



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL**

**DIEGO CUNHA NERY**

**CONJUNTOS CONVEXOS E SUAS APLICAÇÕES NO  
ENSINO MÉDIO**

**FORTALEZA  
2013**



**DIEGO CUNHA NERY**

**CONJUNTOS CONVEXOS E SUAS APLICAÇÕES NO  
ENSINO MÉDIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:  
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA  
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

N369c Nery, Diego Cunha  
Conjuntos convexos e suas aplicações no ensino médio - 2013.  
37 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação(mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em  
Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Conjuntos convexos. 2. Álgebra linear. I. Título.

CDD 516.08

---

DIEGO CUNHA NERY

CONJUNTOS CONVEXOS E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 23/03/2013

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

*Dedico à minha avó Braulia Costa Flores.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me guiar nessa longa jornada da vida.

Agradeço aos meus pais, Antônio Ribeiro Nery e Maria Aparecida da Cunha Nery por todo apoio que me deram durante minha vida.

Agradeço ao meu irmão Raimundo Antônio Cunha Nery e às minhas irmãs Eridan Cunha Nery e Dalila Cunha Nery por sempre acreditarem em mim.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para que eu chegasse onde eu cheguei.

Agradeço ao meu orientador Marcelo Melo, pelo excelente trabalho de orientação que proporcionou a realização dessa dissertação de mestrado.

Agradeço aos professores Marcos Melo, Afonso, Robério, Othon, Fábio e Cleon por conta do excelente trabalho durante esses dois anos de PROFMAT.

Agradeço aos 29 colegas do PROFMAT, em especial para os amigos Franzé, Fernando, Ricardo, Thiago, Diego, Eduvânio e Rafael pelo companheirismo nesses dois anos de mestrado.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“O temor do Senhor é o princípio do conhecimento; mas os insensatos desprezam a sabedoria e a instrução.”

Provérbios 1:7



# RESUMO

Neste trabalho, consideramos o conceito de segmento de reta como uma introdução ao conceito de conjunto convexo e suas aplicações no  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , conceito esse reforçado com a prova do baricentro do triângulo. Calculamos a relação de posição entre um ponto e um segmento de reta. Definimos o conceito de cone e mostramos os diferentes tipos de cone com alguns exemplos. Definimos a envoltória convexa no plano e no espaço podendo assim estabelecer a relação entre um ponto e um triângulo e a relação entre um ponto e um tetraedro. Apresentamos o conceito de hiperplano e finalizamos relacionando a convexidade com a simetria.

# ABSTRACT

In this paper, we consider the concept of line segment as an introduction to the concept of convex set and its applications, this concept reinforced by the evidence of centroid of the triangle. We calculate the relative position between a point and a line segment. We define the cone concept and show the different types of cone with some examples. We define the convex envelope in the plane and in space can then establish the relationship between a point and a triangle and the relationship between a point and a tetrahedron. Introducing the concept of hyperplane and finished relating the convexity with symmetry.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Conjuntos Convexos</b>	<b>11</b>
1.1 Segmento de reta . . . . .	11
1.2 A convexidade no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ . . . . .	13
1.3 Cone . . . . .	16
<b>2 Envoltória Convexa</b>	<b>19</b>
2.1 Combinação Convexa . . . . .	19
2.2 A envoltória convexa no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	21
2.3 A envoltória convexa no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	23
<b>3 Sistemas Lineares</b>	<b>27</b>
3.1 Hiperplano . . . . .	27
<b>4 Simetria e convexidade</b>	<b>31</b>



# INTRODUÇÃO

A introdução de conceitos de Álgebra Linear e Geometria Analítica no ensino médio tem sido pouco aproveitada, tendo-se em vista que é uma área muito rica e que, se usada da maneira correta, é uma excelente ferramenta para o aluno compreender melhor determinados assuntos de Álgebra e Geometria Analítica.

No ensino médio atualmente não é abordado o conceito de que todo ponto pertencente a um segmento de reta pode ser escrito como uma combinação convexa dos extremos do segmento. E esse conceito é de suma importância para que se possa calcular a localização de pontos em um segmento dadas as suas proporções.

O conceito de conjunto convexo é visto no ensino médio de forma superficial, onde apenas a parte geométrica é abordada. E sabemos que convexidade é muito mais abrangente do que apenas uma mera comparação entre conjunto convexo e conjunto não-convexo. Como no ensino médio não é trabalhado o  $\mathbb{R}^n$ , nesse TCC apenas são utilizados o  $\mathbb{R}^2$  e o  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, explorando retas, planos, semiplanos e figuras espaciais.

A envoltória convexa é uma importante ferramenta para podermos relacionar um ponto e um triângulo, e relacionar um tetraedro e um ponto, enriquecendo assim o aprendizado do aluno ajudando o mesmo a entender melhor a Geometria Analítica no plano e no espaço oferecendo assim mais subsídios ao entendimento de Álgebra e Geometria.

Desde o século I A.C., quando os chineses deram os primeiros passos no estudo de sistemas lineares até hoje, o avanço nesse campo de estudo vem sendo bastante utilizado em muitos ramos do ensino. Praticamente todo o trabalho utiliza o assunto de sistemas lineares em sua resolução, fato que mostra a importância dessa área na matemática. Dentre esses assuntos, o conceito de hiperplano vem a colaborar com o aprendizado de Álgebra Linear e Geometria Analítica.



# Capítulo 1

## Conjuntos Convexos

### 1.1 Segmento de reta

Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $u, v \in E$ . O *segmento de reta* de extremidades  $u, v$  é o conjunto

$$[u, v] = \{(1 - t)u + tv; 0 \leq t \leq 1\}.$$

De fato, dado um segmento de reta  $\overline{PQ}$ , um ponto  $A \in \overline{PQ}$  e  $t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$ , temos que:

$$\overrightarrow{PA} = t\overrightarrow{PQ}$$

$$A - P = t(Q - P)$$

$$A = tQ + P - tP$$

$$A = (1 - t)P + tQ$$

mostrando assim que todo ponto  $A \in \overline{PQ}$  é localizado pela fórmula  $(1 - t)P + tQ$ , para todo  $t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$ . Em particular, dado um segmento de reta com extremidades nos pontos  $A, B \in \mathbb{R}^2$  onde  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$  qualquer ponto  $P \in \overline{AB}$  é da forma

$$P = (x_3, y_3) = ((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2),$$

para todo  $0 \leq t \leq 1$ .

