar uma definição mais geral de uma operação definida sobre um conjunto de funções.

1.7.11 Definição: Seja $A \neq \phi$ um conjunto. Por $\mathcal{F}(A) = \{f\colon A \longrightarrow A / f \text{ é uma função}\}$, denotamos o *conjunto de todas as funções de A em A.*

Notemos que se $*$ é uma operação definida em A; então essa operação induz uma operação "$*$" em $\mathcal{F}(A)$. Se $f, g \in \mathcal{F}(A)$, temos $\begin{array}{l} f*g\colon A \longrightarrow A \\ \quad a \rightsquigarrow (f*g)(a) = f(a)*g(a). \end{array}$

Se a operação $*$, definida no conjunto A, apresenta propriedades, então, a operação "$*$" induzida no conjunto $\mathcal{F}(A)$ apresenta propriedades. Isso é bastante natural como foi observado que as propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$ induzem propriedades em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Por exemplo, se $*$ é comutativa; então, em $\mathcal{F}(A)$, a operação "$*$" é comutativa: $\forall\, a \in A$, temos $(f * g)(a) = f(a) * g(a)$. Como $*$ é comutativa, temos a igualdade $f(a) * g(a) = g(a) * f(a) = (g * f)(a)$. Isso mostra que $f * g = g * f$, ou seja, em $\mathcal{F}(A)$ a operação "$*$" é comutativa.

1.7.12 Definição: Lembremos a definição em 1.1.7. Isso induz a definirmos que uma *função f em $\mathcal{F}(A)$ é idempotente* se, e somente se, tivermos que $(f * f)(a) = f(a) * f(a) = (f(a))^2 = f(a), \forall\, a \in A$.

Assim, teremos em $\mathcal{F}(A)$ que $f * f = f$ se, e somente se, todos os elementos de $f(A) = Im(f)$ são idempotentes.

Homomorfismos

1.7.13 Definição: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e que $\square$ é uma operação bem definida em Y. Uma função $\begin{array}{c} \varphi : X \longrightarrow Y \\ x \rightsquigarrow \varphi(x) \end{array}$ é denominada de *homomorfismo* se, e somente se, $\forall\, a, b \in X$, valer que $\varphi(a * b) = \varphi(a) \square \varphi(b)$ em Y.

Um homomorfismo injetivo é denominado *monomorfismo*. Se for sobrejetivo é denominado *endomorfismo*. Se for bijetivo é denominado *isomorfismo*.

1.7.14 Exemplos:

1) Consideremos a função (identidade) $\begin{array}{c} f = I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x) = x \end{array}$. Essa função é um homomorfismo, já que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, vale que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(x.y) = f(x).f(y)$. Além disso, a função f é uma bijeção. Portanto, ela é um isomorfismo.

2) As funções reais (do Cálculo) $ln(x)$ e e^x também são exemplos de homomorfismos. Notemos que enquanto uma leva um produto em uma soma a outra leva uma soma em um produto, respectivamente.

1.7.15 Observação: Seja φ um isomorfismo de X em Y. Então, valem as seguintes propriedades:

a) Seja e é o elemento com relação à operação $*$ definida em X. Seja e' o elemento neutro com relação à operação $\square$ definida em Y. Então, se em Y valem as leis do cancelamento, temos que $\varphi(e) = e'$.

b) Se x^{-1} é o inverso de um elemento x em X, então $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

Demonstração: Primeiramente, temos que $e * e = e$. Portanto podemos escrever a igualdade $e'\square\varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(e * e) = \varphi(e)\square\varphi(e)$; já que φ é um homomorfismo. Cancelando $\varphi(e)$ em ambos os membros da igualdade, fica demonstrado o item a).

Agora, de $x * x^{-1} = e$, obtemos $\varphi(x * x^{-1}) = \varphi(e)$. Como φ é um homomorfismo e, pelo item a), $\varphi(e) = e'$, vem que $\varphi(x)\square\varphi(x^{-1}) = e'$. Isso mostra que $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$ e b) fica demonstrado também.

1.7.16 Exemplo: Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \,/ a,b \in \mathbb{R}\}$. Em $\mathbb{R}^2$ podemos definir as seguintes operações: $\forall\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$+ : (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$.

$. : (a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

É fácil ver que, para essa adição e essa multiplicação definidas em $\mathbb{R}^2$, valem todas as propriedades listadas em 1.3.1. Além disto, a função

$$\begin{aligned} \delta:\ & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & a + bi \rightsquigarrow \delta(a+bi) = (a,b) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Primeiramente, vale que: $\forall a+bi, c+di \in \mathbb{C} = D(\delta)$ se $\delta(a+bi) = \delta(c+di)$, vale que $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$. Assim, obtemos que $a + bi = c + di$. Isto mostra que δ é injetiva. Também temos que, para toda dupla (a,b) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = CD(\delta)$, $\exists$ um número complexo $a + bi$ em $\mathbb{C} = \mathrm{D}(\delta)$, tal que $\delta(a+bi) = (a,b)$. Portanto, δ é sobrejetiva.

