UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA-UESB

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS-DCET

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA– PROFMAT

DANIEL DE JESUS SILVA

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS: ESTUDO DE ÁREAS DE REGIÕES PLANAS REGULARES E IRREGULARES

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA-UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS-DCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA– PROFMAT

DANIEL DE JESUS SILVA

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS: ESTUDO DE ÁREAS DE REGIÕES PLANAS REGULARES E IRREGULARES

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva.

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA
2016

S578u Silva, Daniel de Jesus.

A utilização da história da matemática em atividades investigativas: estudo de áreas de regiões planas regulares e irregulares/ Daniel de Jesus Silva, 2016.

103f.: il.; algumas color.

Orientador (a): Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Vitória da Conquista, 2016.

Referências: f. 89-92.

1.História da Matemática. 2.Atividade investigativa – Ensino-aprendizagem. 3. Cálculo de áreas. I. Silva, Maria Deusa Ferreira da. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 510.7

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção – CRB 5/54-P
UESB – Campus Vitória da Conquista-BA

DANIEL DE JESUS SILVA

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS: ESTUDO DE ÁREAS DE REGIÕES PLANAS REGULARES E IRREGULARES

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva (Orientadora e presidente da banca)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

____

Profa. Dra. Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires
Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS

____

Profa. Dra. Maria Aparecida Roseane Ramos
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Vitória da Conquista, 04de março de 2016

Dedico este trabalho a todos meus alunos, desde quando atuei como estagiário até os que porventura virem a ser aluno ao logo da minha atuação docente. Estes foram a principal motivação para esta realização. Também a todos professores de matemática que fazem de sua carreira uma contínua formação em prol de uma educação de qualidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Jeová, o verdadeiro Deus, pela presença constante em minha vida, direcionando sempre meu caminho.

À Profa. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva, minha orientadora, pelas suas instruções, incentivos e cobranças para a conclusão desta dissertação.

A todos os docentes da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia que lecionaram no Profmat, proporcionando momentos de profunda reflexão e conhecimento na minha formação como professor.

Aos colegas de mestrado, pelo apoio, cumplicidade e companheirismo. Em especial o companheiro das viagens, o amigo Prof. Me. Antônio Carlos.

Aos colegas da Universidade do Estado da Bahia - *Campus* VI, especialmente, os do Colegiado de Matemática.

Aos meus alunos, pela valorização e comentários edificantes que me impulsiona nessa carreira.

Aos meus amigos que sempre expressaram crença em minha potencialidade.

Um agradecimento especial à Profa. Ma. Sandra Alves de Oliveira, que colaborou para a concretização deste trabalho de forma indescritível, proporcionando-me aprendizado não só acadêmico, mas acima de tudo humanístico.

Enfim, a todos que acreditaram em mim, com palavras de força e coragem, para que continuasse nesta caminhada.

A descoberta é fundamental no ensino da matemática, pois, como sabemos, essa disciplina inspira medo aos alunos e foge dela quem pode. No entanto, quando o aluno consegue fazer descobertas, as quais, na verdade, são redescobertas, então surge o gosto pela aprendizagem... e nenhuma área tem precisado mais que a matemática fazer com que seus alunos gostem dela.

Sérgio Lorenzato

RESUMO

As mudanças que desejamos que aconteçam no contexto educacional trazem consigo metodologias inovadoras, incluindo a História da Matemática em Atividades Investigativas em sala de aula como possibilidade metodológica usada na disciplina de matemática. Esta pesquisa trata-se de um estudo de natureza qualitativa que analisou como o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas pode contribuir para a construção do conhecimento de cálculo de áreas no ensino básico e superior. Os referenciais teóricos que embasaram a investigação estão ancorados nos estudos a respeito da História da Matemática em Atividades Investigativas e do estudo de áreas de regiões planas. A participação do pesquisador e de 13 estudantes do quinto semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Ciências Humanas (DCH) – *Campus* VI da Universidade do Estado da Bahia (UNEB) alicerçou a pesquisa. Os dados foram coletados e analisados por meio da utilização dos seguintes instrumentos e procedimentos metodológicos: observações, relatórios, questionário, desenvolvimento da atividade "Ressignificando o cálculo de áreas" que se constituiu em desafio, utilizando sempre material concreto. A análise dos dados indica que o elo da História da Matemática com a Investigação Matemática pode ser utilizada para trabalhar conteúdos matemáticos e auxiliar na interação social entre estudantes e professores, buscando constantemente o crescimento integral do aluno. Para desenvolver uma aprendizagem eficaz, o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas deve ser criteriosamente planejado, a fim de que possam auxiliar na compreensão do conteúdo a ser estudado. Espera-se por meio deste trabalho que o professor de matemática possa compreender a importância do uso coerente da História da Matemática em Atividades Investigativas em sala de aula, admitindo-os como ferramentas importantes que auxiliam a sua prática pedagógica para tornar o estudo de matemática mais prazeroso, instigante e o seu aprendizado mais efetivo, contribuindo desta forma para desconstruir o preconceito de que a matemática constitui-se em uma disciplina difícil demais para ser compreendida pelos estudantes.

Palavras-chave: História da Matemática. Atividade Investigativa. Cálculo de áreas. Ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

The changes that we want take place in educational settings bring with innovative methodologies, including the History of Mathematics in Investigative Activities in the classroom as methodological possibility used in the mathematical discipline. This research deals with is a qualitative study that examined how the use of the History of Mathematics in Investigative activities can contribute to the building of the areas of knowledge in the calculation of basic and higher education. The theoretical frameworks that support research are anchored in the studies on the history of mathematics in Investigative Activities and study areas of flat regions. The participation of researchers and 13 students of the fifth semester of the Bachelor's Degree in Mathematics from the Department of Human Sciences (DCH) - *Campus* VI State University of Bahia (UNEB) its foundations research. Data were collected and analyzed through the use of the following methodological tools and procedures: observations, reports, questionnaire development activity "giving new meaning to the calculation of areas" which constituted challenge, always using concrete material. Data analysis indicates that the link in the history of mathematics with mathematics research can be used to work mathematical content and assist in the social interaction between students and teachers, constantly seeking the integral growth of the student. To develop effective learning, the use of the History of Mathematics in Investigative activities should be carefully planned, so that can help them understand the content being studied. It is hoped through this work the math teacher can understand the importance of consistent use of the History of Mathematics in Investigative Activities in the classroom, acknowledging them as important tools to help their practice to make the study of mathematics more enjoyable, thought-provoking and its most effective learning, thus contributing to deconstruct the prejudice that mathematics is in a difficult discipline too much to be understood by students.

Key-words: History of Mathematics. Investigative activity. Area calculation. Teaching and learning.

LISTA DE SIGLAS

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

DCET - Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

DCH – Departamento de Ciências Humanas

ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática

GPHM - Grupo de Pesquisa em História da Matemática

IEAT - Instituto de Educação Anísio Teixeira

PARFOR - Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

TEM – Tendências na Educação Matemática

UESB - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

UNEB - Universidade do Estado da Bahia

UNESP – Universidade Estadual de São Paulo

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

LISTAS DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Considerando que a aprendizagem é constituída pelo processo interativo, para proporcionar uma melhor compreensão dos enunciados de problematizações matemáticas, bem como do meio social e do mundo, é importante que o professor esteja munido de estratégias que possibilitem o desenvolvimento de seus alunos enquanto sujeitos ativos, interativos e construtores de conhecimento. Assim, os alunos precisam ser motivados a produzir conhecimento e não apenas a consumir conhecimento previamente preparado. Escutar, copiar, decorar, fazer exercícios mecânicos, fazer provas; essa tem sido a rotina da grande maioria dos alunos na educação básica, e também continua em nossas universidades, o que resulta na formação de profissionais com dificuldades de responder aos desafios postos pela sociedade.

Nesse sentido Moreira e David (2007, p. 101) apontam que, “o processo de formação na licenciatura em Matemática pode se articular com a prática docente escolar de diferentes formas e em diversos sentidos”.

As experiências vivenciadas no contexto educacional, tanto como estudante do curso de Matemática do Departamento de Ciências Humanas (DCH) - *Campus* VI da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), no período de formação docente, quanto como professor de matemática na educação básica e superior,possibilitaram perceber que nas aulas de matemática há muitos alunos desmotivados, com pouco interesse pela aprendizagem. Isso os leva a um baixo rendimento nas avaliações. A superação desse quadro exige um contínuo esforço, cujo passo inicial é uma nova compreensão do processo formativo e da prática pedagógica de professores que ensinam na educação básica e também superior.

Em face dessa realidade, o professor deve assumir um papel decisivo: continuar com o foco de ensinar como mero reprodutor do conhecimento, ou passar a se preocupar com o aprender significativo, em que a motivação pelo saber está entrelaçada com a visão crítica do que se estuda. Dessa forma, o professor precisa abrir caminhos para uma prática que leve para a construção do conhecimento, tanto para o docente como para o discente.

Nesse sentido, segundo Moreira e David (2007, p. 45), “é importante pensar a questão da complementaridade entre os saberes da formação e as questões da prática”.

Nas últimas décadas, as pesquisas publicadas no campo da Educação Matemática tem aberto um leque de possibilidades para a mudança da prática docente. No bojo dessas pesquisas se consolidaram as *Tendências da Educação Matemática* (Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Etnomatemática, História da Matemática, Investigação Matemática, Jogos Matemáticos, etc) que propiciam a cada docente analisar, refletir e adotar em sua prática pedagógica a que melhor se adéqua ao processo ensino-aprendizagem de matemática.

Segundo Beatriz D’Ambrosio (1989, p. 18-19), “o mais interessante de todas essas propostas é o fato de que elas se complementam. A melhoria do ensino de matemática envolve, assim, um processo de diversificação metodológica”.

Dentre as Tendências da Educação Matemática destacamos neste trabalho, o uso da *História da Matemática* e da Investigação Matemática, uma vez que vemos na conexão entre ambas, uma aliada no processo de construção do conhecimento matemático, sem perder de vista os aspectos formais desse conhecimento, ou seja, a formalização dos conceitos matemáticos envolvidos.

De acordo com Beatriz D’Ambrosio (1989, p. 17), “a história da matemática tem servido para alguns pesquisadores como motivação para o trabalho com o desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos”. Para que esta seja mais uma fonte em potencial para os educadores preocupados em possibilitar novas perspectivas ao ensino de matemática, é necessário compreender toda riqueza de possibilidades que há no trabalho que envolve o uso da *História da Matemática* em Atividades Investigativas em sala de aula.

Não se trata de mero uso de fatos históricos, mas de propor desafios reconstruindo o desenvolvimento da matemática, ao tempo em que se constrói o conceito matemático envolvido. Isso se insere em uma prática educativa que acredita que os discentes não aprendem por mera repetição, mas a partir do processo construtivo, percebendo os caminhos que levaram à construção as necessidades e processos que impulsionaram, sistematizaram e formalizaram os conteúdos estudados em sala de aula.

O interesse pela temática desta pesquisa foi se firmando ao longo da formação docente, no curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* VI/UNEB -

Caetité-BA[1], especialmente durante a realização do Estágio Supervisionado nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio, em que tive um contato mais direto com a sala de aula. Neste contexto, percebemos a falta de conexão entre a teoria apresentada e a prática, o que criava nos alunos uma ideia de matemática meramente abstrata e sem utilidade prática.

Neste momento, surgiram os primeiros questionamentos sobre a necessidade de utilização de propostas de trabalho para o processo ensino-aprendizagem consistente e de uma prática pedagógica diferenciada.

Terminado o curso de graduação no ano de 2008, surgiu a oportunidade de lecionar na Educação Básica, no Instituto de Educação Anísio Teixeira (IEAT)[2]. As dúvidas quanto à metodologia e como fazer para que a teoria e a prática não ficassem separadas começaram a se fazer mais presentes. Ainda nesta fase realizei meus primeiros experimentos com vistas à mudança, realizando uma atividade com jogos para alunos do 8º ano do ensino fundamental. Os resultados dessa experiência foram compartilhados como relato de experiência no X ENEM[3].

Já como professor no Ensino Superior, do *Campus* VI/UNEB passeia vivenciar as mesmas inquietudes, uma vez que sentia acentuada dificuldade quanto à articulação entre teoria e prática. Além disso, surgiram também dúvidas quanto à melhor forma de orientar os alunos de licenciatura em relação à sua futura ação docente.

Após refletir sobre o papel do professor e sua metodologia realizei uma nova experiência[4], todavia, sem uma investigação mais criteriosa. A experiência consistiu no emprego de uma metodologia de ensino respaldada no uso de material concreto manipulável onde a investigação matemática se fez presente. Foi realizada na disciplina Cálculo II no programa PARFOR - Plataforma Freire[5], para alunos de licenciatura em Matemática. Pude observar que as aulas ficaram bem mais

---

[1]Caetité é um município que está situado na mesorregião da Região Centro-Sul da Bahia. Está distante 645 quilômetros a sudoeste de Salvador. Sua população estimada, em 2015, segundo dados do IBGE, é de 52.531 habitantes.
[2]Instituto de Educação Anísio Teixeira - Escola pública do Estado da Bahia localizada na cidade de Caetité.
[3]X ENEM - X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador-BA, 2010.
[4]Relato de Experiência publicado nos Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba-PR.
[5]Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica “em exercício na rede pública de educação básica, para que estes profissionais possam obter a formação exigida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e contribuam para a melhoria da qualidade da educação básica no País”.
Outras informações no site: http://www.capes.gov.br/educacao-basica/parfor

interessantes, motivadoras e, acredito, ter atingido os objetivos de aprendizagem mediante as situações propostas.

No período de graduação tive a oportunidade de aprofundar teoricamente as Tendências em Educação Matemática. Porém, identifiquei mais com jogos e investigação em sala de aula por propiciarem momentos de desafios e descobertas. Contudo, percebi a necessidade de melhorar minha formação acadêmica, tanto em forma como em conteúdo.

Assim, ingressei no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), *Campus* de Vitória da Conquista-BA, em 2013. Como discente do PROFMAT[6], curso que visa atender, especialmente, professores de matemática em exercício na educação básica de escolas públicas, passei a me questionar de que forma poderia contribuir com esse nível de ensino. A resposta a esse questionamento veio ao cursar no mestrado a disciplina Tópicos em História da Matemática, onde pude refletir sobre as ricas possibilidades apresentadas que despertou em mim o interesse em desenvolver esta pesquisa que visa colaborar com a formação dos professores de matemática para que estes também possam refletir sobre suas práticas pedagógicas, a partir da utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas, em especial no processo de ensino do cálculo de áreas regulares e irregulares, sendo também uma preparação para o ensino de Cálculo Integral.

Nesta perspectiva, optamos pela realização desta pesquisa que envolve o uso da História de Matemática em Atividades Investigativas. Assim, como pergunta diretriz consideramos: **Como o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas pode contribuir para a construção do conhecimento de cálculo de áreas no ensino básico e superior?**

Assim, com o intuito de investigar como a metodologia de aprendizagem por meio de História da Matemática em Atividades Investigativas pode contribuir para a construção do conhecimento de cálculo de áreas, definimos os objetivos deste trabalho.

---

[6]Pós-graduação *stricto sensu* para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica. Programa semipresencial, com bolsas CAPES para professores em exercício na rede pública.
Outras informações no site: http://www.profmat-sbm.org.br

1.1. Objetivos

Objetivo Geral:

- Investigar comoo uso da História da Matemática em Atividades Investigativas favorece a aprendizagem de conceitos e definições de cálculos de áreas de regiões planas regulares e irregulares.

Objetivos específicos:

- Conhecer as origens da necessidade do cálculo de áreas.
- Perceber a matemática como criação humana.
- Analisar os fatores que contribuíram para a formalização de regras e fórmulas para calcular áreas de diversas regiões planas.
- Caracterizar a prática pedagógica do professor que utiliza a História da Matemática em Atividades Investigativas na sua atuação docente.
- Utilizar recursos manipuláveis para calcular áreas na atividade “Ressignificando o cálculo de áreas”.
- Verificar a contribuição da metodologia pautada em uso da História da Matemática em Atividades Investigativas para a construção do conhecimento de cálculo de áreas.

1.2. Estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em seis capítulos.

O primeiro capítulo aponta para a necessidade de uma mudança de postura do professor comprometido com a educação por adotar uma metodologia que estimule a aprendizagem dentro da sala de aula, especificamente tratando de cálculo de áreas de figuras planas regulares e irregulares. Aponta as motivações e questionamentos que direcionam toda a pesquisa, respaldado nos objetivos listados que serviram para nortear esse trabalho.

O capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica que traz uma abordagem histórica da sistematização e formalização do cálculo de áreas de regiões planas, bem como o aporte para investigações em sala de aula, por meio de uma metodologia baseada em registros históricos deixados pelos povos antigos, fazendo um elo entre teoria e prática do conteúdo cálculo de áreas ministrado atualmente em sala de aula.

O capítulo 3 aponta a metodologia empregada para efetivar a investigação em sala de aula do tema proposto. Neste há uma descrição de preparação e desenvolvimento de uma Atividade Investigativa pautada na História da Matemática que teve suporte de um material concreto de baixo custo. Dados foram coletados por meio de um questionário formulado, baseado nos objetivos específicos, após a realização de toda a atividade e também relatórios de registros feitos durante as atividades, a fim de analisar a eficiência da metodologia proposta.

O capítulo 4 descreve as primeiras análises da pesquisa com o desenvolvimento da proposta História da Matemática em Atividades Investigativas, por meio da atividade intitulada "Ressignificando o cálculo de área", numa turma que cursava a disciplina Cálculo II. Esta proposta se assenta em dois eixos: o do contexto social da atividade matemática em sala de aula e o da "*reinvenção*" da fórmula geral de resolução de uma necessidade de calcular a área sob uma curva.

O capítulo5 analisa os dados colhidos e faz reflexões acerca da proposta e no último capítulo são feitas considerações acerca dos momentos experienciados neste trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos o referencial teórico utilizado na discussão da temática da pesquisa. Consultamos artigos científicos, livros, dissertações e teses para conhecer e aprofundar o que já se tem pesquisado ou estudado sobre o tema desta pesquisa.

Para Araújo e Borba (2006, p. 41), "é a revisão da literatura, na qual o pesquisador situa seu trabalho no processo de construção de conhecimento". Dessa forma, a revisão bibliográfica realizada nesta pesquisa possibilitou uma melhor definição do objeto de estudo e do delineamento do referencial teórico a ser utilizado para a compreensão do fenômeno investigado.

Na fundamentação teórica apresentada neste capítulo discorremos sobre o contexto histórico do cálculo de áreas como possibilidades para investigações em sala de aula mediante o estudo das áreas do trapézio, do círculo e sob curvas delimitadas por retas, levando em consideração a contribuição de antigas civilizações e de ilustres personagens da história da Matemática.

2.1Cálculos de áreas: dos primórdios da história para sala de aula

> [...] na maioria das salas de aulas, o ensino de matemática [...] é apresentado aos alunos como um corpo linear de conhecimentos muito bem estruturado. Em pouquíssimas situações os alunos são envolvidos em uma metodologia de ensino que os levem a uma visão epistemológica do conhecimento matemático; em que possam traçar a trajetória do conhecimento matemático produzido; seja a partir de situações práticas, da resolução de problemas ou de situações que retomem a fatos históricos interessantes. (SILVA, 2010, p.33-34)

No que diz respeito ao ensino de cálculo de áreas de regiões planas regulares e irregulares, faz-se necessário apresentar algumas considerações que impulsionaram a formalização de regras e fórmulas. De acordo com Silva (2010), a sensação é que os cursos de Cálculo sobrecarregam os estudantes com um amontoado de regras sobre limites, derivadas e integral, que eles decoram por repetidas vezes, aplicá-los para responder exercícios padronizados. Atualmente seguem a sequência organizada dos conteúdos: funções, limites, derivadas e integral, dando a falsa impressão que um, é pré-requisito para compreender o posterior. Porém, historicamente, a sistematização desses conteúdos não ocorreu nessa ordem. O desenvolvimento do conceito de integral e derivada antecedeu aos estudos de funções e limites. Assim, "o uso correto da história pode ser um agente de cognição no ensino-aprendizagem de matemática".(SILVA, 2010, p.233).

A matemática e sua estruturação para ser ensinada em sala de aula da educação básica ao ensino superior são resultados da criação humana que teve a participação de muitos povos durantes vários séculos.

Calabria (2014) afirma que as primeiras civilizações surgiram entre 3500 e 500 a.C., próximas as regiões de vales de rios. Dentre essas civilizações, está o Egito, a Mesopotâmia, a China e o Vale do Indo, todas dependentes da agricultura, de sistemas de irrigação e da astronomia, atividades que influenciaram o formalização da Matemática nessas culturas.

A sociedade sofreu ao longo de sua existência profundas transformações; passou por avanços no campo da ciência e da tecnologia, que provocaram um grande impacto em nossas vidas. Esses avanços são frutos de uma matemática que foi se formando e sendo organizada. Quando essa "matemática" começou? Boyer (1996, p. 4) comenta que "Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas".

Heródoto (484 a.C – 425 a.C), segundo Boyer (1996),aponta que a geometria se originou no Egito, pela necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual do vale do rio Nilo. Enquanto que Aristóteles (384 a.C – 322 a.C) achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é o que tinha conduzido ao estudo da geometria. Percebemos das ideias de ambos os historiadores, duas visões a respeito da origem dessa matemática (origem na prática e origem no lazer). Atualmente, pesquisas em Educação Matemática, mostram que agregando essas duas ideias, fortalece e otimiza a prática docente.

Assim, a junção da necessidade prática com ações prazerosas se constitui em base para um bom processo de ensino e aprendizagem, e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 32) ressaltam que:

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, de Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática.

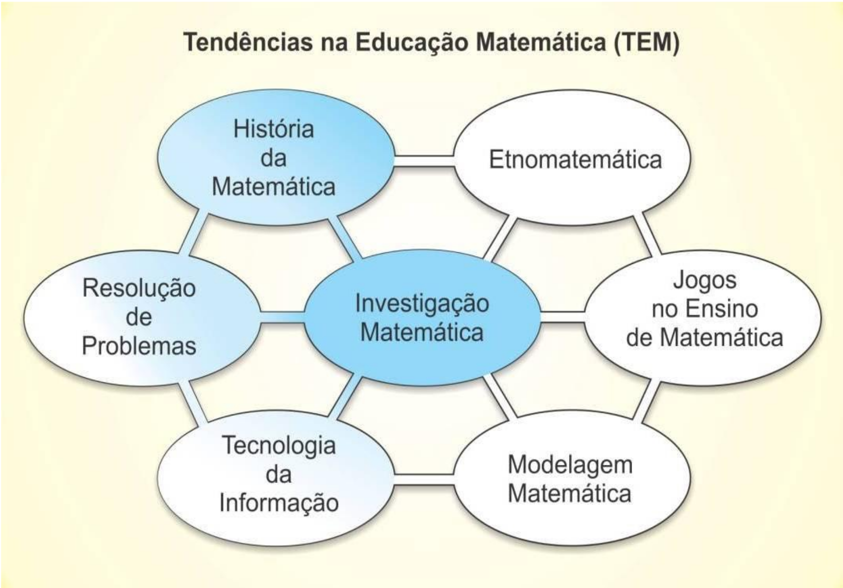
Para tanto as pesquisas em Educação Matemática, que levou a constituição das várias Tendências da Educação Matemática, nas últimas décadas, têm promovido essas diferentes possibilidades. Destacamos o uso da História da Matemática interligada a Investigação em sala de aula, como uma delas.

