UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JACOB JONHISON CORRÊA BRITO

PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS: UMA ABORDAGEM EDUCACIONAL.

Orientador: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

Belém – Pa
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JACOB JONHISON CORRÊA BRITO

PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS: UMA ABORDAGEM EDUCACIONAL

Orientador: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado a Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, sob orientação do Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo.

Belém – Pa
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Corrêa Brito, Jacob Jonhison, 1980-
Problemas isoperimtricos: uma abordagem educacional / Jacob Jonhison Corrêa Brito. - 2016.

Orientador: Anderson David de Souza Campelo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2016.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria Euclidiana. I. Título.

CDD 23. ed. 510.7

Jacob Jonhison Corrêa Brito

PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS: UMA ABORDAGEM EDUCACIONAL

Dissertação submetida à coordenação Acadêmica do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Pará, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 08 de Abril de 2016, por

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
Universidade Federal do Pará
(Orientador)

____

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
Universidade Federal do Pará

Amanda Suellen Sena Corrêa Leão.

Prof.(a). Dr (a). Amanda Suellen Sena Correa Leão
Universidade Federal do Pará

Gesson José Mendes Lima

Prof. Dr. Gesson José Mendes Lima
Secretaria de Educação – PA

Este trabalho é dedicado a minha família.

Agradecimentos

Agradecer a todos que contribuíram em minha trajetória é de minha obrigação. Sou grato por tudo e por isso, agradeço pela vida que Deus me concedeu, pelas dificuldades que ele me colocou a prova. Isso se repetiu durante toda minha vida e a gratidão que tenho com todos deve ser compartilhada, pelo menos em palavras, já que, o sentimento que tenho não tem como ser transmitir, a não ser de tal modo neste trabalho.

Agradeço aos meus Pais, Manoel Jacob da Silva Brito, que nos deixou deste mundo em 2001 e com certeza está feliz ao lado de Deus, pela trajetória que seu filho seguiu até então e minha mãe Raimunda Corrêa Brito, que hoje compartilha essa e muitas outras realizações; por serem eternos professores em minha vida, por estarem ao meu lado em todas as ocasiões, mesmo quando eu estava errado, sabiam lidar com isso, fazendo que eu aprendesse com os acertos e principalmente com os erros.

Agradeço a minha esposa Aretusa Pinto Cavalléro Brito por toda paciência e dedicação com nossa família. Ela sempre feliz e não deixava desistir, motivando-me a sempre lutar pelos objetivos, principalmente nos momentos de maior aflição, tanto no trabalho quanto na vida acadêmica. Com palavras certas e sábias, ela faz parte desta vitória e não poderia esquecer a minhas Filhas Layanne Pinto Cavalléro M. e Alannis Soffia Cavalléro Brito por compartilhar alegria em minha vida.

Agradeço também as pessoas que me ajudaram muito, meu irmão Jefferson Corrêa Brito professor de Física e mestrando pelo programa MNPEF - UFPA pela força e conselhos, meu sogro José Erevaldo Mira Cavalléro e minha sogra Marly Pinto Cavalléro pelas palavras de incentivo e apoio com nossa família, ao meu primo Leonardo Monteiro Corrêa que é professor de matemática no município de Bragança – Pa, que no início de minha graduação, deu-me de presente uma coleção de livros de cálculo 1,2,3 e 4, ao meu amigo pastor Willian, Professor Msc. Edilson Vasconcelos dos Santos, aos meus professores do ensino básico e de graduação, em especial, professores Valério, Adérito Parente, Joerbet, Cosmo e Damião Negri, Antônio Damasceno, Dr. João dos Santos Protázio pela orientação em minha graduação, Dr. Ducival, Msc. João Batista, a todos os professores doutores do Profmat/UFPA, em especial ao professor e orientador Dr. Anderson David de Souza Campelo, pela paciência e dedicação com seus orientandos. Foi de extrema importância sua orientação para que pudéssemos realizar a escrita deste trabalho.

Aos meus amigos do Profmat, que proporcionaram momentos de alegria, estudo e representam uma grande família formada a pouco menos de 2 anos, mesmo com todas as dificuldades de conciliar família, trabalho e universidade, mostramos que estudar juntos é possível, tornou-se eficiente e decisivo ao realizar as provas durante o curso.

Agradeço também, em especial, meu amigo professor Adolfo Macedo da Silva Junior, por sua simplicidade de tratar com situações adversas. Foi importante para decidir e acreditar que seria possível, colaborando com a pesquisa deste trabalho, pois sem seu empenho, não teríamos concluído.

A Deus, que nos criou e foi criativo nesta tarefa pois graças a ele e pela vida que me concedeu, pois consegui realizar meus sonhos.

Resumo

Este trabalho aborda o problema isoperimétrico adaptando-o especialmente para Ensino Básico e, de certa forma, para o mundo acadêmico. Para tal, foram realizados os seguintes procedimentos: um apanhado histórico deste problema, algumas de suas demonstrações clássicas de teoremas baseados na geometria euclidiana e uma experiência em uma escola pública. O estudo possibilita um caminho mais simples e didático de solucionar o problema isoperimétrico do que o modelo tradicional, isto é, resoluções com o uso de funções, sobretudo a respeito da função quadrática.

Palavras-chave: A lenda de Dido, Maximização de áreas, Problema isoperimétrico, Atividade Extraclasse, Geometria Euclidiana, Geogebra.

Abstract

This paper addresses the isoperimetric problem adapting it especially for basic education and, in a way, to the academic world. To this end, the following procedures were performed: a historical overview of this problem, some of his classic demonstrations of theorems based on Euclidean geometry and experience in a public school. The study provides a simpler way and teaching to solve the isoperimetric problem than the traditional model, are resolutions with the use of functions, especially regarding the quadratic function.

Keywords: The legend of Dido , areas Maximization , isoperimetric problem, extracurricular activity, Euclidean geometry , Geogebra.

Sumário

Lista de figuras.

Lista de tabelas.

Lista de gráficos.

INTRODUÇÃO

Este estudo tem como objetivo tomar o problema isoperimétrico, desdobrá-lo e aplicá-lo, didaticamente, para o ensino básico brasileiro. E, de certa forma, servirá como fonte de estudo para a esfera acadêmica.

Este trabalho é resultado de aplicações e demonstrações clássicas em Geometria Euclidiana, especificamente, tratando-se de problemas isoperimétricos. Mas, afinal de contas, o que seria um problema isoperimétrico?

Isoperimétrico (iso + perímetro + ico) significa mesmo perímetro, ou pelo menos, situações que estão ligadas ao mesmo perímetro. Percebemos isso quando, em determinada condição, comparamos figuras planas com mesmo perímetro, objetivando a maior área. O interessante é que, problemas isoperimétricos deu-se, a princípio, com um fato curioso ocorrido muitos séculos antes de Cristo e que dentro das histórias mitológicas do período, que era de costume, ficou mundialmente conhecido como a Lenda de Dido, da obra *Eneida* de Virgílio.[1] A obra conta a História da Princesa Elisa quando esteve a frente de resolver um problema de demarcação de terra, para construir seu reinado. Matematicamente, o problema de Dido pode ser posto da seguinte maneira: Dada uma curva com um determinado perímetro fixo, qual a forma geométrica que ela deve ter para que envolva a máxima área possível?

Sendo apresentado assim nas escolas ou em livros didáticos, certamente alguém falaria que não ouviu comentários a respeito, porém é um assunto até bastante comum no ensino médio.

A ligação da Lenda de Dido aos problemas isoperimétricos Clássicos é, a nosso ver, de extrema importância para justificar situações problema e até estimular o raciocínio, tendo como exemplos aplicados durante a história. Infelizmente, na realidade atual do Brasil, muitas escolas sendo elas públicas ou privadas, não costumam proporcionar um espaço para que o professor possa desenvolver algumas práticas extraclasse com argumento que, para matemática, isso não seja necessário. No entanto, o resgate da história da matemática em sala de aula, em geral, torna o assunto muito mais interessante e deixam os alunos mais confiantes em suas conclusões.

---

[1]Públio Virgílio Maro ou Marão (em latim: *Publius Vergilius Maro*; Andes, 15 de outubro de 70 a.C. — Brundísio, 21 de setembro de 19 a.C.) foi um poeta romano clássico, autor de três grandes obras da literatura latina, as *Éclogas* (ou *Bucólicas*), as *Geórgicas*, e a *Eneida*.

É comum escutar de alunos frases como: “Entender eu entendi, mas como eu iria ter ideia”, “Como alguém pensou nisso” ou “Até aqui entendi, mas não saberia terminar a questão”. Apesar de estarmos na “era digital”, e muitos recursos sendo utilizados para facilitar o aprendizado, entendemos que o professor ainda é o elemento principal para o aprendizado. Mesmo que o aluno utilize a velocidade das informações através da internet, o profissional em matemática pode ter um papel extremamente importante neste processo. Para tal, o professor necessita estar acompanhando as mudanças, orientando como essa informação pode ser melhor aproveitada, de modo que venha complementar eficazmente o conhecimento do estudante. Sem, porém, abandonar o rigor matemático em seus respectivos níveis.

Neste trabalho será utilizada como motivação a lenda de Dido, a respeito do problema isoperimétrico clássico que é conhecido do seguinte modo: Dentre as figuras com o mesmo perímetro, qual delas tem a maior área?

A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática.

Todavia, tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino brasileiro, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos.

Este trabalho está organizado em capítulos. No primeiro capítulo é apresentado o histórico do problema isoperimétrico. Será narrado como surgiu, como foi desenvolvido e qual seu resultado. Para tal, toma-se como exemplo o caso da princesa Dido, que é considerado o primeiro caso de problema isoperimétrico.

No segundo capítulo são apresentados exemplos práticos do problema isoperimétrico – sem necessitar empregar o cálculo diferencial – utilizando noções da geometria Euclidiana, como área de polígonos e perímetros. Para tal, iremos utilizar o recurso do Software Geogebra, alcançando maior clareza no que se refere às mudanças de área.

No terceiro capítulo, são apresentados demonstrações sobre a desigualdade isoperimétrica, desta vez utilizando recursos de variações em curvas. Mas não abandonando os conceitos da geometria Euclidiana que auxiliam para obter o teorema da desigualdade isoperimétrica.

No quarto capítulo, é aplicada uma experiência extraclasse com alunos do ensino básico, sobre problemas isoperimétricos clássicos, dentro do contexto da geometria euclidiana.

CAPÍTULO 1.

Um pouco de história: A lenda de Dido.

Desde os tempos mais remotos da humanidade, tem-se procurado soluções para problemas mais intrigantes que nos aflige, isso acontece principalmente pelo fato quando nos deparamos com situações que nos desafiam e provocam reações criativas e inteligentes. Nas sociedades mais primitivas ou mesmo entre os animais, a busca para soluções de entraves e embaraços sempre foi tentada. É nesse contexto que temos consciência de que a história ou mesmo ficções ou lendas nos ajudam a consolidarmos o aprendizado presente com as relações e conclusões do passado nos levando muitas vezes a projetarmos ensaios e práticas futuras.

A lenda da princesa Elisa (Dido) da antiga cidade Tiro (cidade Fenícia) às margens do Mediterrâneo, localizada onde hoje é o Líbano, foi relatada sem uma ordem cronológica e fantasiada pelo autor Virgílio no livro *Eneida*.

Uma parte muito interessante desta obra, diz respeito a um problema complicado que aparentemente não teria solução com bases nos conhecimentos matemáticos da época. Trata-se da seguinte situação: Com uma corda de comprimento fixo, qual a figura geométrica que delimita a maior área possível? Este foi o problema que a princesa Dido teve que solucionar para que assim, pudesse comprar as terras e construir a cidade de Cartago, no norte da áfrica. Provavelmente este foi o primeiro relato escrito sobre problemas isoperimétricos, sendo que a partir disso surgiram estudos sistematizados em outros contextos históricos mais concretos, com embasamento cientifico e acadêmico.

Composta por 12 livros, num total de 9826 versos, a Eneida, a maior obra do poeta Virgílio é considerada, simultaneamente, uma obra de tom mitológico e histórico: mitológico porque narra a história do herói Eneias, utilizando-se de lendas tradicionais do povo romano. É Histórico porque utiliza este argumento para exaltar

Roma e Augusto, procurando valorizar tanto os feitos do imperador quanto os feitos mais remotos do seu povo.

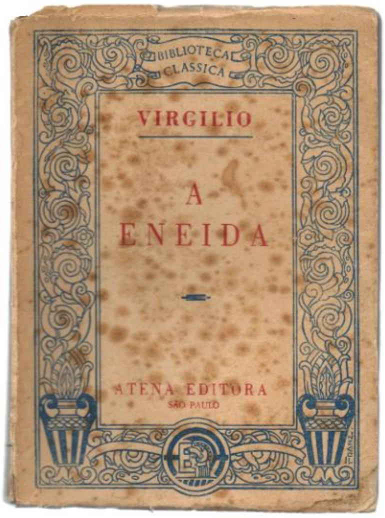

Figura 1.1: Livro Eneida de Virgílio/ acervo pessoal.

Figura 1.2: Busto de Virgílio, na entrada de sua tumba, em Nápoles.

Conforme escritos baseados na mitologia Romana, a Princesa Dido era filha de Mattan I, rei de Tiro (cidade fenícia) e mulher de Siqueu (Acerbas). Após a morte de seu marido princesa Dido, foi para África, precisamente a Costa do Mediterrâneo, ao norte do continente.

A princesa Dido ao saber que o seu marido fora morto por seu irmão Pigmaleão que foi motivado pela cobiça das riquezas que o seu marido tinha, haja visto que ele era considerado o mais rico de Tiro e depois do rei o mais influente.

Figura 1.3: Princesa Dido.

A morte do marido da princesa Dido foi planejada e aconteceu da seguinte forma: o rei Pigmaleão atraiu o marido da princesa Dido para o templo de Erácles que na tradução latina significa Hércules e lá no templo ocorreu o seu assassinato.

