Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Números Complexos: Uma Análise dos Itens de Vestibulares

por

João Mário Nepomuceno Aragão e Silva

Brasília, 2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SJ61n

Silva, João Mário Nepomuceno Aragão e
Números Complexos: Uma Análise dos Itens de Vestibulares. / João Mário Nepomuceno Aragão e Silva; orientador Helder de Carvalho Matos . -- Brasília, 2016.
73 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2016.

1. Números Complexos. 2. Equações Algébricas. 3. Fórmula de Cardano. 4. Fórmula de Euler. 5. Vestibulares. I. de Carvalho Matos , Helder , orient. II. Título.

João Mário Nepomuceno Aragão e Silva

Números Complexos: Uma Análise dos Itens de Vestibulares

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, para a obtenção do grau de

Mestre

Orientador: Prof. Dr. Helder de Carvalho Matos

Brasília

2016

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Números Complexos: Uma análise dos itens de vestibulares

Por

João Mário Nepomuceno Aragão e Silva *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de:

MESTRE

Brasília, 17 de junho de 2016.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Helder de Carvalho Matos – MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Junior – MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Raul Moreira Behs – Colégio Militar de Brasília/DF (Membro)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação

Dedicatória

Dedico esse trabalho de conclusão de curso aos meus pais, Nonato e Aurenita, às minhas irmãs Julisse e Priscila, e a todos os amigos e professores que me incentivaram a concluir esse mestrado e a viver essa nova fase da minha vida.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por mais essa conquista e por me amparar sempre nos momentos mais difíceis me abençoando com saúde, sensibilidade e paciência.

Agradeço principalmente aos meus pais, Nonato e Aurenita, que são a minha maior inspiração e exemplo de seres humanos; às minhas irmãs Julisse e Priscila, pelo companheirismo e parceria no desenvolvimento desse trabalho; à minha namorada Raquel por toda compreensão e carinho dedicados a mim nos momentos de dificuldade.

Aos meus amigos, Alessandra, Eduardo, Elaine, Felipe, Ilmar, Luciano e Thiago, pelo apoio e pelos momentos de descontração que recarregavam as minhas baterias; aos meus amigos de trabalho Gabriel, Paulo, Evelyn e Rubens, que sem dúvida foram grandes orientadores nesse processo.

Aos colegas que cursaram comigo o PROFMAT por toda ajuda, e por compartilhar comigo os momentos mais alegres e os mais tristes ao longo de dois anos.

Ao professor Helder Matos por toda disposição, gentileza e amizade dedicadas como orientador; aos professores da UnB pela dedicação e transmissão do conhecimento; ao professor Rui Seimetz e à coordenação do PROFMAT pela oportunidade.

Resumo

As primeiras ideias que motivaram o surgimento do conjunto dos números complexos apareceram no século XVI, com o trabalho sistemático dos matemáticos da Itália renascentista em busca de uma fórmula que solucionasse definitivamente as equações do terceiro grau. Desde então levou-se cerca de três séculos para que grandes matemáticos vencessem os obstáculos que embarreiravam a aceitação dessa nova forma de número, e para que fosse definido um novo conjunto cuja raiz quadrada de um número negativo não fosse tomada como um elemento absurdo.

Nesse trabalho serão abordadas as concepções básicas de um número complexo, a definição do conjunto e as representações (algébrica, trigonométrica e de Euler) de seus elementos, junto às operações definidas e a interpretação geométrica de cada uma delas.

Palavras-chave: Equações Algébricas; Fórmula de Cardano; Números Complexos; Trigonometria; Fórmula de Euler; Vestibular.

Abstract

The first ideas that stimulated the appearance of the complex numbers came on the 16th century with the systematic work of the Renaissance Italyâs mathematicians looking for a formula to solve permanently the third degree equations. Since then it took about three centuries to great mathematicians solve the obstacles about the acceptance of this new number form, and to define a new set where the square root of a negative number could not be taken as an absurd element.

In this paper it will be discuss the basic concepts of a complex number, the definition of the set and representations (algebraic, trigonometric and Euler) of their elements, united with the defined operations and the geometric interpretation of each one of those.

Keywords: Algebraic Equations; Cardanoâs Formula; Complex numbers; Trigonometry; Euler's formula; Entrance exam.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Nas escolas brasileiras a teoria básica dos números complexos é apresentada aos alunos no ensino médio. O seu estudo tem como principal objetivo ampliar a noção dos conjuntos numéricos, proporcionar a resolução de equações algébricas e promover a representação geométrica de diversas operações conhecidas.

Compreender o conjunto dos números complexos por um ponto de vista histórico, desperta um novo significado na importância do seu estudo. É partindo desse ponto que o capítulo 1 faz um resumo da história de tais números, citando o esforço de grandes matemáticos na busca da definição de um novo conjunto.

No capítulo 2 é apresentada uma definição do conjunto dos números complexos, as representações algébrica, trigonométrica e de Euler, e as representações geométricas de algumas operações. Apresentam-se ainda as propriedades que caracterizam esse conjunto como um *corpo*.

A maioria das universidades, faculdades e institutos de ensino superior do Brasil, adotam o Sistema de Seleção Unificada (SISU) como processo seletivo. A classificação no SISU se baseia na nota do candidato no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que nos seus objetos do conhecimento não contempla o estudo dos números complexos.

Os números complexos são tradicionalmente abordados nos itens de algumas instituições de ensino superior que possuem processo seletivo próprio, como a Universidade de Brasília, o Instituto Militar de Engenharia e a Universidade Federal de São Paulo. É nesse sentido que o capítulo 3 destaca o formato e a resolução de algumas questões aplicadas nesses vestibulares, e que exigiram o conhecimento dos números complexos em diversos contextos.

Capítulo 1

História dos Números Complexos

Em que momento a raiz quadrada de um número negativo deixou de ser um resultado absurdo? Quando na história e na evolução da própria linguagem matemática e científica sentiu-se a necessidade de criar outro conjunto que, além de incluir os números reais, ainda contemplava um novo ente matemático que não poderia ser considerado nem negativo e nem positivo?

Neste primeiro capítulo será feita uma pequena abordagem histórica dos Números Complexos, tendo como principais referências os livros: *O Romance das Equações Algébricas* de Gilberto G. Garbi [16], *Introdução à Álgebra* de Adilson Gonçalves [17] e as notas históricas de João Bosco P. de Carvalho do livro *Trigonometria/Números Complexos* de Manfredo P. do Carmo, Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner [3].

1.1 As Equações Sem Soluções

Os registros mais antigos de cálculos que envolviam as quantidades imaginárias são relacionados a resolução de equações algébricas, já que até o século XVI, equações como $x^2 + 25 = 0$ não tinham solução. Problemas como esse que envolviam raízes quadradas de números negativos eram tratados com dúvidas e com nomes nada adequados como, por exemplo: "números imaginários"ou "números sofisticados"(GARBI, 2009, p.58) [16]. Entretanto, o surgimento dos Números Complexos não está diretamente associado à resolução de equações de segundo grau. Foi durante o trabalho dos matemáticos do século XVI que, buscavam uma fórmula para solucionar as equações de terceiro grau, que a necessidade de estudar casos onde os números reais não contemplavam os resultados obtidos como raízes. Plantou-se, então nesse momento, da história a ideia inicial para a criação de um novo conjunto, que viria a ser nomeado no século XIX por Gauss como "*Números Complexos*"(CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 150) [3].

Do modo análogo como aconteceu com os demais conjuntos numéricos, a aceitação e a interpretação, a simbologia dos cálculos e a representação geométrica dos Números Complexos, aconteceu de forma lenta ao transcorrer dos séculos com o trabalho de matemáticos importantes de diferentes épocas, e que ajudaram a construir o conceito e a formalização de tais números.

A resolução de equações algébricas sempre foi um assunto de grande interesse ao longo da história. Matemáticos antigos da Babilônia desenvolveram a técnica de "Completar Quadrados"para o cálculo das raízes das equações de segundo grau, enquanto os gregos resolviam tais equações com o uso de régua e compasso (GARBI, 2009, p.20). Porém, o domínio da Matemática Grega enfraqueceu bastante após a Grécia ser conquistada por Roma e em seguida, com o fim do Império Romano e a ascensão do Cristianismo, o desenvolvimento da Matemática ficou ao encargo dos árabes e dos hindus durante a maior parte da Idade Média (GARBI, 2009, p.20).

Os matemáticos hindus muito contribuíram para o desenvolvimento da Álgebra, principalmente no campo da resolução de equações. Baskara é uma referência imediata quando falamos de equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, embora a fórmula que garanta a resolução de tais equações não tenha sido descoberta por ele, mas sim pelo matemático Sridhara, no século XI (GARBI, 2009, p.25).

Relembrando que para a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, suas raízes são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

dependendo dos valores dos coeficientes poderia acontecer que o número $\Delta = b^2$ - $4ac$ assumisse valores negativos. Entretanto, isso não perturbava e nem desagradava a maioria dos matemáticos até o século XVI, já que uma equação algébrica era motivada por um problema real ou geométrico dos seus cotidianos. Caso a solução apresentasse a raiz quadrada de um número negativo era fácil dizer que o problema proposto não tinha solução (GARBI, 2009, p.27).

1.2 Os Matemáticos Italianos Do Século XVI

O interesse dos europeus pelo estudo da matemática ressurge na época do renascimento sobre uma forte influência do humanismo, e com a Europa ainda recuperando-se das consequências da peste negra. O matemático italiano Scipione del Ferro (1465-1526) por volta de 1510 encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas morreu sem publicar a sua formulação (GARBI, 2009, p.36).

Eram comuns as disputas entre os matemáticos da época e Antonio Maria Fior, discípulo de Ferro e conhecedor da técnica do seu professor, desafiou um matemático italiano de destaque nos meios científicos conhecido por Tartaglia. A disputa proposta por Fior envolvia a resolução de várias equações do terceiro grau (GARBI, 2009, p.36).

Nicoló Fontana (1500-1557), apelidado de Tartaglia, nasceu na Bréscia e ainda na infância durante uma invasão das tropas francesas em 1512, foi gravemente ferido por um golpe de espada que cortou sua mandíbula. Este incidente deixou-lhe uma profunda cicatriz na boca e um permanente defeito na fala, sendo apelidado de Tartaglia, o gago [16]. Ao longo de sua vida fez trabalhos importantes onde demonstrou conhecimentos de aritmética, geometria, álgebra, balística e estatística. Entretanto, o fato que o colocou definitivamente como uma referência entre os matemáticos do século XVI foi ter aceitado o desafio de Fior, onde não só deduziu a resolução para $x^3+px+q=0$ como também resolveu as equações do tipo $x^3+px^2+q=0$ (GARBI, 2009, p.37).

Vejamos como obter a solução geral das equações de terceiro grau desenvolvida por Tartaglia (GARBI, 2009, p.38).

Tomando uma equação do terceiro grau, $x^3+ax^2+bx+c=0$, a ideia de Tartaglia foi mostrar que qualquer expressão com esse aspecto pode ser reduzida em uma do tipo $y^3+py+q=0$.

É imediato que, se $a = 0$, a equação toma o aspecto desejado. Agora suponha para $a \neq 0$ e considere $y = x + m$, onde $m = \dfrac{a}{3}$, com o intuito de eliminar o coeficiente que acompanha x^2.

Temos que:

$x^3 + ax^2 + bx + c = (y-m)^3 + a(y-m)^2 + b(y-m) + c$

$\mathrm{x}^3 + ax^2 + bx + c = (y-m)^2(y-m) + a(y^2 - 2ym + m^2) + by - bm + c$

$\mathrm{x}^3 + ax^2 + bx + c = y^3 - my^2 - 2y^2m + 2ym^2 + ay^2 - 2aym + am^2 + by - bm + c$

$\mathrm{x}^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + (a-3m)y^2 + (2m^2 - 2am + b)y + (am^2 - bm + c).$

E segue que:

$$a \text{ - } 3m = a \text{ - } 3\frac{a}{3} = a \text{ - } a = 0.$$

Desse modo, para resolver qualquer equação do terceiro grau deve-se resolver equações da forma: $x^3 + px + q = 0$.

Supondo-se que $x = A + B$ seja uma solução da equação $x^3 + px + q = 0$. Temos que:

$x^3 = (A+B)^3$

$\mathrm{x}^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$

$\mathrm{x}^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$

$\mathrm{x}^3 = A^3 + B^3 + 3ABx.$

Façamos $x^3 = (\text{-}p)x + (\text{-}q)$ e $x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$, segue que $3AB = -p$ e $A^3 + B^3 = -q$. Portanto:

$A^3B^3 = \text{-}\dfrac{p^3}{27}$ e $A^3 + B^3 = -q.$

Nota-se que A^3 e B^3 são as raízes da equação $x^2 + \mathrm{q}\mathrm{x} - \dfrac{p^3}{27} = 0$. De fato:

$(A^3)^2 + qA^3 - \dfrac{p^3}{27} = A^6 - (A^3 + B^3)A^3 + A^3B^3 = A^6 - A^6 - B^3A^3 + A^3B^3 = 0.$

Do mesmo modo, temos:

$$(B^3)^2 \text{ - } qB^3 \text{ - } \frac{p^3}{27} = B^6 - (A^3 + B^3)B^3 + A^3B^3$$
$$(B^3)^2 \text{ - } qB^3 \text{ - } \frac{p^3}{27} = B^6 \text{ - } A^3B^3 \text{ - } B^6 + A^3B^3$$
$$(B^3)^2 \text{ - } qB^3 \text{ - } \frac{p^3}{27} = 0.$$

Pela fórmula de Baskara, sabemos que as raízes desta equação são dadas por:

$$x_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{4p^3}{4.27}} = \frac{-q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$$

e

$$x_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} \text{ - } \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{4p^3}{4 \cdot 27}} = \frac{-q}{2} \text{ - } \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$$

Portanto, podemos assumir

$$A^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \text{ e } B^3 = \frac{-q}{2} \text{ - } \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3},$$

e temos

$$\text{A} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} \text{ e B} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

Como a hipótese de Tartaglia foi supor $x = A + B$, conclui-se que:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

A notícia de que Tartaglia havia desenvolvido a fórmula para a resolução de equações do terceiro grau chega ao conhecimento de Girolamo Cardano, outra referência entre os matemáticos da Itália Renascentista. Cardano pediu a Tartaglia que lhe revelasse tal fórmula para que fosse publicada em seu próximo livro. Tartaglia não concordou, defendendo que ele mesmo iria publicar sua descoberta, para desgosto de Cardano (GARBI, 2009, p.37).

Nascido em Pavia em 1501, Cardano faleceu em Roma no ano de 1576. Além de excepcional cientista, também foi um escritor muito influente e polêmico, publicando obras como *Liber de Ludo Aleae*, onde introduziu a ideia de probabilidade e também técnicas para trapacear nos jogos. Sua maior obra, entretanto, foi o *Ars Magna*, publicada na Alemanha em 1545 no qual apresenta as resoluções de equações de terceiro e quarto grau (GARBI, 2009, p.34). A partir desta obra, houve um grande impulso à pesquisa em álgebra e por isso tal publicação é considerada um marco do início do período moderno da matemática (GARBI, 2009, p.34).

Apesar de ter publicado a resolução das equações de terceiro e quarto grau, não foi Cardano o seu principal formulador. Após muitas conversas e pedidos, e sob a promessa de não expor a descoberta de Tartaglia, Cardano conseguiu que este lhe revelasse a solução para as equações de terceiro grau, e Ludovico Ferrari seu discípulo, desenvolveu as técnicas para a resolução das equações de quarto grau[17].

Cardano em certa passagem do Ars Magna escreveu que, dividir 10 em duas partes de modo que o produto destas partes seja 40 era impossível (GARBI, 2009, p. 53) [16]. Vejamos a resolução desse problema pela fórmula de Cardano:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x\cdot y=40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+2x\cdot y+y^2=100 \ (1) \\ 4x\cdot y=160 \ (2) \end{cases}$$

Façamos (1) - (2) e obtemos:

x^2 - 2xy + y^2 = -60 $\Longrightarrow$ $(x-y)^2$ = -60 $\Longrightarrow$ x - y = $\pm 2\sqrt{-15}$

Montando um novo sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=\pm 2\sqrt{-15} \end{cases} \Longrightarrow 2x = 10 \pm 2\sqrt{-15}$$

Portanto,

$x = 5 \pm\sqrt{-15}$ $y = 5 \pm\sqrt{-15}$.

Podemos verificar que de fato $x + y = 10$ e $x{\cdot}y = 40$ porém Cardano comentou que o resultado desse problema era "tão sutil quanto inútil"(GARBI, 2009, p. 53) [16].

Percebe-se que a fórmula desenvolvida por Tartaglia, e publicada por Cardano, parece não ter sentido se $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 \leq 0$ e ainda na Itália no século XVI, alguns matemáticos se depararam com o cálculo da raiz quadrada de um número negativo durante a resolução de algumas equações do terceiro grau. A partir de então, questões desse tipo passaram a incomodar os matemáticos da época já que não só a resolução de algumas equações do segundo grau culminavam em raízes quadradas de números negativos.

O algebrista Rafael Bombelli nasceu em Bolonha em 1526 e no ano de 1572, ano de seu falecimento, em seu livro *L'Algebra parte Maggiore dellArithmeticaa*, sugeriu as primeiras ideias que levariam a formulação do conjunto dos números complexos (GARBI, 2009, p. 51) [16]. Nessa obra, Bombelli aplicou a fórmula de Cardano para resolver a equação $x^3 = 15x + 4$, chegando ao resultado $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ (GARBI, 2009, p. 51) [16] .