Assim, a história da matemática, como proposta metodológica da educação matemática, segundo Müller (2000, p. 139), "possui como fulcro o despertar da curiosidade do aluno, motivando-o para o trabalho e para a compreensão dos conceitos matemáticos, a partir do seu desenvolvimento histórico".

Nessa perspectiva, Silva (2010, p. 15) ainda reforça que "sem a dimensão histórica a compreensão dos fatos fica cheia de vieses que dificultam uma visão mais ampla e crítica dos acontecimentos do passado e o entendimento do presente".

Com base nisso, vemos que as pesquisas em Educação Matemática estão interligadas formando uma teia como mostra a Figura 1, a seguir.

Figura 1 - Relação entre as TEM



Fonte: Elaborada pelo autor

Embora o professor possa ter afinidade a uma determinada tendência, todas elas estão em conexão. O ideal é que o professor centralize a tendência que pretende usar em seus trabalhos de sala de aula e as demais devem ficar interligadas a esta, à disposição para serem usadas concomitantemente, ou como auxiliar de forma convenientemente, ao desenvolvimento de atividades didáticas. A depender da aplicação do mediador essas tendências ganham maior ou menor destaque.

Na Figura 1 as Tendências de maior destaque neste trabalho estão destacadas na cor azul. No centro está a Investigação em sala de aula em forte conexão com a História da Matemática que é usada concomitantemente para fazer um estudo de áreas de regiões planas regulares e irregulares. Durante o desenvolvimento da Atividade Investigativa com o uso da História da Matemática aparecem características da tendência Resolução de Problemas e com pouquíssima intensidade o uso de tecnologia no ensino, as quais não fazem parte das nossas discussões centrais.

Sendo assim, a história da matemática oferece a importante possibilidade de uma maior compreensão de conceitos matemáticos em sala de aula, por meio de estudos da construção histórica deles. Segundo Miguel e Miorim (2004), a história da matemática, além de constituir um espaço privilegiado para a seleção de problemas, pode propiciar outras situações de ensino, tais como o desenvolvimento de atitudes e valores matemáticos, o resgate da identidade cultural, o entendimento das relações entre tecnologia e herança cultural, aguçar o olhar sobre os objetos matemáticos, a sugestão de abordagens diferenciadas e a compreensão de obstáculos encontrados pelos alunos.

Além disso, o uso da história no processo de ensino-aprendizagem da matemática também possibilita a desmistificação dessa ciência e estimula a não alienação do seu ensino. Percorrer os passos do desenvolvimento histórico de um conceito pode auxiliar o trabalho investigativo em sala de aula, pois em muitos momentos o aluno pode ter dificuldades semelhantes àquelas por quais passaram os matemáticos no passado.

Assim, nas últimas décadas essas discussões ganharam forças e diversos pesquisadores em educação tem estudado a inserção da história da matemática em sala de aula. Miguel e Miorim (2004, p. 15), afirmam:

> Temos presenciado nos últimos anos ampliações da presença do discurso histórico em produções brasileiras destinadas à Matemática escolar, dentre as quais encontram-se os livros didáticos, os livros paradidáticos e as propostas elaboradas por professores individuais, por grupos de professores, por escolas ou órgãos governamentais responsáveis pela elaboração de diretrizes para os ensinos fundamental, médio e superior.

Sendo a educação institucional de responsabilidade do Estado, a proposta governamental formalizada nos PCN's contém a caracterização do *Quadro atual do ensino de Matemática no Brasil*, e apresenta a seguinte avaliação do tratamento que tem sido dado ao discurso histórico em nosso país:

> Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos da ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol dos conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 1997, p.23).

Portanto, a história da matemática não deve ser tratada apenas como um conteúdo anedótico ou centrado na biografia de seus personagens, pois seria insuficiente para o processo de ensino-aprendizagem. Assim, conforme Miguel e Miorim (2004), a apresentação de tópicos da história da matemática em sala de aula, tem sido defendida por pesquisadores em Educação Matemática, que recorrem à categoria psicológica da motivação para justificar a importância dos passos percorridos na criação de conceitos.

Em consonância com os PCN's (BRASIL, 2001, p.45) que afirmam: "a História da Matemática, juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, podem oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática", fazermos o estudo de "áreas de regiões planas regulares e irregulares", utilizando uma metodologia respaldada na História da Matemática em Atividades Investigativas, esclarecerá aos alunos as ideias matemáticas construídas para responder a alguns "porquês" sobre os objetos de conhecimento matemático.

Neste contexto, dentre os recursos usados para ensinar formalmente matemática, encontra-se o mais conhecido em sala de aula: o livro. Atualmente, no Brasil, a denominação "livro didático" geralmente é restrita a livros de uso escolar para o ensino básico (ensino fundamental e ensino médio), e "livro-texto" é, em geral, restrito aos livros de uso no ensino superior. Ponderando sobre essa distinção no ensino de matemática, Schubring (2003, p. 4) afirma:

> A diferenciação começou por cima, no nível "superior", e que os níveis "inferiores" foram estabelecendo só muito mais tarde. A concepção de éléments ou de livres élémentaires, como elaborada na França na segunda metade do século XVIII, visa ao projeto de tornar elementar o saber, de fazê-lo ensinável, sem privilegiar um determinado nível de ensino.

Assim, o livro, em todos os níveis de ensino é um suporte para estudar a geometria que integra a matriz curricular nas instituições. Mas, como o ensino da geometria foi sistematizado e formalizado? A forma como esse conteúdo está disposto nos livros favorece seu ensino? A geometria inicialmente foi utilizada pelas primeiras civilizações em atividades do dia a dia para resolver problemas na medição de áreas de terras ou na construção de obras arquitetônicas e de engenharia. Daí a origem da palavra Geometria que, em grego, significa “medir terras” (geo – terra/ métron – medir).

Após alguns séculos, a civilização grega percebeu que os conhecimentos geométricos não eram apenas de utilidade prática, mas também poderiam ser compreendidos por meio de uma teoria, ou seja, a partir dos gregos que a validade de conhecimentos desse ramo da matemática começou a ser demonstrada utilizando-se o raciocínio lógico-dedutivo, ganhando forma para ser ensinada institucionalmente. Percebemos que nos primeiros pensamentos geométricos de algumas civilizações antigas os gregos se apoiaram para sistematizar a geometria. A título de exemplo “a história tradicional nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Talles de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.C. e sido influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios”. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 60).

De acordo com Murari (2009), devido o ensino de geometria não ser priorizado, vários pesquisadores como Perez (1991), Pavanello (1993) e Lorenzato (1995), têm buscado compreender quais fatores contribuem para que o ensino de geometria fique em segundo plano.

Os resultados das pesquisas de Lorenzato (1995) e Perez (1991) convergem ao retratar a insegurança dos professores e seu despreparo ao expor os conteúdos de geometria, bem como justificam não haver tempo suficiente durante o ano letivo para trabalhar tais conteúdos apresentados no final do livro didático. (MURARI, 2009). De acordo com Fonseca et al. (2005, p. 22), “o conteúdo de Geometria aparece sempre no final, dando a entender que é um estudo deixado para o final do ano letivo”.

Além da omissão do ensino de geometria, a literatura mostra também que muitos professores ficam confusos quanto “o que fazer” e “como fazer”. Esse fato foi constatado no Estágio Supervisionado na graduação e na atuação como professor do ensino básico no período de 2009. Foi possível observar, tematizar e discutir experiências e conhecimentos sobre a geometria e o seu ensino.

A partir dessas reflexões, o que a literatura fala da geometria? Como podemos usar a história da geometria para ministrar aulas investigativas?

Levando em consideração os materiais escritos preservados, há dificuldades em localizar no tempo as descobertas feitas, e se sabe mais sobre a matemática dos antigos babilônios e egípcios, do que dos chineses e indianos. Um dos mais antigos e importantes textos matemáticos Chinês é o Jiuzhang Suanshu - Nove Capítulos da Arte Matemática que traz cálculos orientados, com teoria e prática ligadas numa sequência de problemas aplicados. Escrevendo sobre este texto, Eves (2011, p. 243) ressalta:

> O trabalho que é rico em conteúdo, consta de 246 problemas sobre agricultura, procedimentos em negócios, engenharia, agrimensura, resolução de equações e propriedades de triângulos retângulos. No Problema 36 do capítulo I a área de um segmento circular de base b e *sagitta* (altura) s é dada pela fórmula empírica $s(b+s)/2$. Para um semicírculo a fórmula empírica leva ao valor aproximado 3 para π.

No capítulo 1 há questões de agrimensura, com regras corretas para as áreas do triângulo, do trapézio e do círculo e com aproximações para o círculo dadas por $(3/4)d^2$ e $(1/12)c^2$, onde se toma π como 3. No capítulo 4 há determinação de lados de figuras, incluindo cálculos de raízes quadradas e cúbicas. Já no capítulo 5 trata de volumes e no capítulo 9 aborda triângulos retângulos pitagóricos. Neste sentido, Boyer (1996, p. 134) comenta:

> Nas obras chinesas, chama a atenção à justaposição de resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. São usadas regras corretas para as áreas de triângulos e trapézios. A área do círculo era calculada tomando três quartos do quadrado sobre o diâmetro ou um doze avos do quadrado da circunferência-resultado correto se adota o valor três para π- mas para a área do segmento os Nove Capítulos usa o resultado aproximado $s(s+c)/2$, onde s é a seta (isto é, o raio menos o apótema) e c a corda ou base do segmento.

Eves (2011) relata que vários matemáticos dedicaram à tarefa de calcular π, a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. No breve comentário de Liu Hui sobre os *Noves Capítulos sobre a Arte da Matemática* chamado *Manual de Matemática da Ilha Marítima*, encontra-se algum material sobre mensuração, com a relação $3,1410 < \pi < 3,1427$, que aos poucos foi ganhando casas decimais mais precisas.

Calabria (2014) comenta que o *Jiuzhang Suanshu* foi complementado por vários matemáticos chineses, os mais famosos incluindo Liu Hui (em 263 d.C.) e Li Chunfeng (em 656 d.C.). A edição publicada pelo governo Song do Norte foi o primeiro livro de Matemática do mundo e fazendo uma análise histórica de livros de matemática, Schurbring (2003, p. 26) confirma:

> Historicamente a primeira lista oficial de livros-texto autorizados de matemática foi estabelecida na china no ano 656. Essa lista é conhecida como os Dez manuais matemáticos ou como os Dez clássicos (Suanjingsuanshu), sendo esses livros em parte consideravelmente mais antigos. Provavelmente o mais antigo e conhecido dos Dez clássicos seja Jiuzhangsuanshu (Nove capítulos sobre a Arte de Calcular). A tradição da matemática chinesa está fundamentada nesse manual, e ele teve um impacto na Ásia, comparável apenas ao de Euclides no Ocidente. Esse manual é uma coleção de 246 problemas.

Atualmente está traduzido em várias línguas, incluindo japonês, russo, inglês e francês, e tornou-se a base para a Matemática Moderna.

Outros registros valiosos que sustentam conteúdos estudados no nosso dia a dia advêm dos babilônios. A civilização mesopotâmica que é provavelmente a mais antiga do mundo começou por volta de 3500 a.C. A Mesopotâmia, atual Iraque, é uma faixa de terra formada entre os rios Tigre e Eufrates. Essa civilização criou um meio de escrita e a deixou registrada em tábulas de argila com o uso de agulhas. No que se refere a isso, Schubring (2003, p. 22), declara:

> Parece que o ensino institucionalizado da matemática surgiu primeiro na Mesopotâmia. Desde a mais primitiva era proto-suméria e desde a invenção da escrita, mesmo antes de 3000 a.C., há evidências amplas de ensino institucionalizado. Por volta de 2500 a.C., apareceram os escribas; o centro institucionalizado para sua formação e atividade era chamado *edubba* (casa dos tabletes). Um grande número de tabletes cuneiformes com certos textos matemáticos foi preservado, em particular alguns do período paleobabilônicos clássico (2000 a 1600 a.C.).

Escavações arqueológicas já desenterraram na Mesopotâmia mais de meio milhão de tábulas de argila, das quais 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, constituídas por listas de problemas matemáticos. Uma das mais famosas é a Tábula Plimpton 322 (1900-1600 a.C.). Nessas tábulas continham as ideias de geometria dos babilônios, com diversos problemas de cálculo de áreas onde fica evidente que a geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática.

Já os antigos Egípcios contribuem com registro em papiros que trazem inúmeros problemas matemáticos. Dos 110 problemas dos papiros Moscou e Rhind, 25 são geométricos. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessária para o cálculo de questões relativas à medição de terras e volumes dos depósitos de grãos. Assim, no Egito, a geometria surgiu da necessidade de calcular áreas territoriais, volumes de celeiros e também de pirâmides.

Os celeiros eram em formato de cilindros circulares retos. Para calcular o volume de tais celeiros, fazia-se necessário que os antigos egípcios encontrassem um método para determinar a área do círculo base. No Papiro Rhind existem alguns problemas relativos ao cálculo da área do círculo. Citaremos mais à frente o problema 50, cuja resolução nos mostra uma das maneiras usadas pelos egípcios para calcular a área do círculo. Schubring (2003, p. 24-26) reforça:

> O Egito apresenta uma estrutura análoga, com uma corporação de escribas e ensino institucionalizado. Felizmente, dois textos importantes sobreviveram em papiros, os mais antigos textos conhecidos destinados ao uso no ensino:
>
> - Papiro de Rhind (cerca de 1600 a.C.), 85 problemas.
> - Papiro de Moscou (cerca de 1800 a.C.), 25 problemas.
>
> Em contraste com a predominância da álgebra na matemática babilônica, esses fragmentos de livros-texto abordam principalmente a aritmética.

Eves (2011, p.75) cita ainda que “investigações recentes parecem mostrar que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer é o semiproduto da base pela altura” e reforça que em fontes egípcias posteriores usava-se a fórmula incorreta, $k = \frac{(a+c)(b+d)}{4}$para a área de um quadrilátero qualquer cujas medidas dos lados sucessivos eram a, b, c e d.Assume-se que a área de um círculo é igual à de um quadrado de lado igual a $8/9$ do diâmetro e que o volume de um cilindro reto é o produto da área da base pelo comprimento da altura.

Continuando a descrever as contribuições das civilizações antigas, não podemos deixar de descartar a beleza do trabalho realizado pelos gregos e o avanço que proporcionaram à geometria, principalmente no que tange o cálculo de áreas.

No que se refere às práticas de medidas, Roque e Carvalho (2012, p. 61), afirmam:

> Os problemas geométricos são transformados em problemas numéricos. A escolha de uma unidade de medida basta para converter um comprimento, uma área ou um volume em um número. Sem dúvida, os primeiros matemáticos gregos praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas, como os povos antigos. A narrativa histórica tradicional enfatiza a transição do tipo de Matemática realizada pelos babilônios e egípcios, profundamente marcada por cálculos e algoritmos, para a Matemática teórica praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações.

Esse foi um momento em que importantes matemáticos e filósofos, como Hipias de Elis, Hipócrates de Quios, Anaxágoras de Claxomenae e Zenão de Elea, direcionaram atenção para três problemas que formaram a base para o desenvolvimento da Geometria. Os três problemas clássicos foram: trissecção de um ângulo, duplicação do cubo e a quadratura de círculo. A importância desses problemas consiste no fato de terem constituído ao longo dos tempos uma fonte muita rica de ideias e processos matemáticos, que foram sendo desenvolvidos nas sucessivas tentativas de resolução. (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Sem dúvida, problemas de quadraturas, a delimitação de terrenos destinados ao plantio nas margens dos rios, o cálculo do volume de um silo, impulsionaram métodos para calcular áreas e volumes, respectivamente de regiões e sólidos regulares e irregulares, que culminou na formalização do Cálculo Integral. Nesse sentido, alguns matemáticos contribuíram para a sua formalização, pois mesmo sem rigor, já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas, onde ainda não havia uma sistematização, no sentido de uma construção logicamente estruturada.

Segundo D’ Ambrosio (1996, p. 49),

> Costuma-se colocar a publicação do Principia como o início da ciência moderna. Na verdade, de toda a filosofia moderna. Tudo que se faz a partir de então é de algum modo relacionado com a obra de Newton, seguindo-a ou criticando-a. Mas nunca a ignorando. Essa influência não se limita à ciência. Os grandes filósofos viram nas ideias de Newton um tema central para suas reflexões. Enfim, Newton deu início a um novo sistema geral de explicações. Curiosamente, ele se apoiou fortemente no método cartesiano que é o ponto de partida para o reducionismo disciplinar e a especializações.

O próprio Newton admitiu que para chegar à sistematização do Cálculo “teve que se erguer sobre os ombros de gigantes” mostrando que a matemática sofre evoluções impulsionadas por seus pesquisadores. Outro personagem que carrega igual mérito é Leibniz. Nesse sentido, D’Ambrosio (1996, p. 50) comenta:

> Um grande filósofo alemão, contemporâneo de Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), compartilha com ele a glória de ter inventado o cálculo diferencial. De fato, a notação dy/dx é devida a Leibniz. As duas invenções, praticamente ao mesmo tempo, foram independentes.

Com a restauração de antigos documentos, o advento da impressa, o desenvolvimento da tecnologia e diversas pesquisas (concluídas e também em andamentos) em Educação Matemática, livros e salas de aulas estão bem servidos de conteúdos matemáticos formulados historicamente.

Assim, ao professor revelara matemática como resultada do desenvolvimento humano, ao esclareceras contribuições de diferentes culturas, em variados momentos históricos, ao pontuar as divergências entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor poderá desenvolver atitudes e valores favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (BRASIL, 1998).

2.2 Problemas geométricos históricos: possibilidades para investigações em sala de aula

Discutindo sobre investigações em sala de aula fazendo uso da História da Matemática, Baroni, Teixeira e Nobre (2009, p.168) destacam duas abordagem que produzem reflexões distintas em ambientes de estudo:

> a primeira trata da presença *implícita* da História. Nesse caso, as pesquisas podem avaliar, no professor, mudanças em sua percepção e compreensão da matemática. A segunda abordagem se revela quando a presença da História é explícita na situação de ensino.

Segundo estes autores a História pode fazer parte de uma abordagem global levando em consideração uma estratégia didática ou atuar de forma local ao ser utilizada no ensino de um assunto específico (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2009). Uma das abordagens, destacada pelos autores, que tem sido tratada é:

> problemas antigos para o desenvolvimento de estratégias de pensamento. Essa abordagem pode estimular alunos e professores a comparar suas estratégias com aquelas originais, levando, inclusive, os alunos a perceber vantagens nos símbolos e processos da Matemática nos dias de hoje. Além disso, os alunos podem, ao estudar a evolução histórica de um conceito, notar que a Matemática não é estática e definitiva (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2009, p.168-169).

Recriar situações vividas pelos povos e civilizações antigas fazendo os alunos sentir-se personagens da história, ajudará incorporar o conhecimento de calcular áreas dos povos antigos em nossas aulas de geometria e dará sentido muito mais real ao que se estuda em sala de aula.

Cada item, a seguir, referente a cálculo de áreas, é proposta para ser profundamente pesquisada e aplicada, via história da matemática para fazer investigação em sala de aula.

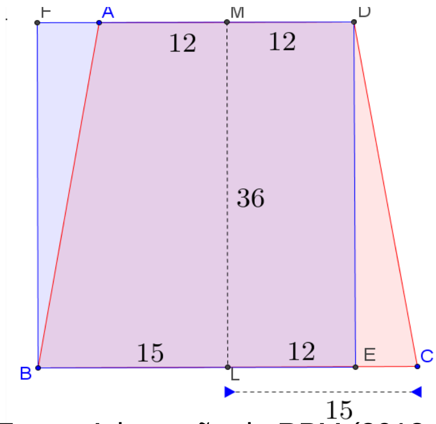
2.2.1Área do trapézio: a contribuição da Antiga Índia

A civilização indiana surgiu aproximadamente no quarto milênio a.C., no vale do Indo, do qual se originou a antiga Índia por volta de 2500 a.C. O bom planejamento das cidades da antiga Índia e as suas cerâmicas com decorações em forma de círculos que se interceptam, quadrados, triângulos unidos pelos vértices, etc. mostram que seus habitantes tinham conhecimentos de geometria.

Segundo Calabria (2014), esse conhecimento geométrico dos indianos também aparece para atender às necessidades dos rituais religiosos, sendo encontrado nos *Sulbasutras* (manuais sobre construções de altares), que continha regras para construções de altares de sacrifício. As figuras geométricas para formar os altares eram: triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, círculos e semicírculos.

No *Apastamba Sulbasutra* é apresentado um resultado sobre a área de um *vedi* (altar empregado nos sacrifícios em forma de trapézio isósceles), com 36 unidades de altura e lados paralelos de 30 e 24 unidades, possuindo 972 unidades quadradas. De acordo com Calabria (2014), para chegar a essa área, os indianos procederam da seguinte forma apresentada nas Figuras 2 e 3.

Figura 2 - Transformação do trapézio num retângulo de área equivalente

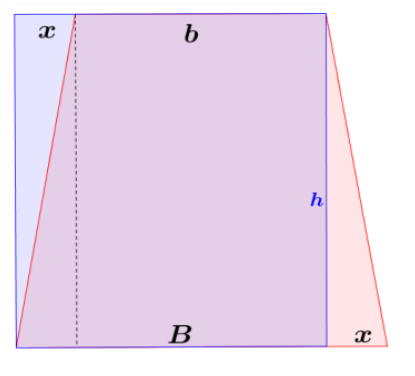


Fonte: Adaptação da RPM (2013, p.6).

- Construa uma perpendicular a BC, passando pelo ponto D. Essa perpendicular intercepta BC em E; a distância de E a L é igual a 12 unidades.
- Gire DEC e leve-o para o outro lado, fazendo coincidir os pontos D com B e C com A, de modo que o ponto A fique entre F e D.
- FDEB é um retângulo que tem a mesma área do trapézio ADCB. Logo,

$$\acute{a}rea(ADCB) = \acute{a}rea\ (FDEB) = 36 \times 27 = 972$$

Figura 3 - Retângulo com área igual ao trapézio dado



Fonte: Adaptação da RPM (2013, p.6)

Deduzimos, a partir dessa solução, a fórmula geral para a área de um trapézio isóscele como $\frac{(B+b)h}{2}$, onde B é a base maior e b é a base menor (Figura 3), pois $\acute{a}rea(ADCB) = \acute{a}rea\ (FDEB) = (x+b)h$.Mas $x = \frac{B-b}{2}$, logo,$\acute{a}rea(ADCB) = \frac{(B+b)h}{2}$.

A solução utilizada pelos indianos é o método de construir um retângulo de mesma área que um trapézio dado, manipulando as figuras geométricas para encontrar a área desejada.

Eves (2011, p.257) relata que “eram pouco comuns as demonstrações no sentido estrito da palavra e inexistiam procedimentos postulacionais. Sua geometria era largamente empírica e em geral se ligava à mensuração”.

As antigas Sulvasutras mostram que aos indianos aplicarem a geometria na construção de altares, faziam muito o uso da relação pitagórica. As regras forneciam instruções para encontrar um quadrado igual à soma ou diferença de dois quadrados dados e um quadrado igual a um retângulo dado. Há soluções do problema de quadrar um círculo que equivalem a tomar $d = \left(2+\sqrt{2}\right) {}^{s}/_{3}$ e $s = {}^{13d}/_{15}$, onde d é o diâmetro do círculo e s é o lado do quadrado igual.