Conta à lenda que a princesa tomou conhecimento do plano sórdido e execução do mesmo através do aparecimento do seu marido em sonho, o qual alertou sua esposa que seu irmão também estava decidido a mata-la para tomar posse de toda riqueza deixada por ele. Como conhecia o local onde ficavam essas riquezas e que o seu irmão com toda certeza iria confisca-la, resolve sair em fuga reunida com pessoas nobres de Tiro que eram fiéis ao casal.

O lado interessante foi à astúcia da princesa que, para ganhar tempo na fuga, encheu sacos com areia e jogou ao mar dizendo que ali estava parte do tesouro destinado ao marido assassinado. Provavelmente, se realmente foi verdade, tal atitude teria como objetivo atrasar a possível perseguição, já que, teriam que resgatar o suposto tesouro no fundo do mar.

Figura 1.4: Norte da África.

Ao chegar ao norte da África, Dido resolveu negociar com o Rei Jarbas e ofereceu certa quantia do tesouro que havia trazido consigo na fuga para comprar terras. Mas um problema surgiu: Dido poderia fechar o negócio desde que as terras que ela quisesse deveriam ser contornadas com o couro de 1 (um) único touro. Jarbas e Dido aceitaram as respectivas ofertas, então Dido mandou cortar o couro em várias tiras, ligando-as ponta a ponta utilizando o comprimento do fio obtido como perímetro, cercando vasta área de forma circular onde construiu a cidade nome de Birsa (couro) e esta impulsionou a criação do estado Cartago que hoje se chama Tunísia, a qual se tornara rival de Roma por volta de 850 a.C.

Figura 1.5: Ilustração da princesa Dido e seu povo cortando o couro de um touro.[2]

Inteligentemente escolheu a terra ao longo do mar para não usar fitas ao decurso da costa marítima e formando com as tiras um semicírculo obtendo o terreno com maior área de terra possível.

1.1.Algumas cidades medievais com relação isoperimétrica.

---

[2]MADEIRA, Telma Morais. O Problema Isoperimétrico Clássico. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2005.

Há indícios que situações isoperimétricas anteriores, influenciaram na urbanização de cidades, pelo menos é o que observamos em várias imagens de mapas. É no mínimo interessante acreditar que a formação de cidades esteja ligada aos problemas isoperimétricos. Vejamos alguns exemplos mais conhecidos.

Figura 1.6: Mapa medieval de Paris – França.

Perceba que o formato da cidade a beira de um rio, dos dois lados assemelham-se a semicírculos.

Paris é a capital econômica e comercial da França, onde os negócios da Bolsa e das finanças se concentram.

> Entretanto as referências históricas para a solução do problema não se restringem apenas à literatura. Durante a idade média era comum a construção de muros de proteção para as cidades. Ao consultar alguns mapas disponíveis na época, não por acaso, encontramos muros no formato circular, ou semicircular. Como os muros eram feitos de pedras, sua construção era cara e trabalhosa. Utilizar o resultado do problema isoperimétrico, já conhecido na época, maximizava a área cercada, para uma quantidade fixa de material.[3]

A cidade de Colônia, na Alemanha também se assemelha a um semicírculo. Não tinham comprovações matemáticas de que a organização urbana horizontal de

[3]LIMBERGER, Roberto, *Abordagens do problema isoperimétrico.* 2011, p. 6.

algumas cidades estivesse diretamente ligada ao problema isoperimétrico clássico de Dido. No entanto, muitas construções possuem formato, que aproveita melhor uma determinada área cercada.

Figura 1.7: Mapa medieval Colônia – Alemanha.

Figura 1.8: Mapa medieval Braga – Portugal.

CAPÍTULO 2.

Desigualdade isoperimétrica do ponto de vista da Geometria Euclidiana.

Este capítulo trata da aplicabilidade básica do problema isoperimétrico, utilizando as noções da geometria Euclidiana em algumas situações mais comuns, como triângulos, quadriláteros, polígonos de modo geral.

Considerando o problema isoperimétrico clássico, iremos mostrar situações em que, modificando a figura, mas preservando o perímetro, obtemos a mudança de sua área. Para facilitar a exposição do problema, utilizaremos o software Geogebra para mostrar os resultados, principalmente quando tratamos de polígonos e a mudança do número de lados.

Vamos para o desenvolvimento dos exemplos, onde podemos constatar apresentar de forma clara e simples a coerência do problema.

Utilizando uma corda de comprimento finito fixo, poderíamos construir polígonos como nos exemplos a seguir:

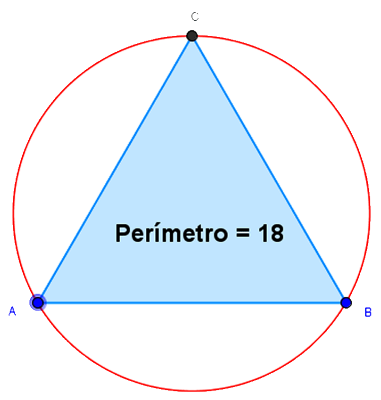

Figura 2.1: Triângulo de Perímetro 18/ acervo pessoal.

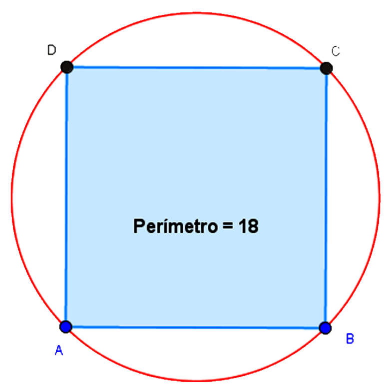

Figura 2.2: quadrilátero de perímetro 18/ acervo pessoal.

Aumentando o número de lados, cada vez mais o polígono aproxima-se do formato do círculo. Perceba na figura 2.3 que, temos os exemplos do triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octógono e possuem mesmo perímetro.

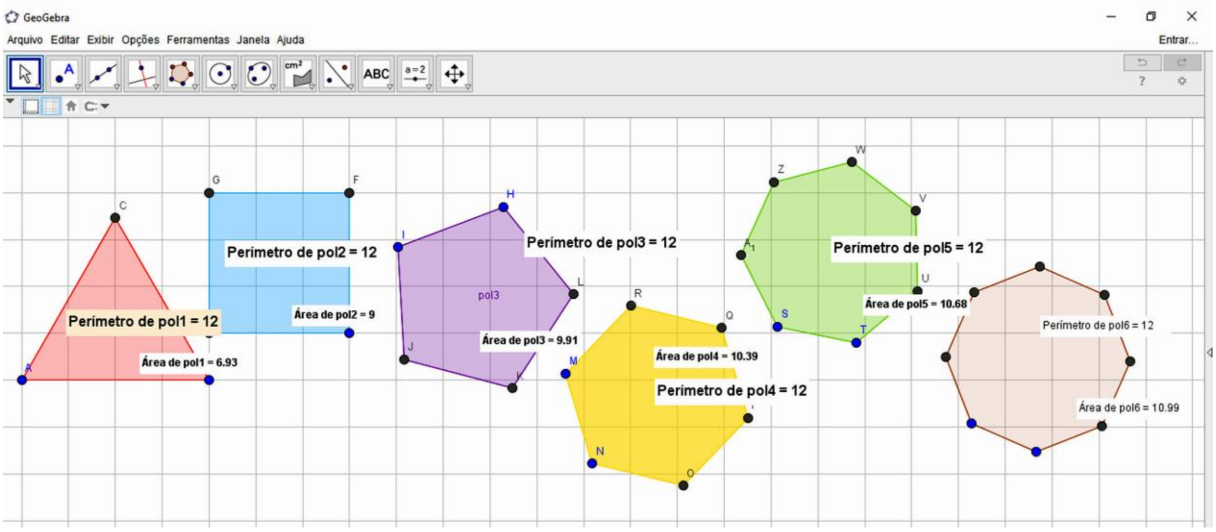

Figura 2.3: Mudanças de áreas com diferentes polígonos regulares/ acervo pessoal.

Mas se a figura plana não fosse necessariamente um polígono, sendo ainda fechado, poderíamos alcançar melhores resultados quanto sua área. Veja a figura 2.4 que representa uma determinada área cercada por um fio.

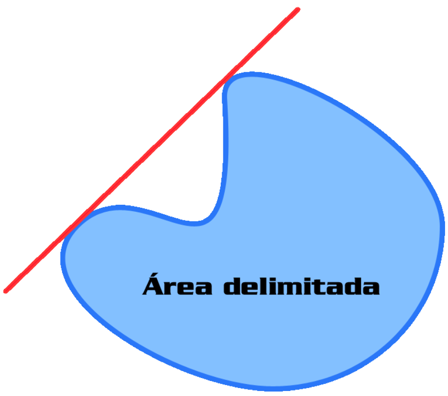

Figura 2.4: Curva fechada simples/ acervo pessoal.

Podemos observar que, utilizando o mesmo fio, poderíamos criar outras regiões cercadas com áreas maiores, até que chegássemos ao círculo, que teria a área máxima e isto foi um problema por muitos anos. Saber de um resultado apenas em observações, mas não comprovar isso rigorosamente, tornou-se um trabalho árduo para muitos estudiosos em matemática.

Utilizando o Geogebra, mostrar entre os triângulos possíveis de se construir com perímetro de 18 unidades, aquele que possui a maior área.

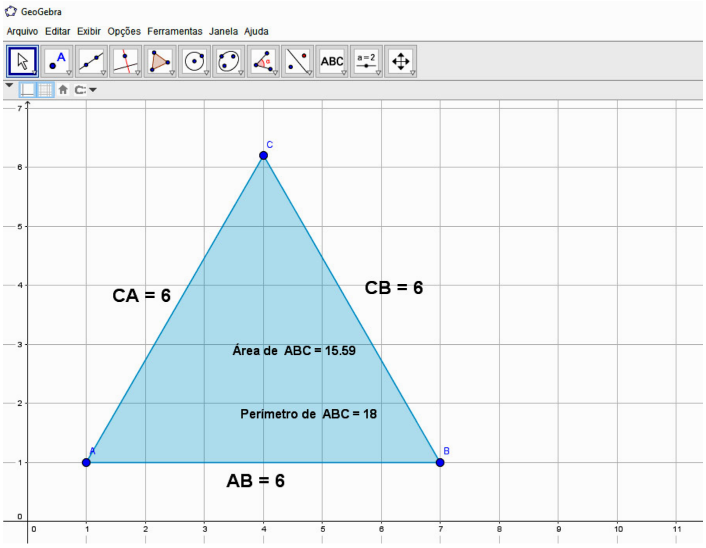

Figura 2.5: Triângulo equilátero/ acervo pessoal.

Neste caso observamos o triângulo equilátero de perímetro 18 e área 15,59.

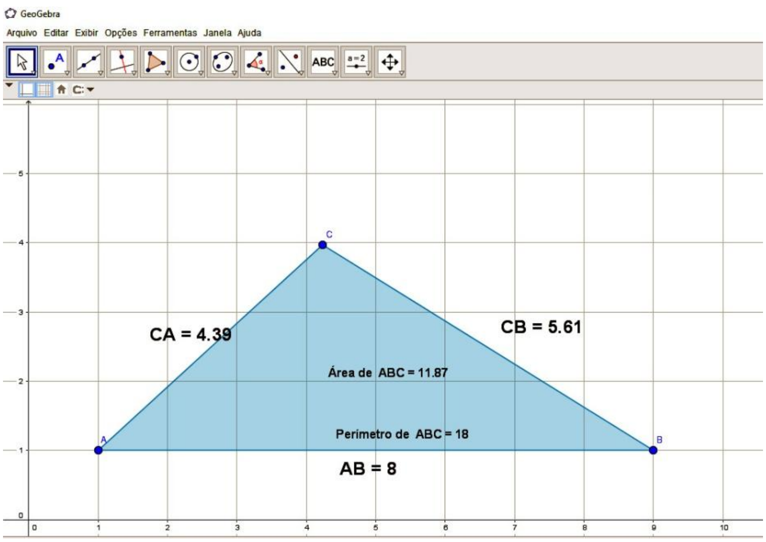

Figura 2.6: Triângulo escaleno/ acervo pessoal.

Triângulo escaleno de perímetro 18 e área 11,87

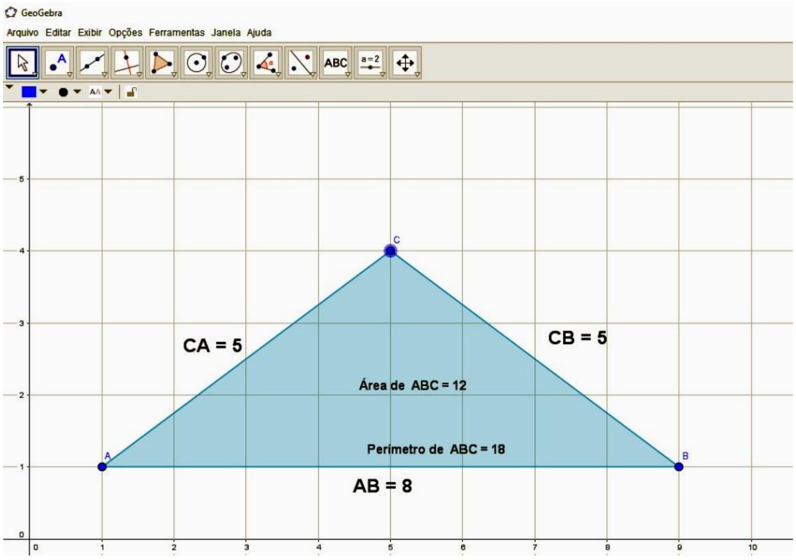

Figura 2.7: Triângulo isósceles/ acervo pessoal.

Triângulo isósceles de perímetro 18 e área 12.