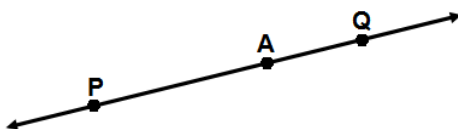
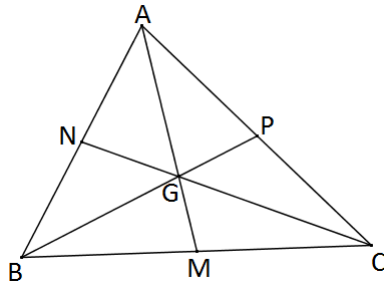


Figura 1.1: Segmento de reta no  $\mathbb{R}^2$

**Proposição 1.1** *Dado um triângulo qualquer com vértices nos pontos  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  e os pontos médios  $M, N$  e  $P$  dos lados  $\overline{BC}, \overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente, o ponto  $G$  em seu interior, intersecção das 3 medianas  $\overline{AM}, \overline{CN}$  e  $\overline{BP}$  é dado por:*

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

Figura 1.2: Baricentro  $G$  do triângulo  $ABC$ 

**Prova.** Sabemos que

$$M = \frac{B + C}{2},$$

$$N = \frac{A + B}{2}$$

e

$$P = \frac{A + C}{2}$$

e pela definição de segmento de reta temos que:

$$\begin{cases} G = (1-t)A + tM = (1-t)A + t\left(\frac{B+C}{2}\right) \\ G = (1-t)B + tP = (1-t)B + t\left(\frac{A+C}{2}\right) \\ G = (1-t)C + tN = (1-t)C + t\left(\frac{A+B}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = A - tA + \frac{tB}{2} + \frac{tC}{2} \\ G = B - tB + \frac{tA}{2} + \frac{tC}{2} \\ G = C - tC + \frac{tA}{2} + \frac{tB}{2} \end{cases}$$

$$3G = A + B + C - tA - tB - tC + tA + tB + tC$$

$$3G = A + B + C$$

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

**Exemplo 1.1** Em um segmento de reta  $\overline{PQ} \in \mathbb{R}^2$  com extremidades em  $P = (-2, 1)$  e  $Q = (6, 9)$  foram marcados os pontos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  de tal modo que  $\overline{PA} = \frac{1}{4}\overline{PQ}$  e  $\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{AQ}$ . Determine as coordenadas do ponto  $B$ :

**Resolução.** Primeiro devemos encontrar as coordenadas do ponto  $A$ .

$$A = (1-t)P + tQ, t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$$



$$(x_1, y_1) = (1 - t)(-2, 1) + t(6, 9), t = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = (1 - \frac{1}{4})(-2) + \frac{1}{4}6 = 0$$

$$y_1 = (1 - \frac{1}{4})1 + \frac{1}{4}9 = 3$$

$$A = (0, 3)$$

E finalmente encontramos as coordenadas do ponto  $B$ .

$$B = (1 - t)A + tQ, t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$$

$$x_2 = (1 - \frac{2}{3})0 + \frac{2}{3}6 = 4$$

$$y_2 = (1 - \frac{2}{3})3 + \frac{2}{3}9 = 7$$

$$B = (4, 7)$$

**Exemplo 1.2** Dado o segmento de reta  $\overline{AB} \in \mathbb{R}^2$ , onde  $A = (-1, -7)$  e  $B = (6, 7)$ , quais devem ser os valores de  $m$  e  $n$  para que os pontos  $C = (m, n)$  e  $D = (2m, 3)$  pertençam ao segmento de reta  $\overline{AB}$ .

**Resolução.** Se  $D$  pertence a  $\overline{AB}$ , então:

$$D = (1 - t)A + tB$$

$$(2m, 3) = (1 - t)(-1, -7) + t(6, 7)$$

$$(1 - t)(-7) + t7 = 3 \Rightarrow t = \frac{5}{7}$$

$$(1 - t)(-1) + t6 = 2m \Rightarrow \left(1 - \frac{5}{7}\right)(-1) + \frac{5}{7}6 = 2m \Rightarrow m = 2$$

De maneira análoga o valor  $n = -1$  é encontrado.

## 1.2 A convexidade no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

**Definição 1.1** Dado um espaço vetorial  $E$ . Um conjunto  $X \subset E$  chama-se convexo quando  $u, v \in X \Rightarrow [u, v] \subset X$ . (Ou seja: o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de  $X$  está contido em  $X$ .)

**Exemplo 1.3** A interseção  $X_1 \cap \dots \cap X_m$  de conjuntos convexos  $X_1, \dots, X_m \subset E$  é um conjunto convexo.

**Prova.** Dados os vetores  $u, v \in X_1 \cap \dots \cap X_m \Rightarrow u, v \in X_i, i = 1, \dots, m$ . Como cada um dos conjuntos  $X_i$  é convexo, podemos dizer que  $(1-t)u+tv \in X_1, \dots, X_m$  para qualquer  $t = [0, 1]$ , ou seja,  $(1-t)u+tv \in X_1 \cap \dots \cap X_m$  provando assim que  $X_1 \cap \dots \cap X_m$  é um conjunto convexo.

**Exemplo 1.4** Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \leq c\}$  é convexo em  $\mathbb{R}^2$ .

**Prova.** Dados dois elementos  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$   $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in X$  temos que:  $ax_1 + by_1 \leq c$ , e  $ax_2 + by_2 \leq c$ . Então temos que provar que o conjunto convexo  $(1-t)u_1 + tu_2/0 \leq t \leq 1 \subset X$ .

De fato, dado  $v = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$  temos que:

$$a[(1-t)x_1 + tx_2] + b[(1-t)y_1 + ty_2] \leq c \Rightarrow$$

$$(1-t)(ax_1 + by_1) + t(ax_2 + by_2) \leq (1-t)c + tc = c$$

provando assim que  $X$  é convexo.

**Exemplo 1.5** O conjunto  $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, c < y < d\}$  é convexo em  $\mathbb{R}^3$ .

**Prova.** Dados  $u = (x_1, y_1, z_1)$  e  $v = (x_2, y_2, z_2)$  onde  $u, v \in Y$ , devemos demonstrar que  $(1-t)u + tv \in Y$ :

De fato, como  $1-t$  e  $t$  não são negativos, temos que

$$a \leq x_1 \leq b$$

$$(1-t)a \leq (1-t)x_1 \leq (1-t)b$$

$$a \leq x_2 \leq b$$

$$ta \leq tx_2 \leq tb$$

E somando as duas inequações obtemos

$$(1-t)a + ta \leq (1-t)x_1 + tx_2 \leq (1-t)b + tb$$

$$a \leq (1-t)x_1 + tx_2 \leq b$$

. Analogamente temos que

$$c < y_1 < d$$

$$(1-t)c < (1-t)y_1 < (1-t)d$$

$$c < y_2 < d$$

$$tc < ty_2 < td$$

e mais uma vez somando-se as inequações obtemos

$$(1-t)c + tc < (1-t)y_1 + ty_2 < (1-t)d + td$$

$$c < (1-t)y_1 + ty_2 < d.$$

Para  $t = 0$  temos que  $c < y_1 < d$  e para  $t = 1$  temos que  $c < y_2 < d$ , finalizando assim a demonstração.

**Exemplo 1.6** O disco  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$  é um conjunto convexo.

**Prova.** Considerando  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$  elementos de  $D$ , sabemos que  $x_1^2 + y_1^2 \leq 1$  e  $x_2^2 + y_2^2 \leq 1$ . Para  $D$  ser convexo, devemos mostrar que  $((1-t)x_1 + tx_2)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2)^2 \leq 1$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade temos:

$$\begin{aligned} & ((1-t)x_1 + tx_2)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2)^2 = \\ &= x_1^2 - t^2x_1 + tx_1x_2 - tx_1^2 + t^2x_1^2 - t^2x_1x_2 + tx_1x_2 - t^2x_1x_2 + t^2x_2^2 + \\ & \quad + y_1^2 - t^2y_1 + ty_1y_2 - ty_1^2 + t^2y_1^2 - t^2y_1y_2 + ty_1y_2 - t^2y_1y_2 + t^2y_2^2 = \\ &= ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)t^2 + 2t(x_1(x_2 - x_1) + y_1(y_2 - y_1)) + (x_1^2 + y_1^2) \leq 1. \end{aligned}$$

O resultado acima é uma função quadrática do tipo  $f(t) = at^2 + bt + c$  onde  $a \geq 0$ . Do resultado,  $a = 0$  apenas se  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$  e assim obtemos  $f(t) = x_1^2 + y_1^2 \leq 1$ . Para o caso  $a > 0$ ,  $t$  assume qualquer valor no intervalo  $[0, 1]$  e substituindo na função  $f(t)$  temos que  $f(0) = x_1^2 + y_1^2 \leq 1$  e que  $f(1) = x_2^2 + y_2^2 \leq 1$ , assim podendo concluir que  $f(t) \leq 1$  para qualquer  $0 \leq t \leq 1$ , ou seja,  $(1-t)u + tv \in D$  provando que  $D$  é convexo.