Segundo Eves (2011) tanto o matemáticos Brahmagupta como Mahavira não só deram a fórmula de Herão para a área de um triângulo em função dos três lados como também a notável extensão,

$$k = [(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{1/2} \ ,$$

para a área de um quadrilátero cíclico de lados a, b, c, d e semiperímetro s. Ao que parece, comentadores posteriores não se deram conta da limitação da fórmula. Para um quadrilátero genérico a fórmula é

$$k^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\,cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right),$$

onde A e C são um par de ângulos opostos do quadrilátero.

Eves (2011, p.258) deixa evidente que a restrita geometria desse povo adveio de necessidades práticas, porém com falhas.

> Encontram-se muitas imprecisões nas fórmulas de mensuração hindus. Assim é que Arybhata dá como volume de uma pirâmide a *metade* do produto da base pela altura e como volume da esfera $\pi^{3/2}r^3\cdot$. Os hindus deram alguns valores acurados de π, mas frequentemente usavam $\pi = 3$ e $\pi = \sqrt{10}$.

É fácil notar que, embora os indianos não fossem proficientes em geometria, deram real contribuição para o avanço da matemática.

2.2.2 Área do círculo: a contribuição de Babilônia

Tableta (Tábulas) achadas em escavações arqueológicas na Mesopotâmia revelam sobre problemas de geometria. Roque e Carvalho (2012, p.45) relatam que a tableta YBC7302 exprime “ideias” de circunferência e área de círculo.

> A maneira como os babilônios consideram o círculo era fundamentalmente diferente da nossa. Conceitualmente, para nós, o círculo é obtido traçando-se uma circunferência com um compasso. Para os babilônios, ele era concebido como a figura limitada por uma circunferência. Mesmo quando conheciam o diâmetro do círculo, eles calculavam sua área usando o comprimento da circunferência.

Como figurava o π, na forma dos babilônios calcularem a área do círculo? Os mais antigos documentos concretos que temos e que tratam explicitamente de π são mesmo as tabletas mesopotâmicas de 2000 a.C. Após examinar figuras em tabletas dessas, é fácil perceber uma aproximação grosseira de $\pi = 3$.

Roque e Carvalho (2012) comentam que, no livro Mathematical Cuneiform texts, de autoria de Neugebauer, são traduzidos vários problemas da tabletas mesopotâmica envolvendo aproximação de π. Esses problemas pedem para calcular a área A de um círculo a partir do conhecimento da circunferência do mesmo, usando-se a regra:

$$A = \frac{1}{12}C^2$$

Através dessa regra percebemos que, nela equivale a usar $\pi = 3$. Note: se A é a área do círculo de circunferência Ce raio r, então, $A = \pi r^2$ e $C = 2\pi r$. Assim,

$r = \frac{C}{2\pi}$ e $A = \pi . \frac{C^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}C^2$. Fazendo $\pi = 3$, teremos $A = \frac{1}{12}C^2$,

o que mostra que a área da tableta foi encontrada dessa maneira.

Por muito tempo, achava-se que a única aproximação do πusada pelos mesopotâmicos era$\pi = 3$.Essa ideia foi mudada em 1950, quando o historiador matemático E.M. Bruins traduziu várias tabletas encontradas em Suse e datadas de 2000 a.C.. Os problemas dessas tabletas pediam para calcular a área de um campo circular de diâmetro dado, e para tal usavam a aproximação de $\pi = 3{,}125$.

2.2.3 Área do círculo: a contribuição do Egito

Investigando a matemática egípcia, há alguns problemas geométricos no Papiro Ahmes. “O prob. 51 mostra que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura”. (BOYER,1996, p.12). Documentos preservados dão exemplos de triângulos, trapézios, retângulos e quadriláteros mais gerais. Segundo Boyer (1996, p. 12), “a regra para achar a área do quadrilátero geral é fazer o produto das medidas aritméticas de lados opostos”. Às vezes, as regras eram imprecisas. No entanto, a regra egípcia de maior sucesso da época foi para achar a área do círculo.

> No prob. 50 o escriba Ahmes assume que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades. Comparando com a fórmula moderna $A = \pi r^2$ vemos que a regra egípcia equivale a atribuir a π o valor $3\ {}^{1}/_{6}$, uma aproximação bastante elogiável. (BOYER, 1996, p. 12).

Percebemos o que destaca este autor no problema 50 do Papiro Rhind: “Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?”

Solução apresentada pelo escriba: Remova $1/9$ do diâmetro, o restante é 8. Multiplique 8 por 8; encontra 64. Logo, a área é 64.

Desse problema, deduzimos que o método usado pelo escriba era: a área procurada era subtrair do diâmetro sua nona parte e elevar o restante ao quadrado, ou seja,

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left[\left(\frac{8}{9}\right) d\right]^2,$$

sendo d o diâmetro do círculo. Percebemos que eles não utilizavam o comprimento da circunferência para calcular a área do círculo e tentavam calcular essa área como a de um quadrado, o que nos faz inferir uma tentativa de quadrar o círculo.

Ponderemos o cálculo dessa área pela fórmula atual e faremos uma comparação com o procedimento egípcio. Uma vez que o diâmetro é 9, o raio é 4,5 e temos $A = (4{,}5)^2\pi \to A = 20{,}25\pi$. Como no procedimento egípcio, a área resultou em 64, fazemos$20{,}25\pi = 64$ e achamos aproximadamente $\pi = 3{,}16$.

2.2.4 A Quadratura do círculo: contribuição da Grécia

Um personagem marcante no contexto histórico matemático que contribuiu ferrenhamente nas investigações, descobertas e avanços no campo da matemática e da física, “Arquimedes, natural da cidade grega de Siracura, figura entre os maiores matemáticos de todos os tempos e certamente foi o maior da Antiguidade”. (EVES, 2011, p. 192). Ele nasceu por volta de 287 a. C. e nos seus 75 anos de vida, produziu obras que são organizadas em três grandes grupos:

1º - Obras cujo objetivo principal era demonstrar teorias relativas a cálculo de áreas e volumes de figuras limitadas por curvas e superfície.

2º - Obras relativas a problemas de estática e hidrostática, e

3º - Obras de miscelânea matemática.

E sob o primeiro grupo, iremos destacar o trabalho “sobre medida de círculo”, a fim de perceber como foi tratada a questão de calcular sua área e o número π.

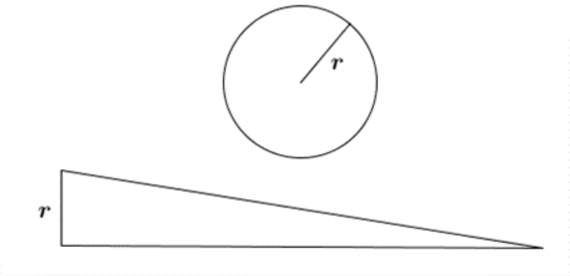
Na posição de maior matemático de todos os tempos, Arquimedes não poderia ficar de fora da história dos três clássicos famosos problemas já citados.Deles destacamos, a *Quadratura do Círculo*. “Estreitamente ligado ao problema de quadratura está o do círculo de π, razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. Porém, a primeira tentativa científica de calcular πparece ter sido a de Arquimedes”. (EVES, 2011, p. 141).

Fazer a “quadratura” do círculo significa construir um quadrado cuja área seja igual à área do círculo. É importante esclarecer que a construção solicitada devia ser com uma régua não graduada e um compasso. Nessas condições, depois dos esforços de muitos matemáticos, no século XIX, mediante argumentos algébricos, concluiu-se que é impossível de resolvê-lo.

Segundo Figueiredo, Boullauf e Miarka (2014, p. 41), “não conseguindo resolver os problemas clássicos sob as severas condições impostas aos instrumentos euclidianos, os gregos buscaram descobrir novos meios que os levassem a uma solução”.Assim, mostraremos como Arquimedes fez a quadratura do círculo, usando o método da exaustão. “Consiste em um método de determinar a área do círculo encontrando uma figura retilínea, um triângulo no caso, com área igual à do círculo”. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 147).

Essencial para esse procedimento é o lema de Euclides que diz: a área de um círculo é igual à do triângulo retângulo (Figura 4) no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência desse círculo.

Figura 4 - Área do círculo é igual à área do triângulo

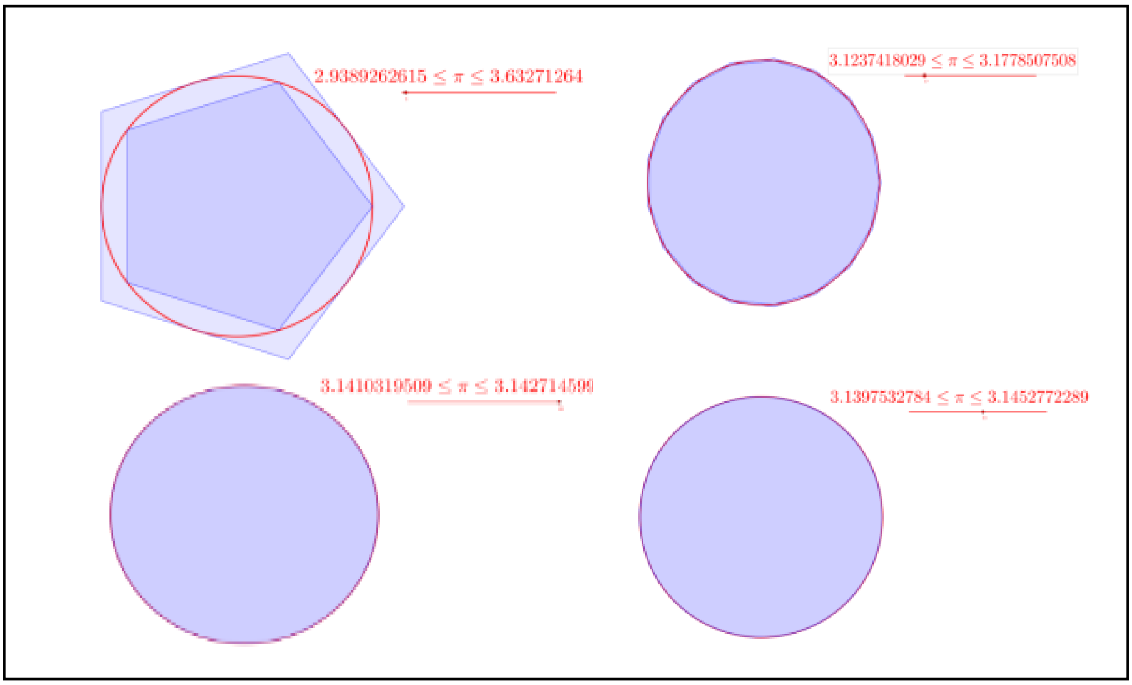


Fonte: Roque e Carvalho (2012, p.147)

A ideia principal da demonstração foi aproximar a área do círculo pelas áreas de polígonos inscritos e circunscritos (Figura 5), cujos lados eram sucessivamente duplicados.

Arquimedes usou um procedimento semelhante para aproximar a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo, que hoje conhecemos como π.

Figura 5 - Polígonos inscritos e circunscritos à circunferência com 5,17, 53 e 96 lados respectivamente



Fonte: Acervo da pesquisa

Para fazer isso, ele inicialmente inscreveu e circunscreveu hexágonos regulares em uma circunferência de círculo de raio 1. Em seguida, ele duplicou sucessivamente o número de lados. Assim, Arquimedes conseguiu a aproximação $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ usando polígonos de 96 lados, obtendo desta forma duas casas decimais exatas de π.

2.2.5Área sobcurvas: do método da exaustão à integral definida

Sem dúvida, os primeiros problemas que apareceram relacionados com o CálculoIntegral são os problemas de quadratura, com origem nos processos de medição de terras e áreas.

Uma das contribuições mais antigas, segundo Eves(2011) se refere ao problema da quadratura do círculo que foi dada por Antífono(430 a. C.) que acreditava que por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono por fim exaurir-se-ia. Ele continha o método da exaustão grego. Para Eves (2011, p.419), o método da exaustão, admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição:

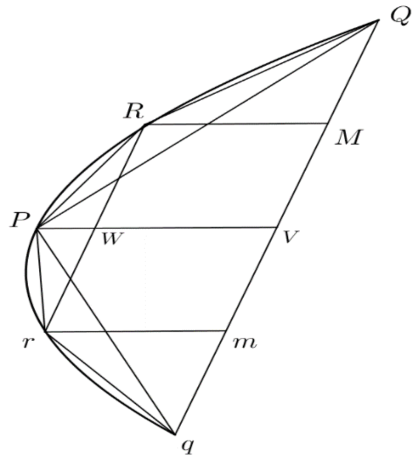
> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará pôr fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

Boyer (1996, p.63) nos coloca que o método de exaustão é creditado a Eudoxo (408 a.C – 355 a.C.), mas também prático por Arquimedes (287 a.C. - 212 a. C.).

> Matemáticos anteriores parecem ter sugerido que se tentasse inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e por fora da figura curva, e ir multiplicando indefinidamente o número de lados; mas não sabiam com terminar o argumento, pois não conheciam o conceito de limite. Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego de cálculo integral.

Como já vimos anteriormente, Arquimedes (287 - 212 a.C.) aplicou o método da exaustão para determinar a área do círculo e descobriu o número π. Ele também descobriu que a área da região limitada por uma parábola cortada por uma corda qualquer é igual a $4/3$ da área do triângulo que tem a mesma altura e a corda como base (Figura 6).

Figura 6 - Área de uma região limitada por uma parábola



Fonte: Roque e Carvalho (2012, p.142)

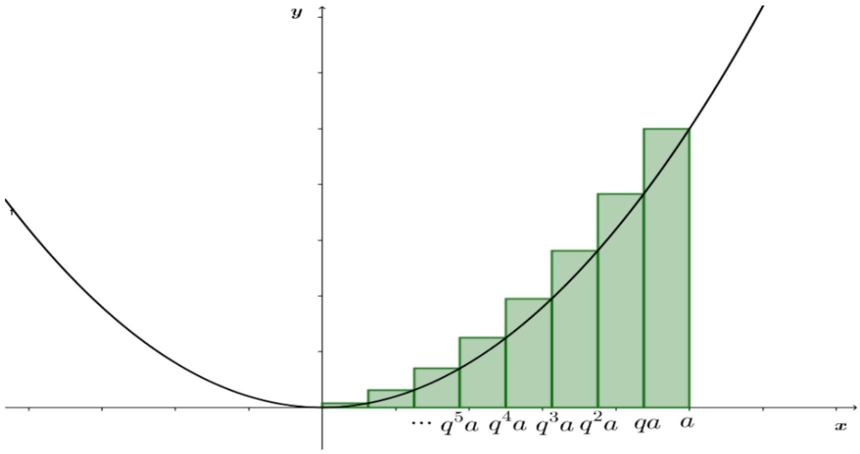
Dessa forma, a busca de processos exatos ou mesmo aproximações de calcular a área em uma região limitada por uma curva fechada, deu a Arquimedes o privilégio de ter considerável destaque dentre os matemáticos de todos os tempos. Nos seus trabalhos sobre áreas e volumes, Arquimedes utilizou o método de exaustão, pelo qual se aproxima a quantidade desejada pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência. (BOYER, 1996).

Por volta do ano de 1450 os trabalhos de Arquimedes chegaram à Europa ocidental através de uma tradução que foi achada em Constantinopla, de uma cópia feita no século IX. (EVES, 2011). Estas descobertas deram origem a sistematização do cálculo. No entanto, o seu desenvolvimento prosseguiu devido às contribuições iniciais de personagens como Cavallieri (1598-1647), Kepler (1571-1630), Barrow (1630-1677) e Wallis (1616-1703).

Questões de quadratura também foi motivação do advogado Fermat (1601-1665), que por prazer praticou a matemática, dando contribuições relevantes nas áreas de álgebra, geometria e geometria analítica. Nascido na França no ano de 1601, pode-se dizer quer os resultados obtidos pelas investigações sobre a quadratura o tornou precursor do cálculo infinitesimal.

Fermat (1601-1665) estava interessado na quadratura de curvas cuja equação geral é $y = x^n$, onde n é um inteiro positivo. No caso em que $n = 2$, essa curva é denominada de parábola, quando n é diferente de 2, chamamos essas curvas de parábola generalizada. Fermat fez a aproximação da área sob cada curva através de uma série de retângulos cujas bases formam uma progressão geométrica decrescente (Figura 7). Com este método, semelhante ao método da exaustão usado por Arquimedes, Fermat chegou a uma expressão equivalente a resolução de uma Integral Definida por volta de 1640, ou seja, quase trinta anos antes de Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716) apresentaram as bases do Cálculo Integral.

Figura 7 - Método de Fermat para quadratura das funções potência



Fonte: Adaptação de Boyer (1996, p.240)

No método de Fermat, a base de cada retângulo é igual à medida do segmento determinado por dois pontos consecutivos, ou seja, $aq^n - aq^{n+1} = aq^n(1-q)$ e a altura de cada retângulo é um ponto do gráfico $y = x^k$, daí temos que a altura é $(aq^n)^k = a^k q^{nk}$. Portanto, a área de cada retângulo é:

$$A_n = \ aq^n(1-q).\, a^k q^{nk}$$

$$= a^{k+1} q^{n(k+1)}(1-q)$$

Tendo k como um número constante, temos que a soma das n áreas desses retângulos representa o valor aproximado a área da curva, ou seja,

$$A \approx \sum a^{k+1} q^{n(k+1)}(1-q) = \frac{a^{k+1}(1-q)}{1-q^{k+1}}.$$

Como da fatoração temos $(1-q^{k+1}) = (1-q)(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^k)$, segue que:

$$\frac{a^{k+1}(1-q)}{1-q^{k+1}} = \frac{a^{k+1}}{(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^k)}$$

E ao calcularmos o limite, quando q tende a 1, resulta que

$$A = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Este método é chamado de quadratura das funções potências. O trabalho de Fermat representou um grande avanço, pois conseguiu a quadratura não somente de uma curva, mas de toda uma família de curvas. Seus resultados colaboraram para o estudo das propriedades das séries infinitas.

A representação geométrica do método de Fermat (Figura 7) é parecida com a representação do método da soma de Riemann. Que para calcular a área sob uma curva, consiste em fazer uma divisão da região a ser calculada em formas de retângulos, que juntos formam uma região que é similar àquela a ser medida, então calcula-se a área de cada um dos retângulos, e finalmente soma-se todas as áreas. Tendo em vista que a região preenchida pelas formas menores geralmente não corresponde a exata forma da região a ser medida, a Soma de Riemann será diferente desta. Esse erro pode ser reduzido se a região for mais dividida, usando retângulos com medidas da sua base cada vez menores.

A Soma de Riemann é uma aproximação obtida pela expressão $\sum f(x).\Delta x$, onde $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.No Capítulo 4 apresentaremos uma investigação em sala de aula em que seguindo os caminhos da História calcularemos a áreas sob uma curva a partir da discussão acerca da seguinte definição:

Considere $f: D \to R$ sendo uma função definida do subconjunto D, de números reais, R.Tome $I = [a, b]$ como um intervalo fechado contido em D, e$P = [x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, sendo uma partição de I, onde$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
Uma soma de Riemann de f sobre I com a partição P é definida como

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}), x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i.$$

Essa soma é assim nomeada em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann (1826–1866). Uma aplicação muito comum é a aproximação da área de funções ou linhas em um gráfico, mas também o comprimento das curvas e outras aproximações.

Até então, já haviam sido percebido e investigados muitos dos conceitos de Cálculo como a existência do limite e continuidade. O avanço tecnológico estava acentuado e havia uma necessidade, segundo Eves(2011), da criação do simbolismo geral como um conjunto de regras e procedimentos que tornasse o cálculo manipulável e proveitoso.

Conforme já vimos antes, essa sistematização surgiu com os estudos de Newton e Leibiniz que contribuíram de forma independente com a sistematização do Cálculo. A matemática criativa passou para um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente mudou quando, após Arquimedes, só no século XVII, por volta de 1670, é que surgiu o processo definitivo, com a sistematização do Cálculo Integral, simultaneamente por Newton, na Inglaterra, e por Leibniz, na Alemanha e assim o Cálculo se tornou o que hoje conhecemos e ensinamos em sala de aula.

De acordo com Silva (2010, p. 129),

> desde as primeiras discussões sobre a natureza, a descoberta das grandezas incomensuráveis, passando pela teoria das proporções, pela tentativa de resolver problemas de quadratura de lúnulas, círculos e parábolas, culminando com o método da exaustão, primeiramente proposto por Eudoxo e, finalmente, completamente demonstrado por Arquimedes, um longo caminho foi percorrido. Cada modelo proposto atendeu as condições e conhecimentos de cada época, mas deixou lacunas – questões em aberto – que pouco a pouco foram sendo preenchidas ou respondidas a partir de novas percepções sobre o mesmo problema. Assim, o edifício matemático foi se estruturando e, nesse bojo, o desenvolvimento do cálculo.

Nesse contexto, podemos afirmar que a estruturação do cálculo se deu pela contribuição de alguns personagens e que no decorrer do tempo foi organizado para ser ensinado. Repensando a matemática como criação humana, como o professor pode melhorar a própria prática? Primeiro passo é conhecê-la bem, investigando-a.

2.3 O professor pesquisando a sua própria prática

Para que pesquisar em sala de aula?

> Etimologicamente, pesquisa está ligada a investigação, a busca (= quest), a research (search = procura), e a ideia, sempre a mesma, é a de mergulhar na busca de explicações, dos porquês e dos comos, com foco em uma prática. Claro, o professor está permanentemente num processo de busca de aquisição de novos conhecimentos e de

> entender e conhecer os alunos. Portanto, as figuras do professor e do pesquisador são indissolúveis. (D'AMBROSIO, 1996, p.94).

Para D' Ambrosio (1996, p.94) "o fato é que pesquisa é inerente à própria vida". A importância da pesquisa para a produção de conhecimento é inquestionável. Aprender é uma necessidade do ser humano, e a pesquisa é o caminho para isso, pois ela aperfeiçoa e produz conhecimento. Assim será benéfico à nossa prática em sala de aula se três aspectos estiverem intimamente relacionados: a pesquisa, o ensino e a aprendizagem.

Hoje se percebe que pesquisa e ensino têm contribuições mútuas e que a aprendizagem não é um resultado inequívoco do ensino, ou apenas isso. Portanto, pesquisa, ensino e aprendizagem são partes integrantes de um todo quando se fala em educação. Mas, como podemos saber quando um trabalho é realmente uma pesquisa?

Nesse momento, serão apresentados alguns nomes representativos que se destacam nesse campo de pesquisa: Bicudo (1993), D'Ambrosio (1996), Fiorentini e Lorenzato (2009).

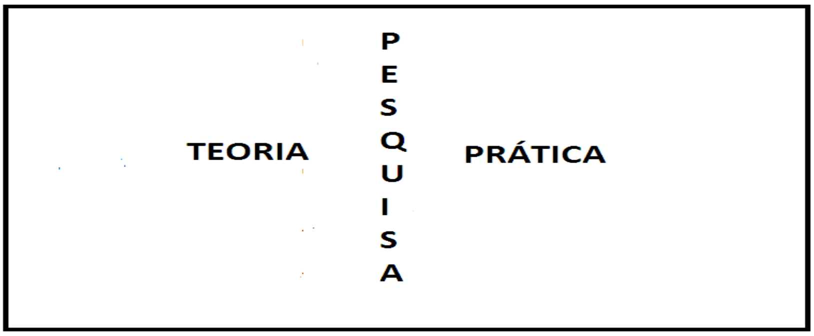
A professora e pesquisadora Bicudo (1993), que há muitos anos se destaca na pesquisa em Educação Matemática, com muitas obras dedicadas a explorar questões relevantes a esse campo, descreve que "pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada. Também, como buscar explicações convincentes e claras sobre a pergunta feita". (BICUDO, 1993, p.18).