Por fim, $\forall\ a+bi, c+di \in \mathbb{C} = D(\delta)$, temos $\delta\big((a+bi)+(c+di)\big) = \delta\big((a+c)+(b+d)i\big) = (a+c, b+d) = (a,b)+(c,d) = \delta(a+bi)+\delta(c+di)$. E, também, $\delta\big((a+bi)(c+di)\big) = \delta\big((ac+bd).(ad+bc)i\big) = (ac-bd, ad+bc) = (a,b)(c,d) = \delta(a+bi)\delta(c+di)$. Isso mostra que $\mathbb{C}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

A equivalência $a = c$ e $b = d \Leftrightarrow (a,b) = (c,d)$, usada para mostrar a injetividade da função δ, depende do conceito de igualdade entre pares ordenados, o que consideramos entendido.

Capítulo 2 – Função Par e Função Ímpar Generalizadas

Neste capítulo, vamos estender o conceito de função par e função ímpar que, comumente, são vistos como funções definidas sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números. A riqueza de exemplos que podemos relacionar para outros conjuntos como, por exemplo, o conjunto $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n sobre o corpo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}$, conjunto dos polinômios de grau no máximo n sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais; deixa um “alerta” de que esses conceitos são mais gerais do que os que comumente aparecem nas literaturas.

Recordemos os conceitos de função par e função ímpar que comumente são relacionados com o conjunto dos números reais.

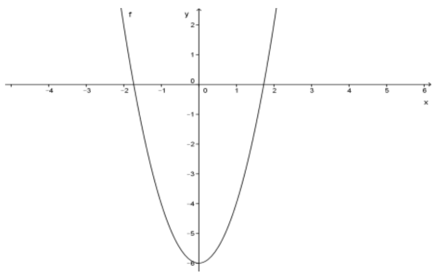
2.1 Definições: Observado que todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui inverso aditivo $-x \in \mathbb{R}$, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função, definimos que:

i) f é uma *função par* se, e só se, vale que $f(x) = f(-x)$; $\forall\, x \in \mathbb{R} = \mathrm{D}(f)$.

ii) f é uma *função ímpar* se, e só se, valer que $f(x) = -f(-x)$; $\forall\, x \in \mathbb{R} = D(f)$.

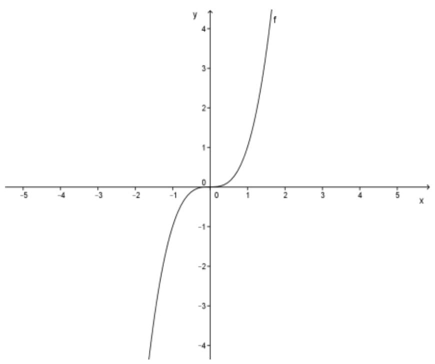
2.2 Exemplos:

1) Vamos analisar a função $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x)=2x^2-6. \end{array}$



Seu gráfico é uma parábola cujo eixo de simetria coincide com o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ do sistema de eixos cartesianos. Isso porque qualquer que seja x pertencente ao domínio $\mathbb{R}$ de f, temos $f(x) = f(-x)$; ou seja, f é uma função par.

2) A função $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x)=x^3 \end{array}$ é tal que para todo x pertencente ao domínio $\mathbb{R}$ de f, vale que $f(x) = -f(-x)$. Assim, f é uma função ímpar.



Já sabemos que toda matriz A em $M_n(\mathbb{R})$ pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica. Nesse caso, usamos a multiplicação por escalar, definida no parágrafo 4 do capítulo 1, para escrever essa soma. Temos que

$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}\ (A - \ A^t)$; onde $\frac{1}{2}(A + A^t)$ é uma matriz simétrica e $\frac{1}{2}\ (A - \ A^t)$ é uma matriz antissimétrica.

Nessa direção, também é possível, fazermos uma decomposição do conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ como uma soma do conjunto das funções pares com o conjunto das funções ímpares. Esse fato depende da definição de produto por escalar que relacionamos em 1.7.9.

2. 3 Observação: Toda função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ pode ser escrita como uma soma de uma função par com uma função ímpar.

Demonstração: Primeiramente, se f é um elemento em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$; então a função p, definida por $p(x) = \frac{1}{2}\ (f(x)\ + f\ (-x))$ é uma função par e a função i, definida por $i(x) = \frac{1}{2}\ (f(x) - f(-x))$ é uma função ímpar.