**Exemplo 1.7** Seja  $X \subset E$  convexo. Se  $r, s, t$  são números reais  $\geq 0$  tais que  $r + s + t = 1$  e  $u, v, w \in X$ , então  $ru + sv + tw \in X$ .

**Prova.** Sabendo que os vetores  $u, v$  e  $w$  pertencem ao conjunto convexo  $X$ , temos que  $u_2 = (1-t)v + tu$ , tomando  $x = \frac{r}{r+s}$  e substituindo temos:

$$u_2 = \left[1 - \left(\frac{r}{r+s}\right)\right]v + \left(\frac{r}{r+s}\right)u$$

$$u_2 = \left(\frac{s}{r+s}\right)v + \left(\frac{r}{r+s}\right)u$$

$$u_2 = \frac{ru + sv}{r+s} \in X.$$

Por outro lado, sabendo que  $1-t = r+s$  podemos dizer que  $(1-t)u_2 + tw = (r+s)u_2 + tw \in X$  então

$$(r+s)\frac{ru + sv}{r+s} + tw = ru + sv + tw \in X.$$

### 1.3 Cone

**Definição 1.2** Um subconjunto  $C$  do espaço vetorial  $E$  chama-se um cone quando, para todo  $v \in C$  e todo  $t > 0$ , tem-se  $tv \in C$ .

**Exemplo 1.8** O Cone usual  $C$  do  $\mathbb{R}^3$  com equação  $z^2 = x^2 + y^2$  é um exemplo de cone de acordo com a definição 1.2.

Dado um vetor  $v = (x, y, z) \in C$  devemos mostrar que  $tv \in C$ ,  $t > 0$ .  
De fato, para que  $tv \in C$ , temos que:

$$(tz)^2 = (tx)^2 + (ty)^2$$

$$(tz)^2 = t^2x^2 + t^2y^2$$

$$(tz)^2 = t^2(x^2 + y^2)$$

$$tz^2 = t(x^2 + y^2)$$

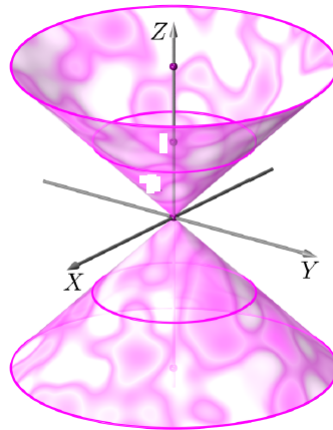


Figura 1.3: Cone usual no  $\mathbb{R}^3$

**Exemplo 1.9** Dado o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , toda semirreta partindo da origem é um cone.

**Prova.** Por simplicidade vamos utilizar o primeiro quadrante, pois com os outros quadrantes a demonstração se dá de maneira análoga. Dado o subconjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y > 0\}$ ,  $v \in C$  é um vetor cujo suas coordenadas são positivas e dado um  $t > 0$ ,  $tv$  também terá suas coordenadas positivas, ou seja,  $tv \in C$ .

Podemos generalizar esse resultado para o  $\mathbb{R}^n$ , onde um conjunto de vetores  $v \in \mathbb{R}^n$  que têm exatamente  $k$  coordenadas positivas ( $0 \leq k \leq n$ ) é um cone. Basta tomarmos um vetor  $v$  com  $k$  coordenadas positivas,  $tv$  terá a mesma quantidade  $k$  de coordenadas positivas e também será elemento de  $C$ .

**Exemplo 1.10** O conjunto das funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  quem assumem valores negativos em todos os pontos de um subconjunto fixado  $Y \subset X$  é um cone em  $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ .

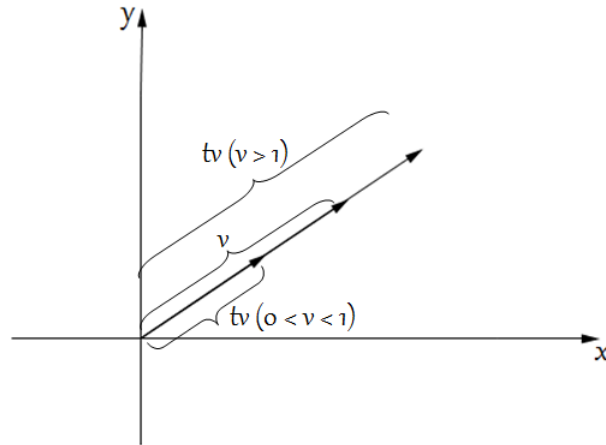


Figura 1.4: Um tipo de cone no  $\mathbb{R}^2$

**Prova.** De maneira análoga ao exemplo anterior, sabendo que  $f(y) < 0$  para todo  $y \in Y$  e  $t > 0$ , então  $tf(y)$  tem o mesmo sinal de  $f(y)$ , ou seja,  $tf(y) < 0$  para todo  $y \in Y$  mostrando assim que  $tf$  também pertence a  $Y$  e portanto, é um cone.

**Exemplo 1.11** *A interseção e a reunião de uma família qualquer de cones são ainda cones.*

**Prova.** Dado um vetor  $v \in \bigcap C_n$ , então  $v \in C_n$  para qualquer valor de  $n$ . Como cada  $C_n$  é um cone, então  $tv \in C_n$  e também  $tv \in \bigcap C_n$ . Como  $v, tv \in \bigcap C_n$ , podemos afirmar que  $\bigcap C_n$  também é um conjunto convexo. De forma análoga, dado  $v \in \bigcup C_n$ . Isso quer dizer que  $v \in C_n$  para algum cone dessa família. Como  $v \in C_n$  e  $C_n$  é um cone, então  $tv \in C_n$  e também  $tv \in \bigcup C_n$ , mostrando assim que a reunião também é um cone.

**Proposição 1.2** *Um cone  $C \in E$  é um subconjunto convexo se, e somente se,  $u, v \in C \Rightarrow u + v \in C$ .*

**Prova.** Para que o conjunto  $C$  seja um conjunto convexo, temos que mostrar que  $w = (1 - t)u + tv \in C$  para  $0 \leq t \leq 1$  e  $u, v \in C$ . Fazendo  $t = \frac{1}{2}$ ,  $w = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \Rightarrow 2w = u + v \in C$ . Reciprocamente, supondo que dados  $u, v \in C \Rightarrow u + v \in C$  e  $t \in [0, 1]$  temos que  $t, 1 - t > 0$ . Com base nisso podemos afirmar que  $tv, (1 - t)u \in C$ . De acordo com a hipótese, podemos concluir que  $(1 - t)u + tv \in C$ , mostrando assim que  $C$  é convexo.