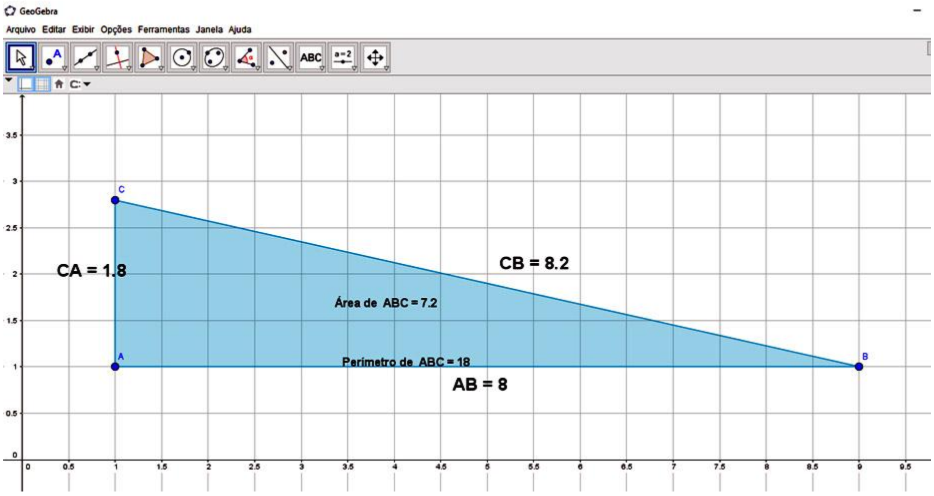

Figura 2.8: Triângulo retângulo/ acervo pessoal.

Triângulo retângulo de perímetro 18 e área 7,2

CAPÍTULO 3.

Uma justificativa mais rigorosa: O Teorema da Desigualdade Isoperimétrica.

Neste capítulo, apresentaremos a desigualdade isoperimétrica para triângulos, quadriláteros, polígonos em geral e finalmente a generalização para o círculo. Para justificar nossas afirmações, dividimos em partes para que, ao final, possamos encontrar um resultado plausível.

Não podemos deixar de notar que o problema isoperimétrico clássico de Dido, possui um enunciado muito simples, como já foi mencionado no Capítulo 2. Porém é complexo, principalmente para época do fato. Apesar de terem resolvidos com intuições geométricas, apenas séculos depois foi rigorosamente demonstrado.

Em nossa pesquisa, relatamos a contribuição da dissertação de mestrado de Telma Morais Madeira, que faz um apanhado histórico sobre problemas isoperimétricos clássicos, enfatizando a lenda de Dido.

> O estudo do problema isoperimétrico clássico permite estabelecer uma propriedade da circunferência usualmente designada por propriedade isoperimétrica da circunferência. A primeira demonstração desta propriedade aparece num comentário de Teão (335-405) à obra *Almagesto* de Ptolemeu (85-165) e nos trabalhos de Pappo (290-350), mas o seu autor é Zenodoro (200a.C.-140a.C.). Apesar de, nessa época, os gregos terem conhecimento de que a circunferência era a solução do problema isoperimétrico, só a partir de 1880 foi conhecida uma demonstração completa e rigorosa da propriedade isoperimétrica da circunferência, apresentada por Weierstrass(1815-1897) nos seus seminários na Universidade de Berlim.[4]

---

[4]MADEIRA, Telma Morais. O Problema Isoperimétrico Clássico. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2005, p. 4.

Teorema isoperimétrico: Toda curva fechada de comprimento ℓ ,não nulo, cerca uma área menor ou igual a $\frac{\ell^2}{4\pi}$ considerando que este valor só é alcançado para o círculo, cujo raio é $\frac{\ell}{2\pi}$. Várias são as demonstrações a respeito deste fato e neste trabalho, iremos exibir uma demonstração simples deste teorema. Para isto, vamos primeiramente demonstrar um resultado para polígonos: considerando todos os polígonos de **n** lados com perímetro fixo, o de maior área é o regular. Com este resultado, fica mais fácil demonstrar a desigualdade isoperimétrica.

Para facilitar em nossa demonstração, iremos considerar algumas afirmações, divididas em subtópicos deste capítulo com base na geometria euclidiana clássica. Utilizaremos como parte de nossa pesquisa, a contribuição da obra de Carlos Gustavo T. de A. Moreira[5] e Nicolau Corção Saldanha.[6]

3.1 Desigualdades isoperimétricas envolvendo triângulos.

As demonstrações dos teoremas 1 a 5 abaixo fazem parte da obra a Desigualdade Isoperimétrica, de Carlos Gustavo T. de A. Moreira e Nicolau Corção Saldanha.

Teorema 1: Dentre todos os triângulos ABC de base fixa AB e perímetro dado, aquele de maior área é isósceles.

Além disso, dados dois triângulos ABC e ABC' com mesmo perímetro e $\left|\overline{AC}-\overline{BC}\right| < \left|\overline{AC'}-\overline{BC'}\right|$, a área de ABC é maior que a área de ABC'.

Podemos observar alguns exemplos de triângulos, convenientemente esboçados em mesma escala. Utilizamos aqui para facilitar o recurso do Geogebra, exibindo os valores dos perímetros e áreas.

---

[5] MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A. Doutor pesquisador IMPA, 1993. *A desigualdade Isoperimétrica, revista universitária*, Nº 15, 1993.

[6] SALDANHA, Nicolau Corção, Foi o primeiro brasileiro a ganhar medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática, em 1981. Phd em Princeton, professor da Puc – Rio de Janeiro.

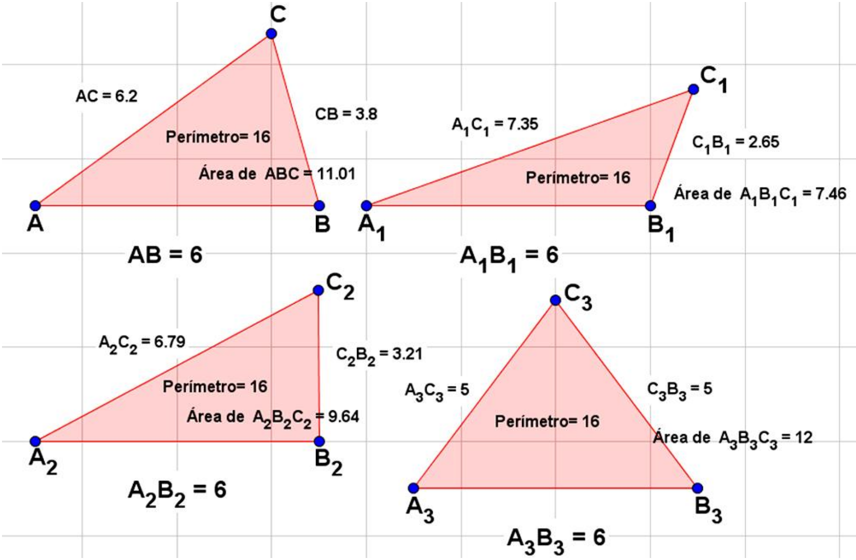

Figura 3.1: Exemplos da primeira afirmação/ acervo pessoal.

Esta afirmação é consequência fácil da fórmula de Herão: a área de um triângulo de lados a, b e c é dada por:

$$S = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ onde } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

3.2. Desigualdades isoperimétricas envolvendo quadriláteros.

Teorema 2: Dentre todos os quadriláteros com lados dados, aquele de maior área é o inscritível. Mas, se considerarmos dois quadriláteros ABCD e A'B'C'D' com lados correspondentes iguais, se $\left|\hat{A}+\hat{C}-\pi\right| < \left|\hat{A}+\hat{C}'-\pi\right|$, então a área de ABCD é maior do que a área de A'B'C'D'.

Estas afirmações seguem da fórmula abaixo: a área S de um quadrilátero de lados AB = a, BC= b, CD = c e DA = d e ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ é dada por

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-d) - \frac{1}{2}abcd\left(1+\cos\left(\hat{A}+\hat{C}\right)\right)}, \text{ onde } p = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Esta fórmula pode ser obtida elevando ao quadrado o valor de S dado por $S = \frac{1}{2}a.d.\text{sen}\hat{A} + \frac{1}{2}b.c.\text{sen}\hat{C}$ (este valor é obtido somando as áreas de DAB e BCD) usando a identidade $a^2 + d^2 - 2.a.d.\cos\hat{A} = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{C}$ (os dois membros da igualdade resultam no quadrado da diagonal BD pela lei dos cossenos).

3.3. Caso particular: Desigualdades isoperimétricas envolvendo retângulos.

Entre os quadriláteros, destacamos em especial, o caso particular para retângulos. Neste contexto, apresentamos uma aplicação para o retângulo, com base nos conhecimentos de quadriláteros.

Considere o retângulo com medidas a e b:

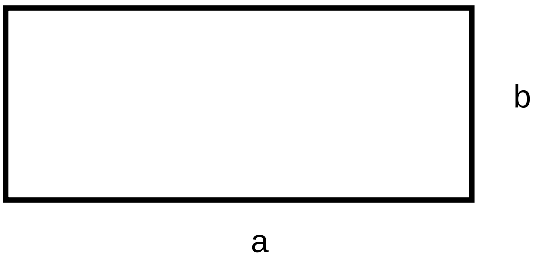

Figura 3.2: Desigualdade isoperimétrica no retângulo.

Entre os elementos a e b, aplicaremos as desigualdades aritmética e geométrica:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Sabendo que a + b é o semiperímetro do retângulo é igual a p; ab é a área desse retângulo igual A, temos:

$$\frac{p}{2} \geq \sqrt{A} \Rightarrow \frac{p^2}{4} \geq A \Rightarrow p^2 \geq 4A \qquad \square$$

Teorema 3: Dado um polígono não convexo, temos outro polígono com número de lados menor, perímetro menor e área maior.

Queremos obter dois vértices não consecutivos tais que a reta determinada por eles tem o polígono inteiramente contido em um dos semiplanos por ela determinados. Obteremos o novo polígono substituindo a parte interior da poligonal ligando estes dois pontos pelo segmento que os liga.

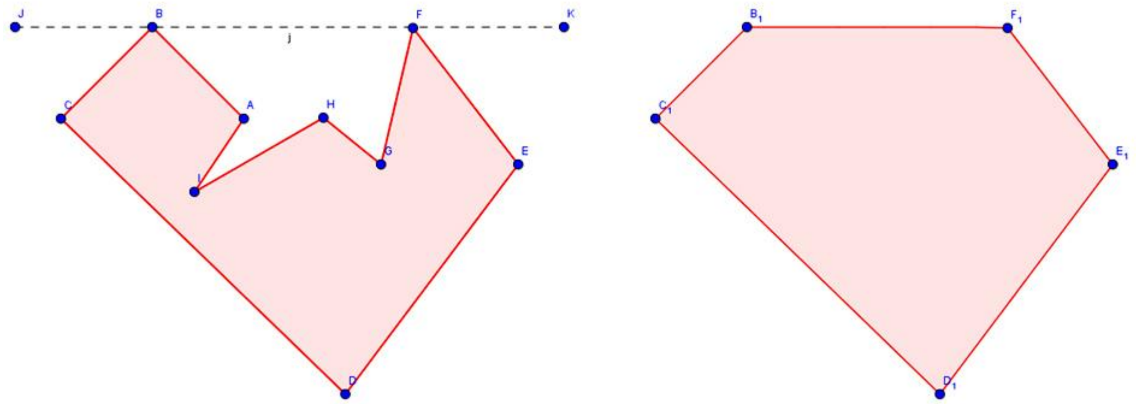

Figura 3.3: Comparação entre as áreas dos polígonos.

Teorema 4: Dado qualquer polígono não regular, existe um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual, e área maior.

Teorema 5: Se n < m a área de um polígono regular **n** lados é menor que a área de um polígono regular de **m** lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.

Suponha que tenhamos uma curva de comprimento fixo ℓ delimitando uma determinada área A. Agora, iremos escolher um número inteiro positivo N e tomar N pontos ao longo da curva, igualmente espaçados em termos do comprimento do arco de curva entre eles. Vamos ligar estes pontos por linhas retas para obter um polígono de N lados e perímetro menor que ℓ. Tomemos um fecho convexo deste polígono: seu perímetro é menor que ℓ donde, pelas afirmações anteriores, sua área B é menor que $\frac{\ell^2}{4\pi}$. Consideremos o conjunto dos pontos que ou estão dentro deste fecho convexo ou não ou até, estando fora dele, distam menos de $\frac{\ell}{2N}$, de algum dos N pontos originais: a curva original está totalmente contida nesta região, pois qualquer ponto desta curva dista menos que $\frac{\ell}{2N}$ de algum destes N pontos. Por outro lado, a área desta região será menor ou igual $B+N\pi\left(\frac{\ell}{2N}\right)^2$, pois está contida na união do fecho convexo com N círculos de raio $\frac{\ell}{2N}$ e centros nos N pontos. Assim, $A \leq B + N\pi\left(\frac{\ell}{2N}\right)^2 \leq \frac{\ell^2}{4\pi} + \frac{\pi\ell^2}{4N}$, e como esta estimativa vale para qualquer N,

$$A \leq \frac{\ell^2}{4\pi}. \qquad \square$$

Finalmente, consideremos uma curva de comprimento ℓ englobando área $\frac{\ell^2}{4\pi}$ e vamos provar que ela é um círculo. Primeiramente, ℓ obervemos que ela é convexa. De fato, para uma curva não convexa, sempre existe um segmento de reta ligando dois pontos da curva e contido inteiramente no exterior da mesma, excluindo-se os extremos do segmento. Este segmento divide a parte do plano fora da curva em duas regiões, uma limitada e outra não. Tomando a porção da curva que toca a região ilimitada mais o segmento de reta, temos uma nova curva fechada de perímetro menor e área maior.