Agora, toda função f em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, tem sua lei de formação dada por $f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$, que é a soma de uma função par com uma função ímpar.

A observação acima nos dá uma boa estratégia para, a partir da lei de formação de uma função real qualquer, obter a lei de formação de uma função par ou de uma função ímpar. Noutro sentido, existem casos em que podemos perceber que a lei de formação de uma dada função já é uma soma de uma função par com uma função ímpar. É o que vemos no exemplo a seguir.

2. 4 Exemplo: A função $\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \rightsquigarrow f(x)=x^2+x \end{array}$ tem sua lei de formação como uma soma das leis de formação de $\begin{array}{l} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \rightsquigarrow g(x)=x^2 \end{array}$ e $\begin{array}{l} h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \rightsquigarrow h(x)=x \end{array}$ que são, respectivamente, uma função par e uma função ímpar.

Seja $\mathcal{S}_n\ (\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes simétricas e $\mathcal{T}_n\ (\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes antissimétricas. Temos então a soma $\mathcal{S}_n\ (\mathbb{R}) + \mathcal{T}_n\ (\mathbb{R})\ = M_n\ (\mathbb{R})$. Mas, a união $\mathcal{S}_n\ (\mathbb{R}) \cup \mathcal{T}_n\ (\mathbb{R})\ \subsetneq M_n\ (\mathbb{R})$. Além disso, a união $\mathcal{S}_n\ (\mathbb{R}) \cup \mathcal{T}_n\ (\mathbb{R})$ não é disjunta; já que a matriz nula O é, ao mesmo tempo, uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica.

Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto das funções reais pares e $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ o conjunto das funções reais ímpares. Vale que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) + \mathcal{I}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Também, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{I}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

A função $\begin{matrix} o : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow o(x)=0 \end{matrix}$ é, ao mesmo tempo, uma função par e uma função ímpar. Vale que $o(x) = o(-x) = -o(-x) = 0$. Equivalentemente, se $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x) = f(-x)$ e, ao mesmo tempo, $f(x) = -f(-x)$, então, temos $f(x) = -f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$; ou seja, $f \equiv o$ é a função nula. Isso mostra que $o \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{I}(\mathbb{R}) \neq \phi$.

2. 5 Observação: Consideremos o conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ de todas as funções reais. Então valem e são de fácil verificação as seguintes afirmações:

a) Vale que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{I}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{F}(\mathbb{R})$; ou seja, existem funções reais que não são nem pares nem ímpares.

b) Uma função real ímpar definida na origem é nula na origem.

c) A adição definida em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ também está definida em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e em $\mathcal{I}(\mathbb{R})$; ou seja, a soma de duas funções reais pares é uma função par e a soma de duas funções reais ímpares é uma função real ímpar.

d) O produto definido em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ também está definido em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$; ou seja, o produto de duas funções reais pares é uma função par.

e) O produto de duas funções reais ímpares é uma função real par.

f) O produto de uma função par por uma função ímpar, ou vice versa, é uma função ímpar.

g) A derivada de uma função real par é uma função ímpar.

h) A derivada de uma função real ímpar é uma função par.

Demonstração: Cada uma dessas relações é de fácil verificação. Para justificar o item a), por exemplo, temos que a função $\begin{matrix} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x)=x^2+x \end{matrix}$ do exemplo 2.4 não é par, pois $f(x) = x^2 + x \neq x^2 - x = f(-x)$ e nem ímpar, pois $f(x) = x^2 + x \neq -(x^2 - x) = -x^2 + x = -f(-x)$.

Generalização de Conceitos

2.6 Definições: Sejam A e B conjuntos não vazios e $f\colon A \to B$ uma função que a cada elemento $a \in A$ associa um elemento $b = f(a) \in B$.

i) Suponhamos que em A esteja definida uma operação $*$ que admite elemento neutro e. Dizemos que f é uma função *par com respeito à operação* $*$ se, e somente se, $f(a) = f(a^{-1})$; onde a^{-1} é o inverso do elemento a com respeito à operação $*$, que deve existir, $\forall\, a \in A$.

ii) Suponhamos que em B esteja definida uma operação $\square$ que admite elemento neutro e'. Dizemos que f é uma função *ímpar com respeito às operações* $*$ *e* $\square$ (*nessa ordem*) se, e somente se, $f(a) = \left(f(a^{-1})\right)^{-1}$; onde a^{-1} é o inverso do elemento a com respeito à operação $*$, que deve existir, $\forall\, a \in A$ e $\left(f(a^{-1})\right)^{-1}$ é o inverso de $f(a^{-1})$ com respeito à operação $\square$, que deve existir, para todo $f(a^{-1}) \in Im(f) \subset B$.