# Capítulo 2

## Envoltória Convexa

### 2.1 Combinação Convexa

**Definição 2.1** Dado um espaço vetorial  $E$ , um conjunto convexo  $X \subset E$  e os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k \in X$  a expressão  $t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$ , onde  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$  e  $t_1 + \dots + t_k = 1$  chama-se uma combinação afim dos vetores  $v_1, \dots, v_k$ . Em particular, caso  $t_1, \dots, t_k \geq 0$  a expressão  $t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$  chama-se uma combinação convexa dos vetores  $v_1, \dots, v_k$ .

**Exemplo 2.1** Dados  $u_1, u_2$  e  $u_3 \in \mathbb{R}^2$ , onde  $u_1 = (-3, -2)$ ,  $u_2 = (1, 3)$  e  $u_3 = (4, -2)$ , determine se os vetores  $v_1 = (2, 1)$ ,  $v_2 = (-1, 0)$  e  $v_3 = (3, 2)$  são combinações convexas de  $u_1, u_2$  e  $u_3$ :

**Resolução.** Cada vetor  $v_i \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3$  será combinação convexa de  $u_1, u_2$  e  $u_3$ , se existirem escalares  $r, s, t \in \mathbb{R}$  onde  $r, s, t \geq 0$  e  $r + s + t = 1$ . Caso algum  $r, s$  ou  $t$  seja negativo, então  $v_1$  será combinação afim dos vetores  $u_1, u_2$  e  $u_3$ . Para  $v_1$  ser combinação convexa de  $u_1, u_2$  e  $u_3$  temos que:

$$\begin{aligned}v_1 &= r u_1 + s u_2 + t u_3 \\(2, 1) &= r(-3, -2) + s(1, 3) + t(4, -2) \\&\begin{cases} -3r + s + 4t = 2 \\ -2r + 3s - 2t = 1 \\ r + s + t = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema encontramos o conjunto solução

$$S_1 = \left\{ \frac{1}{35}, \frac{21}{35}, \frac{13}{35} \right\},$$

como já consideramos que  $r + s + t = 1$  e a solução é toda positiva, então  $v_1$  é combinação convexa dos vetores  $u_1, u_2$  e  $u_3$ .

Para  $v_2$  temos como conjunto solução

$$S_2 = \left\{ \frac{19}{35}, \frac{14}{35}, \frac{2}{35} \right\},$$

mostrando que é combinação convexa e para  $v_3$ , temos como conjunto solução

$$S_3 = \left\{ -\frac{7}{35}, \frac{28}{35}, \frac{14}{35} \right\}.$$

Como o valor de  $r < 0$ , não podemos dizer que  $v_3$  é uma combinação convexa dos vetores  $u_1, u_2$  e  $u_3$  e sim uma combinação afim.

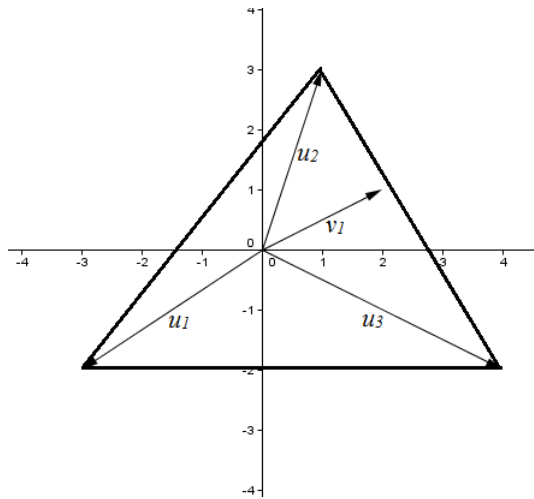


Figura 2.1:  $v_1$  no interior do triângulo

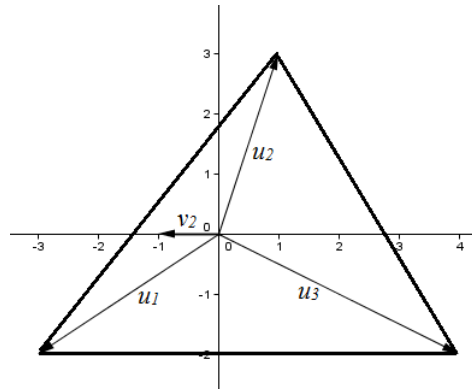


Figura 2.2:  $v_2$  no interior do triângulo

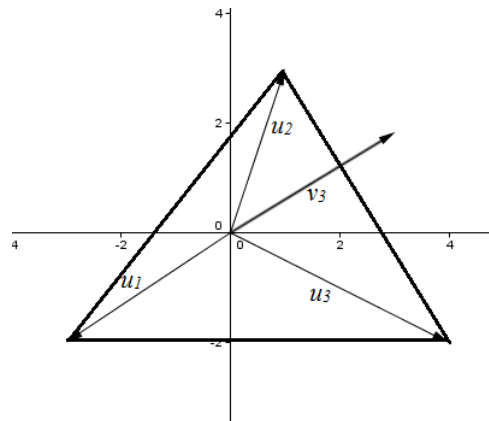


Figura 2.3:  $v_1$  no exterior do triângulo

**Proposição 2.1** *Se o conjunto  $X \subset E$  é convexo, então toda combinação convexa de vetores  $v_1, \dots, v_k \in X$  ainda pertence a  $X$ .*

**Prova.** Pelo Princípio de Indução temos que:

Para  $k = 2$  obtemos a definição de conjunto convexo e o caso  $k = 3$  foi mostrado no exemplo anterior. Supondo que é verdade para  $k = n$ , basta provar que o resultado vale para  $k = n + 1$ , ou seja, *toda combinação convexa de  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  também está em  $X$ .* Escrevendo uma



combinação convexa do tipo e sabendo que  $t_1 + \dots + t_n + t_{n+1} = 1 \Rightarrow 1 - t_{n+1} = t_1 + \dots + t_n$ , temos:

$$\begin{aligned} v &= t_1 v_1 + \dots + t_n v_n + t_{n+1} v_{n+1} \\ v &= (1 - t_{n+1}) \frac{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n}{1 - t_{n+1}} + t_{n+1} v_{n+1} \\ v &= (1 - t_{n+1}) \frac{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n}{t_1 + \dots + t_n} + t_{n+1} v_{n+1}. \end{aligned}$$

Sabendo que o vetor

$$w = \frac{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n}{t_1 + \dots + t_n}$$

é uma combinação convexa dos vetores  $v_1, \dots, v_n$ , podemos afirmar que  $w \in X$  e como  $X$  é um conjunto convexo, então  $v = (1 - t_{n+1})w + t_{n+1}v_{n+1}$  é elemento de  $X$ .