Escrevendo sobre "a pesquisa em Educação Matemática e o novo papel para o professor", D'Ambrósio (1996, p. 79) destaca:

> Entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados. Toda teorização se dá em condições ideais e somente na prática serão notadas e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. Isto é, partir para a prática é como um mergulho no desconhecido.Pesquisa é o que permite a interface entre teoria e prática.

Na Figura 8, a seguir, o autor esquematiza que pesquisa é o elo entre teoria e prática.

Figura 8 - Esquema de pesquisa em sala de aula



Fonte: D'Ambrósio (1996, p.92)

D'Ambrósio (1996) ressalta que em algumas situações de pesquisa em sala de aula alguns se dedicam a um lado desse elo e fazem pesquisa chegando à teoria, baseando-se na prática de outros. Por outro lado, estão aqueles que exercem uma prática, em forma de pesquisa, baseada em teorias propostas por outros. "Em geral fica-se numa situação intermediária entre esses extremos, praticando e refletindo sobre o que praticamos, e consequentemente melhorando nossa prática". (D'AMBROSIO, 1996, p.92).

Com o objetivo de orientar pesquisadores que iniciam seus trabalhos ou até mesmo pesquisadores mais avançados,Fiorentini e Lorenzato em Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos (2009), esclarecem que a pesquisa

> é um processo de estudo que consiste na busca disciplina/metódica de saberes, compreensão acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou se diz a respeito. (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p.60).

Estas são três das várias vertentes da Educação Matemática sobre a tarefa de se pesquisar na prática escolar que podemos encontrar na literatura, em que cada pesquisador formula, segundo seu entendimento e de acordo com a literatura disponível, uma definição sobre o que seja pesquisar. Entretanto, em linhas gerais, essas concepções permanecem próximas ou pelos menos possuem indicativos que apontam para uma mesma direção.

2.3.1A importância de investigar a própria prática

Sabemos que as dificuldades encontradas pelos professores de matemática no Brasil no que diz respeito ao seu desempenho profissional são muitas. Dentre elas, as dificuldades de aprendizagem dos alunos; os currículos às vezes ultrapassados; a forma desgastante de funcionamento das instituições; etc. Alguns desses problemas não são facilmente contornáveis. Mesmo assim, e também por isso, é perfeitamente claro e aceitável que, para haver maior grau de sucesso no ensino, os professores devem estar em constante busca de novos conhecimentos, avaliando e reavaliando o seu relacionamento com toda a comunidade escolar, além de seu próprio contexto de trabalho. Seguindo este pressuposto, Floriani (2000, p. 15) salienta:

> Há muitas dificuldades para educadores matemáticos transcenderem a própria prática, dando-se realce à péssima formação em "humanidades", à acentuada impregnação racional-positivista e ao autodidatismo pedagógico imposto à maioria dos licenciados em Matemática. Há, porém, também fatores positivos, especialmente aqueles ligados ao fato de que o professor possui elementos concretos para pesquisar, levando-se em consideração sua labuta em sala de aula.(FLORIANI, 2000, p.15).

Hoje sabemos, devido a estudos e pesquisas, que os alunos possuem suas individualidades e apresentam diferentes formas de erros ou dificuldades no aprendizado da matemática. Para lidar com tais dificuldades e tirar proveito dessa convivência, uma solução, é o professor exercer um papel diferente: o de professor-investigador e agente da sua própria prática.

Para isso, percebemos ser necessário que os professores assumam uma posição investigativa, que lhes proporcione maior conhecimento sobre os assuntos que os afligem e, com isso, descubram formas para avançar sobre tais dificuldades. "A colheita para a melhoria será abundante. E, de uma simples investigação, pode-se chegar a transcender a própria prática pela criação de um projeto pessoal e profissional de vida". (FLORIANI, 2000, p.18).

A pesquisa sobre a própria prática produz conhecimento, porém, estes estão mais diretamente relacionados às necessidades da prática dos professores no dia a dia. Stenhouse citado por Silveira e Miola (2008, p. 113) advoga por uma "ciência educativa em que cada sala de aula é um laboratório e cada professor um membro da comunidade científica". Obviamente, é preciso que o professor tenha ou desenvolva apetite à investigação e que busque, a cada dia, aperfeiçoar-se na arte de encontrar problemas e elaborar perguntas em relação à sua prática.

Pesquisar a sua prática profissional, conforme Silveira e Miola (2008, p. 115-116), exige

> do docente ainda outras atitudes, e uma delas é vontade. É preciso que o professor tenha desejo de mudança. Outra atitude importante é a percepção de que pode haver falhas na sua prática e que estas precisam ser identificadas e sanadas. Isso leva o professor a buscar mudanças no seu comportamento, as quais o permitirão inovar a cada dia. Assim, a investigação da própria prática surge como uma forma de colocar os problemas relacionados ao processo de ensino e aprendizagem em foco, mostrando-se fundamental para o aperfeiçoamento e desenvolvimento profissional dos professores.

É imprescindível que o professor leve em conta essa possibilidade e busque sempre, por meio de investigação, informações que o ajudem a compreender o entorno do seu campo de trabalho, identificar problemas e buscar, pela experimentação, estratégias para a solução.

Silveira e Miola (2008) apresentam alguns argumentos que seriam grandes razões para que os professores façam pesquisas sobre a própria prática. São eles:

> [a] para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo mais meios para enfrentar os problemas emergentes dessa mesma prática; [b] como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional; [c] para contribuírem para a construção de um patrimônio de cultura e conhecimento dos professores como grupo profissional; [d] e como contribuição para o conhecimento mais geral sobre os problemas educativos. (SILVEIRA; MIOLA, 2008, p.117).

À medida que os professores se fazem reflexivos, críticos e insistam na tarefa de investigar a sua prática e preocupam-se com a definição de parâmetros para o desenvolvimento de investigações mais rigorosas, estarão construindo um corpo de conhecimento cada vez mais confiáveis. Afinal, quem tem maior contato e conhecimentos dos problemas relacionados ao ensino de matemática são os próprios professores, que lidam no seu dia a dia com essa prática. E os alunos, como podem fazer matemática através de investigações na sala de aula?

2.4 Investigações matemáticas e a construção do conhecimento

Estimulado por professores reflexivos, o aluno ao investigar essencialmente faz matemática, pois ele precisa encontrar uma estratégia para resolver a situação-problema proposta pelo professor.

No contexto do processo de ensino e aprendizagem, a investigação matemática auxilia na construção do conhecimento matemático e no desenvolvimento de habilidades lógico-dedutivas que propiciam aos alunos testar suas proposições e provar suas conjecturas. Eles são estimulados a pensar matematicamente e a utilizar muito a sua capacidade criativa.

De acordo com Alro e Skovsmose (2006), no processo de ensino-aprendizagem, a construção dos conceitos matemáticos se dá numa relação mútua e de “aproximação que pode ser vista como uma ação coletiva realizada pelos alunos, descrita em termos de perspectivas que são compartilhadas entre professor e alunos”. (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 45).

Na disciplina Matemática, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 23) comentam que “o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações”. Assim, as investigações matemática constituem uma das atividades que os alunos podem realizar e que se relacionam, de muito perto, com a resolução de problemas.

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 23).

Assim o professor assume um papel fundamental de garantir que os alunos se sintam motivados para a atividade a realizar, procurando criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo. O aluno deve sentir-se elemento principal do processo.

2.5 Investigações geométricas via história da matemática

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), desde os anos iniciais, o ensino de geometria estimula uma interação reflexiva de fenômenos da natureza, de estabelecimento de padrões na construção e desconstrução de teorias e práticas errôneas. Assim, esse ensino e a aprendizagem serão otimizados se for baseado na exploração de natureza investigativa. Para estes autores,

> as investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstrações de generalizações. A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidade, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 71).

A riqueza proporcionada pelas investigações realizada pelos alunos, facilita o estabelecimento de conexões entre temas matemáticos, aspectos que, por vezes, encontram-se afastados em virtude das dificuldades de concretização nas aulas de matemática.

Ponderando sobre a sala de aula como espaço de pesquisa em geometria, Grando e Marasini (2008, p. 33-34) ressaltam:

> A contextualização do conhecimento matemático pode ser considerada de diferentes formas: na história da ciência/matemática, no estabelecimento de relações entre a matemática da escola e a matemática utilizada em outros contextos e na própria matemática. Quando à história da matemática, compreender o processo de origem e definição do metro como unidade padrão de medida de comprimento utilizada em vários contextos e atividades amplia nossa visão sobre o conhecimento científico.

Sem dúvida, resgatar a história do conhecimento ajuda a ressignificá-lo, na medida em que se entende em que contexto surgiu, que tipo de problema veio resolver, etc.Mas, que motivações sustentam investigações que relacionam a História e a Educação Matemática?

Após várias pesquisas realizadas pelo Grupo de Pesquisa em História da Matemática (GPHM), junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, *Campus* de Rio Claro, Barone, Teixeira e Nobre (2009) lista vários argumentos que defendem a introdução da história da matemática no processo educacional como fator de melhoria no ensino de matemática.

> [a] a História da Matemática levanta questões relevantes e fornece problemas que podem motivar, estimular e atrair o aluno; [b] a História fornece subsídios para articular diferentes domínios da Matemática, assim como expor inter-relações entre a Matemática e outras disciplinas, a Física, por exemplo; [c] o envolvimento dos alunos com projetos históricos pode desenvolver, além de sua capacidade matemática, o crescimento pessoal e habilidades como a leitura, escrita, procura por fontes e documentos, análise e argumentação; [d] os estudantes podem entender que elementos como erros, incertezas, argumentos intuitivos, controvérsias e abordagens alternativas a um problema são legítimos e fazem parte do desenvolvimento da Matemática; [e] os alunos também podem identificar que, além dos conteúdos, a Matemática possui forma, notação, terminologia, métodos computacionais, modos de expressão e representações; [f] os professores podem identificar que algumas dificuldades que surgem em sala de aula hoje já apareceram no passado, além de constatar que um resultado aparentemente simples pode ser fruto de uma evolução árdua e gradual. (BARONE; TEIXEIRA; NOBRE, 2009, p.166-167).

Fauvel (1991) citado por Brito e Mendes (2009) aponta que a importância do uso da história no ensino da Matemática justifica-se pelos seguintes fatos:

> 1) a história aumenta a motivação para a aprendizagem da Matemática; 2) humaniza a matemática; 3) mostra seu desenvolvimento histórico por meio da ordenação e apresentação de tópicos no currículo; 4) os alunos compreendem como os conceitos se desenvolveram; 5) contribui para as mudanças de percepção dos alunos com relação à Matemática, e 6) suscita oportunidades para a investigação em Matemática.(BRITO; MENDES, 2009, p. 9).

Ambos os autores citados acima também apontam argumentos que dificultam à incorporação da história em sala de aula de matemática como: História não é Matemática, falta de tempo para cumprir programa; falta de recursos; falta de experiência do professor; dificuldade de avaliação. Porém, há indícios que as vantagens superam os empecilhos como será visto nesse trabalho.

2.6 Material concreto manipulável: suporte enriquecedor em aulas investigativas

O ideal é que o uso de material concreto nas propostas didáticas da matemática seja comum,em qualquer nível de ensino.No entanto existe certa confusão entre princípios teóricos (psicologia sensorial-empirista, psicologia genética, recursos didáticos, etc) e a prática no uso do material concreto que auxiliam o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Floriani (2000, p. 65),

> Um professor cujo ensino está ancorado nos princípios da Psicologia Sensorial-Empirista,utilizará os materiais concretos para formar imagens na mente dos alunos. Outro, cujo ensino se apoia nos postulados da Psicologia Genética, utilizará os mesmos materiais para ajudar seus alunos na construção dos conceitos.

Para esse autor, professores tradicionais poderão não gostar de metodologia apoiada no uso de materiais concretos, pois exige clima de liberdade na sala de aula,construção dos conceitos matemáticos e valorização da autonomia moral, intelectual e social do educando. Não se trata assim de utilizar materiais concretos com simples finalidade à aquisição de “conteúdos”.(FLORIANI, 2000).

No âmbito do ensino e aprendizagem da matemática o trabalho didático volta-se para criação de ações através das quais o aluno interage com o conhecimento. De acordo com Pais (2006, p. 28),

> O método e as estratégias de ensino têm a função de contribuir para que o aluno possa fazer Matemática no contexto escolar, sob a coordenação do professor; é uma das finalidades mais expressivas da educação matemática. Para fazer isso, é preciso buscar dinâmicas apropriadas para intensificar as possibilidades de interação do aluno com o conhecimento. A ênfase dessa ideia é dada à valorização das ações do aluno, porque envolve conceitos, proposições, problemas e afasta a concepção de que o saber matemático está preelaborado e pode ser transmitido para o aluno.

A utilização de material concreto manipulável é um rico recurso para o aluno fazer matemática em sala de aula, além de dinamizar e incentivar o interesse, proporciona prazer em aprender.

Segundo Baroni, Teixeira e Nobre (2009), as dificuldades inerentes à utilização de fontes históricas podem ser minimizadas nos casos em que se pode lançar mão de recursos não convencionais, tais como programas computacionais, sites, dramatização. Esses recursos, quando disponíveis, podem oferecer oportunidades de melhorar ou mesmo de que aconteçam experiências educacionais importantes.

Em particular, nas investigações no ensino de geometria, o uso de material concreto alcança toda a potencialidade. Assim, Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 82-83) enfatizam:

> As tendências curriculares convergem ao considerar que essa área da matemática é fundamental para compreender o espaço em que nos movemos e para perceber aspectos essenciais da atividade matemática. Salienta-se, por exemplo, a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria a situações da vida real e de utilizar diagramas de modelos concretos na construção conceptual em Geometria.

A utilização do material concreto oferece aos professores um ambiente propício para a construção do conhecimento matemático a partir de situações concretas, estimulando os alunos à descoberta. Além de ser uma fonte de motivação. Porém, Mendes, Filho e Pires (2011, p. 7) alertam:

> O professor deve ter atenção e cuidado ao organizar as atividades do dia a dia em sala de aula. A inclusão e o uso de materiais concretos, como elementos facilitadores do processo ensino-aprendizagem de Matemática deve fazer parte do ambiente permanente da sala de aula.

Para bons resultados o professor deve planejar, conhecer bem as possíveis manipulações do material concreto e ter bem definidos os objetivos a serem alcançados com sua utilização nas aulas de matemática.

3. METODOLOGIA

Neste capítulo, estão apresentados os caminhos norteadores desta pesquisa, destacando-se a caracterização do grupo participante da pesquisa, os procedimentos metodológicos e os instrumentos de coleta de dados utilizados para a análise dos resultados obtidos na realização da investigação.

A compreensão das abordagens é de significativa importância visto que possibilita ao pesquisador um melhor planejamento dos caminhos traçados durante o percurso do desenvolvimento da pesquisa partindo-se da investigação de abordagem e metodologia qualitativa.

3.1 Abordagem da pesquisa

O desenvolvimento de Atividades Investigativas em sala de aula, utilizando a História de Matemática, em especial o cálculo de áreas não regulares, intencionou contribuir para uma prática pedagógica inovadora. Assim, essa pesquisa é de caráter qualitativo, do tipo exploratório, sustentada na participação direta da situação de ensino e de aprendizagem, uma vez que ocorreu no ambiente natural da sala de aula do autor desse trabalho.

Desse modo, a pesquisa qualitativa foi coerente ao investigador cujo interesse transpassou obter rigorosas informações acerca de algo, mas, acima de tudo, procurar melhorar as práticas pedagógicas no contexto do fenômeno pesquisado. A abordagem de pesquisa qualitativa tem como principal característica dar sentido ou interpretar os fenômenos de acordo com os significados que as pessoas trazem com eles.

D'Ambrósio (2004, p.21) aponta que "a pesquisa qualitativa é o caminho para escapar da mesmice. Dá atenção às pessoas e às ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos".

Uma característica comum à pesquisa qualitativa é que o pesquisador é considerado instrumento de pesquisa, sendo este o professor, recorre às suas experiências, ao seu conhecimento tácito e aos seus pressupostos existenciais como recursos usados para coletar dados, compreendê-los e interpretá-los. Ele é o instrumento de coleta de dados e, para tal, deve ter em mente quais dados são importantes e relevantes no sentido de atingir a meta das suas buscas.

Sendo assim, esta pesquisa se tornou de grande importância para o pesquisador que desejava desconstruir preconceitos relacionados à matemática, bem como modificar a forma como esta é normalmente ensinada, em particular, sem fazer uso de sua história, ou seja, de como os conceitos foram sendo construídos. O que a torna abstrata e distante da realidade, sem conexões com o passado e com o presente.

Assim, a pesquisa realizada foi de natureza qualitativa, uma vez que "há duas justificativas para a pesquisa: 1) satisfação da curiosidade do pesquisador (ex. história), o que é legítimo; 2) guia para as próximas ações, essencialmente a pesquisa-ação, o que é auxiliado por 1". (D'AMBRÓSIO, 2004, p. 21).

Desta forma, ao discutir a formação e desenvolvimento profissional dos professores, o desenvolvimento de atividades reflexivas e investigativas sobre a prática de ensino de matemática nas escolas, Fiorentini e Lorenzato (2009, p.75)afirmam:

> Podemos dizer que um estudo do professor pode ser considerando pesquisa quando este for um trabalho intencional, planejado e constituído em torno de um foco ou questão de seu trabalho escolar, for metódico (passe por algum processo de produção/organização e análise escrita de informações) e apresente um relatório final do estudo desenvolvido (texto escrito ou relato oral).

Diante do que foi mencionado, a pesquisa foi realizada tendo por base uma revisão bibliográfica sobre a História da Matemática e a Investigação Matemática, tomando algumas situações, em especial sobre o desenvolvimento da geometria e cálculo de áreas; a aplicação de sequência de atividades que visaram alcançar os objetivos que foram traçados.

3.2 Participantes e cenário da pesquisa

O desenvolvimento da atividade proposta para Investigações via História da Matemática acerca do tema pesquisado ocorreu com a participação de 13 discentes da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), *Campus* VI – Caetité. Durante o período letivo 2015.1, esses discentes do quinto semestre do curso de Licenciatura em Matemática cursavam o componente curricular Cálculo II na época ministrada pelo autor desse trabalho.O curso de licenciatura em Matemática funciona nos turnos matutino e noturno, atende estudantes de toda a região que, em grande maioria trabalham e estudam concomitantemente.

A atividade “Ressignificando o cálculo de áreas” foi elaborada no intuito de perceber como a metodologia de aprendizagem por meio da História de Matemática em Atividades Investigativas, numa prática pedagógica inovadora, pode contribuir para a construção do conhecimento de cálculo de áreas. Essa atividade teve suporte de um material concreto manipulável de baixo custo, como cartolina, régua, tinta para papel, papel transparente, dentre outros.

Atuar no contexto, como docente no cenário da pesquisa e dos participantes da investigação, foi de grande importância para a pesquisa desenvolvida, pois convergiu à ideia de Silveira e Miola (2008) que afirmam: ao pesquisarem sobre a prática, os professores também constroem um corpo de conhecimento local, ou seja, relacionam a uma unidade - uma escola, um currículo, uma classe, um aluno, entre outros, que devem ser compartilhados para que todos tirem proveito.

Em relação à pesquisa dentro do próprio campo de atuação, Ponte (2002, p. 2) ressalta:

> São várias as razões pelas quais esta pesquisa pode ser importante. Ela contribui, antes de mais, para o esclarecimento e resolução dos problemas. Além disso, proporciona o desenvolvimento profissional dos respectivos autores e ajuda a melhorar as organizações em que eles se inserem. Em certos casos, esta pesquisa pode ainda contribuir para o desenvolvimento da cultura profissional no respectivo campo da prática e até para o conhecimento da sociedade em geral.

Podemos perceber que nosso ambiente de trabalho constitui um local adequado para a pesquisa qualitativa, pois existe proximidade com o sujeito conhecendo de perto as inquietações que investigaremos para reflexões e soluções. Nesse sentido, Palis (2015, p. 2) reforça que

> o professor pesquisador de sua própria prática alia investigação e ensino: em face de um problema didático, submete-o a exame crítico, resolve-o da melhor maneira possível e divulga sua solução. Esse trabalho beneficia o próprio professor e os alunos, gera conhecimento e desenvolve a cultura profissional da comunidade de referência.

Desse modo, a realização da pesquisa se apresentou como uma rica possibilidade de não apenas identificar e entender um problema didático, mas também de criar conhecimento e reflexões pessoais (profissionais) partindo das necessidades reais presentes no cenário de investigação.

3.3A construção dos dados da pesquisa

Instrumentos para coletar dados é um potente recurso em meio a uma pesquisa. Eles permitem um conjunto de informações que possibilitam melhor compreensão daquilo que desejamos investigar. Os instrumentos de coleta de dados utilizados nesta pesquisa foram observações, relatórios e questionário (vide apêndices).

Abordando técnicas de pesquisa, Marconi e Lakatos (2006, p. 88) definem:

> A observação é uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver e ouvir, mas também em examinar fatos e fenômenos que se deseja estudar.

Dessa forma, é inconcebível um professor pesquisar em sua sala de aula desprendido de observações como meio de coletar dados. Nesse sentido, Luna (2003 apud SANTOS; MOLINA; DIAS, 2007, p. 143),tratando de observação para coleta de dados explica que,

> quando trata de tipos de fontes de informação, salienta que elas se dividem em observação direta, observação indireta, relato verbal e documento. A observação direta trata de registro de uma dada situação, acontecimento ou ocorrência; já a observação indireta refere-se ao uso de indícios ou pistas como informações das quais se deduzem outras informações.

Os relatos verbais, segundo Santos, Molina e Dias (2007, p. 143), “são as falas dos sujeitos de modo ainda informal sem a elaboração prévia dos instrumentos (questionário, entrevista e formulários), e os documentos são fontes de informações, que podem ser literatura pertinente ao assunto”.

Para essas autoras as pesquisas geralmente começam com a observação, o reconhecimento do local em que será realizada a pesquisa e a descoberta prévia dos sujeitos envolvidos. A partir dessa observação aliada à fundamentação teórica da pesquisa é que se consegue elaborar instrumentos com o objeto de colher dados das pessoas. Essas observações estão relacionadas ao grau de experiências e leituras do pesquisador.

Assim, conforme expresso no Capítulo 1 abordando as motivações desse trabalho, foram inúmeras observações da prática enquanto docente que despertou o desejo dessa investigação. Aguçar um olhar sobre a turma de Cálculo II foi o primeiro instrumento para elencar dados nesta pesquisa.

Outro instrumento importantíssimo foram os relatórios redigidos pelos discentes, devidamente identificados. Como metodologia da pesquisa foi desenvolvida atividade didática a fim de investigar o tema proposto, e sob a orientação, os alunos fizeram registros das dificuldades encontradas, das conjecturas, dos procedimentos utilizados, argumentos de validação ou não das conjecturas, observações, etc. No final das atividades relatórios escritos sobre os trabalhos desenvolvidos foram entregues.

No que se refere a relatório, Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 109-110), destacam:

> Um relatório é uma produção escrita, realizada por um aluno ou por um grupo de alunos, tendo em vista apresentar um trabalho previamente desenvolvido. Os alunos podem ser convidados a referir no relatório não só as conclusões que tiraram de realização de uma tarefa de investigação, mas também os processos que usaram para chegar a essas conclusões. Nesses processos podem incluir-se as questões levantadas acerca da situação proposta, a bibliografia e outras fontes consultadas, o modo como organizaram os dados, as conjecturas provadas e não provadas, os procedimentos usados para validação das conjecturas, etc.