2.7 Exemplos:

a) Consideremos a função $\begin{array}{l} det: M_2\,(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad A \;\rightsquigarrow det(A). \end{array}$ Para toda matriz A em $M_2\,(\mathbb{R})$, existe $-A$ em $M_2\,(\mathbb{R})$. Além disso, $det(-A) = det((-1)A)$ e pela propriedade 3 em 1.5.4, temos que $det(-A) = (-1)^2 det(A) = det(A)$. Logo, det, definida sobre $M_2\,(\mathbb{R})$, é uma função par, com respeito à operação de adição usual de matrizes.

b) Consideremos, agora, a função $\begin{array}{l} det: M_3\,(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad A \;\rightsquigarrow det(A). \end{array}$ Temos que: $\forall\, A \in M_3\,(\mathbb{R})$, $\exists -A \in M_3\,(\mathbb{R})$. Daí, $det(-A) = det\big((-1)A\big) = (-1)^3 det(A) = -det(A)$; ou seja, $det(-A) = -det(A)$. Logo, det, definida sobre $M_3\,(\mathbb{R})$, é uma função ímpar, com respeito às operações de adição usual de matrizes e a adição dos números.

Sempre que não houver dúvidas, omitiremos as operações que impõem a uma função f a qualidade de função par ou função ímpar.

Os exemplos em 2.7 são casos particulares da observação a seguir:

2.8 Observação: Seja $M_n\,(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes quadradas de ordem $2 \leq n \in \mathbb{N}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Então, $\begin{array}{l} det: M_n\,(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad A \;\rightsquigarrow det(A) \end{array}$ é uma função:

i) par se n é um número par.

ii) ímpar se n é um número ímpar.

Demonstração: Pela propriedade 3 em 1.5.4, vale que para toda matriz $A \in M_n\,(\mathbb{R})$, com $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $\det(-A) = det((-1)A = (-1)^n det(A)$. Logo, se n é par, temos $det(-A) = \det(A)$. Isso significa que det é uma função par e i) fica demonstrado. Se n é ímpar, temos $det(-A) = -\,det(A)$ e ii) está demonstrado.

Até aqui já devemos perceber que nossas considerações sobre uma função ou ímpar já avançaram para um universo diferente de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Na observação acima, a adição em M_n ($\mathbb{R}$), domínio da função det é uma operação "diferente" da adição em $\mathbb{R}$, que é o contra domínio de det.

2.9 Observação: Seja $\mathcal{M} = \{A \in M_n\ (\mathbb{R})\ /\ A$ é inversível$\}$. Então, a função $\begin{array}{l} det: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad A \rightsquigarrow det(A) \end{array}$ é ímpar.

Demonstração: $\forall\, A \in \mathcal{M}$, existe $A^{-1} \in \mathcal{M}$ e, por 1.5.7, itens i) e ii), vale que $det(A) \neq 0$, $det(A^{-1}) \neq 0$ e $\det(A) = \frac{1}{det(A^{-1})} = (det(A^{-1}))^{-1}$, ou seja, $det(A) = (det(\mathrm{A}^{-1}))^{-1}$. Isso mostra que essa função é ímpar.

Em 2.9 relacionamos um caso em que as operações consideradas são as operações de multiplicação de matrizes e de multiplicação dos números. Portanto, o conceito de função ímpar não está atrelado à adição específica dos elementos do conjunto $\mathbb{R}$.

2.10 Exemplo: A função $\begin{array}{l} \partial: P_n(x) \longrightarrow \mathbb{N} \\ \quad f \rightsquigarrow \partial(f) \end{array}$ é uma função par, pois olhando na forma algébrica de f, que é $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$; com $0 \neq a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ vale que $\partial(f(x)) = \partial(-f(x)) = n$.

2.11 Exemplo: Seja $1 \leq n \in \mathbb{N}$. A função $\begin{array}{l} tr: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad A \rightsquigarrow tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \end{array}$ pega toda matriz quadrada de ordem n e transforma em um número que é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

Vale que $\forall\, A \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists -A \in M_n(\mathbb{R})$ e $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = -(-a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn}) = -tr(-A)$. Isso mostra que tr é uma função ímpar.

O número $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ é chamado de *traço* da matriz A. Se usarmos o item b) de 1.2.3, podemos definir muitas funções ímpares de $M_n(\mathbb{R})$ para o corpo $\mathbb{R}$.

2.12 Exemplo: Lembremos as discussões do parágrafo 7, especialmente o que temos em 1.7.15. Os isomorfismos, em geral, não se encaixam no grupo das funções par. Pelo item b) de 1.7.5, temos que se φ é um isomorfismo de X em Y; então vale que $\varphi(x) = (\varphi(x^{-1}))^{-1}$. Nesse caso, φ é uma função ímpar.