**Proposição 2.2** *Dado um subconjunto  $X$  no espaço vetorial  $E$ , o conjunto  $C(X)$  das combinações convexas  $t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$  ( $t_i \geq 0, \sum t_i = 1$ ) dos elementos de  $X$ , é um conjunto convexo.*

**Prova.** Dados os vetores  $u, v \in C(X)$ , então

$$\begin{aligned} u &= a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \text{ onde } \sum_{i=1}^n a_i = 1 \text{ e } u_1, \dots, u_n \in X \\ v &= b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \text{ onde } \sum_{i=1}^n b_i = 1 \text{ e } v_1, \dots, v_n \in X \end{aligned}$$

Para que  $C(X)$  seja um conjunto convexo,  $w = (1-t)u + tv$ , onde  $u, v, w \in C(X)$  e  $0 \leq t \leq 1$ , então

$$(1-t)u + tv = (1-t) \sum_{i=1}^n a_i u_i + t \sum_{i=1}^n b_i v_i = \sum_{i=1}^n (1-t)a_i u_i + \sum_{i=1}^n t b_i v_i,$$

onde a soma dos coeficientes nos dois somatórios é

$$\sum_{i=1}^n (1-t)a_i + \sum_{i=1}^n t b_i = (1-t) \sum_{i=1}^n a_i + t \sum_{i=1}^n b_i = (1-t) + t = 1$$

mostrando assim que  $(1-t)u + tv$  é uma combinação convexa que está em  $C(X)$ .

É fácil ver que  $X \subset C(X)$ . Dado um vetor  $v_i \in X$  onde  $i = 1, 2, \dots, n$  e como  $\sum t_i = 1$ , o vetor  $v_i = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_n v_n = a_i v_i$  para  $a_i = 1$  e  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_{n+1} = \dots = a_n = 0$

## 2.2 A envoltória convexa no $\mathbb{R}^2$

**Teorema 2.1** *Sejam um espaço vetorial  $E$  e  $X \subset E$ . O conjunto  $C(X)$ , cujo os elementos são todas as combinações convexas do conjunto  $X$ , é o menor subconjunto convexo de  $E$  que contém  $X$  e chama-se envoltória convexa do conjunto  $X$ .*

Vamos agora a algumas aplicações do conceito de envoltória convexa no  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposição 2.3** *A envoltória convexa dos pontos  $A, B$  e  $C \in \mathbb{R}^2$ , não colineares, é o triângulo com vértices nesses pontos.*

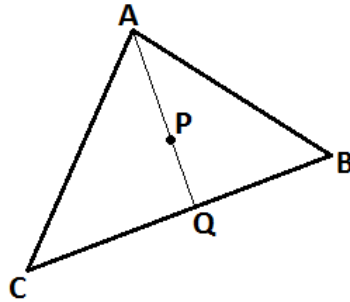


Figura 2.4: Envoltória convexa dos pontos  $A, B$  e  $C$ .

**Prova.** Dado um ponto  $P \in ABC$  e o ponto  $Q$  tal que  $Q = \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{BC}$ . Como o ponto  $Q \in \overline{BC}$ , temos que

$$Q = bB + cC \quad (2.1)$$

onde  $b, c \geq 0$  e  $b + c = 1$ . Por outro lado como  $P \in \overline{AQ}$ ,

$$P = aA + qQ, \quad (2.2)$$

onde  $a, q \geq 0$  e  $a + q = 1$ . Substituindo, temos que

$$P = aA + q(bB + cC) \Rightarrow P = \underbrace{a}_x A + \underbrace{qb}_y B + \underbrace{qc}_z C.$$

Assim,

$$x + y + z = a + qb + qc = a + q(b + c) = a + q(1) = 1$$

e fica demonstrado que o triângulo é a envoltória convexa de três pontos não-colineares no espaço  $\mathbb{R}^2$ .

O resultado do exemplo acima pode ser aplicado quando queremos saber a posição relativa entre um ponto e um triângulo, podendo o ponto ser interior, exterior ou pertencer a um dos lados do triângulo.

**Definição 2.2** *Dado um triângulo com vértices nos pontos  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ , um ponto qualquer  $P \in \mathbb{R}^2$  e a combinação (afim ou convexa)  $P = aA + bB + cC$  onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a + b + c = 1$ . O ponto  $P$  será:*

- i) Interior ao triângulo caso  $a, b$  e  $c \geq 0$
- ii) Exterior ao triângulo caso algum  $a, b$  ou  $c \leq 0$  e
- iii) Pertencer a um dos lados do triângulo caso for uma combinação convexa dos vértices  $A, B$  e  $C$  e  $a, b$  ou  $c = 0$ , com  $a, b$  e  $c$  não-negativos.

**Exemplo 2.2** Dado um triângulo  $ABC \in \mathbb{R}^2$  com vértices nos pontos  $A = (-2, 0)$ ,  $B = (0, 4)$  e  $C = (3, 1)$ , determine a posição relativa entre os pontos  $M = (-1, 1)$ ,  $P = (2, 3)$  e  $Q = (-1, 2)$  e o triângulo  $ABC$ .

**Resolução.** Escrevemos a combinação  $M = aA + bB + cC$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a + b + c = 1$  e assim temos que

$$(-1, 1) = a(-2, 0) + b(0, 4) + c(3, 1)$$

$$\begin{cases} -2a + 0b + 3c = -1 \\ 0a + 4b + c = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema linear encontramos como solução  $a = \frac{2}{3}$ ,  $b = \frac{2}{9}$  e  $c = \frac{1}{9}$ , como  $a, b, c \geq 0$ , a combinação é convexa e, por consequência disso,  $M$  é um ponto no interior ao triângulo  $ABC$ .

De maneira análoga, para o ponto  $P$  escrevemos a combinação  $P = aA + bB + cC$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a + b + c = 1$  e temos que:

$$(2, 3) = a(-2, 0) + b(0, 4) + c(3, 1)$$

$$\begin{cases} -2a + 0b + 3c = 2 \\ 0a + 4b + c = 3 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

Esse sistema tem como solução  $a = -\frac{1}{6}$ ,  $b = \frac{11}{18}$  e  $c = \frac{5}{9}$ , como  $a \leq 0$ , o ponto  $P$  é uma combinação afim dos vértices do triângulo  $ABC$  e portanto, exterior ao triângulo.

Para o ponto  $Q = (-1, 2)$ ,  $Q = aA + bB + cC$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a + b + c = 1$ , temos que:

$$(-1, 2) = a(-2, 0) + b(0, 4) + c(3, 1)$$

$$\begin{cases} -2a + 0b + 3c = -1 \\ 0a + 4b + c = 2 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

A solução desse sistema é  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{2}$  e  $c = 0$ . Como  $c = 0$ , o ponto  $Q$  é combinação convexa dos vértices  $A$  e  $B$ , ou seja,  $Q \in \overline{AB}$ . Analogamente, caso  $b = 0 \Rightarrow Q \in \overline{AC}$  e caso  $a = 0 \Rightarrow Q \in \overline{BC}$ .

## 2.3 A envoltória convexa no $\mathbb{R}^3$ .

**Proposição 2.4** A envoltória convexa dos pontos  $A, B, C$  e  $D \in \mathbb{R}^3$ , onde três desses pontos não são colineares e os quatro pontos não são nem colineares nem coplanares, é o tetraedro com vértices nesses pontos.

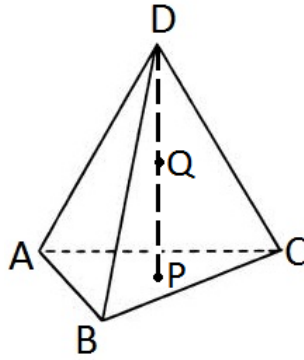


Figura 2.5: Envoltória convexa dos pontos  $A, B, C$  e  $D$ .