Percebe-se que $x = 4$ é uma raiz para o exemplo, mas a ideia inovadora de Bombelli foi continuar com os cálculos tratando os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, como se fossem da forma $a + \sqrt{-b}$ e a - $\sqrt{-b}$ desenvolvendo nestes as propriedades válidas no universo dos números reais. Bombelli deduziu que $x = a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$, e conclui de forma relativamente simples que os valores de a e b deveriam ser iguais a 2 e 1, respectivamente.

Com esses valores, pode-se tirar a prova que de fato:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \text{ e } (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

Embora as dificuldades da fórmula de Cardano ainda continuassem no começo do século seguinte, Bombelli proporcionou uma nova perspectiva nos cálculos que envolviam os "Números Complexos"dando uma grande contribuição na elaboração de novas teorias. Suas ideias estimularam trabalhos de grandes matemáticos do século

XVII, dentre eles Thomas Harriot, Albert Girard e René Descartes.

1.3 Os Números Complexos nos séculos XVII e XVIII

O filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650) foi um dos grandes responsáveis pela evolução da matemática durante o século XVII (GARBI, 2009, p. 65) [16]. Ele desenvolveu a ideia de localizar em um sistema de coordenadas o posicionamento de pontos no plano e no espaço, no qual conhecemos hoje como Geometria Analítica. Parte do estudo de Descartes dedicado à Geometria Analítica era motivado pela busca da resolução de equações algébricas. No seu livro *Geometria*, primeiro apêndice da sua obra mais famosa *O Discurso do Método* publicada em 1637, qualificou as raízes quadradas de números negativos como "imaginárias"na seguinte frase: *"Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias"*. Razão pela qual até hoje, nos referimos a $\sqrt{-1}$ como número imaginário (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 152) [3].

Descartes influenciou de forma significativa os seus contemporâneos e, o termo "imaginário", foi usado com frequência pelos seus sucessores para referenciar a impossibilidade da representação geométrica de algumas equações. A proposta de Descartes para o estudo de uma nova geometria permitiu uma correspondência entre os objetos da álgebra e da geometria, e sem dúvida contribuíram para um tratamento diferenciado que viria futuramente no século XIX no estudo dos números complexos.

O filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716) concluiu que expressões da forma $\sqrt[n]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{-b}}$ são números reais [3]. Para $n = 3$, essas conclusões já eram conhecidas e foram estudadas pelos italianos do século XVI e Bombelli, por exemplo, chegou a $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4$ durante a resolução de uma equação do terceiro grau usando a fórmula de Cardano.

Em suas pesquisas, Leibniz não rejeita os casos em que se depara com "Números Imaginários"e em uma carta comenta com o matemático holandês Christian Huygens, um caso irredutível em que obteve a equação $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=6$. Leibniz qualifica os números imaginários através do seguinte comentário muito conhecido e replicado por matemáticos de diversas épocas (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 149) [3]:

> *"O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, neste portento do mundo das ideias, este anfíbio entre o ser o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa."*

No século XVIII, o matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754) fez avanços nos estudo dos números complexos relacionando-os com a trigonometria. Em seu tratado *Miscelânea Analítica*, publicado em 1730, de Moivre faz importantes contribuições e apresenta a fórmula que leva seu nome para potências de números complexos na forma trigonométrica (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 113) [3]. Em linguagem atual, a fórmula de Moivre é representada por:

$$(cos\ x\ +\ i\ sen\ x)^n\ =\ (cos\ (nx)\ +\ i{\cdot}sen\ (nx)),$$

em que o símbolo i é a representação da unidade imaginária proposta por Euler em 1777. Entretanto, a representação geométrica dos números complexos viria a ser desenvolvida no século XIX por matemáticos como Caspar Wessel e Jean Robert Argand (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 155) [3].

O século XVIII representou uma época de intensa produção no estudo dos números complexos, caracterizado pela formalização da escrita sobre o tema e pela apresentação de resultados relevantes e esclarecedores que mudaram o tratamento dado pelos matemáticos sobre o assunto. Além de Abraham de Moivre, outros matemáticos do século XVIII contribuíram com trabalhos e artigos de destaque sobre os "imaginários". O suíço Johann Bernoulli (1667-1748) promoveu a análise de alguns problemas que envolviam os logaritmos de números imaginários, e Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) evoluiu no estudo das expressões de um número complexo $a + b\sqrt{-1}$ [16]. Porém, é conclusivo que sobre esse tema, o matemático mais influente desse século foi o suíço Leonhard Euler.

1.4 As Contribuições de Euler

Euler nasceu na Basiléia no ano de 1707 e morreu em 1783, passando os dezessete últimos anos de sua vida cego (GARBI, 2009, p. 98) [16]. Foi o maior responsável pela linguagem e notação que usamos hoje na matemática, melhorando a simbologia da sua época utilizando, por exemplo, a letra e como base dos logaritmos naturais e i para representar a unidade imaginária. Evoluiu o estudo das soluções gerais da soma de dois radicais particulares e, no seu livro *Pesquisa sobre as Raízes Imaginárias de uma equação* (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 155), afirma que as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão aplicadas em números da forma $a + ib$, resultará da mesma forma $a + ib$, com a e b reais, sugerindo assim de forma sútil a ideia de que o novo conjunto em estudo seria um *corpo*. Na mesma obra, Euler mostrou que toda equação de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real e que as equações com coeficientes reais de grau par possuem raízes reais ou imaginárias aos pares (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 155) [3].

Estudando diversas operações como potências, logaritmos e funções trigonométricas, Euler foi capaz de provar que toda raiz não real de uma equação é da forma $a + ib$ e que todas as operações conhecidas atendem aos números complexos para $b=0$, ou seja, os números reais [16]. Ainda no campo dos números complexos, Euler identificou as raízes da equação $z^n = 1$ como sendo os vértices de um polígono regular de n lados e definiu a exponencial com números complexos no que em linguagem atual seria representada pela fórmula: $e^{i\theta} = cos\ \theta + i{\cdot}sen\ \theta$.

Embora seja reconhecida a produção e a evolução dos conceitos sobre as raízes imaginárias no século XVIII, faltavam ainda argumentos que garantissem a representação geométrica de tais valores. Assim, no final do século XVIII e começo do século XIX, ficou evidente a necessidade da elaboração de novas regras e novos conceitos que garantissem aceitação de tais números.

1.5 A Representação Geomética

O Matemático inglês John Wallis (1616-1703), ainda no século XVII, foi o primeiro a estudar de forma intensa uma representação geométrica das raízes imaginárias, tentando representa-las através de segmentos trigonométricos [3]. Embora não tenha solucionado tal impasse, as ideias de Wallis motivaram o pensamento de diversos matemáticos ao longo de dois séculos até que Caspar Wessel (1745-1818), no início do século XIX (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 155) [3], apresentou as primeiras características da representação geométrica dos números complexos familiares às quais conhecemos hoje, através de uma correspondência entre os valores imaginários e pontos no plano.

Os trabalhos e as publicações de Jean Robert Argand (1786-1822) merecem o crédito por avanços significativos na tentativa de representar geometricamente as quantidades imaginárias no início do século XIX (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 155) [3]. A ideia mais inovadora proposta em sua teoria enfatizava que os valores imaginários não pertenceriam a reta real, embora fossem coplanares a ela. Representando as quantidades imaginárias como segmentos orientados no plano, Argand trabalhou algebricamente com esses valores como se fossem vetores, imprimindo uma interpretação geométrica onde a soma de tais fatores tem como consequência a regra do paralelogramo, e o produto promove rotações no módulo.

Evidenciou-se durante as tentativas de Wessel e Argand na busca de uma representação geométrica das quantidades imaginárias, a necessidade da criação de um novo ente matemático que compreendesse além dos números reais outro formato de número, definidos após os trabalhos de Gauss como "Números Complexos"(CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 156) [3].

A teoria que motivou a formação de um novo conjunto, hoje conhecido como Conjunto dos Números Complexos, começa a ser concebida com os trabalhos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (GARBI, 2009, p. 112) [16] que, aproveitando-se das ideias de Argand, pensou em números da forma $a + ib$ como coordenadas de um ponto no plano cartesiano que poderiam ser representadas por *(a,b)*. Na representação geométrica desenvolvida por Gauss, o eixo horizontal e o eixo vertical do plano cartesiano representariam respectivamente as quantidades, real e imaginária, de um número da forma $a + ib$. Tal plano bidimensional é conhecido como Plano de Argand-Gauss, fazendo referência aos dois principais matemáticos que desenvolveram as teorias dos números complexos como vetores no plano.

Gauss foi o responsável pela expressão "Números Complexos" para todo número que assumisse a forma $a + ib$, e também contribuiu com a simbologia das operações que envolviam tais números (GARBI, 2009, p. 112) [16], sendo essas utilizadas até os dias de hoje. No ano de 1799, em sua tese de doutorado, Gauss provou que qualquer polinômio `p(z)` com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ possui exatamente n raízes complexas, se contarmos as suas multiplicidades (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 151) [3]. Esse é o chamado *Teorema Fundamental da Álgebra.*

Ainda no século XIX, precisamente no ano de 1837, o matemático irlandês Willian Rowan Hamilton (1805-1865) reescreveu as definições geométricas de Gauss formalizando a álgebra dos números complexos que usamos até hoje (Santos, 2014, p. 242) [24].

Novos conceitos matemáticos podem demorar séculos para serem aceitos embora motivem os esforços de grandes pensadores. Neste resumo sobre a história dos Números Complexos, podemos observar que a formulação de um conjunto não era a proposta inicial do estudo. Assim como o cálculo da medida da diagonal de um quadrado promoveu o surgimento do conjunto dos números racionais, as tentativas de solucionar as equações do terceiro grau promoveram o surgimento do Conjunto dos Números Complexos.

Capítulo 2

Os Números Complexos

Nesse capítulo será apresentada uma definição dos Números Complexos e serão demonstradas as propriedades que caracterizam esse conjunto como um *corpo*. Além da apresentação das formas algébrica e trigonométrica, serão discutidas também nesse capítulo as representações geométricas de algumas operações, concluindo com a apresentação da Fórmula de Euler e o resumo de algumas das principais propriedades da função exponencial em $\mathbb{C}$.

As definições e as propriedades deste capítulo foram baseadas nos textos dos livros: *Variáveis Complexas e Aplicações* de Geraldo Ávila [1], *Trigonometria/Números Complexos* de Manfredo P. do Carmo, Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner [3], *Números* de José Carlos Santos [24] e *Cáculo Volume* 2 de George B. Thomas [26].

2.1 O Conjunto dos Números Complexos

Definição: O conjunto dos números complexos, indicado por $\mathbb{C}$, é o conjunto de todos os pares ordenados (x,y) de números reais, em que para quaisquer dois elementos, (a,b) e (c,d), tem-se a igualdade, a adição e a multiplicação definidas conforme segue:

(i) Igualdade: $(a,\ b) = (c,\ d) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

(ii) Adição: $(a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d)$

(iii) Multiplicação: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

Portanto, sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e z um elemento de $\mathbb{C}$, temos:

$$z \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow z = (x,\ y), \text{ onde, } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Definida a adição em $\mathbb{C}$ para quaisquer elementos: $z = (x,\ y)$, $w=(u,\ v)$ e $t=(a,\ b)$, pertencentes a esse conjunto valem as seguintes propriedades:

(A_1) Associatividade da Adição: $z + (w + t) = (z + w) + t$.

Demonstração:

$z + (w + t) = (x,y) + ((u,v) + (a,b))$

$z + (w + t) = (x,y) + (u + a, v + b)$

$z + (w + t) = (x + (u+a),\ y + (v+b))$

$z + (w + t) = ((x + u) + a,\ (y + v) + b)$

$z + (w + t) = (z + w) + t.$

(A_2) Comutatividade da Adição: $z + w = w + z$.

Demonstração:

$z + w = (x,y) + (u,v)$

$z + w = (x + u,\ y + v)$

$z + w = (u + x,\ v + y)$

$z + w = (u,v) + (x,y)$

$z + w = w + z.$

(A_3) Elemento Neutro da Adição: existe $0 \in \mathbb{C}$ tal que $0 + z = z + 0 = z$.

Demonstração:

Tome $z = (x,y)$ e $0 = (0,0)$.

$0 + z = (0,0) + (x,y) = (0 + x, 0 + y) = (x,y) = z.$

(A_4) Inverso Aditivo:

Para todo $z \in \mathbb{C}$ existe o elemento $-z$ tal que $z + (-z) = 0$.

Demonstração:

Tome $z = (x,\ y)$ e $-z = (-x,\ -y)$.

$z + (-z) = (x,y) + (-x,-y) = (x+(-x),y+(-y)) = (0,0) = 0.$

Definida a multiplicação em $\mathbb{C}$ para quaisquer elementos: $z=(x,y)$, $w=(u,v)$ e $t=(a,b)$, pertencentes a esse conjunto valem as seguintes propriedades:

(M_1) Associatividade da Multiplicação: $(z{\cdot}w){\cdot}t = z{\cdot}(w{\cdot}t)$.

Demonstração:

$(z{\cdot}w){\cdot}t = [(x,y){\cdot}(u,v)]{\cdot}(a,b)$

$(z{\cdot}w){\cdot}t = [(xu - yv)a - (xv + yu)b,(xv + yu)a + (xu - yv)b]$

$(z{\cdot}w){\cdot}t = [(xua - yva - xvb - yub,xva + yua + xub - yvb)]$

$(z{\cdot}w){\cdot}t = [x(ua - vb) - y(va + ub),x(va + ub) + y(ua - vb)]$

$(z{\cdot}w){\cdot}t = (x,\ y){\cdot}(ua - vb,\ ub + va)$

$(z{\cdot}w){\cdot}t = (x,\ y){\cdot}[(u,\ v){\cdot}(a,\ b)] =$

$(z{\cdot}w){\cdot}t = z{\cdot}(w{\cdot}t)$

(M_2) Comutatividade da Multiplicação: $z{\cdot}w = w{\cdot}z$.

Demonstração:

$z{\cdot}w = (x,y){\cdot}(u,v)$

$z{\cdot}w = (xu - yv,\ yu + xv)$

$z{\cdot}w = (ux - vy,\ uy + vx)$

$z{\cdot}w = (u,v){\cdot}(x,y)$

$z{\cdot}w = w{\cdot}z.$

(M_3) Elemento Neutro: $1 \cdot z = z$, onde $1 = (1,\ 0)$.

Demonstração:

$1{\cdot}z = (1,0){\cdot}(x,\ y) = (1{\cdot}x - 0{\cdot}y,\ 0{\cdot}x + 1{\cdot}y) = (x,\ y) = z.$

(M_4) Elemento Inverso da Multiplicação: Para todo $z \neq (0,0)$ existe um único $w \in \mathbb{C}$ tal que $z{\cdot}w = (1,0)$ denotamos w por z^{-1} e o chamamos de elemento inverso ou simplesmente o inverso de z.

Demonstração:

Seja z = (x, y) $\neq$ (0,0) e defina-se $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$.

Pela definição do produto de dois números complexos temos que:

$$z{\cdot}z^{-1} = (x,y){\cdot}(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$$

$$z{\cdot}z^{-1} = (\frac{xx-y(-y)}{x^2+y^2}, \frac{yx+x(-y)}{x^2+y^2})$$

$$z{\cdot}z^{-1} = (\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{0}{x^2+y^2})$$

$$z{\cdot}z^{-1} = (\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, 0)$$

$$z{\cdot}z^{-1} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

$$z{\cdot}z^{-1} = (1,0).$$

($\mathbf{M}_5$) Distributividade: $z{\cdot}(w + t) = z{\cdot}w + z{\cdot}t$.

Demonstração:

$z{\cdot}(w + t) = (x, y)[(u, v) + (a, b)]$

$z{\cdot}(w + t) = (x, y)[(u + a, v + b)]$

$z{\cdot}(w + t) = [x(u + a) - y(v + b), x(v + b) + y(u + a)]$

$z{\cdot}(w + t) = [xu + xa - yv - yb, xv + xb + yu + ya]$

$z{\cdot}(w+t) = [(xu - yv) + (xa - yb), (xv + yv) + (xb + ya)]$

$z{\cdot}(w+t) = [(xu - yv), (xv + yu)] + [(xa - yb), (xb + ya)]$

$z{\cdot}(w+t) = (x, y){\cdot}(u, v) + (x, y){\cdot}(a, b) = z{\cdot}w + z{\cdot}t.$

Representa-se a subtração e a divisão de dois números complexos z e w por $z - w = z + (-w)$ e $\frac{z}{w} = z{\cdot}w^{-1}$, respectivamente.

Um conjunto não vazio em que uma adição e uma multiplicação estão definidas e satisfazem as propriedades demonstradas acima é uma estrutura algébrica chamada de *corpo*. Podemos chamar $\mathbb{C}$ de corpo dos números complexos.

2.2 A Forma Algébrica

2.2.1 Definição da Forma Algébrica

Decorre das definições adotadas para as operações em $\mathbb{C}$, que todo número complexo da forma *(x, 0)* pode ser identificado pelo número real x.

De fato, sejam z = *(x_1, 0)* e w = *(x_2, 0)* dois elementos quaisquer de $\mathbb{C}$.

Tem-se que:

(i) $z = w \iff (x_1,\ 0) = (x_2,\ 0) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2$

(ii) $z + w \iff (x_1,\ 0) + (x_2,\ 0) = (x_1 + x_2, 0)$

(iii) $z \cdot w \iff (x_1,\ 0)(x_2,\ 0) = (x_1 \cdot x_2 - 0 \cdot 0,\ x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2, 0)$

Note, podemos operar com os complexos *(x,0)* de modo semelhante ao que fazemos com os reais.