Encerramos as nossas discussões estabelecendo um resultado análogo à observação em 2.3. Vamos considerar uma operação $*$ definida em um conjunto $A \neq \phi$ e o conjunto $\mathcal{F}(A) = \{f\colon\ A \longrightarrow A/\ f$ é uma função$\}$, de todas as funções de A em A, munido da operação "$*$", induzida por $*$.

Não é demais rever as discussões e conceitos compreendidos no texto que vai de 1.7.11 até 1.7.12.

2. 13 Observação: Seja A um conjunto não vazio e $*$ uma operação definida em A. Seja $f \in \mathcal{F}(A)$. Se f é uma função idempotente e $*$ satisfaz todas as propriedades listadas em 1.1.2, então f pode ser escrita na forma $f = \mathcal{P} * \mathcal{I}$; onde $\mathcal{P}$ é uma função par e $\mathcal{I}$ é uma função ímpar.

Demonstração: A função $\begin{matrix}\mathcal{P}\colon A \longrightarrow A \\ a \rightsquigarrow \mathcal{P}(a) = f(a) * f(a^{-1})\end{matrix}$ satisfaz a condição de que $\mathcal{P}(a^{-1}) = f(a^{-1}) * f(\,(a^{-1})^{-1}) = f(a^{-1}) * f(a) = f(a) * f(a^{-1}) = \mathcal{P}(a)$ e por isso $\mathcal{P}$ é uma função par. Agora, a função $\begin{matrix}\mathcal{I}\colon A \longrightarrow A \\ a \rightsquigarrow \mathcal{I}(a) = f(a) * (f(a^{-1})\,)^{-1}\end{matrix}$ satisfaz a condição $\left(\mathcal{I}(a^{-1})\right)^{-1} = (f(a^{-1}) * (f((a^{-1})^{-1})\,)^{-1})^{-1} = (f(a^{-1}) * (f(a)\,)^{-1})^{-1} = \left((f(a))^{-1}\right)^{-1} * \left(f(a^{-1})\right)^{-1} = f(a) * \left(f(a^{-1})\right)^{-1} = \mathcal{I}(a)$. Daí, a função $\mathcal{I}$ é uma função ímpar. Por fim, para todo a em A, temos $(\mathcal{P} * \mathcal{I})(a) = \mathcal{P}(a) * \mathcal{I}(a) = (f(a) * f(a^{-1})\,) * (f(a) * (f(a^{-1})\,)^{-1}) = f(a) * f(a^{-1}) * f(a) * \left(f(a^{-1})\right)^{-1} = \left(f(a)*f(a)\right) * \left(f(a^{-1}) * \left(f(a^{-1})\right)^{-1}\right) = \left(f(a)*f(a)\right) * e = f(a)*f(a) = f(a)$.

Concluímos, então, que $f = \mathcal{P} * \mathcal{I}$, onde $\mathcal{P}$ é uma função par e $\mathcal{I}$ é uma função ímpar.

Os passos de nossas argumentações estão resguardados pelas propriedades da operação $*$ em A e pelas propriedades da operação "$*$", induzida por $*$, em $\mathcal{F}(A)$.

Notemos, ainda, que o caso particular em que $A = \mathbb{R}$ e $* \equiv +$ é a operação de adição definida em $\mathbb{R}$, a decomposição de uma função real como soma de uma função par com uma função ímpar depende da "imposição" de um fator de multiplicação igual a $\frac{1}{2}$ (conforme observação em 2.3). No caso mais geral, em 2.13, impomos à função f a condição dela ser idempotente. Isso elimina "mais um 2" que aparece em nossas argumentações. Precisamente, nas igualdades $f(a){*}f(a) = (f(a)\,)^2 = f(a)$.

2.14 Exemplo: Se $f = \varphi$ é um isomorfismo; $\begin{array}{l} \mathcal{P}: A \longrightarrow A \\ \quad a \rightsquigarrow \mathcal{P}(a) = \varphi(a){*}\varphi(a^{-1}) = \varphi(a){*}(\varphi(a))^{-1} = e \end{array}$

é uma função (par) constante e $\begin{array}{l} \mathcal{I}: A \longrightarrow A \\ \quad a \rightsquigarrow \mathcal{I}(a) = \varphi(a){*}(\varphi(a^{-1}))^{-1} = \varphi(a){*}\left((\varphi(a))^{-1}\right)^{-1} = (\varphi(a)\,)^2 \end{array}$

é uma função ímpar, como mencionado no exemplo em 2.12. Assim, pela construção feita mais uma vez em 2.13, temos que $(\mathcal{P} * \mathcal{I})(a) = e * (\varphi(a)\,)^2 = (\varphi(a)\,)^2 = \varphi(a){*}\varphi(a)$. De qualquer modo, se φ não for idempotente, nos vemos impedidos de fazermos a decomposição $\varphi = \mathcal{P} * \mathcal{I}$, onde $\mathcal{P}$ é uma função par e $\mathcal{I}$ é uma função ímpar.