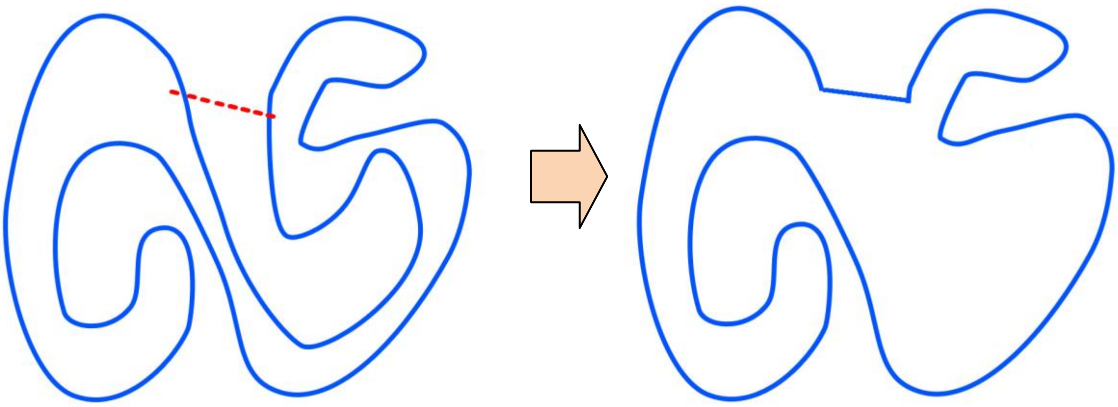

Figura 3.4: Curva fechada não convexa transformando-se em outra figura não convexa fechada de perímetro menor e área maior.

Agora, para uma curva convexa distinta do círculo, tome quatro pontos não cocirculares. Se deformarmos o quadrilátero com estes quatro vértices mantendo rígidos os arcos de curva entre dois pontos até o quadrilátero tornar-se inscritível estaremos aumentando a área sem mudar o perímetro

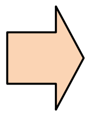

Figura 3.5: Deformação do quadrilátero até se tornar inscritível em um círculo.

Para tanto, observaremos que, dentre os triângulos que possuem dois lados de medidas fixas, o triângulo retângulo é o que possui maior área. Deste resultado, mostraremos que a semicircunferência é a curva plana "aberta", com extremos em dois pontos de uma reta, a qual o segmento limitado por estes extremos é o diâmetro, engloba a maior área e, a partir de então, concluiremos que a circunferência é a curva plana fechada que engloba a maior área.

Os corolários e as preposições a seguir, são alguns resultados da obra de *O Problema Isoperimétrico e Aplicações para o Ensino Médio* de Fabiana Adala Moreto.

Definição: Uma curva plana é função contínua definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}^2$. Seja $P:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva. Os pontos P(a) e P(b) são chamados extremos da curva.

Nas figuras abaixo, apresentamos algumas curvas. Na primeira, os extremos são distintos (P(a) ≠ P(b)) denominaremos aberta e ela se autointersecta, isto é, dois valores distintos de t originam o mesmo ponto (parte (a)). Na segunda curva, como P(a) = P(b), chamaremos de fechada, embora ela também se autointersecte num ponto diferente dos extremos (parte (b)). Quando uma curva não possui autointersecções (além dos extremos, eventualmente), dizemos que a curva é simples (parte (c)).

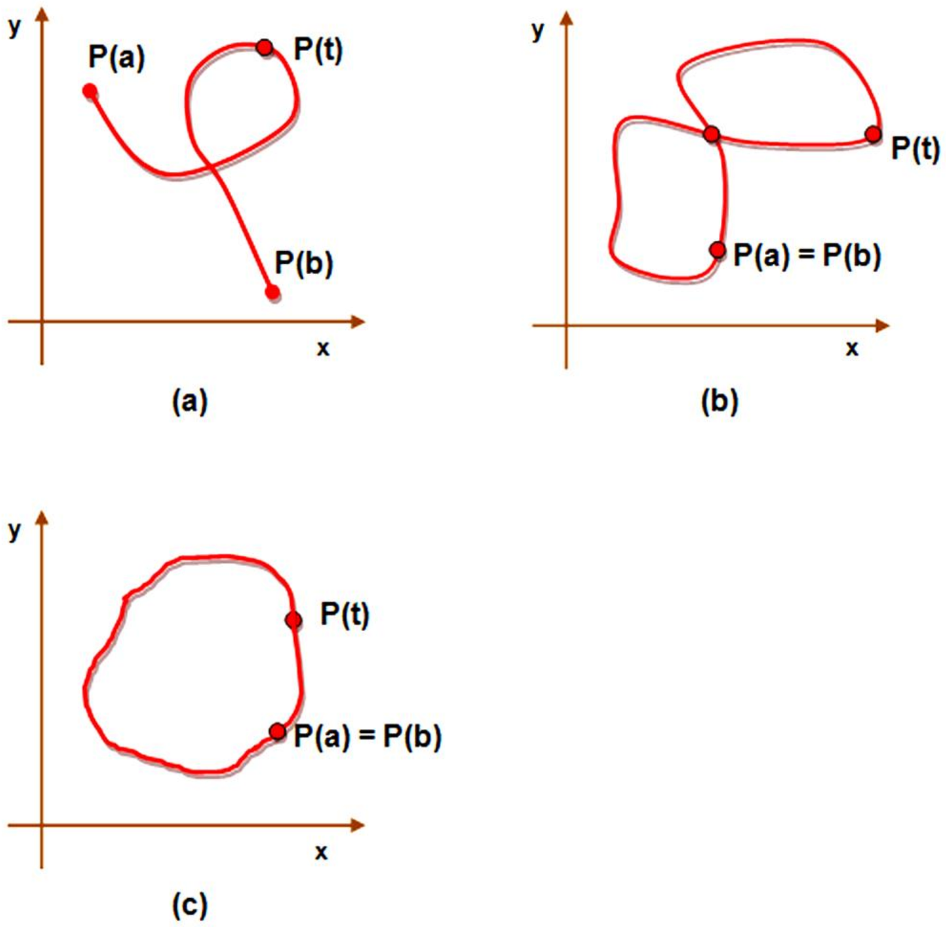

Figura 3.6: Curvas simples e não simples

Proposição 1: Seja F_1 uma figura plana limitada não convexa, cuja fronteira seja uma curva plana simples e fechada C_1. É possível encontrar uma figura plana convexa, F_1', de área maior do que a de F_1, tal que sua fronteira C_1', seja uma curva plana simples e fechada, de comprimento igual ao de C_1.

Demonstração:

Como F_1 não é convexa, existem pontos P e Q em F_1 tais que o segmento $\overline{PQ}$ não esteja contido em F_1. Sendo A e B os pontos de intersecção do segmento $\overline{PQ}$ com C_1 tal que $\overline{AB} \cap C_1 = \{A,B\}$, refletimos uma das partes de C_1 com extremos em A e B em relação à reta que contém $\overline{PQ}$, obtendo uma nova figura, F_1', com fronteira C_1', de mesmo comprimento que o de C_1, porém com área maior do que a de F_1.

Observe a figura a seguir:

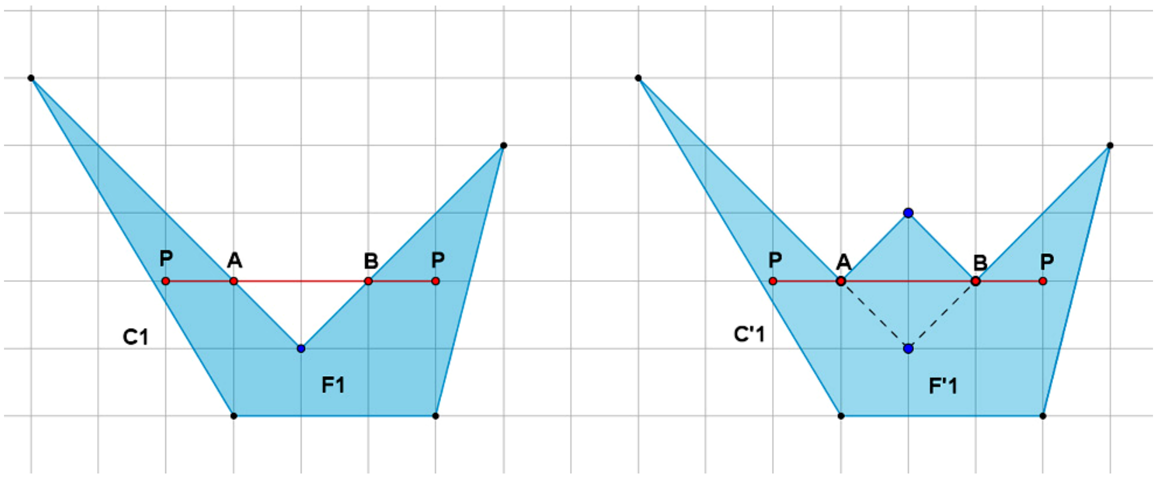

Figura 3.7: Reflexão de parte do polígono.

Se $F_1{}'$ ainda não for convexa, repetimos o raciocínio até encontrarmos uma figura F_2 convexa. É importante resaltar que estamos representando ilustrações da Figura 3.7, de modo a facilitar em nossa demonstração, pois dependendo da escolha dos pontos P e Q em cada nova figura construída, pode ser que F_2 seja encontrada por um "processo limite" de figuras obtidas a partir de F_1. No entanto, escolhas convenientes de P e Q conduzem a um número finito de figuras.

Com base na proposição anterior, podemos concluir que figuras isoperimétricas são sempre convexas.

Além disso, a proposição anterior nos conduz ao seguinte corolário, cuja demonstração é semelhante, uma vez que o segmento $\overline{AB}$ permanece inalterado na sequência de figuras obtidas de F_1.

Corolário 1: Seja C_1 uma curva plana, simples e aberta, situada de um mesmo lado de uma reta r e com extremos A e B nessa reta. Suponhamos que a curva fechada $C_1 \cup \overline{AB}$ seja fronteira de uma figura limitada, F_1, não convexa. Então existe uma curva C_2, plana, simples e aberta, de mesmo perímetro que o de C_1, com os mesmos extremos A e B em r, tal que $C_2 \cup \overline{AB}$ seja fronteira de uma curva convexa com área maior do que a de F_1.

Proposição 2: Dentre todos os triângulos com dois lados de comprimentos fixos, o de maior área é o triângulo retângulo que possui esses lados como catetos.

Demonstração:

Considere $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ dois segmentos de medidas fixas a e b, respectivamente.

Sejam α a medida do ângulo ACB e h a medida da altura do triângulo ABC relativa ao vértice A, como na figura:

A área S desse triângulo pode ser calculada por:

$$S = \frac{a.h}{2} = \frac{a.b.\text{sen}\alpha}{2}.$$

Observando que $h = b.\text{sen}\alpha$ independentemente de α ser agudo, reto ou obtuso, lembrando que para ângulos obtusos, o seno é equivalente ao seno de seu suplemento, ou seja, $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\alpha$.

Como $0 \leq \text{sen}\alpha \leq 1$ para $0 \leq \alpha \leq \pi$, concluímos que S assume maior valor possível quando $\text{sen}\alpha = 1$, ou seja, para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

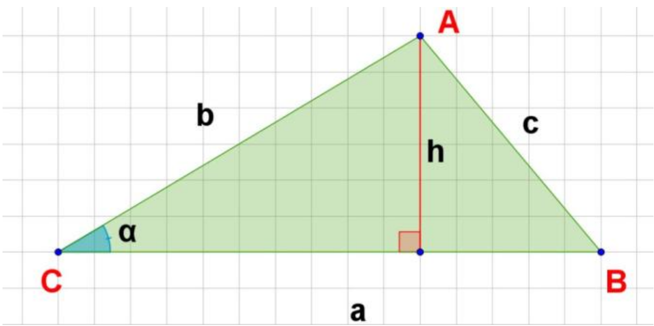

Figura 3.8: Área do triângulo em função do seno do ângulo α.

Proposição 3: Seja F_1 uma figura plana convexa cuja fronteira seja composta por uma curva C_1 plana, simples, aberta, de extremos A e B e de comprimento p, unida com o segmento $\overline{AB}$. Suponhamos que, nessas condições, F_1 tenha área máxima. Então F_1 é um semicírculo.

Demonstração:

Suponha que F_1 não seja um semicírculo. Então existe um ponto $C \in C_1$ tal que ABC não é um triângulo retângulo, uma vez que, se ABC fosse retângulo para todo $C \in C_1$, F_1 seria um semicírculo.

Como F_1 é convexa, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ estão contidos em F_1, isto é, o triângulo ABC está contido em F_1. Sejam F_2 e F_3 as figuras sobre $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, de tal modo que $F_1 = F_2 \cup \Delta ABC \cup F_3$.

Consideremos agora o triângulo $A'B'C'$, retângulo em C', de tal modo que $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$ e $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$. Pela Proposição 2, a área de $A'B'C'$ é maior do que a área de ABC. Vamos considerar agora a figura $F'_1 = F'_2 \cup \Delta A'B'C' \cup F_3$, denominando sua fronteira por $C_2 \cup \overline{A'B'}$. Assim, F_1 tem fronteira composta por uma curva C_2 plana, simples e aberta, de extremos A' e B' comprimento p, unida com o segmento $\overline{A'B'}$. No entanto, a área de F'_1 é maior do que a de F_1, contrariando a hipótese.

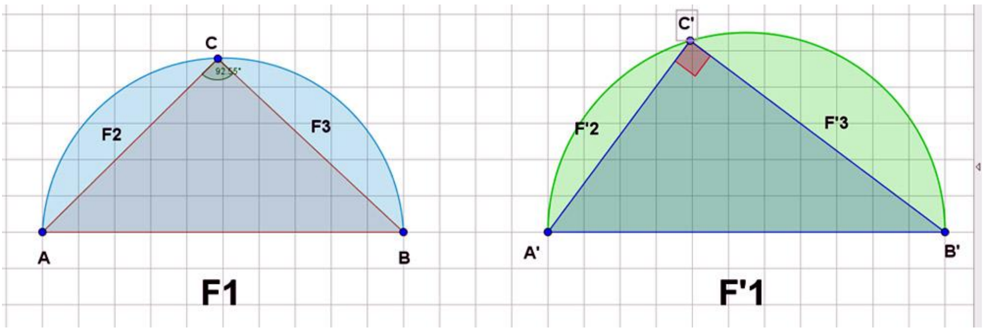

Figura 3.9: Comparação entre áreas limitadas.