Assim, ao fazermos essa identificação temos que dentro de $\mathbb{C}$ tem uma cópia de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \{(x,\ y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\}.$$

O número complexo *(0, 1)* é denominado unidade imaginária e é representado por i. Verifica-se pela definição da multiplicação em $\mathbb{C}$ que i^2 pode ser identificado pelo número -1.

De fato:

$i^2 = i \cdot i = (0,\ 1) \cdot (0,\ 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,\ 0).$

Dado o número complexo $z = (x,y)$, temos:

$z = (x,\ y) = (x,\ 0) + (0,\ y) = x(1,\ 0) + y(0,\ 1) = x + iy.$

Doravante, qualquer $z \in \mathbb{C}$, tal que $z = (x,\ y)$ pode ser escrito de maneira única como $z = x + iy$, com $x,\ y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Tal expressão é por definição a forma algébrica do número complexo z.

Indicaremos para qualquer número complexo $z = x + iy$, x como a parte real denotada por Re(z), e y como a parte imaginária denotada por Im(z), e destacaremos z como um número imaginário puro quando $x = 0$.

2.2.2 Operações na forma Algébrica

Sejam a,b,c e d números reais e sejam $z = a + ib$ e $w = c + id$ dois números complexos quaisquer, define-se a adição, a subtração e a multiplicação conforme segue.

(i) Adição

$z + w = (a + ib) + (c + id)$

$z + w = a + ib + c + id$

$z + w = a + c + ib + id$

$z + w = (a + c) + i(b + d).$

(ii) Multiplicação

$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id)$

$z \cdot w = ac + iad + ibc + i^2bd$

$z \cdot w = ac + iad + ibc - bd$

$z \cdot w = ac - bd + iad + ibc$

$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc).$

2.2.3 Representação Geométrica

A partir do fato que todo número complexo z é definido por um par de números reais, podemos associar em um sistema de coordenadas cartesianas para qualquer $z = (x, y)$ um ponto cujas coordenadas são x e y.

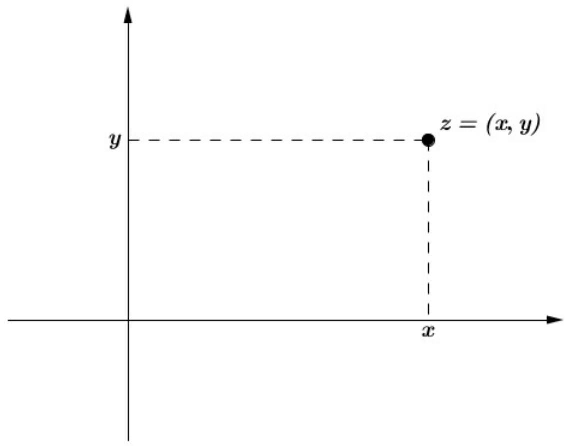

Figura 2.1: Representação geométrica de z = (x, y)

Esse sistema de coordenadas cartesianas no qual estão repesentados os números complexos é chamado de Plano de Argand-Gauss ou Plano Complexo, e identifica o eixo Ox como o eixo real e o eixo Oy como o eixo imaginário. O ponto de coordenadas *(x,y)* é chamado de imagem do número complexo z.

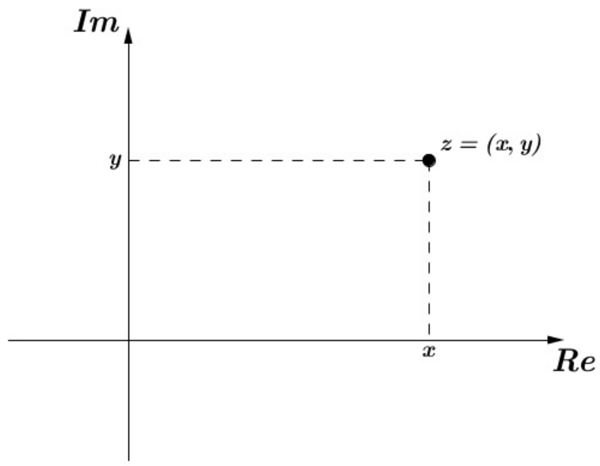

Figura 2.2: Imagem de z=(x,y)

No Plano de Argand-Gauss podemos ainda considerar o segmento orientado de origem no ponto $O = (0,0)$ e extremidade *(x,y)*. Desse modo, o número complexo z é representado pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$ de componentes x e y.

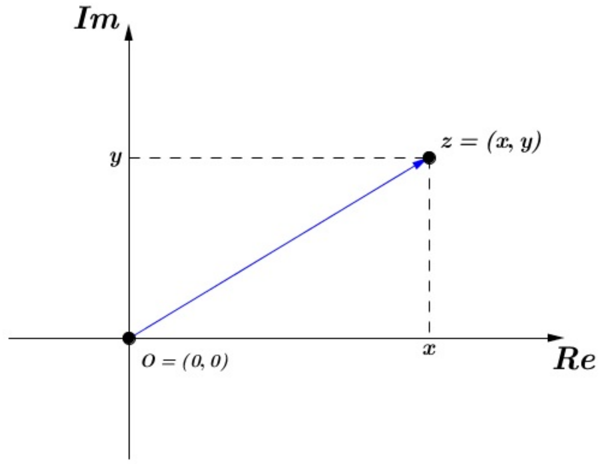

Figura 2.3: Vetor $\overrightarrow{Oz}$

2.2.4 Conjugado e Módulo

O conjugado do número complexo $z = x + iy$ é definido por $\bar{z} = x - iy$, e sua representação no Plano de Argand-Gauss é dada pela imagem simétrica de z em relação ao eixo real.

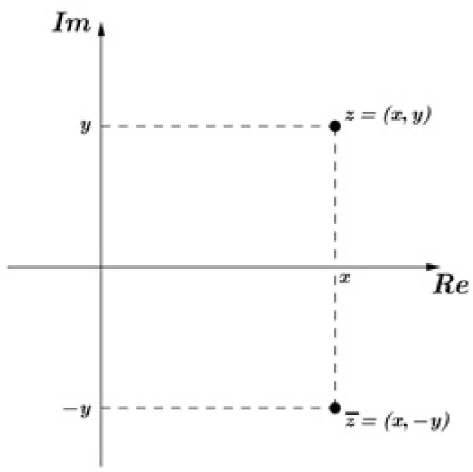

Figura 2.4: Representação geométrica de $\overline{z}$

Para o número complexo $z = x + iy$, o módulo de z, será denotado por $|z|$, e é definido como a distância do ponto *(x, y)* à origem do Plano de Argand-Gauss.

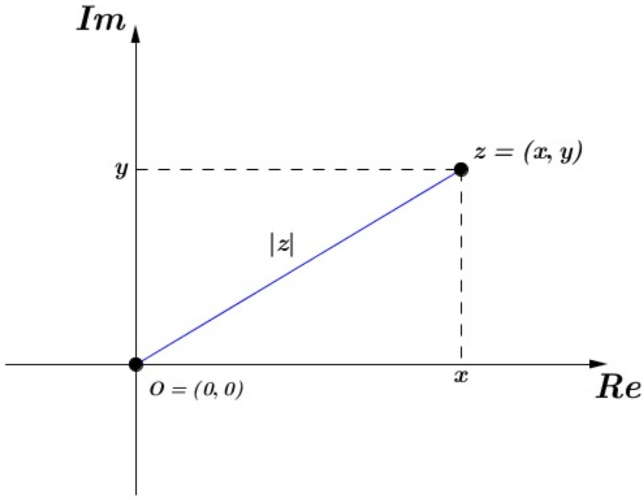

Figura 2.5: Módulo de z

Assim podemos verificar facilmente, pelo teorema de Pitágoras, que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.3 A Representação Geométrica das Operações

Pensando nos Números Complexos como vetores no plano podemos interpretar geometricamente as operações com tais números.

2.3.1 Interpretação Geométrica da Adição

Sejam z = *(a,b)* e w = *(c,d)* dois números complexos quaisquer.

Sabemos que:

$$z + w \Longleftrightarrow (a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d)$$

A soma de dois números complexos é representada por um vetor cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados. Esse fato é conhecido como a regra do paralelogramo.

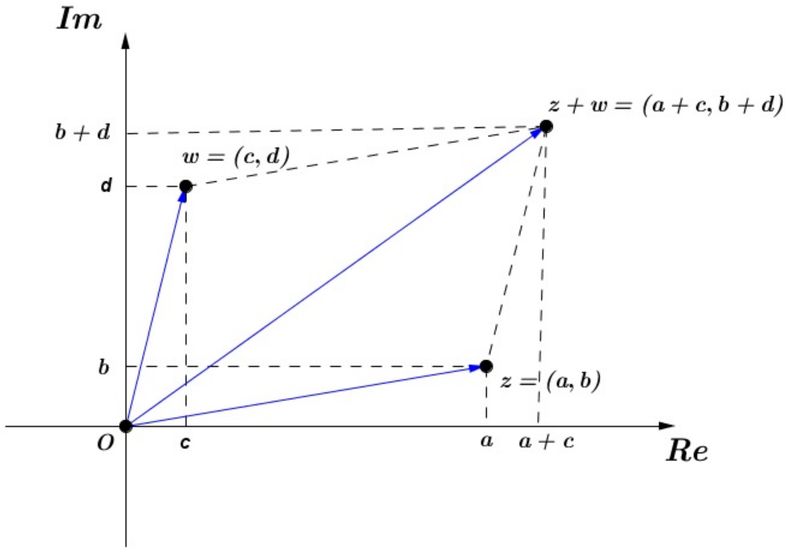

Figura 2.6: Interpretação geométrica da adição

2.3.2 Um Número Real Multiplicado por um Número Complexo

Seja $z = (a,\ b)$ um número complexo qualquer e seja λ um número real.

Temos que: $\lambda{\cdot}z = \lambda{\cdot}(a,\ b) = (\lambda a,\ \lambda b)$, e os vetores $\overrightarrow{Oz}$ e $\lambda{\cdot}\overrightarrow{Oz}$ terão a mesma orientação se $\lambda > 0$ e orientações opostas se $\lambda < 0$.

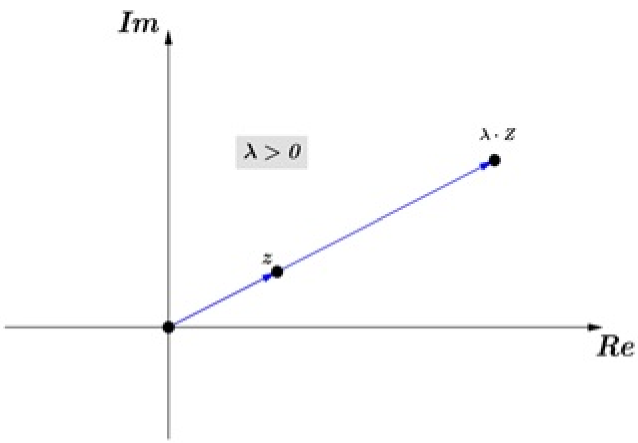

Figura 2.7: Múltiplo de z com $\lambda > 0$

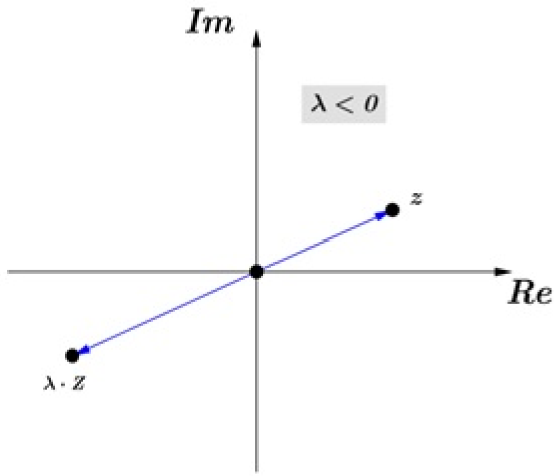

Figura 2.8: Múltiplo de z com $\lambda < 0$

A representação geométrica da multiplicação será apresentada quando definirmos a forma trigonométrica dos números complexos.

2.4 As Propriedades do conjugado e do Módulo

Faremos aqui a demonstração das principais propriedades do conjugado e do módulo dos números complexos. Para isso consideraremos *a, b, c* e *d* números reais, $z = (a,\ b)$ e $w = (c,\ d)$ dois números complexos quaisquer.

Proposição 1: O conjugado do conjugado de um número complexo é igual ao próprio número complexo.

Demonstração:

Seja $z = a + ib$, então $\overline{z} = \overline{a - ib} \Longrightarrow \overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.

Proposição 2: O conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos seus conjugados.

Demonstração:

$\overline{z + w} = \overline{(a + ib) + (c + id)} = (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \overline{z} + \overline{w}$

Proposição 3: O conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados.

Demonstração:

$\overline{z \cdot w} = \overline{(a + ib) \cdot (c + id)}$

$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac + iad + ibc + i^2bd)}$

$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac + iad + ibc - bd)}$

$\overline{z \cdot w}$ = (ac - bd) - i(ad + bc) = c(a - ib) - d(b + ia)

$\overline{z}$·w= $c(a$ - $ib) - id$ (- ib + $a) = (a$ - $ib)\cdot(c$ - $id) = \overline{z}\cdot\overline{w}$

Proposição 4: O conjugado da divisão é igual a divisão dos conjugados.

Demonstração:

Para $w \neq (0,\ 0)$, veja que pela propriedade anterior temos:
$\overline{(\frac{z}{w})} = \overline{(z \cdot \frac{1}{w})} = \overline{z}\cdot\frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$

Proposição 5: A soma de um número complexo z = *(x, y)* com o seu conjugado é igual ao dobro da parte real de z.

Demonstração:

$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2Re(z).$

Proposição 6: O produto de um número complexo z = *(x, y)* pelo seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de z, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração:

$z\cdot\overline{z} = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2.$

Proposição 7: O módulo de um número complexo z = *(x, y)* é igual ao módulo do seu conjugado para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = (\sqrt{x^2 + (-y)^2}) = |\overline{z}|.$

Proposição 8: O módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos:

$|z \cdot w| = |z|\cdot|w|.\ \forall\ z,\ w \in \mathbb{C}.$

Demonstração:

$|z \cdot w|^2 = (z\cdot w)\cdot(\overline{z \cdot w}) = (z\cdot\overline{z})\cdot(w\cdot\overline{w}) = |z|^2\cdot|w|^2.$

Proposição 9: O módulo da divisão de dois números complexos é igual à divisão dos módulos:

$|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}, \forall\ z,\ w \in \mathbb{C}.$

Demonstração:

$|\frac{z}{w}| = |z \cdot \frac{1}{w}| = |z| \cdot\ |\frac{1}{w}| = \frac{|z|}{|w|}.$

Proposição 10: Desigualdade triangular: $|z + w| \leq |z| + |w|, \forall\ z,\ w \in \mathbb{C}$.

Demonstração:

$0 \leq (xv - yu)^2 \Longrightarrow 0 \leq (xv)^2 - 2xvyu + (yu)^2 \Longrightarrow 2xvyu \leq (xv)^2 + (yu)^2.$

Segue que,

$2xvyu + (xu)^2 + (yv)^2 \leq (xv)^2 + (yu)^2 + (xu)^2 + (yv)^2 \Longrightarrow$

$(xu + yv)^2 \leq (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \Longrightarrow (xu + yv) \leq \sqrt{(x^2 + y^2)(u^2 + v^2)}.$

Multiplicando ambos os termos da inequação por dois e em seguida, adicionando $(x^2 + y^2 + u^2 + v^2)$ temos:

$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 2xu + 2yv \leq 2\sqrt{(x^2 + y^2)(u^2 + v^2)} + x^2 + y^2 + u^2 + v^2.$

Portanto,

$\sqrt{(x + u)^2 + (y + v)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{u^2 + v^2} \Longrightarrow |z + w| \leq |z| + |w|.$

Observação:

Sejam a,b,c e d números reais e sejam $z = (a,\ b)$ e $w = (c,\ d)$ dois números complexos. Para $w \neq 0$ define-se:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$$
$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$
$$\frac{z}{w} = \frac{(a + ib) \cdot (c - id)}{(\sqrt{c^2 + d^2})^2}$$
$$\frac{z}{w} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

2.5 As Potências de i

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, tal que $z \neq 0$. Define-se:

(i) $z^0 = 1,\ z^1 = z$ e $z^{n+1} = z^n \cdot z, \forall\ n > 1;$

(ii) $z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$

Sabemos que i^2 = -1 e tomando a definição acima, temos que:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = -i$

$i^8 = i^7 \cdot i = 1$

$\vdots$

Observação: $i^n = i^{4q+r} \Longrightarrow i^n = i^{4q}.\mathrm{i}^r \Longrightarrow i^n = (i^4)^q.i^r \Longrightarrow i^n = 1^q.i^r \Longrightarrow i^n = i^r$, com $q,\ r \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < 4$.

2.6 A Forma Trigonométrica

2.6.1 Número Complexo na Forma Trigonométrica

Vamos deduzir uma forma para apresentar um número complexo z=a+ib, com a, $b \in \mathbb{R}$, a partir da sua localização no Plano de Argand-Gauss, enfatizando os aspectos geométricos da imagem. Para isso, seja $z \in \mathbb{C}$ e *(a, b)* a sua imagem no Plano de Argand-Gauss. Sabemos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e definimos como o argumento principal de *z*, indicado por *Arg(z)*, a medida do ângulo θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ formado pelo eixo real e o vetor $\overrightarrow{Oz}$ em sentido anti-horário, conforme a figura a seguir.