2.15 Exemplo: Se $V(K)$ é um espaço vetorial sobre um corpo K, toda função no conjunto $\mathcal{F}(V(K)\,)$ pode ser escrita como soma de uma função par e uma função ímpar. Os argumentos são os mesmos usados em 2.3.

Toda função $f: V(K) \to V(K)$ em $\mathcal{F}(V(K)\,)$ pode ser escrita na forma $f = p + i$; onde p, definida por $p(v) = \frac{1}{2}\,(f(v) + f\,(-v))$, é uma função par e i, definida por $i(v) = \frac{1}{2}\,(f(v) - f(-v))$, é uma função ímpar.

Os conjuntos idempotentes, nos quais estejam definidas operações que satisfaçam todas as propriedades listadas em 1.1.2, são conjuntos “pequenos” e esse caminho nos impede de darmos um exemplo da decomposição análoga à que relacionamos em 2.3. Deixamos para quem nos acompanhou nas discussões que fizemos até este momento a tarefa de pensar em um exemplo concreto para ilustrar esse resultado. Esse exemplo existe?

Acreditamos que a abordagem feita sobre esse assunto findou por estabelecer que os conceitos de função par e função ímpar são mais gerais. Se for assim, o olhar curioso que pusemos sobre o estudo das funções reais, traduzido pelas várias indagações que fizemos, ratifica a dedicação, o respeito e o sentimento pela pesquisa que tivemos para com este trabalho.

Considerações Finais

As discussões sobre os conteúdos das disciplinas que compõem a grade curricular do nosso mestrado permitiram que pudéssemos perceber alguns aspectos mais gerais e que são inerentes aos objetos matemáticos que relacionamos neste texto.

O ponto de partida e a escolha do tema deste TCC foi uma consequência das investigações e análises que regularmente fazemos sobre o material didático que é disponibilizado para o ensino da Matemática.

Sem fugir do padrão de escrita que comumente é exigido para os trabalhos escritos em nossa área de estudo, começamos relacionando alguns conceitos gerais da teoria dos conjuntos para em seguida descrevermos minimamente a estrutura dos conjuntos numéricos, do conjunto das matrizes e dos polinômios. Isso porque, como fica claro no desenvolvimento deste texto, as propriedades das operações definidas nesses conjuntos estão diretamente ligadas com as propriedades das funções que por ventura possam ser definidas sobre eles.

Acreditamos que, a partir do que estudamos e da leitura deste trabalho, é necessário, sempre que falarmos de funções pares e funções ímpares, especificarmos o domínio em que ela atua ou a operação que está sendo considerada nesse momento. É como no estudo das potências relativas a uma operação definida em um conjunto. Não se deve afirmar que “todo número elevado a zero é igual a 1” ou que "$2^3 = 8$", o que pode ser tolerável, se afirmado por alguém que não vive no mundo da Matemática.

As discussões empregadas na elaboração deste trabalho contribuíram para nos aproximar um pouco mais dos debates sobre as funções. Esse assunto muitas vezes é deixado em segundo plano ou por falta de tempo ou pela aparente abstração que possa ser dada a uma abordagem inicial. A discussão que fizemos é da Matemática para a Matemática. Apesar de o assunto permitir que o relacionasse com a Geometria, observando os aspectos quando as funções estão definidas sobre o conjunto dos números ou relacionemos com os vários problemas de nosso cotidiano, nossa meta, essencialmente, foi observar os aspectos mais gerais que merecem ser considerados para que se possa definir uma função par ou uma função ímpar.

Os “velhos” e os novos conceitos relacionados neste trabalho foram discutidos pelo prof. Marcos Venícios de Almeida Bezerra com os alunos do 3º ano do ensino médio, na Escola Lourival Pinho, situada no 2º distrito da cidade de Rio Branco, no Estado do Acre. O assunto foi passado em dois momentos. Inicialmente, foram tratados os conceitos de funções pares e ímpares definidas em $\mathbb{R}$. No segundo, foram mais exploradas as definições gerais e os exemplos relacionados com operações de multiplicação.

A tabela abaixo mostra o desempenho na avaliação que propusemos para os 31 (trinta e um) alunos que, paralelamente aos seus estudos regulares, receberam o “treinamento” nesse assunto das funções. Vale ressaltar que por conta de atualização da grade curricular, os alunos que participaram do teste não tinham habilidades plenas com matrizes e polinômios.