Importante ressaltar que um relatório pode ser mais interessante se incluir informação sobre os aspectos citados por esses autores, pois permitirá ao professor conhecer não só as conclusões a que os alunos chegaram, mas também os processos por eles utilizados.

Por fim, outras valiosas informações foram coletadas através da aplicação de um questionário, onde foi preservada a identidade do participante. Marconi e Lakatos (2006, p. 98), definem que:

> Questionário é um instrumento de coleta de dados constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador. Em geral, o pesquisador envia o questionário ao informante, pelo correio ou por um portador; depois de preenchido devolve-o do mesmo modo.

Para esses autores a elaboração de um questionário requer a utilização de normas precisas, a fim de aumentar sua eficácia e validade. A fim de evitar fadiga e desinteresse e para não correr o risco de não obter informações suficientes, o questionário aplicado nesta pesquisa foi limitado em extensão e em finalidade. Foi elaborado contendo 11 questões, onde as sete primeiras eram de caráter fechada ou tricotômica e inquiriam sobre dificuldades de aprendizagem de conteúdos estudados em sala de aula e metodologia empregadas para o ensino.Além disso, continha quatro questões abertas a fim de perceber as opiniões dos participantes sobre a metodologia do uso da História da Matemática em Atividades Investigativas e do material concreto utilizado, destacando suas vantagens e desvantagens, bem como suas reflexões para futura prática escolar, até mesmo como docente.

Com o propósito de manter sigilo e não inibir ou induzir os participantes, o questionário (Apêndice A)foi enviando pelo correio eletrônico da turma e junto o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B) explicando a natureza da pesquisa, sua importância e a necessidade de obter respostas, tentando despertar o interesse da população alvo da pesquisa, para que ele preenchesse e devolvesse, no período de 04 a 15 de maio de 2015.

Dentre as orientações apresentadas aos participantes da pesquisa, havia a de digitar as respostas, imprimir e passar para um único colega que faria a entrega do material para o professor. Por fim, dos treze alunos, dez entregaram o questionário e concederam participar da pesquisa. Depois de usar três instrumentos e coletar os dados, o desafio foi analisá-los com rigor, como está apresentado nos próximos capítulos.

3.4A construção da atividade “Ressignificando o cálculo de áreas”

A construção do recurso para ser utilizado em sala de aula se deu de forma simples, fazendo uso de conhecimentos de funções e gráficos. Os materiais empregados foram cartolinas verdes, tinta guache azul, purpurina, papel transparência, régua e caneta. Também um texto (apostila)contendo em resumo a História da Matemática sobre contribuições de povos antigos para a sistematização do cálculo de áreas, para introduzir os trabalhos de modo a buscar uma contextualização mais próxima da realidade dos estudantes.

A atividade proposta “Ressignificando o cálculo de áreas” tratava-se de calcular a área de um terreno situado às margens do rio Nilo que tinha o formato irregular, o qual seria representado pelo material construído.

Primeiro desenhei nas cartolinas (que representava o terreno) uma figura que representava um rio,as linhas que formam as margens do rio eram gráficos de funções traçados por um sistema cartesiano “imaginário”.

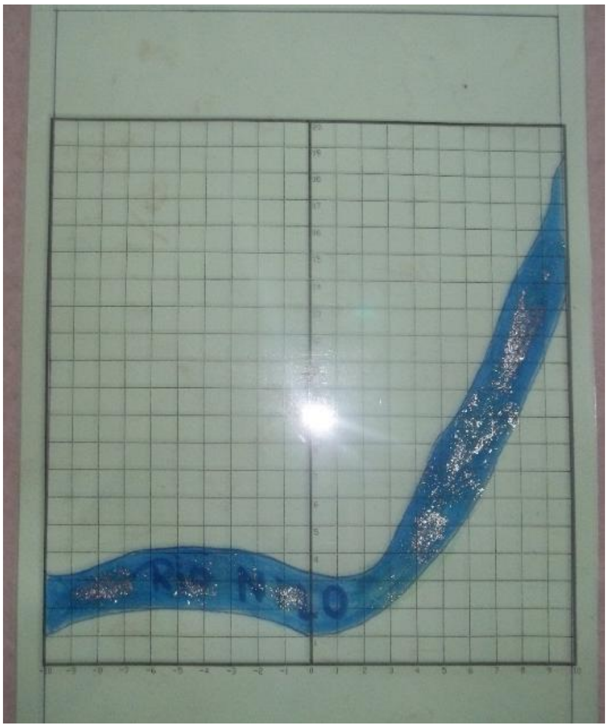
Utilizando um software, um sistema de eixos coordenados (eixo das abscissas e eixo das ordenadas) foram plotados e impressos num papel transparência o qual sobreposto na cartolina nos permitiu visualizar as margens do rio como o gráfico traçado num plano cartesiano.

Toda área que representava o rio foi pintada com tinta azul e aplicado purpurina para dar um brilho, como que os raios do sol incidissem sobra as águas, para parecer mais real, conforme Figuras 9 e 10 a seguir.

Figura 9 - Atividade: “Ressignificando o cálculo de áreas” por meio do material concreto

Fonte: Imagem obtida pelo autor

Figura 10 - Material concreto suporte para Atividade Investigativa



Fonte: Imagem obtida pelo autor

Conforme a Figura 10, o papel transparência plotado o sistema cartesiano foi colocado sobre a cartolina que representa o terreno fictício. Na região do primeiro quadrante (intervalo [0; 10]) o leito do rio representa uma curva e no segundo quadrante (intervalo de [-10; 0] o leito do Nilo é representado por outra curva, ambas sendo união de parábolas que se intersectam no ponto coordenado $(0{,}1)$.

Para introduzir a atividade “Ressignificando o cálculo de áreas” foi criado o texto intitulado *Panorama Histórico: sistematização e formalização do cálculo de áreas* que se encontra no apêndice C.

Esta atividade foi realizada em grupos de até quatro alunos e teve por objetivos, atrair e fazer o aluno se sentir personagem da história, além de promover a interação do aluno com os demais colegas.

4. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Esse capítulo apresenta os resultados obtidos durante a realização desta pesquisa que buscou identificar e analisar o desenvolvimento da atividade “Ressignificando o cálculo de áreas” via História da Matemática em Atividades Investigativas na atuação docente.

4.1 Áreas: contextualização do conteúdo e a construção do conhecimento

A atividade “Ressignificando o cálculo de áreas” foi desenvolvida nos horários das aulas de Cálculo II do curso de Matemática do *Campus* VI/UNEB, com a participação de 13 alunos que foram subdivididos em quatro grupos. A proposta foi realizada na aplicação de oficinas, no intuito de gerar um ambiente dinâmico e cooperativo, onde os participantes foram instigados a investigar, criar conjecturas, testar e validar ou não hipóteses, criar conceitos por meio de noções intuitivas e então formalizar definições.

Segundo D’Ambrósio (1986, p. 44), para definir uma estratégia para o trabalho em sala de aula devemos

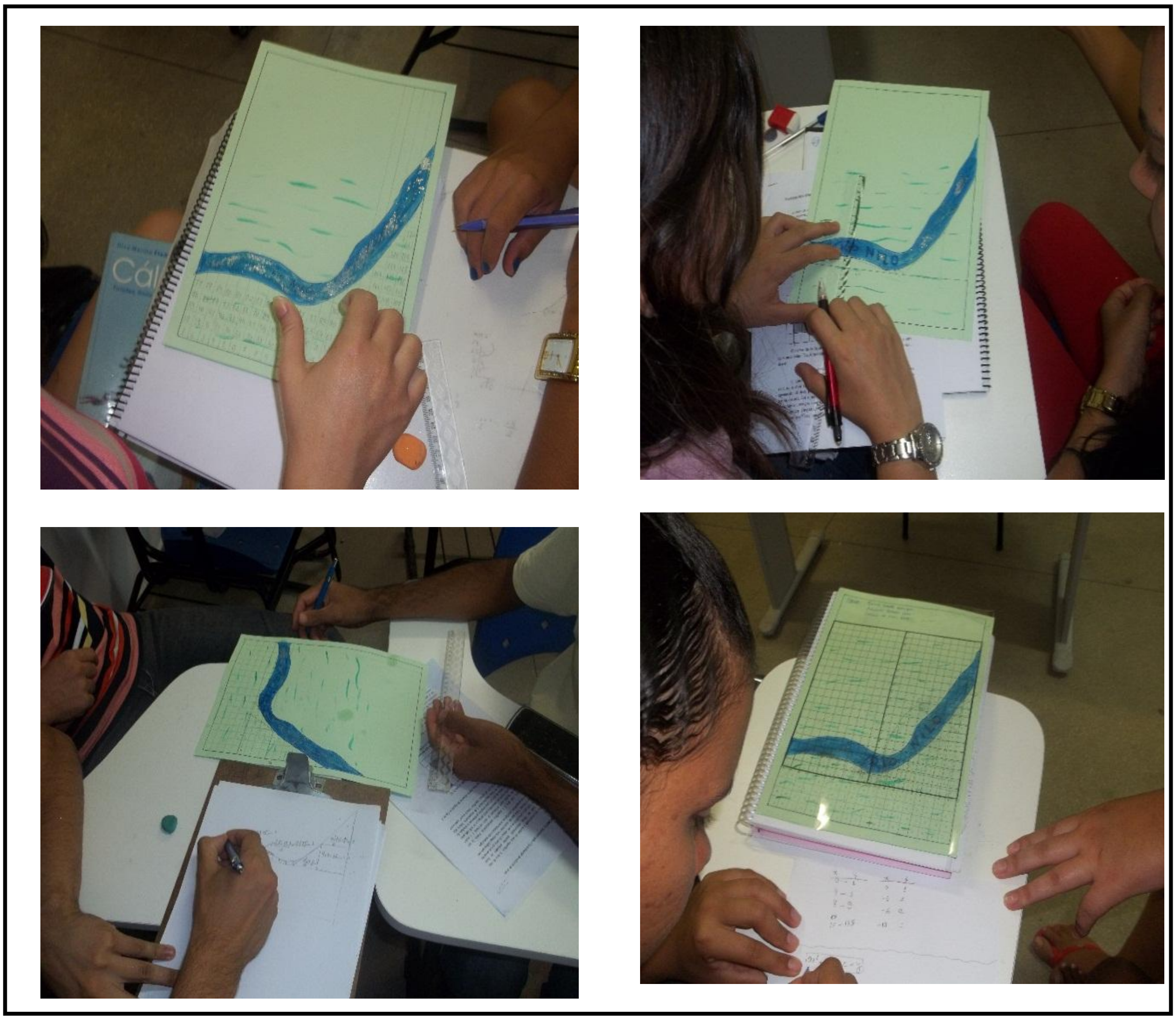
> considerar os elementos em jogo neste contexto, isto é, o professor na qualidade de agente de um processo e o aluno na qualidade de paciente do processo, isto é, o professor aquele que orienta a prática docente e o aluno aquele que se submete a essa prática orientada pelo professor.

Assim sendo, as aula foram planejadas para que os sujeitos pesquisados concebessem os conceitos e as definições de forma satisfatória. No decorrer da dinâmica foram realizados discussões com embasamentos matemático, com recorrência a conhecimentos outrora estudados.

Previamente os alunos foram orientados a pesquisarem sobre dois temas: o método da Exaustão e a soma de Riemann, pois conhecer tais assuntos seria fundamental para ações e discussões na atividade a ser realizada.

Após distribuir o texto para todos os alunos e proceder à leitura, foi explicado como se daria o desenvolvimento da atividade. A turma foi dividida em três grupos com três alunos, também um grupo com quatro alunos em que convencionou-se que cada 1 cm^2 na cartolina corresponderia a 1 unidade de área (u.a) do terreno fictício. Todas as cartolinas tinham o mesmo desenho e cada equipe calcularia a área sob o rio, sendo que cada uma calcularia a área da melhor maneira que entendessem. A Figura 11ilustra o desenvolvimento da atividade.

Figura 11 - Desenvolvimento da atividade “Ressignificando o cálculo de áreas”



Fonte: Imagem obtida pelo autor

Como já era esperado, os alunos passaram a fazer repartições da região em figuras geométricas regulares mais conhecidas como quadrados, retângulos e triângulos, das quais sabiam calcular a área por meio de formas convencionais. Ao encostarem na borda do terreno (margem do rio), todos os grupos sentiram as mesmas dificuldades, houve muitas discussões de como realizar essa tarefa. Um grupo optou por traçar triângulos e os outros preferiram traçar quadrados de 1cm x 1 cm e iam diminuindo a área de seus desenhos tentando englobar a área que pretendiam calcular e perceberam que era um trabalho exaustivo e concluíram que o melhor valor adquirido não poderia ser um valor exato, e sim um valor aproximado.

Neste momento, um objetivo na proposta foi atingido. As conclusões obtidas pelos grupos foram ponderadas e comparadas com as de certos matemáticos do quarto século a.C.. Dentre eles, os matemáticos gregos sabiam que:

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. (BOYER, 1996, p.63).

Essa constatação dos gregos é a base de um método, conhecido como método de exaustão.

As dificuldades encontradas na realização da atividade pelos pesquisados foram as mesmas que célebres matemáticos tiveram e as técnicas usadas pelos grupos também foram similares a de matemáticos como Arquimedes (287-212 a.C.). Conforme Boyer (1996, p.63), percebe-se que:

> Matemáticos anteriores parecem ter sugerido que se tentasse inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e por fora da figura curva, e ir multiplicando indefinidamente o número de lados; mas não sabiam como terminar o argumento, pois não conheciam o conceito de limite. Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego de cálculo integral.

Durante o desenvolvimento das atividades os alunos fizeram registro dos procedimentos adotados, das dificuldades encontradas, das conjecturas, observações, etc., para a elaboração do relatório estruturado do trabalho desenvolvido. No excerto, seguem cópias de parte dos relatórios de dois grupos dos participantes da pesquisa.

Como introdução ao conteúdo Áreas da disciplina Cálculo II, foi proposto aos discentes um desafio:

"A partir de uma gravura do Rio Nilo, determinar a área situada abaixo do rio".

— Para solucionar o problema, fizemos a divisão em todo o espaço abaixo do Rio Nilo, essa divisão foi baseada nas medições realizadas pelos antigos agrimensores egípcios, cada segmento dividido, tinha o formato quadrangular, medindo 1 x 1 cm.

Porém ao fazer as divisões encontramos alguns obstáculos, uma vez que o Território era irregular, desta forma percebemos que algumas divisões não mediam 1x1 cm.

Sendo assim, fomos fazendo compensações territoriais e concluímos que a área compreendida abaixo do Rio do nilo é de aproximadamente 68,5 cm^2.

(Relatório, grupo A)

Ao realizar a atividade proposta pelo professor Daniel, na disciplina de calculo II no curso de matemática, deparamos com algumas dificuldades, pois a atividade consistia em encontrar a área de uma determinada figura, assim como em selecionar o melhor método a ser utilizado é a rigidez em aproximar o mais perto possível do valor.

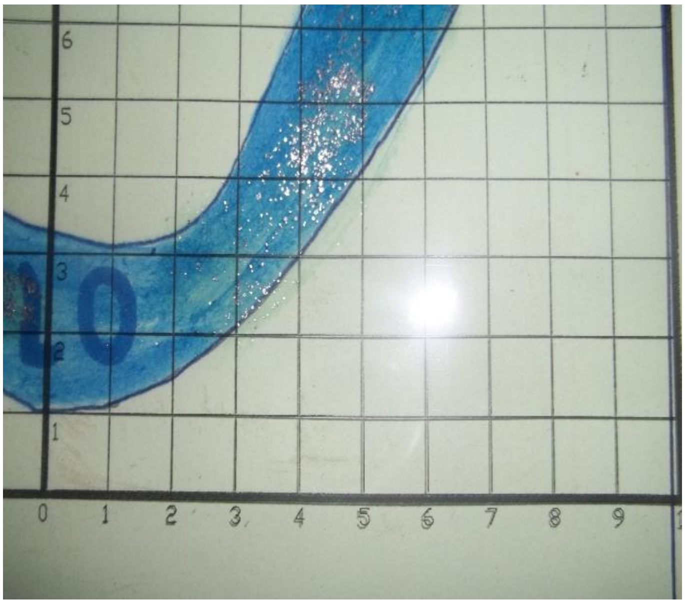
É assim foi selecionado para ser usado o método de exaustão, que consistia em fazer uso de figuras, cuja área é conhecida para encontrar o valor aproximado da figura desejada.

Porém a figura não permitia desenhar figuras exatas, o que foi necessário utilizar diferentes figuras como: quadrado, retângulos e triângulos e como unidade de medida de 1cm. Posteriormente os valores de cada figura foi somado e encontramos um valor aproximado da área procurada.

(Relatório, grupo B)

Após todos terem encontrados e registrados os valores para aquela área, foram entregues aos grupos papéis transparência plotado o sistema cartesiano e conforme a Figura 12, houve discussão para determinar que tipo de curva estava ali representada. Após perceberem que eram parábolas, por interpolação polinomial determinaram as funções que aqueles gráficos representavam.

Figura 12 -Visualização da área sob um sistema cartesiano



Fonte: Imagem obtida pelo autor

De maneira conveniente tomaram os pontos coordenados$(-10, 1)$, $(-5, 2)$e $(0,1)$, também os pontos $(0,1)$, $(4,3)$ e $(8,9)$, facilmente visualizados no recurso que estava sendo manipulado e substituíram respectivamente nas equações genéricas $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $h(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, montaram e resolveram dois sistemas de equações calculando os valores dea_1, b_1e c_1, bem como os dea_2, b_2 e c_2. Após esses cálculos concluíram que do intervalo [-10, 0] o gráfico representava a função $g(x) = -x^2/25 - 2x/5 + 1$e que no intervalo [0,10] a função era $h(x) = x^2/8 + 1$, ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{2}{5}x + 1 & se - 10 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{8} + 1 & se\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Antes de encerrar a aula neste dia, os discentes foram orientados para usarem retângulos conforme a Figura 13, para recalcularem a área sob o rio Nilo e observarem a diferença dos resultados sem a presença do mediador. Eles deveriam utilizar 10, 20 e 40 retângulos com base sobre o eixo dos $x$cuja altura seria determinada pela função do ponto médio, ou seja, $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$.Dessa forma, acordo com a figura 13, o C_i seria o referido ponto médio e em cada retângulo uma pequena área acima da curva. Porém, abaixo da curva uma pequena região seria exclusa dos cálculos. No entanto, a área acima da curva compensaria a região abaixo com boas aproximações.

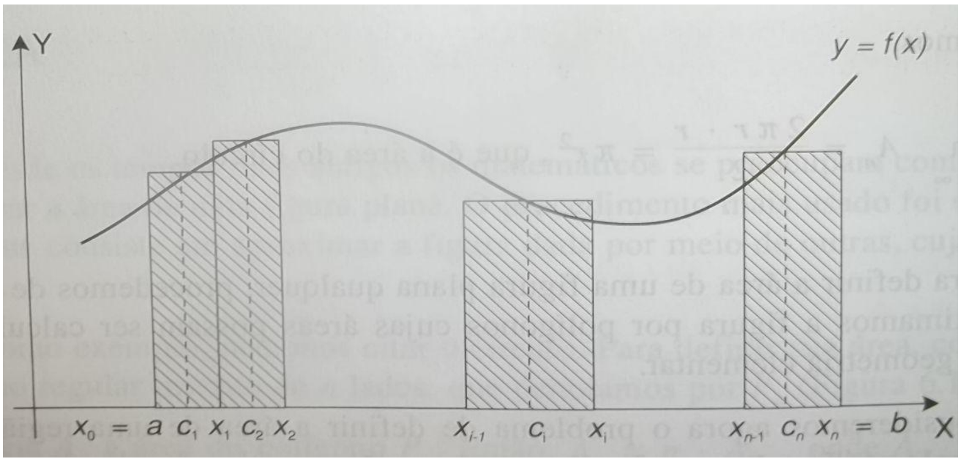
Na aula seguinte as discussões foram retomadas para calcular a área proposta na atividade usando retângulos. Todos tinham feito a atividade proposta em casa usando lápis, papel, muita borracha e calculadora, o que serviu para que eles percebessem quão trabalhoso foi a empreitada enfrentada pelos matemáticos do passados por falta de tecnologia. Para verificar a correção dos cálculos obtidos, Planilhas Eletrônicas formam utilizadas para os mesmos cálculos com 10, 20, 40 e 200 retângulos (tabela de cálculos no apêndice D) ao tempo que proporcionou uma boa discussão sobre a importância do uso de tecnologia em sala de aula. Intuitivamente todos já haviam percebido que à medida que aumentava o número de retângulos o valor da área variava infimamente ou muito pouco.

Neste patamar,havia a consciência de que para otimizar os cálculos seria necessário inserir o conceito de limites e após discutirmos sobre a soma de Riemann, o trabalho das autoras Flemming e Gonçalves (1992)foram relevantes para a definição formal de Integral Definida para calcular área de regiões irregulares sob curvas delimitada por intervalos:

> Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas. A integral definida está associada ao limite. Ela nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas... Temos a seguinte definição:
> Seja f uma função definida no intervalo [a, b] e seja P uma partição qualquer de [a,b]. A integral definida de f de a até b, denotada por
>
> $\int_a^b f(x)dx$,é dada por
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{máx\Delta x_{i\to 0}} f(c_i)\Delta x_i$$
>
> Desde que o limite do 2º membro exista. (FLEMMING; GONÇALVES, 1992, p.356).

A Figura 13 expressa geometricamente a definição de integral de curvas delimitadas por retas num intervalo fechado.

Figura 13 - Representação geométrica da definição da integral



Fonte: Flemming e Gonçalves (1992, p.358)

Dessa forma,conceituamos a Integral Definida por meio de aplicação para cálculo de área sob curvas delimitadas por retas num intervalo fechado. Salientamos que esta definição também tem aplicação no campo da física, da economia, etc. onde ponderamos o contexto histórico paralelo de Isaac Newton e Leibniz como sistematizadores desse cálculo que evoluiu como contribuição de outros personagens como Riemann (1826-1866) e Stieltjes (1856-1894).

Com o algoritmo da Integral Definida já rigorosamente definido, os alunos foram solicitados a calcularem a área da região sob a mesma curva do rio Nilo e compararem os resultados obtidos com os anteriores encontrados, em que os valores que os grupos encontraram se aproximaram do valor encontrado por meio da integral definida.

Muitos alunos ficaram entusiasmados com o resultado e dentre vários comentários positivo destaca-se: *Conseguimos ver sentido naquele conteúdo.*

Essa proposta apresentou um posicionamento explícito acerca de uma relação específica entre a História da Matemática e a Investigação Matemática. A preocupação em romper com a maneira tradicional de apresentação da integral, por meio de um método diferenciado foi a motivação para a realização e a compreensão da atividade.A proposta busca na História da Matemática os elementos orientadores para a construção do conhecimento.

As ideias desse procedimento estão elencadas nas proposições de Clairaut (1892, p. 9-10 apud MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 34).