Caso F'_1 não seja convexa, pelo Corolário 3., é possível tomar F''_1 convexa, com fronteira $C_3 \cup \overline{A'B'}$ e área maior do que a de F'_1, contrariando as condições da hipótese, que diz que F_1 tem área máxima. Concluímos que F_1 é um semicírculo.

3.4. O problema isoperimétrico para polígonos.

Pelo problema isoperimétrico de Dido, temos para polígonos as seguintes considerações:

Seja $2p = a + b + c$ o perímetro do triângulo e seja a sua área $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, aplicando a desigualdade das médias (aritmética e geométrica), temos:

$$M_A \geq M_G$$

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a).(p-b).(p-c)}$$

$$\frac{p^3}{27} \geq (p-a).(p-b).(p-c)$$

$$p^4 \geq 27.A^2 .$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b = c = \dfrac{2p}{3}$.

Considerando as proposições a seguir mostraremos que para um dado polígono não convexo existe um polígono regular com números de lados menor que ou igual, perímetro menor ou igual e área maior. E, além disso, tem-se que, dentre os polígonos regulares de mesmo perímetro, o de maior número de lados tem a maior área, e este, possui menor área que um círculo de comprimento igual ao seu perímetro**.**

Se A e B são dois pontos distintos fora de uma reta, então existe $p \in r$ tal que $d(A,P) + d(P,B)$ é mínima.

Dado um polígono não convexo P com n_1 lados, perímetro $2p_1$ e área A_1, é possível determinar um polígono convexo Q com n_2 lados, perímetro $2p_2$ e área A_2 de modo que $n_2 \leq n_1$, $2p_2 \leq 2p_1$ e $A_2 \geq A_1$.

Entre todos os polígonos convexos de n lados e de mesmo perímetro, o que tem maior área é o polígono regular.

Se $A(n)$ denota a área de um polígono regular de n lados e perímetro L, então tem-se que:

$$A(n) = \frac{L^2}{4n} . \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Dados dois polígonos regulares de mesmo perímetro L, aquele que tem maior área é o que tem um maior número de lados.

A área do círculo de raio r é maior que a área de qualquer polígono regular de perímetro $2\pi r$.

Toda curva fechada de comprimento L engloba uma área menor ou igual a $\frac{L^2}{4\pi}$. Além disso, este valor só é alcançado para o círculo de raio $\frac{L}{2\pi}$.

Seja f uma função de classe C^1, a qual possui derivada de 1ª ordem e é contínua, periódica de período 2π, e tal que

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$$

e a igualdade vale se, e somente se, existirem a e b tais que $f(t) = a.\cos t + b.\operatorname{sen} t$

Demonstração. Seja

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)\right)$$

a expansão de f em série de Fourier. Como f é uma função de classe C^1, então f ’ é uma função contínua. Daí,

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(n.b_n \cos(nt) - n.a_n \operatorname{sen}(nt)\right)$$

Agora calcularemos o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(t) dt$

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)\right) \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\, dt + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt) \right) dt$$

segue que,

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dt + \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt) \right) dt}_{0}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\, dt = \pi a_0$$

Por hipótese, $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0 \Rightarrow a_0 = 0$, logo

$$\int_0^{2\pi} dt = a_0$$

Daí, concluímos que $a_0 = 0$. Sendo assim a função f se reduz a:

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)\right)$$

$$\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (1)$$

$$\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (2)$$

Ajustando (1) e (2), temos que

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (1)$$

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 \left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (2)$$

Então,

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2\, dt \; - \; \int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \pi\, n^2 \left(n^2 - 1\right)\left(a_n^2 + b_n^2\right) \geq 0 \qquad \square$$

Utiliza-se na demonstração da desigualdade isoperimétrica $A \leq \dfrac{\ell^2}{4\pi}$.

CAPÍTULO 4.

Da lenda de Dido a uma atividade Extraclasse.

Mostraremos neste capítulo as aplicações mais comuns, quando tratamos de cálculo de área máxima de polígonos, em especial triângulos e quadriláteros. Desta vez, nossa proposta será voltada para o ensino básico, em particular, turmas de 2º ano do ensino médio. Casos clássicos serão modelados através de funções quadráticas. No entanto, mostraremos resultados de uma atividade extraclasse através de medições feitas pelos próprios alunos.

O problema isoperimétrico não é um assunto muito conhecido no ensino médio quando é apresentado desta forma, mas é frequentemente aplicado quando o professor resolve questões de geometria plana com intuito de maximizar a área de um polígono. Geralmente, alunos que se deparam com situações isoperimétricas, recorrem à aplicação da função quadrática, obtendo uma relação entre a área da figura em questão com o valor máximo de uma parábola.

É claro que podemos obter a maximização da área, sem necessariamente utilizar uma parábola e isso já foi mencionado neste trabalho. De acordo com autor Gilberto Geraldo Garbi, dentre todos os polígonos de mesmo perímetro e mesmo número de lados, o polígono regular é o de maior área e ainda, dentre todos os polígonos regulares de mesmo perímetro, quanto maior o número de lados, maior sua área.[7]

Uma situação prática do que estamos tratando, foi a solução que a princesa Dido apresentou e que é mencionado na página 20 deste trabalho. Com uma curva de comprimento fixo, a maior área é obtida através de um circulo, porém a princesa Dido, utilizou um “fio” unindo as tiras finas do couro de um touro e determinou, com

[7] GARBI,Gilberto Geraldo. C.Q.D: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.1ª Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010, p. 379.

astúcia, uma área, que aproveitasse a parte da praia, como se fosse o diâmetro de uma circunferência. Deste modo, não há necessidade de cercar com o fio a parte do mar, ou seja, a parte de terra voltada para o mar já está delimitada pela água que banha a praia, fazendo assim “sobrar” mais fio para determinar uma região maior.

Observe a diferença entre o círculo e semicírculo, de formado pelo fio de mesmo comprimento. O círculo possui área 31,82 e o semicírculo possui área igual a 63, 645, considerando apenas o contorno do arco e o segmento que representa o diâmetro não “cerca” a região interna.

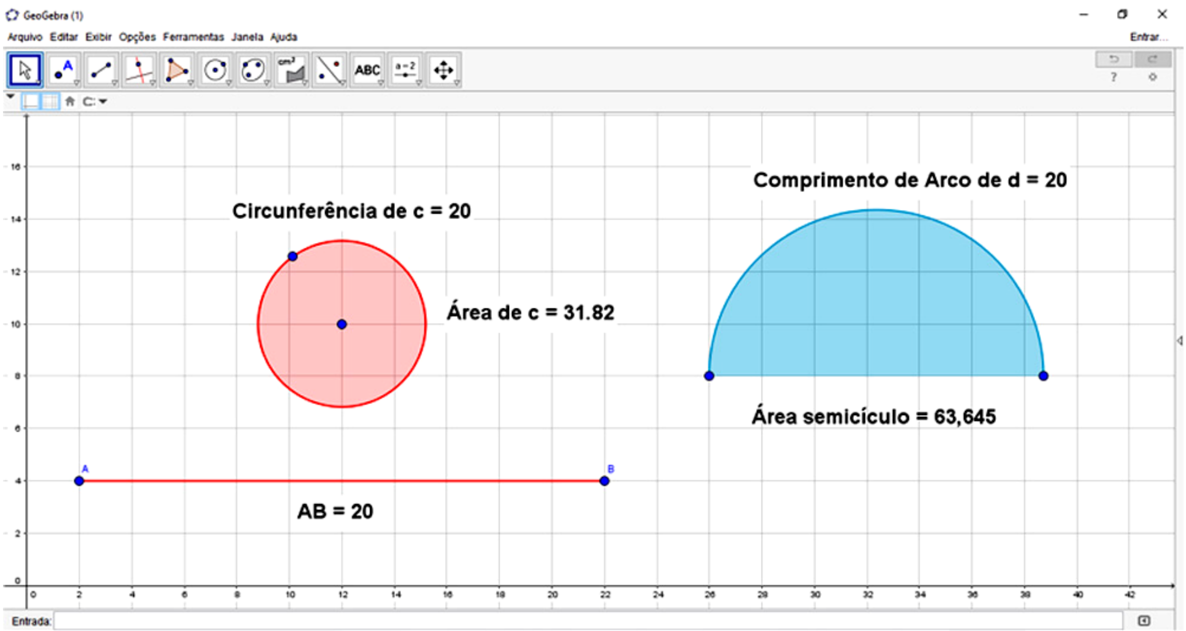

Figura 4.1: Resolução de Dido/ acervo pessoal.

Suponha que a princesa Dido, tivesse decidido demarcar uma região em formato retangular, fazendo algo semelhante (utilizar a praia como parte não cercada), mas com o objetivo de determinar a maior área. Se uma curva de perímetro fixo é utilizada para obter um retângulo, entre todos retângulos, aquele que possui a maior área será o regular, ou seja, o quadrado.

Deste modo, podemos fazer uma breve análise do problema isoperimétrico clássico. A princesa Dido, com um fio de comprimento c, deveria escolher primeiramente uma região em formato de quadrado de perímetro 2c, mas como ela teria disponível apenas um fio de comprimento c e a parte da praia banhada pelo mar não seria cercada, teria uma região retangular utilizando apenas o comprimento c, com três lados apenas cercados de dimensões c/2 e c/4.

Por outro lado, o quadrilátero poderia não ser necessariamente um retângulo e sim um trapézio. Poderíamos encontrar uma região maior, considerando uma parte não cercada, pois caso contrário, o quadrilátero de maior área e mesmo perímetro continua sendo o quadrado. Este trapézio poderia ser determinado pela metade de um hexágono regular.

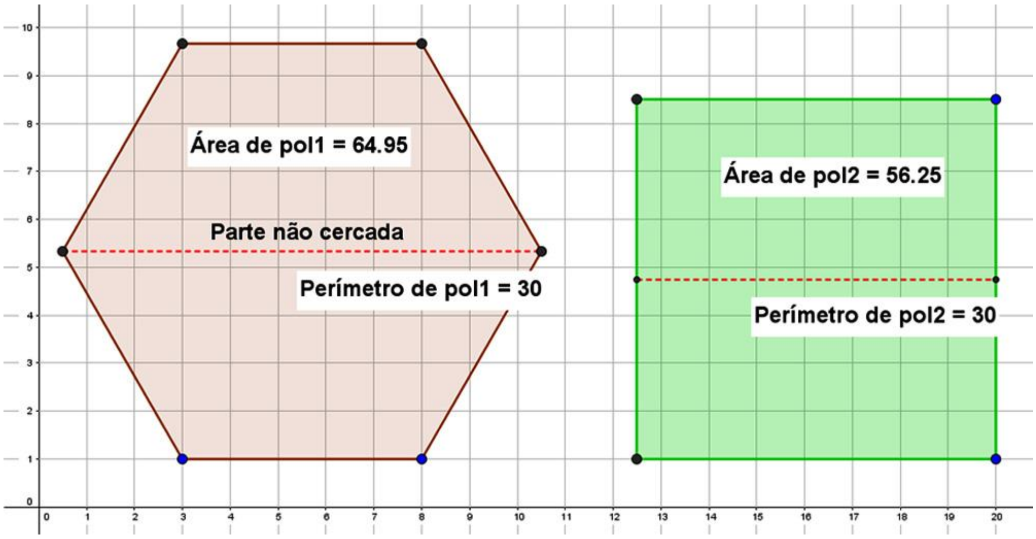

Figura 4.2: Quadriláteros com áreas diferentes/ acervo pessoal.

Observe que no polígono 1, a diagonal tracejada divide o hexágono regular em duas regiões de mesma área, formando assim dois trapézios isósceles, sendo cada trapézio com uma das partes não cercada, com perímetro igual a 30:2 = 15 e área igual 64,95:2 = 32,475. No polígono 2, o quadrado é divido pela linha tracejada, formando duas regiões retangulares, sendo cada retângulo possui uma parte não cercada, com perímetro igual 30:2 = 15 e área igual a 56,25:2 = 28,125.

Percebemos que, para o ensino da matemática, a história contribui de modo expressivo para justificar e melhorar a compreensão dos assuntos abordados em sala, principalmente com tópicos mais recorrentes como problemas isoperimétricos.

Segundo o matemático Ubiratan D’Ambrosio, um dos maiores erros que se pratica em educação matemática é desvincular a Matemática de outras atividades humanas, tratando-a como apenas uma disciplina. De acordo com D’Ambrosio, a história das civilizações possui alguma forma matemática, aparecendo em diversos sentidos, presente na evolução humana. Viver com a matemática é muito mais que uma simples aula escolar e ajuda nas decisões para lidar com o ambiente natural, criando estratégias para este fim e proporciona soluções, que muitas das vezes, se resumem a um currículo.

> [...] nunca você diria uma fronteira geográfica para a história, mas nessa transição do suporte para o mundo é que se instala a história, é que começa a se instalar a cultura, a linguagem, a invenção da linguagem, o pensamento que não apenas se atenta no objeto que está sendo pensado, mas que já se enriquece da possibilidade de comunicar e comunicar-se. [8]

Na ilustração da figura 4.3, o leitor pode perceber que um quadrado de perímetro sendo o dobro do perímetro fixo dado, possui maior área e a “metade” dele, determina uma região retangular cercada com o perímetro dado.