	Número de acertos	**Número de erros**	**Sem resposta**
Problema 01	23	08	00
Problema 02	25	06	00
Problema 03	20	11	00
Problema 04	19	12	00
Problema 05	21	10	00
Problema 06	20	10	01
Problema 07	19	12	00
Problema 08	16	15	00
Problema 09	16	15	00
Problema 10	17	14	00

O que podemos perceber olhando os números dessa tabela é que, além da desenvoltura nos debates em sala de aula, os alunos demonstram que entenderam razoavelmente bem os conceitos que foram introduzidos. Isso mostra que, dentro de um tempo adequado, trabalhando a contextualização desse tema, podemos obter êxito no processo de ensino e aprendizagem desse assunto.

Referências

[01] ALENCAR FILHO, Edgard de. *Teoria Elementar dos Números*; 2 ed. Nobel; São Paulo (1985).

[02] ANTON, Howard. Cálculo um Novo Horizonte. 6 ed. Vol. 1, Editora Bookman, Porto Alegre-RS (2000).

[03] BOYER, Carl Benjamin. A História da Matemática. 2 Ed. Editora Edgard Blücher, São Paulo (1996).

[04] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto e Aplicações. Vol.1. 2 ed. Editora Ática (2013).

[05] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; *Análise I*; LTC; Ed. Universidade de Brasília; Rio de Janeiro (1975).

[06] GEOGEBRA. Software de Geometria Dinâmica. Disponível Versão 4.4 (2013). Acesso em: 27 de abril de 2016.

[07] GONÇALVES, Adilson. *Introdução à Álgebra*. 5 ed., Rio de Janeiro-RJ; IMPA (2008).

[08] GONÇALVES, Adilson e SOUSA, Rita Maria Lopes de *Introdução à Álgebra Linear*. Ed. Blücher; São Paulo (1977).

[09] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. SBM-Coleção PROFMAT (2013).

[10] HEFEZ, Abramo. *Curso de Álgebra*; vol. 1. 2 Ed. Rio de Janeiro; IMPA (1993).

[11] IEZZI, Gelson & HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar, Vol.4 (Sequências, matrizes, determinantes e sistemas). 7 ed. Atual Editora; São Paulo (2004).

[12] ROQUE, Tatiana. História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Editora Zahar; RJ (2012).

ANEXO I

Universidade Federal do Acre - UFAC

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Teste de Sondagem

Funções Pares e Ímpares
(Generalização de Conceitos)

Prof. Marcos Venícios Almeida Bezerra

Junho

2016

Teste de Sondagem

O presente questionário tem por finalidade verificar as habilidades dos alunos com relação ao tema **Funções Pares e Ímpares**, abrangendo, inclusive, o que foi pensado na verificação da generalização desses conceitos.

Identificação do nível do aluno: Série: 3º ano/Ensino Médio.

PROBLEMAS

01) Pelas definições estudadas podemos afirmar que a função $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow f(x)=-x^2 \end{aligned}$:

a) é par desde que a operação considerada seja a multiplicação dos números.

b) é ímpar desde que a operação considerada seja a adição dos números.

c) é par desde que a operação considerada seja a adição dos números.

d) não é par e nem é ímpar, independentemente da operação definida em $\mathbb{R}$.

e) é ímpar desde que a operação considerada seja a multiplicação dos números.

02) Para definirmos uma função par ou ímpar é necessário que:

a) no conjunto eleito como domínio dessa função esteja definida uma operação de adição.

b) no conjunto eleito como domínio dessa função esteja definida uma operação de multiplicação.

c) os conjuntos eleitos como domínio e contra domínio dessa função sejam iguais.

d) os conjuntos eleitos como domínio e contra domínio dessa função sejam iguais ao conjunto $\mathbb{R}$.

e) no conjunto eleito como domínio dessa função a operação considerada admita a existência de inversos.

03) Olhando para a função $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow f(x)=x^2+x \end{aligned}$ podemos afirmar que :

a) f é uma função par.

b) f é uma função ímpar.

c) f é uma soma de duas funções pares.

d) f é uma soma de duas funções ímpares.

e) f é uma soma de uma função par com uma função ímpar.

04) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau igual a $\partial(f) = 2$. Então, vale que:

a) f é par.

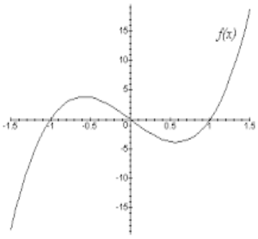
b) f é ímpar.

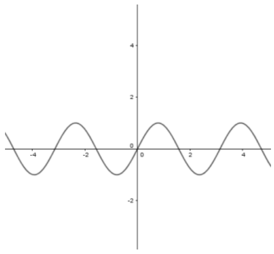
c) se f é uma função par; então sempre temos $f(1) = 1$.