> Pensei que esta ciência, como todas as outras, fora gradualmente formada; que verossimilmente alguma necessidade é que promovera seus primeiros passos não podiam estar fora do alcance dos principiantes, visto como por principiantes foram dados. Com essa ideia, propus-me remontar ao que podia ser a fonte da geometria. Tratei de desenvolver-lhe os princípios por um método tão natural que pudesse ser tido como o próprio empregado pelos inventores; fugindo, entretanto, todas as falsas tentativas que eles naturalmente fizeram. A medida dos terrenos me pareceu mais própria para dar origem às primeiras proposições de geometria; e é efetivamente daí que provem esta ciência, pois que geometria significa medida de terreno. Pretendem alguns autores que os egípcios, vendo os limites de suas herdades continuamente destruídos pelas cheias do Nilo, lançaram os primeiros fundamentos da geometria, procurando os meios de se certificarem exatamente da situação, da superfície e da configuração de seus domínios.

A história pode ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar na atualidade. Meserve (1980, p. 398 apud MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 45) reforça que “a história da matemática aparece como um elemento potencial para subsidiar a compreensão de certos tópicos matemáticos por parte do estudante, tópicos que lhe deveriam ser ensinados a partir de técnicas de resolução de problemas”.

Na aula seguinte os alunos formam informados que as atividades realizadas eram de cunho investigativo para fins de divulgação e que haveria outra fase para o preenchimento de um questionário. Depois de elucidado todas as razões e importância do trabalho todos concordaram pelo pleno uso e divulgação dos dados e análise dessas informações para fins acadêmicos.

Neste capítulo foi exposta e comentada a atividade “Ressignificando o cálculo de áreas”, aplicada aos discentes. As análises das observações realizadas antes e durante a aplicação das atividades, dos relatórios e do questionário aplicado, após a realização da atividade, estão no próximo capítulo.

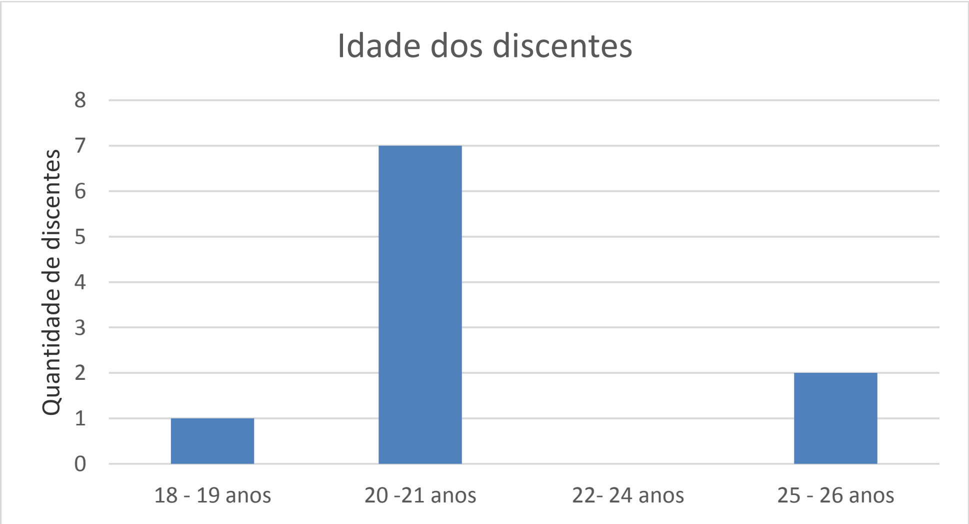
5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DOS MOMENTOS EXPERIENCIADOS NO DESENVOLVIMENTO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Neste capítulo, apresentamos os resultados do desenvolvimento da História da Matemática em Atividades Investigativas para a construção do conhecimento de cálculo de áreas mediante as observações feitas antes e durante a realização da atividade “Ressignificando o cálculo de áreas”, as respostas apresentadas no questionário e os relatórios produzidos pelo grupo participante da pesquisa.

No questionário foram feitas perguntas que buscaram levantar dados para a pesquisa acadêmica, que investiga a utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas para o cálculo de áreas por integral definida.

O Gráfico 1, a seguir, mostra que a turma é composta, na sua maioria por alunos entre 20 e 21 anos. Idade compatível para o 5º período que estão cursando a licenciatura em Matemática.

Gráfico 1 - Faixa etária dos discentes



Fonte: Elaborado pelo autor

Observações diretas e conversas informais mostram que muitos são moradores de cidades vizinhas dentro dum raio de 100 km de Caetité e tem gastos financeiros para se manterem na universidade.Encontrando-se nas faixas etárias apresentadas, sentem-se atraídos pelo mercado de trabalho. Dessa forma, a maioria já trabalha oito horas por dia. Além da jornada de trabalho passa algumas horas dentro do transporte rumo à universidade. Observações indiretas fazem-me crê que repetidas vezes um determinado aluno dormia na sala de aula devido cansaço de sua jornada diária de trabalho árduo numa oficina mecânica. Outros fatores não investigados fazem com que esses alunos por terem mais de 18 anos procurem empregos por tempo integral o que compromete sua dedicação aos estudos.

Cansados fisicamente e até mesmo emocionalmente devido à carga de trabalho e com pouquíssimo tempo para se dedicarem aos estudos, esses alunos apresentam dificuldades de aprendizagem e a maioria em compreender os conteúdos de Cálculo como limite, derivada e integral, como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2 - Percentual de alunos com dificuldades para compreender conteúdos de Cálculo

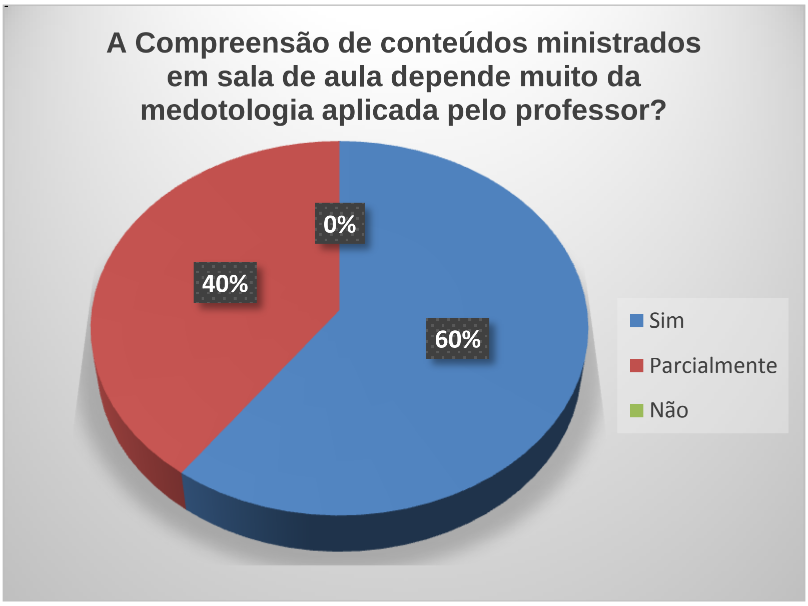
Fonte: Elaborado pelo autor

Observações diretas e relatos escritos apontam que outro fator que contribui para que os discentes tenham dificuldades com a disciplina Cálculo é a concepção de que a disciplina é difícil. Pontuando essa questão, uma discente participante da pesquisa relatou:

- *A disciplina matemática é em geral considerada por muitos alunos, como uma disciplina complicada, e de difícil compreensão, no meu ponto de vista, isso acontece, porque geralmente o ensino dessa matéria ocorre apenas através da memorização de fórmulas e algoritmo [...]*

Aulas meramente expositivas pautadas em memorização de regras, exercícios mecânicos, apresentação de uma matemática descontextualizada e sem aplicabilidade, dentre outras questões, fazem a matemática, especificamente em relação ao Cálculo, parecer desagradável para muitos estudantes. Desmistificar essa ideia é, sobretudo, papel do professor, e a sua postura metodológica é que exerce tal poder. A opinião dos pesquisados retrata essa argumentação no Gráfico 3, onde revela que a compreensão de conteúdos estudados em sala de aula depende muito da metodologia do professor.

Gráfico 3 - Compreensão de conteúdo x metodologia do professor



Fonte: Elaborado pelo autor

Garzella (2013) pesquisando em turmas de Cálculo I analisou os impactos das práticas pedagógicas adotadas por docentes da disciplina – cuja alta taxa de reprovação é notória – no processo de ensino e aprendizagem e na vida acadêmica e pessoal dos alunos. Garzella (2013) expõe que além das próprias mudanças desgastantes na inserção do aluno na universidade que interferem no seu sistema emocional, como a mudança para um novo ambiente, afastando-se da família, a convivência com outras pessoas, a diferença dos conteúdos estudados em relação ao ensino médio, entre outros, apresentam-se na estruturação da disciplina de Cálculo I, elementos que dificultam a aprendizagem por parte do aluno ingressante.

Ainda no que se refere à matemática, Lara (2003, p. 18-19) aponta:

> Se não entendermos a Matemática somente como um conhecimento universal em todo o seu corpo teórico de definições, axiomas, postulados e teoremas, mas, também, como um conhecimento dinâmico que pode ser percebido, explicado, construído e entendido de diversas maneiras, reconhecendo que cada aluno possui a sua forma de matematizar uma situação, estaremos contribuindo para o

> novo modo de ver a Matemática, até então considerada uma disciplina vista como um “bicho-papão”.
> Esse “bicho-papão” ou terror dos nossos alunos só perderá sua áurea de “lobo-mau” quando nós, educadores, centrarmos todos os nossos esforços para que ensinar Matemática seja: desenvolver o raciocínio lógico e não apenas a cópia ou repetição exaustiva de exercícios padrão; estimular o pensamento independente e não apenas a capacidade mnemônica; desenvolver a criatividade e não apenas transmitir conhecimentos prontos e acabados; desenvolver a capacidade de manejar situações reais e resolver diferentes tipos de problemas e não continuar naquela “mesmice” que vivemos quando éramos alunos.

A reação e resultados obtidos pelos alunos durante e após a aplicação da atividade proposta na referida pesquisa aponta que da maneira citada pela professora e pesquisadora Lara (2003), será possível pensar em uma matemática prazerosa, interessante, que motive nossos alunos, dando-lhes recursos e instrumentos que sejam úteis para o dia a dia, buscando mostrar-lhes a importância dos conhecimentos matemáticos para a sua vida social, cultural e política.

Por perceber que a grande maioria dos alunos tem dificuldades de compreender bem os conceitos fundamentais do Cálculo, embasada em sua pesquisa e reflexões da própria carreira docente, lecionando Cálculo, Silva (2010) apresenta-nos sugestões que se estrutura em ricas possibilidades para ensinar este componente curricular fazendo uso da História da Matemática. A professora e pesquisadora acredita e propõe “usar a história por meio dos problemas propostos ao logo desta para ressignificar o ensino do cálculo”. (SILVA, 2010, p.232). Aproximo dessa autora agregando junto as suas ideias, o espírito investigativo, pois como podemos perceber o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas desperta nos estudantes o senso de empatia em relação aos matemáticos do passado, quando viajam no tempo, e redescobrem a matemática, compreendendo de forma significativa os conceitos e aplicabilidades do Cálculo.

Silva (2010) propõe que o curso de Cálculo remonte as contribuições da Grécia antiga, o que ajudaria os alunos descobrir o interesse que os gregos tinham por ciência de modo geral e o que foram capazes de produzir, também rever os problemas com os quais os gregos estavam envolvidos. Dentre vários tópicos a pesquisadora sugere:

> Ainda na Grécia Antiga poderiam conhecer os problemas sobre cálculo de áreas sobre regiões curvas- primeiro lúnulas e circunferências (ver, por exemplo, como esta demandou uma longa

> discussão sobre o valor de π(pi) e aí chegar até os trabalhos de Eudoxo e Arquimedes desenvolvendo o método da exaustão para o cálculo de quadraturas de parábolas e outras curvas. Compreendendo a limitação de cada modelo apresentado e as ferramentas matemática utilizadas. Estudar as leis de Aristóteles sobre movimentação percebendo suas limitações. (SILVA, 2010,p.234)

A citação anterior é um de sete tópicos que Silva (2010) sugere e que juntamente com as discussões de sua pesquisa: Problemas e Modelos que contribuíram com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral: dos gregos a Newton, alicerça sua proposta de um fluxograma[7] como ementa para um curso de cálculo Diferencial e Integral.

A ementa é dividida em cinco unidades, que começa com as contribuições dos gregos para o Cálculo; perfaz as ricas contribuições por diferentes povos e personalidades no decorrer de séculos, e culmina com as contribuições de Newton e Leibniz- o teorema Fundamental do Cálculo- as aplicações e desdobramentos do desenvolvimento de Newton.

Para implantar algo novo, como uma nova ementa, requer um bom planejamento e conforme vimos no capítulo 2 para maior grau de sucesso no ensino, os professores devem pesquisar a própria prática, buscando novos conhecimentos e reavaliando continuamente seu relacionamento com seu meio de atuação, refletindo sua metodologia e fazendo mudanças necessárias. Para Floriani (2000, p. 15),

> Há muitas dificuldades para educadores matemáticos transcenderem a própria prática, dando-se realce à péssima formação em “humanidades”, à acentuada impregnação racional-positivista e ao autodidatismo pedagógico imposto à maioria dos licenciados em Matemática. Há, porém, também fatores positivos, especialmente aqueles ligados ao fato de que o professor possui elementos concretos para pesquisar, levando-se em consideração sua labuta em sala de aula.

Silveira e Miola (2008) destacam que para tal atitude o professor deve ter vontade, desejo de mudança, assumindo o papel de autênticos protagonistas no campo curricular e profissional.Paramos para pensar acerca disso. Cabe aos professores mudanças de atitude, e muitos dos atuais docentes, principalmente na

---

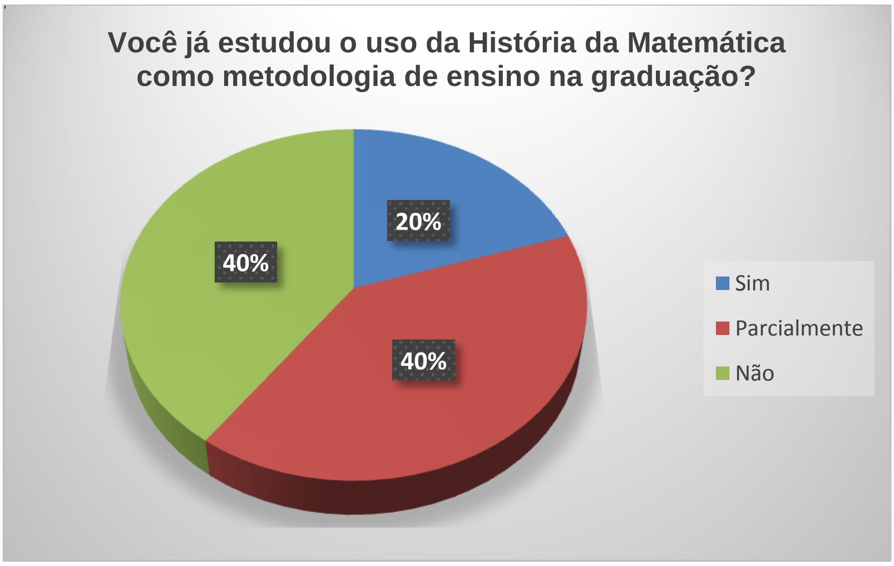
[7]Veja fluxograma proposto por Silva (2010) em: SILVA, M. D. F. da. **Problemas e modelos que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral:** dos gregos a Newton. 2010. 239f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, PPGE/UFRN, 2010.

educação básica, depois de anos de carreira tem arraigadas em seu perfil profissional as velhas características tradicionais. O que fazer?

Investir nos futuros professores, trabalhar bem a formação desses profissionais nos cursos de licenciaturas, “de modo a formar o professor como um profissional reflexivo e investigador de sua prática pedagógica, concebendo-o como produtor de saberes profissionais”. (CYRINO, 2006, p. 81).

Por meio dos avanços no campo de pesquisa em Educação Matemática referente às Tendências da Educação Matemática percebemos no caso estudado, na turma do quinto semestre do curso de Matemática, que os professores em formação já tiveram contato com algumas tendências metodológicas, principalmente o uso da História da Matemática como metodologia de ensino. O Gráfico 4 retrata essa informação.

Gráfico 4 – História da Matemática integra o currículo dos professores em formação



Fonte: Elaborado pelo autor

Um aluno participante da pesquisa justifica o porquê de muitos alunos chegarem a ter aversão à matemática apontando no questionário respondido, no mês de maio de 2015:

- A disciplina matemática é em geral considerada por muitos alunos, como uma disciplina complicada e de difícil compreensão. No meu ponto de vista, isso acontece porque geralmente o ensino dessa matéria ocorre apenas através da memorização de fórmulas e algoritmos, a maior parte dos professores não ensina aos estudantes a História da Matemática como recurso de introdução aos conteúdos

estudados. Conhecer a História da Matemática é essencial para que as aulas relacionadas a esta área sejam mais didáticas e que os alunos tenham uma aprendizagem significativa.(Aluna participante da pesquisa).

Os pesquisadores Brito e Carvalho (2009, p. 15-16) na busca pela formação do professor que saiba profundamente Matemática, comentam:

> Entendemos "saber profundamente" em um sentido que vai além de o professor demonstrar com exatidão teoremas e ter algum conhecimento sobre quem e em que época tal teorema ou propriedade matemática "foi descoberta". Para nós o professor "saber profundamente Matemática" significa que além de conhecer teoremas, consegue relacionar diferentes campos desse conhecimento, refletir sobre os fundamentos da Matemática, perceber seu dinamismo interno e suas relações com outros campos do saber, transitar nos diferentes sistemas de registro de representação e, principalmente, entender o conhecimento matemático como um saber que coloca problemas e não apenas soluções. Neste sentido, a história da Matemática pode ser bastante útil, pois nos coloca muitas questões acerca das concepções de verdade, de rigor, de demonstração, de definições e de sistemas de registros de representação geométrica, ou seja, nos incita a aprofundar nossas reflexões enquanto professores de Matemática que se propõem educadores.

Apontar e fazer os licenciandos perceberem a eficácia do uso da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem será de grande relevância para se conscientizarem de suas futuras práticas. Conforme já pontuamos no capítulo 2, ao investigar, o aluno essencialmente faz matemática, desenvolve uma série de habilidades que se assemelham àquelas habilidades comuns aos matemáticos, pois precisam testar suas proposições e provar suas conjecturas. Eles pensam matematicamente e aguçam a sua criatividade. Assim, propor atividades geométricas que impulsionam a formalização da matemática, tais como apontadas na fundamentação teórica é bastante promissor para se fazer investigação matemática em sala de aula.

Opinando sobre o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas como via para o ensino, um dos pesquisados relatou:

- A partir da utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas é possível que o aluno compreenda quais foram as situações cotidianas deparadas pelo homem, que o inquietou para resolvê-las através dos

determinados conteúdos matemáticos. Sendo assim, possibilita melhor compreensão dos alunos, pois eles conseguem assimilar os conteúdos trabalhados com as suas realidades do dia a dia. (Aluna participante da pesquisa).

Nos comentários dos participantes da pesquisa, percebemos claramente a importância da História da Matemática em Atividades Investigativas para o processo de ensino-aprendizagem.

- O uso da História da matemática é uma ferramenta eficaz que contribui para uma aprendizagem significativa, permitindo entender conceitos através de sua origem. O aluno reconhecerá a matemática como uma criação humana, que surgiu para resolver problemas do cotidiano. (Aluno participante da pesquisa).

Devido a importância dessa metodologia os PCN's (BRASIL, 1998, p. 40), destaca:

> A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como respostas a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações interna à própria matemática.

Essa importância foi acentuada por mais um dos alunos, que após viver a experiência de participar de Atividades Investigativas via História da Matemática argumentou:

- É de extrema importância a História da Matemática em Atividades Investigativas, pois assim o aluno tem a chance de conhecer a origem do conteúdo e como os povos antigos faziam para viver e fazer descobertas sem o conhecimento matemático. Muitas vezes nos deparamos em sala de aula, com os estudantes fazendo questionamentos "Pra que serve esse conteúdo?", "Em que vou usar esse assunto?" A História da Matemática nos leva a responder essas diversas perguntas que surgem em sala de aula e que desanimam tanto os alunos quando se tratam de conteúdos matemáticos. (Aluna participante da pesquisa).

Percebemos nos relatos que os participantes da pesquisa notaram a importância e eficácia dessa metodologia proposta. Mas será que esse êxito atingirá a educação básica? Ao justificar essa pesquisa percebe-se que a mesma contribuiria com a educação básica por promover um efeito em cadeia, influenciando a prática docente dos participantes em seus estágios, pesquisas de monografias e práticas profissionais para aqueles que iriam seguir a carreira do magistério na educação básica. O Gráfico 5 mostra o efeito conscientizador dessa proposta.

Gráfico 5 – Perspectiva de usar a História da Matemática em Atividades Investigativas como metodologia de ensino

Fonte: Elaborado pelo autor

O resultado exposto aponta que esses futuros professores da educação básica, ao menos em sua formação, assumem um papel decisivo; todos, sem nenhuma exceção,estão preocupados com o aprender significativo, onde a motivação está entrelaçada com a visão de aplicabilidade do que se estuda na medida do possível. Com essa inovação, abrem-se caminhos coletivos para a construção do conhecimento, tanto para o docente como para o discente.

Nesse mesmo semestre (2015.1) duas discentes do curso sentiram-se motivadas a fazerem seus projetos de pesquisa para a monografia de Trabalho de Conclusão de Curso sob o tema em discussão.

Refletindo sobre as dificuldades e resultados das investigações propostas em torno do conteúdo Integral Definida, um dos participantes avaliou o método empregado como inovador.

- Inovador, pois através da realização das atividades em etapas, foi possível compreender o conteúdo, desde as formas usadas pelos antigos para calcular área, até a utilização da Integral Definida. (Aluno participante da pesquisa).

Vale salientar que muitos professores desconhecem as atividades ricas e inovadoras desenvolvidas por grupos de pesquisa ligados as universidades e outras instituições brasileiras e conforme os PCN's (1998)pelo pouco conhecimento das propostas curriculares e metodológicas acabam utilizando na sua prática pedagógica, sem provocar mudanças desejáveis.

A respeito do material concreto utilizado na atividade "Ressignificando o cálculo de áreas", o mesmo aluno comentou:

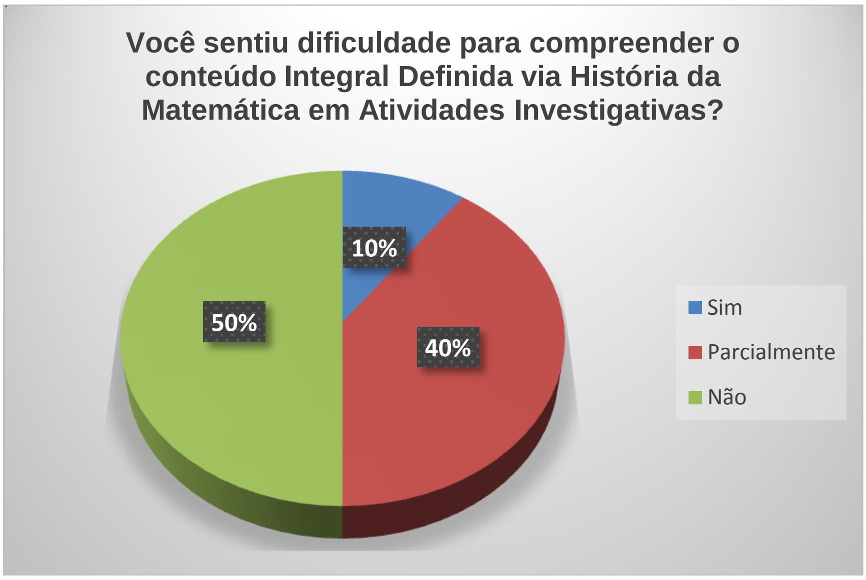
- O material concreto foi de fundamental importância, pois através do manuseio, pudemos ter um contato direto com a resolução de problemas encontrados em nosso cotidiano, influenciando assim um melhor aprendizado. (Aluno participante da pesquisa).