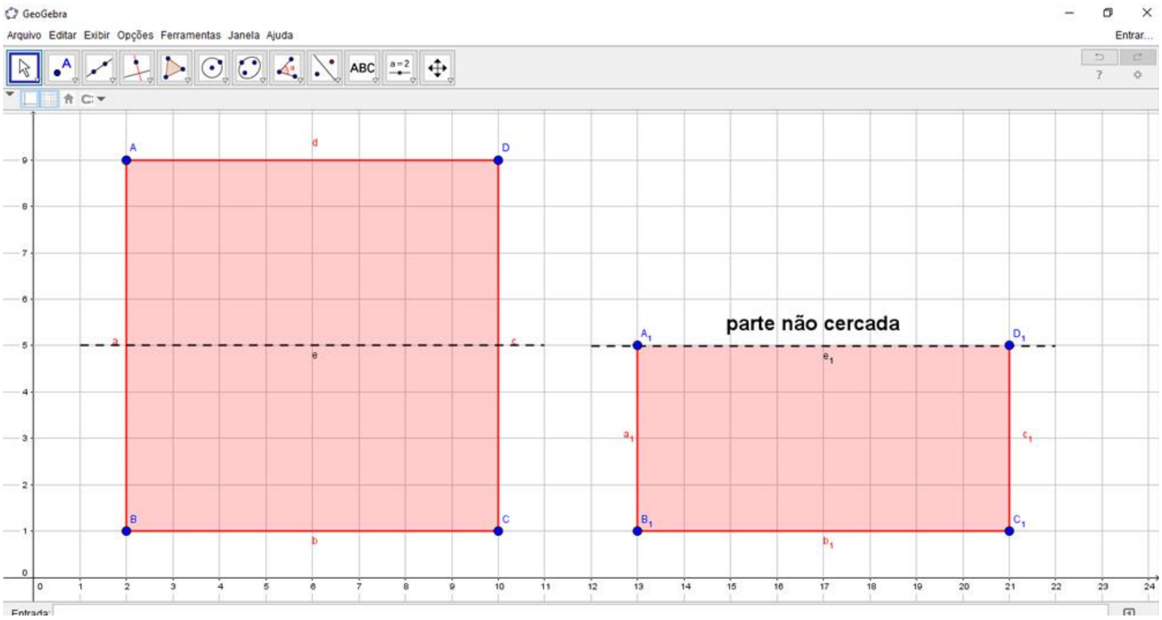

Figura 4.3: Retângulo de área máxima/ acervo pessoal.

Em vários livros didáticos, provas de concurso e exames de acesso como Profmat, nos deparamos com questões de maximização da área.

Vamos apresentar dois exemplos que a função quadrática é utilizada como recurso para obtenção área máxima.

Exemplo 1:

---

[8]D’AMBROSIO, Ubiratan. A História da Matemática: Questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. Disponível em: http://cattai.mat.br/site/files/ensino/uneb/pfreire/docs/HistoriaDaMatematica/Ubiratan_DAmbrosio_doisTextos.pdf. Acesso: 25 de jan. de 2016.

Questão de acesso a UPE (Universidade de Pernambuco), processo seletivo de 2014.

Num terreno, na forma de triângulo retângulo, com catetos de medidas 60 metros e 80 metros, Sr. Pedro construiu uma casa retangular com a maior área possível, como na figura a seguir:

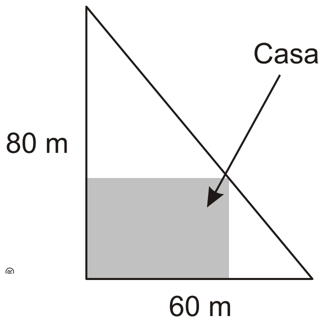

Figura 4.4: Upe.

Qual é a medida da área do terreno destinado à construção da casa em metros quadrados?

Este problema é comumente resolvido, utilizando semelhança entre triângulos e função quadrática.

Considere a figura, em que $\overline{AC} = 80\text{ m}$ e $\overline{AB} = 60\text{ m}$.

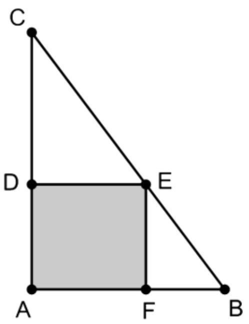

Figura 4.5: Aplicando a semelhança de triângulos/ acervo pessoal.

Tomando $\overline{AD} = y$ e $\overline{AF} = x$, da semelhança dos triângulos ABC e DEC, obtemos

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{80-y}{80} = \frac{x}{60}$$
$$\Leftrightarrow y = 80 - \frac{4x}{3}.$$

Logo, a medida da área do terreno destinado à construção da casa é dada por.

$$
\begin{aligned}
(A_{ADEF}) &= \overline{AF}\cdot\overline{AD} \\
&= x\cdot\left(80-\frac{4x}{3}\right) \\
&= -\frac{4}{3}\cdot(x^2-60x) \\
&= -\frac{4}{3}[(x-30)^2-900] \\
&= 1200-\frac{4}{3}(x-30)^2.
\end{aligned}
$$

Como o objetivo do problema é determinar a área máxima e $(x-30)^2 \geq 0$, logo, a área do retângulo (A_{ADEF}) será máxima, quando $(x-30)^2 = 0$.

Portanto, a área máxima é igual a $1200\,m^2$, quando $x = 30\,m$.

Observe o esboço do gráfico, fora da escala. O comportamento de uma parábola, da área em função da medida x.

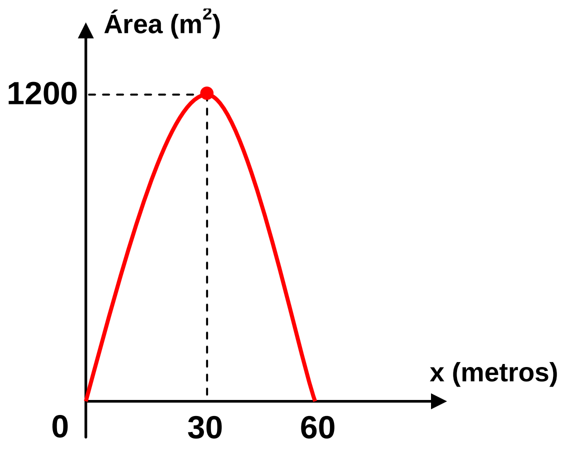

Figura 4.6: Parábola do exemplo 1 / acervo pessoal.

Exemplo 2:

"O problema do galinheiro"

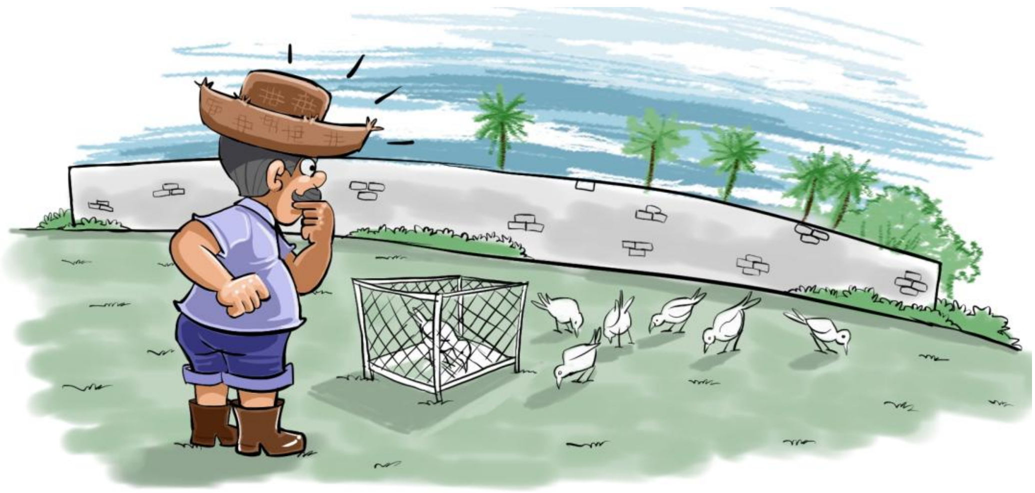

Figura 4.7: Acervo pessoal, produzido por Luiz Oliveira.

Em uma fazenda, um trabalhador deve construir um galinheiro de forma retangular. Dispondo apenas de 80 metros de tela, o homem decide aproveitar um velho muro como uma das laterais do galinheiro (conforma a figura). Qual será a área máxima desse cercado, sabendo que o muro tem extensão suficiente para ser lateral de qualquer galinheiro construído com essa tela?

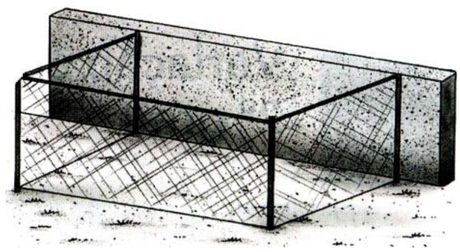

Figura 4.8: Acervo pessoal.

O objetivo é determinar a área do galinheiro. Podemos observar que nesta situação, o muro “ajuda” a cercar o galinheiro, fazendo que seja desnecessário cercar uma das partes do retângulo. Podemos construir vários retângulos com esta tela, objetivando a área máxima. Chamramemos de x e y as medidas do retângulo, considerando y como medida do maior lado e x a medida do menor.

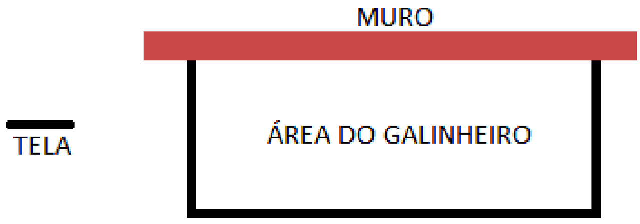

Figura 4.9: Acervo pessoal. [9]

$$x + y + x = 80 \text{ m}$$
$$y = 80 - 2x$$

$$\text{Área} = y.x = (80 - 2x).x$$

Utilizando a forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$, segue que:

$$\text{Área} = y.x = (80 - 2x).x$$
$$\text{Área} = -2(x - 40).(x - 0)$$

Esboçando o gráfico da área em função da medida x, temos:

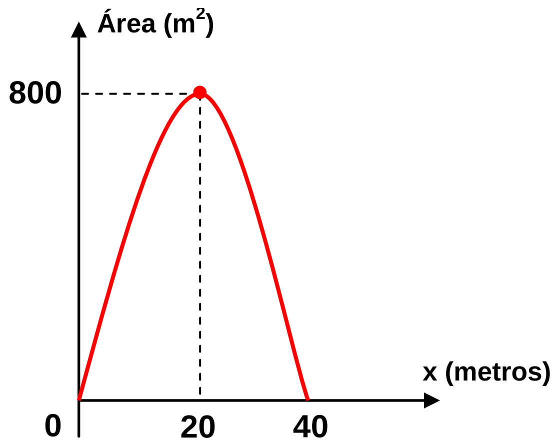

Figura 4.10: Parábola do exemplo 2/ Acervo pessoal.

Assim, a área máxima é igual a 800 m^2, para x = 20.

9 Disponível em: http://edumatecno.blogspot.com.br/2013/04/desenvolvendo-uma-atividade-de.html. Acesso: 30 de jan. de 2016.

Note que nesta situação, bastava pensar em um retângulo cuja medida de um lado fosse o dobro da medida do outro, pois desta maneira, seria a metade de um quadrilátero regular (quadrado).

No Brasil, muitos profissionais da educação tem dificuldade de executar experiências extraclasse acerca do que é ministrado em sala de aula por inúmeras situações, entre as mais comuns, falta de estrutura ou recursos didáticos que beneficiem as atividades. Embora uma escola possa oferecer condições suficientes para o desempenho destas experiências, algumas vezes o trabalho que o corpo docente irá enfrentar torna-se um motivo para que tal atividade seja deixada de lado. E com isso, o aprendizado que poderia ganhar força e melhorar o desempenho, despertando o entusiasmo e curiosidade, fica prejudicado. Sair de sala de aula, complementar o ensino teórico com novos métodos ou até mesmo, utilizar fatos antigos da própria história das ciências para inovar em apresentações e melhorar o argumento, nem sempre é fácil.

Pode até ser compreensível o fato de um professor utilizar métodos que vem dando certo e não querer arriscar em outras atividades. Esta realidade não é nenhuma novidade! É fato notório, no entanto, que a trajetória na educação no Brasil está sofrendo uma revolução na aquisição de informações, principalmente com o auxílio do mundo digital, que é uma realidade global.

No caso do ensino da matemática, que é colocado em foco, isso se agrava. Dificilmente uma escola possui um local como “laboratório de matemática” ou até mesmo de informática (que já ajudaria bastante). Este fato contribui para que os professores improvisem com materiais alternativos, que na maioria das vezes, prejudica o aprendizado.

Nós, Adolfo Macedo e Jacob Jonhison, decidimos fazer uma experiência, utilizando poucos recursos didáticos e sem o auxilio da internet. Naquele momento, queríamos verificar se uma turma ficaria interessada em participar de uma experiência de Geometria Plana com o objetivo de concluir as melhores soluções isoperimétricas, sendo que a turma teria apenas aulas de cálculo de área e uma introdução histórica da Lenda de Dido, sem fornecer a solução encontrada pela princesa Dido, ou seja, os alunos ficariam em uma situação semelhante a que ocorreu com a personagem da lenda.

A princípio o que sugerimos aos alunos era um desafio que deveriam resolver, utilizando poucos recursos didáticos. Mas nosso objetivo principal era observar o comportamento diante a atividade, pois se eles conseguissem resultados próximos da solução correta, seriam respostas de seus pontos de vista. Isto seria muito útil, pois o conhecimento adquirido dificilmente seria esquecido e quem sabe, serviria como um incentivo para investigar outras situações. De acordo com a autora Isabel Sanches, a investigação proporciona melhor aprendizado e isso é ampliado à medida que teorias são colocadas em prática.

> A investigação, tradicionalmente, é categorizada em dois tipos:
> - fundamental - visa aumentar o nosso conhecimento geral;
> - aplicada - visa produzir "resultados que possam ser diretamente utilizados na tomada de decisões práticas ou na melhoria de programas e sua implementação" (Schein, 1987, citado por Bogdan e Biklen, 1994:264).
> As duas modalidades são utilizadas no campo educativo, podendo uma complementar a outra, com o objetivo final de melhorar a vida das pessoas, através das mudanças a realizar.
> Uma das modalidades da investigação aplicada é a investigação-ação, cujo objetivo é promover a mudança social, enfocada, aqui, no campo educativo.[10]

Os alunos que participaram desta experiência são do ensino médio de uma escola Pública localizada no município de Ananindeua – Pará. Realizada em fevereiro de 2016, envolveu uma turma de 2º ano. A tarefa, aparentemente era simples e foi dividida em três atividades.