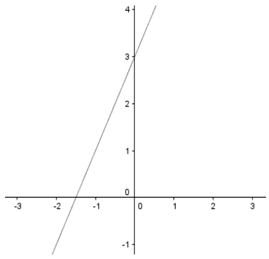
d) se f é uma função par; então sempre temos $f(1) = -1$.

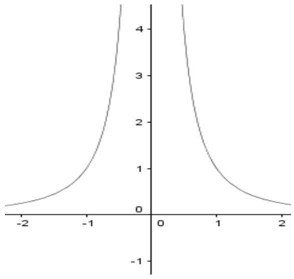
e) mesmo que f seja uma função par; pode ocorrer que $f(0) \neq 0$.

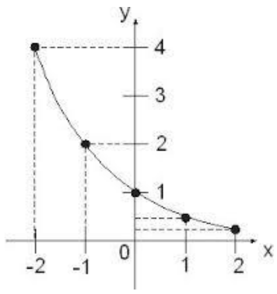
05) Identifique qual dos gráficos abaixo representa uma função real par.

a) 

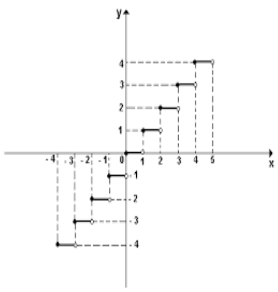
b) 

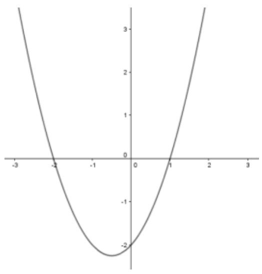
c) 

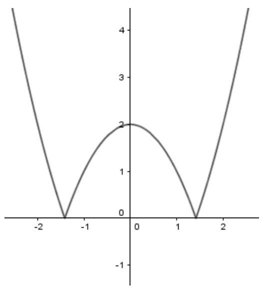
d) 

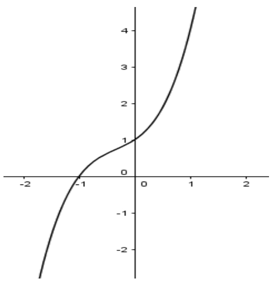
e) 

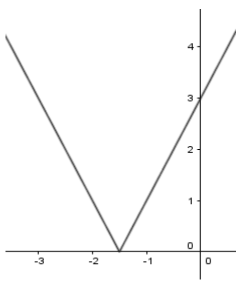
06) Identifique qual dos gráficos abaixo representa uma função real ímpar.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

07) Identifique qual das funções abaixo é par:

a) $\begin{matrix} tr: \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \rightsquigarrow tr(A) = a_{11} + a_{22}. \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} det: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \rightsquigarrow det(A); \end{matrix}$ onde $\mathcal{M} = \{A \in M_4\ (\mathbb{R})\ /\ A$ é inversível$\}$.

c) $\begin{matrix} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x) = x^2 + x. \end{matrix}$

d) $\begin{matrix} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow g(x) = x^3. \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow h(x) = x. \end{matrix}$

08) Identifique qual das funções abaixo é ímpar:

a) $\begin{matrix} det: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \rightsquigarrow det(A); \end{matrix}$ onde $\mathcal{M} = \{A \in M_3\ (\mathbb{R})\ /\ A$ é inversível$\}$.

b) $\begin{matrix} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x) = 2x^2 - 6. \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow g(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{matrix}$

d) $\begin{matrix} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x) = x^6. \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} \partial: P_2(x) \longrightarrow \mathbb{N} \\ f \rightsquigarrow \partial(f); \end{matrix}$ onde $P_2(x) = \{a_0\ +\ a_1x\ +\ a_2x^2 /\ a_i\ \in \mathbb{R}, \forall\ i \in\ \{0, 1, 2\}\}$.

09) De acordo com o que você estudou sobre as funções reais, temos que uma função real $\begin{matrix} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow f(x) \end{matrix}$ é ímpar se, e somente se,

a) $f(x) = -f(x)$.

b) $f(x) = -f(-x)$.

c) $f(x) = f(-x)$.

d) $f(x) = f(x)^{-1}$.

e) $f(x) = f(x^{-1})$.

10) De acordo com o que você estudou sobre as funções, dependendo da estrutura do conjunto A, temos que uma função $\begin{matrix} f: A \longrightarrow A \\ a \rightsquigarrow f(a) \end{matrix}$ é par se, e somente se,

a) $f(a) = f(a^{-1})$.

b) $f(-a) = f(a)^{-1}$.

c) $-f(a) = f(a^{-1})$.

d) $f(-a) = -f(a^{-1})$.

e) $f(a) = f(-a^{-1})$.