Os recursos didáticos nas aulas de matemática, segundo Passos (2006, p. 78), "envolve uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino e aprendizagem".

No processo ensino-aprendizagem da matemática, "esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído". (PASSOS, 2006, p. 78).

A fim de avaliar, se de fato adotar uma postura inovadora, se o desejo de mudança e atitudes positivas,é mesmo construtivo, conforme Silveira e Miola (2008), observamos o Gráfico 6 que aponta o índice de aproveitamento dos alunos, ao compreender o conteúdo Integral Definida pela atividade proposta,fazendo uma pequena análise com as informações do Gráfico 2. Deve-se ressaltar que o gráfico 2 refere-se à compreensão dos conteúdos: limite, derivada e integral indefinida, e o gráfico 6 refere-se ao conteúdo Integral Definida.

Gráfico 6 - Compreensão do conteúdo Integral Definida após atividade desenvolvidas



Fonte: Elaborado pelo autor

Conforme percebemos no Gráfico 6, apenas dez por cento dos alunos afirmam ter sentido dificuldades para compreender o conteúdo ministrado. Assim, Integral Definida pôde ser compreendida de forma satisfatória por metade da turma e quarenta por cento teve dificuldades parciais. Observações diretas sobre a turma e revendo o Gráfico 2 podemos notar que esses dados revelam um avanço significativo no aprendizado da turma pesquisada, especificamente, do conteúdo Integral Definida.

O Gráfico 2 aponta que 30% tem dificuldades em compreender conteúdos de Cálculo e 70% apresenta dificuldades parciais. Usando a História do Cálculo como fio condutor, numa perspectiva inovadora com o auxílio de um material concreto manipulável para ministrar o conteúdo Integral Definida, serviu para aumentar para 50% o número de alunos que compreenderam bem o conteúdo ao tempo que diminui de 70% para 40% os alunos que sentiam parciais dificuldades.

Avanços como esse percebido acima ocorrem quando há uma efetiva participação de todos. Conforme registrado no capítulo 2, os PCN's ressalta que é consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina. Desse modo, a História da Matemática juntamente com outros recursos didáticos podem contribuir beneficamente no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Notamos isso quando os participantes do presente trabalho foram questionados sobre a importância da utilização do material concreto nos resultados (aprendizagem) das atividades realizadas em sala de aula. Segue, nos excertos, a descrição de alguns alunos:

- O material concreto utilizado foi uma potente ferramenta de apoio, que além de auxiliar o desenvolvimento das atividades, contribuiu para o entendimento do conteúdo. (Aluna).

- Utilizar o material concreto é de grande importância, pois torna a aula mais dinâmica e prazerosa desenvolvendo uma aprendizagem significativa, desprendendo da velha metodologia mecânica de colocar conteúdo no quadro e fazer uma prova, uma vez que o material concreto desenvolve curiosidade e gosto em querer investigar e conhecer realmente como e porque surgiu determinada coisa, utilizando assim as técnicas intelectuais. (Aluna).

- O material concreto oportuniza o aluno a ver o explicado, e a visualização ajuda na compreensão mais rápida. Tirando um pouco do discente a rotina com o quadro branco e o caderno, assim proporcionando uma aula diferenciada e que busque mais a atenção do aluno. É importante o uso dos materiais para que possamos buscar vários meios para compreensão, seja em livros, apostila, dentre outros, mas que nos desprendam de um único recurso de aprendizagem. (Aluno).

Nesse contexto, Scheffer (2006) ressalta a importância de oportunizar aos professores e futuros professores a vivência com a experimentação de desafios, para“aguçar a sensibilidade para a compreensão dos aspectos que interferem no processo de construção dos conceitos e das relações geométricas vividas pelos alunos na sala de aula”. (SCHEFFER, 2006, p. 97).

Nas respostas apresentadas no questionário pelo grupo pesquisado desse trabalho, um comentário chama a atenção, sobre a necessidade do professor refletir sobre sua atuação durante o desenvolvimento de atividades propostas em sala de aula. Segue o relato de um dos alunos:

- O material é suficiente. Acredito que tem que repensar é a relação estabelecida entre o professor e o aluno, a maneira como o professor transmite estes conteúdos tem que despertar o interesse do aluno. (Aluno).

Outros comentários e observações diretas apontam que a metodologia utilizada no desenvolvimento da atividade “Ressignificando o cálculo de áreas” teve bom êxito em despertar o interesse da turma. Mas falando individualmente de cada aluno, o professor precisa ficar mais atento. Aluno ou grupo empolgado demais com uma atividade pode fazer com que o professor dedique tempo demais com uns em detrimentos a outros.

De acordo com Vygotsky (1998), o desenvolvimento ocorre na interação entre as pessoas e na relação com os objetos culturais, uma vez que, com a presença do outro, neste caso o professor mediador, dar-se-á a evolução das formas de pensar do aluno, ao mesmo tempo em que estará se constituindo com sujeito.

Assim, Garzella (2013, p. 10) nos diz que “o professor tem papel fundamental nesse processo, sendo um mediador, um observador, um intérprete das manifestações do indivíduo, identificando as implicações do processo de construção do conhecimento”. Percebemos que aspectos negativos podem ocorrer e de fato há algumas desvantagens nas propostas do uso da História de Matemática em Atividades Investigativas em sala de aula.

Baroni, Teixeira e Nobre (2009, p. 167) relacionam argumentos desfavoráveis à incorporação da História em sala de aula de Matemática:

> a) História não é Matemática; b) a História pode ser um dificultador para a compreensão dos conceitos; c) uma visão distorcida do passado pode impossibilitar uma contextualização eficaz da Matemática; d) a aversão que algum aluno possa ter à História implicaria uma aversão à História da Matemática e, consequentemente, à Matemática; e) o estudo do passado é perda de tempo, dado que os avanços da Matemática ocorrem exatamente para resolver problemas complicados; f) outros fatores de ordem prática tais como: falta de tempo para cumprir o programa; falta de recursos; falta de experiência do professor; dificuldade de avaliação.

Consciente disso, questionamos aos sujeitos pesquisados quanto as vantagens e desvantagens nos trabalhos desenvolvidos.Quarenta por cento dos alunos não viram alguma desvantagem, ao tempo que todos veem aspectos positivos no uso da metodologia abordada. Uma discente comentou:

- Em minha opinião, não há desvantagens em utilizar a História da Matemática em Atividades Investigativas no ensino, essa metodologia só traz benefícios como por exemplo: tornar a aprendizagem significativa; tornar as aulas mais dinâmicas; despertar o interesse nos estudantes; tornar a relação entre professor e aluno mais próxima, visto que o uso da História da Matemática, como metodologia de ensino, proporciona uma aprendizagem mútua.(Aluna)

Porém, algumas desvantagens foram apresentadas pelo envolvidos na pesquisa. Em primeiro lugar, o fator tempo. Para os alunos a discussão em torno de História pode consumir muito o tempo das aulas impedindo que se cumpra a ementa do componente curricular. Seguem alguns comentários dos participantes da pesquisa.

- Por outro lado, a utilização deste método pode tomar mais tempo do que é permitido pelos calendários escolares, podendo assim ocorrer um atraso, porém acredito que o necessário em sala não é o cumprimento de determinadas quantidades de conteúdos que devem ser passados, mas sim com que qualidade eles estão sendo adquiridos pelos alunos. (Aluna).

- Como o tempo de um semestre para o outro é muito curto, se o docente se prender a explicar todos os conteúdos exigidos no semestre voltado para a história da matemática, correrá o risco de não dar tempo terminar os conteúdos, porque os contextos históricos de matemática são grandes, então os alunos ficarão prejudicados por não ter estudado assuntos importantes que ficaram para traz, por conta do tempo excedido. Então por mais que essa metodologia é ricamente importante, tem que saber dosar na medida certa. (Aluno).

Outro fator apontado foi à aversão à história por parte dos alunos. Certos estudantes optam pelo curso de Matemática, área de exatas por não se identificarem e tentarem fugir da área de humanas. Assim, 20% dos alunos apontam que o uso da história deva ser atenuado, sem muito aprofundamento.

- O uso da História da Matemática em Atividades Investigativas pode ser uma excelente maneira de induzir o aluno à compreensão do conteúdo quando utilizada de maneira conveniente.No entanto é necessário ter cautela para não

tornar algo exaustivo ou acabar fugindo da proposta, que é induzir o aluno ao aprendizado.(Aluna).

- Desvantagens: Reclusão de alguma parte dos alunos por não achar de extrema importância, já que estão acostumados a cálculos, regras e fórmulas.(Aluno).

Diante do exposto, percebemos que o professor deve estar atento, identificar e se programar de forma a sanar ou amenizar aspectos desfavoráveis em sua sala de aula, se empenhando em incluir e aprimorar o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas.

Em entrevista à Revista História da Matemática para professores,em janeiro de 2013, o professor D'Ambrósio (2013), pesquisador de destaque internacional pelos seus estudos em Etnomatemática, História da Matemática e pelo discurso de uma educação preocupada com a paz, destaca que a Matemática tal como qualquer produção cultural do homem vem sendo desenvolvida por diversas comunidades ao longo dos tempos e explica como o professor da escola básica pode se apropriar dessa produção e de sua história para enriquecer suas aulas.

Quando indagado sobre a importância da História da Matemática no desenvolvimento e entendimento da própria matemática e de seu ensino e aprendizagem, D'Ambrosio, sintetiza vários motivos nos seguintes pontos:

> Para situar a Matemática como uma manifestação cultural, assim como são manifestações culturais a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos; para mostrar que as manifestações culturais se dão, de modo diversificado, em todos os povos e em todos os tempos; para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade; para destacar que essa Matemática teve sua origem nos primórdios das civilizações e se organizou nas culturas da antiguidade.(D'AMBROSIO, 2013, p. 7).

Este autor destaca na entrevista "as contribuições que os conhecimentos sobre a história da matemática podem trazer para o professor e alunos da escola básica, bem como para sua formação como cidadão".

> Para o professor saber e transmitir para seus alunos que a Matemática foi desenvolvida em todas as regiões do mundo, e que todos os povos desenvolveram várias técnicas para entender e responder às suas necessidades de sobrevivência e de

> transcendência nos mais diversos ambientes naturais, sociais e culturais. Os gregos escreveram vários livros fazendo uma síntese dos conhecimentos por eles desenvolvidos. Por razões geopolíticas, esses livros deram origem ao desenvolvimento da ciência e da tecnologia na Europa, o que permitiu navegar por todo o mundo, impondo sua cultura e seus conhecimentos em todo o planeta. Dentre esses conhecimentos está a Matemática. A partir daí, séculos XVI e XVII, essa matemática foi incorporada aos sistemas escolares de todas as nações, em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico. Para a formação de um cidadão, essa história deve ser conhecida e devem ser avaliadas as consequências socioculturais dessa incorporação. (D'AMBROSIO, 2013, p. 8).

Em relação ao que pode ser feito pelo professor interessado no uso da História da Matemática em suas aulas, onde a precariedade de material e tecnologias é grande, D'Ambrosio (2013, p. 9), afirma:

> A precariedade de material e tecnologia pode ser superada se pelo menos uma pessoa na classe tiver um acesso à internet ou houver um lan house por perto. Se for um lugar remotíssimo, onde não há nada, só gente trabalhando, perguntar a qualquer trabalhador como ele excuta seu trabalho. Por exemplo, veja um capinador trabalhando e procure identificar os elementos matemáticos no ato de capinar.

Podemos perceber claramente através dos dados analisados e relacionados à fundamentação teórica revisada que as muitas vantagens superam as mínimas desvantagens de incorporar o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas, numa prática pedagógica inovadora. Essa incorporação pode contribuir para a construção do conhecimento de cálculo de áreas no ensino básico e superior, generalizando para a construção do conhecimento em matemática.

No que tange a atividade proposta no capítulo 4, vale ressaltar conforme comentários extra classe do participantes envolvidos, que a atividade foi muito proveitosa, pois se criou um ambiente democrático à medida que cada um se percebeu como parte ativa desse processo de ensino-aprendizagem em que está inserido.

Em momentos anteriores, algumas atividades diferenciadas foram desenvolvidas em sala de aula, mas não com o comprometimento e objetivos estabelecidos na atividade "Ressignificando o cálculo de áreas". Embora os alunos, de um modo geral, gostassem do conteúdo cálculo de áreas, eles não sabiam como calcular áreas de regiões irregulares sob uma curva delimitadas por um intervalo fechado. Alguns alunos de turmas anteriores não conseguiam assimilar conceitos básicos como continuidade de uma curva, limite de uma função, limitante inferior e limitante superior numa Integral Definida, por exemplo, ao encontrar um resultado negativo para o cálculo da área de uma região sob uma curva, às vezes não percebiam o erro. Já os alunos participantes da referida atividade mostraram-se muito mais aptos e capazes em compreender estes conceitos.

Outro fator importante é que antes de aplicar um recurso didático palpável em sala de aula conhecê-lo bem, definir objetivos. Dessa forma, esse tipo de material só pode enriquecer o ambiente de ensino e tornar a atividade atrativa para o educando. Pautar a prática pedagógica a partir de Atividades Investigativas via História da Matemática com auxílio de recursos manipuláveis nos conduz a pensar em mudanças significativas para o contexto de educação básica e superior.

> A eficácia do processo de ensino-aprendizagem está relacionada à qualidade e à quantidade dos conhecimentos construídos e compartilhados, por meio de interação com outras pessoas e com o meio, por si mesmo e com o auxílio do professor. A forma e as estratégias como esse professor utilizará os materiais didáticos o auxiliarão no alcance dos objetivos por ele definidos, relacionados ao assunto apresentado. Assim, torna-se necessário o conhecimento dos tipos de materiais didáticos existentes para auxiliar no desenvolvimento do processo educacional. (JUSTINO, 2011, p.113).

Assim, o uso de materiais concretos possibilita uma ponte com o passado, onde favorecerá para pensar a complexidade e os desafios da contemporaneidade.

Atividades como essa é uma estratégia aplicável não só para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como também, habilidades formativas indispensáveis para a constituição do aluno enquanto cidadão competente, polivalente, capaz de transformar o meio em que vive. Assim, é preciso que o professor repense a sua prática pedagógica a fim de tornar a aula mais atrativa, tendo, portanto, interesse, compromisso e ação. Somente com tais requisitos a sua prática irá cumprir satisfatoriamente o seu objetivo primordial: a educação.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho ressalta a importância estabelecida do uso da História da Matemática em Atividades Investigativas enquanto metodologia para favorecer a aprendizagem significativa ao se fazer o estudo de áreas de regiões planas regulares e irregulares.

A matemática, ainda hoje, é uma disciplina muitas vezes indesejada por estudantes e até professores da educação básica, que a caracterizam como abstrata demais para ser associada a atividades práticas, para possibilitar o uso de material concreto ou ainda que se constitui em um amontoado de fórmulas que serão decoradas e logo esquecidas. Entretanto, sabemos que muitas vezes o ensino intensamente tradicional, baseado na repetição exaustiva de exercícios de treinamento tem contribuído para que afirmações deste tipo perpetuem em nossas salas de aulas como se fossem verdades inquestionáveis.

Verificando os resultados obtidos pelo desenvolvimento das atividades nesse pesquisa que o usando a História da Matemática como fio condutor para fazer investigação em sala de aula despertou nos alunos, maior interesse em participarem ativamente nas aulas, pois permitiu que esses se sentissem personagens da história e desafiados a tentar e encontrarem no “erro”, uma forma de acertar.

Por este motivo que a História da Matemática em Atividades Investigativas é necessária nas nossas aulas, e o professor deve dispensar tempo para preparação e desenvolvimento das mesmas. Verificando-se então, a importância de desenvolver uma atividade bem planejada com objetivos bem definidos e desafiadores, que instigam a curiosidade e que ofereça desafios na resolução de problemas significativos da matemática. O planejamento não deve se dar como mera apresentação de fatos históricos, mas para fazer Investigações Matemáticas, para propor desafios, que reconstroem o desenvolvimento da matemática ao longo dos tempos.

Ao planejar uma aula, considere a relação entre os envolvidos nas atividades. Problemas de interação entre os estudantes são constantemente vivenciados por professores e alunos. Respeito, companheirismo e colaboração, são fatores importantes que devem ser trabalhados em sala de aula e inegavelmente o trabalho em equipe contribuem para que possamos alcançar fatores como estes, tão indispensáveis no ambiente escolar.

Nesse contexto, a atividade “Ressignificando o cálculo de áreas”, desenvolvida em forma de oficina, mostrou-se uma forte aliada, estabelecendo maior socialização e interação dos alunos do 5º semestre do curso de Licenciatura em Matemática no *Campus* VI da UNEB, pois os mesmos passaram a respeitar-se, como fizeram ao estabelecer as ideia se manipular o material concreto no momento das investigações da atividade proposta.

No entanto, para a História da Matemática em Atividades Investigativas ser admitida como uma metodologia de ensino que favoreça uma aprendizagem significativa, esta precisa ser primeiro, reconhecida pelo professor como tal, cuidadosamente planejada e direcionada pelos objetivos traçados para determinada aula, acreditando realmente na sua função construtora do conhecimento, para depois utilizá-la com eficiência e segurança. Visto que, a grande responsabilidade em fazer uma educação de excelência, está também nas mãos do professor, seja em qualquer nível de ensino que trabalhe, tanto na educação básica como na superior, este precisa renovar-se constantemente buscando soluções que o auxiliem na execução de seu trabalho.

A referente pesquisa intitulada “A utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas: estudo das áreas de regiões planas regulares e irregulares” buscou analisar e discutir a presença de atividades desse cunho em sala de aula, bem como a influência de tais atividades na efetiva aprendizagem. Essa temática apesar de amplamente estudada na atualidade, no campo educacional, apresenta-se com aspectos de significativa novidade por articular-se numa perspectiva dialógica que busca uma aprendizagem efetiva adquirida, não pela repetição incessante, mas da vivência do contato direto com o desafio, a descoberta espontânea, em detrimento do receio, do bloqueio, do preconceito, das ideias falsas que permeiam o ensino de matemática quando feito de modo descontextualizado e mecânico.

A escolha dessa temática surgiu da necessidade de buscar respostas para as possibilidades: Como o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas pode contribuir para a construção do conhecimento de áreas no ensino básico e superior? E do interesse de avaliar a importância do uso da História da Matemática juntamente com a Investigação nas aulas de matemática, tornando essas aulas mais dinâmicas e seu ensino menos cansativo e mecânico pautado exclusivamente na repetição inconsciente e involuntária. Desta forma, foram traçados objetivos condizentes com esse interesse e necessidade.

Apesar do ensino de matemática aparentemente está pautado na repetição de conceitos e fórmulas, durante as observações pudemos notar que aquelas aulas exerceram um papel conscientizador para aqueles professores em formação. Eles notaram que as aulas assim organizadas, motivam não somente os alunos como também professores, envolvendo a todos num ambiente prazeroso e convidativo com envolvimento e participação. Desse modo, seremos capazes de proporcionar uma relação aconchegante entre educador e educandos, posto que o entusiasmo por sua vez, constitui um estado de espírito que inspira o indivíduo a ação para assumir determinado objetivo.

É inegável que me deparei com desafios em algumas etapas da pesquisa. Dentre as quais, pode-se mencionar: algumas paralisações e a iminente deflagração da greve docente, bem como tempo limitado por trabalhar em dois vínculos. Entretanto, ao término deste trabalho,senti-me entusiasmado com a receptividade dos estudantes diante da proposta apresentada, percebi que a atividade desenvolvida foi válida e gratificante.

Assim, o uso da História da Matemática em Atividades investigativas passou a integrar cada vez mais a minha prática docente, onde as realizações de atividades investigativas via História da Matemática favorecem um ambiente dinâmico, reflexivo e a construção do conhecimento de forma significativa. Continuar pesquisando a História da Matemática em conexão com a Investigação Matemática será uma forma de qualificar a orientação dos professores em formação numa perspectiva de assumirem o compromisso de construírem e aplicarem propostas sob o referido tema nas instituições de educação básica.

Pude perceber que as instituições de ensino no contexto atual encontram-se ainda distantes de atingir os anseios de pesquisadores em Educação Matemática e da própria sociedade, visto que muitas carecem de compromisso e tal requisito é indispensável para que haja uma boa articulação da instituição escolar. Neste sentido, enfatiza-se a importância de propiciar aos licenciandos em Matemática, professores em formação, o contato com atividades desafiadoras, atuando como sujeito do seu conhecimento e os preparando para atuar como disseminador de tais práticas.

Potencializar a motivação para aprender matemática, compreender como os conceitos se desenvolveram, motivar, estimular, atrair o aluno, falta de tempo, apatia pela área de humanas, são faces de uma mesma moeda. Assim, durante algumas Atividades Investigativas via História da Matemática surgem esses e outros elementos que podem ser direcionados para uma reflexão dialógica onde valores éticos, morais, justiça e parcerias sejam analisados numa perspectiva de interdisciplinaridade e transversalidade.

A partir desta pesquisa constata-se que o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas deve fazer parte das aulas de matemática desde que as atividades sejam apropriadas e criteriosamente planejadas, pois favorecem a aprendizagem efetiva. Podemos inferir que a presente pesquisa pode interessar a professores e estudantes cientes da importância de se estar sempre vendo e revendo a prática pedagógica, se esta vem atingindo os objetivos de professores e alunos e da própria instituição. Pois, tanto aluno como professores estão em constante processo de educação: educando e sendo educados.

7. REFERÊNCIAS

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática.** Tradução de Orlando de A. Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ARAÚJO, J. de L; BORBA, M. de C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: ______. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ARAÚJO, L. C. de. **Cálculo de áreas**: um meio atrativo para o enriquecimento do ensino de matemática. 2013. 65f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Bahia, PROFMAT-UFBA, 2013.

BARONE, R. L. S; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2009. p. 164-185.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-Posições**, Faculdade de Educação – UNICAMP, v. 4, n. 1, p. 18-23, mar. 1993.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. MEC. **Parâmetros curriculares nacionais**:Matemática – 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF - Terceiro e quarto ciclos, 1998.

______.**Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Secretaria da Educação Fundamental. 3. ed. Brasília: MEC, 2001.

BRITO, A. de J.; CARVALHO, D. L. Utilizando a história no ensino de geometria. In: MIGUEL, A. et al. **História da matemática em atividades didáticas.** 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. p. 15-103.

BRITO, A. de J.; MENDES, I. A. Apresentação. In: MIGUEL, A. et al. **História da matemática em atividades didáticas.** 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. p. 9-11.

CALABRIA, A. R. A geometria fora da Grécia. **Revista do professor de matemática,** São Paulo,n.81, p. 5-9, 2º quadrimestre de 2013.

CYRINO, M. C. C. T. Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de matemática. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. A. (Org.). **A formação do professor que ensina matemática***:* perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 77-88.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM, Brasília, ano II, n. 2, p. 15-19, 1989

D’AMBROSIO, U. Entrevista: Diálogo com um educador. **Revista história da matemática para professores,** Natal-RN, ano 1, n. 0, p. 7-9, mar. 2013.

______. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

______. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

______. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 11-23.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FIGUEIREDO, E. B.; BOULLAUF, M. F.; MIARKA, R. A (im)possibilidade da quadratura do círculo por meio da quadratriz. **Revista do professor de matemática,** n.81, p. 40-44, 2º quadrimestre de 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: funções, limite, derivadas, integral. 5. ed. São Paulo: Pearson Makron, 1992.

FLORIANI, J. V. **Professor e pesquisador**: exemplificação apoiada na matemática. Blumenau: Ed. da FURB, 2000.

FONSECA, M. da C. F. R. et al. **O ensino de geometria na escola fundamental:**três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de Cálculo I**: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos. Campinas, SP 2013. Disponível em: <http://www.fe.unicamp.br//alle/teses_dissert_tcc/arquivos/tesefabianacolombo.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

GRANDO, N. I.; MARASINI, S. M. **Educação matemática**: a sala de aula como espaço de pesquisa. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2008.

JUSTINO, M. N. **Pesquisa e recursos didáticos na formação e prática docente**. Curitiba: Ibpex, 2011.

LARA, I. C. M. de. **Jogando com a matemática na educaçãode5ª a 8ª séries.** 3. ed. Catanduva, SP: Editora Rêspel, 2003.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Técnicas de pesquisa**: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados. São Paulo: Atlas, 2006.

MENDES, I. A.; FILHO, A. S.; PIRES, M. A. L. M. **Práticas matemáticas em atividades didáticas para os anos iniciais.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: Propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

MÜLLER, I. Tendências atuais de Educação Matemática. *UNOPAR Cient., Ciênc. Hum. Educ.*, Londrina, v. 1, n. 1, p. 133-144, jun. 2000.

MURARI, C. Espelhos, caleidoscópios, simetrias, jogos e softwares educacionais no ensino e aprendizagem de geometria. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2009. p. 198-212.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PALIS, G. de L. R. **A pesquisa sobre a própria prática no ensino superior de Matemática**. 2015. Disponível em: <http.//lima.ufrj.br/htem4/paper/40.pdf.>. Acesso em: 25 maio 2015.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas,SP: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PONTE, J. P. **Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática**. 2002. Disponível em: <http.//www.scielo.br/pdf/er/n24/n24 a 03.pdf>. Acesso em: 25 maio 2015.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, G. do R. C. M.; MOLINA, N. L.; DIAS, V. F. **Orientações e dicas práticas para trabalhos acadêmicos.** Curitiba: Ibpex, 2008.

SANTOS, L. M. dos. **Tópicos de história da física e da matemática**. Curitiba: Ibpex, 2009.

SCHEFFER, N. F. O LEM na discussão de conceitos de geometria a partir das mídias: dobraduras e software dinâmico. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório**

de ensino de matemática na formação de professores. Campinas,SP: Autores Associados, 2006. p. 93-112.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática**: notas de aula. Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SILVA, M. D. F. da. **Problemas e modelos que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral:** dos gregos a Newton. 2010. 239f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, PPGE/UFRN, 2010.

SILVEIRA, E.; MIOLA, R. J. **Professor-pesquisador em educação matemática**. Curitiba: Ibpex, 2008.

VIGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. Organizadores: Michael Cole. et al. Tradução José Cipolla Neto. et al. São Paulo: Ed. Martins Fontes, 1998.

8. APÊNDICES

8.1 Apêndice A - Questionário

	UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA-UESB DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS-DCET PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA- PROFMAT

Pesquisa: A utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas: estudo de áreas de regiões planas regulares e irregulares

Autor: Daniel de Jesus Silva.

Questionário

1) Gênero/ Idade:
   Masculino ( ) Feminino ( ) Idade:_______

2) Escolarização:
   Instituição:____
   ____
   Curso:____
   Semestre:____

3) Em geral, você tem dificuldades de compreender os conteúdos de Cálculo?
   Sim ( ) Parcialmente ( ) Não ( )

4) A compreensão de conteúdos ministrados em sala de aula depende muito da metodologia aplicada pelo professor?
   Sim ( ) Parcialmente ( ) Não ( )

5) Durante sua formação no curso de licenciatura em Matemática, você já estudou a História da Matemática como possibilidade (metodologia) para o ensino?
   Sim ( ) Parcialmente ( ) Não ( )

6) Pensando em sua própria prática, no estágio supervisionado, ou futura atuação docente, você pretende usar a História da Matemática como metodologia para ensinar?
   Sim ( ) Parcialmente ( ) Não ( )

7) Você teve dificuldades de compreender o conteúdo Integral Definida?
   Sim ( ) Parcialmente ( ) Não ( )

8) Escreva a sua opinião sobre o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas.

____

____

____

9) Refletindo sobre as dificuldades e resultados das investigações propostas em torno do conteúdo Integral Definida, como você avalia o método empregado em tais atividades?

____

____

____

10) Avalie/relacione o material concreto (apostila, cartolina, papel transparência, etc) utilizados com os resultados (aprendizagem) das atividades.

____

____

____

11) Relacione as vantagens e desvantagens do uso da História da Matemática em Atividades Investigativas como metodologia de ensino.

____

____

____

8.2 Apêndice B–Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

	UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA-UESB DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS-DCET PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA- PROFMAT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa: **A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS: ESTUDO DE ÁREAS DE REGIÕES PLANAS REGULARES E IRREGULARES**

PROFESSOR PESQUISADOR: Daniel de Jesus Silva.

PROFESSORA ORIENTADORA: Maria Deusa Ferreira da Silva.

INSTITUIÇÃO A QUE PERTENCE O PESQUISADOR RESPONSÁVEL: Departamento de Ciências Humanas – *Campus* VI da Universidade do Estado da Bahia.

JUSTIFICATIVA E OBJETIVO DA PESQUISA

O interesse pelo tema surgiu ao logo da formação docente, no curso de licenciatura em Matemática, pela UNEB, *Campus* VI e se firmou ao longo dos contatos mais diretos em sala de aula, já atuando como professor. Percebemos a falta de conexão entre a teoria apresentada e a prática, o que criava nos alunos uma ideia de matemática meramente abstrata e sem prática. Surgiram os questionamentos sobre a necessidade de utilização de uma prática pedagógica diferenciada. Nesse foco, uma das possibilidades do professor é despertar no aluno o interesse e a oportunidade de investigar, redescobrindo a matemática e a utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas, buscando consolidar os conteúdos dessa disciplina as suas práticas.

O objetivo deste estudo é investigar como a metodologia de aprendizagem por meio de História da Matemática em Atividades Investigativas pode contribuir para a construção do conhecimento de cálculo de áreas.

GARANTIA DE ESCLARECIMENTO, LIBERDADE DE RECUSA:

Você será esclarecido(a) sobre a pesquisa em qualquer aspecto que desejar. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não irá acarretar qualquer penalidade ou perda de benefícios.

O pesquisador irá tratar a sua identidade com padrão profissionais de sigilo. Seu nome ou o material que indique a sua participação não será liberado sem a sua permissão.

CUSTO DA PARTICIPAÇÃO:

A participação no estudo não acarretará custos para você e não será disponível nenhuma compensação financeira adicional.

Declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Caetité, 04 de maio de 2015.

Assinatura do participante

Assinatura do pesquisador

8.3 Apêndice C– PANORAMA HISTÓRICO

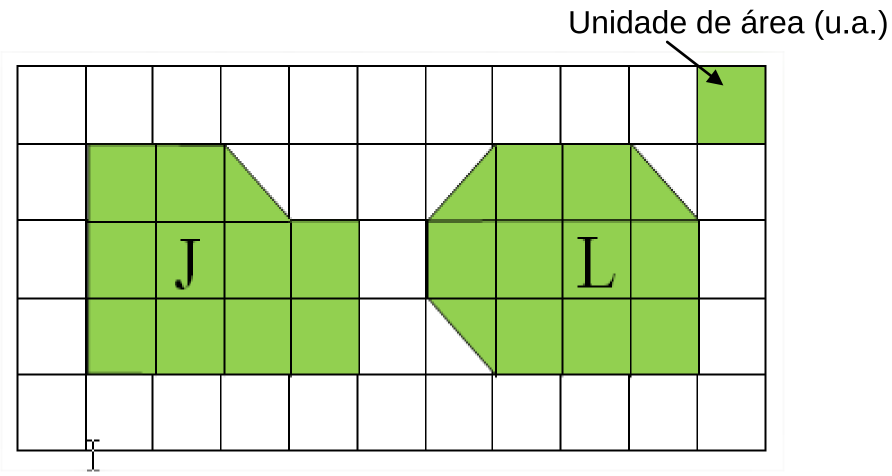
PANORAMA HISTÓRICO: Sistematização e formalização do cálculo de áreas

A ideia da área está relacionada à medida de uma superfície. A área de uma região ou superfície pode ser obtida relacionando quantas unidades de áreas correspondem a ela. De acordo com informações disponíveis no link http://conceito.de/area, do latim arĕa, refere-se a um espaço de terra que se encontra compreendido entre certos limites. Neste sentido, uma área é um espaço delimitado por determinadas características geográficas, zoológicas, econômicas ou de outro tipo.

Para a geometria, uma área é a superfície compreendida dentro de um perímetro, cuja unidade de medida mais conhecida (e mais utilizada) é o metro quadrado. A geometria é um dos ramos da matemática mais antigos e foi utilizada pelas primeiras civilizações em atividades do dia a dia para resolver problemas na medição de áreas de terras ou na construção de obras arquitetônicas e de engenharia. Talvez seja essa a origem da palavra Geometria que, em grego, significa “medir terras” (geo-terra/ métron-medir).

Para compreendermos o conceito de área, vamos observar as figuras J e L produzidas dentro da Figura 1:

Figura 1 – Equivalência de unidades de áreas entre regiões diferentes



Fonte: Souza (2013, p.184)

Observando as figuras J e L, podemos notar que são necessários 10,5 u.a. para cobrir cada uma delas. Dessa maneira, dizemos que a área de cada uma das figuras é 10,5 u.a., isto é:

$$\acute{a}rea\ de\ J = \acute{a}rea\ de\ L = 10{,}5\ u.a.$$

O conceito de área já era utilizado há muito e muito tempo. Após alguns séculos, a civilização grega percebeu que os conhecimentos geométricos não eram apenas de utilidade prática, mas também poderiam ser compreendidos por meio de uma teoria, ou seja, foi a partir dos gregos que a validade de conhecimentos desse ramo da matemática começou a ser demonstrada utilizando-se o raciocínio lógico-dedutivo. Será que os gregos chegariam a tais resultados se não fossem os registros deixados pelos povos antigos?Essa pergunta nos faz retroceder no tempo para investigar as contribuições da geometria das primeiras civilizações empregadas para calcular áreas de regiões tanto regulares quanto irregulares.

Por exemplo, no Egito, na época das cheias, quando às águas do rio Nilo começam a subir, era inundada uma região ao longo de suas margens. Após as águas baixarem, as margens ficavam cobertas por um solo contendo vários nutrientes, que o tornava mais fértil para o cultivo. No entanto, ao baixarem às águas, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, sendo necessária a realização de novas medições.

Essas medições eram realizadas pelos antigos agrimensores egípcios, que utilizavam cordas com vários nós, em que a distância entre um nó e outro indicava uma unidade de comprimento. Muitos dos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados empedras e papiros que felizmente teve existência duradoura em virtude do clima seco da região, por exemplo, o papiro de Rhind, importante documento egípcio de cerca de 1650 a.C.

Já os babilônios faziam seus registros em tábulas de argila cozida, enquanto que os primitivos chineses e indianos usavam material muito perecível, como casca de árvores e bambu. Assim, enquanto se dispõe de apreciável quantidade de informação definidas sobre a matemática dos antigos babilônios e egípcios, muito pouco se conhece sobre essa matéria, com certo grau de certeza, no que diz respeito à China e à Índia na mesma época.

As Antigas Civilizações

Novas sociedades baseadas na economia agrícola emergiam da idade da pedra nos vales dos rios Nilo, Amarelo, Indo, Tigre e Eufrates. Esses povos criaram escritas; trabalharam metais; construíram cidades; desenvolveram empiricamente a matemática básica da agrimensura, da engenharia e do comércio; e geraram classes superiores que tinha tempo bastante de lazer para se deter e considerar os enigmas da natureza. Depois de milhões de anos, afinal a humanidade tomava a trilha das realizações científicas. Segundo Eves (2011, p.57):

> A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o tigre e o Eufrates na Ásia ocidental, o Indo e depois o Ganges no Sul da Ásia Central e o Howang Hoe depois o Yangtze na Ásia Oriental.

Necessidades inerentes às atividades agrícolas, como recursos tecnológicos, projetos de engenharia e administração de finanças, bem como criação de calendários, sistema de pesos e medidas, armazenamento e distribuição de alimentos, métodos de agrimensura para construir canais e reservatórios e para dividir terra, arrecadação de taxas deu origem à matemática primitiva. Eves (2011, p.57) ressalta que

> a ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração prática. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar as ciências por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra e a geometria teórica originaram-se da mensuração.

Notamos que as primeiras civilizações surgiram próximas a regiões dos vales de rios. Dentre essas civilizações, citamos o Egito, a Mesopotâmia, a China e a Índia, todas dependentes da agricultura, de sistema de irrigação e também da astronomia, atividades que influenciaram o surgimento da matemática nessas culturas. Veremos a seguir, um pouco da História da Matemática no Egito que contribuiu para a formalização e sistematização da geometria que atualmente estudamos em salas de aulas.

Antigo Egito

E o que significa falar de geometria no Egito Antigo? Não diferente dos babilônios, significa falar de procedimentos de cálculo de áreas e de volumes, ou seja, era essencialmente uma geometria métrica, preocupada em calcular comprimentos, áreas e volumes. Para isso, também eram utilizadas algumas propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, sem explicitar metodologias.

O Egito está situado no nordeste da África, entre os desertos do Saara e da Núbia, e é cortado pelo rio Nilo. Sua civilização tinha como forma de escrita o sistema hieroglífico (sinais pictográficos que representavam objetos). Esse sistema foi desenvolvido pelos escribas e registrado em papiros que datam aproximadamente do século XVIII a.C..

Boyer (1996, p. 12) relata que "o historiador grego Heródoto nos diz que o apagamento das demarcações pelas inundações do Nilo tornou necessários os mensuradores. Os conhecimentos dos "esticadores de corda" egípcios eram evidentemente admirados". No entanto uma rica fonte para conhecer a matemática egípcia é sem dúvida o papiro Rhind (ou Ahmes) datada aproximadamente de 1650 a.C.. É um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho antigo.

Eves (2011) relata que o papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo museu Britânico. O papiro Rhind foi publicado em 1927. Tem cerca de 549 cm de comprimento por cerca de 33 cm de altura. Porém, quando o papiro chegou ao museu Britânico ele era menor, formado de duas partes e faltava-lhe a parte central. Cerca de quatro anos depois de Rhind ter adquirido seu papiro, o egiptólogo americano Edwin Smith comprou no Egito o que pensou que fosse um papiro médico e mais tarde especialista descobriram que se tratava da parte que faltava do papiro Ahmes. Dessa forma aquele rolo foi encaminhado ao museu Britânico, completando-se todo o trabalho de Ahmes. Eves(2011, p.70) reforça que

> O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um circulo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos.

Outro documento que contribui significativamente para compreendermos a matemática egípcia é o papiro Moscou. Boyer (1996, p.13) afirma que

> esse papiro comprado no Egito em 1893 tem quase o comprimento do Rhind mas só um quarto da largura. Foi escrito, menos cuidadosamente que a obra de Ahmes, por um escriba desconhecido da décima segunda dinastia (1890 a.C. aproximadamente). Contém vinte e cinco exemplos, quase todos da vida prática, e não diferindo muito dos de Ahmes, exceto dois que têm significado especial.

Dos 110 problemas dos papiros Moscou e Rhind, 25 são geométricos. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessária para o cálculo de questões relativas à medição de terras e volumes dos depósitos de grãos. Assim, no Egito, a geometria surgiu da necessidade de calcular áreas territoriais, volumes de celeiros e também de pirâmides.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

EVES, H.**Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar:**matemática. 2.ed.São Paulo:FTD,2013.

8.4 Apêndice D–TABELADE OPERAÇÕES DA ATIVIDADE “RESSIGNIFICANDO O CÁLCULO DE ÁREAS”

				Aproximação da área A desejada por soma de retângulos								
10 retângulos de base 2 u.c				20 retângulos de base 1 u.c.				40 retângulos de base 0,5 u.c				
x	f(x)	A≈2*∑f(x)		x	f(x)	A≈1*∑f(x)		x	f(x)	x	f(x)	A≈0,5*∑f(x)
-9	1,36	A≈2*34,025		-9,5	1,19	A≈1*68,2625		-9,75	1,0975	0,25	1,007813	A≈0,5*136,6313
-7	1,84	A≈68,05		-8,5	1,51	A≈68,2625 u.a.		-9,25	1,2775	0,75	1,070313	A≈68,31565 u.a.
-5	2			-7,5	1,75			-8,75	1,4375	1,25	1,195313	
-3	1,84			-6,5	1,91			-8,25	1,5775	1,75	1,382813	
-1	1,36			-5,5	1,99			-7,75	1,6975	2,25	1,632813	
1	1,125			-4,5	1,99			-7,25	1,7975	2,75	1,945313	
3	2,125			-3,5	1,91			-6,75	1,8775	3,25	2,320313	
5	4,125			-2,5	1,75			-6,25	1,9375	3,75	2,757813	
7	7,125			-1,5	1,51			-5,75	1,9775	4,25	3,257813	
9	11,125			-0,5	1,19			-5,25	1,9975	4,75	3,820313	
∑=	34,025			0,5	1,03125			-4,75	1,9975	5,25	4,445313	
				1,5	1,28125			-4,25	1,9775	5,75	5,132813	
				2,5	1,78125			-3,75	1,9375	6,25	5,882813	
				3,5	2,53125			-3,25	1,8775	6,75	6,695313	
				4,5	3,53125			-2,75	1,7975	7,25	7,570313	
				5,5	4,78125			-2,25	1,6975	7,75	8,507813	
				6,5	6,28125			-1,75	1,5775	8,25	9,507813	
				7,5	8,03125			-1,25	1,4375	8,75	10,57031	
				8,5	10,03125			-0,75	1,2775	9,25	11,69531	
				9,5	12,28125			-0,25	1,0975	9,75	12,88281	
				∑=	68,2625					∑=	136,6313	

Plan1 Plan2

		Aproximação da área A desejada por 200 retângulos de base medindo 0,1 u.c.																		
x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	A≈ 0,1 x ∑f(x)
-9,95	1,0199	-7,95	1,6519	-5,95	1,9639	-3,95	1,9559	-1,95	1,6279	0,05	1,0003	2,05	1,5253	4,05	3,0503	6,05	5,5753	8,05	9,10031	A≈ 0,1 x 683,326
-9,85	1,0591	-7,85	1,6751	-5,85	1,9711	-3,85	1,9471	-1,85	1,6031	0,15	1,0028	2,15	1,5778	4,15	3,1528	6,15	5,7278	8,15	9,30281	A≈ 68,3326 u.a
-9,75	1,0975	-7,75	1,6975	-5,75	1,9775	-3,75	1,9375	-1,75	1,5775	0,25	1,0078	2,25	1,6328	4,25	3,2578	6,25	5,8828	8,25	9,50781	
-9,65	1,1351	-7,65	1,7191	-5,65	1,9831	-3,65	1,9271	-1,65	1,5511	0,35	1,0153	2,35	1,6903	4,35	3,3653	6,35	6,0403	8,35	9,71531	
-9,55	1,1719	-7,55	1,7399	-5,55	1,9879	-3,55	1,9159	-1,55	1,5239	0,45	1,0253	2,45	1,7503	4,45	3,4753	6,45	6,2003	8,45	9,92531	
-9,45	1,2079	-7,45	1,7599	-5,45	1,9919	-3,45	1,9039	-1,45	1,4959	0,55	1,0378	2,55	1,8128	4,55	3,5878	6,55	6,3628	8,55	10,1378	
-9,35	1,2431	-7,35	1,7791	-5,35	1,9951	-3,35	1,8911	-1,35	1,4671	0,65	1,0528	2,65	1,8778	4,65	3,7028	6,65	6,5278	8,65	10,3528	
-9,25	1,2775	-7,25	1,7975	-5,25	1,9975	-3,25	1,8775	-1,25	1,4375	0,75	1,0703	2,75	1,9453	4,75	3,8203	6,75	6,6953	8,75	10,5703	
-9,15	1,3111	-7,15	1,8151	-5,15	1,9991	-3,15	1,8631	-1,15	1,4071	0,85	1,0903	2,85	2,0153	4,85	3,9403	6,85	6,8653	8,85	10,7903	
-9,05	1,3439	-7,05	1,8319	-5,05	1,9999	-3,05	1,8479	-1,05	1,3759	0,95	1,1128	2,95	2,0878	4,95	4,0628	6,95	7,0378	8,95	11,0128	
-8,95	1,3759	-6,95	1,8479	-4,95	1,9999	-2,95	1,8319	-0,95	1,3439	1,05	1,1378	3,05	2,1628	5,05	4,1878	7,05	7,2128	9,05	11,2378	
-8,85	1,4071	-6,85	1,8631	-4,85	1,9991	-2,85	1,8151	-0,85	1,3111	1,15	1,1653	3,15	2,2403	5,15	4,3153	7,15	7,3903	9,15	11,4653	
-8,75	1,4375	-6,75	1,8775	-4,75	1,9975	-2,75	1,7975	-0,75	1,2775	1,25	1,1953	3,25	2,3203	5,25	4,4453	7,25	7,5703	9,25	11,6953	
-8,65	1,4671	-6,65	1,8911	-4,65	1,9951	-2,65	1,7791	-0,65	1,2431	1,35	1,2278	3,35	2,4028	5,35	4,5778	7,35	7,7528	9,35	11,9278	
-8,55	1,4959	-6,55	1,9039	-4,55	1,9919	-2,55	1,7599	-0,55	1,2079	1,45	1,2628	3,45	2,4878	5,45	4,7128	7,45	7,9378	9,45	12,1628	
-8,45	1,5239	-6,45	1,9159	-4,45	1,9879	-2,45	1,7399	-0,45	1,1719	1,55	1,3003	3,55	2,5753	5,55	4,8503	7,55	8,1253	9,55	12,4003	
-8,35	1,5511	-6,35	1,9271	-4,35	1,9831	-2,35	1,7191	-0,35	1,1351	1,65	1,3403	3,65	2,6653	5,65	4,9903	7,65	8,3153	9,65	12,6403	
-8,25	1,5775	-6,25	1,9375	-4,25	1,9775	-2,25	1,6975	-0,25	1,0975	1,75	1,3828	3,75	2,7578	5,75	5,1328	7,75	8,5078	9,75	12,8828	
-8,15	1,6031	-6,15	1,9471	-4,15	1,9711	-2,15	1,6751	-0,15	1,0591	1,85	1,4278	3,85	2,8528	5,85	5,2778	7,85	8,7028	9,85	13,1278	
-8,05	1,6279	-6,05	1,9559	-4,05	1,9639	-2,05	1,6519	-0,05	1,0199	1,95	1,4753	3,95	2,9503	5,95	5,4253	7,95	8,9003	9,95	13,3753	
																		∑=	683,326	

Plan1 Plan2

Aplicando a integral definida para calcular a área A desejada temos:

$$A = \int_{-10}^{0} \left(-\frac{x^2}{25} - \frac{2}{5}x + 1\right) dx + \int_{0}^{10} \left(\frac{x^2}{8} + 1\right) dx$$

$$A = \frac{50}{3} + \frac{155}{3} \approx 68,333\ u.a.$$