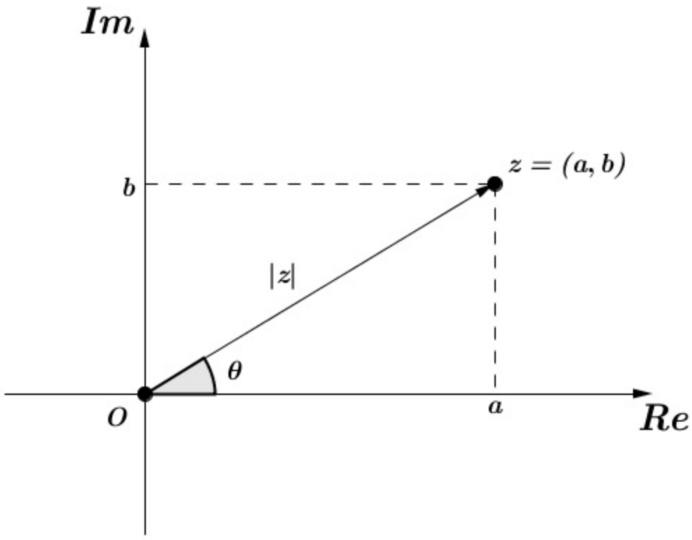

Figura 2.9: Argumento de z

Usando as razões trigonométricas, para $z \neq$ (0,0), tem-se que:

$$Re(z) = a = |z| \cdot cos\ \theta \text{ e } Im(z) = b = |z| \cdot sen\ \theta.$$

Segue que, para qualquer número complexo na sua forma algébrica:

$$z = a + ib \Longleftrightarrow z = |z|(cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta).$$

A expressão $z = |z| \cdot (cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta)$ é chamada de *Forma Trigonométrica do Número Complexo z*. Consideramos que o argumento θ pode ser substituído por qualquer valor θ + 2kπ, para k $\in \mathbb{Z}$, e em alguns casos será conveniente adotar uma expressão mais geral:

$$z = |z| \cdot [cos(\theta + 2k\pi) + i \cdot sen(\theta + 2k\pi)].$$

Observa-se que os números complexos z e $\overline{z}$ têm o mesmo módulo e argumentos de sinais opostos.

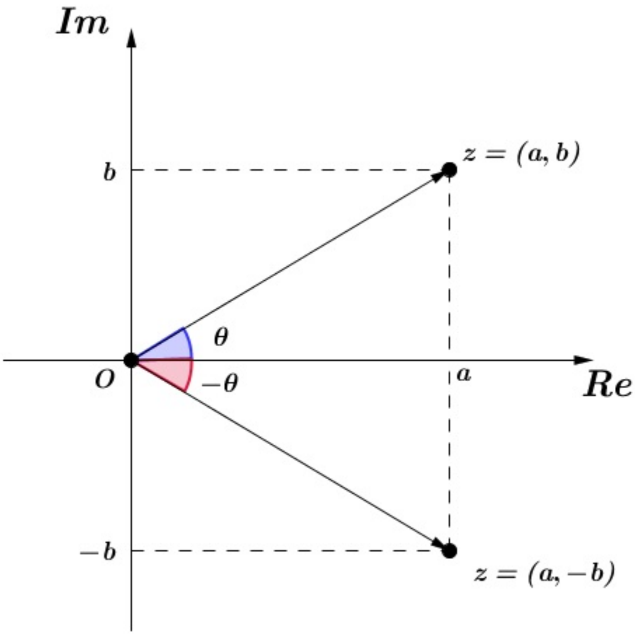

Figura 2.10: Argumento de $\overline{z}$

2.6.2 Multiplicação na Forma Trigonométrica

Conhecida a forma trigonométrica podemos representar geometricamente a multiplicação entre dois números complexos. Para isso, sejam z e w dois números complexos diferentes de zero, tais que:

$$z = |z|\cdot(cos\ \theta + i\cdot sen\ \theta) \text{ e } w = |w|\cdot(cos\ \varphi + i\cdot sen\ \varphi).$$

Temos:

$z{\cdot}w{=}|z|\cdot(cos\ \theta\ +\ i{\cdot}sen\ \theta){\cdot}|w|\cdot(cos\ \varphi\ +\ i{\cdot}sen\ \varphi)\ =$

$z{\cdot}w{=}|z|\cdot|w|\cdot(cos\ \theta{\cdot}cos\ \varphi{+}i{\cdot}sen\ \varphi{\cdot}cos\ \theta{+}i{\cdot}sen\ \theta{\cdot}cos\ \varphi{+}i^2{\cdot}sen\ \theta{\cdot}sen\ \varphi)\ =$

$z{\cdot}w{=}|z|\cdot|w|\cdot(cos\ \theta{\cdot}cos\ \varphi{+}i{\cdot}sen\ \varphi{\cdot}cos\ \theta{+}i{\cdot}sen\ \theta{\cdot}cos\ \varphi\text{-}sen\ \theta{\cdot}sen\varphi)\ =$

$z{\cdot}w{=}|z|\cdot|w|\cdot[(cos\ \theta{\cdot}cos\ \varphi\text{-}sen\ \theta{\cdot}sen\ \varphi){+}i{\cdot}(sen\ \varphi{\cdot}\ cos\ \theta{+}sen\ \theta{\cdot}cos\ \varphi)].$

Decorre das fórmulas da adição de arcos da trigonometria que:

$$(cos\ \theta{\cdot}cos\ \varphi\ \text{-}\ sen\ \theta{\cdot}sen\ \varphi) = cos\ (\theta\ +\ \varphi)$$

e

$$(sen\ \varphi{\cdot}cos\ \theta\ +\ sen\ \theta{\cdot}cos\ \varphi) = sen\ (\theta\ +\ \varphi).$$

Façamos $t \in \mathbb{C}$ tal que $t = z{\cdot}w$.

$$t = z{\cdot}w = |z|{\cdot}|w|{\cdot}[\cos\,(\theta + \varphi) + i{\cdot}\text{sen}\,(\theta + \varphi)].$$

Portanto o produto $z{\cdot}w$ resulta no número complexo t cujo módulo é igual ao produto dos módulos de z e w, e cujo argumento *Arg(t)*, é dado por pela soma dos argumentos de z e w.

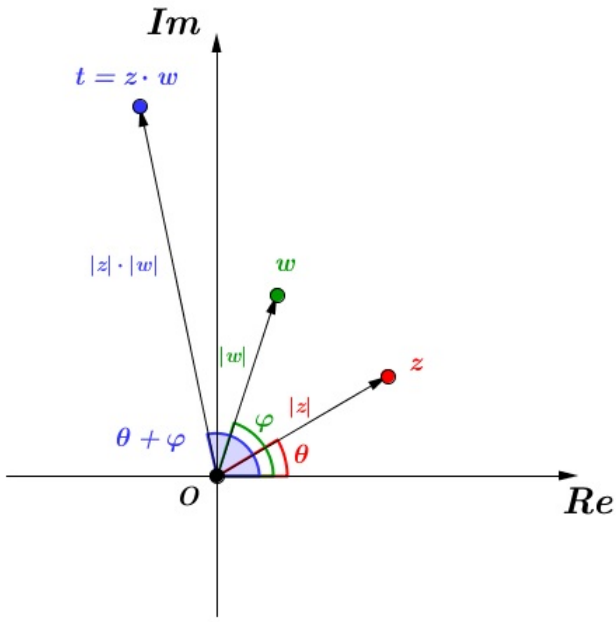

Figura 2.11: Representação Geométrica da Multiplicação

Observação: Decorre da representação geométrica da multiplicação de dois números complexos, que o produto de $z = |z|{\cdot}(cos\ \theta\ +\ i{\cdot}sen\ \theta)$ pela unidade imaginária tem como consequência a rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad. do vetor $\overrightarrow{Oz}$ em sentido anti-horário. De fato,

$$i = (1{,}0) = cos\ \frac{\pi}{2} + i{\cdot}sen\ \frac{\pi}{2} \Longrightarrow i{\cdot}z = |z| \cdot [cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) + i \cdot sen(\theta + \tfrac{\pi}{2})].$$

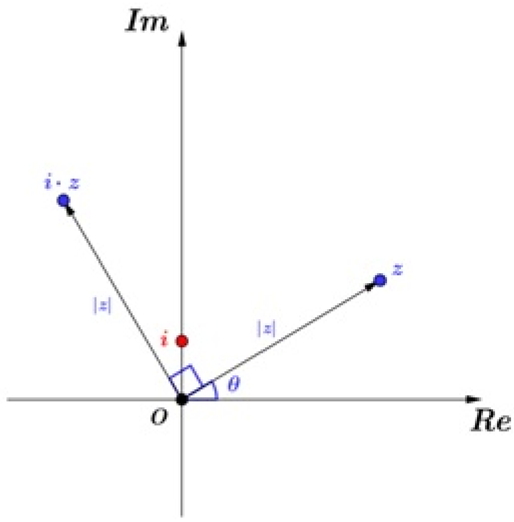

Figura 2.12: Rotação de $\frac{\pi}{2}$rad do vetor $\overrightarrow{Oz}$

2.6.3 Potenciação na Forma Trigonométrica

Antes de citarmos a primeira fórmula De Moivre, para calcular potências de um número complexo z elevado a um expoente n inteiro qualquer, iremos provar por indução sobre k que a fórmula da multiplicação é válida para o produto de k números complexos.

Dados z_1, z_2, z_3, ... , $z_\alpha \in \mathbb{C}$, tais que, $z_\alpha = |z_\alpha| \cdot (cos\ (\theta_\alpha) + i \cdot sen\ (\theta_\alpha))$, α = 1,2 ,3 , ..., k , queremos provar que:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_\alpha = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_\alpha| \cdot [cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\alpha) + i \cdot sen(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\alpha)].$$

Para $\alpha = 2$, temos de fato que:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 + \theta_2)],$$

que é a fórmula da multiplicação de dois números complexos na forma trigonométrica demonstrada anteriormente. Agora suponhamos que também seja válida para $\alpha = k$, com $k \in \mathbb{N}$, então para $\alpha = k + 1$ temos:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_\alpha \cdot z_{\alpha+1} = |z_1| \cdot \ldots \cdot |z_\alpha| \cdot [cos(\theta_1 + \ldots + \theta_\alpha) + i \cdot sen(\theta_1 + \ldots + \theta_\alpha)] \cdot z_{\alpha+1}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{\alpha+1} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_{\alpha+1}| \cdot [cos(\theta_1 + \ldots + \theta_{\alpha+1}) + i \cdot sen(\theta_1 + \ldots + \theta_{\alpha+1})].$$

A fórmula é válida para k números complexos como queríamos demonstrar. Dado um número complexo $z \neq 0$ tal que $z = |z| \cdot (cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta)$, para $n \in \mathbb{N}$ decorre da demonstração acima que:

$z^n = z \cdot z \cdot ... \cdot z$

$z^n = |z| \cdot |z| \cdot ... \cdot |z| \ [cos(\theta + \theta + ... + \theta) + i \cdot sen(\theta + \theta + ... + \theta)]$

$z^n = |z|^n \cdot (cos\ n\theta\ +\ i \cdot sen\ n\theta).$

- Primeira Lei De Moivre: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$.

$$z^n = |z|^n \cdot (cos\ n\theta\ +\ i \cdot sen\ n\theta).$$

2.6.4 Radiciação na Forma Trigonométrica

A partir da primeira lei De Moivre é possível determinar raízes n-ésimas de números complexos

Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. O número complexo w é uma raíz n-ésima de z se, e somente se, $w^n = z$. Desse modo, para $z = |z| \cdot (cos\theta + \mathrm{i} \cdot sen\theta)$ e $w = |w| \cdot (cos\varphi + i \cdot sen\varphi)$, temos que:

$w^n = z \Longleftrightarrow |w|^n \cdot (cos\ n\varphi\ +\ i \cdot sen\ n\varphi) = |z| \cdot (cos\ \theta\ +\ i \cdot sen\ \theta).$

Incluindo todas as determinações do argumento de z, segue que:

$w^n = z \Longleftrightarrow |w|^n = |z|$ e $\mathrm{n}\varphi = \theta\ +\ 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

$$w^n = z \Longleftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$w^n = z \Longleftrightarrow w = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) + i \cdot sen(\tfrac{\theta+2k\pi}{n})\right],\ k \in \mathbb{Z}$$

- Segunda Lei De Moivre: Sejam $n \in \mathbb{N}$, $z,w \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

$$w = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) + i \cdot sen(\tfrac{\theta+2k\pi}{n})\right].$$

Deduziremos a partir da segunda lei De Moivre as raízes da equação $w^n = z$, indicando por w_k a sua k-ésima raiz.

$w_0 = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta}{n}) + i \cdot sen(\frac{\theta}{n})\right]$, para $k = 0$.

$w_1 = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta+2\pi}{n}) + i \cdot sen(\frac{\theta+2\pi}{n})\right]$, para $k = 1$.

$w_2 = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta+4\pi}{n}) + i \cdot sen(\frac{\theta+4\pi}{n})\right]$, para $k = 2$.

$\vdots$

$w_{n-1} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}) + i \cdot sen(\frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n})\right]$, para k = n - 1.

$w_n = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta}{n} + 2\pi) + i \cdot sen(\frac{\theta}{n} + 2\pi)\right]$, para k = n.

$w_{n+1} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta + 2\pi}{n} + 2\pi) + i \cdot sen(\frac{\theta + 2\pi}{n} + 2\pi)\right]$, para k = n + 1.

$w_{n+2} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta + 4\pi}{n} + 2\pi) + i \cdot sen(\frac{\theta + 4\pi}{n} + 2\pi)\right]$, para k = n + 2.

$\vdots$

Observamos que o módulo de w_k não se modifica para w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}, w_n, w_{n+1}, ... , e que os argumentos para $k \geq n$ geram os mesmos valores obtidos para $0 \leq k \leq n-1$, visto que, k = *n, n + 1, n + 2* ... , promove ângulos congruentes a: $\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \frac{\theta + 4\pi}{n}, \ldots$. Podemos analisar que os valores negativos de k, fornecem as mesmas raízes obtidas anteriormente. Vejamos:

$w_{-1} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta - 2\pi}{n}) + i \cdot sen(\frac{\theta - 2\pi}{n})\right] = w_1$, para k = -1.

$w_{-2} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta - 4\pi}{n}) + i \cdot sen(\frac{\theta - 4\pi}{n})\right] = w_2$, para k = -2.

$w_{-3} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta - 6\pi}{n}) + i \cdot sen(\frac{\theta - 6\pi}{n})\right] = w_3$, para k = -3.

$\vdots$

$w_{-n} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta}{n} - 2\pi) + i \cdot sen(\frac{\theta}{n} - 2\pi)\right]$, para k = -n.

Desse modo, podemos concluir que a equação $w^n = z$ possui n raízes complexas e que estas podem ser representadas no Plano de Argand-Gauss como pontos da circunferência de centro O = (0,0) e cujo raio tem medida igual a $|w| = \sqrt[n]{|z|}$.

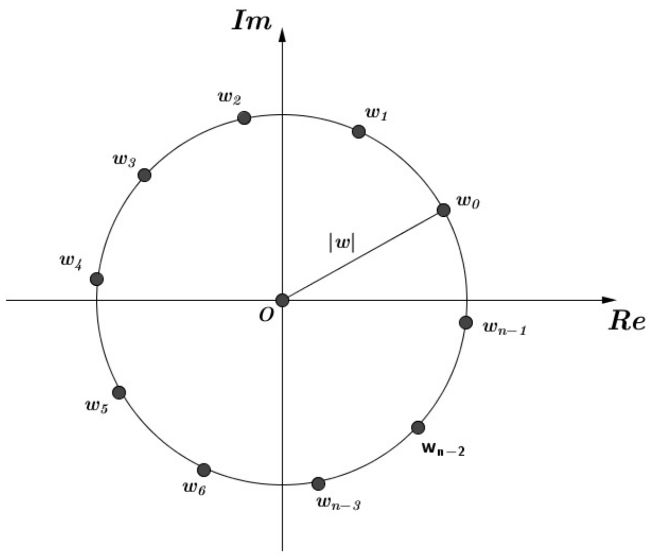

Figura 2.13: Raízes de z

Observa-se que, os argumentos principais das raízes, $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$, podem determinar uma progressão aritmética cuja razão é igual a $\dfrac{2\pi}{n}$.

De fato:

$$Arg(w_0) = \frac{\theta}{n},$$

$$Arg(w_1) = \frac{\theta + 2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n},$$

$$Arg(w_2) = \frac{\theta + 4\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2(\frac{2\pi}{n}),$$

$$\vdots$$

$$Arg(w_{n-1}) = \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n},$$

Tais raízes, por consequência, são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência de centro $O = (0,0)$ e cujo raio tem medida igual a $|w|$, conforme podemos observar na figura a seguir.