Demonstração: Dado um ponto  $P \in ABC$  e o ponto  $Q$  tal que  $Q = \overleftrightarrow{DP} \cap ABC$ . Como  $Q \in \overline{DP}$ , sabemos que

$$Q = dD + pP \quad (2.3)$$

onde  $d, p \in \mathbb{R}$ ,  $d, p \geq 0$  e  $d + p = 1$ . Utilizando o resultado do exemplo anterior, temos que

$$P = aA + bB + cC \quad (2.4)$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a, b, c \geq 0$  e  $a + b + c = 1$ . Substituindo 2.4 em 2.3:

$$Q = dD + p(aA + bB + cC) \Rightarrow Q = \underbrace{d}_r D + \underbrace{pa}_s A + \underbrace{pb}_t B + \underbrace{pc}_u C$$

$$r + s + t + u = d + p(a + b + c) = d + p(1) = 1$$

Definição: Dado um tetraedro com vértices nos pontos  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ , um ponto qualquer  $P \in \mathbb{R}^3$  e a combinação (afim ou convexa)  $P = aA + bB + cC + dD$  onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a + b + c + d = 1$ . O ponto  $P$  será:

- i) Interior ao tetraedro caso  $a, b, c$  e  $d \geq 0$ ;
- ii) Exterior ao tetraedro caso algum  $a, b, c$  ou  $d \leq 0$ ;
- iii) Pertencer a uma das faces do tetraedro caso for uma combinação convexa dos vértices  $A, B, C$  e  $D$  e para algum  $a, b, c$  ou  $d = 0$ , com  $a, b, c$  e  $d$  não-negativos ou
- iv) Pertencer a uma das arestas caso for uma combinação convexa dos vértices  $A, B, C$  e  $D$  e exatamente dois dos escalares  $a, b, c$  e  $d = 0$ , com  $a, b, c$  e  $d$  não-negativos.

Exemplo: Dado um tetraedro  $ABCD \in \mathbb{R}^3$  com vértices nos pontos  $A = (-1, 4, 2)$ ,  $B = (5, -2, 1)$ ,  $C = (-2, -3, 0)$  e  $D = (2, -1, 6)$ . Verifique a posição relativa entre os pontos  $M = \left(\frac{4}{5}, -\frac{11}{15}, \frac{11}{5}\right)$ ,  $N = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)$ ,  $P = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$  e  $Q = \left(-1, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$  e o tetraedro:

Resolução: Escrevemos a combinação  $M = aA + bB + cC + dD$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a + b + c + d = 1$  e assim temos que

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{11}{15}, \frac{11}{5}\right) = a(-1, 4, 2) + b(5, -2, 1) + c(-2, -3, 0) + d(2, -1, 6)$$

obtendo assim o sistema linear

$$\begin{cases} -a + 5b - 2c + 2d = \frac{4}{5} \\ 4a - 2b - 3c - d = -\frac{11}{15} \\ 2a + b + 6d = \frac{11}{5} \\ a + b + c + d = 1 \end{cases}$$

cuja solução é  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{1}{5}$ ,  $c = \frac{2}{5}$  e  $d = \frac{7}{15}$ , como todos os escalares  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d \geq 0$ , concluímos que o ponto  $M$  é interior ao tetraedro  $ABCD$ .

De maneira análoga o ponto  $N$  tem como solução  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ ,  $c = -\frac{1}{8}$  e  $d = \frac{3}{8}$  e como  $c < 0$ , concluímos que  $N$  é um ponto exterior ao tetraedro  $ABCD$ . Já o ponto  $P$  admite como solução  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  e  $d = \frac{2}{3}$  concluindo assim que  $P \in \overline{AD}$ . E por último, o ponto  $Q$  tem como solução  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = 0$ ,  $c = \frac{1}{2}$  e  $d = \frac{1}{6}$  mostrando assim que  $Q \in \overline{BD}$ .



# Capítulo 3

## Sistemas Lineares

O sistema linear de  $m$  equações a  $n$  incógnitas

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

possui uma solução  $(x_1, \dots, x_n)$  se, e somente se, o vetor  $b = (b_1, \dots, b_m)$  é combinação linear dos vetores-coluna

$$\begin{aligned}v_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \\&\vdots \\v_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})\end{aligned}$$

da matriz  $a = [a_{ij}]$ . Com efeito, estas equações significam que

$$b = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n.$$

Em particular, se os vetores-coluna  $v_1, \dots, v_n$  gerarem  $\mathbb{R}^m$ , o sistema possui solução, seja qual for o segundo membro  $b$ .

Substituindo o vetor  $b$  temos que:

$$\begin{aligned}b &= (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \\&= (a_{11}x_1, \dots, a_{m1}x_1) + \cdots + (a_{1n}x_n, \dots, a_{mn}x_n) \\&= x_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + \cdots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})\end{aligned}$$

### 3.1 Hiperplano

**Proposição 3.1** *Sejam  $a_1, \dots, a_n$  números reais. O conjunto  $H$  de todos os vetores  $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tais que*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

*é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ . No caso desinteressante em que  $a_1 = \cdots = a_n = 0$ , o subespaço  $H$  é todo o  $\mathbb{R}^n$ . Se, ao contrário, pelo menos um dos  $a_i$  é  $\neq 0$ ,  $H$  chama-se um hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que passa pela origem.*

**Prova.** Para que  $H$  seja um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$  as três condições a seguir devem ser verdadeiras:

(i) O vetor nulo pertence a  $H$ .

(ii) Dados quaisquer  $u, v \in H$ , a soma  $u + v \in H$ .

(iii) Dado um vetor  $u \in H$  e  $t \in \mathbb{R}$  então  $tu \in H$

Para provar (i) basta substituir o vetor nulo  $0 = (0, \dots, 0)$  em

$$\begin{aligned} a_1x_1 + \dots + a_nx_n &= 0 \\ a_10 + \dots + a_n0 &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Dados os vetores  $u = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $v = (y_1, \dots, y_n) \in H$ , o vetor  $u + v$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} u + v &= a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_1y_1 + \dots + a_ny_n = \\ &= a_1(x_1 + y_1) + \dots + a_n(x_n + y_n) \in H \end{aligned}$$

(iii) Dado o vetor  $u = (x_1, \dots, x_n) \in H$  e  $t \in \mathbb{R}$ , então:

$$tu = a_1tx_1, \dots, a_ntx_n = t(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) = t0 = 0 \in H$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $a_1 \neq 0$ . E então, o conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \dots, 0\right), \left(-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, 0, \dots, 0\right), \dots, \left(-\frac{a_n}{a_1}, 0, \dots, 0, 1\right) \right\}$$

é uma base para o hiperplano  $H$ , portanto  $\dim(H) = n - 1$ .

Se  $n = 1$  tem-se que  $H = \{0\}$ ;

Se  $n = 2$  tem-se que  $H$  é uma reta que passa pela origem;

Se  $n = 3$  tem-se que  $H$  é um plano que passa pela origem.

**Exemplo 3.1** O conjunto  $H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x - y = 0\}$  é um hiperplano no  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, uma reta que passa pela origem.