No conteúdo programático da escola, geometria plana faz parte da grade de assuntos da 2ª série do ensino médio a serem ministrados durante o ano. Sendo assim, vimos naquela ocasião uma boa oportunidade de colocar em prática o problema isoperimétrico clássico de Dido. Entretanto, os alunos só teriam aula de cálculo de áreas de figuras planas mais comuns, como: triângulo, retângulo, pentágono, hexágono, círculo, ou seja, trabalhamos a parte teórica em sala, sem mencionar em nenhum momento a lenda de Dido e sua bela solução. Pode parecer complicado esperar que o aluno, em fase de aprendizado, obtenha resultados de Dido, mas sabemos que com base teórica, aumenta o poder de encontrar respostas para os problemas inseridos na sociedade.

4.1 Da atividade.

---

[10] SANCHES, Isabel, *Da investigação-ação è educação inclusiva.* Revista Lusófona de Educação, 2005, p. 127.

4.1.1. Objetivos gerais.

Desenvolver nos alunos, em sala de aula ou no ambiente extraclasse, a capacidade de compreender a geometria plana fornecendo ferramentas e subsídios para que possam aumentar sua motivação no estudo e na aplicação desta e em particular em problemas isoperimétricos utilizando para isso experiências práticas.

4.1.2. Objetivos específicos.

Após o término da atividade o aluno deverá compreender o conceito de polígono e seu contorno (perímetro);

Identificar os diversos polígonos ou figuras planas em geral, determinar a maximização de áreas do triângulo, quadrilátero e após algumas considerações sobre o aumento do número de lados para mesmo perímetro, concluir que a figura plana de maior área tendo comprimento determinado para seu perímetro é o círculo.

4.1.3. Da metodologia.

Será ministrado inicialmente aos alunos aulas de perímetros e áreas das principais figuras planas para sedimentar esses conceitos, pois é pré-requisito para o assunto de problemas isoperimétricos, deixando bem claro ao leitor que em nenhum momento, é comentado a lenda de Dido e sua famosa solução, nem tão pouco é dada alguma referência sobre maximização de áreas, com intuito de não facilitar na resolução dos alunos e sim, deixá-los pensar no problema e procurar solucionar de forma “semelhante” a situação que Dido teve que enfrentar com a negociação com Rei Jarbas, como já foi mencionado anteriormente.

O professor fará uma “explanação” sobre o uso do material (corda de nylon e trenas) e logo após será proposto aos alunos que utilizem esses materiais para medições e os cálculos das áreas dos polígonos propostos pelo professor para se trabalhar os problemas isoperimétricos, com no máximo três tentativas para o mesmo propósito.

4.1.4. Da origem da cidade de Cartago a um trabalho de ensino médio.

A atividade foi colocada em prática na escola estadual de ensino fundamental e médio do Instituto Bom Pastor, na sala de artes com a turma 2º A, série 2°ano do turno da tarde às 15 horas, em 11 de fevereiro de 2016 durando duas horas com objetivo de verificar a aplicação de problemas isoperimétricos no ensino básico.

MATERIAL UTILIZADO	***CARACTERÍSTICAS***
Trenas (mesmo modelo)	Trenas de 9 m
Cordas de nylon	Cordas de 9 m (muito utilizada em varais para roupas)
Papel	Blocos de papel A4
Calculadoras	Duas calculadoras, com padrão não científico.
Caneta, lápis e borracha.	-------

Tabela 4.1: Materiais e características/Acervo pessoal.

4.2. Etapas da atividade.

4.2.1. Primeira etapa: Divisão dos grupos.

Critérios para formação dos grupos foi através de sorteio;

Orientamos os alunos a forma do sorteio que deveriam envolver todos da sala, sem discriminação. Eles realizaram o sorteio e como os grupos divididos, escolheram os respectivos nomes, pois assim se denominaram: O primeiro grupo contou com 13 alunos e foi denominado *“Sem Embaçamento”* e o segundo grupo com 12 alunos denominado *“Baile de Favela”*. Esclarecemos que os próprios alunos que autodominaram desta forma. Nosso papel naquele momento era fiscalizar o trabalho e orientar, sem interferir em suas conclusões. A princípio, foi complicado, pois o comportamento de alguns alunos, de forma desorganizada, atrasou um pouco o desenvolvimento da atividade, mas logo compreenderam o que realmente deveriam fazer e os dois grupos ficaram mais concentrados.

4.2.2. Segunda etapa: Apresentação da atividade para os alunos.

Nesta etapa, apresentamos a proposta da atividade aos grupos, após eles terem formados. Foi interessante, pois ninguém sabia até então o que estava por vir. Os dois grupos ouviram, com atenção a proposta do trabalho, que resumidamente para eles, seria o problema propriamente dito, porém a nosso ver, era mais que um problema e sim uma experiência de verificação do comportamento diante uma situação matemática, sem nosso envolvimento direto.

Atividades	***Descrição da atividade.***
1ª atividade	Encontrar o triângulo de maior área fixando uma base (6m) e o comprimento da corda em 9m para obter os outros dois lados
2ª atividade	Encontrar o quadrilátero de maior área fixando uma base (6m) e o comprimento da corda em 9m para obter os outros três lados
3ª atividade	Através dos itens (A) e (B), estimulados pelo professor a pensar em figuras planas com maior número de lados, qual a figura teria maior área com mesmo perímetro de 9 m?

Tabela 4.2: Etapas das atividades/ Acervo pessoal.

Após a apresentação das atividades, alguns alunos questionaram a respeito, esperando que a atividade fosse dada de forma tradicional através de questões, comandos para serem interpretados. Mas logo perceberam que a atividade seria realizada com a produção deles, criando estratégias, com os conhecimentos adquiridos previamente. Neste contexto, a atividade não tinha iniciado, mas despertou interesses em outros alunos para determinar os resultados.

Observamos que os alunos, ambos os grupos, se mobilizaram de modo a fazerem uma breve reunião que durou em torno de um minuto e daí começou as medições. Foi proibido o uso do celular ou qualquer meio de acesso a internet. Entretanto, puderam usar calculadoras convencionais não científicas.

4.2.3. Terceira etapa: Execução da atividade pelos alunos.

Primeiro grupo: Sem Embaçamento.

Na 1ª Atividade

Fez as medições pedidas para estabelecimento da base e do comprimento do fio para construção dos triângulos;

Obtiveram medidas para três triângulos;

O primeiro triângulo obtido foi retângulo com altura medindo 3,96 m;

Fizeram o cálculo da área e obtiveram 11,38 m²;

O segundo triângulo foi obtusângulo cuja altura medindo 1,64 m;

Fizeram cálculo da área e obtiveram 3,28 m²;

O terceiro triângulo foi isósceles cuja altura mediu 4,05 m, o qual eles consideraram que é o triângulo que possui a maior área, conforme as condições dadas.

No terceiro triângulo, os alunos concluíram que a maior altura seria formada passando pelo ponto médio da base. Assim alguns alunos comentaram:

- Professor, com o triângulo com altura mais para "esquerda" tem área maior que o triângulo com altura mais para "direita", então se gente conseguir a altura que passa pelo meio da base, será a maior altura possível!

Em outras palavras, usaram sem perceber, o conceito de simetria que justifica o objetivo de maximização da área. O interessante, que após está conclusão, acharam desnecessário calcular a área, alegando que seria o triângulo que determinaria a maior área, que no caso é o triângulo isósceles.

Na 2ª Atividade

Obtiveram dois quadriláteros, sendo que um deles era o trapézio retângulo de altura 2,30 m, base menor de 1,30m e base maior de 6 m, e o lado oblíquo 5,20 m, cuja área calculada pelo grupo de 10,35 m². E o segundo quadrilátero de base 6 m e altura aproximada 2,3 m.

Após as medições, um aluno do grupo disse que ideia era a mesma da 1ª atividade, só que agora era um trapézio. Pela fala do aluno:

- É só desenhar os lados inclinados "certinho"!

Na 3ª Atividade

Consideraram a figura plana que tem maior área, com mesmo perímetro, é o hexágono regular.

Segundo grupo: Baile de Favela

Na 1ª Atividade

O segundo grupo fez as medições pedidas para estabelecimento da base e do comprimento do fio para construção dos triângulos

Obtiveram medidas para três triângulos;

O primeiro triângulo obtido teve altura medindo 3,90m

Fizeram o cálculo da área e obtiveram 7,8m².

O segundo triângulo, escaleno de lados 3,5 m; 5,5 m e 4 m cuja área calculada foi de 7,0 m².

Fizeram cálculo da área e obtiveram 6,56 m²

O terceiro triângulo, cuja altura é a maior, de aproximadamente 3,4 m, isósceles de lados congruentes, medindo 4,5 m, cuja área calculada foi de aproximadamente 10,2 m², o qual eles consideraram que é o triângulo que possui a maior área, pois possui a maior altura conforme as condições dadas.

Assim alguns alunos comentaram:

- Professor, basta ter um triângulo de dois lados iguais... qual é mesmo o nome?

Nós respondemos que seria o isósceles. Porém, a resposta foi dada ao final das atividades.

Na 2ª Atividade

Obtiveram inicialmente um trapézio retângulo cuja altura 2,30 m; base menor 1,5 m e base maior 6,0 m cuja área calculada foi de 10,35 m^2.

O segundo quadrilátero foi retângulo cuja base de 6,0 m; largura 1,5 m e área de 9,0 m^2.

O terceiro quadrilátero foi um trapézio isósceles, com lados iguais a 3,0 m cuja área calculada foi de 11,38 m^2, o qual foi concluído que a figura de maior área possível.

Na 3ª Atividade

O grupo considerou que a figura plana de maior área, conforme as condições dadas é a do quadrado.

4.2.4. Quarta etapa: Consulta sobre nível de dificuldade para os grupos:

Para o grupo Sem Embaçamento.

Na 1ª Atividade

Dez alunos optaram por baixa dificuldade, Três alunos optaram por média dificuldade e nenhum aluno optou por alta dificuldade.

Na 2ª Atividade

5 alunos optaram por média dificuldade, 8 alunos optaram por alta dificuldade e nenhum aluno optou por baixa dificuldade.

Na 3ª Atividade

Seis alunos optaram por alta dificuldade, sete alunos optaram por média dificuldade e nenhum por baixa dificuldade.

Para grupo Baile de Favela

Na 1ª Atividade

Oito alunos optaram por baixa dificuldade, quatro alunos optaram por média dificuldade e nenhum aluno optou por alta dificuldade.

Na 2ª Atividade

Dois alunos optaram por média dificuldade, dez alunos optaram por alta dificuldade e nenhum aluno optou por baixa dificuldade.

Na 3ª Atividade

Quatro alunos optaram por alta dificuldade, oito alunos optaram por média dificuldade e nenhum por baixa dificuldade.

4.2.5. Quinta etapa: Representação gráfica sobre os níveis de dificuldades, do ponto de vista dos alunos.

Para o grupo Sem Embaçamento.

Na 1ª Atividade

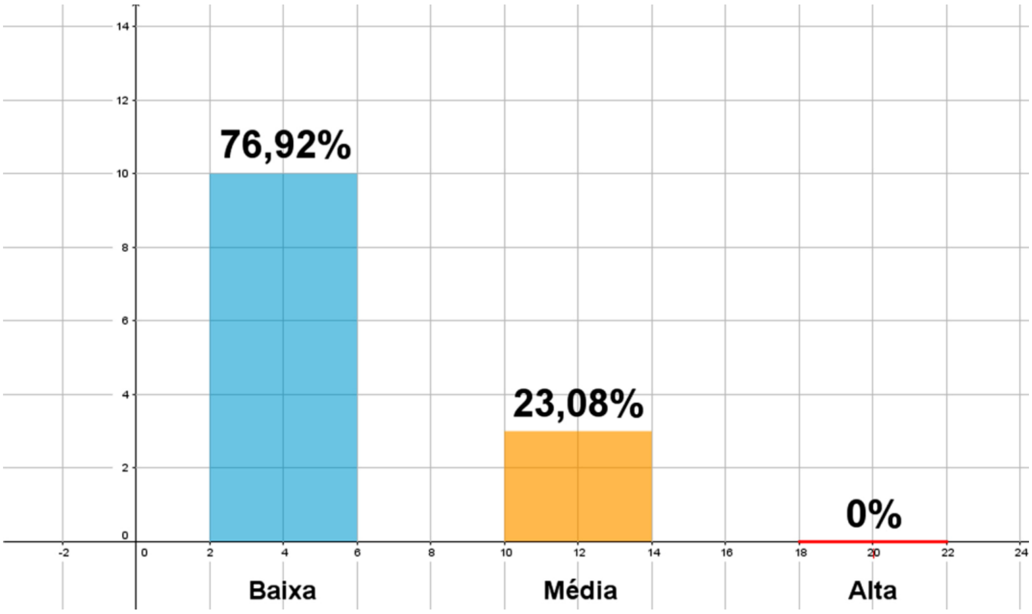

Gráfico 4.1: 1ª Atividade grupo Sem Embaçamento/ Acervo pessoal.