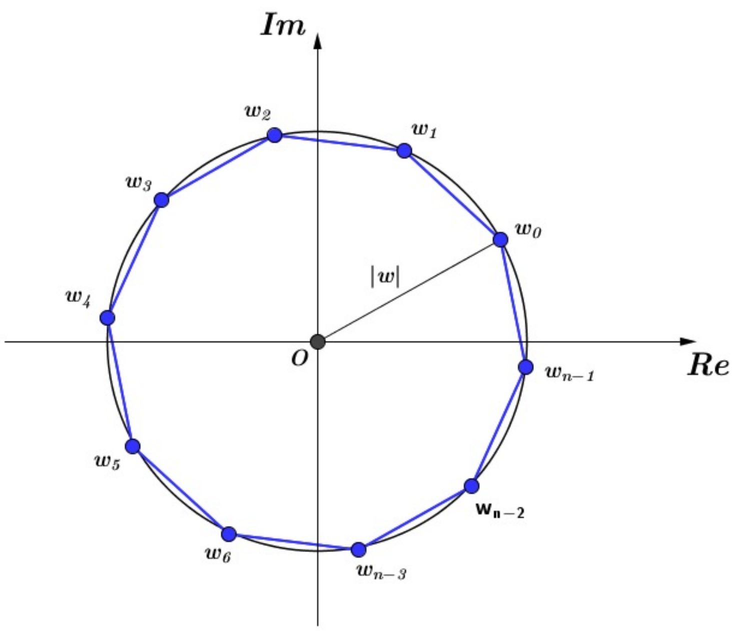

Figura 2.14: Polígono Regular de n lados

2.7 A Fórmula de Euler

Antes de comentar sobre a Fórmula de Euler será feito um resumo sobre Séries de Potências, destacando as de Taylor/Maclaurin e a representação das funções seno e cosseno como tais. O objetivo principal dessa seção é definir a exponencial e^z de um número complexo z e deduzir algumas de suas propriedades. Essa seção foi baseada no livro *Cálculo Volume 2* de George B. Thomas [26]

2.7.1 Séries de Taylor/Maclaurin

Recordando que uma *série de potências* em x é uma série dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x)^n = c_0 + c_1 \cdot (x) + c_2 \cdot (x)^2 + ... + c_n \cdot (x)^n + ...,$$

em que os valores c_n, $n \in \mathbb{N}$, são constantes reais que chamamos de coeficientes da série.

Denominamos de série de potências centrada em a ou de série de potências em torno de a, as séries que assumem a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n = c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + ... + c_n \cdot (x-a)^n + \dots,$$

Seja f uma função com derivadas de todas as ordens, em algum intervalo contendo a. Uma série de potências representada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!} \cdot (x-a)^n =$$

$$f(a) + \frac{f^1(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f^2(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \dots$$

é denominada de *Série de Taylor* da função f em torno de a. Para maiores detalhes vide *Cálculo Volume 2 de George B. Thomas* [26].

Uma série de Taylor em torno de $a = 0$ passa a ser chamada de Série de Maclaurin, e assume a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} \cdot (x)^n = f(0) + f(0)' \cdot (x) + \frac{f^2(0)}{2!} \cdot (x)^2 + \frac{f^3(0)}{3!} \cdot (x)^3 + \dots$$

A Fórmula de Taylor nos diz que se f é uma função que possui derivadas de todas as ordens em um intervalo aberto I contendo a, então, para cada inteiro positivo n e para cada x em I temos:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^1(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f^2(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1}$, para algum c entre a e x. Dessa forma, para cada $x \in I$, temos que:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

em que $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de f(x) e $R_n(x)$ é chamado de resto de ordem n (Thomas, p. 129) [26].

Se $R_n(x) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ para todo $x \in I$, dizemos que a série de Taylor gerada por f em $x = a$ converge para f em I, e escrevemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!} \cdot (x-a)^n$$

Para f(x) $= e^x$ temos $f^n = e^x$ para todo n e temos que,

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

converge absolutamente para todo x. Para maiores detalhes vide (Thomas, p. 129) [26].

Do modo análogo pode-se deduzir as funções seno e cosseno, em séries de Taylor, que são dadas conforme segue.

$$cos\ (x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$sen\ (x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

que converge absolutamente para todo x. Vide (Thomas, p. 131) [26].

2.7.2 Fórmula de Euler

Queremos definir o número e^z com $z \in \mathbb{C}$ mas para isso, primeiro faremos uma tentativa de representar o valor de e^{iy} para y um número real e i é a unidade imaginária, e desse modo, temos que

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + ...$$
$$\mathrm{e}^{iy} = 1 + iy - \frac{(y)^2}{2!} - i\frac{(y)^3}{3!} + \frac{(y)^4}{4!} + i\frac{(y)^5}{5!} - \frac{(iy)^6}{6!} - i\frac{(y)^7}{7!} + ...$$
$$\mathrm{e}^{iy} = (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + ...) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + ...)$$
$$\mathrm{e}^{iy} = cos\ y + i \cdot sen\ y.$$

Para quaisquer x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ sabemos que $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$. Estendendo essa propriedade para qualquer número complexo $z = x + iy$, podemos definir a exponencial complexa como:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(cos\ y + i \cdot sen\ y).$$

Essa igualdade é chamada de *Fórmula de Euler*, em homenagem ao matemático Leonhard Euler que estabeleceu a conexão da exponencial real com os números complexos.

Usaremos a Fórmula de Euler para demonstrar as proposições a seguir.

Proposição 1: Seja i a unidade imaginária, então $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Demonstração:

Temos que $e^{i\pi} = cos\ \pi + i{\cdot}sen\ \pi$ = -1. Logo $e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0$.

Proposição 2: Seja i a unidade imaginária, então i^i é real.

Demonstração:

Podemos escrever a unidade imaginária como $e^{i\frac{\pi}{2}}$. De fato,

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = cos\ \tfrac{\pi}{2} + i{\cdot}sen\ \tfrac{\pi}{2} = i.$$

Logo $i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$. O número $\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \in \mathbb{R}$.

2.7.3 Propriedades da Exponencial Complexa

A partir da definição acima, podemos demonstrar que as propriedades da exponencial real são mantidas para os números complexos. Vejamos algumas:

(i) Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = 0$. Então $e^z = e^0 = 1$.

Demonstração:

$z = 0 \iff z = 0 + i \cdot 0$, temos $e^z = e^{0+i\cdot 0} = e^0 \cdot (cos\ 0\ +$ i$\cdot\ sen\ 0) = 1$

(ii) Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = x + iy$ e $w = a + ib$. Então $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Demonstração:

$e^z \cdot e^w = [e^x(cos\ y + i \cdot sen\ y)] \cdot [e^a(cos\ b + i \cdot sen\ b)]$

$e^z \cdot e^w = e^{(a+x)} \cdot [cos(y+b) + i \cdot sen(y+b)]$

$e^z \cdot e^w = e^{(a+x)} \cdot e^{i(b+y)}$.

$e^z \cdot e^w = e^{(x+iy)} \cdot e^{(a+ib)}$

$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

(iii) Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = x + iy$. Então $|e^z| = e^x$.

Demonstração:

$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x| \cdot |cos\ y + i \cdot sen\ y|$

$|e^x| \cdot 1 = |e^x|$.

Sabemos que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e assim $|e^z| = |e^x| = e^x$.

(iv) Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $(e^z)^n = e^{nz}$.

Demonstração:

Façamos por indução sobre n.

Para n = 1 temos $(e^z)^1 = e^z$, e a propriedade é verdadeira. Supondo que seja verdade para n, façamos para $n + 1$.

$(e^z)^{n+1} = e^{nz} \cdot e^z = e^{nz+z} = e^{(n+1)z}$.

Logo a propriedade é verdadeira.

(v) Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = x + iy$. Então $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Demonstração:

$$e^{-z} = e^{-x-iy}$$
$$e^{-z} = e^{-x} \cdot e^{-iy}$$
$$e^{-z} = e^{-x} \cdot [cos(-y) + i \cdot sen(-y)]$$
$$e^{-z} = e^{-x} \cdot [cosy - i \cdot seny]$$
$$e^{-z} = e^{-x} \cdot \overline{e^{iy}}$$
$$e^{-z} = \frac{\overline{e^{iy}}}{e^{x}}$$

Multiplicando o numerador e o denominador dessa última fração por e^{iy}, obtemos

$$\frac{\overline{e^{iy}} \cdot e^{iy}}{e^{x} \cdot e^{iy}} = \frac{|e^{iy}|^2}{e^{x+iy}} = \frac{1}{e^{z}}$$

como queríamos demonstrar.

(vi) Seja z um número complexo. Então $e^{z} \neq 0$.

Demonstração:

Façamos por redução ao absurdo.

Suponha que seja verdade que exista z tal que $e^{z} = 0$. Segue que:

$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(cos\ y\ +\ i{\cdot}sen\ y) = 0$.

Como $e^{x} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $cos\ y\ +\ i{\cdot}sen\ y = 0$ para todo y. Como não existe $y \in \mathbb{R}$ de tal sorte, que $cos\ y = sen\ y = 0$, segue $e^{z} \neq 0$.

Da forma trigonométrica sabemos que um número complexo z não nulo, é representado por:

$$z = |z|{\cdot}(\cos\theta + \mathrm{i}{\cdot}\mathrm{sen}\ \theta).$$

Com a noção da exponencial complexa apresentada nessa seção, podemos reescrever a identidade acima como: $z = |z| \cdot e^{i\theta}$.

Um exemplo interessante da aplicabilidade da fórmula de Euler está na prova da seguinte igualdade:

$$cos(\tfrac{\pi}{7}) - cos(\tfrac{2\pi}{7}) + cos(\tfrac{3\pi}{7}) = \tfrac{1}{2}$$

Resolução:

Fazendo $w = e^{i\frac{\pi}{7}} = cos\ (\frac{\pi}{7}) + i \cdot sen\ (\frac{\pi}{7})$ temos:

$$w^{-1} = e^{-i\frac{\pi}{7}} = cos\ (\tfrac{\pi}{7})\ \text{-}\ i \cdot sen\ (\tfrac{\pi}{7}).$$

Podemos reescrever cada parcela como:

$cos(\frac{\pi}{7}) = \frac{w+w^{-1}}{2}, cos(\frac{2\pi}{7}) = \frac{w^2+w^{-2}}{2}$ e $cos(\frac{3\pi}{7}) = \frac{w^3+w^{-3}}{2}$

O problema se torna equivalente a demonstrar que:

$\frac{w+w^{-1}}{2} - \frac{w^2+w^{-2}}{2} + \frac{w^3+w^{-3}}{2} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{w^2+1}{w} - \frac{w^4+1}{w^2} + \frac{w^6+1}{w^3} = 1$

$\Longleftrightarrow (w^4 + w^2) - (w^5 + w) + (w^6 + 1) = w^3 \Longleftrightarrow w^6 - w^5 + w^4 - w^3 + w^2 - w + 1 = 0.$

Veja que isso é a soma dos sete primeiros termos da P.G. cujo primeiro termo é 1 e a razão é -w.

Somando a P.G:

$$S_{PG} = \frac{(-w)^7 - 1}{-w - 1} = \frac{1 - 1}{-w - 1} = 0.$$

Lembrando que w = $e^{i\frac{\pi}{7}}$, temos que $w^7 = cos\ \pi + i{\cdot}sen\ \pi$ = -1 e portanto, a igualdade é realmente verdadeira.

O seguinte resultado mostra a importância da Fórmula de Euler em problemas de alto grau de dificuldade e que aparentemente não têm nenhuma conexão com números complexos.

Capítulo 3

Itens de Vestibulares e os Números Complexos

Esse capítulo apresenta a resolução de vinte itens com números complexos que foram aplicados em vestibulares da FUVEST, UNICAMP, ITA, IME e UnB. O objetivo é destacar os tópicos mais importantes e as teorias complementares sobre esse assunto que são pontuadas nos processos seletivos de algumas instituições de ensino superior que não aderem ou aderiram parcialmente o Sistema de Seleção Unificada (SISU).

As resoluções apresentadas foram feitas por mim contando com a colaboração de professores e amigos graduados ou mestres em matemática, e estão de acordo com os gabaritos oficiais divulgados pelas universidades citadas.

3.1 Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST)

Questões retiradas da página oficial da FUVEST, vide [12], [13], [14] e [15].

3.1.1 2ª fase (2015) - Questão 4

a) Calcule $cos\ \frac{3\pi}{8}$ e $sen\ \frac{3\pi}{8}$

Resolução:

Lembrando que $cos\ (2x)$=2$\cdot cos^2$x-1 e $cos\ (2x)$=1-2sen^2x, $para\ x = \frac{3\pi}{8}$, tem-se:

(i) $cos\ \frac{3\pi}{4} = 2{\cdot}cos^2\ \frac{3\pi}{8}$ - 1 $\Longleftrightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} = 2{\cdot}cos^2\ \frac{3\pi}{8}$ - 1 $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow 2{\cdot}cos^2\ \frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow cos\ \frac{3\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(ii) $cos\ \frac{3\pi}{4} = 1$ - $2{\cdot}sen^2\ \frac{3\pi}{8} \Longleftrightarrow \dfrac{-\sqrt{2}}{2} = 1$ - $2{\cdot}sen^2\ \frac{3\pi}{8} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow 2{\cdot}sen^2\ \frac{3\pi}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow sen\ \frac{3\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

(b) Dado o número complexo $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i{\cdot}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, encontre o menor inteiro $n > 0$ para o qual z^n seja real.

Resolução:

$z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2{\cdot}(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}) =$

$= 2{\cdot}[cos\ (\frac{3\pi}{8}) + i{\cdot}sen\ (\frac{3\pi}{8})]$.

Queremos $z^n \in \mathbb{R}$, logo:

$z^n = 2^n \cdot [cos(n \cdot \frac{3\pi}{8}) + i \cdot sen(n \cdot \frac{3\pi}{8})], \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow sen(n \cdot \frac{3\pi}{8}) = 0$

$sen(n \cdot \frac{3\pi}{8}) = 0 \Longleftrightarrow n \cdot \frac{3\pi}{8} = k\pi \Longleftrightarrow n = \frac{8k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

O menor número inteiro $n > 0$ ocorre para k=3 e desse modo, obtemos n=8.

c) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua z como raiz e que não possua raiz real.

Resolução:

Para $n = 8$ sabemos que $z^8 \in \mathbb{R}$, já que,

$z^8 = 2^8 \cdot [cos(3\pi) + i \cdot sen(3\pi)]$ = -256.

Desse modo, obtemos $z^8 + 256 = 0$.

Um polinômio com raiz z e coeficientes inteiros, sem raízes reais pode ser dado por: $P(x) = x^8 + 256$.

3.1.2 2ª fase (2014) - Questão 3

Os coeficientes a, b e c do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são reais. Sabendo que -1 e 1 + $i\alpha$, com α >0, são raízes da equação $p(x) = 0$ e que o resto da divisão de *p(x)* por (x - 1) é 8, determine

a) o valor de α;

b) o quociente de *p(x)* por *(x + 1)*.

Resolução:

Se 1 + $i\alpha$ é raiz de *p(x)*, então 1 - $i\alpha$ também é raiz. Sendo assim, temos que {-1 , 1 + $i\alpha$, 1 - $i\alpha$} é o conjunto solução de $p(x) = 0$ e podemos decompor *p(x)* como:

$$p(x) = (x+1) \cdot (x-1-i\alpha) \cdot (x-1+i\alpha) \iff p(x) = (x+1) \cdot [(x-1)^2 + \alpha^2].$$

Para maiores informações ver (PÉRIGO, DEGENSZAJN, DOLCE, IEZZI, p. 588) [22]

Denotando os polinômios *q(x)* e *r(x)* como o quociente e o resto da divisão de *p(x)* por *(x - 1)* respectivamente, pelo *Teorema do Resto* (PÉRIGO, DEGENSZAJN, DOLCE, IEZZI, p. 579) [22] temos

$$p(x) = (x - 1) \cdot q(x) + r(x) \text{ e } p(1)=8.$$

Segue que:

$$p(1) = (1+1) \cdot [(1-1)^2 + \alpha^2] = 8 \iff \alpha^2 = 4 \iff \alpha = 2, \text{ pois } \alpha > 0.$$

Logo, $p(x) = (x+1) \cdot [(x-1)^2 + 2^2] = (x+1) \cdot (x^2 - 2x + 5)$ e, o quociente da divisão de *p(x)* por *(x+1)* é $x^2 - 2x + 5$.

3.1.3 2ª fase (2004) - Questão 4

Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\overline{z}$, onde α é um número real e $\overline{z}$ indica o conjugado do número complexo z.

a) Determinar os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas.

Resolução:

Façamos $z = x + iy$, tem-se:

$z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\overline{z} \iff (x + iy)^2 = \alpha(x + iy) + (\alpha - 1)(x - iy)$

$\iff x^2 + 2xyi - y^2 = \alpha x + \alpha iy + \alpha x - \alpha iy - x + iy \iff$

$\iff x^2 - y^2 + 2xyi = (2\alpha - 1)x + iy.$

Segue da igualdade de dois números complexos na forma algébrica que:

$$x^2 - y^2 = (2\alpha - 1)x \text{ e } 2xy = y$$

A segunda equação acima aponta que $y = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

Para $y = 0$:

$x^2 = (2\alpha - 1)x \iff x^2 - (2\alpha - 1)x = 0$, que só admite duas raízes distintas se $(2\alpha - 1) \neq 0$. Logo, $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$.

Para $x = \dfrac{1}{2}$:

$(\dfrac{1}{2})^2 - y^2 = (2\alpha - 1)\cdot(\dfrac{1}{2}) \Longrightarrow \frac{1}{4} - y^2 = \alpha - \dfrac{1}{2} \Longrightarrow y^2 = \dfrac{3}{4} - \alpha$, que só admite duas raízes distintas se $\dfrac{3}{4} - \alpha > 0$. Logo, $\alpha < \dfrac{3}{4}$.

Para $\alpha < \dfrac{3}{4}$ e $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$, as raízes serão dadas por:

$z_1 = 0$, $z_2 = 2\alpha - 1$, $z_3 = \dfrac{1}{2} + i\sqrt{\dfrac{3}{4} - \alpha}$ e $z_4 = \dfrac{1}{2} - i\sqrt{\dfrac{3}{4} - \alpha}$

A resolução desse item propõe uma discussão interessante envolvendo o teorema fundamental da álgebra.