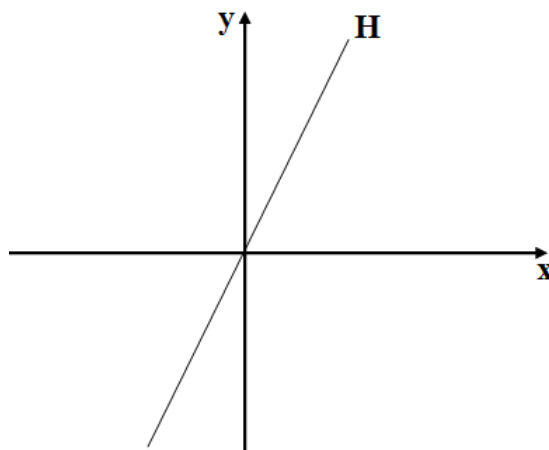


Figura 3.1: Hiperplano  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x - y = 0\}$ .

É fácil notar que dado um hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^2$ , dois vetores  $u = (x_1, y_1)$ ,  $v = (x_2, y_2) \in H$  implica que o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 = 0 \end{cases}$$



onde  $a, b \in \mathbb{R}$ , é possível e indeterminado. O sistema é possível pois admite pelo menos a solução trivial e é indeterminado pois todo hiperplano no  $\mathbb{R}^2$  é uma reta, e ela pode ser considerada como as infinitas soluções de um sistema linear. Caso fosse determinado, a solução seria apenas a trivial e o subespaço  $H$  seria todo o  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 3.2** O conjunto  $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x + y - z = 0\}$  é um hiperplano no  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, um plano que passa pela origem.

**Exemplo 3.3** O par de pontos  $A, B \in \mathbb{R}^2$  onde  $A = (-2, 5)$  e  $B = (-6, 15)$  pertencem a um mesmo hiperplano  $H_1$ , enquanto que o par de pontos  $C, D \in \mathbb{R}^2$ ,  $C = (2, 3)$  e  $D = (5, 6)$  não pertencem a um mesmo hiperplano.

**Demonstração.** O sistema

$$\begin{cases} a \cdot (-2) + b \cdot 5 = 0 \\ a \cdot (-6) + b \cdot 15 = 0 \end{cases}$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  é possível e indeterminado e podemos concluir que  $H_1$  é um hiperplano, enquanto que o sistema

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b \cdot 3 = 0 \\ a \cdot 5 + b \cdot 6 = 0 \end{cases}$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  admite apenas a solução trivial, ou seja,  $C$  e  $D$  não pertencem a um mesmo hiperplano.

**Exemplo 3.4** Os pontos  $A = (1, -2, 0)$ ,  $B = (2, -1, -3)$  e  $C = (-1, 1, 1)$  pertencem a um mesmo hiperplano no  $\mathbb{R}^3$ .

**Demonstração.** De maneira análoga ao exemplo anterior, o sistema

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 0 = 0 \\ a \cdot 2 + b \cdot (-1) + c \cdot (-3) = 0 \\ a \cdot (-1) + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

admite infinitas soluções no  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, é um plano que contém a origem e portanto podemos afirmar que é um hiperplano.

**Exemplo 3.5** Os pontos  $C = (2, 0, 1)$ ,  $D = (3, 1, -2)$  e  $E = (0, 1, 5)$  não pertencem a um mesmo hiperplano no  $\mathbb{R}^3$ .

**Demonstração.** De fato, o sistema

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 0 \\ a \cdot 3 + b \cdot 1 + c \cdot (-2) = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 5 = 0 \end{cases}$$

admite apenas a solução trivial, ou seja, não é um hiperplano.



# Capítulo 4

## Simetria e convexidade

**Definição 4.1** Diz-se que um subconjunto  $X$  de um espaço vetorial  $E$  é simétrico quando  $v \in X \Rightarrow -v \in X$ .

**Exemplo 4.1** O conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^3\}$  é simétrico.

**Demonstração.** Dado  $u = (x, x^3) \in X$ ,  $-u = (-x, (-x)^3) = (-x, -x^3) \in X$ .

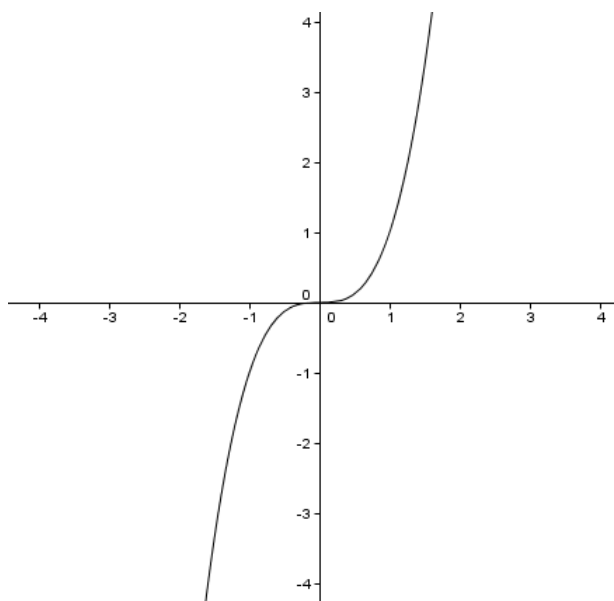


Figura 4.1: Conjunto simétrico  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^3\}$ .

**Exemplo 4.2** Dado um subconjunto simétrico  $X$  de um espaço vetorial  $E$ , um cone convexo simétrico e não-vazio é um subespaço vetorial de  $E$ .

**Demonstração.** Sabendo que  $X$  é não-vazio, seja  $v \in X$ . Como  $X$  é simétrico,  $-v \in X$ . Como  $X$  é convexo,  $\frac{1}{2}(v) + \frac{1}{2}(-v) = 0 \in X$ . Agora, dados  $u, v \in X$ . Como  $X$  é convexo, temos que  $w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in X$ . Mas como  $X$  é um cone,  $2w = u + v \in X$ . Finalmente, dado  $u \in X$ , se  $\alpha > 0$ , tem-se que  $\alpha u \in X$  pois sabemos que  $X$  é um cone. Se  $\alpha < 0$ , então  $(-\alpha)u \in X$  (pois  $X$  é um cone e  $-\alpha > 0$ ) e então  $-(-\alpha u) = \alpha u \in X$ , pois sabemos que  $X$  também é simétrico e por último, se  $\alpha = 0$ , já vimos que  $\alpha u \in X$ .

**Exemplo 4.3** Considerando o espaço vetorial  $E = \mathbb{R}^2$ , o primeiro quadrante é um cone convexo, mas não simétrico.

**Demonstração.** De fato, dados  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , como  $u$  tem suas coordenadas positivas, para qualquer  $\alpha > 0$ ,  $\alpha u$  também terá suas coordenadas positivas, ou seja,  $\alpha u$  pertence ao primeiro quadrante. Agora, para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , dado  $w = (1-t)u + tv$ , tanto  $(1-t)u$  quanto  $tv$  terão suas coordenadas positivas e sua soma também, ou seja, o primeiro quadrante do  $\mathbb{R}^2$  é um cone convexo, mas não é simétrico, pois  $-u$  tem suas coordenadas negativas, sendo assim do terceiro quadrante.

Também temos casos em que um cone é simétrico mas não convexo, como por exemplo a união dos dois eixos coordenados do plano.

**Proposição 4.1** O subespaço vetorial gerado por um cone convexo  $C \subset E$  é o conjunto das diferenças  $u - v$ , onde  $u, v \in C$ .