Na 2ª Atividade

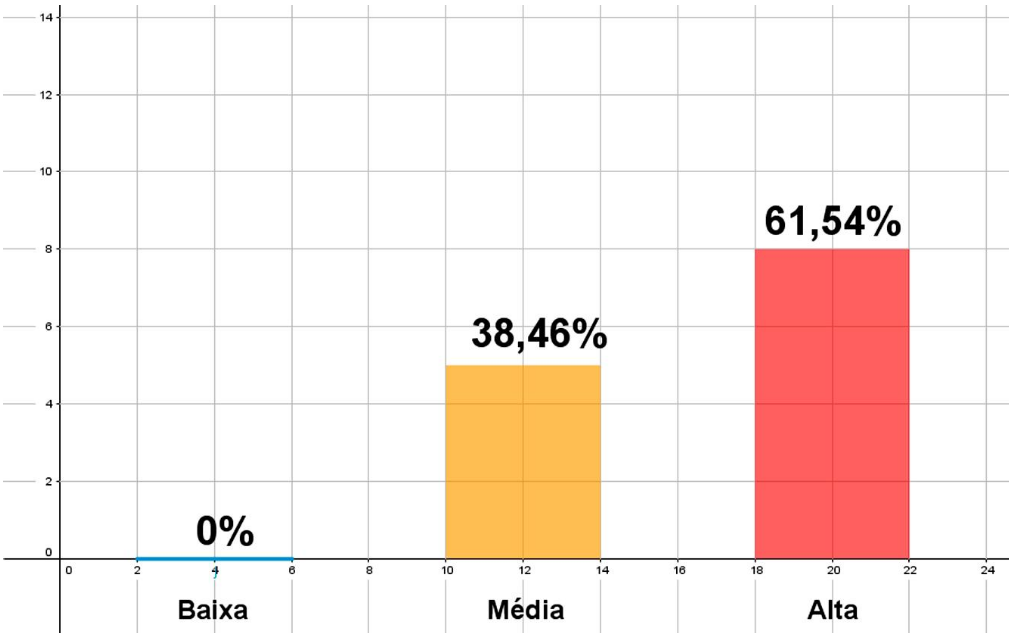

Gráfico 4.2: 2ª Atividade grupo Sem Embaçamento/ Acervo pessoal.

Na 3ª Atividade

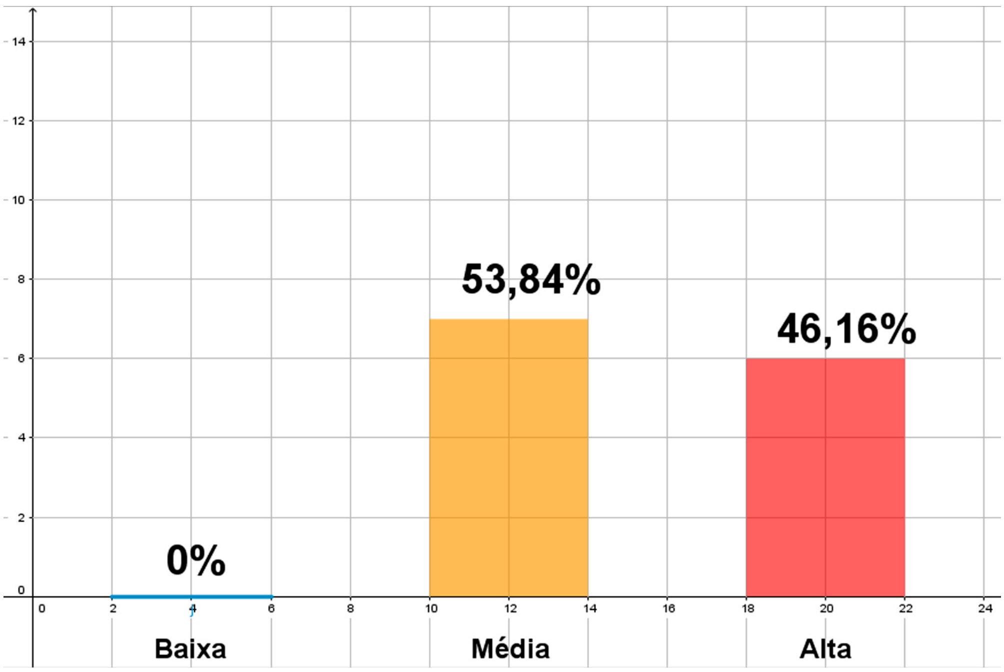

Gráfico 4.3: 3ª Atividade grupo Sem Embaçamento/ Acervo pessoal.

Para o grupo Baile de Favela.

Na 1ª Atividade

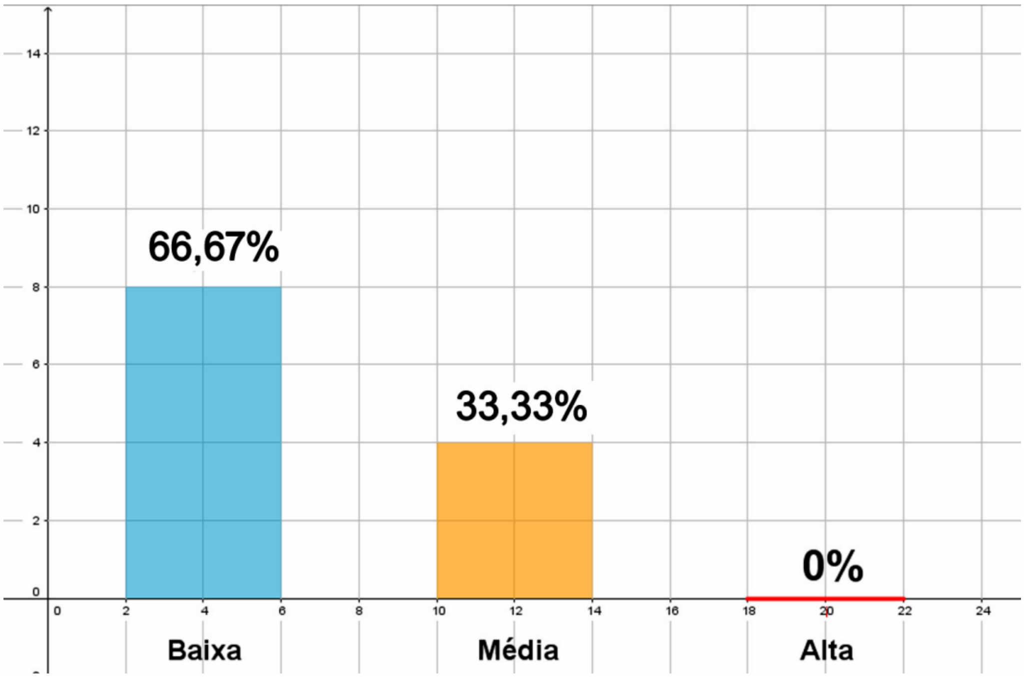

Gráfico 4.4: 1ª Atividade grupo Baile de Favela/ Acervo pessoal.

Na 2ª Atividade

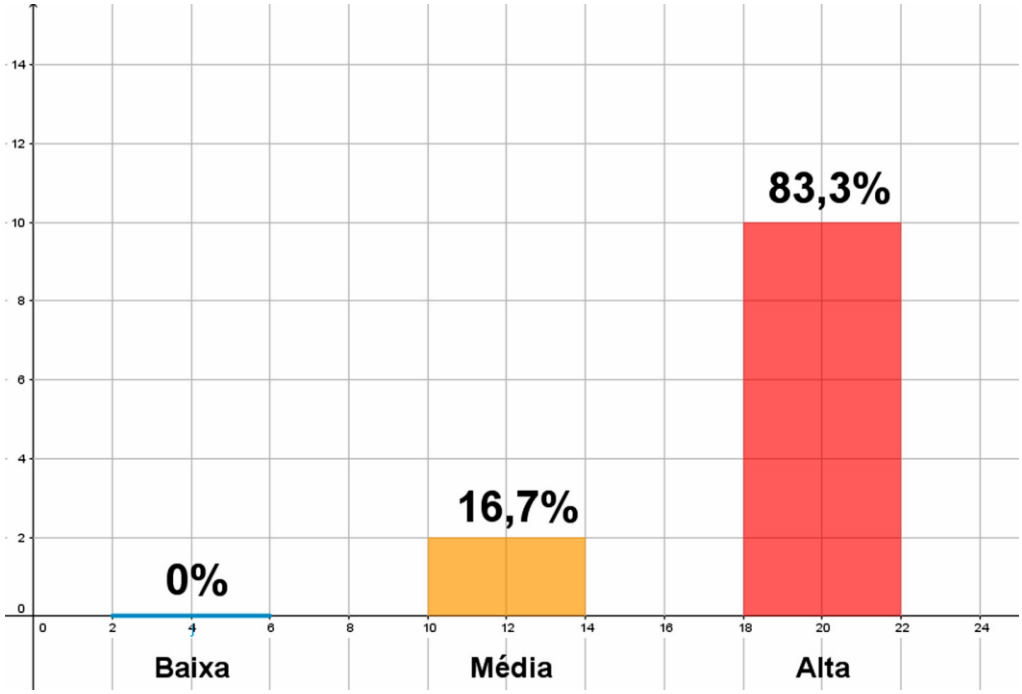

Gráfico 4.5: 2ª Atividade grupo Baile de Favela/ Acervo pessoal.

Na 3ª Atividade

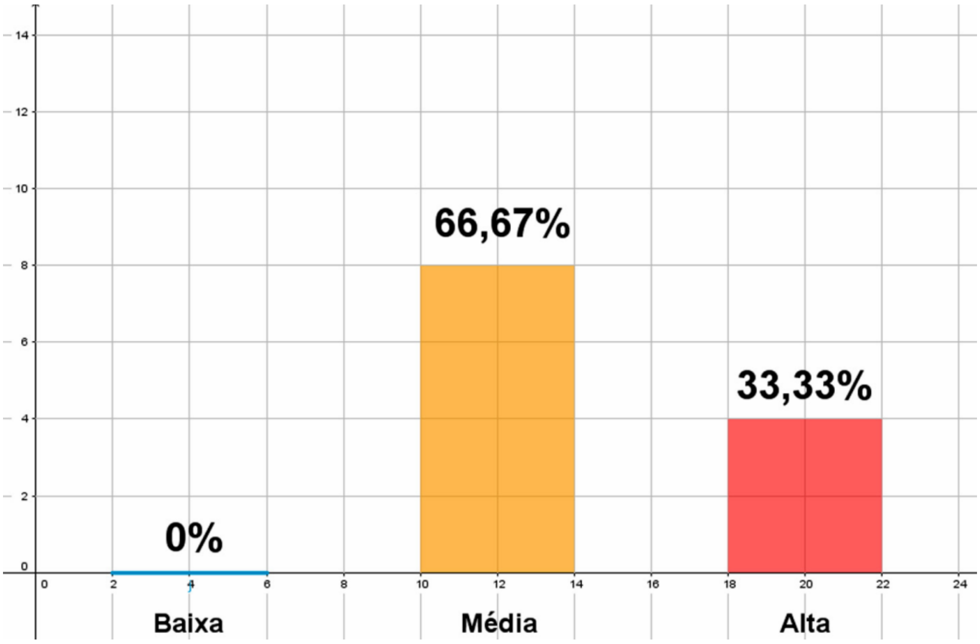

Gráfico 4.6: 3ª Atividade grupo Baile de Favela/ Acervo pessoal.

Pelos resultados obtidos nas etapas da atividade, percebemos maior interesse na execução realizada pelos alunos, constatando que, os mesmos, acharam resultados satisfatórios através das investigações das medidas e as mudanças entres cada medição. Percebemos também a principal dificuldade deu-se pela falta de prática em manusear o material utilizado. Concluímos que, através da atividade, torno-se possível trabalhar com noções de geometria plana, em especial, problemas isoperimétricos, sem que os alunos conhecessem o resultado que a princesa Dido encontrou. Notamos que a atividade extraclasse complementa de forma positiva o embasamento teórico feito em sala de aula.

CONCLUSÃO.

O problema isoperimétrico não é muito popular tanto no ensino básico quanto no acadêmico. Porém, este trabalho mostrou sua grande importância e utilidade para o professor e para o aluno.

No modelo tradicional, em especial para geometria euclidiana, a maximização de área é geralmente resolvida com o uso da função quadrática. Este modelo, no entanto, consome mais tempo de resolução, por efetuar mais cálculos.

Este estudo comprovou algumas vantagens do uso do modelo que apresentei: aquele baseado nos aspectos da história da geometria euclidiana clássica. Ele ofereceu uma alternativa de obter resultados sem necessitar resoluções impregnadas de cálculos, que tornam abstratas e inacessíveis a visualização do problema como um todo. Observei que, através da solução do problema de Dido, torna-se simples o entendimento de maximização de áreas.

Fatos históricos como este, deveriam ser mais explorados nas escolas brasileiras. Uma forma de colocar em prática este modelo seria valorizar a história da matemática em livros didáticos e não apenas em paradidáticos.

Outra forma de colaborar para este empreendimento seria realizar novos trabalhos como este. A possibilidade existe, afinal de contas, este estudo não esgotou o tema.

REFERÊNCIAS.

MARO, Públio Virgílio. Eneida. São Paulo: Editora Jackson, 1960.

FIGUEIREDO, D. G de - Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana. Artigo/Matemática Universitária. Sociedade Brasileira de Matemática, No 9/10, Dezembro de 1989.

MADEIRA, Telma Morais. O Problema Isoperimétrico Clássico. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2005.

CARMO, M. P.: Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Sociedade Brasileira de Matemática; Rio de Janeiro, 2005.

Djairo Guedes de, Análise de Fourier e equações diferenciais parciais/Djairo Guedes de Figueiredo.4 ed.Rio de Janeiro:IMPA, 2009.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz, Um curso de cálculo, vol.1, LTC – livros Técnicos e Científicos, Ed. S.A, 2001.

MOREIRA, C, G, T de A e Saldanha, N, C - A Desigualdade Isoperimétrica. Matemática Universitária No 15, Dezembro de 1993.

SANTOS, W e Alencar, H - Geometria Diferencial das Curvas Planas.
24º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2003.

SANCHES, Isabel, Compreender, Agir, Mudar, Incluir. Da investigação-ação è educação inclusiva

BRITO, Dirceu dos Santos, Modelagem Matemática na Socioeducação, Secretaria de Educação do Estado do Paraná, SEED, Londrina, PR, Brasil

A lenda de Dido Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=SSaOcnmYt6I

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1067