Uma das versões do teorema fundamental da álgebra diz que: Um polinômio *p(z)* com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ tem exatamente n raízes complexas, se contarmos as suas multiplicidades (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 151) [3].

Com um olhar menos atento, esperamos que $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z}$ possua apenas duas raízes, e não nos atentamos para o fato que $\bar{z}$ representa uma outra variável criando a possibilidade da equação possuir mais do que duas raízes.

b) Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$.

Resolução:

Para $\alpha = 0$ e $z = x + iy$, segue do item anterior que:

$z_1 = 0 = (0, 0)$, $z_2 = -1 =$ *(-1, 0)*, $z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, cujas representações no plano complexo são dadas conforme a figura a seguir.

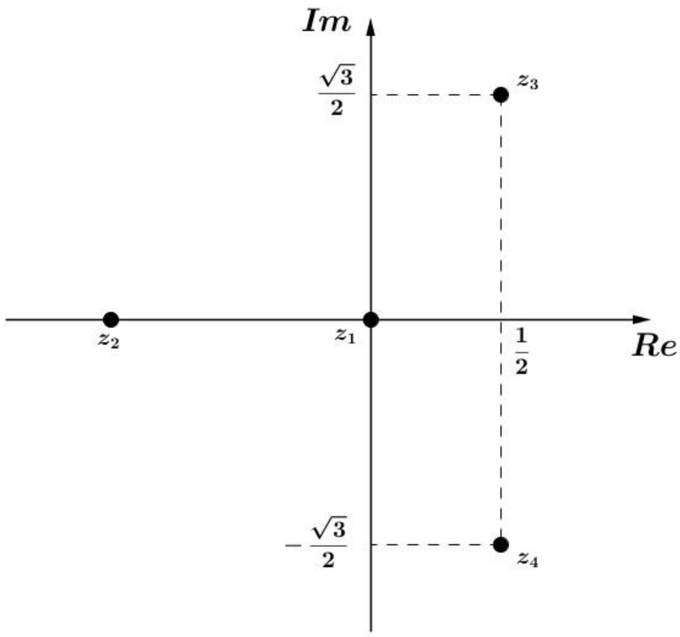

Figura 3.1: Resolução FUVEST 2004

3.1.4 2ª fase (2003) - Questão 8

Nos itens abaixo, z denota um número complexo e i a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Suponha $z \neq i$.

a) Para quais valores de z tem-se $\dfrac{z+i}{1+iz} = 2$?

Resolução:

$\dfrac{z+i}{1+iz} = 2 \iff z + i = 2 + 2iz \iff$ z - $2iz$ = 2 - $i \iff z(1$ - $2i)$ = 2 - i

$\iff z = \dfrac{2-i}{1-2i} \cdot \dfrac{1+2i}{1+2i} \iff z = \dfrac{4+3i}{5} \iff z = \dfrac{4}{5} + i\dfrac{3}{5}$.

b) Determine o conjunto de todos os valores de z para os quais $\dfrac{z+i}{1+iz}$ é um número real.

Resolução:

Seja $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\frac{z+i}{1+iz} \in \mathbb{R} \iff \frac{x+iy+i}{1+i(x+iy)} \in \mathbb{R} \iff \frac{x+i(y+1)}{(1-y)+ix} \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff \frac{x+i(y+1)}{(1-y)+ix} \cdot \frac{(1-y)-ix}{(1-y)-ix} \in \mathbb{R} \iff \frac{2x-(x^2+y^2-1)i}{(1-y)^2+x^2} \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff x^2+y^2-1=0 \iff x^2+y^2=1.$$

Os pontos tais que $x^2 + y^2 = 1$ definem uma circunferência de centro na origem e raio igual a $|z| = 1$, e desse modo, o conjunto de todos os valores de z para os quais $\dfrac{z+i}{1+iz}$ é um número real é

$\{z \in \mathbb{C}/|z| = 1$ e $z \neq i\}$ ou seja $1 + iz \neq 0 \implies$ z $\neq$ -1 $\implies z \neq i$

3.2 Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Questões retiradas da página oficial da UNICAMP, vide [8].

3.2.1 2ª fase (2016) - Questão 12

Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 - 3x + a$, onde a é um número real.

a) No caso em que *p(1)* = 0, determine os valores de x para os quais a matriz A abaixo não é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix}$$

Resolução:

Lembrando que uma matriz não é invertível se, e somente se, o seu determinante for igual a zero, temos:

$$det(A) = x^3 + a + 0 - ax - 0 - 3x = x^3 - 3x + a = p(x).$$

Desse modo, a matriz A não será invertível nos valores iguais às raízes de *p(x)*.

Usando o dado que p(1) = 0, temos que:

$$p(1) = 0 = 1 - 3 + a \Longrightarrow a = 2.$$

Fatorando *p(x)* obtemos: p(x) = $(x-1)(x^2+x-2)$. As raízes de x^2+x-2 são x = 1 ou x = -2, que consequentemente também são raízes de *p(x)*.

Logo os valores para os quais a matriz A não é invertível são: x=-2 ou x=1.

b) Seja b um número real não nulo e i a unidade imaginária, isto é, i^2 = -1. Se o número complexo z = 2 + ib é uma raiz de *p(x)*, determine o valor de $|z|$.

Resolução:

Temos que *p(z)* = p(2+bi) = 0.

$z^3 - 3z + a = (2+bi)^3 - 3 \cdot (2+bi) + a$

$z^3 - 3z + a = 8 + 12ib - 6b^2 - b^3i - 6 - 3ib + a$

$z^3 - 3z + a = (2 - 6b^2 + a) + i(-b^3 + 9b)$

$z^3 - 3z + a = 0.$

Segue da igualdade de dois números complexos na forma algébrica, que $-b^3 + 9b = 0$.

Resolvendo a equação $-b^3$ + 9b = 0 temos que b = 0 ou $b = \pm 3$. Pelo enunciado do item, b $\neq$ 0, logo:

$$|z| = |2 + bi| = \sqrt{2^2 + b^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

3.2.2 2ª fase (2014) - Questão 23

O polinômio cúbico $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: r, $-r$ e s

a) Determine os valores de r e s

Resolução:

Pelas relações de Girard (PÉRIGO, DEGENSZAJN, DOLCE, IEZZI, p. 594) [22] temos:

$$\begin{cases} r + (-r) + s = 2 \\ r\cdot(\text{-r})\cdot\text{s} = \text{-18} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ s = 2 \end{cases} ou \begin{cases} r = -3 \\ s = 2 \end{cases}$$

b) Calcule $p(z)$ para $z = 1 + i$, onde i é a unidade imaginária.

Resolução:

$p(1+i) = (1+i)^3 - 2(1+i)^2 - 9(1+i) + 18 = 7 - 11i$.

3.2.3 2ª fase (2005) - Questão 10

Um número complexo $z = x + iy$, $z \neq 0$, pode ser escrito na forma trigonométrica: $z = |z|(cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta)$, onde $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, cos $\theta = \dfrac{x}{|z|}$ e sen $\theta = \dfrac{y}{|z|}$. Essa forma de representar os números complexos não-nulos é muito conveniente, especialmente para o cálculo de potências inteiras de números complexos, em virtude da fórmula de De Moivre:

$$[|z|(cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta)]^k = |z|^k\ (cos\ \text{k}\theta + isen\ \text{k}\theta)$$

que é válida para todo $k \in \mathbb{Z}$. Use essas informações para:

a) Calcular $(\sqrt{3+i})^{12}$

Resolução:

Dado que $z = \sqrt{3} + i$, temos:
$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$; *cos* $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e sen $\theta = \dfrac{1}{2}$.
Desse modo, *Arg(z)* $= \theta = \dfrac{\pi}{6}$.
Assim, $z = \sqrt{3} + i$ pode ser escrito como $z = 2(cos\ \frac{\pi}{6} + i{\cdot}sen\ \frac{\pi}{6})$.

Segue da fórmula De Moivre, vide página 31, que:

$z^{12} = |z|^{12}[cos(12 \cdot \frac{\pi}{6}) + isen(12 \cdot \frac{\pi}{6})]$

$z^{12} = 2^{12}[cos(2\pi) + isen(2\pi)]$

$z^{12} = 4096{\cdot}(1 + i{\cdot}0)$

$z^{12} = 4096.$

b) Sendo $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, calcular o valor de $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{15}$.

Resolução:

Observe que $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{15}$ é a soma dos dezesseis primeiros termos de uma progressão geométrica em que $a_1 = 1$, a razão $q = z$ e $a_{16} = z^{15}$. Essa soma pode ser calculada por:
$S_{16} = \dfrac{a_1(q^{16} - 1)}{q - 1} = \dfrac{z^{16} - 1}{z - 1}$.
Escrevendo $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ na forma trigonométrica temos:
$|z| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$; cos $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e sen $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Desse modo, *Arg(z)* $= \theta = \dfrac{\pi}{4}$.
Assim, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pode ser escrito como $z = cos\ \frac{\pi}{4} + i{\cdot}sen\ \frac{\pi}{4}$.
Segue da fórmula De Moivre, ver página 32, que:

$z^{16} = |z|^{16}[cos\ (16 \cdot \frac{\pi}{4}) + i{\cdot}sen\ (16 \cdot \frac{\pi}{4})]$

$z^{16} = 1^{16}[\cos\ (2\pi) + i{\cdot}\text{sen}\ (2\pi)]$

$z^{16} = 1{\cdot}(1 + i{\cdot}0)$

$z^{16} = 1$

E finalmente,

$$S_{16} = \frac{z^{16} - 1}{z - 1} = \frac{1 - 1}{z - 1} = 0\ .$$

3.2.4 2ª fase (2004) - Questão 8

Dada a equação polinomial com coeficientes reais x^3 - $5x^2$ + $9x$ - a = 0:

a) **ENCONTRE** o valor numérico de a de modo que o número complexo 2 + i seja uma das raízes da referida equação.

Resolução:

A referida equação polinomial tem coeficientes reais e se 2 + i é raiz, então 2 - i também é raiz (PÉRIGO, DEGENSZAJN, DOLCE, IEZZI, p. 592) [22].

Seja k a terceira raiz dessa equação. Pelas relações de Girard (PÉRIGO, DEGENSZAJN, DOLCE, IEZZI, p. 594) [22], temos:

$2 + i + 2 - i + k = - \dfrac{(-5)}{1} \Longrightarrow k = 1.$

Substituindo $x = 1$, teríamos:

$1^3 - 5(1)^2 + 9(1) - a = 0 \Longrightarrow a = 5$

b) Para o valor de a encontrado no item anterior, determine as outras duas raízes da mesma equação.

Conforme resolução do item anterior, as outras raízes são 2 - i e 1.

3.3 Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Questões retiradas da página oficial do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, vide [19].

3.3.1 Questão 12 (2016)

Considere as afirmações a seguir:

I. Se z e w são números complexos tais que z - iw = 1-2i e w - z = 2 + 3i, então z^2 + w^2 = -3 + 6i.

II. A soma de todos os números complexos z que satisfazem $2|z|^2+z^2=4+2i$ é igual a zero.

III. Se z = 1 - i, então $z^{59} = 2^{29}(-1+i)$.

É (são) verdadeira (s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Resolução:

(I) Verdadeira

$$\begin{cases} z - iw = 1 - 2i \\ w - z = 2 + 3i \end{cases} \Longrightarrow w - iw = 3 + i \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (1 - i)w = 3 + i \Longleftrightarrow w = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{3+i+3i+i^2}{1^2-i^2}$$

$=$

$$= \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

Dado que w - z = 2 + $3i$, temos:

$1 + 2i - z = 2 + 3i \Longleftrightarrow$ z = -1 - i e $z^2 + w^2 = (-1-i)^2 + (1+2i)^2 =$

$= (-1)^2 (1^2 + 2i + i^2) + 1^2 + 4i + (2i)^2 = -3 + 6i.$

(II) Verdadeira

Sendo z = $a + ib$, tem-se:

$2|z|^2 + z^2 = 4 + 2i \Longrightarrow 2(a^2 + b^2) + (a + ib)^2 = 4 + 2i \Longrightarrow 3a^2 + b^2 + 2abi =$ $4 + 2i.$

Da igualdade de dois números complexos na forma algébrica, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3a^2 + b^2 = 4 \\ 2ab = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + b^2 = 4 \\ b = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Substituindo $b = \dfrac{1}{a}$ em $3a^2 + b^2 = 4$, tem-se a equação $3a^4 - 4a^2 + 1 = 0$, que é uma equação biquadrada cujas raízes são -1, $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ e 1.

Segue que:

a = -1 $\Longrightarrow$ b = -1, temos z_1 = -1 - i;

a = -$\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\Longrightarrow$ b = -$\sqrt{3}$, temos z_2 = -$\sqrt{\frac{1}{3}}$ - i$\sqrt{3}$;

$a = \sqrt{\frac{1}{3}} \Longrightarrow b = \sqrt{3}$, temos $z_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} + i\sqrt{3}$;

a = 1 $\Longrightarrow$ b = 1, temos z_4 = 1 + i.

Assim, verifica-se que de fato, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$

(III) Falsa

Temos z = *1* - i.

$z^{59} = (1-i)^{58} \cdot (1-i)$

$z^{59} = [(1-i)^2]^{29} \cdot (1-i)$

$z^{59} = (-2i)^{29} \cdot (1-i)$

$z^{59} = (-2)^{29} \cdot i^{29} \cdot (1-i)$

$z^{59} = -2^{29} \cdot i \cdot (1-i)$

$z^{59} = 2^{29} \cdot (-1-i)$.

Gabarito: Letra B

3.3.2 Questão 3 (2015)

Se $z = (\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{10}$, então o valor de $2 \cdot arcsen[Re(z)] + 5 \cdot arctg[2 \cdot Im(z)]$ é igual a

a) $-\dfrac{2\pi}{3}$.

b) $-\dfrac{\pi}{3}$.

c) $\dfrac{2\pi}{3}$.

d) $\dfrac{4\pi}{3}$.

e) $\dfrac{5\pi}{3}$.

Resolução:

$z = (\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{10} = (\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i})^{10} = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10} = (cos\ \frac{2\pi}{3} + i{\cdot}sen\ \frac{2\pi}{3})^{10}$.

Aplicando a primeira lei De Moivre, ver página 31, tem-se que:

$(cos\ \frac{2\pi}{3} + i{\cdot}sen\ \frac{2\pi}{3})^{10} = cos\ \frac{20\pi}{3} + i{\cdot}sen\ \frac{20\pi}{3}$

$$= [cos\ (\tfrac{2\pi}{3} + 6\pi) + i{\cdot}sen\ (\tfrac{2\pi}{3} + 6\pi)].$$

Assim,

$(cos\ \frac{2\pi}{3} + i{\cdot}sen\ \frac{2\pi}{3})^{10} = cos\ \frac{2\pi}{3} + i{\cdot}sen\ \frac{2\pi}{3} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$Re(z) = \text{-}\dfrac{1}{2} \Longrightarrow arcsen[Re(z)] = \text{-}\dfrac{\pi}{6}$ e $Im(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow arctg[2{\cdot}Im(z)] = \dfrac{\pi}{3}$

Portanto,

$2{\cdot}arcsen[Re(z)] + 5{\cdot}arctg[2{\cdot}Im(z)] = 2{\cdot}(-\dfrac{\pi}{6}) + 5{\cdot}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

Gabarito: Letra D.

3.3.3 Questão 4 (2004)

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = 2cos\ x + 2i{\cdot}sen\ x$. Então, $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}$, o valor do produto $f(x){\cdot}f(y)$ é igual a:

a) $f(x + y)$

b) $2f(x + y)$

c) $4if(x + y)$

d) $f(xy)$

e) $2f(x) + 2if(y)$

Resolução:

A função f pode ser escrita na fórmula de Euler como $f(x) = 2e^{ix}$. Usando essa notação, tem-se:

$f(x){\cdot}f(y) = 2e^{ix} \cdot 2e^{iy}$.

$f(x){\cdot}f(y) = 4e^{ix+iy}$

$f(x){\cdot}f(y) = 4e^{i(x+y)}$

$f(x){\cdot}f(y) = 4[cos\ (x+y) + i sen\ (x+y)]$

$f(x)\cdot f(y) = 2[2cos\ (x+y) + 2isen\ (x+y)]$

$f(x)\cdot f(y) = 2f\,(x+y)$.

Gabarito: Letra B.

3.3.4 Questão 4 (2003)

Das informações a seguir sobre a equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo:

I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.

II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.

III. Se $n \in \mathbb{N}^*$ e r é uma raiz qualquer, então $\sum_{k=1}^{n} |\frac{r}{3}|^k < \frac{1}{2}$.

É (são) VERDADEIRA (S)

a) nenhuma.

b) apenas I.

c) apenas II.

d) apenas III.

e) apenas I e III.

Resolução:

Para $z \neq 1$ tem-se $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \dfrac{(z^5 - 1)}{z - 1}$, que é a soma dos cinco primeiros termos de uma P.G. cuja razão é z e $a_1 = 1$,

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{(z^5 - 1)}{z - 1} = 0 \Longleftrightarrow z^5 = 1,\ z \neq 1.$$

Logo, $z^5 = cos\ (2\text{k}\pi) + i\cdot sen\ (2\text{k}\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Usando a segunda lei De Moivre, vide a página 32, e sabendo que $z \neq 1$, as raízes de $z^5 = cos\ (2\text{k}\pi)+ i\cdot\text{sen}\ (2\text{k}\pi)$ são:

$z_0 = cos\ 0 + isen\ 0;$

$z_1 = cos\ \frac{2\pi}{5} + isen\ \frac{2\pi}{5};$

$z_2 = cos\ \frac{4\pi}{5} + isen\ \frac{4\pi}{5};$

$z_3 = cos\ \frac{6\pi}{5} + isen\ \frac{6\pi}{5};$

$z_4 = cos\ \frac{8\pi}{5} + isen\ \frac{8\pi}{5}.$

Observa-se que as raízes são pontos que pertencem a uma circunferência do plano complexo, cujo centro é *(0,0)* e o raio é igual a $|z| = 1$.