**Demonstração.** Seja  $w$  pertencente ao subespaço gerado por  $C$ , ou seja,  $w \in S(C)$ . Então  $w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$  para todo  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $w_1, w_2, \dots, w_n$  estão em  $C$ . Suponhamos que  $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$  e  $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n < 0$ . Sejam  $u = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k$  e  $v = -a_{k+1} w_{k+1} - a_{k+2} w_{k+2} - \dots - a_n w_n$ , fica claro que  $w = u - v$ . Agora vamos mostrar que  $u, v \in C$ .

De fato, como  $C$  é convexo

$$u_1 = \frac{a_1 w_1 + \dots + a_k w_k}{a_1 + \dots + a_k} \in C$$

(note que a soma dos coeficientes é 1 e todos eles são positivos). mas como  $C$  é um cone,

$$(a_1 + \dots + a_k)u_1 \in C$$

isto é,  $u \in C$ . De forma análoga, mostra-se que  $v$  também está em  $C$ . Com isso mostramos que  $S(C)$  está contido no conjunto das diferenças  $u - v$  em que  $u, v \in C$ . Como todas as diferenças têm de estar em  $S(C)$ , concluímos que os dois conjuntos são iguais.

**Exemplo 4.4** O conjunto  $C = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$  é um cone convexo e o subespaço gerado por  $C$  é o conjunto das diferenças  $u - v$ , onde  $u, v \in C$ .

**Demonstração.** Primeiro vamos mostrar que  $C$  é um cone convexo.

Dado  $v = (x, x) \in C$  e  $t > 0$ , temos que  $tv = (tx, tx) \in C$ , ou seja,  $C$  é um cone. Agora dados  $v_1 = (x_1, x_1)$  e  $v_2 = (x_2, x_2) \in C$ ,  $w = (1-t)v_1 + tv_2$  para  $0 \leq t \leq 1$ ,  $w = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)x_1 + tx_2) \in C$  e assim, temos que  $C$  é convexo. Sabemos que  $S(C)$  é o conjunto das combinações lineares dos elementos de  $C$ , ou seja,

$$S(C) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i,$$

onde  $v_1, \dots, v_n \in C$  e  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Qualquer elemento de  $S(C)$  pode ser escrito na forma  $(x, x) = (x+1, x+1) - (1, 1)$ .

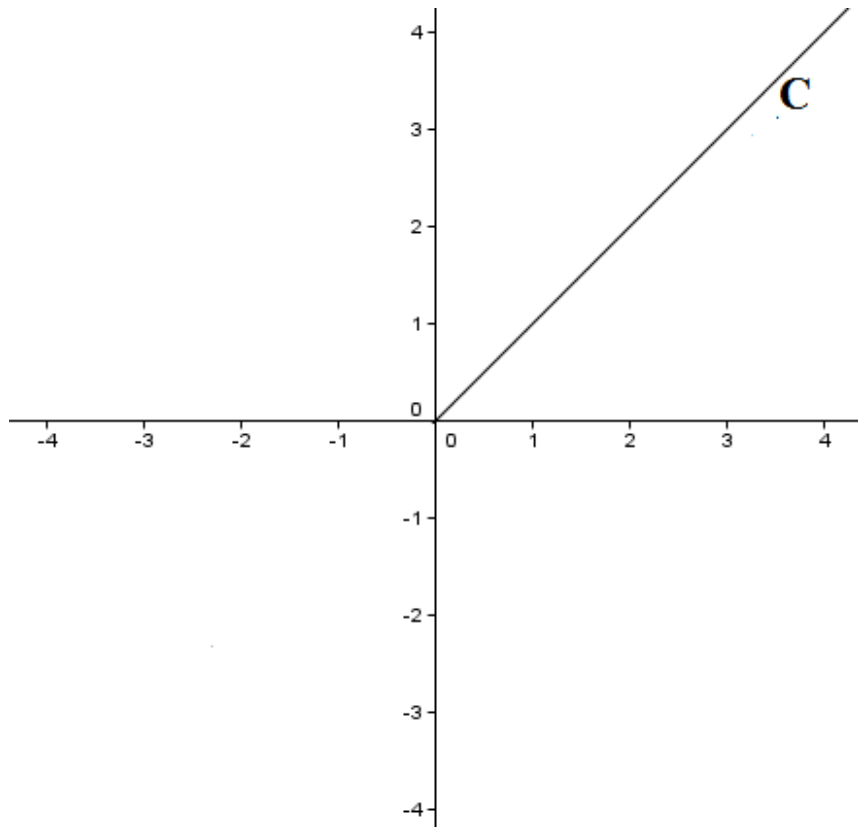


Figura 4.2: Cone convexo  $C = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$ .

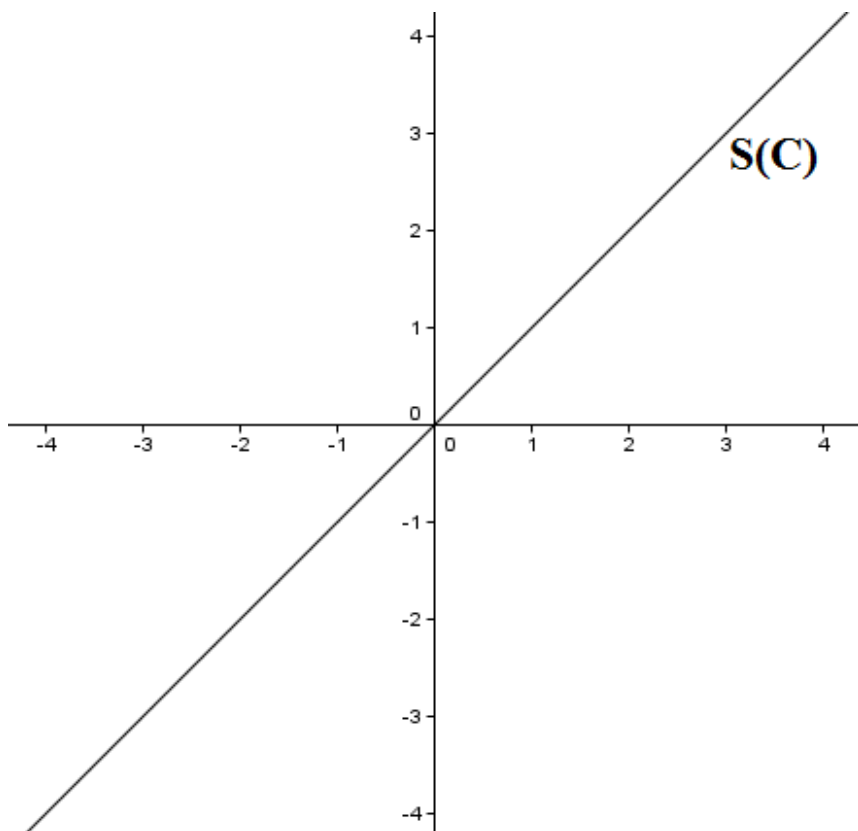


Figura 4.3: Subespaço gerado pelo cone convexo  $C = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$ .

# REFERÊNCIAS

AZEVEDO FILHO, M. F. *Geometria analítica e Álgebra Linear*. Fortaleza : Edições Livro Técnico, 2003.

COSTA, B. *Álgebra linear*. São Paulo: Harbra, 1986.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2010.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. (Coleção matemática universitária).

LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*. São Paulo: Makron Books, 1994. - (Coleção Schaum).

TEIXEIRA, R. C. *Álgebra Linear*. Exercícios e soluções. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012. (Coleção matemática universitária)