Julgando os itens, tem-se que a afirmativa I é falsa, pois nenhuma das raízes acima é real.

A afirmativa II é falsa, pois todas as raízes de $z^5 = 1$ têm módulo unitário.

Para a afirmativa III temos:

$\sum_{k=1}^{n} |\frac{r}{3}|^k = \sum_{k=1}^{n} |\frac{1}{3}|^k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{3})^k = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}.$

Como o item não propõe $n \longrightarrow \infty$, não se pode obter $\sum_{k=1}^{n} |\frac{r}{3}|^k = \frac{1}{2}$. Logo, o somatório proposto é estritamente menor do que $\dfrac{1}{2}$, e a afirmativa é verdadeira.

Gabarito: Letra D.

3.4 Instituto Militar de Engenharia (IME)

Questões retiradas da página oficial do Instituto Militar de Engenharia, vide [18].

3.4.1 Questão 3 (2015/2016)

Seja Z um número complexo tal que $\dfrac{2Z}{\overline{Z}i}$ possui argumento igual a $\dfrac{3\pi}{4}$ e $\log_3 (2Z + 2\overline{Z} + 1) = 2$. Determine o número complexo Z.

Resolução:

Tome $Z = x + iy$, com $x,y \in \mathbb{R}$. Temos que $\overline{Z} = x - iy$.

Segue que:

$\log_3 (2Z + 2\overline{Z} + 1) = 2 \Longrightarrow 2Z + 2\overline{Z} + 1 = 3^2 \Longrightarrow Z + \overline{Z} - 4 = 0.$

$Z + \overline{Z} - 4 = 0 \Longrightarrow x + iy + x - iy - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2.$

Temos então que $Z = 2 + iy$.

Denotando por $W = \dfrac{2Z}{\overline{Z}i}$ temos:

$$W=\frac{2Z}{\overline{Z}i}=\frac{2(2+iy)}{(2-iy)i}=\frac{4+2iy}{y+2i}\cdot\frac{y-2i}{y-2i}=\frac{8y+(2y^2-8)i}{y^2+4} \Longrightarrow W=(\frac{8y}{y^2+4})+(\frac{2y^2-8}{y^2+4})i$$

Sabemos que $Arg(W) = \dfrac{3\pi}{4}$, então $\dfrac{Im(z)}{Re(z)} = tg\ (\dfrac{3\pi}{4})$. Segue que:

$\dfrac{\frac{2y^2-8}{y^2+4}}{\frac{8y}{y^2+4}}$ = -1 $\Longrightarrow$ y = -2 + $2\sqrt{2}$ ou y = -2 - $2\sqrt{2}$.

Entretanto, como $Arg(W) = \dfrac{3\pi}{4}$, inferimos que W está no segundo quadrante.

Segue que:

$$\begin{cases} Re(W) < 0 \\ Im(W) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8y < 0 \\ 2y^2 - 8 > 0 \end{cases} \Longrightarrow y < \text{-}2.$$

Portanto: Z = 2 - (2 + $2\sqrt{2}$)i.

3.4.2 Questão 3 (2014/2015)

Descreva o lugar geométrico do número complexo z que atende à equação

$$arg(z - z_1) - arg(z - z_2) - arg(z - z_3) = k\pi$$

em que z_1 é real, e z_2 e z_3 são complexos conjugados com parte imaginária não nula e k é um número inteiro. Obs: $arg(z)$ é o argumento do número complexo z.

Resolução:

Tome $z = x + iy$, $z_1 = a$, $z_2 = c + id$ e $z_3 = c - id$, com $a,c,d \in \mathbb{R}$ e $d \neq 0$.

Temos:

$z - z_1 = (x - a)+yi$, $z - z_2 = (x - c)+(y - d)i$ e $z - z_3 = (x - c)+(y + d)i$.

Façamos: $arg\ (z - z_1) = \alpha$, $arg\ (z - z_2) = \beta$ e $arg\ (z - z_3) = \gamma$. Segue que:

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x-a},\ tg\ \beta = \frac{y-d}{x-c} \text{ e } tg\ \gamma = \frac{y+d}{x-c}$$

Sabemos que α - β - γ = kπ, logo α - kπ = β + γ. Temos:

$tg\ (\alpha - k\pi) = tg\ (\beta + \gamma) \Longrightarrow tg\ (\alpha) = \dfrac{tb\beta + tg\gamma}{1 - tg\beta \cdot tg\gamma}$
$\Longrightarrow tg\ (\alpha)$ - $(tg\ \beta + tg\ \gamma) = tg\ \alpha{\cdot}tg\ \beta{\cdot}tg\ \gamma$

Segue que:
$\dfrac{y}{x-a} - (\dfrac{y-d}{x-c} + \dfrac{y+d}{x-c}) = (\dfrac{y}{x-a}) \cdot (\dfrac{y-d}{x-c}) \cdot (\dfrac{y+d}{x-c})$.

$\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{2y}{x-c} = \dfrac{y(y-d)(y+d)}{(x-a)(x-c)^2}$

$\dfrac{y(x-c) - 2y(x-a)}{(x-a)(x-c)} = \dfrac{y(y^2-d^2)}{(x-a)(x-c)^2}$

xy - cy - $2xy$ + $2ay = \dfrac{y(y^2-d^2)}{(x-c)}$

$(2a$ - c - $x)(x$ - $c) = y^2$ - d^2

$$(x-a)^2 + y^2 = (c-a)^2 + d^2$$

Se $a \neq c$, então o lugar geométrico do complexo z é uma circunferência de centro em $C = (a,0)$ e raio $R = \sqrt{(c-a)^2 + d^2}$.

Se $a = c$, então o lugar geométrico do complexo z é uma circunferência de centro em $C = (a,0)$ e raio $R = d$.

3.4.3 Questão 6 (2003/2004)

Sendo a, b, e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, DETERMINE um valor para cada um dos números a, b, c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade:

$$\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9$$

Resolução:
Façamos $w = \dfrac{1}{z}$, temos:
$w^a + w^b + w^c = (\frac{1}{w})^9$ e $|w| = 1$.

Sabemos que *(a,b,c)* formam uma P.A. de razão r. Logo:

w^a+w^{a+r}+w^{a+2r}=w^{-9} $\Longrightarrow$ 1+w^r+w^{2r}=w^{-9-a} $\Longrightarrow$ w^r+w^{2r}=w^{-9-a}-1.

A partir do fato que *a, b,* e c são números naturais, podemos inferir que r também é um número natural. O enunciado solicita um valor particular para cada um dos números a, b, c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade, ou seja, não queremos uma solução geral. Sendo assim, se faz necessário testar valores convenientes como w^{2r} = -1.

Fazendo r como um número ímpar, temos:

$$(w^2)^r = (\text{-}1)^r \Longrightarrow w^2 = \text{-}1 \Longrightarrow \mathrm{w} = \pm i.$$

Tomaremos em particular $w = i$ e $r = 1$. Segue que:

$i^1 = i^{-9-a} \Longrightarrow$ -9 - $a = 4k + 1$ a = -10 - $4k$, para algum $\in \mathbb{Z}$.

Como a é um número natural devemos escolher k também de modo conveniente.

Fazendo k = -3, temos $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ e $z = \dfrac{1}{i}$ = -i, que satisfazem a igualdade proposta.

3.4.4 Questão 1 (2002/2003)

Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a seguinte condição $z^{2n} \neq$ -1, em que n é um número inteiro positivo.

DEMONSTRE que $\dfrac{z^n}{1 + z^{2n}}$ é um número real.

Resolução:

Dividindo o numerador e o denominador por $z^n \neq 0$, temos

$$\frac{z^n}{1 + z^{2n}} = \frac{\frac{z^n}{z^n}}{\frac{1}{z^n} + \frac{z^{2n}}{z^n}} = \frac{1}{z^{-n} + z^n}.$$

Representando o número complexo z na sua forma trigonométrica, de acordo com a fórmula de De Moivre, ver página 31, tem-se

$$\frac{1}{z^{-n} + z^n} = \frac{1}{cos(-n\theta) + isen(-n\theta) + cos(n\theta) + isen(n\theta)} =$$

$$= \frac{1}{cos(n\theta) - isen(n\theta) + cos(n\theta) + isen(n\theta)} =$$

$$= \frac{1}{2cos(n\theta)}.$$

Conclui-se assim que, de fato, $\dfrac{1}{z^{-n} + z^{n}} = \dfrac{1}{2cos(n\theta)}$, é um número real.

3.5 Centro de Seleção e de Promoção de Eventos (CESPE/UnB)

Questões retiradas da página oficial do CESPE, vide [4], [5], [6], [7].

3.5.1 2º dia (2015) Caderno tipo I

Considerando que, no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais *xOy*, cada ponto *(x, y)* do plano cartesiano seja identificado com um número complexo $z = x + iy$, em que i^2 = -1, julgue os itens **120** e **121** e faça o que se pede no item **122**, que é do **tipo C**.

120 Se o quadrado de vértices nos pontos z, $\overline{z}$, -z e -$\overline{z}$ tiver área igual a 36 unidades de área, então $|z| = 2\sqrt{3}$ unidades de comprimento.

121 Se $z_1 = \frac{1}{2}$[cos (15°) + i·sen(15°)] e $z_2 = 3$[cos (45°) + i·sen(45°)] então $z_2 = 24{z_1}^3$.

122 Assinale a opção que apresenta um dos valores de $\sqrt[3]{i}$

A) $\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

B) - i

C) i

D) $\dfrac{3}{4}$ - $\dfrac{1}{4}i$

Resolução:

(120) Seja L a medida do lado do referido quadrado. Temos que $L^2 = 36$ e $L = 6$.

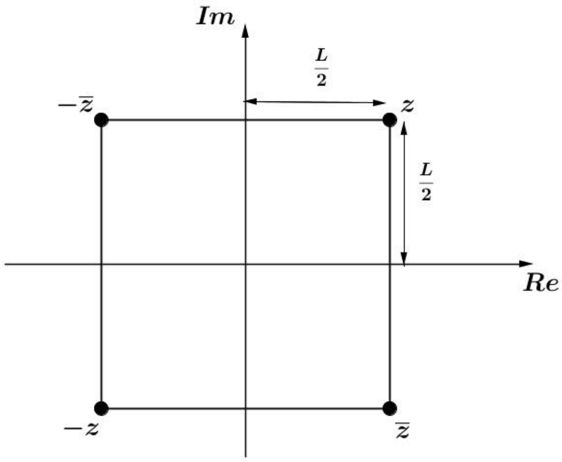

Figura 3.2: UnB resolução 2015

A partir do fato que $\dfrac{L}{2} = 3$, segue que $z = 3 + 3i$ e $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.
Item: Errado

(121) Aplicando a primeira lei De Moivre, ver página 31, tem-se:
$z_1 = \dfrac{1}{2}[\cos\,(15°) + i{\cdot}\text{sen}(15°)] \Longrightarrow z_1^3 = (\dfrac{1}{2})^3[\cos\,(3\cdot 15°) + i\cdot sen(3{\cdot}15°)] \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow z_1^3 = \frac{1}{8}[\cos\,(45°) + i{\cdot}\text{sen}(45°)].$$

Segue que, $24{\cdot}z_1^3 = 3[\cos\,(45°) + i{\cdot}\text{sen}(45°)] = z_2$.
Item: Certo.

(122) Conforme a segunda lei De Moivre, ver página 32, temos que as raízes cúbicas de $i = cos\ 90° + i \cdot sen\ 90°$, são da forma $Z_k = [\cos\,(\frac{90+360k}{3})° + \text{i}{\cdot}\text{sen}\,(\frac{90+360k}{3})°]$ para $k = 0{,}1{,}2$. Segue que:
$Z_0 = cos(30°) + i{\cdot}sen(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$;
$Z_1 = cos(150°) + i{\cdot}sen(150°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ e
$Z_2 = cos(270°) + i{\cdot}sen(270°) = -i$.
Gabarito: Letra B

3.5.2 2º dia (2014) Caderno tipo I

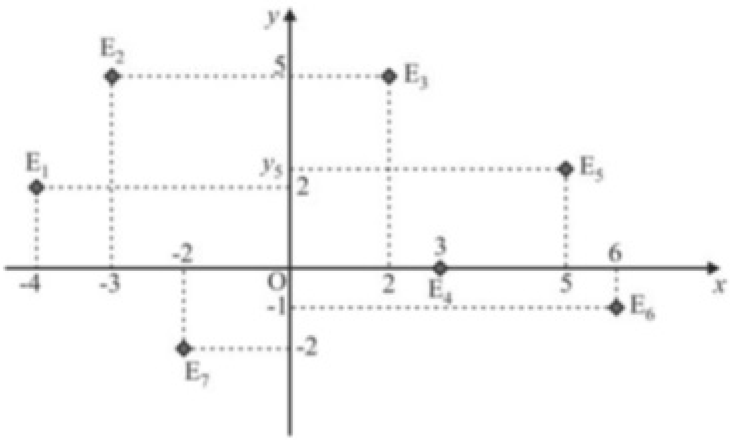

Figura 3.3: UnB texto 2014

Considere que, na figura apresentada, as coordenadas *(x, y)* das estações sejam identificadas por números complexos $z = x + iy$, em que i é a unidade imaginária (i^2 = -1). Nesse caso, as coordenadas da estação E_j são identificadas pelo número complexo Z_j. Com base nessas informações, julgue os itens **53** e **54** e assinale a opção correta no item **55**, que é do **tipo C**.

53 $\dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_4 + Z_2} = \text{-}i$

54 $|Z_1 Z_6|^2 = 228$.

55 O valor de $(Z_7)^4$ é

A) - 64.

B) - 16 - 4i.

C) 16 + 2i.

D) 16 + 4i.

Resolução:

(53) Segue do enunciado que:

$Z_3 = E_3 = (2{,}5) = 2 + 5i$;

$Z_2 = E_2 =$ (-3,5) = -3 + 5i;

$Z_4 = E_4 =$ (3,0) = 3.

Assim,

$$\frac{Z_3 - Z_2}{Z_4 + Z_2} = \frac{(2+5i)-(-3+5i)}{3+(-3+5i)} = \frac{2+5i+3-5i}{3-3+5i} = \frac{5}{5i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \text{-}i$$

Item: Certo.

(54) Segue do enunciado que:

$Z_1 = E_1 =$ (-4,2) = - 4 + 2i e $Z_6 = E_6 =$ (6, -1) = 6 - i

Assim,

$Z_1 Z_6 =$ (-4 + 2i)(6 - i) = -24 + 4i + 12i - 2i^2 = -22 + 16i.

Logo,

$|Z_1 Z_6|^2 = (\sqrt{(-22)^2 + 16^2})^2 = 740.$

Item: Errado.

(55) Segue do enunciado que:

$Z_7 = E_7 =$ (-2,-2) = -2 - 2i.

Assim,

$(Z_7)^4 = (-2-2i)^4 = [-2(1+i)]^4 = 16(1+i)^4 = 16[(1+i)^2]^2 = 16(2i)^2$

$(Z_7)^4 =$ -64.

Gabarito: Letra A.

3.5.3 2º dia 2º vestibular (2004)

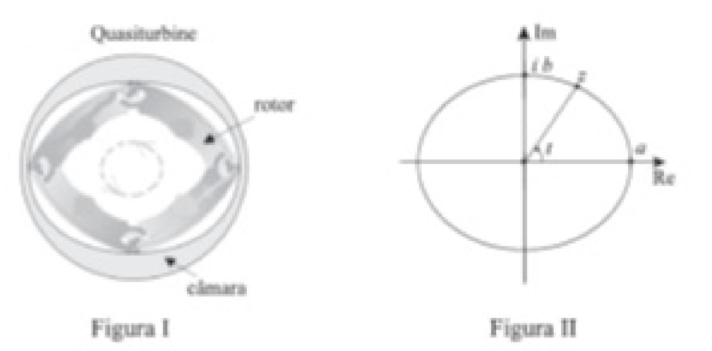

Figura 3.4: UnB texto, 2° vestibular 2004

Em 2001, um motor revolucionário, o Quasiturbine, foi criado por pesquisadores canadenses. Ele possui a vantagem de, em uma única rotação, produzir o quádruplo da compressão que se obtém com o motor de Wankel. A figura I acima representa o esquema desse motor. No plano complexo $\mathbb{C}$, o corte longitudinal da superfície interior da câmara em que gira o rotor, mostrado na figura II, pode ser representado pelo conjunto

$$\vartheta = \{\, z \in \mathbb{C}\colon\ z = \sqrt{a^2 cos^2 t + b^2 sen^2 t} \times (cos\ t\ +\ i{\cdot}sen\ t),\ t \in [0{,}2\pi]\}$$

em que a e b são números reais positivos.

Com base nas informações acima e considerando os números complexos

A $= 0$,

B $= \sqrt{a^2cos^2t + b^2sen^2t} \times (cos\ t\ +\ i{\cdot}sen\ t)$

C $= \sqrt{a^2cos^2(t+\frac{\pi}{2}) + b^2sen^2(t+\frac{\pi}{2})} \times [cos\ (\mathrm{t} + \frac{\pi}{2}) + i{\cdot}sen\ (\mathrm{t} + \frac{\pi}{2})]$

D $= \sqrt{a^2cos^2(t+\pi) + b^2sen^2(t+\pi)} \times [cos\ (\mathrm{t} + \pi) + i{\cdot}sen\ (\mathrm{t} + \pi)]$

E $= \sqrt{a^2cos^2(t+\frac{3\pi}{2}) + b^2sen^2(t+\frac{3\pi}{2})} \times [cos\ (\mathrm{t} + \frac{3\pi}{2}) + i{\cdot}sen\ (\mathrm{t} + \frac{3\pi}{2})]$

julgue os itens seguintes.

113 Existem números reais positivos a e b tais que o conjunto ϑ correspondente é uma circunferência.

114 O elemento de ϑ correspondente a $t = \dfrac{\pi}{4}$ é $z = \dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{i})\sqrt{a^2 + b^2}$

115 Considere o triângulo cujos vértices são os pontos de $\mathbb{C}$ correspondentes aos números complexos A, B e C. Nesse triângulo, a altura relativa ao vértice A é igual a $\dfrac{|B| \times |C|}{|B+C|}$.

116 A distância entre os pontos de $\mathbb{C}$ correspondentes aos números complexos B e C é constante, independentemente da escolha de t.

117 O quadrilátero cujos vértices são os pontos de $\mathbb{C}$ correspondentes aos números complexos B, C, D e E admite um círculo inscrito, qualquer que seja a escolha de t.

118 A área do quadrilátero formado pelos pontos de $\mathbb{C}$ correspondentes aos números complexos B, C, D e E é igual a $8 \times |B| \times |C|$.

Resolução:

(113) Para $a = b$ temos:

$\vartheta = \{z \in \mathbb{C}\text{: } z = |a|(cos\ t + i{\cdot}sen\ t),\ t \in [0, 2\pi]\}$ que é uma circunferência de centro na origem *(0,0)* e raio igual a $|a|$.

Item: Certo.

(114) Fazendo $t = \frac{\pi}{4}$ temos:

$$Z = \sqrt{a^2cos^2(\tfrac{\pi}{4}) + b^2sen^2(\tfrac{\pi}{4})} \times (cos\ \tfrac{\pi}{4} + i{\cdot}sen\ \tfrac{\pi}{4})$$
$$Z = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$Z = \frac{1}{2}(1 + i)\sqrt{a^2+b^2}.$$

Item: Certo.

(115) Na figura a seguir, podemos representar o triângulo ABC, retângulo em A, cujos catetos medem $|B|$ e $|C|$.

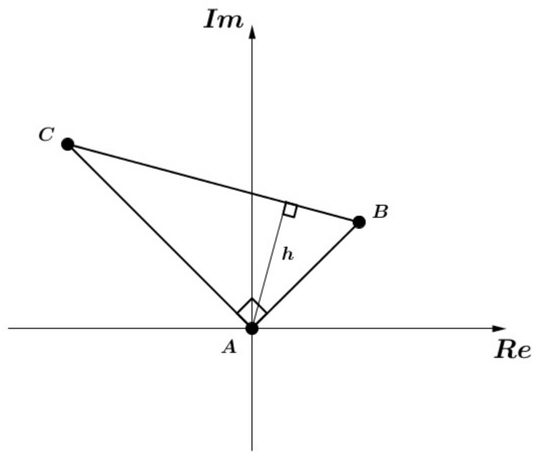

Figura 3.5: UnB resolução, 2° vestibular 2004, item 115

Segue da relação métrica do triângulo retângulo que:

$$|B-C| \times h = |B| \times |C| \Longrightarrow h = \frac{|B| \times |C|}{|B-C|}.$$

Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares, temos $|B-C| = |B+C|$. Logo, h $= \dfrac{|B| \cdot |C|}{|B-C|}$

Item: Certo.

(116) Usando o fato que cos (t + $\frac{\pi}{2}$) = -*sen t* e *sen* $(t + \frac{\pi}{2}) = cos\ t$, tem - se $C = \sqrt{a^2\ sen^2\ t + b^2\ cos^2\ t} \times$ (-*sen t* + i·*cos t*).

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo do item anterior, temos:

$|B-C| = \sqrt{|B|^2 + |C|^2}$

$|B-C| = \sqrt{(\sqrt{a^2cos^2\ t + b^2sen^2\ t})^2 + (\sqrt{a^2sen^2t + b^2cos^2t})^2}$

$|B-C| = \sqrt{a^2(cos^2\ t + sen^2\ t) + b^2(cos^2\ t + sen^2\ t)}$

$|B-C| = \sqrt{a^2 + b^2}$

logo, independente de t.

Item: Certo

(117) Do fato que $cos^2(t) = cos^2(t{+}\pi)$ *e* $\text{sen}^2(t) = sen^2(t+\pi)$, podemos concluir que $|B| = |D|$. Do modo análogo podemos concluir que $|C| = |E|$.

Como a diferença entre os argumentos dos números complexos que formam esse quadrilátero é $\dfrac{\pi}{2}$, podemos concluir que $BCDE$ é um losango. Pelo Teorema de Pitot, podemos provar que todo losango admite uma circunferência inscrita.

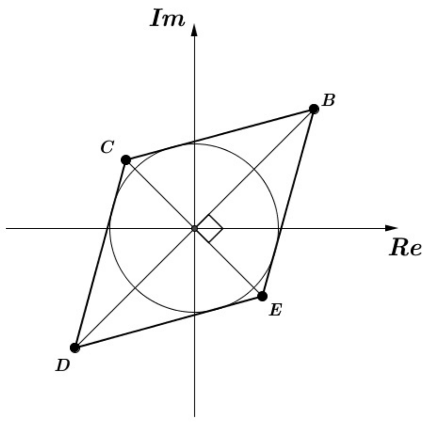

Figura 3.6: UnB resolução, 2° vestibular 2004, item 117

Item: Certo.

(118) Pelo item anterior temos:

$$A = 4 \cdot \frac{|B| \cdot |C|}{2} = 2 \cdot |B| \cdot |C|$$

Item: Falso.

3.5.4 2º dia 1º vestibular (2004)

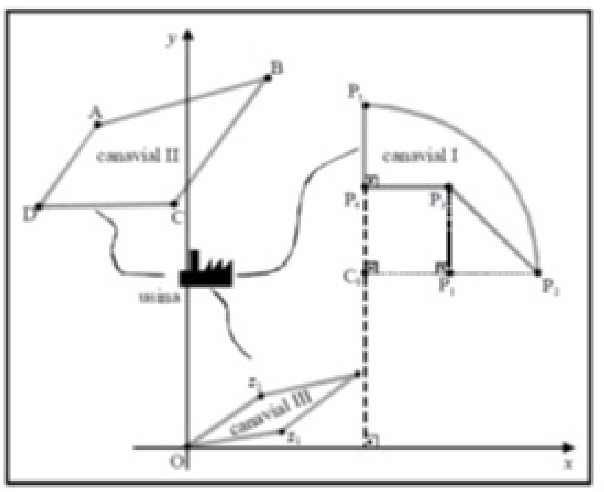

Figura 3.7: UnB texto, 1° vestibular 2004

Existe uma associação simples entre os pontos do plano cartesiano xOy e os números complexos, em que cada par de números reais *(x, y)* do plano cartesiano corresponde ao número complexo $z = x + iy$. Fazendo essa associação para o plano xOy apresentado no texto, considere que o canavial III mostrado tenha a forma de um paralelogramo cujos vértices, no plano complexo, sejam a origem e os pontos z_1, z_2 e $z_1 + z_2$, em que $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{8} + i{\cdot}\text{sen } \frac{\pi}{8})$ e $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i{\cdot}\text{sen } \frac{\pi}{4})$. Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

42 Os quatro lados do canavial III têm comprimentos iguais.

43 Os números complexos $cos\ (\frac{\pi}{8}) + i{\cdot}sen\ (\frac{\pi}{8})$ e $cos\ (\frac{\pi}{4}) + i{\cdot}\text{sen } (\frac{\pi}{4})$ são raízes da equação $z^{16} = 1$.

44 Os números complexos z_1 e z_2 satisfazem à identidade ${z_1}^2 = 3z_2$.

45 A área do canavial III é igual a $2|i - (cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4})|$.

Resolução:

(42) Pela regra do paralelogramo, ver página 23, temos que a distância entre os pontos z_1 e z_1+z_2 é igual a $|z_2|$=2 e, a distância entre os pontos z_2 e z_1+z_2 é igual a $|z_1|$=2. Logo, o quadrilátero referido é um losango.

Item: Certo.

(43) Pela segunda lei De Moivre, ver página 32, temos que as raízes de $z^{16} = 1$ são da forma $z = [\cos(\frac{2k\pi}{16}) + i \cdot sen(\frac{2k\pi}{16})]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

$k = 1 \Longrightarrow$ z = $cos\ \frac{\pi}{8} + i{\cdot}sen\ \frac{\pi}{8}$ e $k = 2 \Longrightarrow z = cos\ \frac{\pi}{4} + i{\cdot}sen\ \frac{\pi}{4}$.

Item: Certo.

(44) Pela primeira lei De Moivre, ver página 31, temos:

${z_1}^2 = 2^2(\cos\frac{2\pi}{8} + i{\cdot}\text{sen}\ \frac{2\pi}{8}) = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i{\cdot}\text{sen}\ \frac{\pi}{4}) = 4z_2$.

Item: Errado.

(45) Seja S a área do losango formado pela origem e pelos pontos z_1, z_2 e $z_1 + z_2$, cuja medida da diagonal maior é igual a $|z_1 + z_2|$ e cuja medida da diagonal menor é igual a $|z_2$ - $z_1|$. Segue que:

$$\text{S} = \frac{|z_1 + z_2| \cdot |z_2 - z_1|}{2} = \frac{|(z_1 + z_2) \cdot (z_2 - z_1)|}{2} = \frac{|z_2^2 - z_1^2|}{2}$$

Do cálculo no item anterior sabemos que ${z_1}^2 = 4z_2 = 4(cos\ \frac{\pi}{4} + i{\cdot}sen\ \frac{\pi}{4})$

Aplicando a primeira lei De Moivre, ver página 31, para calcular o valor de ${z_2}^2$, temos:

$${z_2}^2 = 2^2(\cos\frac{2\pi}{4} + i{\cdot}\text{sen}\ \frac{2\pi}{4}) = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i{\cdot}\text{sen}\ \frac{\pi}{2}) = 4i.$$

Segue que

S $= \dfrac{|z_2^2 - z_1^2|}{2} = \dfrac{|4i - 4(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4})|}{2} = 2|i$ - $(cos\ \frac{\pi}{4}$ + $i{\cdot}sen\ \frac{\pi}{4})|$.
Item: Certo.

Capítulo 4

Considerações Finais

Tradicionalmente nos vestibulares da FUVEST, UNICAMP, ITA, IME e UnB, os números complexos compõem um dos conteúdos de matemática mais importantes. A contextualização dos itens, a complexidade e a objetividade das questões evidenciam as propostas e as características de cada instituição, indicando também, o perfil dos seus candidatos.

Nas resoluções apresentadas fica evidente que o conhecimento limitado às representações algébrica e trigonométrica dos números complexos é insuficiente para desenvolver as questões de alguns processos seletivos. A teoria fundamental é abordada nesses vestibulares associada a outros assuntos da matemática como as funções trigonométricas, exponenciais, polinômios, geometria analítica e progressão geométrica, o que favorece a aplicação dos números complexos em diversos contextos e potencializa o grau de dificuldade dos itens.

A FUVEST e a UNICAMP abordam os números complexos em questões abertas aplicadas na segunda fase dos seus vestibulares. Os itens exploram as operações, a igualdade na forma algébrica e a aplicação dos números complexos nos cálculos que envolvem as funções polinomiais. No desenvolvimento das resoluções, pode-se observar que foram mantidas a linguagem e o grau de dificuldade nas diferentes edições.

Os vestibulares das instituições de ensino superior em engenharia exigem dos candidatos um conhecimento complementar e diferenciado nas questões que envolvem os números complexos. Como exemplo desse fato, as funções trigonométricas inversas e a fórmula de Euler apareceram em alguns itens do ITA, enquanto algumas substituições de variáveis foram necessárias no desenvolvimento das questões do IME que exigiram cálculos minuciosos e laboriosos.

As questões solucionadas no capítulo anterior confirmam a tradição do ITA de elaborar itens de múltipla escolha no formato de resposta múltipla ou resposta única. Já o IME mantém um exame estruturado com itens abertos e enunciado objetivo, seguido dos comandos determine ou demonstre.

Umas das principais características dos vestibulares da UnB é a abordagem contextualizada dos objetos do conhecimento. Nos dois últimos vestibulares, os números complexos foram explorados em dois itens de certo ou errado seguido de um terceiro item de múltipla escolha. Além desse padrão, comparando com os vestibulares de 2004, nota-se nos itens de 2015 e 2014 uma objetividade maior nos enunciados e consequentemente nos cálculos a serem desenvolvidos.

Atualmente, a educação é um dos assuntos mais discutidos no Brasil e boa parte se deve à proposta da Base Nacional Comum Curricular, a BNCC, que apresenta os conteúdos comuns a serem estudados em sala de aula para as áreas de linguagem, matemática, ciências da natureza e ciências humanas em cada etapa da educação básica.

A primeira versão do documento [2], apresentada em setembro do ano passado, sugere que 60% do currículo sejam dedicados aos conteúdos comuns da educação básica, e que o restante permita a adição ou o aprofundamento dos conteúdos respeitando as regionalidades. Em contrapartida, os textos referentes à área de matemática indicam um reducionismo no conteúdo e assuntos como os números complexos não foram contemplados na versão preliminar do documento.

É evidente que a uniformização do currículo fortalece ainda mais o ENEM como principal exame de acesso para o ensino superior. Seguindo essa tendência, os números complexos serão estudados por poucos alunos no ensino médio e a abordagem desse conteúdo nos vestibulares ficará limitada às instituições de ensino superior que ainda possuem processo seletivo próprio.

Referências Bibliográficas

[1] AVILA, G. Variáveis Complexas e Aplicações. 3ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2000. 14

[2] Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 21 de abril de 2016. 70

[3] CARMO, M.P., MORGADO, A.C., Wagner, E. Trigonometria Números Complexos. 3ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 2, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 45

[4] CESPE. Disponível em: $< http : //www.cespe.unb.br/vestibular/ >$. Acesso em: 13 de abril de 2016. 59

[5] CESPE. Disponível em: $< http : //www.cespe.unb.br/vestibular/VESTUNB_14_2/ >$. Acesso em: 13 de abril de 2016. 59

[6] CESPE. Disponível em: $< http : //www.cespe.unb.br/vestibular/anterior_/ >$. Acesso em: 14 de abril de 2016. 59

[7] CESPE. Disponível em: $< http : //www.cespe.unb.br/vestibular/arquivos/2004-1/ >$. Acesso em: 14 de abril de 2016. 59

[8] COMVEST. Comissão Permanente Para os Vestibulares. Disponível em: $< http : //www.comvest.unicamp.br/vest_anteriores/vest_ant.html >$. Acesso em: 11 de abril de 2016. 46

[9] COSTA, A. G. L. Números Complexos: Um Pouco de História, Ensino e Aplicações, 69f, Dissertação (PROFMAT), Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2013.

[10] DANTE, L. R. Contexto e Aplicações. 3ª edição. São Paulo: Ática, 2008.

[11] FLAMENT, D. Histoire des nombres complexes, Entre algèbre et géométrie, Paris: CNRS Éditions, 2003.

[12] FUVEST.br. Fundação Universitária Para o Vestibular. Disponível em: $< http : //www.fuvest.br/vest2015/provas/provas.stm >$. Acesso em: 12 de março de 2016. 41

[13] FUVEST.br. Fundação Universitária Para o Vestibular. Disponível em: $< http : //www.fuvest.br/vest2014/provas/provas.stm >$. Acesso em: 12 de março de 2016. 41

[14] FUVEST.br. Fundação Universitária Para o Vestibular. Disponível em: $< http : //www.fuvest.br/vest2004/provas/provas.stm >$. Acesso em: 19 de março de 2016. 41

[15] FUVEST.br. Fundação Universitária Para o Vestibular. Disponível em: $< http : //www.fuvest.br/vest2003/provas/provas.stm >$. Acesso em: 19 de março de 2016. 41

[16] GARBI, G. G. O Romance das Equações Algébricas. 3ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

[17] GONÇALVES, Adilson. Introdução à Álgebra. 5ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. 2, 7

[18] Instituto Militar de Engenharia. Departamento de Ciência e Tecnologia. Disponível em: $< http : //www.ime.eb.br/provas - anteriores - cfg.html >$ Acesso em: 20 de março de 2015. 55

[19] Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Disponível em: < *http* : *//www.vestibular.ita.br/provas.htm* > Acesso em: 26 de março de 2015. 50

[20] JÚNIOR, U. P., A História dos Números Complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand, 94f, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

[21] LIMA, E. L., Números e Funções Reais. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[22] PÉRIGO, R., DEGENSZAJN, D., DOLCE, O. IEZZI, G., Matemática Volume Único. 4ª edição. São Paulo: Atual Editora, 2007. 43, 48, 50

[23] RABELO, M. L., Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[24] SANTOS, J. C. Números. 1ª edição. Porto: Universidade do Porto, 2014. 13, 14

[25] SOARES, L. F. Números Complexos: Uma Abordagem Voltada Para Professores do Ensino Médio, 76f, Dissertação (PROFMAT), Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Juazeiro do Norte (CE), 2014.

[26] THOMAS, G. B. Cálculo - Volume 2, Tradução: Luciana do Amaral Teixeira. 11ª edição. São Paulo: Pearson, 2009. 14, 35, 36